Queuing Theory and Random Process

Yunlong Cheng

2019 年 7 月 15 日

1 概念

1.1 随机过程

一组随机变量，即指定一组参数集，对于其中每一参数点指定一个随机变量 $x(t)$，以 ω 表示随机变量 $x(t)$ 的定义域中的一点，则点偶 (t, ω) 以及概率分布完全确定随机过程。

1.2 计数过程

$\{N(t), t \geq 0\}$

- 对 $t_1 < t_2$，有 $N(t_1) \leq N(t_2)$
- 对 $t_1 < t_2$，$N(t_2) - N(t_1)$ 为时间间隔 $[t_1, t_2]$ 之间发生的事件总数。

1.3 独立增量和平稳增量

1.4 泊松过程

是最重要的计数过程。满足长度为 t 的任意时间区间的时间个数服从均值为 λt 的泊松分布。

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

重要性质和概念:

- $E\{N(t)\}=\lambda t$　λ 称为泊松过程的速率
- $P(\text{两次事件之间的间隔})=e^{-\lambda t}$

1.5 排队论肯德尔记号

X/Y/Z/A/B/C :

- X - 顾客相继到达的间隔时间的分布。
- Y - 服务时间的分布。

  X,Y 的取值可以为：M - 指数分布，G - 一般分布
- Z - 服务台个数。
- A - 系统容量限制，默认为 ∞
- B - 顾客源数目，默认为 ∞
- C - 服务规则，默认为 $FCFS$

1.6 排队论基本量和价格方程

- L - 系统中顾客平均数。
- L_Q - 队列中平均等待顾客数。
- W - 一个顾客在系统中所耗的平均时间。

- W_Q - 一个顾客在队列中等待的平均时间。
- 系统赚钱的平均速率 $= \lambda_a \times$ 进入系统的顾客所支付的平均金额
  其中 $\lambda_a = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$

三个规则 (对所有价格方程都成立，由 Little 公式保证)：

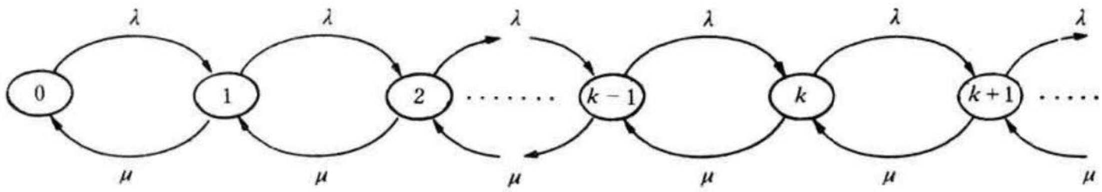
- $L = \lambda_a \times W$
- $L_Q = \lambda_a \times W_Q$
- $1 - P_0 = \lambda_a \times E(S)$

1.7 稳态概率

系统中有 n 个顾客的长程概率 $P_n = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = n\}$，$P_0$ 表示系统处于空闲的概率。

1.8 平衡方程

进入状态 n 的速率 = 离开状态 n 的速率



λ, μ 为顾客进入/离开平均速率

2 模型

2.1 M/M/1 型

1. 平衡方程与约束条件：

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$(\lambda+\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, n \geq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

2. 性能指标计算：

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$
$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$
$$W_Q = W - E(s) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$
$$E(S) = \frac{1}{\mu} \text{为一个顾客被服务的平均时间}$$
$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

2.2 有限容量的 M/M/1 型 (变形 1)

因为是有限容量所以存在最后一个状态。

最后一个平衡方程：

$$\mu P_N = \lambda P_{N-1}$$

性能指标：

$$W = \frac{L}{\lambda_a}$$
$$\lambda_a = \lambda(1 - P_n)$$

2.3 到达率和离开率不是定值 (变形 2)

2.4 M/M/k 型 (变形三)

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n < k \\ k\mu & n \geq k \end{cases}$$

3 排队论分析思路

1. 分析系统状态空间及转换关系.
2. 根据转换关系列出平衡方程.
3. 求解平衡方程（逐差法、观察法）.
4. 计算性能指标（级数求和、价格方程）