Лекция II

В., с. 240-246; **К.**, с. 77-82; **Г.**, с. 44-46;

§4. Собственные векторы и собственные значения

Определение 4.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором*** оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \lambda x$. Число $\lambda \in F$ называется при этом ***собственным значением*** (***собственным числом***) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x.

Собственный вектор порождает одномерное инвариантное подпространство. В базисе, составленном из собственных векторов (если он существует) матрица оператора имеет диагональный вид, что является «наиболее простым» видом.

Пример 4.1. а) Для нулевой оператора $\mathcal{O}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 0;

б) Для тождественного оператора $\mathcal{E}$ каждый вектор является собственным с собственным значением 1;

в) Для оператора «растяжения» $\lambda\mathcal{E}$ каждый вектор является собственным с собственным значением λ;

г) Собственные векторы оператора поворот на угол α в пространстве E^3: если $\alpha \neq \pi k$, то это векторы, лежащие на оси поворота, собственное значение 1; если же $\alpha = \pi k$, то к ним добавляются векторы, перпендикулярные оси поворота, собственные значения $(-1)^k$;

д) $V = U \oplus W$, $\mathcal{P}$ — проектор на U параллельно W является линейным оператором в V. Известно, что $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Тогда если x — собственный вектор, то $\lambda x = \mathcal{P}x = \mathcal{P}^2 x = \mathcal{P}(\mathcal{P}x) = \mathcal{P}(\lambda x) = \lambda\mathcal{P}x = \lambda^2 x$, значит λ равно 0 или 1. Любой вектор из U — собственный с собственным значением 1, из W — собственный с собственным значением 0.

е) Для оператора дифференцирования $\mathcal{D}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ собственными являются константы, соответствующие собственному значению 0.

ж) Оператор транспонирования удовлетворяет условию $\mathcal{P}^2 = \mathcal{E}$. Аналогично д) можно показать, что собственные значения инволюции только ± 1. В данном случае, значение 1 соответствует симметрическим матрицам, -1 — кососимметрическим.

Замечание 4.1. Число $\lambda \in F$ является собственным для оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда подпространство $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \leqslant V$ ненулевое, то есть когда оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ вырожден, то есть $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$.

Определение 4.2. Подпространство $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ называется ***собственным подпространством*** оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ. Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой.

Замечание 4.2. Любое собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$ является $\mathcal{A}$-инвариантным.

Определение 4.3. ***Геометрической кратностью*** $g(\lambda)$ собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: $g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

§5. Характеристический многочлен

Из замечания 4.1 следует, что для нахождения собственных подпространств удобнее сначала найти собственные значения из условия $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в каком-либо базисе, тогда

$$\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix}.$$

Определение 5.1. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^t \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$ называется ***характеристическим многочленом*** оператора $\mathcal{A}$.

Корни характеристического многочлена называются ***спектром оператора*** $\mathcal{A}$.

Если из контекста ясно, о каком операторе идёт речь, индекс $\mathcal{A}$ будем опускать.

Замечание 5.1. Определение корректно, так как характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Действительно, пусть C — матрица перехода от старого базиса к новому, $\widetilde{A} = C^{-1}AC$, тогда $\det(tE - \widetilde{A}) = \det(C^{-1}(tE)C - C^{-1}AC) = \det(C^{-1}(tE - A)C) = (\det C)^{-1} \det(tE - A) \det C = \det(tE - A)$.

Замечание 5.2. Нетрудно заметить, что старший коэффициент характеристического многочлена равен 1, коэффициент при t^n равен $-\operatorname{tr} A$, а свободный коэффициент равен $\chi_{\mathcal{A}}(0) = (-1)^n \det A$. Так как параметрический многочлен не зависит от выбора базиса, то и след матрицы оператора не зависит от базиса, поэтому можно говорить о ***следе оператора*** $\operatorname{tr}\mathcal{A}$. Собственные значения оператора — это в точности корни его характеристического многочлена, их количество не превосходит $n = \dim V$. В силу основной теоремы алгебры, любой линейный оператор в ненулевом конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор.

Определение 5.2. ***Алгебраической кратностью*** $m(\lambda)$ собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

Лемма 5.1. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство $V_\lambda \leqslant V$, оно инвариантно, следовательно, в согласованном базисе матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda E & D \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

матрица λE квадратная размера $g(\lambda)$. Тогда характеристический многочлен имеет вид $\chi(t) = (t-\lambda)^{g(\lambda)} \cdot f(t)$, $f(t) = \det(tE - C)$. Так как у многочлена f может быть корень λ, то $m(\lambda) \geqslant g(\lambda)$.

§6. Собственный базис и диагонализируемость

Определение 6.1. Подпространства $V_1, \ldots, V_k$ называются ***линейной независимыми***, если равенства $v_1 + \ldots + v_k = 0$, $v_k \in V_k$ следует, что $v_1 = \ldots = v_k = 0$.

Замечание 6.1. Можно сказать, что разложение пространства V в прямую сумму подпространств $V_1, \ldots, V_k$ — это разложение в сумму линейной независимых подпространств $V_1, \ldots, V_k$.

Теорема 6.1. *Собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ оператора $\mathcal{A}$ линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по k. При $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и $x_1 + \ldots + x_k = 0$. Применим к обеим частям оператор $\mathcal{A}$:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_k x_k = 0.$$

Вычтем из этого равенства равенство $x_1 + \ldots + x_k = 0$, умноженное на λ_k, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

Каждое из слагаемых лежит в соответствующем подпространстве. Так как по предположению индукции они линейно независимы и рассматриваются разные собственные значения, то $x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0$. Но тогда и $x_k = 0$.

Следствие 6.1.1. *Если характеристический многочлен оператора имеет $n = \dim V$ различных корней (оператор с* ***простым спектром****), то существует базис из собственных векторов этого оператора.*

Замечание 6.2. Данное условие не является необходимым для существования собственного базиса. Например, любой базис состоит из собственных векторов тождественного оператора, однако его характеристический многочлен имеет единственный корень 1 (кратности n).

Определение 6.2. Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется ***диагонализируемым***, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид.

Другими словами, диагонализируемость оператора эквивалентна существованию собственного базиса.

Пусть оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем и $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$. Рассмотрим проектор $\mathcal{P}_i$ на подпространство V_{λ_i} параллельно прямой сумме оставшихся подпространств. Тогда $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$. Легко проверяется, что оператор $\mathcal{A}$ действует на любой вектор так же, как оператор $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\mathcal{P}_i$. Выражение $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\mathcal{P}_i$ называется ***спектральным разложением*** оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 6.2. (***критерий диагонализируемости***) *Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*
1) *Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители (то есть все его корни лежат в поле F);*
2) *Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.*

Доказательство. Диагонализируемость эквивалента наличию собственного базиса, откуда следует, что $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$ (объединение базисов собственных подпространств — собственный базис V), но тогда $n = \dim V = g(\lambda_1) + \ldots + g(\lambda_k)$. Но $m(\lambda_i) \geqslant g(\lambda_i)$, а $m(\lambda_1) + \ldots + m(\lambda_k) \leqslant \deg \chi_{\mathcal{A}} = n$. Отсюда следует, что $n = g(\lambda_1) + \ldots + g(\lambda_k)$ тогда и только тогда, когда $m(\lambda_i) = g(\lambda_i)$.

Пример 6.1. Пусть $\mathcal{A}$ — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат декартовой плоскости. В ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 + 1$. Его корни не лежат в поле $\mathbb{R}$. Поэтому, оператор $\mathcal{A}$ не диагонализируем над $\mathbb{R}$. Если же рассмотреть ту же матрицу над полем $\mathbb{C}$, то она оказывается подобной матрице

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Пример 6.2. Пусть $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в $\mathbb{R}[x]_1$. В базисе $x, 1$ его матрица оператора вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\chi_{\mathcal{D}}(t) = t^2$. Его корень 0 кратности 2 лежит в поле $\mathbb{R}$. $\operatorname{Ker}(\mathcal{D} - 0\mathcal{E}) = \mathbb{R}[x]_0$, $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{D} - 0\mathcal{E}) = 1$. Оператор $\mathcal{D}$ не диагонализируем.