UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO, DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA BIOMÉDICA

Teoría de Redes
Señales y Formas de Onda

Alejandro Weinstein

1^{er} semestre 2013

1. ALGUNAS SEÑALES ELEMENTALES

Definición 1 (Señal periódica)**.** *La señal $v(t)$ es periódica con período T si*

$$v(t) = v(t+T) \text{ para todo } t. \tag{1}$$

Si $v(t)$ es periódica, entonces $v(t) = v(t+kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, para todo t.

Definición 2 (Señal sinusoidal)**.** *Una señal sinusoidal está dada por*

$$v(t) = A\cos(\omega t - \phi), \tag{2}$$

donde A es la amplitud, ω es la frecuencia angular, medida en radianes por segundo, y ϕ es el ángulo de fase, medido en radianes.

La Figura 1 muestra la forma de onda correspondiente.

La frecuencia angular ω se relaciona con la frecuencia f, medida en *Hertz*, y el período de la sinusoide T, medido en segundos, a través de las siguientes relaciones:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \tag{3}$$

El ángulo de fase ϕ se relaciona con el retardo de tiempo τ, medido en segundos, a través de la relación

$$\tau = \frac{\phi}{\omega}. \tag{4}$$

Definición 3 (Escalón unitario)**.** *La función escalón unitario, también conocida como función Heaviside, está definida como*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases} \tag{5}$$

La Figura 2 muestra la forma de onda correspondiente.

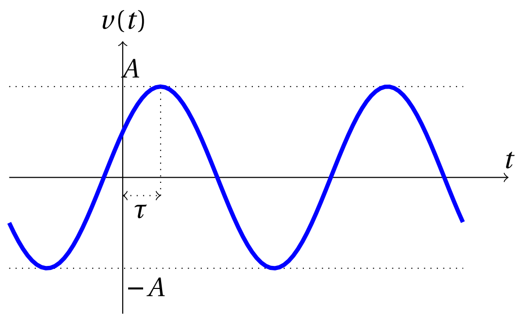

Figura 1: Señal sinusoidal $v(t) = A\cos(\omega t - \phi)$. El retardo de tiempo está dado por $\tau = \frac{\phi}{\omega}$ segundos.

Existen distintas convenciones para el valor que toma la función en $t = 0$. Algunos autores lo definen como $u(0) = \frac{1}{2}$, mientras que otros lo hacen como $u(0) = 1$. También se puede considerar que $u(0)$ es indeterminado. En lo que sigue del curso esta distinción no es relevante.

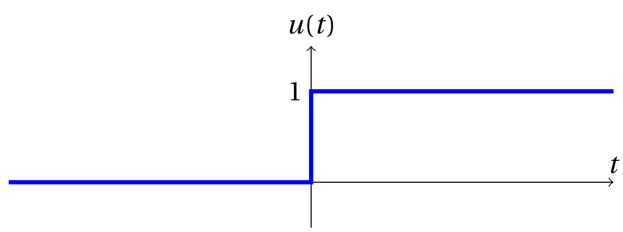

Figura 2: Escalón unitario $u(t)$.

Definición 4 (Rampa unitaria)**.** *La función rampa unitaria está definida como*

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & t > 0. \end{cases} \tag{6}$$

La Figura 2 muestra la forma de onda correspondiente.

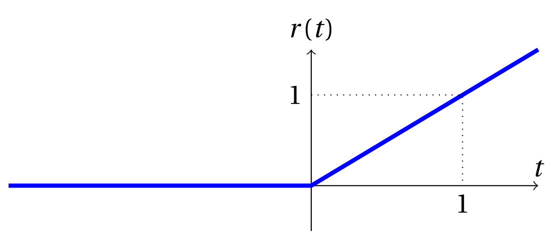

Figura 3: Rampa unitaria $r(t)$.

Definición 5 (Delta Dirac)**.** *El delta Dirac está definido como*

$$\delta(t) = \lim_{T\to 0} \delta_T(t), \tag{7}$$

donde $\delta_T(t)$ está dado por

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1}{T} & 0 \le t < T, \\ 0 & T \ge 0. \end{cases} \tag{8}$$

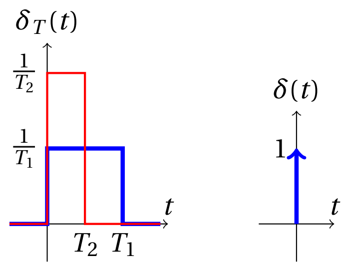

Figura 4: Pulso $\delta_T(t)$ para $T_2 < T_1$ y delta Dirac $\delta(t)$ simbolizado por una flecha de largo unitario.

La Figura 4 muestra la función $\delta_T(t)$ para dos valores distintos de T T_1 y T_2, con $T_2 < T_1$. El delta Dirac se simboliza con una flecha de largo unitario localizada en $t = 0$, como lo muestra la misma figura.

El delta Dirac satisface las siguientes propiedades:

$$\delta(t) = 0 \text{ para todo } t \neq 0 \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) v(t)\, dt = v(\tau). \tag{11}$$

El delta Dirac, el escalón unitario y la rampa unitaria están relacionados por las expresiones que siguen.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(x)\, dx; \quad r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(x)\, dx.$$

Definición 6 (Exponencial)**.** *La función exponencial está definida como*

$$v(t) = e^{at} \quad a \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

La Figura 5 muestra la forma de onda correspondiente.

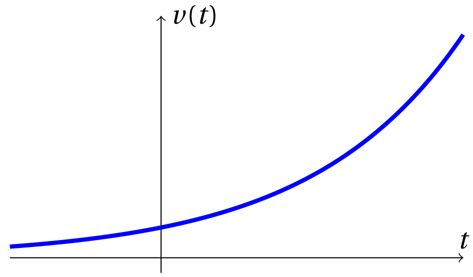

Figura 5: Función exponencial e^{at}.

Una de las propiedades fundamentales de las exponenciales es que sus derivadas y antiderivadas son también una función exponencial:

$$\frac{dv}{dt} = ae^{at}, \quad \int e^{at} = \frac{1}{a}e^{at}. \tag{13}$$

Cuando el parámetro a es negativo, la exponencial es decreciente, i.e., su valor disminuye en la medida que el tiempo aumenta. En este caso comúnmente la exponencial se define como

$$v(t) = e^{-t/\tau} \quad \tau > 0. \tag{14}$$

El parámetro τ se conoce como *constante de tiempo*. La Figura 6 muestra la forma de onda correspondiente.

Las siguientes son algunas propiedades importantes de la función exponencial decreciente.

$$v(0) = 1 \tag{15}$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0 \tag{16}$$

$$v(4\tau) = 0{,}018 \approx 0. \tag{17}$$

Comúnmente en el análisis de circuitos eléctricos la función exponencial aparece en la forma

$$v(t) = V_F + (V_I - V_F)e^{-t/\tau},\ t \geq 0, \tag{18}$$

donde $v(0) = V_I$ es el valor inicial, y $\lim_{t\to\infty} v(t) = V_F$ es el valor final, también conocido como valor en estado estacionario. La Figura 7 muestra la forma de onda correspondiente.

2. Valor medio y efectivo

Definición 7 (Valor medio)**.** *Dado $v(t)$ periódico con período T, el valor medio se define como*

$$v_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\, dt. \tag{19}$$

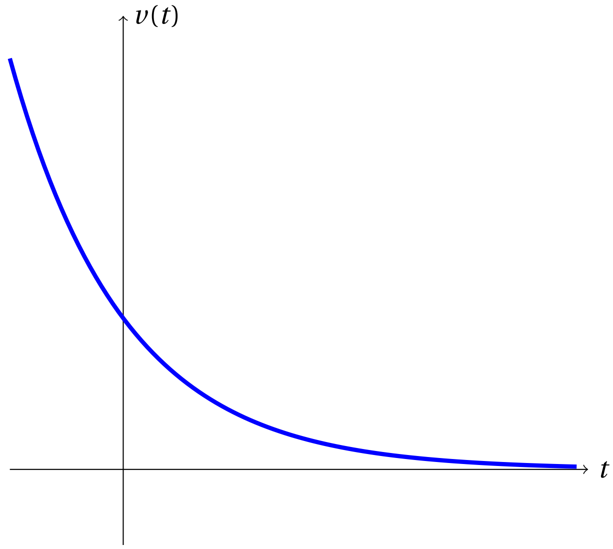

Figura 6: Función exponencial decreciente $e^{-t/\tau}$.

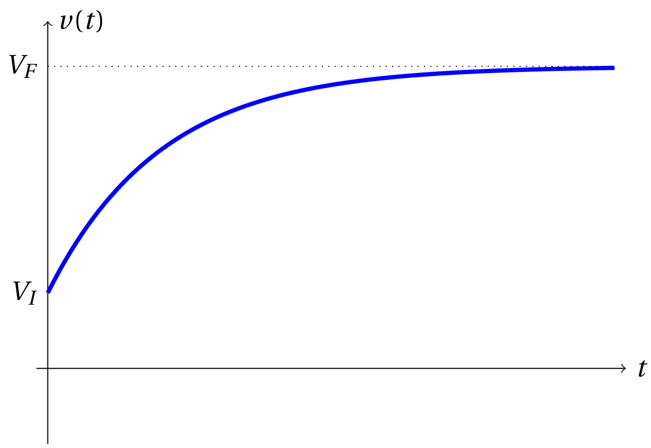

Figura 7: Función $v(t) = V_F + (V_I - V_F)e^{-t/\tau},\ t \geq 0$ para $t > 0$.

El valor medio de $v(t)$ también se denota como $\bar{v}$ o $\langle v(t) \rangle$. Como $v(t)$ es periódico, los rangos de la integral en la ecuación (21) se pueden desplazar en un valor arbitrario $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$v_{\text{medio}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\, dt. \tag{20}$$

Definición 8 (Valor efectivo)**.** *Dado $v(t)$ periódico con período T, el valor efectivo se define como*

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)\, dt}. \tag{21}$$

El valor efectivo también se conoce como *valor eficaz*, o por su nombre en inglés *Root Mean Square (RMS) value*, y también se denota como v_{RMS}.

Ejemplo 9 (Valor medio de una sinusoide)**.** *Calcule el valor medio de* $v(t) = Acos(\omega t)$.
En este caso el período de $v(t)$ *es* $T = \frac{2\pi}{\omega}$. *El valor medio es*

$$v_{medio} = \frac{A\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} cos(\omega t)\ dt = \frac{A}{2\pi} sin(\omega t)\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0.$$

Ejemplo 10 (Valor eficaz de una sinusoide)**.** *Calcule el valor eficaz de* $v(t) = Acos(\omega t)$.
Usando la identidad trigonométrica $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, *el valor eficaz se calcula como*

$$\begin{aligned} v_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2(\omega t)\ dt} \\ &= A\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\ dt + \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t)\ dt} \\ &= A\sqrt{\frac{1}{2T}T + 0} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

El valor eficaz es útil para calcular la potencia media disipada por una resistencia cuando el voltaje entre sus terminales es una función periódica. Dado el voltaje periódico $v(t)$ entre los terminales de una resistencia de valor R, la potencia instantánea disipada por la resistencia es

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R}. \tag{22}$$

El valor medio de la potencia instantánea es

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{medio}} &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\ dt \\ &= \frac{1}{RT}\int_0^T v^2(t)\ dt \\ &= \frac{v_{RMS}^2}{R}. \end{aligned}$$

Usando el mismo razonamiento, se concluye que si una corriente periódica $i(t)$ pasa por una resistencia de valor R, la potencia disipada por la resistencia es

$$p_{\mathrm{medio}} = i_{RMS}^2 R.$$

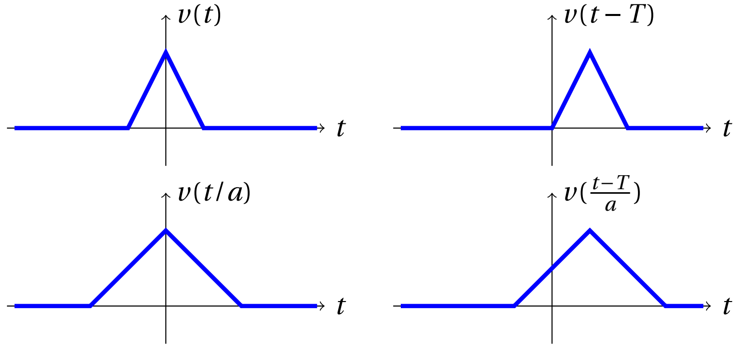

Figura 8: Traslación y dilatación de $v(t)$.

3. Traslación y dilatación

Dada la señal $v(t)$ y el parámetro $T > 0$ medido en segundos, $v(t-T)$ es una señal con la misma forma que $v(t)$, pero trasladada T segundos hacia la derecha en el eje del tiempo. Podemos decir que $v(t-T)$ es igual a $v(t)$ retardada T segundos. Análogamente, $v(t+T)$ es una señal con la misma forma que $v(t)$, pero trasladad T segundos hacia la izquierda en el eje del tiempo. Podemos decir que $v(t-T)$ es igual a $v(t)$ adelantada T segundos.

Dada la señal $v(t)$ y el parámetro $a > 1$ medido en segundos, $v(t/a)$ corresponde a una versión dilatada en el tiempo de $v(t)$, y $v(at)$ corresponde a una versión comprimida en el tiempo de $v(t)$.

La Figura 8 muestra un ejemplo de translación, de dilatación y de la combinación de la translación y dilatación.