GARCH 模型

第 31 组　罗爽 张宗璞 张家儒

一、模型概览

1.1　学科分属

GARCH（Generalized ARCH）是 ARCH 模型的扩展，称为广义 ARCH 模型，ARCH 模型（Autoregressive conditional heteroskedasticity model）全称自回归条件异方差模型，属于计量经济学领域，是获得 2003 年诺贝尔经济学奖的计量经济学成果之一 [?]，常用于金融时间序列。

1.2　历史发展

传统的计量经济学假定时间序列变量的波动幅度即方差是固定不变的，如之前介绍的 ARIMA 模型也是如此，而这不符合实际，罗伯特・恩格尔（RobertF.Engle）1982 年在《计量经济学》杂志上发表论文提出了 ARCH 模型解决了时间序列的波动性问题，后又有波勒斯勒夫（Bollerslev）在 1986 年将 ARCH 模型发展为了 GARCH 模型，后来人们又不断改进模型，形成了 EGARCH、IGARCH、GARCH-M、NARCH 模型等。

二、模型介绍

2.1　ARCH 模型 [?]

条件异方差性建模就是对时间序列模型增加一个动态方程，来刻画资产收益率的条件方差随时间的演变规律。ARCH 模型就能准确地模拟时间序列变量的波动性变化，在金融工程学的实证研究中应用广泛，ARCH 模型的基本思想是：资产收益率的扰动 a_t 是序列不相关的，但不是独立的；a_t 的不独立性可以用其延迟值的简单二次函数来描述。具体地说，ARCH（p) 模型可以表示为：假设 $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$，此处 ε_t 是均值为 0，方差为 1 的独立同分布随机变量序列, 此处序列 σ_t^2 建模为：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 \tag{1}$$

其中 $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i > 0$。

2.2 GARCH 模型 [?]

虽然 ARCH 模型简单，但若要充分地描述资产收益率的波动率过程，会需要很多参数，于是出现了 ARCH 模型的推广形式：GARCH 模型。GARCH(p,q) 模型表示为：对对数收益率序列 γ_t, 令 $a_t = \gamma_t - \mu_t$ 为 t 时刻的新息，称 a_t 服从 GARCH(p,q) 模型，且满足下式：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{2}$$

其中 $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$，此处 ε_t 是均值为 0、方差为 1 的独立同分布随机变量序列，$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$,

2.3 EGARCH 模型 [?]

EGARCH 模型是在 GARCH 模型基础上的改进，称为指数 GARCH 模型，GARCH 模型存在着一些缺陷，如无法应对杠杆效应[1]，因为 GARCH 模型假定正的“扰动”和负的“扰动”对波动率有相同的影响，EGARCH 模型就是为了刻画波动率对大的“正”和“负”资产收益率的不对称性而提出来的。EGARCH 模型考虑了加权的新息：

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)] \tag{3}$$

其中 θ 和 γ 是实常数，ε_t 和 $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ 都是零均值的独立同分布序列，且有连续的分布，因此 $E[g(\varepsilon_t)] = 0$，EGARCH(p,q) 模型可以表示为：

$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j ln(\sigma_{t-j}^2) \tag{4}$$

三、模型应用

3.1 ARCH 模型的建模过程

(1) 通过检验数据的序列相关性建立一个均值方程（比如用 ARMA 模型对收益率序列建立计量经济模型），消除数据间的线性依赖。

(2) 对均值方程的残差进行 ARCH 效应[2]检查。有两种检验方法：一种是通常的 Ljung-Box 统计量应用于均值方程的残差平方序列；另一种是拉格朗日乘子检验。

(3) 如果 ARCH 效应显著，则可以用 a_t^2 的偏自相关来确定 ARCH 模型的阶数，对均值方程和波动率方程进行联合估计。

(4) 对模型进行检查和调整，对一个正确指定的 ARCH 模型，标准化的残差是一列独立同分布的随机变量序列。

[1]波动率对价格大幅上升和大幅下降的反应不同

[2]条件异方差序列的序列相关性

(5) 使用模型进行预测。

GARCH 模型也可以用 ARCH 模型的建模方法，只是 GARCH 模型定阶比较困难，实际中只用到低阶的 GARCH 模型，如 GARCH(1,1)、GARCH(1,2) 和 GARCH(2,1) 等，下面举例说明如何使用 GARCH 模型。

3.2 GARCH 模型举例 –股市风险度量 [?]

应用背景

金融市场风险管理的核心是对风险的度量，而度量风险最流行的方法是 VaR[3]方法，如何基于 GARCH 模型计算市场风险 VaR 值则成为目前的主流。假定以资产未来价值的期望为参照，则计算 VsR 的公式为：

$$VaR_T = p_0 \sigma z_c \sqrt{T} \tag{5}$$

其中 p_0 为资产的最初价值，σ 为方差，z_c 为下分位数，T 为资产的持有期。使用 GARCH 模型计算出的条件异方差，然后进行回报和方差的预测，利用预测出的回报和方差以及相应概率分布下的分位数就可以利用式 (5) 计算未来的 VaR 值。

应用过程

(1) 原始数据：本例选取了沪市作为研究样本，使用 1998 年 1 月 5 日 -2006 年 11 月 6 日上证综指日收盘价格指数，样本总量为 2129 个，股票的日收益率定义为：

$$R_t = ln(\frac{p_t}{p_{t-1}}) \tag{6}$$

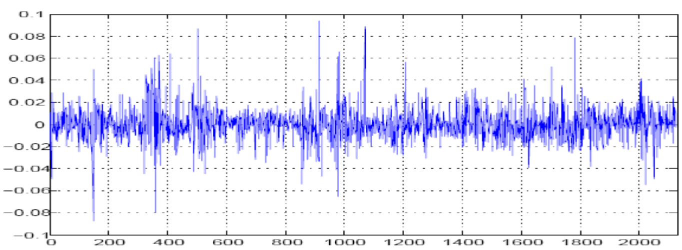

图 1　样本数据的日对数收益率线性图

ADF Test Statistic	-44.95372	1% Critical value	-3.433227
		5% Critical value	-2.862697
		10% Critical value	-2.567432

图 2　对数收益率序列单位根检验结果

[3]风险价值，一定置信水平下，资产或投资组合在未来一段时间内可能遭受的最大损失

由此得到样本数据的日对数收益率如图1, 用单位根检验方法对对数收益率序列进行检验，得到如图2的结果，由图中数据可知可知对数收益率序列平稳。

(2) 确定 GARCH(p,q) 模型：对对数收益率序列作自相关函数和对对数收益率平方序列作自相关函数，得到图3, 可以看出大部分的时滞自相关函数值在横轴附近波动，可以认为收益率序列不具有自相关性，但收益率的平方表现出一定的自相关性，，对序列进行异方差测试，结果显示沪市收益率序列存在异方差现象，使用 AIC 原则确定使用 GARCH（1，1）模型。

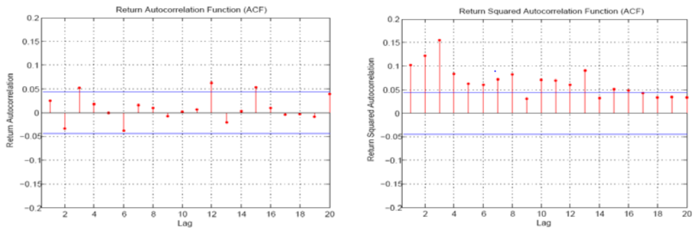

图 3　收益率序列 ACF(左）和收益率平方 ACF(右）

(3) 模型检验：对 AGRCH(1,1) 模型估计后的残差做异方差效应检验，不存在显著的异方差现象，表明此模型可以比较好德反映股市对数收益率序列的异方差现象。

(4) 模型预测：使用 AGRCH(1,1) 模型预测方差，计算 VaR。

四、参考文献

[1] Arch 模型. https://zh.wikipedia.org/wiki/ARCH%E6%A8%A1%E5%9E%8B.

[2] Ruey S.Tsay. 金融时间序列分析. 人民邮电出版社, 2012.

[3] 徐炜，黄炎龙. Var-garch 类模型在股市风险度量中的实证研究. 统计与决策, (03):20–23, 2008.