

# Малоранговая SVD аппроксимация при решении нелинейного уравнения Шрёдингера для компенсации нелинейных искажений в оптоволоконных линиях связи

Серов Е.А.<sup>1</sup>, Делицын А.Л.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт, 141701, Московская область, г.  
Долгопрудный, Институтский переулок, д.9.

<sup>2</sup> Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, 127051,  
г.Москва, Б. Каретный пер., д.19, стр.1

serov.ea@phystech.edu

delitsyn@mail.ru

**Аннотация** В работе представлен способ малоранговой аппроксимации тензорного ядра интегрального оператора для алгоритма решения задачи компенсации нелинейных искажений в оптоволоконных линиях связи, основанный на сингулярном разложении (SVD) и методе главных компонент. Показано, что малоранговая аппроксимация приводит к алгоритму с асимптотической сложностью, соответствующей линейной задаче. Таким образом, значительно снижается временная сложность при сохранении алгоритмом требуемой точности.

**Ключевые слова:** SVD, цифровая компенсация, тензорные ядра

## 1 Введение

Существенную долю в современной технике связи составляет волоконная оптика. Наблюдаемая тенденция состоит в том, что мощность, расстояние и количество передаваемой информации растут. Это приводит к увеличению нелинейных искажений сигнала. Таким образом, задача их компенсации является актуальной. Более того, восстанавливать сигнал следует не только точно, но еще и быстро. Основным уравнением, описывающим задачу, является нелинейное уравнение Шрёдингера. Начальная задача него имеет вид:

$$i \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + |V|^2 V, \quad V|_{z=0} = V_0(t) \quad (1)$$

Краевые условия, как правило, формулируются двумя возможными способами. В первом случае мы считаем, что начальные данные определяются гладкой функцией с конечным носителем, т.е. обращающейся в нуль вне некоторого отрезка  $[t_1, t_2]$ . На решение начальной задачи накладывается дополнительное требование принадлежности  $L_2(-\infty, \infty)$  при всех  $z$ . Во втором случае накладываются периодические краевые условия по переменной

$t$ . С точки зрения дискретной задачи, приближающей дифференциальную задачу на сетке, применение обоих подходов осуществляется единообразно. Нелинейное уравнение Шрёдингера позволяет определить результат эволюции сигнала от  $z = 0$  к  $z = L$

$$V|_{z=0} \rightarrow V|_{z=L}$$

Аналогичным образом возможно рассмотрение обратного распространения сигнала

$$V|_{z=L} \rightarrow V|_{z=0},$$

позволяющее по полученному сигналу на приемнике  $V|_{z=L}$  определить его исходное значение на передатчике  $V|_{z=0}$ .

В последнее время развитие получило огромное количество различных методов решения поставленной задачи (нелинейного уравнения Шрёдингера с краевыми условиями), но у каждого из них есть свои преимущества и недостатки. На данный момент это бурно развивающаяся область науки, потому что самое эффективное и быстрое решение этой задачи не найдено, т.к. среди всех найденных решений нельзя выделить самое быстрого и эффективного, более того, не доказано, что оно существует и единственно, каждый метод обладает своими недостатками и преимуществами по сравнению с другими. Стоит подчеркнуть, что проблема заключается не в том, чтобы найти решение, а в том, чтобы построить алгоритм с временной сложностью меньше  $O(N^2)$  операций, который к тому же будет достаточно эффективен. Далее будет приведен краткий обзор современных методов решения поставленной задачи.

## 2 Основные применяемые методы

### 2.1 Обратное распространение сигнала при помощи SSFM как калибровочный метод

Метод обратного распространения сигнала (DBP) основан на переходе в частотную область для компенсации линейных искажений (Split Step Fourier Method, SSFM) [1] [13] и последующей корректировке фазы для учета нелинейности. Он представляет собой эффективный и широко используемый метод для решения нелинейного уравнения Шрёдингера.

Основная идея метода DBP заключается в цифровой передаче полученного сигнала через виртуальное волокно в обратном направлении [2] [3]. Волоконный канал разделяется на несколько частей с небольшой длиной, и на каждом шагу он моделируется как конкатенация линейных и нелинейных участков. Существуют различные способы реализации метода DBP в зависимости от порядка применения линейных и нелинейных частей [4].

Реализация линейной компенсации выполняется в частотной области с использованием неитеративного асимметричного метода SSFM.

DBP может быть реализован как с одним, так и с несколькими шагами на участок передачи. Метод обеспечивает высокую точность при небольших

размерах шагов. Однако, он имеет высокую временную сложность для реалистичных задач, которые требуется решать в режиме реального времени. Были предложены новые подходы для снижения сложности DBP на основе SSFM, такие как: взвешенный DBP [5] и скоррелированный DBP [6]; однако, они все равно сложны для реализации в реальном времени. DBP компенсирует все детерминированные помехи и считается эталонным методом для оценки других методов компенсации нелинейностей.

## **2.2 Ряды Вольтера в частотной области (VNLE)**

Моделирование распространения сигнала с учетом нелинейных эффектов в оптоволокне может быть выполнено на основе усеченных рядов Вольтерра (VNLE) [7].

Одно из преимуществ VNLE перед DBP заключается в возможности параллельной реализации, что снижает временную сложность.

Помимо рассматриваемого метода был предложен ряд подходов для дальнейшего снижения сложности VNLE, таких как взвешенный нелинейный метод рядов Вольтерра (W-VSNE) [8], а также метод усеченных рядов Вольтерра пятого порядка [9][10]. Хотя последний подход обеспечивает лучшую точность, увеличивается временная сложность метода по сравнению со схемой третьего порядка.

## **2.3 Метод фазового сопряжения (PC)**

Техника сопряжения фазовых сигналов [11][12] существенно опирается на возможность двухполяризационного режима передачи информации. Она базируется на передаче основного сигнала по каналу, соответствующему х-поляризации светового поля, и сопряженного сигнала по каналу на у-поляризации.

Предполагая, что нелинейные искажения являются антикоррелированными, фазовый сдвиг первого порядка может быть компенсирован с помощью суперпозиции двух сигналов на стороне приемника.

Главным преимуществом техники фазового сопряжения является ее простота реализации. Основным недостатком метода фазового сопряжения является потеря половины спектральной эффективности из-за передачи сопряженного сигнала на поляризации у.

## **3 Ряды Вольтера во временной области Малоранговые аппроксимации - SVD**

Можно избавиться от некоторых недостатков рассмотренных решений. Более того, получение алгоритма с асимптотической сложностью, соответствующей линейной задаче, сильно снизит временную сложность, что является большим преимуществом перед остальными методами. Для этого перейдем

к описанию применяемого нами метода. Рассмотрим уравнение (1) и возьмем от него преобразование Фурье, перейдя в спектральную область:

$$i \frac{\partial \widehat{V}}{\partial z} = -\omega^2 \widehat{V} + (|\widehat{V}|^2 \widehat{V}), \widehat{V}|_{z=0} = \widehat{V}_0(\omega), \quad (2)$$

где

$$\widehat{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} V(z, t) e^{-i\omega t} dt$$

Рассматривая нелинейность в качестве правой части обыкновенного дифференциального уравнения в спектральной области, представим решение в виде:

$$\widehat{V} = \widehat{V}_0(\omega) e^{i\omega^2 z} - i e^{i\omega^2 z} \int_0^z |\widehat{V}|^2 \widehat{V} e^{-i\omega^2 z'} dz'$$

От  $\widehat{V}$  с помощью обратного преобразования Фурье снова переходим к

$$V(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{V} e^{i\omega t} d\omega.$$

Используя оператор свертки, перепишем уравнение в виде:

$$V = h * V_0(t) + \int_0^z h(z - z') * |V|^2 V dz', \quad (3)$$

где  $\int_0^z h(t, z - z') * |V|^2 V dz' = \int_0^z \int_{-\infty}^{+\infty} h(z - z', t - t') (|V|^2 V)|_{(z', t')} dz' dt'$ . Непосредственным выписыванием интегралов можно убедиться, что функция  $h(t, z)$ , определяющая ядро оператора свертки с точностью до констант, имеет вид:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega^2 z} e^{i\omega t} d\omega.$$

Для решения уравнения (17) применим метод последовательных приближений:

$$V^{(0)} = h * V_0, \quad (4)$$

$$V^{(1)} = V^{(0)} + \Delta V^{(1)}, \Delta V^{(1)} = \int_0^z h(z - z') * |V^{(0)}|^2 V^{(0)}, \quad (5)$$

В более подробной записи имеем:

$$\Delta V^{(1)} = \int_0^z h(z - z') * (h * V_0(t_1) h * V_0^*(t_2) h * V_0(t_3)) dz' = \int_0^z dz' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' h(z - z', t -$$

$$\begin{aligned}
& -t') \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(z', t' - t_1) V_0(t_1) h^*(z', t' - t_2) V_0^*(t_2) h(z', t' - t_3) V_0(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{triplet}(z, t - t_1, t - t_2, t - t_3) V_0(t_1) V_0^*(t_2) V_0(t_3) dt_1 dt_2 dt_3
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем триплетную форму решения. Аналогичным образом можно построить следующие члены, но пока мы ограничимся только поправкой третьего порядка.

Необходимо построить алгоритм, работающий не только в условиях теории возмущений, но и применимый на по-возможности больших мощностях. После замены переменных решение принимает вид:

$$V^{(1)} = h * V_0 + \int \int \int h_{triplet}(t_1, t_2, t_3) V_0(t+t_1) V_0^*(t+t_2) V_0(t+t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \int \dots \int \dots, \quad (6)$$

где мы ограничимся только триплетным слагаемым.

Для того, чтобы распространить применимость полученной формулы (6) в область больших мощностей сигналов, будем рассматривать решение в указанной форме, но ядро  $h(t_1, t_2, t_3)$  больше не определяем точными формулами.  $h_{triplet}$  будем находить с помощью машинного обучения (ML). Особенностью задачи является то, что она рассматривается не для произвольных начальных данных, а для достаточно узкого класса квазислучайных сигналов. Считаем, что "точное решение" определяется с помощью SSFM [1] [13]. Нелинейная поправка определяется с одной стороны, как разность решения, полученного SSFM и решения линейного уравнения Шредингера, а с другой стороны, с помощью триплетной формы. Поскольку  $h_{triplet}$  входит в формулу (6) линейно, то  $h_{triplet}$  может быть найдено методом наименьших квадратов.

Рассмотрим систему уравнений

$$\Delta V^i = V^i - h * V_0^i = H(V_0) = \int \int \int h_{triplet} V_0^i(t_1) (V_0^i)^*(t_2) V_0^i(t_3) dt_1 dt_2 dt_3,$$

или матричное уравнение:

$$V^i \bar{h} = \Delta \bar{V}^i \quad (7)$$

Применяя метод наименьших квадратов  $\min(\sum_i \|V^i \bar{h} - \bar{y}^i\|_2^2)$ , найдем тензор

$\bar{h}$ , который приближает  $h_{triplet}$ .

Для вычисления триплетной формы заменяем интегралы суммой

$$\begin{aligned}
& \int \int \int h(t_1, t_2, t_3) V_0(t+t_1) V_0^*(t+t_2) V_0(t+t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \rightarrow \\
& \rightarrow \sum_{k_1, k_2, k_3} h_{k_1, k_2, k_3} V_{0, k+k_1} V_{0, k+k_2}^* V_{0, k+k_3}
\end{aligned}$$

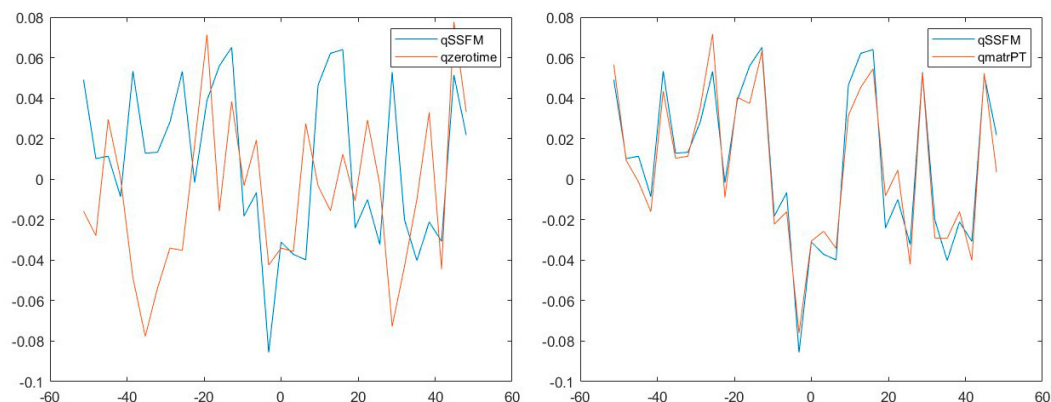
Мы заметили, что особенностью тензора  $h_{k_1, k_2, k_3}$  является преобладание элементов, соответствующих совпадающим индексам  $k_2 = k_1$ . Это явление можно заметить при рассмотрении элементов тензора, полученных вычислением по явным формулам метода последовательных приближений. Рассматриваем далее только часть триплетной формы при  $k_1 = k_2$ , но определять матрицу  $\tilde{h}_{k_1, k_3} = h_{k_1, k_1, k_3}$  следует машинным обучением, а не прямым приравниванием коэффициентов. Это существенно увеличивает точность аппроксимации триплетной формы. Наши численные эксперименты

показали, что использование машинного обучения при вычислении матрицы, определяющей триплетную форму, обеспечивает точность вычисления нелинейной поправки, которая мало отличается от полученной при использовании трехмерного тензора. Полученное уравнение для ML имеет вид:

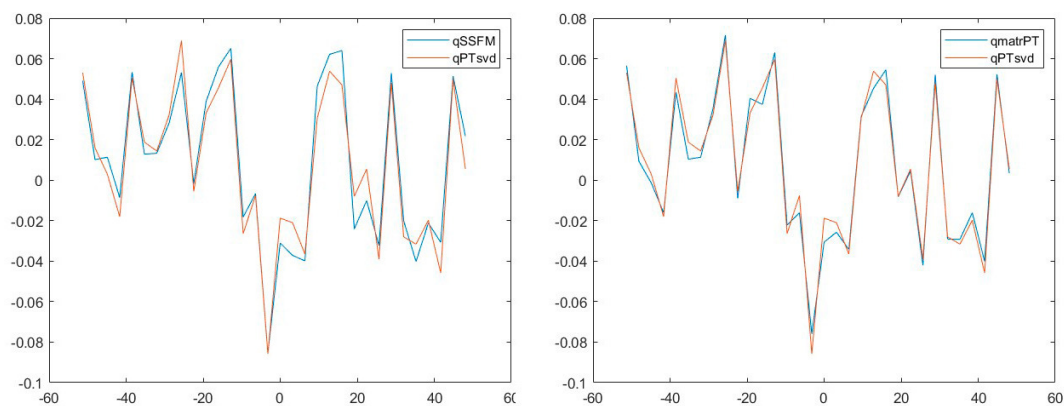
$$\Delta V_k = \sum_{k_1, k_2} h_{k_1, k_2} |V_0|_{k+k_1}^2 V_{0, k+k_2} \quad (8)$$

Следующий шаг, позволяющий снизить временную сложность вычисления нелинейной поправки до уровня асимптотически эквивалентного линейному, заключается в том, чтобы получившуюся матрицу приблизить методом главных компонент до  $n$  первых опорных собственных векторов, считая, что матрица  $\tilde{h} = s_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1^* + \dots + s_n \bar{u}_n \bar{v}_n^*$ , где  $s_i$  - сингулярные числа, а  $u_i, v_i$  - соответствующие им вектора сингулярного разложения. Для матриц малого порядка, т.е. квадратных матриц с числом размером порядка 10000 и меньше, оказывается достаточным использование однорангового приближения для получения приемлемых результатов, то есть таких, среднеквадратичная относительная ошибка которых составляет не более 10-15%. В текущей версии алгоритма матрица  $\tilde{h}$  находится обучением, а затем определяются соответствующие векторы. Приведем примеры расчетов, демонстрирующих поведение метода для следующих параметров волоконной линии. Число передаваемых символов  $N_{sym} = 32$ , параметр, определяющий мощность  $LaunchPower = 5$ ,  $N_{up} = 1$  - число точек сетки на символ,  $FiberLength = 1000$  - длина волокна. Для обучения использовалось 200 сигналов. На рис. 1-2 показаны результаты сравнения решений, полученных в линейном приближении, полной триплетной формы и аппроксимации триплетной формы с помощью аппроксимации тензора матрицей и ее малорангового приближения.

Результаты вычислений показывают, что уже для одноранговой аппроксимации точность достаточно хорошая, более того, это даже видно из рис. 2, на котором изображены ломаные линии, описывающие наш сигнал, поэтому можно построить модель, где  $\tilde{h} = s_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1^*$ , число символов, представляющее интерес на практике начинается от 1000. В то же время 100000 символов может считаться максимальным значением, вполне удовлетворяющим практическим требованиям на матрицу малого порядка. Эксперименты, соответствующие рис. 2, показывают хорошее совпадение по точности: одноранговая аппроксимация имеет относительную среднеквадратичную ошибку 9.8%, в то время как решение на основе триплетной формы дает ошибку 9.7%. При этой аппроксимации снижается асимптотическая сложность вычисления нелинейной поправки от  $O(N^3)$  (вычисление нелинейной поправки по всем элементам трехмерного тензора размера  $N$ , экспериментально заняло 0.24 с) до  $O(N \log N)$  (получается выражением через свертки для однорангового приближения в (8), которые с помощью пакета BPF делаются за  $O(N \log N)$  операций, которые экспериментально заняли 0.004 с).



**Рис. 1.** Сравнение эволюции сигнала qzerotime, полученного в линейном приближении, и qmatrPT, полученного на основе триплетной формы, с "точным решением" qSSFM, определяемым SSFM методом, которое считаем базовым.



**Рис. 2.** Сравнение эволюции сигнала qPTsvd, полученного на основе нашей SVD аппроксимации триплета с одной главной компонентой, с решением qmatrPT, на основе триплетной формы, и с "точным решением", qSSFM определяемым SSFM методом.

## 4 Перспективы дальнейшего развития

Несложно построить итерационный метод для непосредственного вычисления векторов в одноранговом приближении. Построение матрицы при этом не требуется. Более того, для пары получившихся векторов ( $n = 1$ ) можно строить обучение по экспериментальным данным. Делается это следующим методом, полагая, что нужно найти  $\tilde{h} = \bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1^*$  (считаем, что сингулярное число  $s_1$  уже умножено на один из векторов), рассматриваем уравнение:

$$\Delta V_k^{(i)} = \left( \sum_{k_1} \xi_{k_1} |V_{k+k_1}^{(i)}|^2 \right) \left( \sum_{k_2} \eta_{k_1} V_{k+k_2}^{(i)} \right) \quad (9)$$

Для определения векторов малорангового приближения можно использовать алгоритм ALS - последовательных итераций, пока ошибка отклонения не станет меньше заданной. для  $i = 0, \dots, 1$  фиксируем  $\eta^{(i)}$ , а  $\xi^{(i+1)}$  находим линейной регрессией, затем фиксируем найденный  $\xi^{(i+1)}$  и ищем  $\eta^{(i+1)}$  линейной регрессией, пока не достигнем необходимой точности.

## 5 Выводы

Достигнуто существенное уменьшение временной сложности без потери точности метода решения задачи компенсации нелинейных искажений в оптоволоконных линиях связи на основе учета триплетного члена ряда Вольтера. Построенная аппроксимация оператора вычисления нелинейной поправки с помощью векторов SVD имеет асимптотическую сложность аналогичную линейному случаю. Малоранговое приближение может быть получено обучением непосредственно по значениям сигнала, определяемым либо SSFM методом, либо экспериментально.

### Список аббревиатур

SVD Singular value decomposition  
DBP Digital back-propagation  
SSFM Split-step Fourier method  
VNLE Volterra nonlinear equalizer  
W-VSNE Weighted Volterra series nonlinear equalizer  
ML Machine Learning  
ALS Alternating least squares

## Список литературы

1. O. V. Sinkin, R. Holzlohner, J. Zweck, and C. R. Menyuk, "Optimization of the split-step fourier method in modeling optical-fiber communications systems," IEEE/OSA J. Lightw. Technol., vol. 21, no. 1, pp. 61–68, Jan. 2003.
2. R. J. Essiambre and P. J. Winzer, "Fibre nonlinearities in electronically pre-distorted transmission," in Proc. IEEE/OSA ECOC, 2005, paper Tu.3.2.2. 37



3. E. Ip and J. M. Kahn, "Compensation of dispersion and nonlinear impairments using digital back propagation," *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, vol. 26, no. 20, pp. 3416–3425, Oct. 2008.
4. D. Rafique, M. Mussolin, M. Forzati, J. Martensson, M. N. Chugtai, and A. D. Ellis, "Compensation of intra-channel nonlinear fibre impairments using simplified digital back-propagation algorithm," *OSA Opt. Exp.*, vol. 19, no. 10, pp. 9453–9460, May. 2011.
5. D. Rafique, M. Mussolin, M. Forzati, J. Martensson, M. N. Chugtai, and A. D. Ellis, "Modified split-step fourier method for compensation of nonlinear fibre impairments," in *Proc. IEEE ITCON*, 2011, paper Tu.P.5.
6. L. Li, Z. Tao, L. Dou, W. Yan, S. Oda, T. Tanimura, T. Hoshida, and J. C. Rasmussen, "Implementation efficient nonlinear equalizer based on correlated digital backpropagation," in *Proc. IEEE/OSA OFC*, 2011, paper OWW3.
7. J. F. Zhang, Q. Zhuge, M. Qiu, W. Wang, M. Chagnon, D. V. Plant, "XPM model-based digital backpropagation for subcarrier-multiplexing systems," *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, vol. 33, no. 24, pp. 5140–5150, Dec. 2015.
8. S. B. Amado, F. P. Guimar, N. J. Muga, J. D. Reis, S. M. Rossi, A. Chiuchiarelli, J. R. F. Oliveira, A. L. Teixeira, and A. N. Pinto, "Experimental demonstration of the parallel split-step method in ultra-long-haul 400G transmission," in *Proc. IEEE/OSA ECOC*, 2015, paper 0656.
9. A. Amari, P. Ciblat, and Y. Jaouen, "Fifth-order Volterra series based nonlinear equalizer for long -haul high data rate optical fiber communications," in *Proc. IEEE ACSSC*, Nov. 2014, pp. 1367–1371.
10. A. Amari, O. A. Dobre, and R. Venkatesan, "Fifth-order Volterra-based equalizer for fiber nonlinearity compensation in Nyquist WDM superchannel system," in *Proc. IEEE ICTON*, 2017, pp. 1–4.
11. X. Liu, A. R. Chraplyvy, P. J. Winzer, R. W. Tkach, and S. Chandrasekhar, "Phase-conjugated twin waves for communication beyond the Kerr nonlinearity limit," *Nat. Photonics*, vol. 7, pp. 560–568, May 2013.
12. X. Liu, S. Chandrasekhar, and P. J. Winzer, "Phase-conjugated twin waves and fiber nonlinearity compensation," in *Proc. IEEE OECC*, 2014, paper TH11B-1.
13. A. Redyuk, E. Averyanov, O. Sidelnikov, M. Fedoruk, S. Turitsyn: "Compensation of Nonlinear Impairments Using Inverse Perturbation Theory With Reduced Complexity". *JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY* **38**(6), 1250–1257 (2020)