

高温作业专用服装设计

摘 要

本题意在考察对“多层热防护服-空气层-皮肤”这样一个复杂传热系统进行分析。任务一是根据完整的参数条件求解一个复杂传热系统各位置温度随时间的分布，这种问题称为正问题。任务二是给定有限参数和一特定位置温度随时间的变化，反求缺失的参数，这种问题称为反问题。任务三是给定某点某时刻温度满足的条件，求一个或多个参数的可行域，并在可行域内根据特定目标选择最优解的最优化问题，这种问题可以称为高温作业专用服装设计反问题。

针对问题一 首先把传热系统简化为一维传热模型，使用微元分析法建立起单层模型内部各点满足的微分方程，以及边界条件，初始条件。然后将单层模型扩展到整个系统，建立起“三层热防护服-空气层-皮下层”的五层传热模型。在给定全部参数的情况下，对系统偏微分方程做数值化计算，求解得到温度的分布。在缺失部分参数情况下，给定特定位置温度的时间分布，为了求所有位置温度的时间温度问题，设计了基于模拟退火算法的多参数优化模型，求解出缺失的参数的近似解，然后利用正向传热模型求出全部位置的温度分布。

针对问题二 在解决问题一已经求出系统参数的情况下，问题二首先是一个给定约束条件，求单参数的可行解问题。由于对于该问题的一个解，比该解更大的解也是该问题的解，因此第二层的厚度 L_2 的可行域为 $L_{min} < L_2 < 25mm$ ，考虑到热防护服是供高温环境工作下人员所穿，厚度越大越不容易行动，因此最优解就是 L_{min} ，直接在 $(0.6mm, 25mm)$ 范围内寻找满足题目条件的最小值，算得 L_2 的最优解为 $10.00mm$

针对问题三 要同时处理 II 层和 IV 层厚度，而目标和问题二并没有太大区别，由于可行域是位于二维平面上的曲线围成的区域，不能像问题二那样做一维搜索。于是设计了一种贪心算法，目标是找到使得 $L_2 + L_4$ 最小的解。该算法从 $L_2 = L_4 = 0.6mm$ 出发，研究当两个变量分别增加 $0.01mm$ 时 $30min$ 和 $25min$ 时对应的温度的变化量之和，取更大的那一个变量，使其值增加 $0.01mm$ 。由于增加了同样的总厚度，增加该层的厚度能使得温度下降更大，说明该层物质具有更好的隔热效果，因此这是一种贪婪算法，每一步的都使总厚度增加了 $0.01mm$ ，但总是选择能够使温度下降更快的那一个方向。最终结果算得当 $L_2 = 19.88mm, L_3 = 6.40mm$ 时，是符合题意的且两层厚度更小的解

关键词 传热学 有限元分析 隐式差分法 反问题求解 模拟退火

1 问题重述

1.1 问题的提出

在高温环境下工作时，人们需要穿着专用服装以避免灼伤。专用服装通常由三层织物材料构成，记为 I、II、III 层，其中 I 层与外界环境接触，III 层与皮肤之间还存在空隙，将此空隙记为 IV 层。为设计专用服装，将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度。为了降低研发成本、缩短研发周期，请你们利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况，并解决以下 3 个问题：

- (1) 专用服装材料的某些参数值由附件 1 给出，对环境温度为 75°C 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度（见附件 2）。建立数学模型，计算温度分布，并生成温度分布的 Excel 文件（文件名为 problem1.xlsx）。
- (2) 当环境温度为 65°C 、IV 层的厚度为 5.5 mm 时，确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。
- (3) 当环境温度为 80°C 时，确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

1.2 问题背景

随着社会经济发展，工业各部门的设置越来越齐全，越来越多的工业部门需要高温作业场景。高温环境容易使工作人员产生中暑性疾病，对其身体功能造成不良影响。

为了减小高温环境对作业人员的危害，一些措施被广泛地应用。1. 改善工作环境，配备防护措施，设备，如加强工作环境的隔热效果以及加强通风。2. 加强卫生保健和健康监护，如提供各种降温消暑的食品、药品。3. 加强个人防护，主要指通过穿着专门的耐热、隔热服装，减小环境温度对体表的影响。其中，耐热服装，又称热防护服，是受到最广泛使用的热防护措施。

热防护服是指在高温环境中穿用的，具有促进人体热量散发，防止热中暑、烧伤、灼伤等危害的特殊防护服装。其防护原理是采用多层的耐热材料填充，从而降低热转移速度，使得外界的高热缓慢而少量地转移至皮肤。

热防护服的材料选用、服装的厚度等因素对防护效果有着明显的影响。显而易见，耐热材料厚度越大，对外界高温的抵抗作用越强，然而厚度的增大又影响到穿着的方便及舒适，不宜过大。因此，根据工作场所的环境选择合适的热防护服对保护作业人员安全，避免生产事故具有重要意义。

为了设计出最合适的热防护服，就要先了解热防护服的作用原理，建立起热防护服的热传递模型，热防护服热传递模型研究是几年来的一个热点问题。根据热防护服的结构可以分为单层模型和多层膜性；根据环境的湿度可以分为干燥环境下的传热模型和湿传热模型。Gibson[3] 于 1996 年首先提出了高温条件下单层多孔介质的传热传质模型，该模型的一个问题是没有考虑织物层中热辐射的影响。Torvi[7] 在 1999 首先考虑了长时间暴露在强辐射和低辐射环境下的热传递模型。考虑到空气层厚度对防护服热性能的影响，Torvi[8] 又于 2006 年建立了用于计算冷却过程中内部传热和皮肤受伤事件的模型。在前人研究的基础上，Ghazy 对热防护服-空气层-皮肤系统的各个环节都进行了更系统的研究，对多种情况下的热传递过程都做了细致的建模。

多层热防护服热传递模型建立在单层模型的基础上。Mell[4] 提出了多层面料层与层之间的传热模型。Mercer[5][6] 和 Ahmed Elgafy[1] 建立了内含相变材料的多层动态的热传递模型。考虑到空气层对热防护服性能的影响, Ghazy[2] 建立了织物中包含多空气层的多层织物热传递模型。Lu[9] 研究了应用三层热防护服热传递改进模型的皮肤烧伤度预测问题, 详细阐述并量化了外界热源在防护服保护下对人体产生的影响。

由于涉及服装时, 不能仅仅考虑隔热性能, 保暖性和舒适性也应该考虑在内。因此, 在保证隔热性能的前提下, 选择合适的隔热层、空气层厚度问题, 也就是服装设计反问题被广泛研究。*Fan* 建立了纺织材料的热湿传递模型, 研究保证保暖性的要求。Pan[11] 对热传递服装热传递问题进行了数学建模, 研究了通过设计目标函数决定热防护服装参数的反问题, 并提出了一种用于计算反问题的变形正则化方法。



图 1: 热防护服装

2 符号说明

表1列出了本文需要的符号。

表 1: 符号说明

符号	符号描述
t	时间在 t 时刻 (s)
x	防护服内距离防护服外表面的距离 (mm)
$T(x, t)$	t 时刻距离防护服外表面距离为 x 处的温度 ($^{\circ}C$)
$T_i(x, t)$	区分不同层时, t 时刻第 i 层距离防护服外表面距离为 x 处的温度 ($^{\circ}C$)
L_i	第 i 层的厚度 (mm)
D_i	从最外层外侧到第 i 层内侧的累积厚度 (mm)
K_i	第 i 层的热传导率 ($W/(m \cdot ^{\circ}C)$)
ρ_i	第 i 层的密度 (kg/m^3)
C_i	第 i 层的热容 ($J/(kg \cdot ^{\circ}C)$)
ΔT	温度的变化量 ($^{\circ}C$)
Δx	位移的变化量 (mm)
Δt	时间的变化量 (s)
τ_0	时间步长 (s)
A	热传导过程的作用面积 (m^2)
Q_{in}	吸收的热量 (J)
Q_{out}	释放的热量 (J)
h	空气与热防护服外侧接触时的表面换热系数 ($W/m^2 \cdot K$)
T_{air}	外界环境温度 ($^{\circ}C$)
$T_{skin}(t)$	皮肤表面的温度随时间分布 ($^{\circ}C$)
T_{body}	人体内部温度 ($^{\circ}C$)
$T_i(x)$	初始时刻温度分布 ($^{\circ}C$)

3 模型假设

1. 热防护服装各层的材料是各向同性的
2. 本系统的热传递仅考虑热对流、热传导, 忽略水汽、汗液、散热的影响。
3. 热防护服可以看做是无限长, 有一定厚度的平板
4. 热传递过程中, 服装不会因为受热而蜷曲
5. 本题中的薄空气层中不存在对流传热
6. 假人表面皮肤各处到体内热源的距离相等
7. 假人表面皮肤到体内热源之间由一性质不随位置而变的材料填充
8. 热传递沿垂直于皮肤方向进行
9. 在整个热传递过程中, 温度分布是连续变化的
10. 制作假人的材料的各种性质与一般人体相同

4 假设说明

1. 服装各层厚度之和至多不超过 30mm ，而其长度一般超过 60cm ，可见服装的长度远大于厚度，因此可把防护服等效成长度为无穷大，有一定厚度的平板材料。
2. 研究表明当织物与皮肤之间的空气层厚度小于 8mm 时，由于空气层间隙太小，无法形成对流运动，因此空气层不存在对流行形式的热传递。
3. 由假设说明 1，服装相同厚度处的热传递参数相同，因此可以把二维传热问题简化为一维传热模型。
4. 通过假设制造假人的材料的各种性质与一般人体相同，可以认为第五层（皮下层）的密度 $\rho_5 = 1100\text{kg/m}^3$ ，比热 $C_5 = 4200\text{J}/(\text{KG} \cdot ^\circ\text{C})$

5 问题分析

5.1 问题一的分析

题目要求根据给出的人体表面的温度随时间变化的关系，求出三层热防护服及空气层各点的温度分布情况。为了解决这一问题，我们首先对单层传热物质进行分析求解。通过把模型简化为一维传热问题，可以得到单层隔热物质从最外层到内层的温度分布的偏微分方程，以及初始条件和边界条件。将单层模型进行拓展，考虑到人体内部存在恒温热源 (37°C)，假人表面到人体内部的热源之间也应当看作是一层传热材料。把这 5 层产热物质结合起来，确定好边界条件，就可以联立起五个区间内的偏微分方程组，从而建成对“三层热防护服-空气层-皮肤”的传热模型。

直接求解该偏微分方程组较为困难，可以采用数值方法进行模拟。可以使用有限差分的方法把连续的偏微分问题转换成离散的差分方程问题，从而可以通过迭代或解方程组递归求解，也可以使用有限元分析的方法，根据系统方程利用专业软件直接仿真。

使用上述两种方法的前提是拥有系统全部的参数，然而一些重要参数题目并没有给，这显示是要从给出的假人皮肤外层温度的分布情况反推的。由假设和分析可知只有两个参数需要计算，那么这个问题就是一个双参数优化问题。求解优化问题最常用的方法是梯度下降法，但是本题中目标函数与我们想求的变量的值之间并不存在显式的关系，难以计算梯度。考虑到这一点，可以使用启发式算法，比如遗传算法或模拟退火算法，求出近似解。求出近似解后就可以利用差分方程或有限元分析建立起系统各处的温度分布情况。

5.2 问题二的分析

由问题一计算出了缺失的参数后，在问题二的条件下问题就转换成了一个单变量在约束条件下的可行域问题，考虑到在保证安全的情况下，衣服的厚度越厚，穿着就越不舒服，所以要求的最优值就对应着最小厚度值。由于该问题是一维的，且变量的可行范围本来就很很小，可以直接使用一维搜索法找出保证精度下最小厚度，也可以通过二分查找法提高搜索速率。

5.3 问题三的分析

问题三与问题二相比只是增加了一个变量，即考虑空气层也是在一定范围内可变的，那本题对应的可行域是二维平面上的一条曲线围成的一个图形。由于本题要求两个变量的联

合优化，首先要定义优化目标是什么。在此处我们把第二层和第四层的总厚度作为优化目标，想要尽可能减少两层厚度之和。因为热防护服是提供给高热状态下工作的人的服装，比如消防员，冶金工人等。他们常常需要不停地活动，而厚度越大的服装越不利于活动，因此我们把优化目标定义为减少两层厚度之和。为此，可以设计一种贪婪算法，目标就是提升相同的厚度，下降的温度更多。这样下降到目标温度时，提升的总厚度最小。

6 模型的建立

6.1 单层隔热材料的热传递模型

首先，针对单层的隔热材料，图2给出了高温下材料热传递模型的示意图。

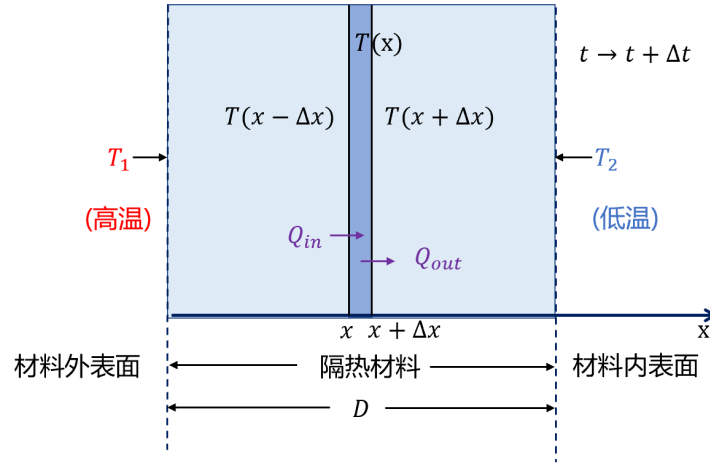


图 2: 单层隔热材料的热传递模型

根据之前的假设，隔热服装可以简化为无限长的，有一定厚度的隔热材料，为了便于计算，直接在一维坐标下求解。如图2所示，蓝色区域代表着该隔热材料，其厚度为 D ，左边虚线表示材料外表面，处于高温状态 T_1 ，右侧虚线表示材料内表面，处于低温状态 T_2 。

设温度随服装位置、时间的分布方程为 $T(x, t)$ ，其中 x 表示该位置距离材料外表面的距离， t 表示时间，这样 $T(x, t)$ 表示 t 时刻时距离材料外表面距离为 x 的位置的温度。我们使用微元法建立起该材料距离外表面 x 在时间 t 时的温度关系 $T(x, t)$ 。

在 t 时，取 $(x_0, x_0 + \Delta x)$ 的一个微元，横截面积为 A 。由于左侧是高温，右侧是低温，整个系统的热流方向为从左往右。 x 处的温度为 $T(x)$ ，从 x 处向右流出的热量为 Q_{out} ，从左侧流入的热量为 Q_{in} 。

根据以上条件，我们使用 Fourier 热传导定律建立起 $T(x, t)$ 的微分方程模型。

Fourier 热传导定律:

$$\left| \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right| = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

其中:

在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 时间段内:

$$Q_{in} = KA \frac{\Delta T}{\Delta x} \bigg|_{x=x_0+\Delta x} \cdot \Delta t = KA \frac{T(x_0 + \Delta x) - T(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta t \quad (1)$$

$$Q_{out} = KA \frac{\Delta T}{\Delta x} \bigg|_{x=x_0} \cdot \Delta t = KA \frac{T(x_0) - T(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \cdot \Delta t \quad (2)$$

那么从 $x \rightarrow x + \Delta x$ 的一小段厚度内，净吸收热量为

$$\Delta Q = Q_{in} - Q_{out} = \frac{KA\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[T(x_0 + \Delta x) - T(x_0) \right] - \left[T(x_0) - T(x_0 - \Delta x) \right] \right\} \quad (3)$$

温度变化与热量变化存在以下关系

$$\Delta Q = Cm\Delta T = Cm[T(t + \Delta t) - T(t)] = C\rho A\Delta x [T(t + \Delta t) - T(t)] \quad (4)$$

对比 (3)、(4) 得到

$$C\rho\Delta x [T(t + \Delta t) - T(t)] = \frac{K\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[T(x_0 + \Delta x) - T(x_0) \right] - \left[T(x_0) - T(x_0 - \Delta x) \right] \right\} \quad (5)$$

这等价于

$$C\rho \frac{[T(t + \Delta t) - T(t)]}{\Delta t} = K \frac{[T(x_0 + \Delta x) - T(x_0)] - [T(x_0) - T(x_0 - \Delta x)]}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

两边取极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$, 得到

$$C\rho \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{C\rho}{K} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

初始条件为

$$T(x, 0) = T_i(x), \quad x \in (0, D) \quad (8)$$

材料的左边界条件为

$$T(0, t) = T_l(t) \quad t \in [0, T] \quad (9)$$

材料的右边界条件为

$$T(D, t) = T_r(t), \quad t \in [0, T] \quad (10)$$

(7)、(8)、(9)、(10) 就是建立起的单层隔热材料内部温度分布对应的偏微分方程关系式。

6.2 “3 层隔热服-空气层-皮肤”系统的热传递模型

现实上的隔热服不是由单层隔热材料制成，而是由三层织物 (外壳，防水层，隔热层) 构成的复杂结构。在防护服和皮肤之间存在一层空隙，称为空气层，空气层同样具有相应的密度，比热，热传导率，以及厚度，因此也能起到一定的“缓热作用”。

假人人体内部可看作一个低温热源，恒定为 37°C ，在该热源和皮肤表层之间也存在着假人材料，同样对热量的传播产生影响，我们把这样一层物质称为皮下层。

空气层传热的过程十分复杂，其传热机理很难被实验测量验证。研究表明，当织物和皮肤之间的厚度小于 8mm 时，由于空气层间隙太小，无法形成对流运动，层内的热传递以传导为主。因此空气层的能量热平衡方程与在 6.1 节建立的单层模型近似一致。同样，皮

下层的热传递原理也与单层模型一致。于是，建立起了“3层隔热服-空气层-皮下层传热系统”，如图3所示。

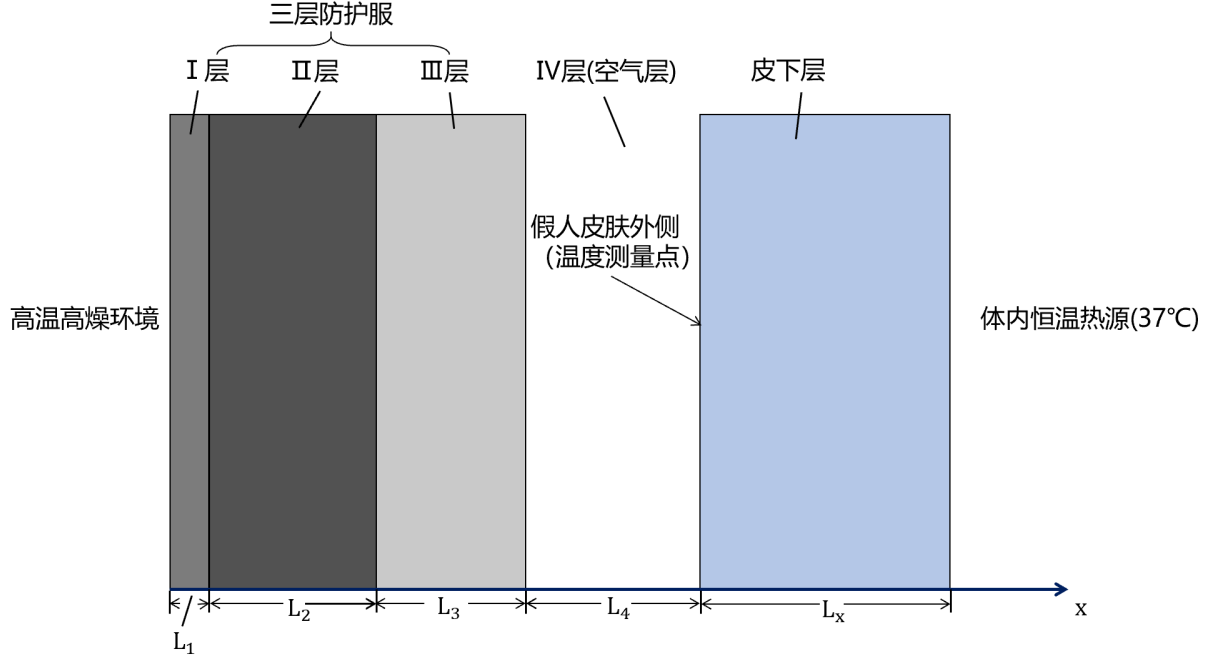


图 3: “隔热服-空气层-皮肤”的热传递模型

物体的温度随时间而变化的导热过程称为非稳态导热。本题中，初始温度为 37° 的假人被放入高温环境中，其各部分温度将随着时间而变化，因此是一种非稳态导热过程。

由牛顿冷却定律:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = h(T_{air} - T(0, t)) \quad (11)$$

则最外层对应的离散边界条件为:

$$h(T_{air} - T(0, t)) - \frac{k}{\Delta x}(T(0, t) - T(0 + \Delta x, t)) = \frac{\Delta x \rho C}{\Delta t}(T(0, t + \Delta t) - T(0, t)) \quad (12)$$

其中 T_{air} 表示环境温度， h 表示空气与服装表面的对流传热系数，式 (12) 就是隔热服装外表面满足的偏微分方程。

对于中间各层交界面的边界条件，假定分界面左右两边的温度相同，那么有

$$T_i(D_i, t) = T_{i+1}(D_i, t), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

皮下层内侧温度满足:

$$T_5(D_5, t) = T_{body} \quad (14)$$

式 (12), (13), (14) 组成了热传递系统的边界条件。同时，热传递系统还存在一个初始条件:

$$T(x, t = 0) = T_i(x) = 37^\circ C, \quad x \in (0, D_5) \quad (15)$$

从而可以为系统的每一层都建立起一个热传递方程组。

I 层的热传递方程为:

$$\begin{cases} C_1\rho_1\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_1\frac{\partial T}{\partial x}), & x \in (0, D_1) \\ T_1(x, 0) = T_i(x), & x \in (0, D_1) \\ h(T_{air} - T(0, t)) - \frac{k}{\Delta x}(T(0, t) - T(0 + \Delta x, t)) \\ = \frac{\Delta x \rho C}{\Delta t}(T(0, t + \Delta t) - T(0, t)) \\ T_1(D_1) = T_2(D_1) \end{cases} \quad (16)$$

II 层的热传递方程为:

$$\begin{cases} C_2\rho_2\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_2\frac{\partial T}{\partial x}), & x \in (D_1, D_2) \\ T_2(x, 0) = T_i(x), & x \in (D_1, D_2) \\ T_2(D_2, t) = T_3(D_2, t) \end{cases} \quad (17)$$

III 层的热传递方程为:

$$\begin{cases} C_3\rho_3\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_3\frac{\partial T}{\partial x}), & x \in (D_2, D_3) \\ T_3(x, 0) = T_i(x), & x \in (D_2, D_3) \\ T_3(D_3, t) = T_4(D_3, t) \end{cases} \quad (18)$$

IV 层 (空气层) 的热传递方程为:

$$\begin{cases} C_4\rho_4\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_4\frac{\partial T}{\partial x}), & x \in (D_3, D_4) \\ T_4(x, 0) = T_i(x), & x \in (D_3, D_4) \\ T_4(D_4, t) = T_5(D_4, T) \end{cases} \quad (19)$$

V 层 (皮下层) 的热传递方程为:

$$\begin{cases} C_5\rho_5\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_x\frac{\partial T}{\partial x}), & x \in (D_4, D_5) \\ T_5(x, 0) = T_i(x), & x \in (D_4, D_5) \\ T_5(x = D_5, t) = T_{skin} \end{cases} \quad (20)$$

6.3 偏微分方程的的隐式差分法处理

直接求解 6.2 节中的微分方程组较为复杂, 为了便于计算, 本文采用有限差分法来解决以多层热防护服、空气层和人体皮肤为整体的偏微分方程组。

有限差分法分为显式差分 and 隐式差分两种, 显式差分法利用上一时刻和上一位置的数值求解本时刻本位置的数值, 迭代方便。而隐式差分需要利用本时刻周围位置的数值, 需要联立方程组求解。但是显示差分方法的时间步长与空间步长的取值存在严格的要求, 否则很容易出现不符合热力学原理的温度变化情况。本模型采用隐式差分法来求解该差分方程组。

图4展示了隐式差分法的计算过程

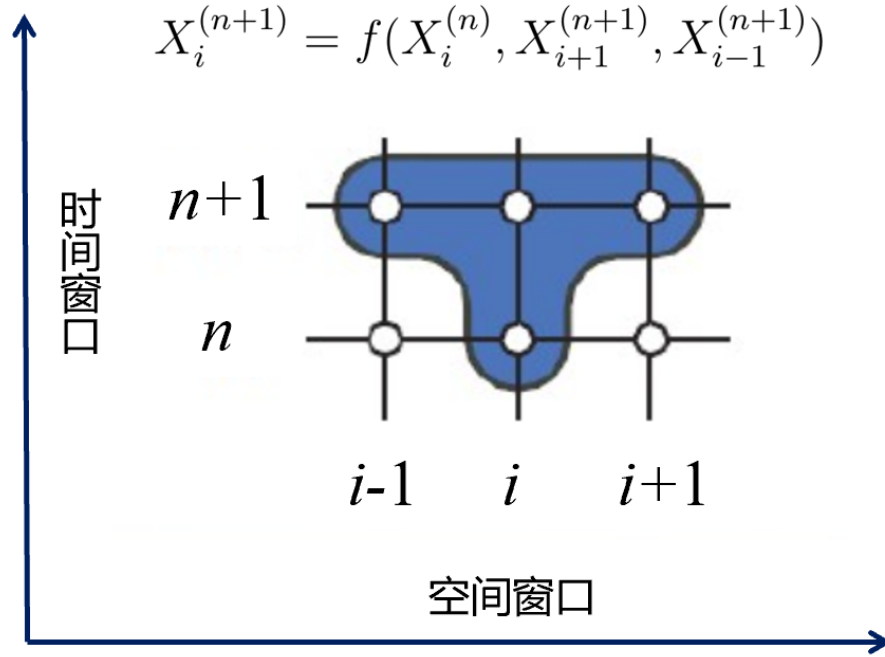


图 4: “隐式差分法”图解

对于特定的一层 $i (i = 1, 2, 3, 4, x)$, 其厚度为 L_i , 热传导率为 K_i , 密度为 ρ_i , 比热为 C_i 。用 $0 = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \dots < x_i^{(M_i)} = D_i$ 表示该层的划分。用 $T(x_i^{(j)})$ 表示该层的温度, 则可以把式 (7) 的偏微分方程改写成离散的差分形式:

$$C_i \rho_i \frac{T(x_i^{(j)}, t^{(n+1)}) - T(x_i^{(j)}, t^{(n)})}{\tau_0} = K_i \frac{T(x_i^{(j+1)}, t^{(n+1)}) - 2T(x_i^{(j)}, t^{(n+1)}) + T(x_i^{(j-1)}, t^{(n+1)})}{\Delta x^2} \quad (21)$$

防护服的最外层边界条件离散为:

$$K_1 \frac{T(x_1^{(1)}, t) - T(x_1^{(0)}, t)}{\Delta x} + h(T_{air} - T(x_1^{(0)}, t)) = \rho_1 C_1 \frac{\Delta T(0, t + \Delta t) - T(0, t)}{\Delta \tau} \quad (22)$$

中间几层连接处的边界条件离散为:

$$\begin{cases} T(x_1^{(M_1)}, t) = T(x_2^{(0)}, t) \\ T(x_2^{(M_2)}, t) = T(x_3^{(0)}, t) \\ T(x_3^{(M_3)}, t) = T(x_4^{(0)}, t) \\ T(x_4^{(M_4)}, t) = T(x_5^{(0)}, t) \end{cases} \quad (23)$$

皮下层最内的边界条件离散为:

$$T(x_5^{(M_5)}, t) = T_{skin} \quad (24)$$

6.4 热传导的稳态温度

由传热学相关理论可知, 对于本题所对应的高、低温双热源系统, 当时间到达一定程度时, 该系统会达到一种动态平衡状态, 称为稳定传热过程。此时各位置的温度不随时间发生改变。

由 Fourier 热传导定律, $\Delta T = 0$, 则 $\Delta Q = 0$, 从而 $Q_{in} - Q_{out} = 0$, 结合式 (3)、(4), 可以得到

$$K(x_0 + \Delta x) \frac{\Delta T}{\Delta x} \Big|_{x=x_0+\Delta x} = K(x_0) \frac{\Delta T}{\Delta x} \Big|_{x=x_0} \quad (25)$$

对于同一介质中的传热, 各个位置的热传导率相同, 故温度对位移的梯度相同。

对于两种不同介质交界处的传热, 认为分界面处不蓄热, 故存在以下关系:

$$K_a \frac{\partial T_a(x)}{\partial x} = K_b \frac{\partial T_b(x)}{\partial x} \quad (26)$$

那么达到稳态时, 在同一介质中的温度随着距离呈现线性分布, 而不同介质的温度梯度与其热传导率成反比例关系, 如图 (5) 所示。

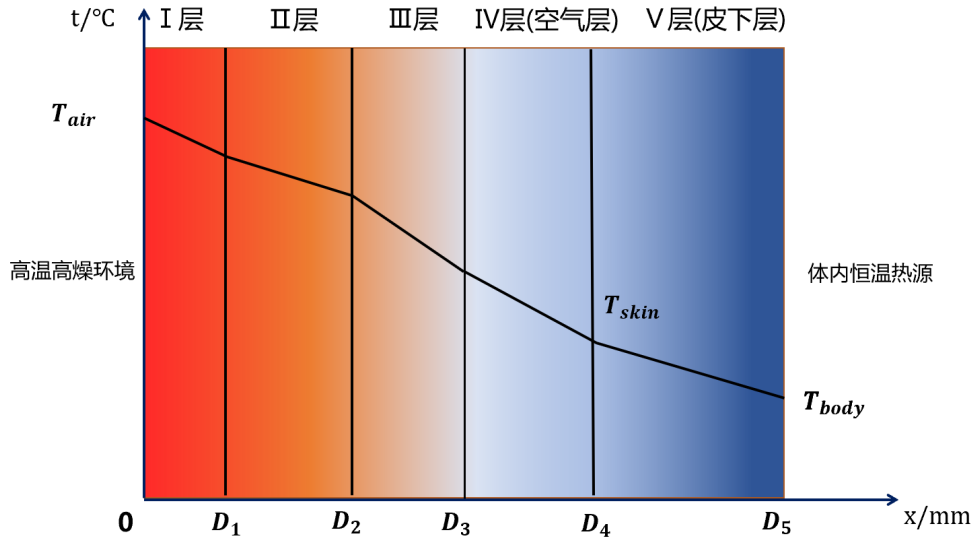


图 5: 达到稳态时, 各位置温度的分布情况

由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(x=0, t) = T_{air} = 75^\circ C$, 根据图 (5) 及式 (26), 可以得到稳态时分界点的温度关系:

$$\frac{T_{air} - T(D_1)}{L_1 * K_1} = \frac{T(D_1) - T(D_2)}{L_2 * K_2} \quad (27)$$

$$= \frac{T(D_2) - T(D_3)}{L_3 * K_3} \quad (28)$$

$$= \frac{T(D_3) - T(D_4)}{L_4 * K_4} \quad (29)$$

$$= \frac{T(D_4) - T(D_5)}{L_5 * K_5} \quad (30)$$

$$(31)$$

代入数据，得到 K_5 与 L_5 满足以下关系：

$$\frac{K_5}{L_5} = 116.1 \text{ W} \cdot \text{m}^2 / (\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}) \quad (32)$$

7 问题的解答

7.1 隐式差分法求解正问题

若已知传热系统全部的差分关系，以及全部的参数条件，边界条件，初始条件，要求系统的温度的分布，我们把这一类问题称为导热系统的正问题。相对的，若已知差分关系，边界条件，初始条件和部分参数条件，给出某处温度随时间的变化，要求缺失的参数条件，我们把这类问题称为导热系统的反问题。

对于求解正问题，第 6 节建立了以隐式差分法为基础的系统方程。只要求解该系统方程，便可以得到整个系统的温度分布。

下面将给出由系统方程求解系统温度分布的详细过程

(1) 在介质内部：

$$\begin{aligned} & \frac{K\Delta t}{\Delta x} [T(x^{(i-1)}, t^{(n)}) - 2T(x^{(i)}, t^{(n)}) + T(x^{(i+1)}, t^{(n)})] \\ & = \Delta x \cdot \rho C [T(x^{(i)}, t^{(n)}) - T(x^{(i)}, t^{(n-1)})] \end{aligned} \quad (33)$$

(2) 在介质的分界线上：

$$T(x_a^{(M_a)}, t^{(n)}) = T(x_b^{(M_b)}, t^{(n)}) \quad (34)$$

(3) 在系统最外层边界上 ($i = 1$) 时：

$$h\Delta t [T_{air} - T(x^{(i)}, t^{(n)})] - \frac{K\Delta t}{\Delta x} [T(x^{(i)}, t^{(n)}) - T(x^{(i+1)}, t^{(n)})] \quad (35)$$

依据以上，可以得到关于 $T(x^{(1)}, t^{(n)}), T(x^{(W)}, t^{(n)}), \dots, T(x^{(N)}, t^{(n)})$ 这 N 个变量的 N 元一次方程组 (由 $T(t^{(n-1)})$ 推出 $T(t^{(n)})$)。

解这个方程组，即可从 $n - 1$ 时刻的温度分布得到 n 时刻温度分布。

由于边界条件已全部给定，给定初始状态即可求得任意时刻状态。

7.2 有限元法求解正问题

有限元分析是利用数学近似的方法对真实物理系统进行模拟，用有限数量的未知量去逼近无限未知量的真实系统。有限元分析法是求解偏微分方程问题的一种方便，实用的数值方法。

利用 MATLAB 软件偏微分方程工具箱中的热学模块，只需提供传热系统的微分方程，初始条件，边界条件，就可以近似模拟出实际系统的温度分布。

7.3 模拟退火法求解反问题

7.4 问题 1 的解答

7.1 节和 7.2 节已经给出了给定全部参数求温度分布的正问题的解法，接下来将研究反问题，即给定假人皮肤外侧温度随时间的变化情况求出缺失的参数值。

首先需要确定本题尚需确定的参数。根据之前给出的假设条件，未确定的参数共有 2 个：系统最外层外侧与空气的对流换热系数 h ，皮下层的厚度 L_5 。假人皮肤外侧温度分布 $T_{skin}(t)$ 是这些参数的函数，即 $T_{skin}(t) = g(h, L_5)$ 。

我们的优化目标是找到最优的这两个参数，使得 $T^*_{skin}(t)$ 与 $T_{skin}(t)$ 最为接近，其中 $T_{skin}(t)$ 是假人皮肤外表面的实际温度， $T^*_{skin}(t)$ 是求解正问题获得的解。使用最小二乘法，则该问题可以写成如下的形式：

$$\arg \min_{h, D_5} \left\| T^*_{skin}(t) - T_{skin}(t) \right\|^2 \quad (36)$$

由于 $T^*_{skin}(t)$ 不具有显式的表达式，目标函数对参数的梯度难以计算，因此难以使用梯度下降法来求解参数。针对这一多参数优化问题，我们使用一种模拟退火算法求解。

Algorithm 1 模拟退火算法

Input: 参数初始值 K_0, h_0 , 皮肤表面温度 $T_0(t)$

Output: 近似最优拟合参数 K, h

设置初始温度 $T = T_0$, 退火停止温度 T_{min} , 每一步的温度下降系数 r

设置 K_0, h_0 变化的步长值 $\Delta K, \Delta h$

计算 K_0, h_0 对应的 $T^*(t)$, 计算 $T^*(t)$ 与 $T_0(t)$ 的 MSE, s_0

while $T > T_{min}$ **do**

 生成 $(-\frac{T}{T_0})$ 内的随机数 β_1 , 使 $K = K_0 + \beta_1 \Delta K$

 生成 $(-\frac{T}{T_0})$ 内的随机数 β_2 , 使 $h = h_0 + \beta_2 \Delta h$

 计算 k, h 对应的 $T_1(t)$, 计算 $T_1(t)$ 与 $T_0(t)$ 的 MSE, s_0 **if** $s < s_0$ **then**

$s_0 = s, K_0 = K, h_0 = h$

end

else

 取随机数 $\beta_3 \in (0, 1)$

if $\beta_3 < \exp(-\frac{0.8T_0}{T})$ **then**

$s_0 = s, k_0 = k, h_0 = h$

end

end

$T = T * r$

end

取较小的步长值重复上述过程，直至接近最优解

return K, h

这种解法依赖于已知全部参数求皮肤表面温度分布算法的精度。我们分别使用隐式差分法和有限元仿真法和模拟退火算法结合计算出相应的参数 K, h 的最优值。我们比较两种方法算出的最优参数对应的皮肤表面的温度分布曲线，与实验测得的皮肤表面温度分布曲线做比较，见图6

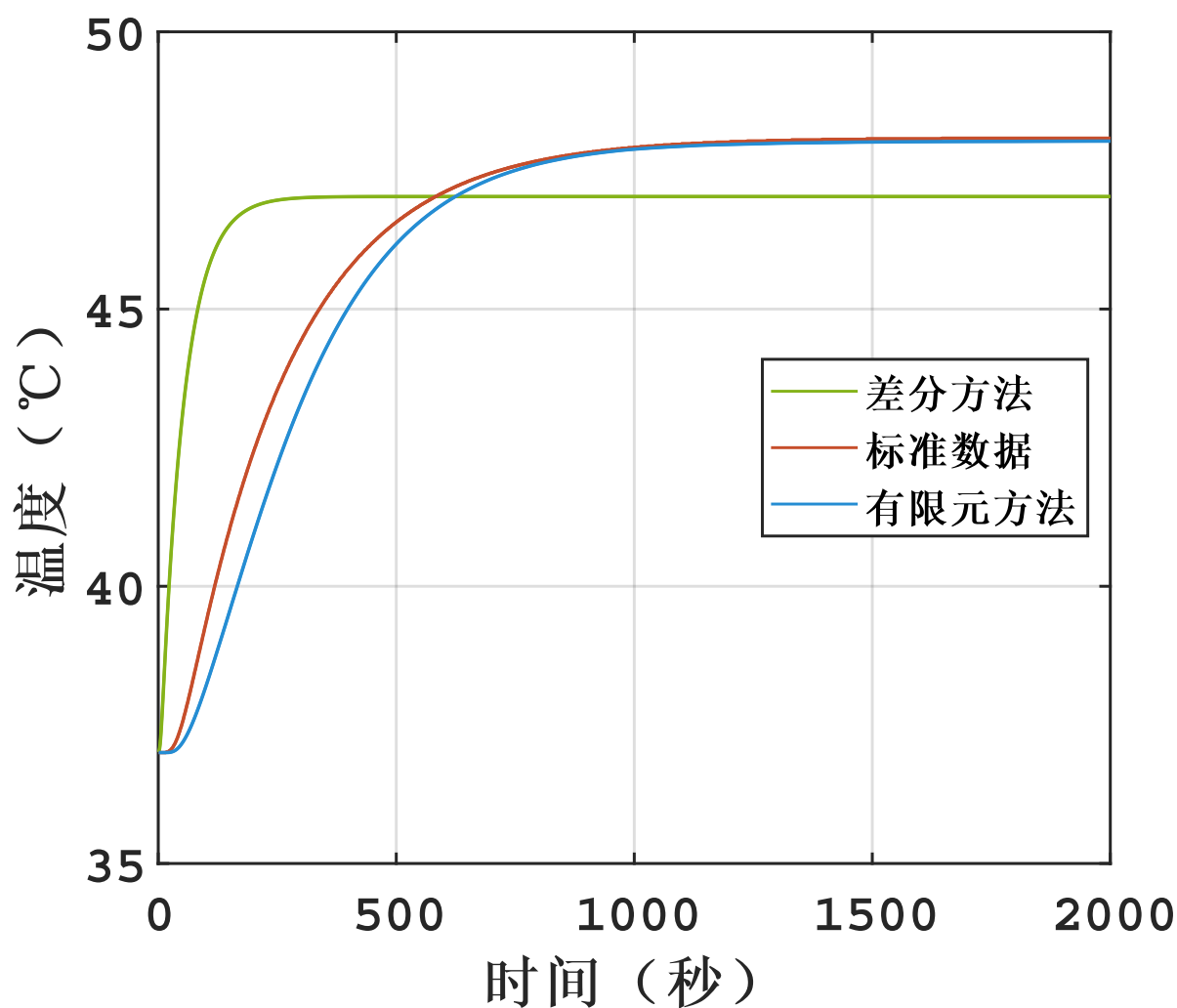


图 6: 有限元法和隐式差分法效果对比

图6表明,使用有限元分析法建立的传热系统模型比使用隐式差分法建立的模型要更为精确。因此,之后问题的计算都使用有限元分析法建立的模型。

有限元分析-模拟退火算法求得的参数最优值为 $K = 0.0073W/(m \cdot ^\circ C)$, $h = 499.9399W/m^2$. K , 对应的 $D_5 = 0.000847613595m$ 。

将该参数值再带回有限元分析模型中,可以求得任意位置温度随时间的变化情况,绘制成三维图像后如图 (7) 所示

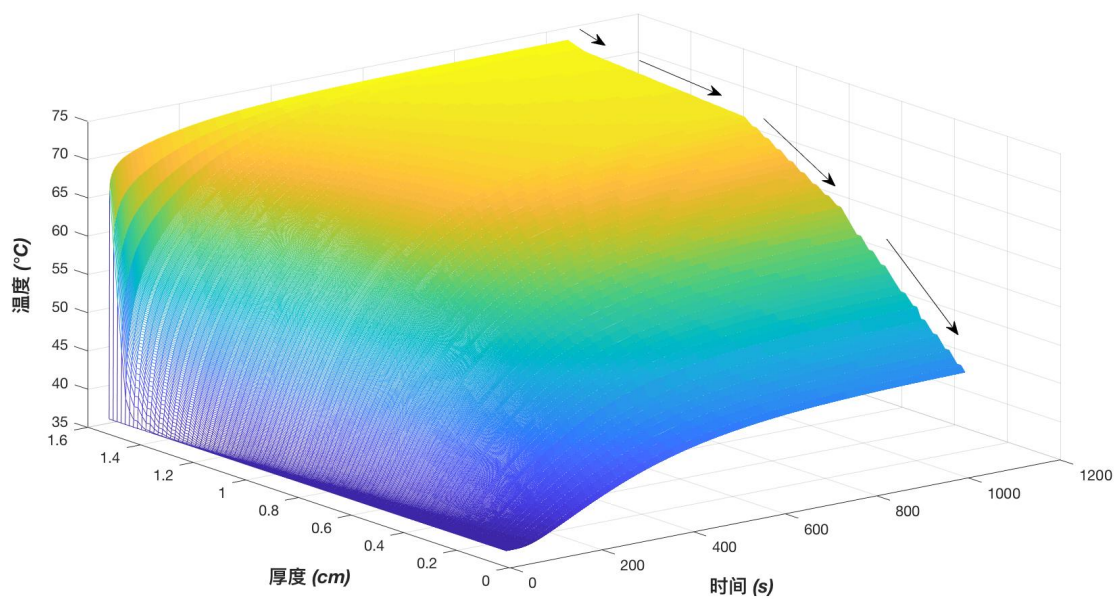


图 7: 温度 T 随距离 x 和时间 t 变化的三维图像

从图7中可以看出, 当时间变得很大, 系统已经达到稳态时, 同一层的温度关于 x 的梯度的确是恒定的。

图8细腻地展示了该传热系统各分界面温度随时间的变化情况, 它清晰地展现了各层温度的差异。

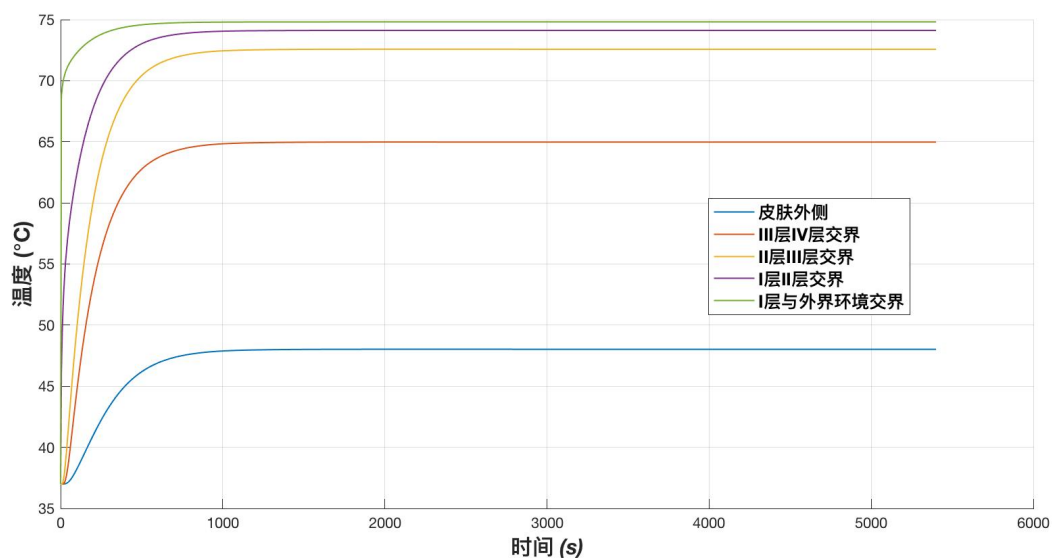


图 8: 传热系统各分界面温度随时间的变化情况

7.5 问题 2 的解答

在解决问题一的基础上，我们已经求得了热防护服最外层的对流传热系数，以及假人体的相关参数，这样只有 2 层的厚度是未知变量。我们的任务是求得最佳的厚度，使得工作 60min 时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，并且超过 44°C 的时间不超过 5min。

一个容易理解的信息是：该传热系统存在一个稳定状态，当各部分逐渐升温，达到这一稳定状态后，各位置的温度都将不再发生变化，因此 $T(x = x_0, t)$ 对于时间的导数恒大于 0，这也就意味着，一旦假人皮肤外侧温度在时刻 t_0 时超过了 44°C ，那么当 $t > t_0$ 时， $T(t) > 44^{\circ}\text{C}$ 是自然而然成立的。从而本问题可以转换为：工作 55min 时，假人皮肤外侧温度未达到 44°C ，且工作 60min 时，温度没超过 47°C 。

用形式化的语言为可表示为

$$\begin{cases} T_{skin}(t = 3300) < 44^{\circ}\text{C} \\ T_{skin}(t = 3600) < 47^{\circ}\text{C} \end{cases} \quad (37)$$

另一个常识是，2 层的厚度越大，隔热性能越好，也就是说，如果 $L_2 = l$ 时，满足条件，那么当 $L_2 > l$ 时，亦满足条件。然而本题要求算得最优的厚度。那么就应该是满足此条件的最小厚度。

由于第一问已经得到了其他的参数，结合正问题理论，直接在 L_2 的可选范围内做一定划分，然后做二分搜索即可。

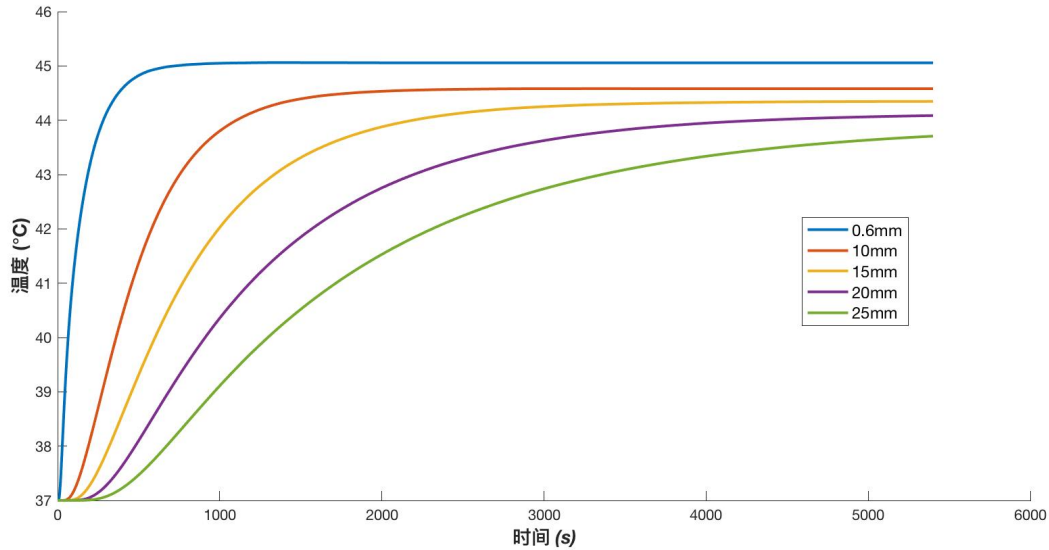


图 9: 第二层厚度不同时造成的皮肤温度随时间变化的曲线

图9展示了第二层厚度的变化对皮肤温度随时间变化的影响。

最终可算得第二层的最优厚度为 18.00mm

7.6 问题 3 的解答

相比较于问题 2，除了一些数值上有改动，问题 3 只是把空气层的厚度 L_4 也变成了变量，那么这个问题就变成了一个双变量优化问题。需要满足的条件仍然可以等效为形式化

语言：

$$\begin{cases} T_{skin}(t = 1500) < 44^{\circ}C \\ T_{skin}(t = 1800) < 47^{\circ}C \end{cases} \quad (38)$$

一方面增加二层的厚度明显能够提高隔热效果，使其更容易满足温度条件。另一方面，由于空气层的厚度限定在 $L_4 < 6.5mm$ ，此时由于空气层太薄，可以忽略对流运动，空气层总是可以简化为只存在热传导，从而空气层也是越大，隔热效果越好。因此，如果 $L_2 = l_2, L_4 = l_4$ 是符合条件的一组解，那么 $L_2 > l_2, L_4 > l_4$ ，也是该题的一组解。

因此，该题可以看做是求边界处的 (L_2, L_4) 二元组。由于要选出最优解，必须定义什么样的解更优秀。如 6.3 节所言，我们把目标定为让 L_1 与 L_2 的和达到最小。

传统的想法是从可行域内部向可行域边界上移动，计算两层厚度之和，然后在可行域边缘遍历，求得所有的二元组，求得其中使两层厚度之和最小的解。

但是这种算法需要大量的计算，为了简化计算，我们设计了一种贪心算法。首先，我们取二元组 $(L_1 = L_2 = 0.6mm)$ ，此时该解必然在可行域之外。为了使解成为可行解，其厚度必须增加。我们每一次选两层中的一层增加 $0.01mm$ ，计算哪一层增加 $0.01mm$ 之后，温度下降地更大。如果我们每次都选使温度下降最快的方向更新 L_1 或 L_2 ，那么将会是增加最小的总厚度而实现降低最多的温度。这样的话第一次到达可行域的解，将是总厚度最小的可行解。

经过程序计算，得到最优解为 $L_2 = 19.88mm, L_4 = 6.40mm$

8 模型总结

8.1 模型优点

1. 本模型把“热防护服-空气层-皮肤”传热模型这一复杂的三维立体模型简化为一维导热问题，虽然改动幅度较大但是非常合情合理。
2. 比较了求解偏微分方程组的两种数值解法：隐式差分法和有限元分析法。经过比较，确定了有限元分析法在求解这种传热问题更为细腻，准确。
3. 本模型的数学推导非常详细、准确，具有很强的理论严谨性。各种参数的假设条件也恰到好处，非常符合实际情况。
4. 本模型采用一种启发式算法：模拟退火算法解决一维传热系统的反问题，角度独特。

8.2 模型缺点

1. 在对传热系统的分析中完全没有考虑热辐射现象，不太符合实际情况。
item
2. 使用模拟退火算法求得的解不一定是全局最优解，容易陷入局部最优。

参考文献

- [1] Elgafy, A., Mishra, S.: A heat transfer model for incorporating carbon foam fabrics in firefighter's garment. *Heat and Mass Transfer* 50(4), 545–557 (2014)
- [2] Ghazy, A.: Numerical study of the air gap between fire-protective clothing and the skin. *Journal of Industrial Textiles* 44(2), 257–274 (2014)
- [3] Gibson, P.: Multiphase heat and mass transfer through hygroscopic porous media with applications to clothing materials. *Fiber* 53(5), 183–194 (1996)
- [4] Mell, W.E., Lawson, J.R.: A heat transfer model for firefighters' protective clothing. *Fire Technology* 36(1), 39–68 (2000)
- [5] Mercer, G.N., Sidhu, H.S.: Mathematical modelling of the effect of fire exposure on a new type of protective clothing. *Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal* 49, 289–305 (2008)
- [6] Mercer, G.N., Sidhu, H.S.: Investigating the effectiveness of phase change material as a new type of protective clothing for firefighters. *Chemeca Towards A Sustainable Australasia* (2008)
- [7] Torvi, D.A., Dale, J.D.: Heat transfer in thin fibrous materials under high heat flux. *Fire Technology* 35(3), 210–231 (1999)
- [8] Torvi, D.A., Eng, P., Threlfall, T.G.: Heat transfer model of flame resistant fabrics during cooling after exposure to fire. *Fire Technology* 42(1), 27–48 (2006)
- [9] 卢琳珍, 徐定华, 徐映红: 应用三层热防护服热传递改进模型的皮肤烧伤度预测. *纺织学报* (1), 111–118 (2018)
- [10] 姜启源, 谢金星: 数学模型 (第四版) (2011)
- [11] 潘斌: 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题. Ph.D. thesis, 浙江理工大学 (2017)

附录

A 有限元法求解传热系统

```
function temperature = skinTemperature_time(envir_tem, h,
    k_layer5, d_layer5, d_layer2, d_layer4, figureMode)

p = [300, 862, 74.2, 1.18, 1100]; %
    各层的密度
c = [1377, 2100, 1726, 1005, 4200]; %
    各层的比热
k = [0.082, 0.37, 0.045, 0.028, k_layer5]; %
    各层的热传导率
d = [0.6e-3, d_layer2, 3.6e-3, d_layer4, d_layer5]; %
    各层的厚度
t_temperature = envir_tem; % 环境温度

t_body = 37; %
    体温

thermalmodelT = createpde('thermal', 'transient');

% 划分空间区域
R1 = [3, 4, 0, d(1), d(1), 0, 0, 0, 1e-2, 1e-2];
R2 = [3, 4, d(1), sum(d(1:2)), sum(d(1:2)), d(1), 0, 0, 1e-2, 1e-2];
R3 = [3, 4, sum(d(1:2)), sum(d(1:3)), sum(d(1:3)), sum(d(1:2)),
    0, 0, 1e-2, 1e-2];
R4 = [3, 4, sum(d(1:3)), sum(d(1:4)), sum(d(1:4)), sum(d(1:3)),
    0, 0, 1e-2, 1e-2];
R5 = [3, 4, sum(d(1:4)), sum(d(1:5)), sum(d(1:5)), sum(d(1:4)),
    0, 0, 1e-2, 1e-2];

% 建立几何模型
gdm = [R1; R2; R3; R4; R5]';
g = decsg(gdm, 'R1+R2+R3+R4+R5', ['R1'; 'R2'; 'R3'; 'R4'; 'R5'
    ]');
geometryFromEdges(thermalmodelT, g);

% 与外界环境接触
thermalBC(thermalmodelT, 'Edge', 1, ...
    'ConvectionCoefficient', h, ...
    'AmbientTemperature', t_temperature)
```

```

% 设定传导率，密度，比热容等性质
thermalProperties(thermalmodelT,'Face',4,'
    ThermalConductivity',k(1), ...
    'MassDensity',p(1), ...
    'SpecificHeat',c(1));
thermalProperties(thermalmodelT,'Face',1,'
    ThermalConductivity',k(2), ...
    'MassDensity',p(2), ...
    'SpecificHeat',c(2));
thermalProperties(thermalmodelT,'Face',2,'
    ThermalConductivity',k(3), ...
    'MassDensity',p(3), ...
    'SpecificHeat',c(3));
thermalProperties(thermalmodelT,'Face',3,'
    ThermalConductivity',k(4), ...
    'MassDensity',p(4), ...
    'SpecificHeat',c(4));
thermalProperties(thermalmodelT,'Face',5,'
    ThermalConductivity',k(5), ...
    'MassDensity',p(5), ...
    'SpecificHeat',c(5));

% 设定各层初始温度为人体的
for i=1:5
thermalIC(thermalmodelT, t_body , 'Face',i)
end

% 设定皮肤内部的温度恒定为体温
thermalBC(thermalmodelT,'Edge',2,'Temperature',t_body);

msh = generateMesh(thermalmodelT,'Hmax',5e-4);

maxTime = 5400;
time_step = 1;
tlist = 0:time_step:maxTime;    % 时间序列

R = solve(thermalmodelT,tlist);
T = R.Temperature;

getClosestNode = @(p,x,y) min((p(1,:) - x).^2 + (p(2,:) -
    y).^2);
[~,nid1] = getClosestNode( msh.Nodes, sum(d(1:4)), 5e-3 )
;    % 取出靠近皮肤外侧的点

```

```

nodesNum = 50;
nodes = zeros(1,nodesNum);
for i = 1:nodesNum
    [~,node] = getClosestNode( msh.Nodes ,(nodesNum-i) * sum(d
        (1:4))/nodesNum,5e-3);
    nodes(i) = node ;
end

[~, nid]= getClosestNode( msh.Nodes, sum(d(1:4)),5e-3);
[~, xid]= getClosestNode( msh.Nodes, sum(d(1:3)),5e-3);
[~, yid]= getClosestNode( msh.Nodes, sum(d(1:2)),5e-3);
[~, zid]= getClosestNode( msh.Nodes, d(1),5e-3);
[~, wid]= getClosestNode( msh.Nodes, 0,5e-3);

temperature = T( nid1 ,:); % 返回该点的数据
tem_time_x_grid = zeros(nodesNum, length(tlist));

for i = 1:length(nodes)
    tem_time_x_grid(i,:) = T(nodes(i) , :);
end

if figureMode ==1

figure
hold on
plot(tlist ,T(nid ,:));
plot(tlist ,T(xid ,:));
plot(tlist ,T(yid ,:));
plot(tlist ,T(zid ,:));
plot(tlist ,T(wid ,:));

figure;

[X,Y]=meshgrid( 0:time_step:maxTime, (1:nodesNum)*sum(d
    (1:4)));

mesh(X,Y,tem_time_x_grid);
end

```

B 隐式差分法求解传热系统

% 本函数用于承担在隐式差分求解过程中，构造矩阵并求解隐式方程组的任务

function [x]= hidden_iteration(d,h,k,c,p,delt_t,delt_x,T1,T2,x0)

num1 = **fix**(d(1)/delt_x+1);

num2 = **fix**(d(2)/delt_x);

num3 = **fix**(d(3)/delt_x);

num4 = **fix**(d(4)/delt_x);

num5 = **fix**(d(5)/delt_x);

m = num1+num2+num3+num4+num5;

left = **zeros**(m,m);

right = **ones**(m,1);

for i=1:5

alpha(i) = delt_x*delt_x*c(i)*p(i)/k(i)*delt_t;

end

right(1) = h*T1+delt_x*c(1)*p(1)/delt_t*x0(1);

right(m) = alpha(5)*x0(i)-T2;

right(num1) = 0;

right(num1+num2) = 0;

right(num1+num2+num3) = 0;

right(num1+num2+num3+num4) = 0;

for i=2:num1-1

right(i) = -alpha(1)*x0(i);

end

for i=num1+1:num1+num2-1

right(i) = -alpha(2)*x0(i);

end

for i=num1+num2+1:num1+num2+num3-1

right(i) = -alpha(3)*x0(i);

end

for i=num1+num2+num3+1:num1+num2+num3+num4-1

right(i) = -alpha(4)*x0(i);

end

for i=num1+num2+num3+num4+1:m-1

right(i) = -alpha(5)*x0(i);

end

aa = delt_x*c(1)*p(1)/delt_t+h+k(1)/delt_x;

bb = -k(1)/delt_x;

left(1,1:2) = [aa,bb];


```

left (num1,num1-1:num1+1) = [-k(1),k(1)+k(2),-k(2)];
left (num1+num2,num1+num2-1:num1+num2+1) = [-k(2),k(2)+k(3),-k(3)
];
left (num1+num2+num3,num1+num2+num3-1:num1+num2+num3+1) = [-k(3),k
(3)+k(4),-k(4)];
left (num1+num2+num3+num4,num1+num2+num3+num4-1:num1+num2+num3+
num4+1) = [-k(4),k(4)+k(5),-k(5)];

left (m,m-1:m) = [1,-2-alpha(5)];

for i=2:num1-1
left (i,i-1:i+1) = [1,-2-alpha(1),1];
end
for i=num1+1:num1+num2-1
left (i,i-1:i+1) = [1,-2-alpha(2),1];
end
for i=num1+num2+1:num1+num2+num3-1
left (i,i-1:i+1) = [1,-2-alpha(3),1];
end
for i=num1+num2+num3+1:num1+num2+num3+num4-1
left (i,i-1:i+1) = [1,-2-alpha(4),1];
end
for i=num1+num2+num3+num4+1:m-1
left (i,i-1:i+1) = [1,-2-alpha(5),1];
end

x = pinv(left)*right;
end

%本代码采用隐式差分的方式对温度时间函数进行求解
function [x1] = get_temperature_hidden(p,c,k,d,h,T1,T2,delt_x,
delt_t)
x1 = ones(5400,1);
n = 1;

p1 = [300,862,74.2,1.18,p];
c1 = [1377,2100,1726,1005,c];
k1 = [0.082,0.37,0.045,0.028,k];
d1 = [0.6e-3,6e-3,3.6e-3,5e-3,d];

num1 = fix(d1(1)/delt_x+1);
num2 = fix(d1(2)/delt_x);
num3 = fix(d1(3)/delt_x);
num4 = fix(d1(4)/delt_x);

```

```

num5 = fix(d1(5)/delt_x);

D=sum(d1);
x = 0:delt_x:D;
time = 0:delt_t:5400;

T_distribution_x = ones(length(x),1)*T2;

for i=2:length(time)
T_distribution_x = hidden_iteration(d1,h,k1,c1,p1,delt_t,delt_x,
    T1,T2,T_distribution_x);
if mod(i,10)==0
x1(n) = T_distribution_x(151);
n=n+1;
end
end
end

```