Линейные операторы

Содержание

Литература:

В. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.

К. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.

Ф. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: «Наука», 1984.

Г. Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. М.: МЦНМО, 2014. (Содержит подробные решения)

Лекция I

В., с. 234-240, 200-205; **К.**, с. 60-77; **Ф.**, с. 314-319; **Г.**, с. 40-44, 59-61;

Данный модуль посвящён теории линейных операторов в векторных пространствах, которая является основным источником приложений линейной алгебры в различных областях математики.

§1. Линейные операторы. Ядро и образ

Определение 1.1. ***Линейным оператором*** в векторном пространстве V (***эндоморфизмом*** пространства V) называется отображение $\mathcal{A}\colon V \to V$, удовлетворяющее условиям:

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ для любых $x, y \in V$;
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$ для любых $x \in V$, $\lambda \in F$.

Множество всех линейных операторов в пространстве V будем обозначать $\mathrm{End}(V)$.

Пример 1.1. а) Нулевой оператор $\mathcal{O}$: переводит любой вектор любого пространства в нулевой;

б) Тождественный оператор $\mathcal{E}$: переводит любой вектор любого пространства в себя;

в) «Растяжение» $\lambda\mathcal{E}$, $\lambda \neq 0$: переводит любой вектор x в вектор λx;

г) Поворот на угол α — линейный оператор в плоскости E^2;

д) Пусть $V = U \oplus W$, тогда проектор на U параллельно W является линейным оператором в V;

е) Дифференцирование $\mathcal{D}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ — линейный оператор в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n;

ж) $\mathcal{T}\colon M_n(F) \to M_n(F)$ — линейный оператор транспонирования в пространстве квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля F.

Линейные операторы в одном векторном пространстве можно складывать и умножать на скаляры как обычные функции: $(\mathcal{A}+\mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, (\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$. Относительно этих операций они образуют векторное пространство. Далее, если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$, то их произведение (композиция) $\mathcal{A}\mathcal{B}$ также является линейным оператором. Умножение линейных операторов ассоциативно. Легко понять, что $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{A}$ для любого $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$. Столь же легко понять, что в общем случае $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$ (приведите пример). То есть операторы со сложением и умножением являются ассоциативным кольцом с единицей. Векторное пространство + кольцо + $((\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab))$ = ***алгебра*** (см. **В.**, с. 38-41).

Пример 1.2. Оператор транспонирования $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию $\mathcal{T}^2 = \mathcal{E}$ (пример ***инволюции***), а проектор $\mathcal{P}$ — условию $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ (пример ***идемотента***).

Определение 1.2. Для линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется его ***образ*** $\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}x \,|\, x \in V\}$ и ***ядро*** $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in V \,|\, \mathcal{A}x = 0\}$.

Замечание 1.1. Образ и ядро являются подпространствами в соответствующем векторном пространстве, то есть замкнуты относительно сложения векторов и умножения на скаляры.

Пример 1.3. а) $\mathrm{Im}\,(\mathcal{O}) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}) = V$ в любом пространстве V;

б) $\mathrm{Im}\,(\mathcal{E}) = V$, $\mathrm{Ker}(\mathcal{E}) = \{0\}$ в любом пространстве V;

в) $\mathrm{Im}\,(\lambda\mathcal{E}) = V$, $\mathrm{Ker}(\lambda\mathcal{E}) = \{0\}$ в любом пространстве V, $\lambda \neq 0$;

г) Образ оператора поворота в E^2 — вся плоскость E^2, его ядро — только нулевой вектор.

д) Если $V = U \oplus W$ и тогда $\mathcal{P}$ — проектор на U параллельно W, то $\mathrm{Im}\,\mathcal{P} = U$, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{P} = W$;

е) $\mathcal{D}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, тогда $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D}) = \mathbb{R}[x]_{n-1}$, $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}) = \mathbb{R}[x]_0$ (константы);

ж) $\mathcal{T}\colon M_n(F) \to M_n(F)$, тогда $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D}) = M_n(F)$, $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}) = \{O\}$.

Теорема 1.1. $\dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A} + \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \dim V$.

Доказательство. Выберем базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ подпространства $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ и дополним его векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$ до базиса всего пространства V. Достаточно показать, что векторы $\mathcal{A}(e_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(e_n)$ составляют базис $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. Они порождают образ, так как для любого $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$ имеем $\mathcal{A}x = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathcal{A}e_i)}_{0} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i(\mathcal{A}e_i) = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i(\mathcal{A}e_i)$. Векторы $\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n$ линейно независимы, так как из равенства $0 = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i(\mathcal{A}e_i) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right)$ следует, что $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ и является линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, что возможно только если все λ_i равны 0.

Следствие 1.1.1. *Следующие свойства линейного оператора $\mathcal{A}$ эквивалентны:* 1) $\mathcal{A}$ *— изоморфизм;* 2) $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{0\}$*;* 3) $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = V$.

§2. Матрица линейного оператора

Если в пространстве V выбран базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то линейный оператор можно задать матрицей.

Определение 2.1. ***Матрицей линейного оператора*** $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица $A = (a_{ij})$, определяемая из равенств $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

То есть в j-том столбце матрицы A стоят координаты образа j-того базисного вектора в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Можно записать определение матрицы линейного оператора как $(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)A$. Для любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ существует единственный линейный оператор, переводящий $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — это оператор, переводящий каждый вектор $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i e_i$ в вектор $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i x_i$. Таким образом, линейный оператор однозначно определяется своей матрицей и наоборот, любая квадратная матрица n-ного порядка является матрицей некоторого линейного оператора в данном базисе. Операциям над линейными оператора соответствуют такие же операции над их матрицами. Для линейных операций это очевидно, поэтому проверим для умножения.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$, A, B — соответственно их матрицы в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда $(\mathcal{AB})e_k = \mathcal{A}(\mathcal{B}e_k) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{jk}e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n}(\mathcal{A}e_j) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}e_i$, следовательно, матрица оператора $\mathcal{AB}$ есть $C = (c_{ik})$, где $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, то есть $C = AB$. Таким образом, кольцо $\mathrm{End}(V)$ изоморфно кольцу $M_n(F)$.[1]

Замечание 2.1. Если $\dim V = n$, то размерность End(V) как векторного пространства равна n^2.

Пример 2.1. а) Матрицей нулевого оператора $\mathcal{O}$ является нулевая матрица O;

б) Матрицей тождественного оператора $\mathcal{E}$ является единичная матрица E;

в) Матрицей оператора «растяжения» $\lambda\mathcal{E}$ является скалярная матрица λE;

г) Матрица оператора поворота на угол α в плоскости E^2 в ортонормированном базисе: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

д) Матрица проектора на U параллельно W в объединении базисов U и W имеет блочный вид $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \dim U$;

е) Матрица оператора дифференцирования в базисе $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

[1] «Преподавание математики все еще страдает от энтузиазма, вызванного открытием этого изоморфизма. Следствием было то, что геометрия фактически исключалась и заменялась вычислениями <...> Мой опыт показывает, что доказательства, включающие в себя матрицы, могут быть сокращены на 50%, если выбросить матрицы» (Э. Артин. Геометрическая алгебра. М.: Изд-во «Наука», 1969 г., с. 28 и далее).

ж) Матрица оператора транспонирования в $M_2(F)$ в базисе из стандартных матричных единиц $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Найдём выражение для координат образа y вектора x при действии оператора $\mathcal{A}$: $y = \mathcal{A}x$. Пусть $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, тогда $y = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j(\mathcal{A}e_j) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, где $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Если X и Y — столбцы координат векторов x и y соответственно, то полученные равенства можно записать как $Y = AX$.

Пусть $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\widetilde{e} = \{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ — два базиса векторного пространства V. Выясним, как преобразуется матрица линейного оператора при переходе от одного базиса к другому. Пусть $C = (e \rightsquigarrow \widetilde{e})$, тогда $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)C$. $(\mathcal{A}\widetilde{e}_1, \mathcal{A}\widetilde{e}_2, \ldots, \mathcal{A}\widetilde{e}_n) = (\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)C = (e_1, e_2, \ldots, e_n)AC = (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n)C^{-1}AC$. Следовательно, если $\widetilde{A}$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\widetilde{e}$, то

$$\widetilde{A} = C^{-1}AC.$$

Одна из основных задач теории линейных операторов состоит в нахождении базиса, в котором матрица имеет «наиболее простой» вид.

Замечание 2.2. Определитель матрицы оператора зависит только от самого оператора, но не от базиса, в котором записана эта матрица. Действительно, $\det \widetilde{A} = \det(C^{-1}AC) = (\det C)^{-1} \det A \det C = \det A$. Это позволяет говорить об ***определителе оператора*** $\det \mathcal{A}$ и рассмотреть ***невырожденные операторы*** в пространстве V, у которых $\det \mathcal{A} \neq 0$. Невырожденные линейные операторы в пространстве V образуют группу $\mathrm{GL}(V)$, называемую ***полной линейной группой*** пространства V.

Кроме того, верна следующая

Теорема 2.1. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{rank} A$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ является линейной оболочкой образов базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ является рангом системы векторов $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Однако столбцы матрицы A и есть координаты этих векторов в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Замечание 2.3. В силу следствия 1.1.1 и теоремы 2.1 оператор обратим тогда и только тогда, когда он невырожденный.

§3. Инвариантные подпространства

Определение 3.1. Подпространство $U \leqslant V$ называется ***инвариантным*** относительно оператора $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-инвариантным), если $\mathcal{A}U \leqslant U$, то есть для любого $x \in U$ его образ $\mathcal{A}x \in U$.

Замечание 3.1. Нулевое подпространство и всё пространство V инвариантны для любого оператора. Любое подпространство, содержащееся в ядре оператора $\mathcal{A}$, и любое подпространство, содержащее его образ, $\mathcal{A}$-инвариантны. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами.

Пример 3.1. Пусть оператор — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Тогда $U_1 = \langle \mathbf{i} \rangle$ и $U_2 = \langle \mathbf{j} \rangle$ инвариантны, а $U_3 = \langle \mathbf{i} + \mathbf{j} \rangle$ — нет.

Пример 3.2. Инвариантные подпространства оператора дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_n$ имеют вид $\mathbb{R}[x]_k$, $k \leqslant n$ (см. **Г**, с. 61, задача 48).

Ограничение (***сужение***) $\mathcal{A}|_U$ линейного оператора $\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство U является линейным оператором в U.

Если выбрать базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V так, чтобы инвариантное подпространство U было линейной облочкой первых k базисных векторов, то матрица оператора в этом базисе будет иметь вид $\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где B — матрица оператора $\mathcal{A}|_U$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Обратно, если матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет такой блочный вид (где B — квадратная матрица размера $k \times k$, а под ней матрица из нулей), то $U = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Если удаётся разложить V в прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ инвариантных подпространств V_i, то в базисе пространства V, составленном из базисов этих подпространств, матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & A_k \end{pmatrix},$$

где A_i — матрица оператора $\mathcal{A}|_{V_i}$. Из этого ясно, что поиск инвариантных подпространств является важным шагом в решении задачи поиска «наиболее простого» вида матрицы линейного оператора.

Пример 3.3. Для оператора дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_n$ инвариантные подпространства вложены друг в друга, поэтому ни у какого нетривиального инвариантного подпространства нет инвариантного прямого дополнения. Поэтому ни в каком базисе матрица этого оператора не может иметь блочно-диагональный вид.

Пример 3.4. Рассмотрим поворот на угол α вокруг какой-либо оси в пространстве E^3. В ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если вектор e_3 направлен по оси поворота, матрица оператора поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

который согласуется с разложением E^3 в прямую сумму $E^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства, которые приводят к понятию собственного вектора.