Matemática Básica

Carlos Salinas

10 de febrero de 2016

Índice general

Estas notas están basadas, en gran parte, de libros publicados por Carlos Ivorra en su página personal `https://www.uv.es/ivorra/`. Aquí encontraras teoremas y discursos copiados de sus libros en álgebra, análisis, geometría, y topología. No tomo crédito algúno por el contenido de este documento.

1 Análisis

1.1. Los números reales

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales tiene una presentación geométrica: en una recta cualquiera, seleccionamos arbitariamente dos de sus puntos, P_0 y P_1 y, a partir de ahí, a cada número racional $r = m/n$ le asignamos el punto P_r que resulta de dividir el segmento $\overline{P_0 P_1}$ and

2 Geometría

2.1. La geometría absoulta

En este capítulo y los siguientes nos ocuparemos de formalizar en el seno de la teoría de conjuntos la geometría intuitiva, es decir, la geometría con la que interpretamos nuestras percepciones que, como se sabe, no coinciden con la geometría que los físicos usan para describir el espacio físico. Podemos decir que lo que vamos a estudiar es el *espacio*. No podemos definir este concepto, pero todos tenemos imagen intuitiva del mismo.

La primera aproximación a la caracterización matemática del espacio será considerar al espacio como un conjunto $\mathbb{E}$ a cuyos elementos llamaremos *puntos*. Un punto es una posición en el espacio, carente de toda extensión.

Hay dos conceptos más que se encuentran al mismo nivel elemental que el concepto de punto. Se trata de los conceptos de *recta* y *plano*. De nuevo es imposible definir la característica que diferencia a una línea recta de una línea curva o a una superficie plana de una superficie curva, pero intuitivamente todos sabemos distinguir las rectas y los planos de las restantes curvas y superficies.

Axiomas de incidencia

Definición 1. Una *geometría de Hilbert* está formada por un conjunto $\mathbb{E}$ al que llamaremos *espacio*, y a cuyos elementos llamaremos *puntos*, junto con dos familias no vacías de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{E}$ a cuyos elementos llamaremos respectivamente *rectos y planos*, de modo que se cumplan los cinco axiomas indicados a continuación

Diremos que una recta o plano X *pasa* por un punto P, o que X *incide* en el punto P, si $P \in X$.

Axioma 1. *Por cada par de puntos distintos P y Q pasa una única recta, que representaremos por PQ.*

Axioma 2. *Toda recta pasa por al menos dos puntos.*

Diremos que tres o más puntos son *colineales* si hay una recta que pasa por todos ellos.

Axioma 3. *Por cada tres puntos no colineales P, Q y R pasa un único plano, que representaremos por PQR.*

Axioma 4. *Si una recta tiene dos puntos en común con un plano Π, entonces está contenida en Π.*

Axioma 5. *Todo plano pasa por al menos tres puntos no colineales.*

Éstos no son los únicos axiomas de incidencia que vamos a considerar, sino que más adelante consideraremos algunos axiomas alternativos o adicionales, pero conviene distinguir los resultados que pueden probarse únicamente a partir de estos axiomas.