Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Расчётно-графическая работа №1
«Последовательность и её предел» по дисциплине:
«Математический анализ»

Выполнили студенты
1-го курса, поток 13.3:
Чураков Александр Алексеевич,
Садовников Олег Юрьевич,
Леонтьев Виктор Александрович,
Королев Артём Викторович.

Преподаватель:
Трушихина Ирина Петровна.

Санкт-Петербург 2023

Оглавление

Задания

Задание 1.4 Метод математической индукции

Условие:

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$$

Решение:

1. (База индукции) Равенство выполняется при n=1:

$$1 \cdot 2 = 1^2(1 + 1)$$

2. (Индукционное предположение) При n = k равенство принимает вид:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \cdots + k(3k - 1) = k^2(k + 1)$$

3. (Шаг индукции) При n = k+1:

$$1 \cdot 2 + \cdots + k \cdot (3k + 1) + (k + 1)(3k + 2) = (k + 1)^2 \cdot (k + 2)$$

Из п.2 получаем

$$k^2(k + 1) + (k + 1) \cdot (3k + 2) = (k + 1) \cdot (k^2 + 3k + 2)$$

$$(k + 1) \cdot (k^2 + 3k + 2) = (k + 1)(k + 1)(k + 2)$$

$$(k + 1)(k + 1)(k + 2) = (k + 1)^2\big((k + 1) + 1\big)$$

Что и требовалось доказать.

Вывод: благодаря методу математической индукции мы доказали, что исходное равенство выполняется.

Задание 3.5 Исследование сходимости

Условие:

Дана последовательность a_n. Исследуйте её поведение при $n \to \infty$.

$$a_n = -\frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \cdots + 3 \cdot \frac{(-1)^n}{5^n}$$

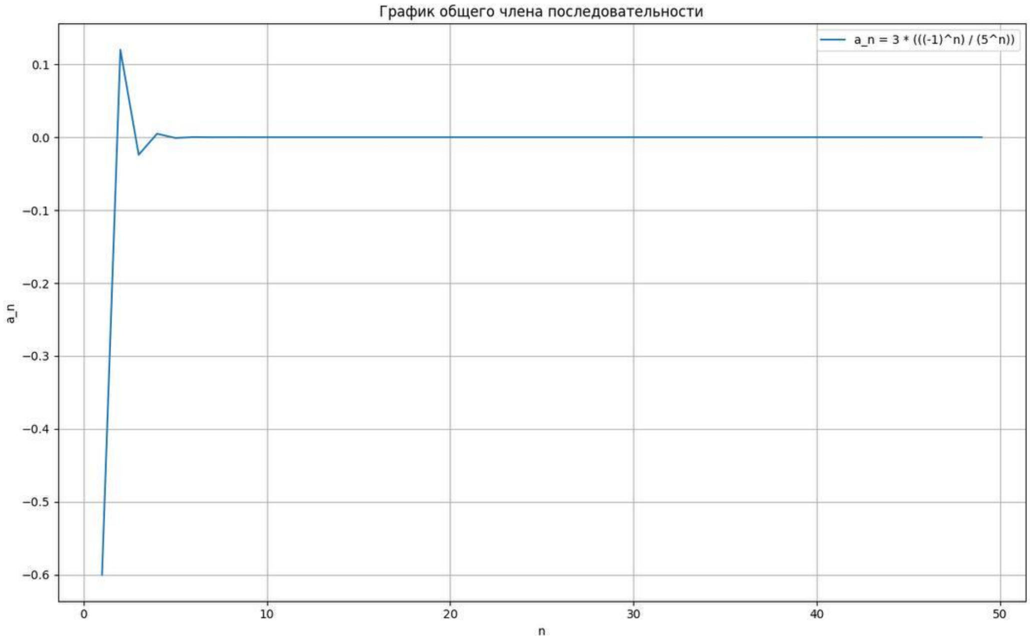
1) Вычислите предел A последовательности при $n \to \infty$.
2) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.
3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:
   a) вспомните определение предела последовательности, запишите его через ε, $n0$ и неравенство;
   b) выберите три различных положительных числа $\varepsilon1 > \varepsilon2 > \varepsilon3$;
   c) для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε-окрестность предела A («ε-трубу»);
   d) для каждого выбранного ε найдите на графике номер $n0 = n0(\varepsilon)$, после которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность, или установите, что такого номера нет.

Решение:

$$x_n = 3 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

1. Найдем предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$



2.
3. Проиллюстрируем сходимость последовательности

a) Докажем существование этого предела по определению

$$\varepsilon > 0$$

$$\left|3\left(\frac{-1}{5}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

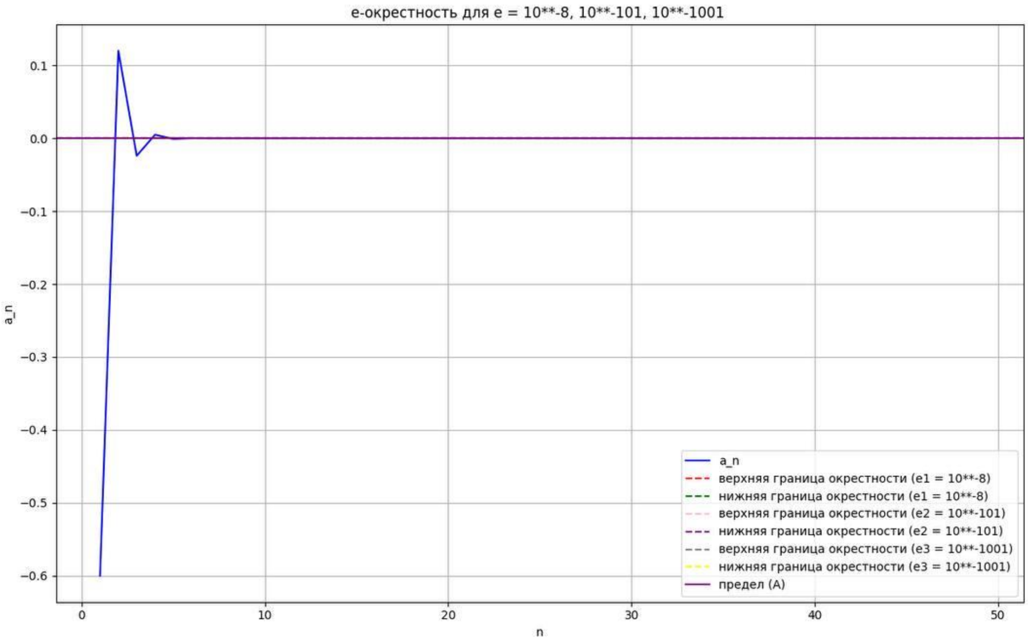
$$log_{0,2}\, 0{,}2^n < log_{0,2} \frac{\varepsilon}{3}$$

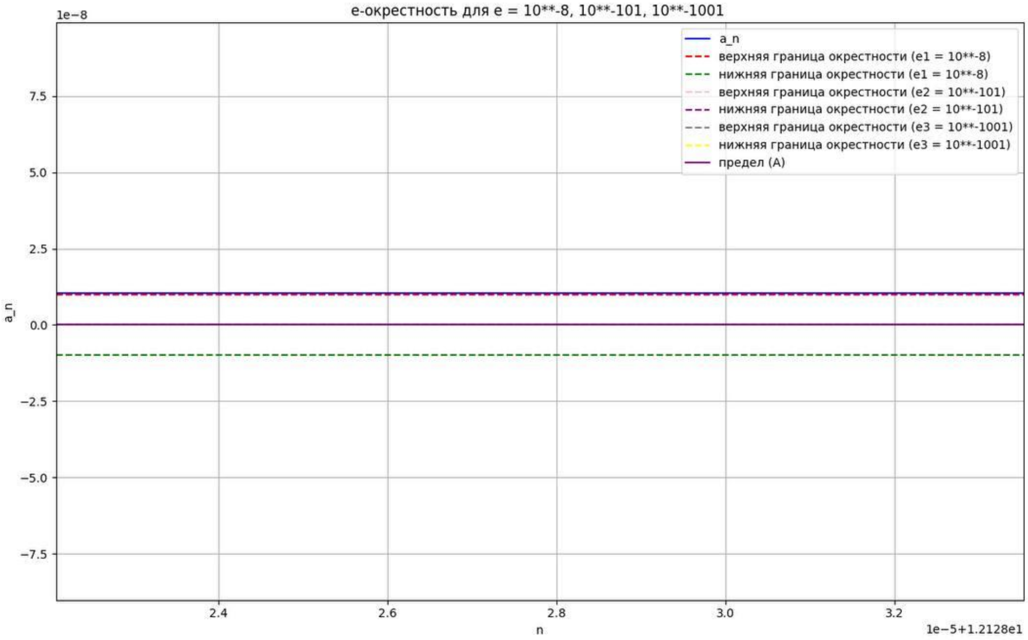
$$n < log_{0,2} \frac{\varepsilon}{3}$$

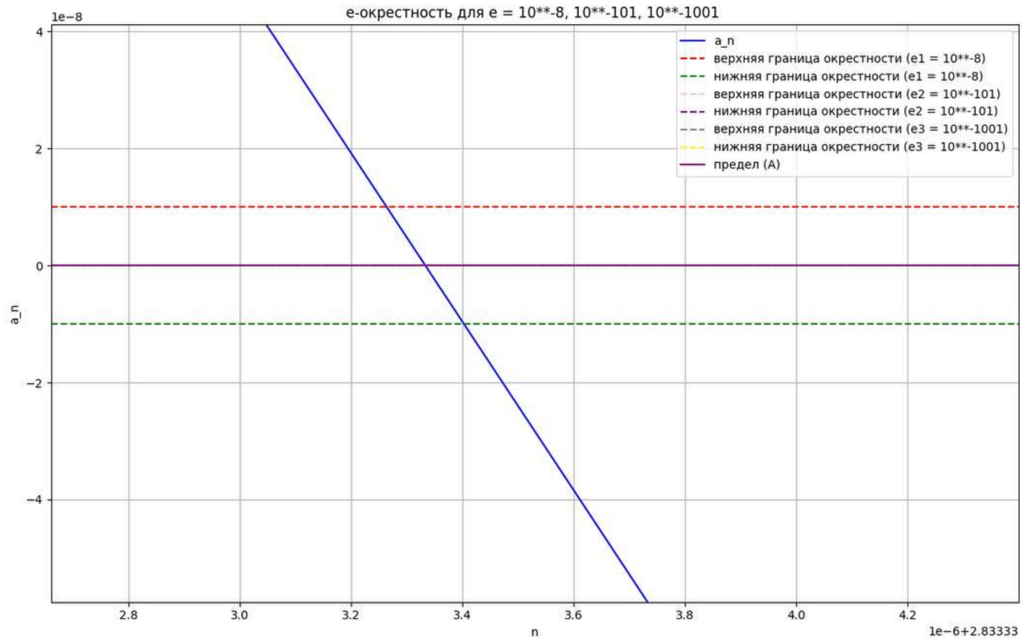
$$\text{пусть } n_0(\varepsilon) = \left[log_{0,2} \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

b) Пусть $\varepsilon_1 = 0{,}00000001$, пусть $\varepsilon_2 = 10^{-101}$, пусть $\varepsilon_3 = 10^{-1001}$, выберем именно такие ε, потому что при них $n_0 = n_0(\varepsilon)$ получается действительно большим $n_0(\varepsilon_1) > 10, n_0(\varepsilon_2) > 100$ и т. д. Тогда $10^8 > 10^{-101} > 10^{-1001}$.

c) Изобразим на графике соответствующие $\varepsilon -$ окрестности.







d) Для каждого выбранного ε найдите на графике номер $n0 = n0(\varepsilon)$, после которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность.

$$n_0(\varepsilon_1) = \left[log_{0,2} \frac{-10^8}{3} \right] \approx 12$$

$$n_0(\varepsilon_2) = \left[log_{0,2} \frac{10^{-101}}{3} \right] \approx 101$$

$$\Pi_0(\varepsilon_3) = \left[log_{02} \frac{10^{-1001}}{3} \right] \approx 1001$$

Вывод: при решении мы нашли предел последовательности и доказали его существование по определению, через ε, n_0, и неравенство. Построили график общего члена и $\varepsilon -$ окрестностей.

Оценочный лист

Имя	Чураков Александр	Садовников Олег	Леонтьев Виктор	Королёв Артём
Вклад, %	100	100	100	100