УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 81

Студент
XXX XXX XXX
P31XX

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2023 г.

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $5 < x_1x_2x_3 + x_4x_5 \leq 9$ и неопределенное значение при $x_3x_4x_5 = 6$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_3$	x_4x_5	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	0	2	2	0
3	0	0	0	1	1	0	3	3	0
4	0	0	1	0	0	1	0	4	0
5	0	0	1	0	1	1	1	5	0
6	0	0	1	1	0	1	2	6	d
7	0	0	1	1	1	1	3	7	0
8	0	1	0	0	0	2	0	0	0
9	0	1	0	0	1	2	1	1	0
10	0	1	0	1	0	2	2	2	0
11	0	1	0	1	1	2	3	3	0
12	0	1	1	0	0	3	0	4	0
13	0	1	1	0	1	3	1	5	0
14	0	1	1	1	0	3	2	6	d
15	0	1	1	1	1	3	3	7	1
16	1	0	0	0	0	4	0	0	0
17	1	0	0	0	1	4	1	1	0
18	1	0	0	1	0	4	2	2	1
19	1	0	0	1	1	4	3	3	1
20	1	0	1	0	0	5	0	4	0
21	1	0	1	0	1	5	1	5	1
22	1	0	1	1	0	5	2	6	d
23	1	0	1	1	1	5	3	7	1
24	1	1	0	0	0	6	0	0	1
25	1	1	0	0	1	6	1	1	1
26	1	1	0	1	0	6	2	2	1
27	1	1	0	1	1	6	3	3	1
28	1	1	1	0	0	7	0	4	1
29	1	1	1	0	1	7	1	5	1
30	1	1	1	1	0	7	2	6	d
31	1	1	1	1	1	7	3	7	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,x_5 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee$$
$$\vee\, x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$$
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$
$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$		
m_{18}	10010	✓
m_{24}	11000	✓
m_{6}	00110	✓
m_{19}	10011	✓
m_{21}	10101	✓
m_{25}	11001	✓
m_{26}	11010	✓
m_{28}	11100	✓
m_{14}	01110	✓
m_{22}	10110	✓
m_{15}	01111	✓
m_{23}	10111	✓
m_{27}	11011	✓
m_{29}	11101	✓
m_{30}	11110	✓

$K^1(f)$		
m_6-m_{14}	0X110	✓
m_{18}-m_{19}	1001X	✓
m_{18}-m_{22}	10X10	✓
m_{24}-m_{25}	1100X	✓
m_{24}-m_{26}	110X0	✓
m_{24}-m_{28}	11X00	✓
m_{18}-m_{26}	1X010	✓
m_6-m_{22}	X0110	✓
m_{14}-m_{15}	0111X	
m_{22}-m_{23}	1011X	✓
m_{21}-m_{23}	101X1	
m_{19}-m_{23}	10X11	✓
m_{26}-m_{27}	1101X	✓
m_{25}-m_{27}	110X1	✓
m_{28}-m_{29}	1110X	✓
m_{28}-m_{30}	111X0	✓
m_{25}-m_{29}	11X01	✓
m_{26}-m_{30}	11X10	✓
m_{19}-m_{27}	1X011	✓
m_{21}-m_{29}	1X101	
m_{22}-m_{30}	1X110	✓
m_{14}-m_{30}	X1110	✓

$K^2(f)$	
m_{18}-m_{19}-m_{22}-m_{23}	10X1X
m_{24}-m_{25}-m_{26}-m_{27}	110XX
m_{24}-m_{25}-m_{28}-m_{29}	11X0X
m_{24}-m_{26}-m_{28}-m_{30}	11XX0
m_{18}-m_{19}-m_{26}-m_{27}	1X01X
m_{18}-m_{22}-m_{26}-m_{30}	1XX10
m_6-m_{14}-m_{22}-m_{30}	XX110

$Z(f)$
0111X
101X1
1X101
10X1X
110XX
11X0X
11XX0
1X01X
1XX10
XX110

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы										
		0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
		1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
		1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
		15	18	19	21	23	24	25	26	27	28	29
	~~0111X~~	X										
A	101X1				X	X						
B	1X101				X							X
C	10X1X		X	X		X						
D	110XX						X	X	X	X		
E	11X0X						X	X			X	X
F	11XX0						X		X		X	
G	1X01X		X	X					X	X		
H	1XX10		X						X			
	~~XX110~~											

Ядро покрытия:

$$T = \{0111X\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы									
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
		1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
		0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
		18	19	21	23	24	25	26	27	28	29
A	101X1			X	X						
B	1X101			X							X
C	10X1X	X	X		X						
D	110XX					X	X	X	X		
E	11X0X					X	X			X	X
F	11XX0					X		X		X	
G	1X01X	X	X					X	X		
H	1XX10	X						X			

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (C \vee G \vee H)\ (C \vee G)\ (A \vee B)\ (A \vee C)\ (D \vee E \vee F)\ (D \vee E)\ (D \vee F \vee G \vee H)\ (D \vee G)\ (E \vee F)\ (B \vee E)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = A\,E\,G \vee A\,C\,D\,E \vee B\,C\,D\,E \vee B\,C\,D\,F \vee B\,C\,E\,G \vee A\,B\,D\,F\,G$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ E \\ G \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0111X \\ 101X1 \\ 11X0X \\ 1X01X \end{matrix}\right\} \qquad C_2 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ C \\ D \\ E \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0111X \\ 101X1 \\ 10X1X \\ 110XX \\ 11X0X \end{matrix}\right\} \qquad C_3 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0111X \\ 1X101 \\ 10X1X \\ 110XX \\ 11X0X \end{matrix}\right\}$$

$$S_1^a = 14 \quad S_1^b = 18 \qquad S_2^a = 17 \quad S_2^b = 22 \qquad S_3^a = 17 \quad S_3^b = 22$$

$$C_4 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ C \\ D \\ F \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0111X \\ 1X101 \\ 10X1X \\ 110XX \\ 11XX0 \end{matrix}\right\} \qquad C_5 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ C \\ E \\ G \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0111X \\ 1X101 \\ 10X1X \\ 11X0X \\ 1X01X \end{matrix}\right\} \qquad C_6 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ B \\ D \\ F \\ G \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0111X \\ 101X1 \\ 1X101 \\ 110XX \\ 11XX0 \\ 1X01X \end{matrix}\right\}$$

$$S_4^a = 17 \quad S_4^b = 22 \qquad S_5^a = 17 \quad S_5^b = 22 \qquad S_6^a = 21 \quad S_6^b = 27$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{\begin{matrix} 0111X \\ 101X1 \\ 11X0X \\ 1X01X \end{matrix}\right\}$$

$$S^a = 14$$
$$S^b = 18$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_5 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_3}\,x_4$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00				
01				d
11			1	d
10				

$x_1 = 1$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	d
11	1	1		d
10	1	1	1	1

$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} 0111X \\ 101X1 \\ 11X0X \\ 1X01X \end{matrix} \right\}$$

$$S^a = 14$$
$$S^b = 18$$

$$f = \overline{x_1}\, x_2\, x_3\, x_4 \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3\, x_5 \vee x_1\, x_2\, \overline{x_4} \vee x_1\, \overline{x_3}\, x_4$$

Определение МКНФ

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	d
11	0	0		d
10	0	0	0	0

$x_1 = 1$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	0	0		
01	0			d
11			0	d
10				

$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} 00XXX \\ 0X0XX \\ 0XX0X \\ X000X \\ X0X00 \\ 1111X \end{matrix} \right\}$$

$$S^a = 16$$
$$S^b = 22$$

$$f = (x_1 \vee x_2)\ (x_1 \vee x_3)\ (x_1 \vee x_4)\ (x_2 \vee x_3 \vee x_4)\ (x_2 \vee x_4 \vee x_5)\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$f = \overline{x_1}\, x_2\, x_3\, x_4 \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3\, x_5 \vee x_1\, x_2\, \overline{x_4} \vee x_1\, \overline{x_3}\, x_4 \quad S_Q = 18 \quad \tau = 2$

Декомпозиция невозможна

$f = \overline{x_1}\, x_2\, x_3\, x_4 \vee x_1\, \overline{x_2}\, x_3\, x_5 \vee x_1\, x_2\, \overline{x_4} \vee x_1\, \overline{x_3}\, x_4 \quad S_Q = 18 \quad \tau = 2$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2)\,(x_1 \vee x_3)\,(x_1 \vee x_4)\,(x_2 \vee x_3 \vee x_4)\,(x_2 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_1 \vee x_2\,x_3\,x_4)\,(x_2 \vee x_4 \vee x_3\,x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 17 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2\,x_3$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$f = (x_1 \vee \varphi\,x_4)\,(x_2 \vee x_4 \vee x_3\,x_5)\,(\overline{\varphi} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 18 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_1 \vee x_2\,x_3\,x_4)\,(x_2 \vee x_4 \vee x_3\,x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 17 \quad \tau = 3$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$
$$f([x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_5 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_3}\,x_4 \quad (S_Q = 18, \tau = 2)$$

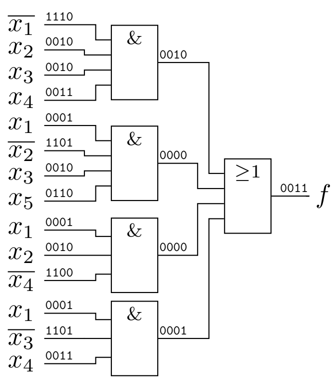
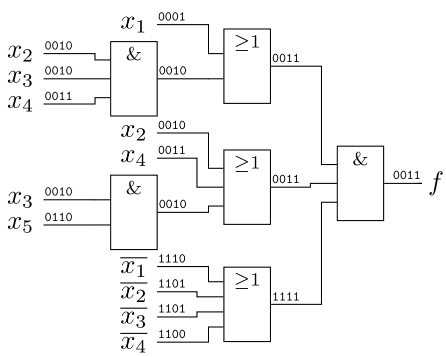


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2\,x_3\,x_4)\,(x_2 \vee x_4 \vee x_3\,x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad (S_Q = 17, \tau = 3)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4}\;\overline{x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_5}\;\overline{x_1\,x_2\,\overline{x_4}}\;\overline{x_1\,\overline{x_3}\,x_4}} \quad (S_Q = 23, \tau = 4)$$

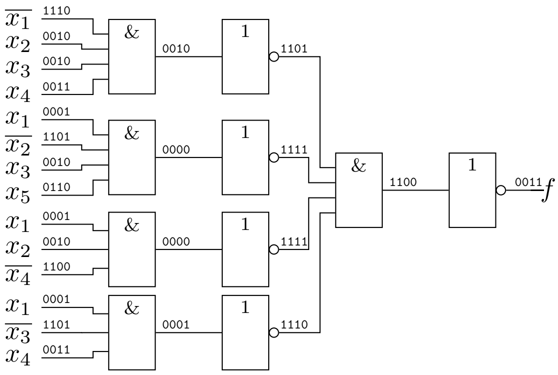
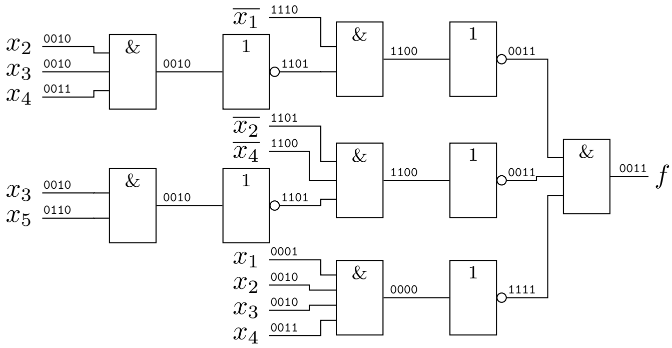


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1}\;\overline{x_2\,x_3\,x_4}}\;\overline{\overline{x_2}\;\overline{x_4}\;\overline{x_3\,x_5}}\;\overline{x_1\,x_2\,x_3\,x_4}} \quad (S_Q = 22, \tau = 5)$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{x_1\,\overline{\overline{x_2\,\overline{x_4}}\;\overline{\overline{x_2}\,\overline{\overline{x_3\,x_5}}}}}\;\overline{x_4\,\overline{\overline{x_1\,\overline{x_3}}\;\overline{\overline{x_1}\,\overline{\overline{x_2\,x_3}}}}}} \quad (S_Q = 26, \tau = 6)$$

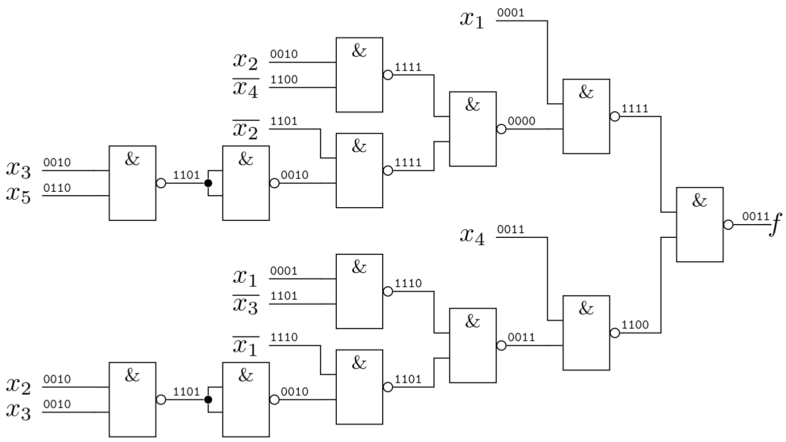


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2\,\overline{\overline{x_3\,x_4}}}}\;\overline{\overline{\overline{\overline{x_2}\,\overline{\overline{\overline{x_4}\,\overline{x_3\,x_5}}}}\;\overline{\overline{\overline{x_1\,x_2}}\;\overline{\overline{x_3\,x_4}}}}}}} \quad (S_Q = 34, \tau = 8)$$