Математический анализ
Расчётно-графическая работа № 1
«Последовательность и её предел»

Описание работы

Расчетно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите (порядок см. ниже). Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный.

Требования

К выполнению заданий – в работе должны быть:

1) поставлены требуемые задачи;
2) представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
3) указаны используемые теоретические положения и методы;
4) получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения.

К содержанию отчета – отчет выполняется в электронном виде (текстовый документ или презентация; для презентации в MS Power Point используется шаблон Университета ИТМО: ИСУ → полезные ссылки → корпоративная стилистика → презентации (внизу страницы)). должен содержать:

1) титульный лист/слайд (название дисциплины, учебный год, название РГР, ФИ исполнителей, номер потока, ФИ преподавателя, ФИ ментора (если у преподавателя есть ментор), дата, место выполнения);
2) условия всех заданий (условие каждого задания – перед его решением);
3) основные этапы решения каждой задачи, ***пронумерованные согласно пунктам плана***, их теоретическое обоснование, численные результаты;
4) графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: https://www.desmos.com/, Geogebra: https://www.geogebra.org/ или других);
5) выводы;
6) оценочный лист
(вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 100% баллов).

К оформлению отчета:

1) Страницы и слайды следует пронумеровать (на титульной странице/слайде номер не ставится).
2) Текст представляется полностью в цифровом виде. Не допускается вставка фото или сканов текста, а также скриншотов электронного текста.
3) Все формулы набираются в редакторе формул. Не допускается набор формул текстом (например, f(x)=3*x^2), а также вставка фото или сканов формул, однако допускается вставка скриншотов электронных формул (если ни один редактор формул не доступен). Про редакторы формул:
   a. в MS Office есть встроенный редактор формул;
   b. в MS Office также есть скачиваемая надстройка MathType для набора формул;
   c. Google-документы и Open Office имеют встроенные редакторы формул;
   d. в LaTeX встроен набор формул;
   e. можно воспользоваться бесплатным сервисом набора формул https://editor.codecogs.com/ и скачать формулу в виде изображения;
   f. или воспользоваться математическим пакетом (MathCAD, Wolfram Mathematica и др.) или сайтом Wolfram Alpha и сделать оттуда скриншоты формул.

Защита работ

Защита работы представляет собой проверку преподавателем (ментором) и её оценивание по следующим критериям. Работы, присланные позже назначенного срока, оцениваются со штрафом (от 0 до 4 баллов).

Критерии	min баллы	max баллы
Все задания решены полностью, правильно и оптимально.	0	2
Даны необходимые и полные обоснования применяемых методов, ход решения сопровождается подробными комментариями и графиками.	0	2
Отчёт аккуратно оформлен и грамотно свёрстан.	0	1
Итого:	**0**	**5**

Задание 1. Метод математической индукции

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$:

№ ком.	Утверждение
1.	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ при $n>1$
2.	$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$
3.	число $n(2n^2-3n+1)$ кратно 6 (при $n>1$)
4.	$1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$
5.	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$
6.	$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
7.	число n^5-n делится на 5 (при $n>1$)
8.	$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

План:

1) Проверьте утверждение для первых номеров n, например, для $n=1$ (*база индукции*).
2) Предположите, что утверждение верно при $n=k$ (*индукционное предположение*).
3) Покажите, что из справедливости индукционного предположения для номера $n=k$ следует справедливость этого утверждения для номера $n=k+1$ (*шаг индукции*).
4) Сделайте вывод.

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

Вещественная последовательность задана рекуррентно: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, где $x_1 \in \mathbb{R}$. Исследуйте её предел при $n \to \infty$ в зависимости от значения x_1.

План:

1) Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования предела будет проведено в п. 6).
2) Какими могут быть значения x_1? Укажите множество возможных значений x_1. Докажите ваш ответ аналитически.
3) При каком значении x_1 последовательность является стационарной? Докажите это аналитически.
4) Выделите характерные случаи для значений x_1 (с точки зрения монотонности) и проиллюстрируйте их графиками последовательности.
5) Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме Вейерштрасса.

Задание 3. Исследование сходимости

Дана последовательность a_n. Исследуйте её поведение при $n \to \infty$.

План:

1) Вычислите предел A последовательности при $n \to \infty$.
2) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.
3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:
   a. вспомните определение предела последовательности, запишите его через ε, n_0 и неравенство;
   b. выберите три различных положительных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$;
   c. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε-окрестность предела A («ε-трубу»);
   d. для каждого выбранного ε найдите на графике номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, после которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность, или установите, что такого номера нет.

(!) Обратите внимание, что для качественной иллюстрации сгущения элементов последовательности a_n вокруг предела A (при $n \to \infty$) значения для ε следует выбирать так, чтобы соответствующие номера $n_0 = n_0(\varepsilon)$ получались действительно большими (например, $n_0(\varepsilon_1) > 10$, $n_0(\varepsilon_2) > 100$, $n_0(\varepsilon_3) > 1000$).

№ ком.	a_n
1.	$a_n = \frac{4}{1\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 17} + \ldots + \frac{4}{(8n-7)\cdot(8n+1)}$
2.	$a_n = \frac{8^{n+2} + (-7)^{n-1}}{5\cdot 8^n + (-7)^n}$
3.	$a_n = \frac{3+8+\ldots+(5n-2)}{4+7+\ldots+(3n+1)}$
4.	$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)} - \sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$
5.	$a_n = -\frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \ldots + 3\cdot\frac{(-1)^n}{5^n}$
6.	$a_n = \frac{\sqrt{9n^4-1} + \sqrt{3n^2+1}}{7+9+\ldots+(2n+5)}$
7.	$a_n = \frac{5-n+3n^2}{2+6+\ldots+(4n-2)}$
8.	$a_n = \sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{(3n^2-1)^2} - \sqrt[3]{(3n^2+1)^2}\right)$