

# “同心协力”策略研究

## 摘要

本题在于考察分析同心球项目中不同情境下，通过调整团队队员发力的时机及力度，找出团队协作的最佳策略，使排球在鼓面上能持续颠起。

- 问题一分析
- 问题二分析
- 问题三分析
- 问题四分析

关键词

# 1 问题重述

## 1.1 问题背景

“同心协力”是一项需要团队高度协作的项目，不仅考察队员之间的默契程度，还锻炼了队员在压力环境中的心理承受能力，近年来受到了人们的热烈追捧。该项目的道具是一面在鼓身沿圆周均匀固定了多根绳子的牛皮双面鼓，以及一个富有弹性、气密性好的专用排球。项目开始时，团队成员每人牵拉一根绳子的末端，使鼓面保持水平，然后将球从鼓面正中心放下，队员找准时机同时用力将球颠起，使其能在鼓面上持续跳动而不落地，最终颠球次数最多的队伍获胜。

## 1.2 问题的提出（题目重述）

项目的目标是使球连续颠起次数尽可能多。现给定相关参数，包括所用双面鼓及排球的质量，鼓面直径，鼓身高度。同时要求团队队员人数不少于 8 人，各队员之间最小距离不小于  $60\text{cm}$ 。排球最开始从鼓面中心正上方  $40\text{cm}$  处竖直下落，之后被颠起高度离鼓面距离应不小于  $40\text{cm}$ ，否则项目终止。试通过数学建模，给出最佳策略。

- (1) 假设每个队员都可以精确控制用力方向、时机和力度，讨论在此理想状态下团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度。
- (2) 现实情况下，由于各队员之间用力不同，鼓面会出现一定程度的倾斜。试通过给定的参考数据，建立模型考察队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面倾斜角度关系。
- (3) 根据问题 2 中考虑了现实情况的模型，对问题 1 的策略做出适当调整。
- (4) 实际中，当鼓面发生倾斜时，球的跳动方向也不再竖直。现给定相关数据，计算出在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度，使球调整为竖直状态弹跳，并分析在现实情况中这种调整策略的实施效果。

# 2 模型假设

1. 假设每根绳子均为柔性绳，每根绳子长度相同。
2. 不考虑风力以及空气阻力对排球运动的影响。
3. 当地重力加速度为  $9.8\text{kg}/\text{m}^2$ 。
4. 排球是一个直径为  $204\text{mm}$  的五号标准排球。
5. 将排球视为一个均匀球壳。
6. 每位队员所隔距离相同，且手离地面高度相同，为  $1.2\text{m}$ ，即各力作用位置沿鼓均匀分布。

# 3 符号说明

表1列出了本文需要的符号。

表 1: 符号说明

符号	符号描述	符号	符号描述
$m_0$	鼓的质量	$h$	鼓距离地面高度
$m_1$	排球质量	$F_{i1}$	鼓加速上升时第 $i$ 位队员施加力的大小 ( $i=1,2,3,\dots,n$ )
$l$	绳子长度	$F_{i2}$	鼓减速下降时第 $i$ 位队员施加力的大小 ( $i=1,2,3,\dots,n$ )
$\varphi$	绳子与竖直方向夹角	$x_{10}$	球从最高处落下到碰撞时的高度差
$v_{00}$	碰撞前鼓的速度	$x_{00}$	鼓从平衡位置到碰撞时的高度差
$v_{01}$	碰撞后鼓的速度	$x_{01}$	鼓自由落体的高度差
$v_{10}$	碰撞前球的速度	$x_{02}$	鼓减速回到平衡位置的高度差
$v_{11}$	碰撞后球的速度	$v_{02}$	鼓自由落体结束时的高度差
$a_1$	鼓加速上升时的加速度	$a_2$	鼓减速下降时的加速度

## 4 问题分析

### 4.1 问题 1 分析

题一是一个运动过程分析问题。因为我们考虑绳子为柔性绳，则施加力的方向沿绳方向。在理想情况下，我们可认为每位队员同时施加大小相等的力，即在此题中， $F_{i1} = F_i, F_{i2} = F_2$ 。假设在初始条件下鼓处于平衡位置，记为  $s_0$ 。我们将一次颠球过程分为三个阶段，步骤如下：

1. 在第一阶段每位队员施加竖直向上的力  $F_1$  使鼓向上运动，到达  $s_1$  与排球碰撞，此时鼓上升高度为  $x_{00}$ ，球下降的高度为  $x_{10}$ 。在碰撞前鼓有一个竖直向上的速度  $v_{00}$ ，球有一个竖直向下的速度  $v_{10}$ 。我们考虑两者碰撞过程在瞬间完成，碰撞后鼓速度记为  $v_{01}$ ，球速度记为  $v_{11}$ ，方向均为竖直向上。
2. 在第二阶段，碰撞后鼓做自由落体运动，运动方向为先上升后下降，到达  $s_2$ ，此时鼓速度为  $v_{02}$ ，与碰撞处的高度差为  $x_{01}$ ，而排球继续上升。
3. 在第三阶段，队员施加  $F_2$  的力使鼓做减速运动从  $s_2$  回到平衡位置，同时排球到达最高处，结束时鼓与排球的速度都为 0。

运动分析图如下所示：

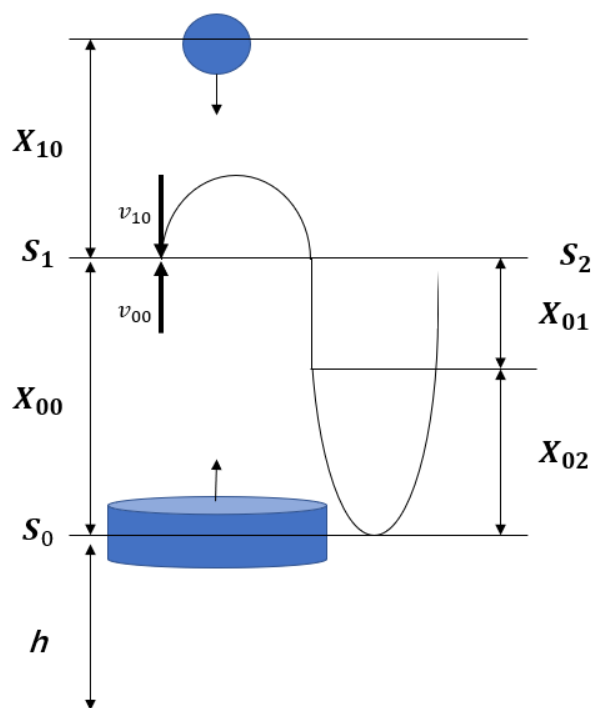


图 1: 问题一运动过程示意图

#### 4.2 问题 2 分析

#### 4.3 问题 3 分析

#### 4.4 问题 4 分析

#### 4.5 问题 1 的解答

##### 1. 绳长计算

我们假设团队队员共有  $n$  人，每人之间的距离为最小距离  $60cm$ 。忽略绳子在鼓身上的固定端之间的距离，则固定端与两队员队员所站位置可构成水平的等腰三角形，三角形顶角为  $\frac{360^\circ}{n}$ ，三角形底角角度为  $(90^\circ - \frac{180^\circ}{n})$ ，如下图所示：

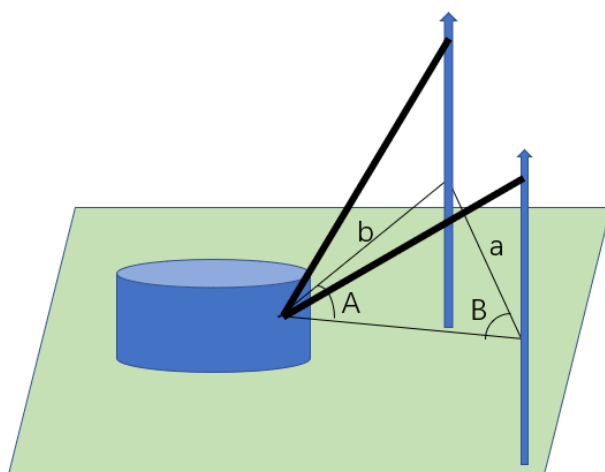


图 2: 绳长计算示意图

由正弦定理可得：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

即：

$$\frac{60}{\sin(\frac{360^\circ}{n})} = \frac{b}{\sin(90^\circ - \frac{180^\circ}{n})}$$

解得  $b$  的长度为：

$$b = \frac{30}{\sin(\frac{180^\circ}{n})}$$

又因为绳子与竖直方向夹角为  $\varphi$ , 所以绳子长度可以表示为：

$$l = \frac{b}{\sin \varphi} = \frac{30}{\sin(\frac{180^\circ}{n}) \sin \varphi} \quad (1)$$

## 2. 运动计算

在最佳协作策略下，每位队员都想要使自己施加的力尽可能小，持续时间尽可能短。这样我们可以假设排球所能到达的最高高度恰好为  $40\text{cm}$ 。在第一阶段中，排球从最高处自由落到碰撞位置的时间与鼓从  $s_0$  上升到碰撞位置的时间相等，可列公式：

$$\frac{v_{00}}{a_1} = \frac{v_{10}}{g} \quad (2)$$

且有  $x_{00} + x_{10} = 0.4$ , 即：

$$\frac{v_{10}^2}{2g} + \frac{v_{00}^2}{2a_1} = 0.4 \quad (3)$$

在二、三、阶段中，排球从碰撞位置回到最高点的时间与鼓从碰撞位置回到  $s_0$  的时间相等，可列公式：

$$\frac{v_{11}}{g} = \frac{v_{02} + v_{01}}{g} + \frac{v_{02}}{a_2} \quad (4)$$

且有  $x_{10} + x_{01} + x_{02} = 0.4$ , 则：

$$\frac{v_{11}^2}{2g} + \frac{(v_{02}^2 - v_{01}^2)}{g} + \frac{v_{02}^2}{a_2} = 0.4 \quad (5)$$

排球做自由落体运动，在同一高度时速度大小相同，则有：

$$v_{11} = v_{10} \quad (6)$$

碰撞时，由动量守恒可列公式：

$$m_0 v_{00} - m_1 v_{11} = m_0 v_{01} + m_1 v_{11} \quad (7)$$

碰撞恢复系数为：

$$e = \frac{v_{11} - v_{01}}{v_{00} + v_{11}} \quad (8)$$

我们假设参与人数为 8 人，在最佳策略下每人施加力应尽可能小，则绳子与竖直方向夹角应尽可能小。所以此时  $h = 0$ , 即  $s_0$  在水平地面上。手的作用高度与绳子在鼓身固定端的高度差为  $1.2 - (\frac{0.22}{2}) = 1.09\text{m}$ 。

$$\cos \varphi = \frac{1.09}{l} \quad (9)$$

### 3. 计算求解

结合方程 (1) 到方程 (9)，利用 MATLAB 求解，得到结果：

$$v_{00} = 0.593537m/s$$

$$v_{01} = 0.2157m/s$$

$$v_{02} = 0.669324m/s$$

$$v_{11} = v_{10} = 2.51891m/s$$

$$F_1 = 6.25861N$$

$$F_2 = 7.14003N$$

算得第一阶段时间为  $0.257s$ ，第二阶段时间为  $0.090s$ ，第三阶段时间为  $0.337s$ 。所以最佳策略为当球从最高处下落时，每位队员施加  $6.25861N$  的力，持续时间为  $0.257s$ ，与排球碰撞，使排球弹起，最高点仍能回到  $40cm$ ，碰撞  $0.090s$  后，每位队员施加  $7.14003N$  大小的力，持续  $0.337s$ ，使鼓减速回到  $s_0$ 。

#### 4.6 问题 2 的解答

#### 4.7 问题 3 解答

#### 4.8 问题 4 解答

## 5 模型总结

#### 5.1 模型优点

#### 5.2 模型缺点

## 参考文献

[1]

[2]

## A 问题一求解代码

```

1  clc
2  clear
3  syms n h step F1 F2 v00 v11 v01 v02 h11 n
4  % e 为鼓与球碰撞的恢复系数。
5  e = 0.74; m0 = 3.6; m1 = 0.27; g = 9.8;
6  % h_min 为球颠起后需要距离鼓的最小距离40cm。
7  h_min = 0.4;
8  % step 为计算鼓上升时间的每次步长，单位为秒。
9  step = 0.001;
10 % l = input('Please input the length of the rope');
11 n = input('Please input the number of students:');
12 h = input('Please input the height of the hand:');
13 % n = 8;
14 % h = 1.2;
15 % h0 为鼓距离地面的距离。
16 h0 = 0.11;
17 % alpha 人与人之间的角度。
18 alpha = 360/n;
19 % 绳长
20 lx = sqrt(0.6^2 / (2 * (1 - cos(alpha))));
21 ly = h - h0;
22 l = sqrt(lx^2 + ly^2);
23
24 cos_phi0 = ly / l;
25
26 a1 = (n * F1 * cos_phi0 - m0 * g)/m0;
27 a2 = (n * F2 * cos_phi0 - m0 * g)/m0;
28
29 equ1 = m0 * v00 - m1 * v11 == m0 * v01 + m1 * v11;
30 equ2 = (v11 - v01) / (v00 + v11) == e;
31 equ3 = a1 * v11 == g * v00;
32 equ4 = v11/g == (v02 + v01)/g + v02/a2;
33 equ5 = v11^2/g + v00^2/a1 == 0.8;
34 equ6 = v11^2/g + (v02^2 - v01^2)/g + v02^2/a2 == 0.8;
35 equ = [equ1, equ2, equ3, equ4, equ5, equ6];
36 [F1, F2, v00, v01, v02, v11] = solve(equ, [F1, F2, v00, v01, v02, v11]);
37 fprintf('施加的力F1为: %.5f\n施加的力F2为: %.5f\n',F1(2), F2(2));

```

38

39 %  $a_2 = (n * F_2(2) * \cos_{\phi_0} - m_0 * g)/m_0$

40 %  $(v_{02}(2)^2 - v_{01}(2)^2)/(2*g) + v_{02}(2)^2/(2*a_2) + v_{11}(2)^2/(2*g)$