

MCM

llz

2019 年 7 月 15 日

1 存贮模型

1.1 不允许缺货的确定性贮存模型

1.1.1 模型假设

1. 在任何时刻，单位时间（每天）对物品的需求量恒为 r 吨；即经营商品单一，顾客对该物品需求量在时间上保持恒定；
2. 每隔时间 T 天进货 Q 吨；且假设每次进货是在存货全部售出后即刻进行，不允许缺货，即 $Q = rT$ ；
3. 每次进货需支付订货费 c_1 ，在正常期间，还需支付货物的贮存费用，单位时间（天）单位（吨）货物需支付货物的贮存费用 c_2 ；
4. 以 $q(t)$ 表示在时刻 t 该货物的存量

1.1.2 模型建立

$$\text{Min} : C = \frac{(c_1 + c_2 \int_0^T q(t) dt)}{T}$$

$$s.t \quad q(t) = Q - rt$$

$$Q = rT$$

进一步简化得到：

$$\text{Min} : C = \frac{c_1}{T} + \frac{C_2 r T}{2}$$

1.1.3 模型求解

令 $\frac{dC}{dT} = 0$, 得最优进货周期 $T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$, 进而每次的进货量 $Q = rT = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}$
即经济订货批量公式

1.1.4 模型点评

从模型的解可以发现，当订货费越高，需求量越大时，一次订货量应越大；当贮存费越高，一次订货量应越小。这些关系是符合常识的，但仅凭常识是不能得到准确的依从关系。

1.2 允许缺货的确定性贮存模型

1.2.1 模型假设

1. 在任何时刻，单位时间（每天）对物品的需求量恒为 r 吨；即经营商品单一，顾客对该物品需求量在时间上保持恒定；
2. 每隔时间 T 天进货 Q 吨；且假设每次进货是在存货全部售出后即刻进行，允许缺货，即 $Q \leq rT$ ；
3. 每次进货需支付订货费 c_1 ，在正常期间，还需支付货物的贮存费用，单位时间（天）单位（吨）货物需支付货物的贮存费用 c_2 ；每天单位时间（天）单位（吨）货物需支付缺货费 c_3 ；
4. 以 $q(t)$ 表示在时刻 t 该货物的存量，当 $q(t) \leq 0$ 时表示缺货

1.2.2 模型建立

$$\text{Min} : C = \frac{c_1 + c_2 \int_0^{\frac{Q}{r}} q(t) dt - c_3 \int_{\frac{Q}{r}}^{\frac{Q}{r} T} q(t) dt}{T}$$

$$s.t \quad q(t) = Q - rt$$

进一步化简：

$$Min : C = \frac{c_1}{T} + \frac{C_2 Q^2}{2rT} + \frac{c_3(rT - Q)^2}{2rT}$$

1.2.3 模型求解

令 $\frac{dC}{dT} = 0, \frac{dC}{dQ} = 0$ 得最优进货周期 $T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}$, 进而每次的进货量

$$Q = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}} \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$