Лекция IV

В., с. 262-264; **К.**, с. 97-99; **Ф.**, с. 337-340; **Г.**, с. 46-57.

§9. Жорданова нормальная форма оператора

Если вернуться к произвольному линейному оператору $\mathcal{A}$, то можно заметить, что на циклическом подпространстве нильпотентного оператора $\mathcal{N} = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ оператор $\mathcal{A}$ задаётся матрицей

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

называемой ***жордановой клеткой*** с собственным значением λ

Определение 9.1. ***Жордановой матрицей*** называется блочно-диагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \mathbf{O} \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & J_k \end{pmatrix},$$

где $J_1, J_2, \ldots J_k$ — какие-то жордановы клетки.

Жорданова матрица также называется ***жордановой нормальной формой*** (ЖНФ) для оператора $\mathcal{A}$. Верна следующая

Теорема 9.1. (***основная теорема о структуре оператора***) *Если характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ раскладывается на линейные сомножители, то существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ жорданова. Она определена однозначно, с точностью до перестановки жордановых клеток.*

Следствие 9.1.1. *Матрица любого оператора над полем комплексных чисел приводится к ЖНФ.*

Другими словами, любая комплексная матрица подобна жордановой.

В выборе жорданова базиса есть значительная свобода. Поймём, что количество жордановых клеток не зависит от выбора жорданова базиса. Достаточно сделать это для нильпотентного оператора.

Пусть $n(\lambda)$ — количество жордановых клеток в $J(N)$ с собственным значением λ. Оно равно количеству столбцов в диаграмме Юнга, то есть количеству векторов в нижней строке диаграммы. То есть $n(\lambda) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}$. С другой стороны $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = V_\lambda \leqslant V^\lambda$, следовательно, $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \operatorname{Ker} \mathcal{N}$, поэтому

$$n(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}).$$

Пусть $n_k(\lambda)$ — число жордановых клеток размера $k \times k$ с собственным значением λ, они соответствуют столбцам высоты k. Так как ядро оператора $\mathcal{N}^k$ — это линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k, то их количество — это разница между количество вектор высоты не меньше k ($\dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^k$) и количество вектора высоты меньше k ($\dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^{k-1}$). А чтобы найти количество столбцов высоты ровно k, нужно из этого числа вычесть количество столбцов высоты не больше $k+1$, которое вычисляется аналогично ($\dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^{k+1} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^k$). Итого получаем

$$n_k(\lambda) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^k - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^{k-1} - (\dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^{k+1} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^k),$$

то есть

$$n_k(\lambda) = 2 \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^k - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^{k-1} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}^{k+1}.$$

Так как $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \leqslant V^\lambda$, то $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k = \operatorname{Ker} \mathcal{N}^k$, и

$$n_k(\lambda) = 2 \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k - \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k-1} - \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k+1}.$$

Полученные формулы показывают, что число жордановых клеток не зависит от выбора жорданова базиса, следовательно, ЖНФ единственная с точностью до перестановки клеток.

Для удобства при ручном нахождении ЖНФ, запишем формулы в виде, содержащем ранги матриц. Пусть $r_k = \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k$, $n = \dim V$ = размер матрицы оператора. Тогда $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k = n - r_k(\lambda)$. Следовательно,

$$n(\lambda) = n - r_1(\lambda),$$

$$n_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda).$$

Итак, если нам нужно найти ЖНФ оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$, то:

1) Находим собственные значения $\lambda_1, \ldots \lambda_s$. Тогда $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}$ и в согласованном базисе оператор имеет блочно-диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & A_s \end{pmatrix};$$

2) Выясняем, как устроен каждый блок A_i для $\lambda_i = \lambda$. Для этого надо понять устройство оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$. Нам известно, что $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = \lambda\mathcal{E} + \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор. Тогда $V^\lambda = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} U_i$, U_i — циклические подпространства $\mathcal{N}$. Схема действия $\mathcal{N}$ на V^λ однозначно задаётся диаграммой Юнга;

3) В базисе V^λ, составленном из базисов U_i, матрица нильпотентного оператора N имеет блочно-диагональный вид, где на диагонали стоят нильпотентные жордановы клетки — получаем ***нильпотентную жорданову матрицу***. Матрица оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = \lambda\mathcal{E} + \mathcal{N}$ получается из неё прибавлением λ по главной диагонали;

4) Собираем из всех блоков A_i ЖНФ оператора $\mathcal{A}$.

Пример 9.1. Найдём ЖНФ оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\left(\mathbb{R}^4\right)$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

Давайте одно из собственных значений угадаем. Заметим, что $\lambda_1 = 1$ является собственным значением, так как матрица $A - E$ вырожденная, поскольку имеет нулевой столбец:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдём её ранг:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$r_1(1) = \operatorname{rank}(A - E) = 2$. Тогда геометрическая кратность $\lambda = 1$ как минимум $\dim\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E}) = 2 = 4 - 2$, то есть ещё как минимум ещё одно собственное значение равно 1. Найдём оставшиеся собственные значения по теореме Виета:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & \operatorname{tr} A, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 & = & \det A, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 4, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 & = & 1, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Следовательно, всё пространство является корневым с собственным значением 1 и $n(1) = n - r_1(1) = 4 - 2 = 2$, то есть всего две жордановы клетки. Вычислим нужные ранги:

$$r_0(1) = \operatorname{rank}(A - E)^0 = \operatorname{rank} E = 4,$$

$$r_1(1) = \operatorname{rank}(A - E)^1 = 2,$$

$$r_2(1) = \operatorname{rank}(A - E)^2 = 1,$$

$$r_3(1) = \operatorname{rank}(A - E)^3 = 0.$$

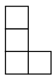
Тогда

$$n_1(1) = r_0(1) - 2r_1(1) + r_2(1) = 1,$$
$$n_2(1) = r_1(1) - 2r_2(1) + r_3(1) = 0,$$
$$n_3(1) = r_2(1) - 2r_3(1) + r_4(1) = 1.$$

То есть у нас одна жорданова клетка размером 1×1 и одна жорданова клетка размером 3×3, то есть оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую ЖНФ:

$$J(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диаграмма Юнга нильпотентного оператора $\mathcal{A} - \mathcal{E}$ имеет вид



Пример 9.2. Найдём ЖНФ оператора из примера 8.2. Оператор нильпотентен. Достаточно одного взгляда на диаграмму Юнга, чтобы написать ЖНФ:

$$\begin{pmatrix} J_4(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & J_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§10. Построение жорданова базиса

Как найти сам жорданов базис? Есть два разных подхода:

- Начать с собственных векторов и подниматься вверх
- Начать с корневых векторов наибольшей высоты и спускаться вниз

Далее будет показать второй подход. Одной из причин этого является то, что так действуют системы компьютерной алгебры. Дело в том, что подходящих «самых высоких» векторов оказывается столь много, что с большой вероятностью подойдут какие-то векторы стандартного базиса (ниже мы это видим) или их нехитрые линейные комбинации.

Пример 10.1. Продолжим предыдущий пример. Отметим, что нумерация векторов жорданова базиса должна соответствовать выбранной перестановке клеток в ЖНФ! Так, если рассмотреть матрицу нильпотентного оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то первый вектор при его действии должен переходит в нулевой, второй — тоже в нулевой, третий — во второй, четвёртый — в третий:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline e_4 & \\ \cline{1-1} e_3 & \\ \hline e_2 & e_1 \\ \hline \end{array}$$

Итак, самый высокий столбец в нашей диаграмме Юнга высоты 3. «Самый высокий» вектор должен обнулять матрицу $(A-E)^3$ (в данном случае это выполнится автоматически, так как всё пространство — корневое для нильпотентного оператора высоты 3) и не должен обнулять матрицу $(A-E)^2$. Так как

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

то в качестве «самого высокого» вектора e_4 жорданова базиса можно взять первый, второй или четвёртый векторы стандартного базиса, так как их образы не являются нулевыми (именно они записаны в первом, втором и четвёртом столбцах матрицы). Пусть $e_4 = (1,0,0,0)^T$. Тогда $(A-E)e_4 = e_3$, $(A-E)^2 e_4 = (A-E)e_3 = e_2$:

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ровно это мы и ожидали получить ☺

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Осталось найти e_1. Он дополняет вектор e_2 до базиса $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\mathcal{E})$, поэтому можно взять любой вектор из этого ядра, линейно независимый с e_2, например, $e_1 = (0,0,1,0)^T$.

Итак, у нас следующий жорданов базис: $e_1 = (0, 0, 1, 0)^T$, $e_2 = (3, 1, 3, 1)^T$, $e_3 = (0, -2, 0, -1)^T$, $e_4 = (1, 0, 0, 0)$. Проверим себя. Матрица перехода от стандартного базиса к жорданову имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подумайте, как изменится нумерация векторов при перестановке жордановых клеток в ЖНФ и проверьте себя.

Замечание. Вообще, если ЖНФ J найдена, то найти матрицу перехода можно с помощью матричного уравнения $XJ - AX = 0$, а столбцы матрицы перехода и есть векторы жорданова базиса. Решение данного матричного уравнения сводится к решению однородной СЛАУ. Пространство её решений, вообще говоря, многомерно. Из решений можно взять любое, которое даёт невырожденную матрицу.