Universidad de Valparaíso, Departamento de Ingeniería Biomédica

Teoría de Redes
Circuitos de 1^{er} Orden

Alejandro Weinstein

1^{er} semestre 2013

1. Descarga de un condensador

El circuito que sigue muestra un condensador de valor C con condición inicial $v_C(0) = V_0$, descargándose a través de una resistencia de valor R.

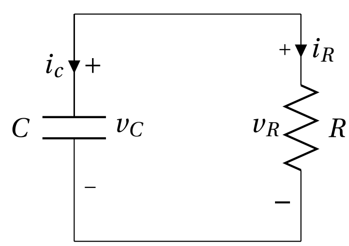

Figura 1: Descarga de un condensador.

Por LCK y LVK, $i_c = -i_R$ y $v_C = v_R$, respectivamente. Además, $i_c = C\frac{dv_C}{dt}$ e $i_R = \frac{v_R}{R}$. Combinando estas relaciones obtenemos

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2), junto a la condición inicial $v_C(0) = V_0$, es una ecuación diferencial lineal de 1^{er} orden. Resolver esta ecuación equivale a encontrar una función en el tiempo $v_C(t)$, $t >= 0$, que satisfaga simultáneamente la condición inicial y la ecuación (2). En otras palabras, para encontrar como evoluciona el voltaje en el condensador en la medida que el tiempo transcurre, debemos resolver esta ecuación diferencial.

En este caso resolvemos la ecuación diferencial ejecutando los siguientes pasos. Primero asumimos que el voltaje en el condensador es de la forma $v_C(t) = Ae^{st}$, con A y s constantes de valor desconocido. Luego reemplazamos esta expresión en la ecuación que queremos resolver. Combinando este resultado con la condición inicial, encontramos los valores de A y s.

Reemplazando $v_C(t) = Ae^{st}$ en la ecuación (2) obtenemos

$$\begin{aligned} sAe^{st} + \frac{A}{RC}e^{st} &= 0 \\ A\left(s + \frac{1}{RC}\right)e^{st} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Como e^{st} es mayor que cero, y A tampoco puede ser cero porque en ese caso no se podría satisfacer la condición inicial, la única forma de satisfacer esta ecuación es con $s = -\frac{1}{RC}$. Como $v_C(0) = A$, también podemos concluir que para satisfacer la condición inicial debemos fijar $A = V_0$. En resumen,

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/RC},\ t \geq 0. \tag{4}$$

En este caso la constante de tiempo de la exponencial decrecientes es $\tau = RC$, y podemos concluir que al condensador le toma alrededor de $4RC$ segundos descargarse a través de la resistencia. La figura 2 muestra el voltaje en el condensador en función del tiempo.

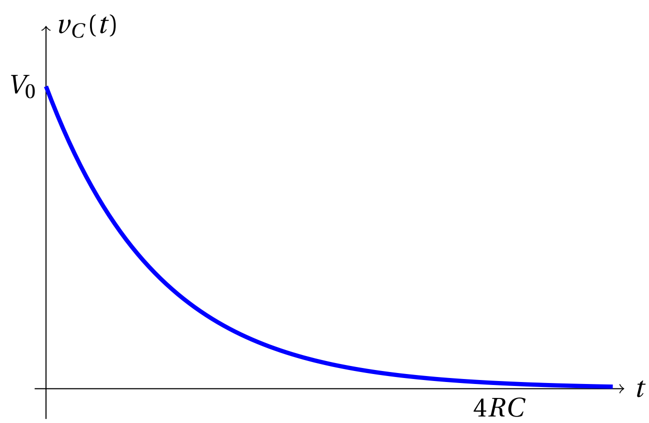

Figura 2: Voltaje en un condensador durante su descarga a través de una resistencia.

2. Carga de un condensador

El circuito que sigue muestra un condensador inicialmente descargado, i.e. $v_C(0) = 0$, que se carga a través de la fuente de voltaje continua de valor V en serie con una resistencia de valor R.

Usando LVK obtenemos

$$Ri + v_C = V. \tag{5}$$

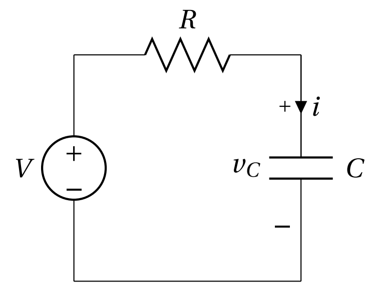

Figura 3: Carga de un condensador.

Como $i = C\frac{dv_C}{dt}$, podemos escribir

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = V \tag{6}$$
$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{V}{RC}. \tag{7}$$

En este caso la solución de la ecuación diferencial está formada por la combinación de la solución particular y la solución homogénea. La solución particular es el voltaje v_C que aparece entre los terminales del condensador en estado estacionario, en este caso,

$$v_p(t) = V. \tag{8}$$

La solución homogénea está dada por el voltaje que aparece cuando no hay fuentes independientes. De la sección anterior sabemos que éste es de la forma

$$v_h(t) = Ae^{-t/RC}. \tag{9}$$

Combinando la solución particular con la homogénea obtenemos

$$v_c(t) = v_p(t) + v_h(t) = V + Ae^{-t/RC}. \tag{10}$$

Para satisfacer la condición inicial se debe satisfacer que

$$v_C(0) = V + A = 0 \Rightarrow A = -V. \tag{11}$$

Finalmente podemos escribir

$$v_c(t) = V - Ve^{-t/RC} \quad t \geq 0. \tag{12}$$

La Figura 4 muestra el voltaje en el condensador en función del tiempo. Al igual que durante la descarga, al condensador le toma alrededor de $4RC$ segundos cargarse a través de la resistencia.

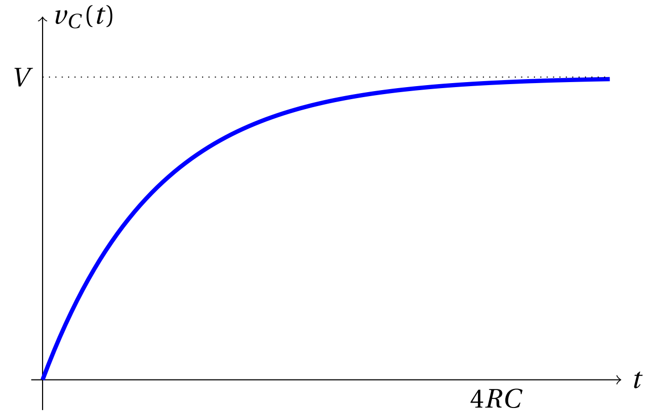

Figura 4: Voltaje en un condensador durante su descarga a través de una resistencia.

3. Descarga de un inductor

El circuito que sigue muestra un inductor de valor L con condición inicial $i_L(0) = I_0$, descargándose a través de una resistencia de valor R.

Por LVK $v_L + v_R = 0$. Además, $v_L = L\frac{di_L}{dt}$ y $v_R = Ri_L$. Combinando estas relaciones obtenemos

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \tag{13}$$
$$\frac{di_L}{dt} + \frac{Ri_L}{L} = 0. \tag{14}$$

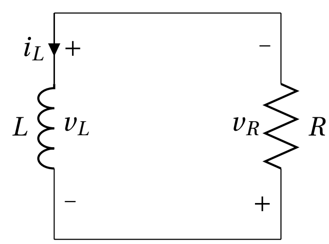

Figura 5: Descarga de un inductor.

La ecuación (14), junto a la condición inicial $i_L(0) = V_0$, es una ecuación diferencial lineal de 1^{er} orden. Al igual que como hicimos para resolver la ecuación diferencial asociada a la descarga del condensador, en este caso resolveremos la ecuación diferencial ejecutando los siguientes pasos. Primero asumimos que la corriente en el inductor es de la forma $i_L(t) = Ae^{st}$, con A y s constantes de valor desconocido. Luego reemplazamos esta expresión en la ecuación que queremos resolver. Combinando este resultado con la condición inicial, encontramos los valores de A y s.

Reemplazando $i_L(t) = Ae^{st}$ en la ecuación (14) obtenemos

$$\begin{aligned} sAe^{st} + \frac{AR}{L}e^{st} &= 0 \\ A\left(s + \frac{R}{L}\right)e^{st} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Como e^{st} es mayor que cero, y A tampoco puede ser cero porque en ese caso no se podría satisfacer la condición inicial, la única forma de satisfacer esta ecuación es con $s = -\frac{R}{L}$. Como $i_L(0) = A$, también podemos concluir que para satisfacer la condición inicial debemos fijar $A = I_0$. En resumen,

$$i_L(t) = I_0 e^{-Rt/L},\ t \geq 0. \tag{16}$$

En este caso la constante de tiempo de la exponencial decrecientes es $\tau = L/R$, y podemos concluir que al inductor le toma alrededor de $4L/R$ segundos descargarse a través de la resistencia. La figura 6 muestra el voltaje en el condensador en función del tiempo.

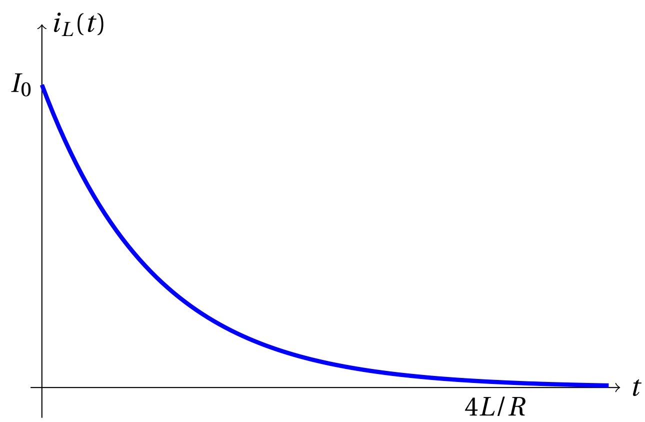

Figura 6: Corriente en un inductor durante su descarga a través de una resistencia.

4. Carga de un inductor

El circuito que sigue muestra un inductor inicialmente descargado, i.e. $v_L(0) = 0$, que se carga a través de la fuente de voltaje continua de valor V en serie con una resistencia de valor R.

Usando LVK obtenemos

$$v_L + Ri_L = V. \tag{17}$$

Como $v_L = L\frac{di_L}{dt}$, podemos escribir

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = V \tag{18}$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{Ri_L}{L} = \frac{V}{L}. \tag{19}$$

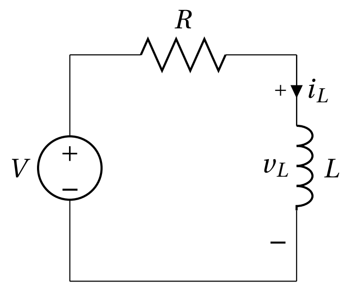

Figura 7: Carga de un inductor.

Al igual que el caso de la carga del condensador, la solución de la ecuación diferencial está formada por la combinación de la solución particular y la solución homogénea. La solución particular es la corriente i_L que aparece a través del inductor en estado estacionario, en este caso,

$$i_p(t) = \frac{V}{R}. \tag{20}$$

La solución homogénea está dada por la corriente que aparece cuando no hay fuentes independientes. De la sección anterior sabemos que éste es de la forma

$$i_h(t) = Ae^{-Rt/L}. \tag{21}$$

Combinando la solución particular con la homogénea obtenemos

$$i_L(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{V}{R} + Ae^{-Rt/L}. \tag{22}$$

Para satisfacer la condición inicial se debe cumplir

$$i_L(0) = \frac{V}{R} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{V}{R}. \tag{23}$$

Finalmente podemos escribir

$$i_L(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-Rt/L} \quad t \geq 0. \tag{24}$$

La Figura 8 muestra la corriente en el inductor en función del tiempo. Al igual que durante la descarga, al inductor le toma alrededor de $4L/R$ segundos cargarse a través de la resistencia.

5. ANÁLISIS EN ESTADO ESTACIONARIO

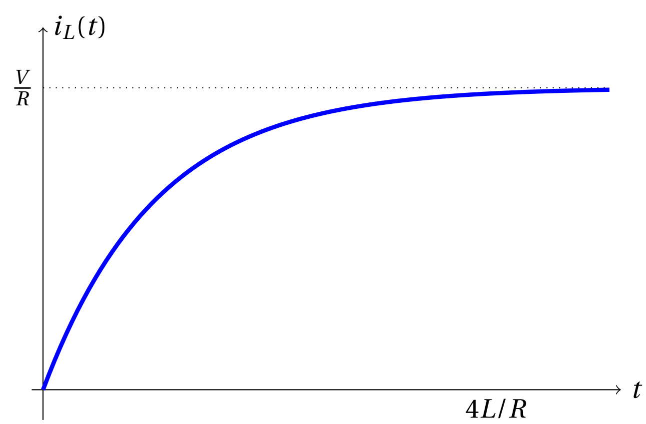

Figura 8: Corriente en un inductor durante su descarga a través de una resistencia.