

## Узагальнена політропна модель для зір типу Сонця

*М. Ваврух, Д. Дзіковський*

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів, Україна  
e-mail: mvavruk@gmail.com*

Метод Еддінгтона, що ґрунтується на одночасному врахуванні газового і світлового тисків при однорідному хімічному складі речовини зорі, узагальнено на випадок моделі з просторово неоднорідним хімічним складом. В результаті одержано рівняння стану, що виражається узагальненою політропою з індексом  $n = 3$ . Як приклад розв'язано рівняння механічної рівноваги для Сонця як з використанням стандартного політропного рівняння стану, так і узагальненої політропи. Обчислено координатну залежність характеристик Сонця в рамках двох моделей. Одержані результати порівнюються з результатами числових розрахунків для Сонця, виконаних на основі системи рівнянь Шварцшильда для стандартної моделі Сонця. Показано, що стандартна політропна модель застосовна лише для Сонця нульового віку. Характеристики Сонця, розраховані на основі узагальненого рівняння стану, є близькими до результатів числових розрахунків на основі рівнянь Шварцшильда. Зроблено висновок, що стандартна політропна модель застосовна для зір головної послідовності нульового віку, а узагальнена політропна модель – для зір скінченого віку, у яких термоядерні реакції вже створили суттєву просторову неоднорідність хімічного складу всередині ядра.

**Ключові слова:** зорі-політропи, просторово неоднорідний хімічний склад, рівняння механічної рівноваги.

**PACS number(s):** 97.20.-w

## 1 Вступ

Побудова рівняння стану зоряної речовини є основним моментом в теорії внутрішньої будови зір. Численні моделі рівняння стану запропоновано для Сонця [1], у яких поряд із тиском ідеального класичного газу враховується також світловий тиск, вплив міжчастинкових кулонівських взаємодій та різні варіанти однорідного хімічного складу. Стандартна політропна модель з рівнянням стану  $P(r) = K(\rho(r))^{1+1/n}$  (де  $K$  і  $n$  є сталими параметрами) є зручним наближенням для оцінок впливу осьового обертання на характеристики зір. Такий підхід започатковано Мілном [2] для політропи з індексом  $n = 3$  для наближеного аналітичного опису при малих кутових швидкостях. В роботі Чандрасекара [3] цей метод був застосований для обертових політроп з індексом  $1 \leq n \leq 4$ . Джеймс використав чисельне інтегрування рівняння механічної рівноваги і розрахував масу, об'єм, полярний і екваторіальний радіуси, прискорення на екваторі та момент інерції відносно двох осей без обмеження на величину кутової швидкості політропи [4]. На жаль, самі розв'язки рівняння рівноваги залишились “за кадром”. У роботі [5] було узагальнено метод Мілна-Чандрасекара з метою точнішого опису периферійної області обертової політропи. Зшивання розв'язків внутрішньої області з розв'язками для периферії виконувались з використанням результатів Джеймса [4].

Копал зауважив, що у частковому випадку  $n = 1$  змінні у рівнянні рівноваги розділяються, що дозволяє записати точний аналітичний розв'язок у вигляді безмежного ряду за поліномами Лежандра від косинуса полярного кута та сферичними функціями Бесселя від радіальної змінної [6]. Для знаходження явного вигляду розв'язку необхідно було визначити сталі інтегрування, чого Копал не зробив. Розв'язок для випадку  $n = 1$ , який автор

роботи [7] вважав точним, насправді є наближенням малих швидкостей і відрізняється від результату Чандрасекара лише точнішим розрахунком сталої інтегрування. Запропонований Копалом розклад до полінома  $P_8(\cos \theta)$  включно (з чотирма сталими інтегрування) реалізовано в роботі Вільямса [8] за допомогою чисельного методу знаходження сталих інтегрування.

У роботах [9, 10, 11] одержано наближені аналітичні розв'язки рівняння рівноваги і розраховано характеристики обертових політроп з індексом  $1 \leq n \leq 3$  за методом Мілна-Чандрасекара, але без обмеження на величину кутової швидкості. Для знаходження сталих інтегрування використано інтегральну форму рівняння механічної рівноваги, а сталі інтегрування як функції індекса політропи та кутової швидкості визначаються самоузгодженим способом послідовних наближень.

У роботах, опублікованих вже у XXI столітті, основна увага акцентується не на методичних деталях знаходження розв'язків рівняння рівноваги, а на прикладних аспектах. Одним з напрямків досліджень є знаходження параметрів рівняння стану для конкретних зір з високою кутовою швидкістю, тобто побудова політропних моделей нормальних зір за відомими зі спостережень макроскопічними характеристиками. Однак моделі політроп із наперед заданим значенням індекса  $n = 1$  (як у роботах [12, 13]) є певним обмеженням, що зменшує цінність такого підходу. Більше того, теорія нормальних зір, яка ґрунтується на одному лише рівнянні механічної рівноваги, апріорі є наближеним підходом, що може дати результати лише якісного характеру.

У перелічених вище роботах, що стосуються опису структури зір з осьовим обертанням, політропна модель використовується в ролі нульового наближення. Через недосконалість цієї моделі (яка передбачає однорідність хімічного складу) результати згаданих робіт мають лише якісний характер. Внутрішня структура Сонця у рамках моделі без осьового обертання досліджувалася багатьма авторами на основі системи звичайних диференціальних рівнянь Шварцшильда [14]. Розрахунок внутрішньої структури зір зі значним осьовим обертанням вимагає розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, і у зв'язку з цим задача сильно ускладнюється. Тому доцільно мати таку коректну модель нульового наближення, яка була б досить простою, але точнішою за стандартну політропну модель. Мета нашої роботи полягає в тому, щоб дати оцінку величини похибок, що виникають при застосуванні стандартної політропної моделі до реальних зір, а також запропонувати досконалішу політропну модель для реальних зір типу Сонця із просторово неоднорідним хімічним складом.

## 2 Метод Еддінгтона для зір з просторово неоднорідним хімічним складом

Наведене вище політропне рівняння стану є узагальненням рівнянь політропних процесів і має емпіричний характер. Еддінгтон обґрунтував політропну залежність між тиском і густиною для часткового випадку  $n = 3$  для моделі з майже однорідним хімічним складом шляхом одночасного врахування газового і світлового тиску [15]. Слідуючи Еддінгтону, розглянемо модель із просторово неоднорідним розподілом хімічного складу та сферичною симетрією. На сфері радіуса  $r$  газовий і світловий тиски визначаються співвідношеннями

$$P_{\text{gas}}(r) = \frac{k_B}{m_u \mu(r)} \rho(r) T(r), \quad P_{\text{ph}}(r) = \frac{a}{3} T^4(r), \quad (1)$$

де  $\rho(r)$  – локальна густина,  $T(r)$  – температура,  $\mu(r)$  – локальне значення безрозмірної (в атомних одиницях маси  $m_u$ ) молекулярної маси,  $a = k_B(\hbar c)^{-3} \pi^2 / 15$ ,  $k_B$  – стала Больцмана,  $c$  – швидкість світла.

Нехай згідно з основним припущенням Еддінгтона

$$P_{\text{gas}}(r) = \beta P(r), \quad P_{\text{ph}}(r) = (1 - \beta) P(r), \quad (2)$$

де  $P(r)$  – повний тиск, а  $\beta$  є сталою величиною, незалежною від координати. Виключаючи температуру із системи рівнянь (1) і (2), одержуємо співвідношення між тиском і густиною у вигляді

$$P(r) = K \left\{ \frac{\rho(r)}{f(r)} \right\}^{4/3}, \quad f(r) = \frac{\mu(r)}{\bar{\mu}}, \quad (3)$$

де  $\bar{\mu}$  – безрозмірний параметр, що має зміст середнього значення молекулярної маси, а

$$K = \left\{ \frac{1 - \beta}{\beta^4} \frac{3}{a} \left( \frac{k_B}{m_u \bar{\mu}} \right)^4 \right\}^{1/3} \quad (4)$$

співпадає зі значенням сталої в моделі Еддінгтона, тобто у наближенні  $\mu(r) = \bar{\mu}$ , або ж  $f(r) = 1$ . Таке наближення застосовне до опису нормальної зорі на головній послідовності нульового віку, або масивного виродженого карлика, у яких хімічний склад майже не залежить від координат. На прикладі Сонця ми покажемо, що використання рівняння стану (3) значно покращує опис внутрішньої будови зорі у порівнянні зі стандартною політропною моделлю. У роботі [16] було використано модель із залежною від координат ефективною безрозмірною молекулярною масою  $\mu_e(r)$  (яка є аналогом  $\mu(r)$ ) для опису гелій-водневих вироджених карликів малої маси.

### 3 Характеристики Сонця у рамках стандартної політропної моделі

Система рівнянь [17]

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r) \frac{d}{dr} \Phi_{\text{grav}}(r), \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (5)$$

описує механічну рівновагу зорі без осьового обертання. Тут використано такі позначення:  $P(r) = K(\rho(r))^{1+1/n}$ ,  $M(r)$  – маса речовини у сфері радіуса  $r$ ,

$$\Phi_{\text{grav}}(r) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6)$$

є гравітаційним потенціалом на поверхні сфери. Підставляючи рівняння стану (3) при  $f(r) = 1$  і враховуючи, що  $d\Phi_{\text{grav}}(r)/dr = GM(r)/r^2$ , систему (5) зведемо до диференціального рівняння другого порядку

$$4K \Delta_r \rho^{1/3}(r) = -4\pi G \rho(r), \quad (7)$$

де

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d}{dr} \right\} \quad (8)$$

є радіальною складовою оператора Лапласа. Для зручності числових розрахунків вводяться безрозмірні змінні за співвідношеннями

$$\xi = r/\lambda, \quad y(\xi) = \left( \frac{\rho(r)}{\rho_c} \right)^{1/3}. \quad (9)$$

Вибираючи масштаб  $\lambda$  з умови

$$K = \pi G \rho_c^{2/3} \lambda^2, \quad (10)$$

де  $\rho_c$  – густина у центрі зорі, представимо рівняння (7) у безрозмірній формі

$$\Delta_\xi y(\xi) = -y^3(\xi). \quad (11)$$

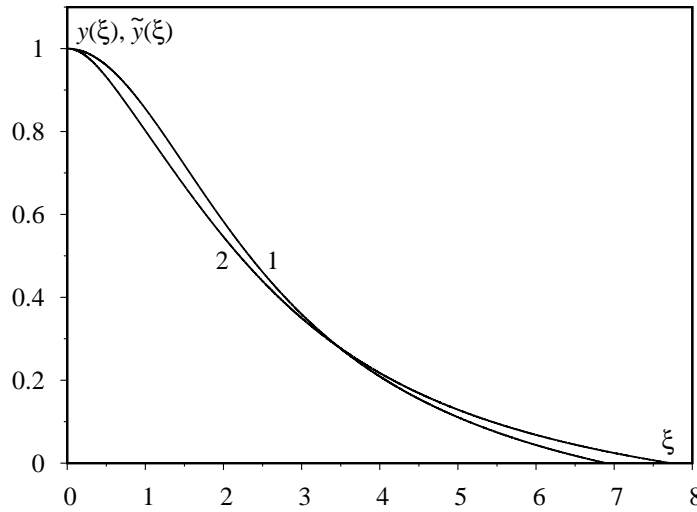


Рис. 1: Розв'язок рівняння рівноваги у різних наближеннях. Крива 1 відповідає наближенню (11), крива 2 – наближенню (21).

Згідно з означенням  $y(0) = 1$ , а регулярному розв'язку відповідає гранична умова  $dy(\xi)/d\xi = 0$  при  $\xi = 0$ . Властивості функцій Емдена для різних індексів політропи добре відомі [18]: у випадку  $n = 3$  функція  $y(\xi)$  є монотонно спадною в області  $0 \leq \xi \leq \xi_1$ , де  $\xi_1$  є коренем рівняння  $y(\xi) = 0$  і визначає безрозмірний радіус політропи ( $\xi_1 = 6.896 \dots$ ). Розрахований чисельним інтегруванням розв'язок  $y(\xi)$  зображає крива 1 на рис. 1. Згідно з означеннями (9) повна маса Сонця

$$M_{\odot} = 4\pi\rho_c\lambda^3 \int_0^{\xi_1} \xi^2 y^3(\xi) d\xi = 4\pi\rho_c\lambda^3\alpha, \quad (12)$$

$$\alpha = - \left\{ \xi^2 \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right\}_{\xi=\xi_1} = 2.01824 \dots$$

У моделі зорі, яку ми розглядаємо, фігурують параметри  $K$ ,  $\lambda$  і  $\rho_c$ , які можна визначити у рамках оберненої задачі, використовуючи спостережувані дані. Згідно з формулами (9)-(12) одержуємо систему рівнянь

$$R_{\odot} = \xi_1\lambda, \quad M_{\odot} = 4\pi\lambda^3\rho_c\alpha, \quad K = \pi G\lambda^2\rho_c^{2/3}. \quad (13)$$

Зі спостережень відомі значення маси і радіуса Сонця, тому

$$\begin{aligned} \lambda &= R_{\odot}\xi_1^{-1} = 1.0098 \cdot 10^{10} \text{ см}, \\ \rho_c &= M_{\odot}\xi_1^3 \{4\pi\alpha R_{\odot}^3\}^{-1} = 76.1731 \text{ г/см}^3, \\ K &= \pi^{1/3}G\{M_{\odot}(4\alpha)^{-1}\}^{2/3} = 3.8416 \cdot 10^{14} \text{ см}^3/(\text{г}^{1/3}\text{с}^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Розподіл густини речовини вздовж радіуса у розглянутому наближенні визначається співвідношенням

$$\rho(r) = \rho_c y^3\left(\frac{r}{\lambda}\right) = \rho_c y^3(x\xi_1), \quad (15)$$

де  $x \equiv r/R_{\odot}$ . Крива 1 рис. 2 зображає розподіл густини у шкалі змінної  $x$ .

Якщо замість спостережуваного радіуса сучасного Сонця  $R_{\odot} = 6.9634 \cdot 10^{10}$  см використати радіус Сонця нульового віку  $R_{\odot} = 6.6 \cdot 10^{10}$  см (розрахований у роботі [19]), то в цьому випадку з рівнянь (13) знаходимо, що

$$\lambda = 0.9571 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad \rho_c = 89.4610 \text{ г/см}^3, \quad K = 3.8416 \cdot 10^{14} \text{ см}^3/(\text{г}^{1/3}\text{с}^2). \quad (16)$$

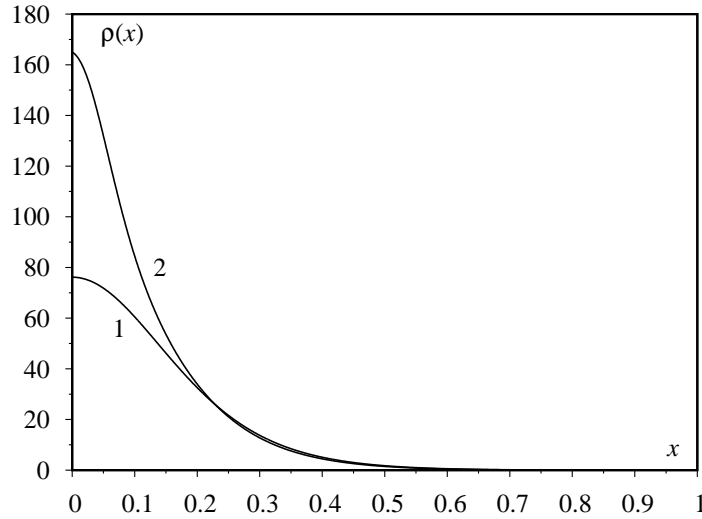


Рис. 2: Розподіл густини вздовж радіуса у різних наближеннях. Крива 1 відповідає формулі (15), крива 2 – формулі (27).

Одержане значення центральної густини співпадає зі значенням, одержаним у роботі [19]. Це означає, що стандартна політропна модель з індексом  $n = 3$  цілком застосовна для Сонця нульового віку, у якому просторовий розподіл хімічних елементів є однорідним і тому відповідає наближенню Еддінгтона. Але ця модель не застосовна для сучасного Сонця, у якому значення центральної густини  $\rho_c = 158 \text{ г/см}^3$  [19].

## 4 Опис будови Сонця у політропній моделі з просторово неоднорідним хімічним складом

Використовуючи рівняння стану у вигляді (3), із системи (5) одержуємо такий аналог рівняння (7):

$$4K\Delta_r \left[ \frac{\rho(r)}{f(r)} \right]^{1/3} = -4\pi G\rho(r)f(r) - G \frac{M(r)}{r^2} \frac{df(r)}{dr}. \quad (17)$$

Введемо безрозмірні змінні за співвідношеннями

$$\xi = r/\tilde{\lambda}, \quad \tilde{y}(\xi) = \left\{ \frac{\rho(r)}{f(r)} \left[ \frac{\rho_c}{f_c} \right]^{-1} \right\}^{1/3}, \quad (18)$$

визначаючи масштаб  $\tilde{\lambda}$  умовою

$$K = \pi G \left[ \frac{\rho_c}{f_c} \right]^{2/3} \tilde{\lambda}^2, \quad (19)$$

де  $\rho_c = \rho(0)$ ,  $f_c = f(0)$ . Згідно з означеннями (18)

$$M(r) = 4\pi\rho_c\tilde{\lambda}^3 \int_0^\xi d\xi' (\xi')^2 \tilde{y}^3(\xi') \frac{\mu(\xi')}{\mu(0)}. \quad (20)$$

Для молекулярної маси  $\mu(r) \equiv \mu(r/R_\odot) \equiv \mu(\xi/\xi_1)$  використаємо результати розрахунків у рамках стандартної моделі Сонця [20]. Це дозволяє представити безрозмірну форму рівняння (17) у вигляді

$$\Delta_\xi \tilde{y}(\xi) = -\tilde{y}^3(\xi) f^2\left(\xi/\tilde{\xi}_1\right) - \frac{f_c}{\tilde{\xi}_1} \frac{df}{d\left(\xi/\tilde{\xi}_1\right)} \cdot \frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi d\xi' (\xi')^2 \tilde{y}^3(\xi') \frac{\mu(\xi'/\tilde{\xi}_1)}{\mu(0)}, \quad (21)$$

де  $\tilde{\xi}_1$  є безрозмірним радіусом Сонця (коренем рівняння  $\tilde{y}(\xi) = 0$ ). Інтегро-диференціальному рівнянню (21) відповідають граничні умови  $\tilde{y}(0) = 1$ ,  $d\tilde{y}(\xi)/d\xi = 0$  при  $\xi = 0$ . Для аналізу рівняння (21) зауважимо, що для зорі з віком Сонця, де термоядерні реакції відбуваються  $4.5 \cdot 10^9$  років, молекулярна маса  $\mu(r)$  в області ядра більша за середнє значення  $\bar{\mu}$  ( $f(r) \geq 1$ ), а за межами ядра  $\mu(r) \approx \bar{\mu}$  ( $f(r) \approx 1$ ). Другий доданок у правій стороні рівняння (21) відіграє роль поправки. Характер розв'язку рівняння (21) визначає перший член його правої сторони. Тому в області ядра  $\tilde{y}(\xi)$  повинна виконуватись умова  $\tilde{y}(\xi) < y(\xi)$  при  $\xi \geq 0$ , а за межами ядра  $\tilde{y}(\xi) \approx y(\xi)$ , де  $y(\xi)$  – розв'язок рівняння Емдена (11). Це дозволяє використовувати метод послідовних ітерацій при чисельному інтегруванні рівняння (21), нехтуючи інтегральним членом у нульовому наближенні.

Згідно з нашою метою ми плануємо порівняти результати розрахунку внутрішньої структури Сонця у політропних моделях з результатами чисельного інтегрування рівнянь зоряної структури взятими з робіт [19, 20]. У цих роботах розраховано координатну залежність безрозмірної локальної маси  $M(r/R_\odot)M_\odot^{-1} \equiv \mathcal{M}(\xi/\tilde{\xi}_1)$ , безрозмірної світності  $L(r/R_\odot)L_\odot^{-1}$ , густини  $\rho(r/R_\odot)$ , температури  $T(r/R_\odot)$ , безрозмірної молекулярної маси  $\mu(r/R_\odot)$  та інших величин. Сучасному віку Сонця ( $4.5 \cdot 10^9$  років) відповідають центральна густина  $\rho_c = 158 \text{ г/см}^3$ , центральна температура  $T_c = 15.7 \cdot 10^6 \text{ K}$ , значення парціальних густин за межами ядра  $X = 0.708$ ,  $Y = 0.272$ ,  $Z = 0.020$ . На рис. 3 зображено координатну залежність  $\mu(r/R_\odot)$ , парціальну густину водню  $X(r/R_\odot)$  та функцію  $f(r/R_\odot)$ . Як видно з

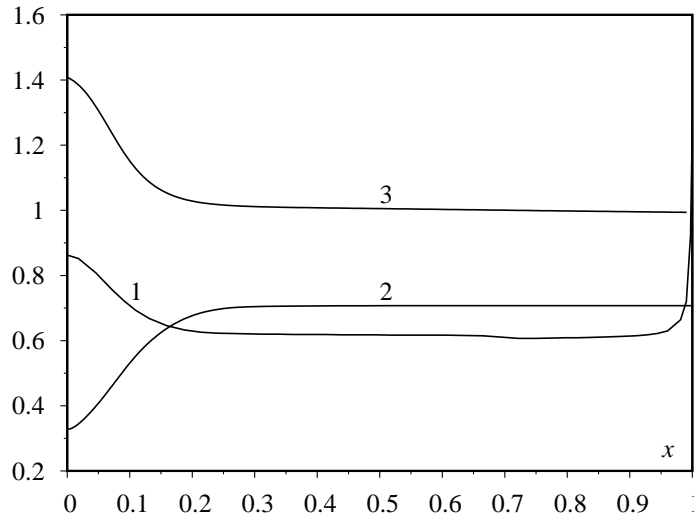


Рис. 3: Координатна залежність безрозмірної молекулярної маси  $\mu(x)$  (крива 1), парціальної густини водню  $X(x)$  (крива 2) з робіт [19, 20] та функції  $f(x)$  (крива 3).

рисунка, майже скрізь (за винятком поверхневих шарів)  $\mu(r/R_\odot)$  добре узгоджується з відомим виразом

$$\mu(r/R_\odot) = \left\{ 2X(r/R_\odot) + \frac{3}{4}Y(r/R_\odot) + \frac{1}{2}Z(r/R_\odot) \right\}^{-1}, \quad (22)$$

який відповідає повній іонізації речовини. Згідно з означенням парціальних густин  $X(r/R_\odot) + Y(r/R_\odot) + Z(r/R_\odot) = 1$ . В області поверхні, де ступінь іонізації є малим,

$$\mu(r/R_\odot) \approx \left\{ X(r/R_\odot) + \frac{1}{4}Y(r/R_\odot) \right\}^{-1} \approx \left\{ 1 - \frac{3}{4}Y(r/R_\odot) \right\}^{-1}. \quad (23)$$

Використовуючи результати розрахунку молекулярної маси  $\mu(r)$  з роботи [20], ми не беремо до уваги зміну  $\mu(r/R_\odot)$  в області поверхні, екстраполюючи розраховану в роботі [20] молекулярну масу для проміжної області на область поверхні і представляючи її у вигляді

такої апроксиманти Паде

$$\mu(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3},$$

$$a_0 = 0.0149173, a_1 = -0.0868327, a_2 = 0.730856, a_3 = 1.7342,$$

$$b_0 = 0.0172646, b_1 = -0.0893741, b_2 = 1.0339, b_3 = 2.96529.$$
(24)

Визначаючи  $\bar{\mu}$  за формулою

$$\bar{\mu} = \frac{3}{R_\odot^3} \int_0^{R_\odot} dr r^2 \mu(r/R_\odot) = 3 \int_0^1 dx x^2 \mu(x) = 0.61328,$$
(25)

ми представили у наближеному аналітичному вигляді функцію  $f(x)$  та її похідну  $df(x)/dx$ . При переході від змінної  $\xi$  до змінної  $x = r/R_\odot = \xi/\xi_1$  рівняння (21) набуває вигляду

$$\Delta_x \tilde{y}_*(x) = -\tilde{y}_*(x) f^2(x) \tilde{\xi}_1^2 - \frac{f_c \tilde{\xi}_1^2}{x^2} \frac{df(x)}{dx} \cdot \int_0^x dx' (x')^2 \tilde{y}_*(x') \frac{\mu(x')}{\mu(0)},$$
(26)

де  $\tilde{y}_*(x) \equiv \tilde{y}(x\xi_1)$ ,  $\tilde{y}_*(0) = 1$ ,  $d\tilde{y}_*(x)/dx = 0$  при  $x = 0$ ,  $f(x) \equiv \mu(x)\bar{\mu}^{-1}$ ,  $f_c \equiv f(0)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . У лінійному наближенні за інтегральним членом, розв'язок рівняння (21) зображено кривою 2 рис. 1.

Густина речовини визначається розв'язками рівнянь (21) або (26)

$$\rho(x) = \rho(\xi/\tilde{\xi}_1) = \rho_c \frac{f(x)}{f_c} \tilde{y}_*^3(x) = \rho_c \frac{f(\xi/\tilde{\xi}_1)}{f_c} \tilde{y}^3(\xi).$$
(27)

Невідомі параметри  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\rho}_c$  і  $\tilde{K}$  визначаються із системи рівнянь

$$R_\odot = \tilde{\xi}_1 \tilde{\lambda}, \quad \tilde{K} = \pi G \tilde{\lambda}^2 \left( \frac{\tilde{\rho}_c}{f_c} \right)^{2/3}, \quad M_\odot = 4\pi R_\odot^3 \tilde{\rho}_c \tilde{\xi}_1^{-3} \tilde{\alpha},$$
(28)

де з умови  $\tilde{y}(\xi) = 0$  у прийнятому наближенні  $\tilde{\xi}_1 = 7.72441$ , а

$$\tilde{\alpha} = \int_0^{\tilde{\xi}_1} d\xi \xi^2 \tilde{y}^3(\xi) \frac{\mu(\xi/\xi_1)}{\mu(0)} = 1.30993.$$
(29)

За відомими зі спостережень  $M_\odot$ ,  $R_\odot$  одержуємо

$$\tilde{\lambda} = 0.9015 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad \tilde{\rho}_c = 164.9420 \text{ г/см}^3, \quad \tilde{K} = 4.0776 \cdot 10^{14} \text{ см}^3/(\text{г}^{1/3} \text{ с}^2).$$
(30)

Розрахована за формулою (27) густина зображена на рис. 2 (крива 2). На рис. 4 порівнюються результати розрахунку густини за співвідношенням (27) (крива 2) із даними роботи [20] (крива 3).

Використовуючи співвідношення (1)-(3), можна визначити наближено координатну залежність температури,

$$T(r/R_\odot) = T_c \tilde{y}(\xi) \equiv T_c \tilde{y}(\xi_1 x) = T_c \tilde{y}(\xi_1 r/R_\odot), \quad T_c = \beta \frac{m_u}{k_B \mu(0)} \pi G \rho_c \left( \frac{R_\odot \bar{\mu}}{\tilde{\xi}_1} \right)^2.$$
(31)

При  $\beta \approx 1$  (що відповідає зорям малих мас) маємо  $T_c = 14.7 \cdot 10^6 \text{ К}$ .

На рис. 5 зображено відносну масу у сфері радіуса  $r$ : крива 1 відповідає даним роботи [20], крива 2 – розрахункам на основі виразу (20).

З метою контролю розрахунків нами обчислено світність Сонця за співвідношенням

$$L_\odot = 4\pi \int_0^{R_\odot} \rho(r/R_\odot) \varepsilon(r/R_\odot) r^2 dr,$$
(32)

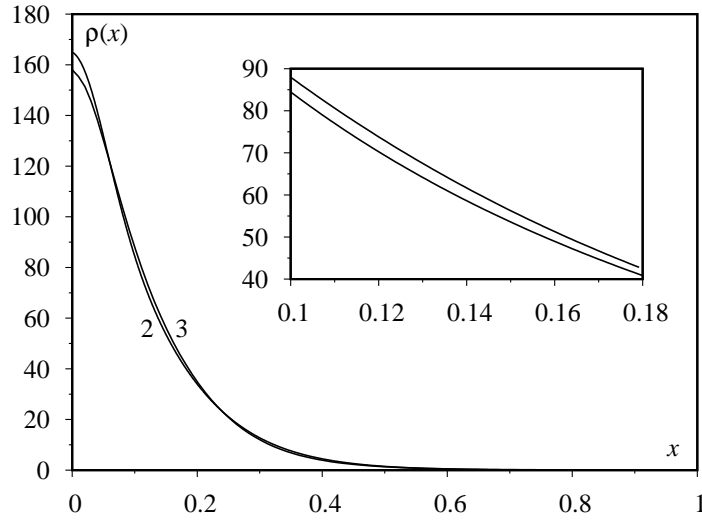


Рис. 4: Розподіл густини вздовж радіуса у різних наближеннях. Крива 2 відповідає формулі (27), крива 3 взята з роботи [20].

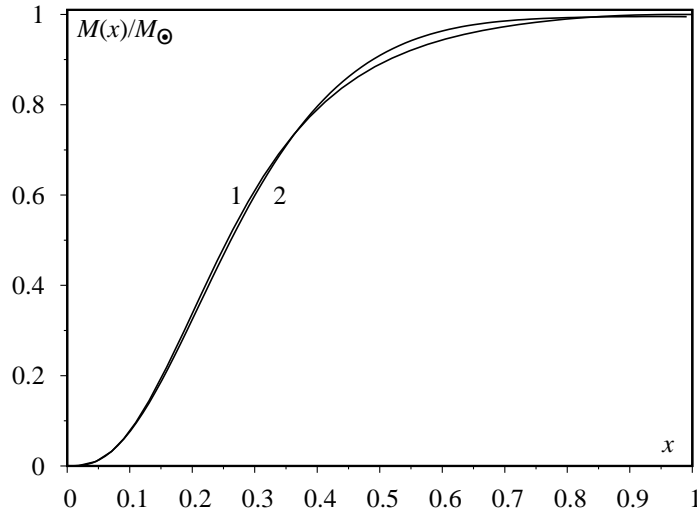


Рис. 5: Відносна маса у сфері радіуса  $r$ . Крива 1 відповідає роботі [20], крива 2 – виразу (20).

де  $\varepsilon(r/R_\odot)$  – функція енерговиділення. При врахуванні лише термоядерних реакцій протон-протонного типу [17], коли

$$\varepsilon_{pp}(r/R_\odot) = 10^{-5} \rho(r/R_\odot) X^2(r/R_\odot) \left[ \frac{T(r/R_\odot)}{10^6} \right]^4 \text{ ерг/г} \cdot \text{с}, \quad (33)$$

розрахована за формулами (32), (33) світність дорівнює  $3.18 \cdot 10^{33}$  ерг/с. Відхилення цього значення від спостережуваної світності Сонця дорівнює 18%.

## 5 Висновки

1. Як впливає з виконаних розрахунків, стандартна політропна модель з індексом  $n = 3$  не дозволяє коректно описати характеристики сучасного Сонця. Розрахований розподіл густини у цій моделі в області ядра відрізняється майже у два рази від результатів розрахунку на основі рівнянь Шварцшильда. Безрозмірний момент інерції розрахований у цій моделі (в одиницях  $8/3\rho_c R_\odot^5$ ) дорівнює  $6.9575 \cdot 10^{-4}$ , а розрахований на



основі рівнянь Шварцшильда –  $3.2164 \cdot 10^{-4}$ . Однак стандартна політропна модель описує характеристики Сонця нульового віку (з однорідним просторовим хімічним складом), у повній відповідності до результатів розрахунку на основі рівнянь Шварцшильда.

2. Використання узагальненого рівняння стану (3) дозволяє у рамках рівняння механічної рівноваги одержати характеристики Сонця, близькі до результатів [19, 20], у яких виконано чисельне інтегрування системи рівнянь Шварцшильда. Для локальної молекулярної маси  $\mu(r)$  ми використали результати розрахунків з робіт [19, 20], апроксимуючи їх виразом (24), що вносить певні похибки, як і ітераційний спосіб знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння (21). Розрахована нами центральна густина Сонця дорівнює  $164.94 \text{ г/см}^3$  і відхиляється від точного значення лише на 4%. Відхилення радіального розподілу густини від результатів роботи [19] має таку ж величину.
3. Узагальнене рівняння стану (3) відповідає зорі певного віку (для Сонця –  $4.5 \cdot 10^9$  років), у якій в результаті термоядерних реакцій виникає дефіцит водню в області ядра (надлишок гелію), що призводить до збільшення безрозмірної (усередненої за хімічними елементами) локальної молекулярної маси  $\mu(r)$ .
4. Наявні розрахунки характеристик зір з обертанням, виконані у роботах, цитованих у Вступі, не враховують вік взагалі, тому вони відповідають моделям зір малого віку, а не спостережуваним об'єктам. Використання рівняння стану (3) є перспективним для побудови політропної теорії реальних зір з осьовим обертанням.

## Література

- [1] Guenther D. B., Demarque P., Kim Y.-C., Pinsonneault M. H. Standard Solar Model. The Astrophysical Journal **387**, 372-393 (1992).
- [2] Milne E. A. The equilibrium of a rotating star. MNRAS **83**, 118-147 (1923).
- [3] Chandrasekhar S. The Equilibrium of Distorted Polytropes. I. The Rotational Problem. MNRAS **93**, 390-406 (1933).
- [4] James R. A. The Structure and Stability of Rotating Gas Masses. ApJ. **140**, 552-582 (1964).
- [5] Monaghan J. J., Roxburgh I. W. The Structure of Rapidly Rotating Polytropes. MNRAS **131**, 13-22 (1965).
- [6] Kopal Z. Bemerkung zur Theorie der rotierenden Polytropen. Zeitschrift für Astrophysik **14**, 135-138 (1937).
- [7] Caimmi R. Emden-Chandrasekhar Axisymmetric Solid-Body Rotating Polytropes. – Part One. – Exact Solutions for the Special Cases  $N=0, 1$  and  $5$ . Astrophysics and Space Science **71**, 415-457 (1980).
- [8] Williams P. S. Analytical Solutions for the Rotating Polytrope  $N=1$ . Astrophysics and Space Science **143**, 349-358 (1988).
- [9] Vavruk M. V., Tyshko N. L., Dzikovskyi D. V., Stelmakh O. M. The self-consistent description of stellar equilibrium with axial rotation. Mathematical Modeling and Computing **6**, 153-172 (2019).
- [10] Vavruk M. V., Tyshko N. L., Dzikovskyi D. V. New approach in the theory of stellar equilibrium with axial rotation. Journal of Physical Studies **24**, 3902-1-3902-20 (2020).

- [11] Vavrukh M. V., Dzikovskyi D. V. Exact solution for the rotating polytropes with index unity, its approximations and some applications. *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso* **50**, 748-771, (2020).
- [12] Kong D., Zhang K., Schubert G. An exact solution for arbitrarily rotating gaseous polytropes with index unity. *MNRAS* **448**, 456-463 (2015).
- [13] Knopik J., Mach P., Odrzywólek A. The shape of a rapidly rotating polytrope with index unity. *MNRAS* **467**, 4965-4969 (2017).
- [14] Schwarzschild M. *Structure and Evolution of the Stars* (Princeton University Press, Princeton, 1958).
- [15] Eddington A. S. *The Internal Constitution of the Stars* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [16] Vavrukh M. V., Smerechynskyi S. V., Tyshko N. L. The inverse problem of the theory of degenerate dwarfs. *Astronomy Reports* **55**, 505-524 (2011).
- [17] Gibson E. G. *The Quiet Sun* (Washington, D.C., 1973).
- [18] Chandrasekhar S. *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, 1939).
- [19] Sears R. L. Helium Content and Neutrino Fluxes in Solar Models. *Astrophysical Journal* **140**, 477-484, (1964).
- [20] Lamers H. J. G. L. M., Levesque E. M. *Understanding Stellar Evolution* (IOP Publishing, Bristol, UK, 2017).