Расчетно-графическая работа №2 по дисциплине
«Математический анализ»

Выполнили студенты 1 курса, поток 13.3:
Чураков А. А., Садовников О.Ю., Леонтьев В.А., Королев А.В.

17 декабря 2023 г.

Блок I

Задание 1.4

Найти указанный предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$$

Решение:

Подставив $x = 1$ получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$
Разложим многочлены на множители

$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2} =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2+x-2x-1}{3x^2+2x-3x-2} =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)(x-1)}{(3x+2)(x-1)} =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{3x+2} =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot 1+1}{3 \cdot 1+2} = \frac{3}{5}$

Задание 2.4

Найти указанный предел

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$$

Решение:

Вынесем x^3 за скобки

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(7-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^3(2+\frac{5}{x^3})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{5}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7-0+0}{2+0} = \frac{7}{2}$$

Ответ: $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5} = \frac{7}{2}$

Задание 3.4

Найти указанный предел

$$\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$$

Решение:

Подставив $x = -2$ получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$
Преобразуем, домножив на сопряженное:

$$\lim_{x\to-2} \frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6})}{x^2-x-6}\frac{(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})}{(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{2-x-x-6}{(x-3)(x+2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{-2x-4}{(x-3)(x+2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})} =$$

Сократим повторяющиеся члены

$$\lim_{x\to-2} \frac{-2(x+2)}{(x-3)(x+2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{-2}{(x-3)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6})} =$$

$= \lim_{x\to -2}(\frac{-2}{-5*0}) =$

$= \lim_{x\to -2}(\frac{-2}{-\infty}) = +\infty$

Ответ: $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6} = +\infty$

Задание 4.4

Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2\sin x}$$

Решение:

При подстановке $x = 0$ получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$
Преобразуем, используя эквивалентность при
$x \to 0, \tan 3x \approx 3x, 2\sin x \approx 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{2\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{2x}\right) = \frac{3}{2}$

Ответ: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2\sin x} = \frac{3}{2}$

Задание 5.4

Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}.$$

Решение:

Преобразуем выражение, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом

Аннотация

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x} =$
$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{2-3x} =$
$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x\frac{2-3x}{-x}} =$
$= \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{-x}=}$
$= \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}-\frac{2}{x}+3=}$
$= \mathrm{e}^{3}$

Ответ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x} = e^3$$

Блок II

Задание 1.4

Проверить, являются ли функции $f(x)$и $\varphi(x)$ бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 0$

f(x) $= \sin 3x - \sin x$
$\varphi(x) = 5x$

Решение:

Чтобы это выяснить, найдем вот такой предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$

Аннотация

Разность синусов

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - \sin x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\sin x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{5}\frac{\sin x}{x} =$
$2\cdot\cos 0\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Отсюда следует, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 0$

Задание 2.4

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x^3+27x}\right)$$

Решение:

При $x \to 0, e^x - 1 \approx x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x^3+27x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{x(x^2+27)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{0+3^3}\right) = \frac{1}{9}$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x^3+27x}\right) = \frac{1}{9}$$

Задание 3.4

Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее графики

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \ge 2. \end{cases}$$

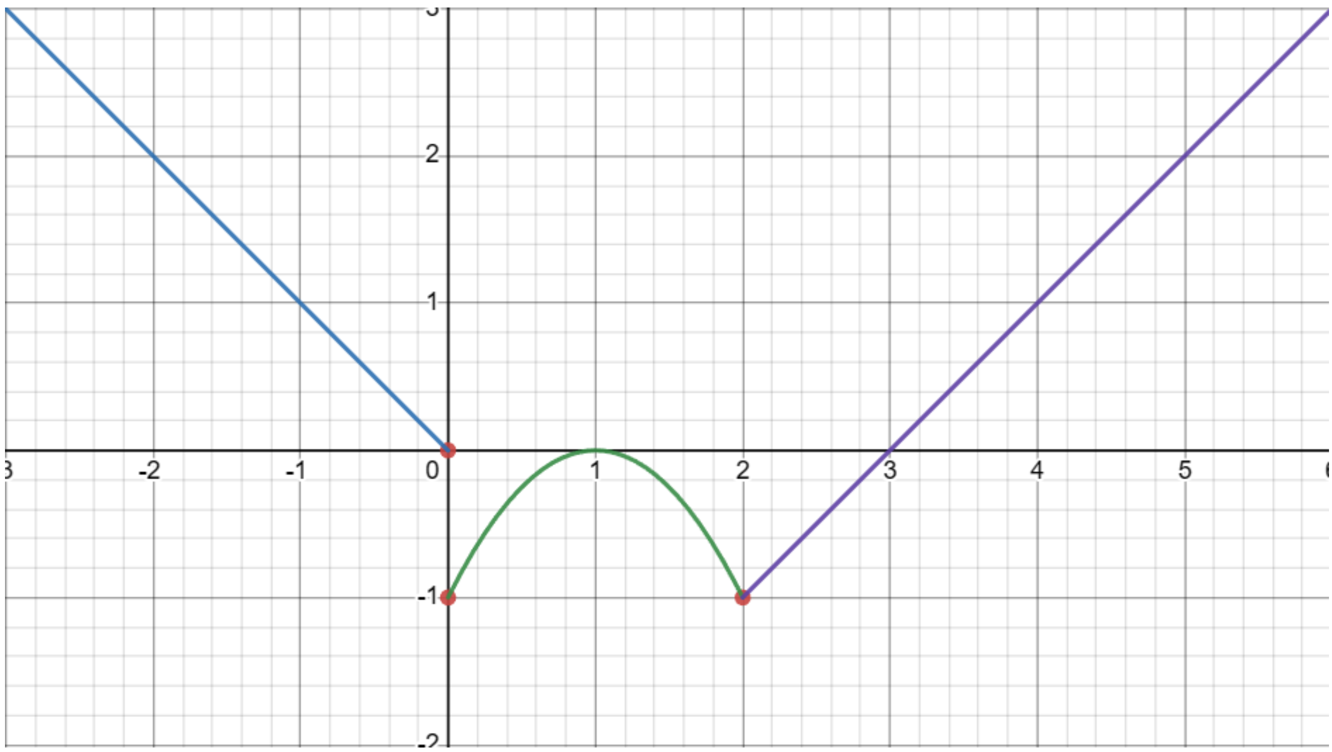

Рис. 1: График данной кусочно-заданной функции построенный в Desmos

Исходя из графика, У этой функции существует 2 точки, подозреваемые на разрыв.
Это точки $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$
Проверим, являются ли они разрывными:
1)$x_0 = 0$

$$\lim_{x \to +0} -(x-1)^2 = -(+0-1)^2 = -1 \tag{1}$$

$$\lim_{x \to -0} -x = +0 \tag{2}$$

Правосторонний и левосторонний пределы в данной точке конечны, но отличаются друг от друга, поэтому эта точка является точкой разрыва 1 рода (скачок)
2)$x_0 = 2$

$$\lim_{x \to 2-0} -(x-1)^2 = -(2-0-1)^2 = -1 \tag{3}$$

$$\lim_{x \to 2+0} -(x-3) = 2+0-3 = -1 \tag{4}$$

Право- и левосторонний пределы равны, значит в данной точке у функции существует предел, равный им, и эта точка не является точкой разрыва.

Ответ: функция имеет разрыв 1 рода (скачок) в точке $x_0 = 0$

Задание 4.4

Исследовать данную функцию на непрерывность в указанных точках

$$f(x) = \frac{x-5}{x+3};$$

$\mathrm{x}_1 = -2;$
$\mathrm{x}_2 = -3$

Решение:

$$1) \lim_{x\to -2-0}\left(\frac{x-5}{x+3}\right) = \lim_{x\to -2-0}\left(\frac{-7}{1}\right) = -7$$

$$\lim_{x\to -2+0}\left(\frac{x-5}{x+3}\right) = \lim_{x\to -2+0}\left(\frac{-7}{1}\right) = -7$$

$$f(x_1) = \frac{-2-5}{-2+3} = \frac{-7}{1} = -7$$

Предел справа равен пределу слева и равен значению функции в точке -2, значит в точке $x_1 = -2$ данная функция непрерывна, разрыва нет.

$$2) x_2 = -3$$

$$\lim_{x\to -2-0}\left(\frac{x-5}{x+3}\right) = \lim_{x\to -3-0}\left(\frac{-8}{-\infty}\right) = +\infty$$

$$\lim_{-3+0}\left(\frac{x-5}{x+3}\right) = \lim_{x\to -3+0}\left(\frac{-8}{+\infty}\right) = -\infty$$

Один из односторонних пределов не конечен, значит функция в данной точке терпит разрыв второго рода

Ответ: функция терпит разрыв второго рода в точке $x_2 = -3$