

Teoría de Redes

Repaso

Alejandro Weinstein

1^{er} semestre 2013

Lo siguiente es material visto anteriormente en la asignatura Bases de Electromedicina.

1. VOLTAJE, CORRIENTE Y POTENCIA

Las dos cantidades fundamentales en el estudio de las redes eléctricas son el *voltaje*, también llamado *tensión* o *potencial eléctrico*, y la corriente. El voltaje se mide en *volts* y la corriente en *amperes*. Estas unidades se abrevian como $[V]$ y $[A]$, respectivamente. El voltaje es una cantidad que se define entre dos puntos en el espacio; siempre hablamos del “voltaje entre dos puntos”. La corriente es una cantidad que se define usando la sección transversal de un elemento; siempre hablamos de la “corriente a través de un elemento”. El voltaje se denota por V cuando es constante, o por v cuando es una función en el tiempo. Análogamente, la corriente se denota por I cuando es constante, o por i cuando es función del tiempo. En ocasiones, para enfatizar la dependencia del tiempo, el voltaje y la corrientes se denotan por $v(t)$ e $i(t)$, respectivamente.

La otra cantidad relevante es la *potencia eléctrica*. Esta cantidad está dada por el producto del voltaje y la corriente. Dependiendo de la polaridad con que se definen el voltaje y la corriente en un elemento, y del signo de la potencia, la potencia es disipada o entregada por el elemento. La potencia se mide en *watt*; esta unidad se abrevia como $[W]$. La potencia se denota por P cuando es constante, o por p cuando es una función del tiempo. Al igual que para el voltaje y la corriente, para enfatizar la dependencia del tiempo, en ocasiones la potencia se denota por $p(t)$. En resumen, podemos escribir

$$P = VI \quad (1)$$

$$p(t) = v(t)i(t). \quad (2)$$

2. DISPOSITIVOS ELÉCTRICOS

Un *circuito eléctrico*, o simplemente un *circuito*, es un conjunto de elementos eléctricos interconectados entre sí. En esta asignatura estudiamos circuitos formados por la interconexión de componentes de dos terminales.¹ Estos dispositivos son: resistencias, condensadores, inductores, fuentes de voltaje, y fuentes de corriente. La figura 1 muestra los símbolos respectivos.

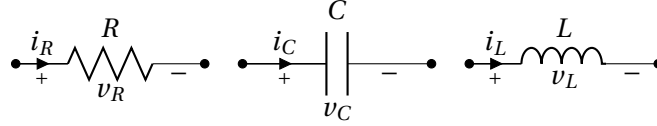


Figura 1: Símbolos de resistencia, condensador e inductor.

Los dispositivos eléctricos de dos terminales se caracterizan por la relación voltaje-corriente entre sus terminales. Las siguientes ecuaciones describen estas relaciones para las resistencias, condensadores, e inductancias, respectivamente:

$$v_R = Ri_R \quad (3)$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (4)$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (5)$$

Las constantes R , L , y C que aparecen en estas ecuaciones son parámetros cuyo valor depende del elemento en particular que se utilice. La constante R se conoce como resistencia y se mide en *ohms*. La constante C se conoce como capacitancia y se mide en *faradio*. La constante L se conoce como inductancia y se mide en *henry*. Estas unidades se abrevian usando los símbolos $[\Omega]$, $[F]$, y $[L]$, respectivamente. La ecuación (3) se conoce como *Ley de Ohm*. Las relaciones voltaje-corriente para los condensadores e inductores (4) y (5) también se pueden escribir como

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(x) dx + v_C(0) \quad (6)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(x) dx + i_L(0). \quad (7)$$

La potencia disipada en una resistencia se puede calcular fácilmente combinando la definición de potencia eléctrica dada por la ecuación (1) con la ley de Ohm:

$$p_R = v_R i_R = Ri_R^2 = \frac{V_R^2}{R}. \quad (8)$$

¹Existen componentes electrónicos de más de dos terminales, e.g., transistores, amplificadores operacionales, etc., pero estos componentes están fuera del alcance del curso. Uno también puede considerar los transformadores como dispositivos de cuatro terminales. Por simplicidad asumiremos que los transformadores son inductores acoplados magnéticamente.

Los condensadores e inductores son elementos que almacenan energía. Los condensadores almacenan energía en el campo eléctrico, mientras que los inductores lo hacen en el campo magnético. La energía almacenada está dada por

$$E_C = \frac{1}{2} C v_C^2 \quad (9)$$

$$E_L = \frac{1}{2} L i_L^2, \quad (10)$$

donde E_C y E_L son la energía almacenada en un condensador de capacitancia C faradios y un inductor de inductancia L henrys, respectivamente.

Las fuente de voltaje definen un voltaje entre sus terminales que no depende de la corriente que pasa a través de ellas. Análogamente, las fuentes de corriente definen una corriente a través de ellas que no dependen del voltaje entre sus terminales. La figura 2 muestra los símbolos correspondientes.

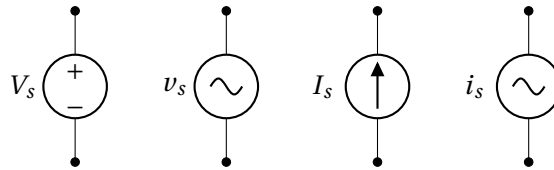


Figura 2: Símbolos de las fuentes independientes de voltaje y corriente.

Para modelar ciertos dispositivos electrónicos, e.g. transistores y amplificadores operacionales, es útil definir las fuentes dependientes—también llamadas fuentes controladas. Las fuente de voltaje dependiente definen un voltaje entre sus terminales que no depende de la corriente que pasa a través de ellas, y que es función de un voltaje o corriente definido en el circuito. Análogamente, las fuentes de corriente definen una corriente a través de ellas que no dependen del voltaje entre sus terminales, y que es función de un voltaje o corriente definido en el circuito. La figura 3 muestra los símbolos correspondientes.

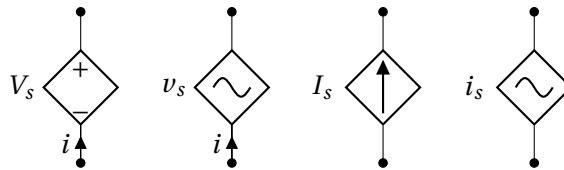


Figura 3: Símbolos de las fuentes dependientes de voltaje y corriente.

3. LEYES DE CIRCUITOS

El problema central en el análisis de redes eléctricas es, dado un circuito, encontrar el valor del voltaje y corriente correspondiente a cada elemento. Además de satisfacer la relación

voltaje-corriente para cada elemento, los voltajes y corrientes en el circuito deben satisfacer las *leyes de Kirchhoff*.

Para todo nodo de un circuito, la ley de corriente de Kirchhoff (LCK) establece que

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (11)$$

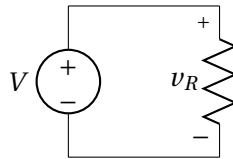
donde i_k es la k -ésima corriente que entra al nodo, y n es el número de ramas que tiene el nodo. Esta ecuación asume que las corrientes están definidas ya sea como todas entrando al nodo, o todas saliendo del nodo. Si una corriente está definida en el sentido opuesto, debe entrar con signo negativo en la sumatoria.

Para todo lazo cerrado de un circuito, la ley de voltaje de Kirchhoff (LVK) establece que

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0, \quad (12)$$

donde v_k es el k -ésimo voltaje en el lazo, y n es el número de elementos en el lazo. Al igual que para la LCK, esta ecuación requiere ser consistente con los signos de los voltajes.

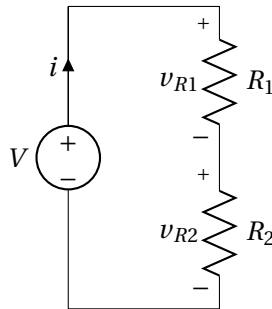
Ejemplo 1. Encuentre v_R en el circuito que sigue.



Aplicando LVK se tiene

$$V - v_R = 0 \Rightarrow v_R = V.$$

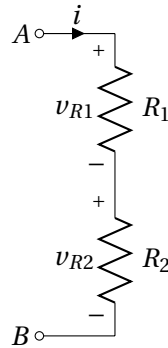
Ejemplo 2 (Divisor de voltaje). Encuentre v_{R2} en el circuito que sigue.



Aplicando LVK y ley de Ohm se tiene

$$\begin{aligned} V - v_{R1} - v_{R2} = 0 &\Rightarrow v_{R1} + v_{R2} = V \Rightarrow R_1 i + R_2 i = V \Rightarrow i = \frac{V}{R_1 + R_2} \\ &\Rightarrow v_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V. \end{aligned}$$

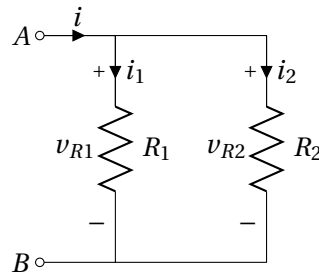
Ejemplo 3 (Resistencia en serie). Para el circuito que sigue, encuentre la resistencia equivalente entre los terminales A y B.



Aplicando LK y ley de Ohm se tiene

$$R_1 i + R_2 i = v \Rightarrow R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i} = R_1 + R_2.$$

Ejemplo 4 (Resistencia en paralelo). Para el circuito que sigue, encuentre la resistencia equivalente entre los terminales A y B.



Aplicando LK, LCK y ley de Ohm se tiene

$$v_{AB} = v_{R1} = v_{R2}; i = i_1 + i_2 = \frac{v_{AB}}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{v_{AB}}{i} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} := R_1 \parallel R_2.$$

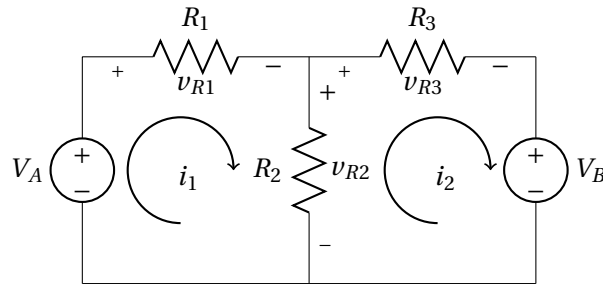
4. MÉTODOS DE ANÁLISIS

En un circuito con sólo fuentes y resistencias, la combinación de la característica voltaje-corriente de todos los elementos junto con las leyes de Kirchhoff, da paso a un sistema de ecuaciones lineales.² Los siguientes son los dos métodos usados comúnmente para encontrar estas ecuaciones.

²Si además de resistencias el circuito contiene condensadores o inductores, uno termina con un sistema de ecuaciones diferenciales.

El Método de Corrientes de Malla (MCM) aplica la LVK en cada malla del circuito. Para cada malla se define una corriente que completa un lazo cerrado. Aunque no es estrictamente necesario, es conveniente definir todas las corrientes de malla en el sentido de las agujas del reloj. Cuando una rama del circuito es compartida por dos mallas, la corriente a través de esa rama es la suma—considerando el signo—de las corrientes de malla respectivas. Una vez que se definen las corrientes, se aplica la LVK para cada rama, obteniéndose un sistema de n ecuaciones lineales, donde n es el número de mallas en el circuito.

Ejemplo 5 (Método de corriente de malla). *Para el circuito que sigue y usando MCM, encontrar las ecuaciones necesarias para encontrar todas las corrientes de malla.*



Aplicando LVK y ley de Ohm en cada malla se obtiene

$$v_A - v_{R1} - v_{R2} = 0 \Rightarrow v_A - R_1 i_1 - R_2(i_1 - i_2) = 0$$

$$v_{R2} - v_{R3} - v_B = 0 \Rightarrow R_2(i_1 - i_2) - R_3 i_2 - v_B = 0.$$

El Método de Voltaje de Nodos (MVN) aplica la LCK en los nodo del circuitos. En forma arbitraria se define uno de los nodos del circuito como nodo de referencia. Luego, para cada uno de los nodos restantes se define un voltaje entre el nodo y el nodo de referencia. Usando estos voltajes, se aplica la LCK en cada nodo, obteniéndose un sistema de $n - 1$ ecuaciones lineales, donde n es el número de nodos en el circuito.

Ejemplo 6 (Método de voltaje de nodo). *Para el circuito que sigue y usando MVN, encontrar las ecuaciones necesarias para encontrar todos los voltajes de nodo.*

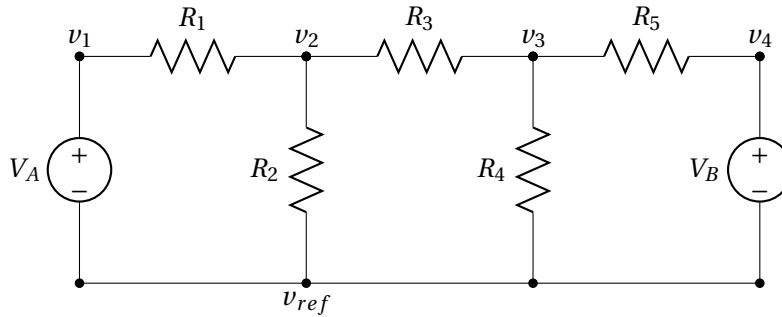
Aplicando LCK y ley de Ohm en cada nodo, y LVK en los casos particulares de v_1 y v_4 se obtiene

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0$$

$$\frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} + \frac{v_3 - v_4}{R_5} = 0$$

$$v_1 = V_A$$

$$v_4 = V_B.$$

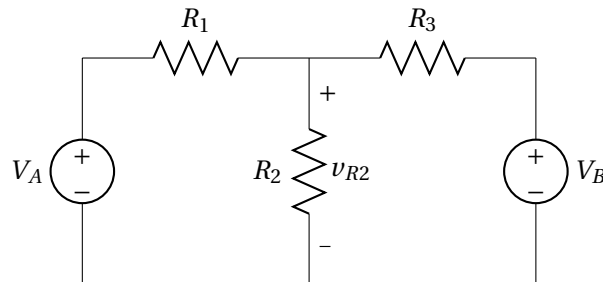


5. OTROS CONCEPTOS

5.1. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Una propiedad de los sistemas lineales en general, y de los circuitos lineales en particular, es que las variables del sistema pueden ser calculadas como la suma de los efectos de cada variable independiente. En el caso de los circuitos lineales, esto se traduce en que los voltajes y corrientes se pueden calcular como la suma de los efectos de las fuentes independientes. Esta propiedad se conoce como *principio de superposición*. Para usar este principio, se calcula el efecto de cada fuente independiente individualmente, con el resto de las fuentes “apagadas”. Una fuente se considera como “apagada” cuando la variable asociada a ésta es igual a cero. En el caso de una fuente de voltaje independiente, esto es equivalente a reemplazar la fuente por un cortocircuito. En el caso de una fuente de corriente independiente, esto es equivalente a reemplazar la fuente por un circuito abierto.

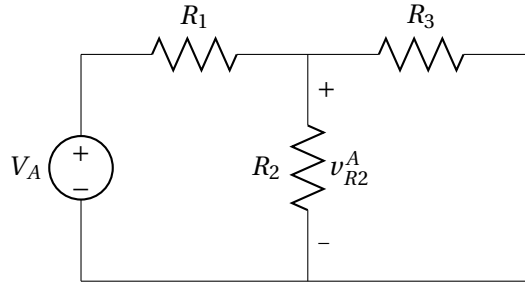
Ejemplo 7 (Principio de superposición). *Usando el principio de superposición, encuentre el voltaje v_{R2} .*



1 Efecto de V_A (V_B apagada)

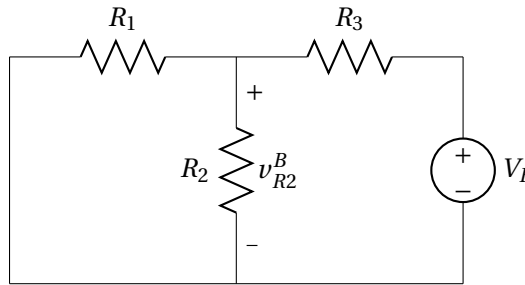
El circuito que sigue corresponde a esta condición. Con V_B apagada, las resistencias R_2 y R_3 quedan en paralelo, y el efecto del voltaje V_A sobre v_{R2} se puede calcular usando un divisor de voltaje.

$$v_{R2}^A = \frac{R_2 \parallel R_3}{(R_2 \parallel R_3) + R_1} V_A.$$



II Efecto de V_B (V_A apagada)

El circuito que sigue corresponde a esta condición. Con V_A apagada, las resistencias R_1 y R_2 quedan en paralelo, y el efecto del voltaje V_B sobre v_{R_2} se puede calcular usando un divisor de voltaje.



$$v_{R_2}^B = \frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + R_3} V_B.$$

Finalmente, el voltaje v_{R_2} se calcula como la superposición de los dos voltajes anteriores:

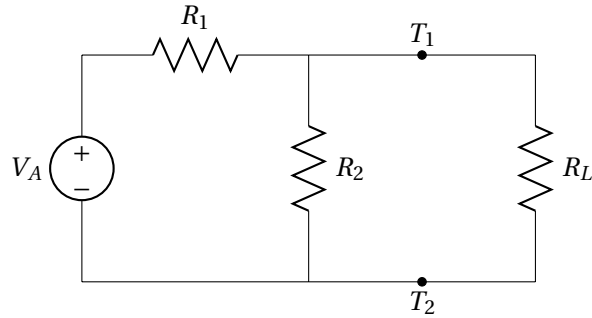
$$v_{R_2} = v_{R_2}^A + v_{R_2}^B = \frac{R_2 \parallel R_3}{(R_2 \parallel R_3) + R_1} V_A + \frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + R_3} V_B.$$

5.2. EQUIVALENTE THÉVENIN

El *equivalente Thévenin* permite representar una red de múltiples elementos por tan sólo una fuente de voltaje en serie con una resistencia. Dado un circuito, esta red equivalente se encuentra realizando los siguientes pasos. Primero se definen dos subredes A y B , tal que estas subredes están conectadas a través de un par de terminales. Defina el voltaje de terminales abiertos v_{th} como el voltaje que aparecería entre estos dos terminales de la red A si la red B se desconectara. Luego “apague” todas las fuentes independientes—es decir, reemplace todas las fuentes independientes de voltaje por un cortocircuito, y todas las fuentes independientes de corriente por un circuito abierto—y calcule la resistencia equivalente entre los dos terminales de la red A bajo estas condiciones. Llame a esta resistencia equivalente R_{th} . La red Thévenin

equivalente está dada por una fuente de voltaje de valor V_{th} en serie con una resistencia de valor R_{th} .

Ejemplo 8 (Equivalente Thévenin). *Encuentre el equivalente Thévenin de la red conectada a la izquierda de los terminales T_1 y T_2 .*



Si se desconecta R_2 , el voltaje entre los terminales T_1 y T_2 está dado por el divisor de voltaje

$$v_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_A.$$

Al apagar la fuente de voltaje V_A , la resistencia equivalente de la red conectada a la izquierda de los terminales está dada por la conexión en paralelo de R_1 y R_2 :

$$R_{th} = R_1 \parallel R_2.$$