# Аксиомы сложения и следствия из них (с доказательствами). (4 св-ва, 3 Л-след)

## 4 свойства

### x+y=y+x

### (x+y)+z = x+(y+z)

### x + 0 = x нейтральный элемент

### x + -x = 0

## 3 леммы следствия

### Ноль единственен

01 = 01 + 02 = 02 + 01 = 02

### -x единстенен

Пусть x1 и х2 обр х в R

Х1 = х1 + 0 = х1 + (х + х2) = (х1 + х) + х2 = 0 + х2 = х2

### x + а = b имеет одно решение х = b + (-а)

x + a + (-a) = b + (-a) <==> x + 0 = b + (-a) == x = b + (-a)

единственность следует из единственности противоположного элемента

# Аксиомы умножения и следствия из них (с доказательствами). (4 св-ва, 3 Л-след)

## 4 свйойства

### Xy=yx

### (xy)z = x(yz)

### X1 = x

### X 1/x = 1

## 3 леммы следствия

### 1 единственна

Пуст 11 и 12

11 = 11 \* 12 = 12 \* 11 = 12

### Каждый ненулевой вещественный х имеет единственный обратный

Пуст х1 х2 обр х

Х1 = х1 \* 1 = х1 \* (х\*х2) = (х1\*х)\*х2 = 1\*х2 = х2

### ах = b им оlно решение x=b(a-1)

ax(a-1)=b(a-1) = 1x=b(a-1)

единственность следует из единственности обратного эл

# Аксиомы связи сложения и умножения, следтствия из них (с доказательствами). (2Лб 3 след)

Сложение дистр умножению

## 2 леммы

### X0 = 0

X\*0 = x(0+0) =x0 + x0 = x0 + (-x)0 = 0(x-x) = 0\*0 = 0

### -x = (-1)x

X +(-1)x = 1(x-x) = 1\*0 = 0

В силу единст прот эл -x = (-1)x

## 3 следствия

### Xy=0 если x=0 или y=0

Если оба = 0 то док из леммы

Если хоть один не равен нулю то след из акс умнож и из того что ур-е ax=b имеет единственное решение

### (-x)(-x) = xx

-x\*-x=x(-1)\*-x=x\*x

### (-1)(-x) = x

# Аксиомы порядка и следствия из них (с доказательствами). (4 акс, 1 след, 1 лем)

## 4 аксиомы

### X <= рефлексивно

### X<=y & y<=x ⬄ x=y антисимметрично

### <= транзитивно (x<=y) & (y<=z) => x<=z

### Любые два элемента сравнимы между собой

## 1 следств

### Для 2 эл всегда одно из: <, =, >

## 1 лемма

### (X<y) & (y<=z) => x<z ||||| (x<=y) & (y<z) => x<z

### По св-ву транзит получ x<y & y<=z == x <= z

Покаж что x!=z

От прот: x=z

X<y & y<= z == z <y & y <= z == y > z & y <= z противоречие

# Аксиома непрерывности. Леммы о существовании и иррациональности числа, квадрат которого равен 2. (1 акс, 2 леммы)

## 1 аксиома

### X <= c <= z

Изображение выглядит как текст, Шрифт, белый, снимок экрана

Автоматически созданное описание

## 2 леммы

### О сущ числа квадрат которого равен 2

Мн-во Х от 0 до х2=2

Y от y2=2 до +беск

По акс непрерывности между макс x и мин y есть с что его квадрат равен 2

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, линия

Автоматически созданное описание

Покажем что с не в Х

От прот: если с\*\*2 < 2 то

### Об иррациональности корня из 2

Доказательство

От прот: пусть с рац

тогда с =m/n несократимая дробь

возводим в квадрат и представляем как сократимую

# Индуктивные множества. Лемма о пересечении индукционных множеств. Множество натуральных чисел. (2 опр, 1Л)

## 2 опр

### Инд множество

для любого x в множ-ве x+1 отже в мн-ве

### Мн-во нат чисел

пересечение всех инд-ых мн-в, сод единицу

## 1 лемма

### Пересечение любого семейства индукционных множеств, если оно не пусто, есть инд-ое мн-во

X принадлежит инд множ-ву значит все подмнож-ва инд-ны значит x+1 отже принадлежит пересечению

# Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. (1Т, 1Л)

## 1 теорема

### Если подмож нат чисел содерж единицу и инд-но, то оно равно N

Х – инд мно-во т к подмнож-во N а N – наим инд мн-во значит Х=N

## 1 лемма

### Неравенство бернулли (1+x) n >= 1+nx x>-1

База инд

выпол

Инд предполож

N=k

Шаг инд

N=k+1

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, алгебра

Автоматически созданное описание

# Модуль вещественного числа и его свойства. (1Т=8 св-в)

## 1 теорема=8св-в

### >=0

### -|x| <= x <= |x|

### |x| = |-x|

### |xy| = |x||y|

### |x/y| =|x|/|y|

### |x|=|y| == (x=y|x=-y)

### |x+y| <= |x| + |y|

### |x-y| >= |x| - |y|

# Промежутки числовой прямой и окрестности. (3 опр, 1Л)

## 3 определение

### Окр-ть – интервал, сод Х

### Е-окр – симм окр-ть

### Проколотая окр-ть – без Х

## 1 лемма

### Любые две разные вещ-ые точки имеют непересекающиеся окр-ти

Взять окрестности с эпсилон равным полуразности расстояний между точками

# Ограниченность множества. Максимум, минимум, супремум и инфимум множества. Принцип точной грани и следствие из него. Эквивалентные определения супремума и инфимума. (7 опр, 3Л, 1Т)

1 следствие

У любого непуст мн-ва есть sup inf

## 7 определений

### Огр. -сверху – найдется элемент, что любой эл-т посл-ти не превышает его

### Огр снизу

### Посл ограничена – огр и сверху и снизу

### Max

### Min

### Sup – наим из верхних граней

### Inf

## 3 леммы

### Посл огр-на т и т т, когда -c <= x <= с

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание

### Если есть max, то sup = max

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, линия

Автоматически созданное описание

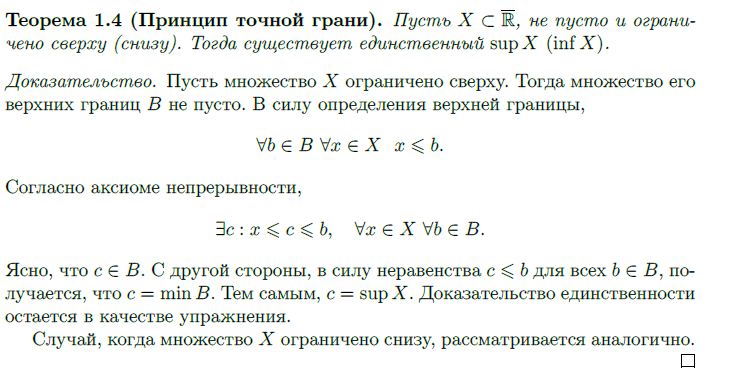
### Эквивалентные опр sup и inf

Изображение выглядит как текст, Шрифт, белый, типография

Автоматически созданное описание

## 1 теорема

### Принцип точной грани (sup (inf) единственен, если множ огр-но сверху(снизу) и не пусто)



# Теорема о существовании максимума у любого непустого подмножества натуральных чисел. Следствия. (1Т, 4след)

## 1 теорема

### У любого непустого подмнож-ва нат чисел есть максимум

По принципу точной грани сущ sup

По экв опр суп s-1<k<s значит k – max

По уст нер-ву s<k+1 – k-верхняя граница

Получаем что k верхняя грань для X

## 4 след

### N не огр сверху

### Подмнож Z огр сверху = есть max

### Подмнож Z огр снизу = есть min

### Множ Z не огр ни снизу ни сверху

# Принцип Архимеда и следствия из него. (1Т, 3 сл)

## 1 теорема

### Для люб вещ-го положительного х найдется вещ y, что (k-1)y<=x<=ky

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание

## 3 следствия

### Между нулем и маленьким e можно засунуть еще более маленькую дробь 1/n



### Если вып 0<=x<=e => x=0

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание

### Для любого x вып k<=x<=k+1

# Предел последовательности: через неравенства, через эпсилон-окрестности, через окрестности. Утверждение о том, что число не является пределом. Бесконечные пределы. Сходящиеся последовательности. (7 опр + утв-ие)

## 7 определений

### Опр через e

### Опр через окр

### Опр через е-окр

### Посл сходится – имеет предел в R

### Инче – расходится

### Lim = +∞ xn > 1/e

### Lim = -∞ xn < -1/e

## 1 утв-ие

### У посл-ти (-1)n ­ нет предела

Записать отрицание факта что есть предел

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание

# Три свойства последовательностей, имеющих предел. (3св-ва)

## Предел в R` единственен

От прот: пусть есть два разных предела с двумя разными окрестностями

Записать определения через окр-ти

Получиться что после максимального из номерков xn принадлеждит обеим окр-м, что противоречит условию

## Предел в R = посл огр-на

Нарисовать эпсилон трубу например 1

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание

## В любой окр-ти предела в R сод все эл=ы посл-и, за искл не более чем конечного количества

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание

# Арифметические свойства пределов в R и R∪{±oo}. (2Т=3св-ва)

## 2 теоремы

### Ариф св-ва в R

#### Xn + yn 🡪 A + B

Доказать по определению но взять эпсилон пополам и через неравенство треугольника оценить

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание

#### XnYn 🡪 AB

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, документ

Автоматически созданное описание

#### Xn/yn 🡪 A/B

Ограничить эпсилон трубой радиусом B пополам

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание

### Ариф св-ва в R{}

# Предельный переход в неравенствах. (1Т, 2сл)

## 1 теорема

### Сущ пределы A B A<B то с какого то номера xn<yn

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, число

Автоматически созданное описание

## 2 следствия

### Xn > yn с какого то номера 🡪 A >= B

От прот: пусть А < B то xn<yn

пиротиворечие

### Xn >= yn 🡪 A >= B

# Теорема о сжатой переменной. (1Т)

## 1 теорема

### Xn <= zn <= yn и пределы xn=yn=A 🡪 lim(yn)=A

Заключить посл-ти в эпсилон трубы и соединить в одно неравентсво

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание

# Теорема Вейерштрасса. Дополнение и обобщение. (2Т)

## 2 теоремы

### Вейерштрасса. Возр(убыв) посл сходится т и тт когда огр сверху(снизу) и lim=sup(inf)

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание

### Обобщение. посл возр(убыв) и не огр сверху(снизу) –> имеет предел +беск(-беск) = sup(inf)

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание

# Второй замечательный предел. (1Т + 2опр)

## 1 теорема

### Сущ предел (1+1/n)n в R

Изображение выглядит как текст, Шрифт, рукописный текст, снимок экрана

Автоматически созданное описание

## 3 опред

### lim(1+1/n)n = e

### lim(xn)=+\*\* 🡪 lim(1+1/xn)xn = e

### lim(xn)=0 🡪 lim(1+xn)1/xn = e