

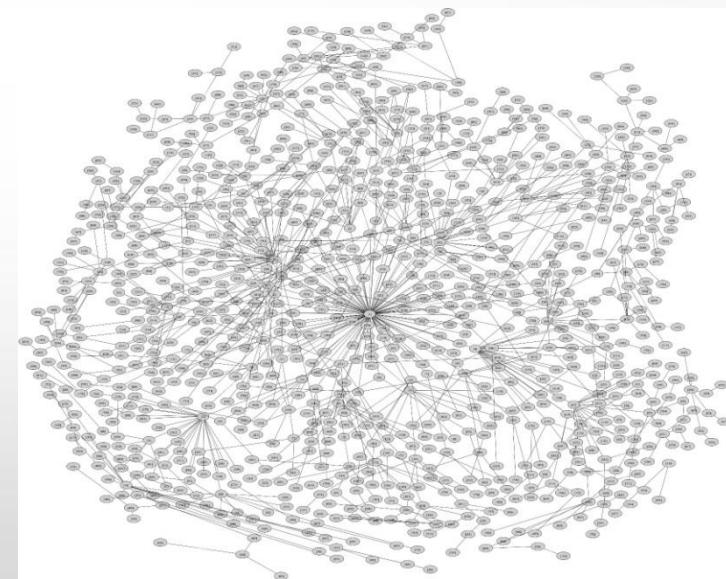
# 修正版BAモデルで生成したネットワークの スケールフリー性判定計算実験

日本大学文理学部情報システム解析学科  
谷聖一 研究室  
田中 勇歩

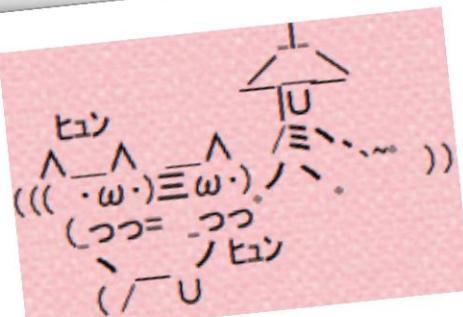
# 目次

---

- 1章 始めに
- 2章 スケールフリーネットワークとは？
- 3章 修正版BAモデル
- 4章 実験方法
- 5章 実験結果
- 6章 今後の課題



修正版BAモデルで作成した頂点数1000の  
ネットワーク



# 1章 始めに

# 1.1 -背景-

世の中には様々なネットワークが存在



出典: 東京都公式ホームページ  
(2013/02/06 03:12 UTC版)

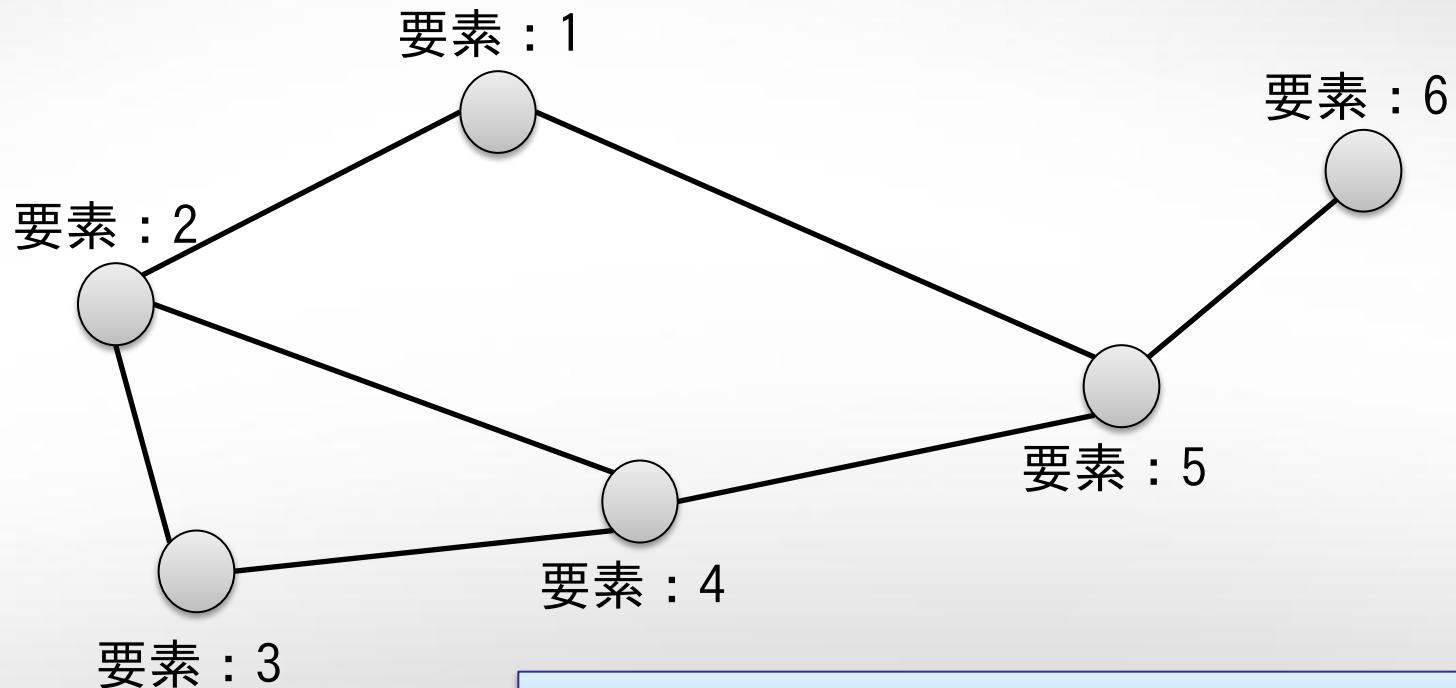
図: 東京地下鉄の路線図

他にも、鉄道網、学校のクラス内における友人関係、インターネット網等

## 1.1 -背景-

ネットワークとは？

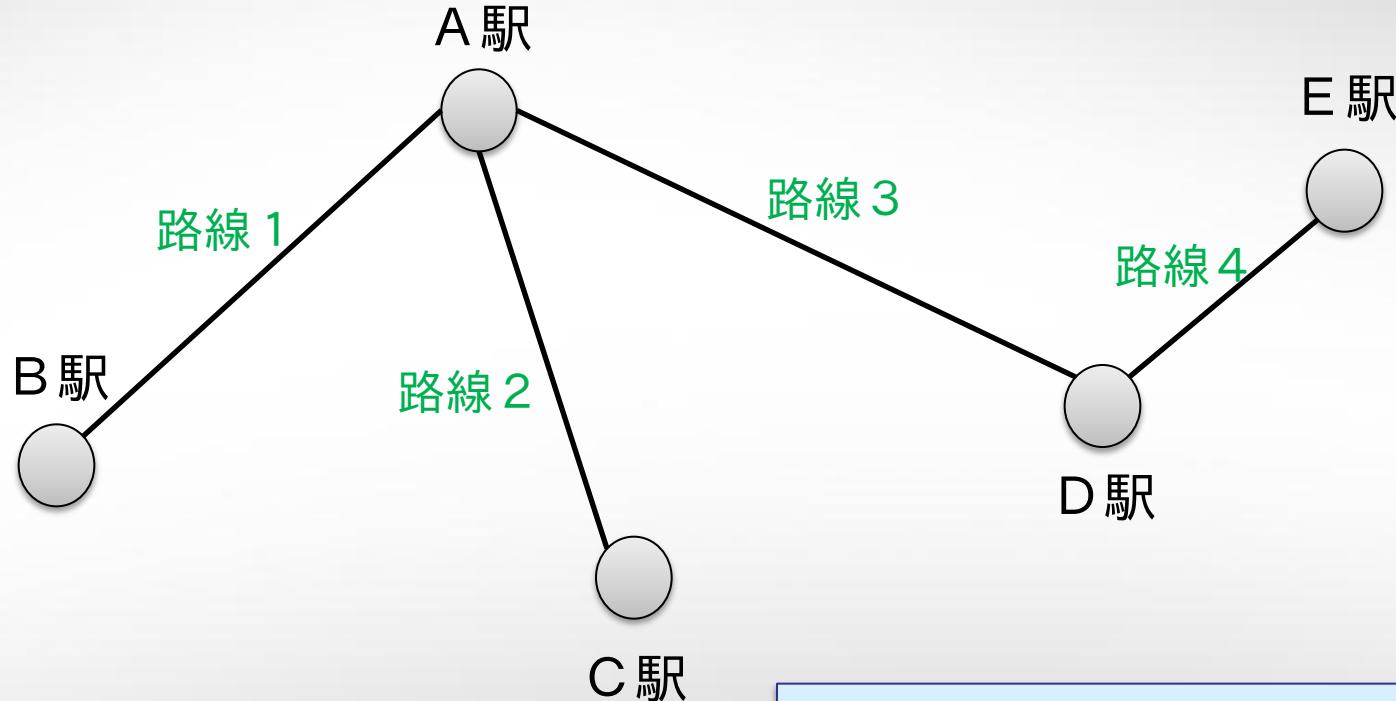
頂点と枝からなり、流れがあるもの



- 頂点：ネットワークを構成する一つ一つの要素
- 枝：頂点と頂点を結ぶ線

# 1.1 -背景-

## 例（鉄道網）

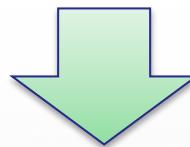


- 頂点：駅
- 枝：路線
- 次数：頂点から出ている枝の個数

## 1.1 -背景-

---

ネットワークを用いてモデル化できる問題が多数存在  
例. 災害時緊急情報伝達問題、交通網に関する問題等



数理的解析が可能

## 1.2 -目的-

2012年

Phys. Rev. E 86, 021103 (2012)

Hiroshi Toyoizumi, Seiichi Tani, Naoto Miyoshi,  
Yoshio Okamoto

Reverse preferential spread  
in complex networks

### ーある仮定の元で証明ー

伝搬速度限定モデル  
情報を保持する頂点が  
1つの隣接頂点にのみ  
情報を伝播

次数が小さい頂点  
に優先的に伝播



無駄な伝播が少なく  
効率よく発散

## 1.2 -目的-

2011年度の谷研究室の卒業生

証明された結果が妥当か検証する為、  
スケールフリーネットワークを生成し、計算機実験を実施



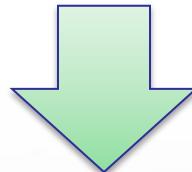
### 考えられる原因

- 生成したネットワークのスケールフリー性
- シュミレーションアルゴリズムの妥当性
- 仮定の妥当性

## 1.2 -目的-

---

考えられる原因の一つ、  
生成したネットワークのスケールフリー性に注目



- 新たにスケールフリーネットワークを生成
- スケールフリー性をどの程度満たしているのかを判定する為、計算実験を実施

---

## 2章. スケールフリー・ネットワークとは？

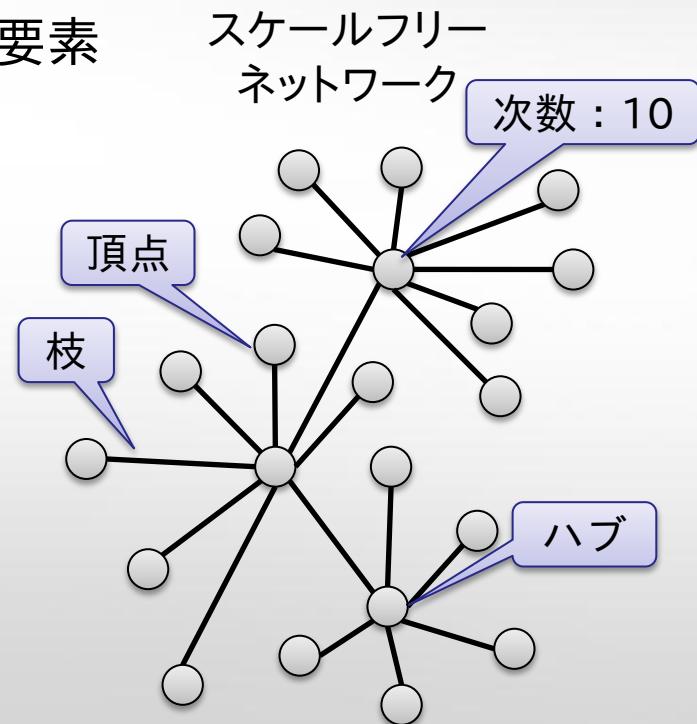


## 2. スケールフリーネットワークとは？

### スケールフリーネットワーク

ネットワーク理論の分野において、  
枝が一部の頂点に極度に集中しているネットワーク

- ・ 頂点：ネットワークを構成する一つ一つの要素
- ・ 枝：頂点と頂点を結ぶ線
- ・ ハブ：枝が集中している頂点
- ・ 次数：頂点から出ている枝の個数



## 2. スケールフリーネットワークとは？

### ハブとは？

鉄道車両、自動車、  
オートバイ、自転車等の  
車輪を構成する部品の一つ

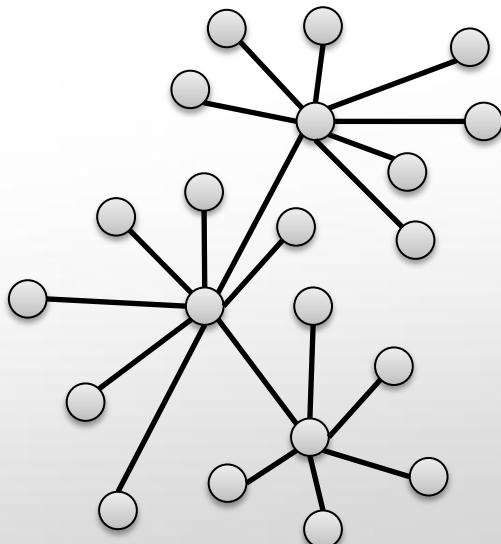


自転車のハブ  
(中央の黒い部品)

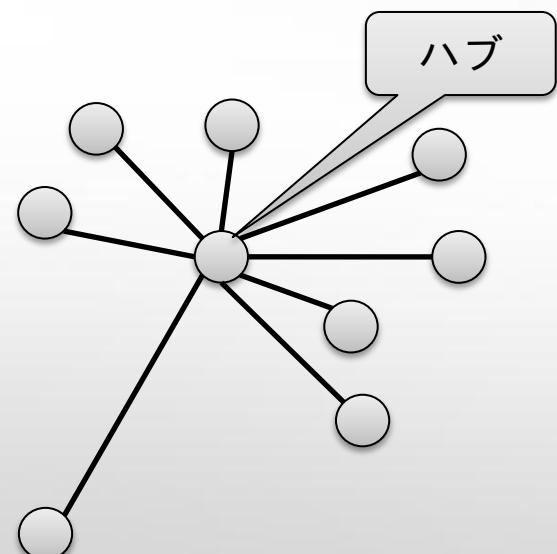
拡大



### スケールフリー ネットワーク



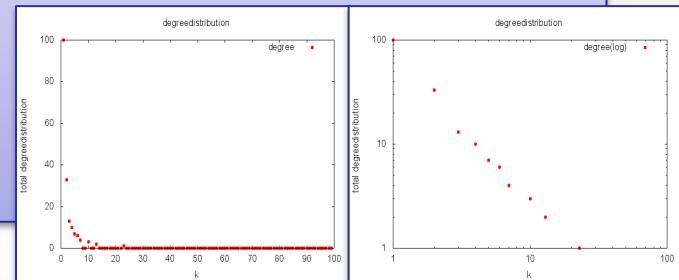
ハブの名前の由来は  
『車輪の中心』



## 2.1 -スケールフリー性-

### スケールフリー性①

- 少数の頂点が多くの枝を持ち、多数の頂点がわずかな枝しか持たない性質
- ネットワーク上の次数分布はベキ分布 $P(k) = \propto k^{-\tau}, (\tau > 0)$
- 次数分布を両対数で描画すると直線のグラフになる



### 例. 鉄道網

- 一部の駅は非常に多く路線を持っている
- 多く駅は少ない路線しか持たない



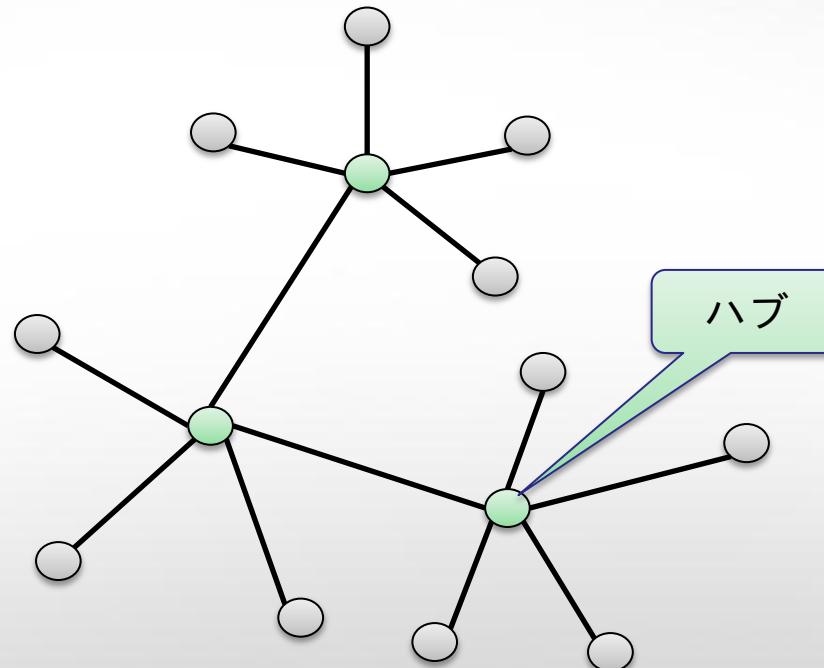
X軸・y軸の両対数で描画

このような性質を持っているネットワーク  
⇒スケールフリーネットワーク

## 2.1 -スケールフリー性-

### スケールフリー性②

ハブが多数存在する為、ネットワークの任意の2頂点間の距離が短い



スケールフリー ネットワーク

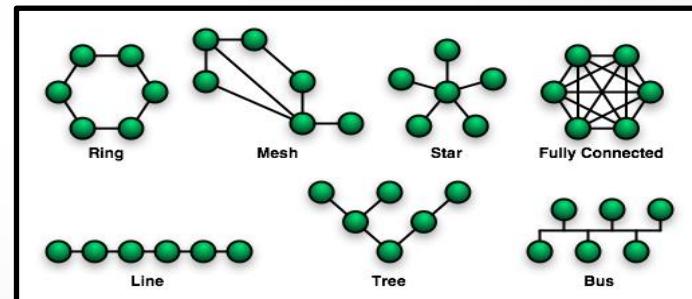
## 2.2 -スケールフリーネットワークの特徴-

### スケールフリーネットワークの強み

- 偶発的な障害に対して、非常に頑強
- 全頂点のいくつかがダウンしても、代替経路により頂点間の接続を維持  
⇒ 系全体の平均最短距離はほとんど変化しない

同じ頂点数、同じ枝数を持つ、  
構造が異なる他のネットワークでは  
このような特性は見られない

出典: フリー百科事典  
『ウィキペディア(Wikipedia)』  
(2012/12/10 09:10 UTC版)



### スケールフリーネットワークの弱み

特定の重要なハブをピンポイントで狙った攻撃に対して、脆弱

### 具体例：自然界の食物連鎖のネットワーク

- 生物種のランダムな絶滅に対して、頑強
- 特定の重要種の絶滅に対して、大きな影響を受ける（脆弱）

## 2.3 -代表的モデル：BAモデル-

- ・スケールフリーネットワークを生成するモデルはいくつか提唱
- ・代表的なものに、Barabasi-Albertモデル(以降、BAモデル)

### BAモデル（成長型モデル）

1999年にBarabasiとAlbertらが提案した、不規則で乱雑なネットワーク構造をしているスケールフリーネットワークモデル

※ BAモデルの由来：BarabasiとAlbertの頭文字

## 2.3 -代表的モデル：BAモデル-

### BAモデルの2つの鍵

- ネットワークの成長
- 優位的選択

- 頂点は、次々とネットワークに加わる (成長)
- 加わった頂点は、その時点で次数の高い頂点に結びつきやすい (優位的選択)



- 次数が高くなった頂点は、その後も新しい枝を獲得しやすい  
⇒ハブになりやすい
- 次数獲得競争に一度破れると、ハブになるのは困難

## 2.4 -BAモデルのアルゴリズム-

### BAモデルのアルゴリズム

1.  $n > 1$  個の頂点からなるグラフを置く
2. 新しい頂点を 1 個追加し (成長)、すでに存在している  $n$  個の頂点に対して枝を張る。この時、新しい枝が張られる確率は、各頂点のその時点での次数  $k$  と総次数に比例する (優先的選択)  
すなわち

$$\frac{k_i}{\sum_{j=1}^n k_j} \quad (1 \leq i \leq n)$$

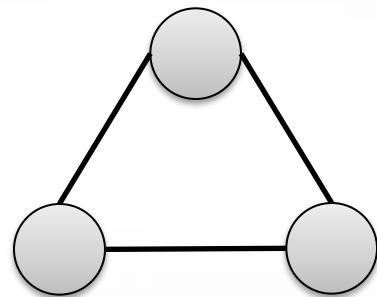
の確率である

3. 指定の頂点数になるまで、Step2を繰り返す

この数式の分子からもわかるように、元からある頂点は、次数に比例して新しい枝を受けとりやすい (優先的選択)

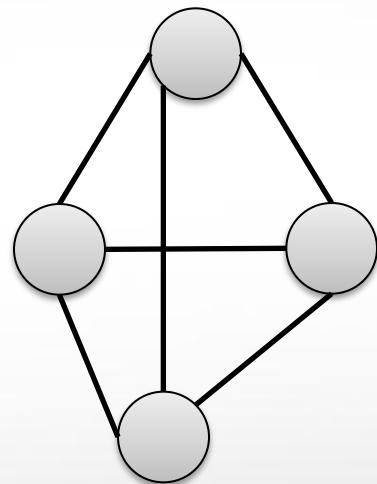
## 2.4 -BAモデルのアルゴリズム-

例（ $n = 3$  からスタートした場合）



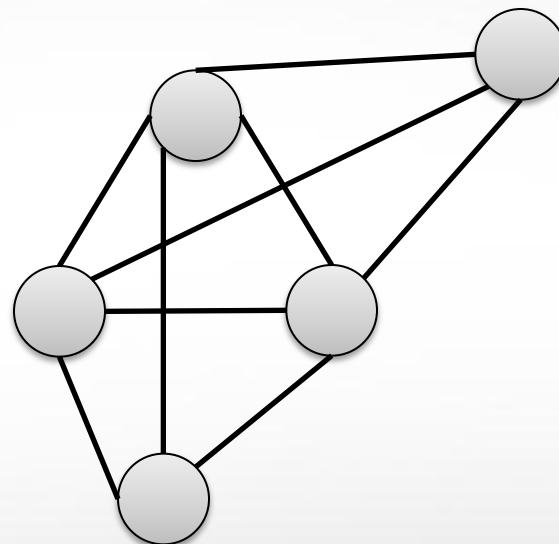
## 2.4 -BAモデルのアルゴリズム-

例（ $n = 3$  からスタートした場合）



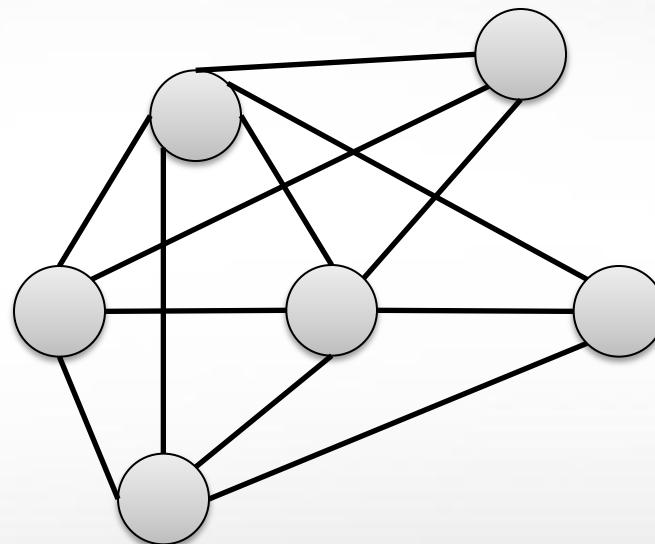
## 2.4 -BAモデルのアルゴリズム-

例（ $n = 3$  からスタートした場合）



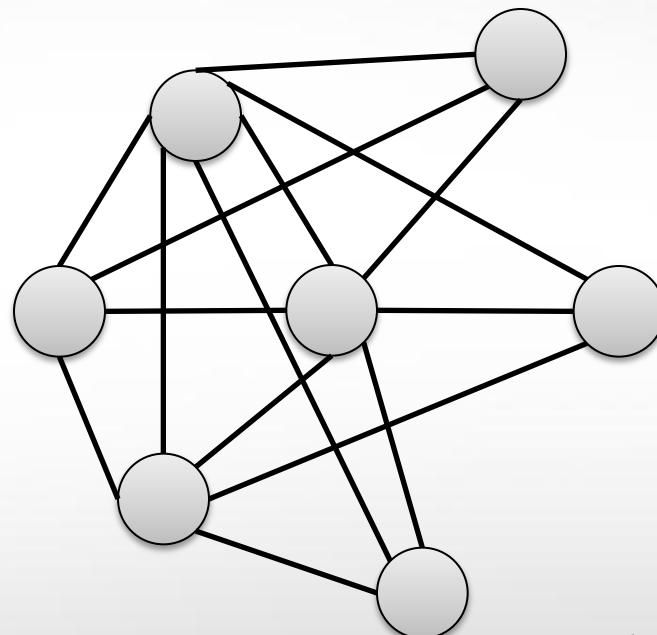
## 2.4 -BAモデルのアルゴリズム-

例（ $n = 3$  からスタートした場合）



## 2.4 -BAモデルのアルゴリズム-

例（ $n = 3$  からスタートした場合）



このように増えていく

---

# 3章. 修正版BAモデル



### 3. 修正版BAモデル

---

本研究では、修正版Barabasi-Albertモデル(以降、修正版BAモデル)を採用した

#### 修正版BAモデルのアルゴリズム

1. 枝を保有しない既存の頂点を1個置く
2. 新しい頂点を1個追加し **(成長)**、すでに存在している既存の頂点に対して1つ枝を張る。この時、新しい枝が張られる確率は、各頂点のその時点での次数と総次数に比例する **(優位的選択)**
3. 指定の頂点数になるまで、Step2を繰り返す

### 3. 修正版BAモデル

---

例（修正版 BA モデル）

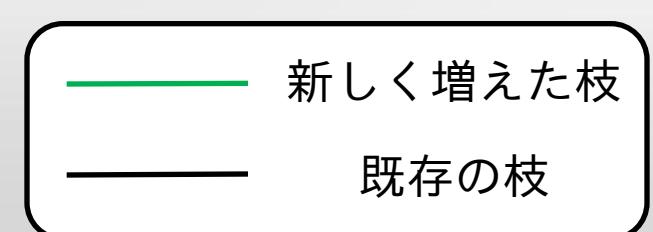
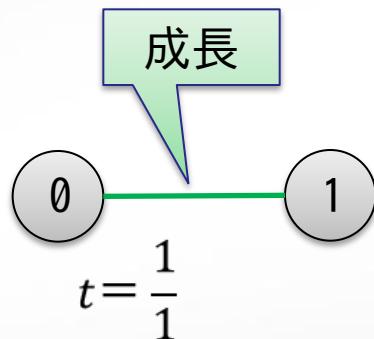
ステップ 0



### 3. 修正版BAモデル

例（修正版 BA モデル）

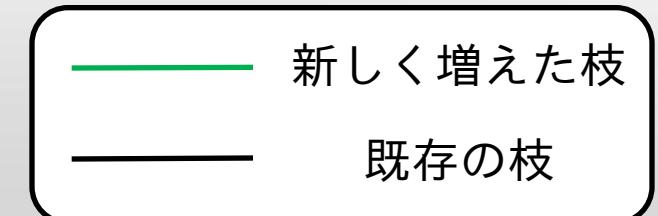
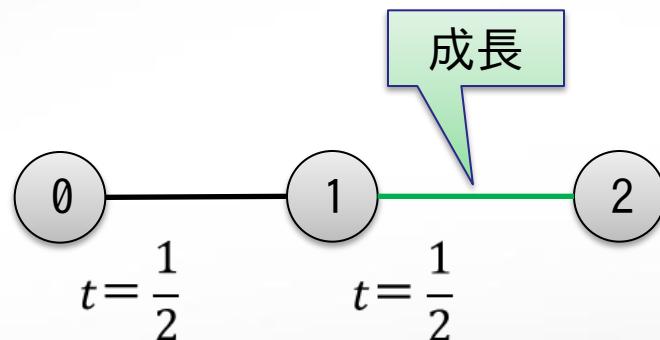
ステップ 1



### 3. 修正版BAモデル

例（修正版 BA モデル）

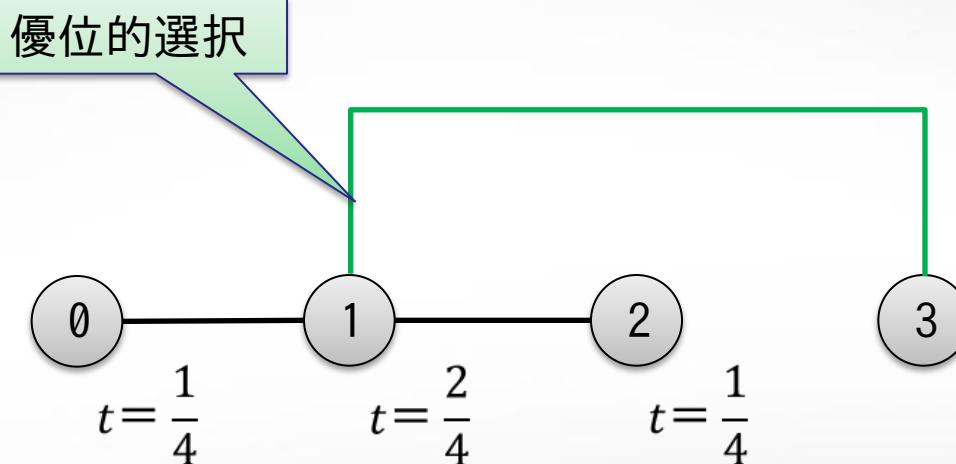
ステップ 2



### 3. 修正版BAモデル

例（修正版 BA モデル）

ステップ 3

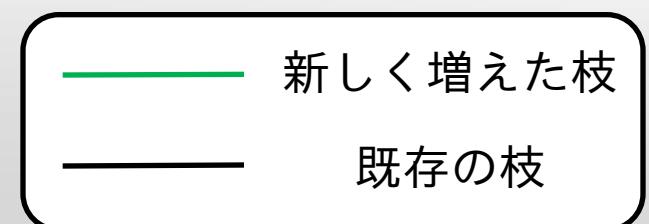
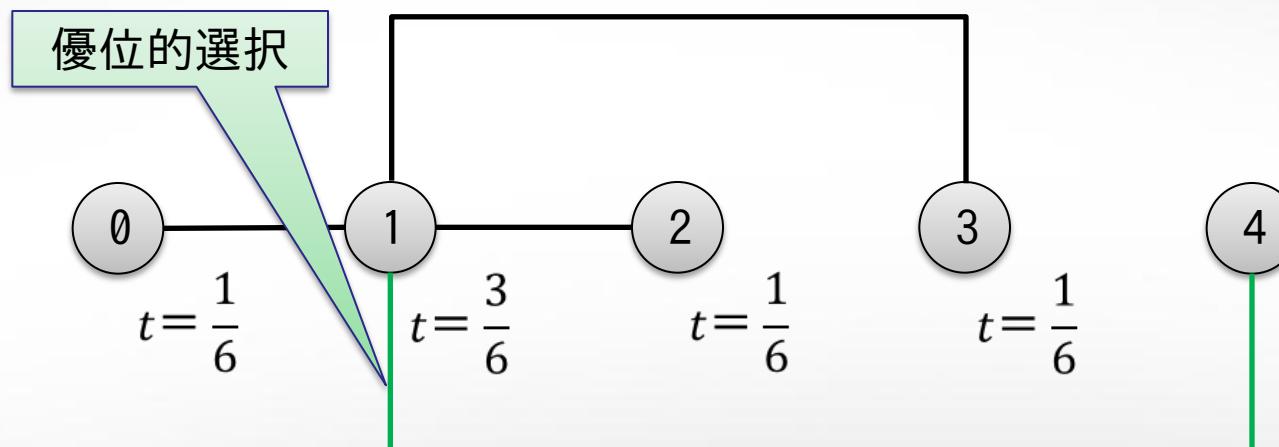


新しく増えた枝  
既存の枝

### 3. 修正版BAモデル

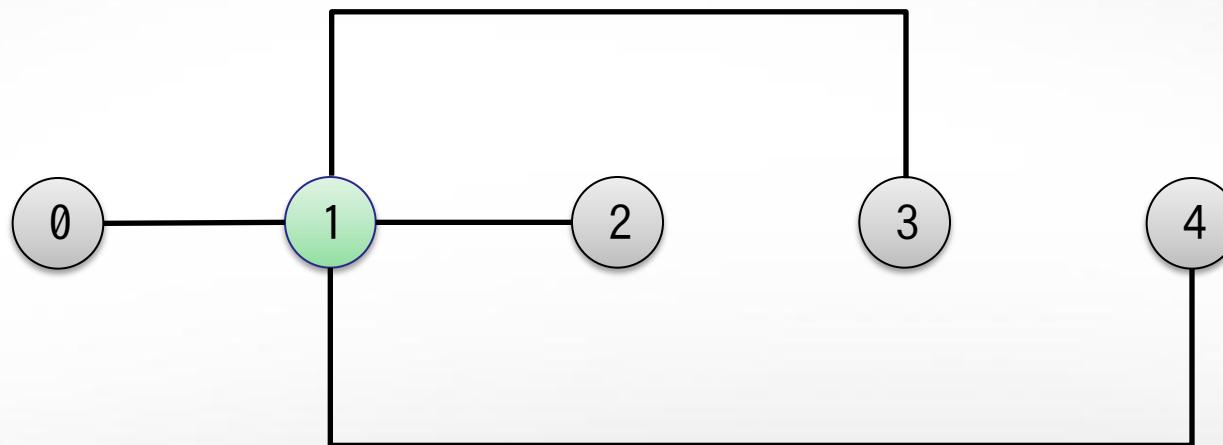
例（修正版 BA モデル）

ステップ 4



### 3. 修正版BAモデル

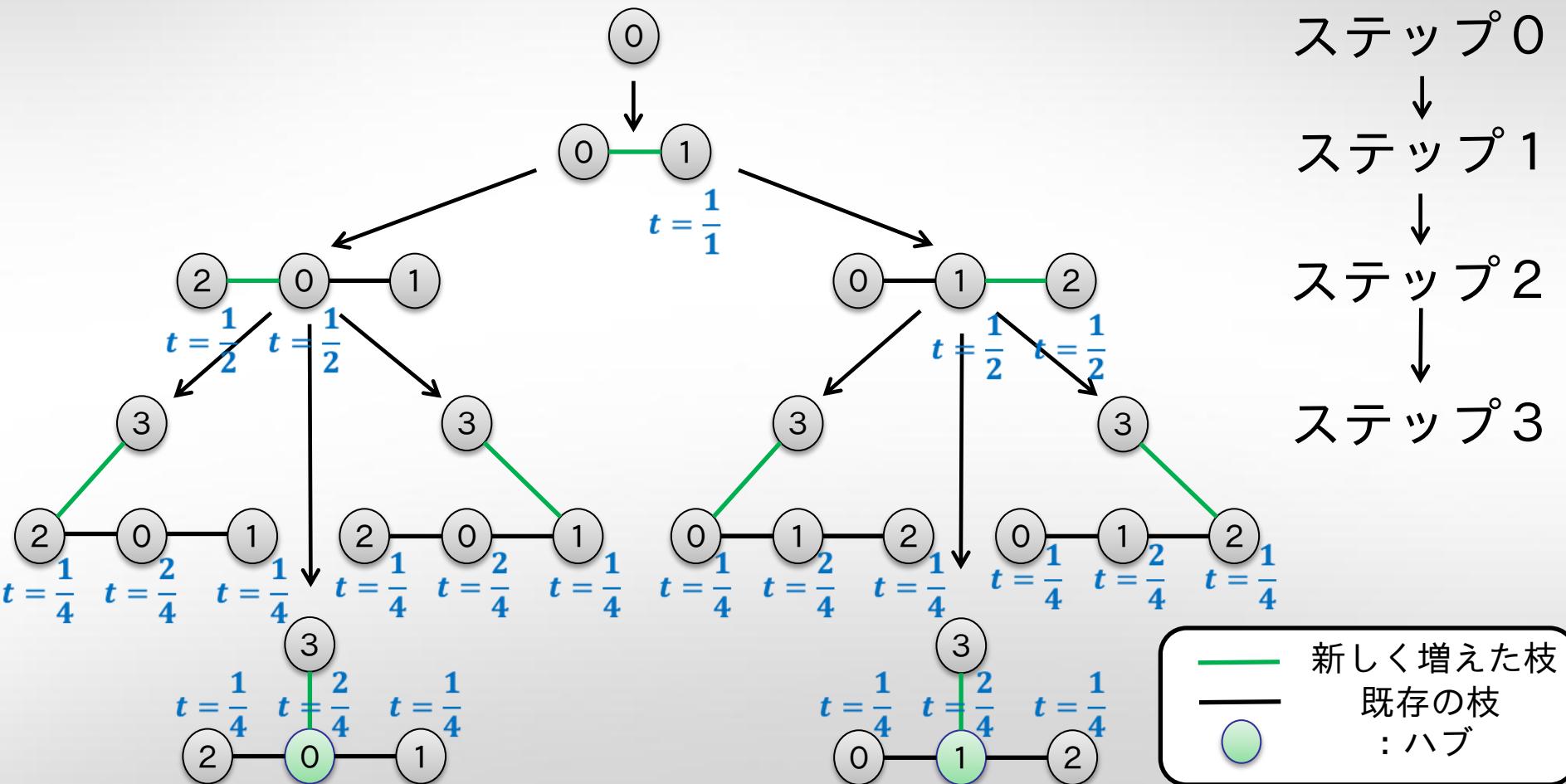
例（修正版 BA モデル）



: ハブ

### 3. 修正版BAモデル

#### 例（修正版 BA モデル）



### 3. 修正版BAモデル

#### 修正版 BA モデルの特徴

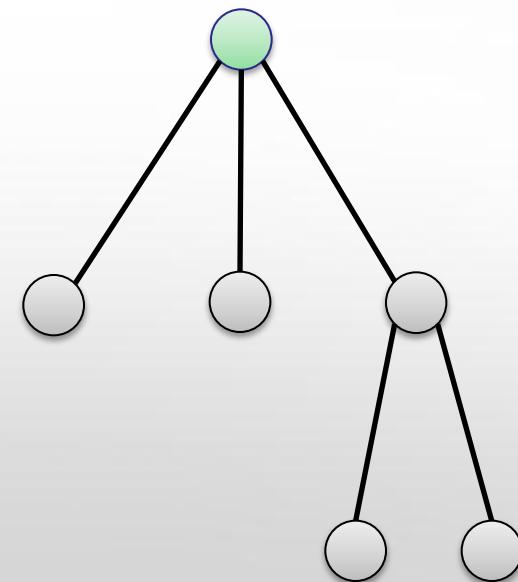
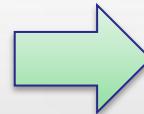
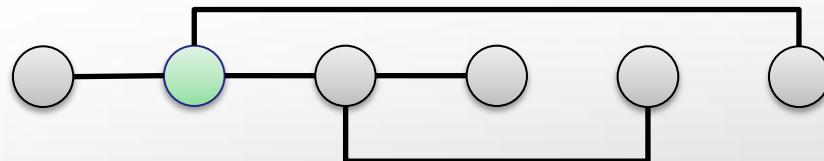
##### BAモデルの2つの鍵

- ・ ネットワークの成長
- ・ 優位的選択



生成するグラフは木構造

つまり…



### 3. 修正版BAモデル

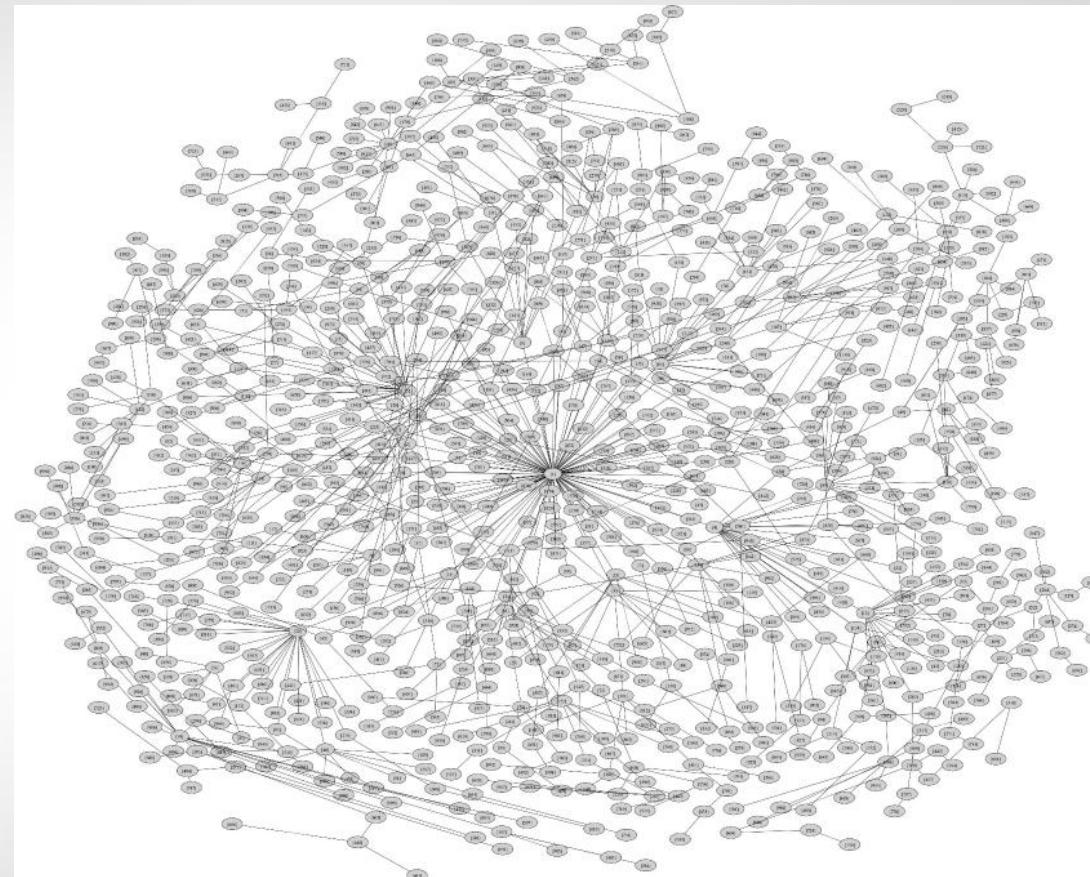


図. 頂点数1000の修正版BAモデル

---

# 4 章. 実験方法



## 4. 実験方法

### 実験準備

- ネットワークモデル：修正版BAモデル
- 使用言語：C++
- 頂点数1000、1万、10万のネットワークを、各300個生成

### 実験の指針

生成した各ネットワークに対して以下の3つを実施

- ① 直感的にも判断できるよう、ネットワークを可視化
- ② ネットワークの直径、半径、平均値を計算し、グラフを描画
- ③ 次数分布図を描画し、データの配置を調査

## 4.1 -実験準備-

### ネットワークの生成プログラム

INPUT:作成ファイル名、最大頂点数

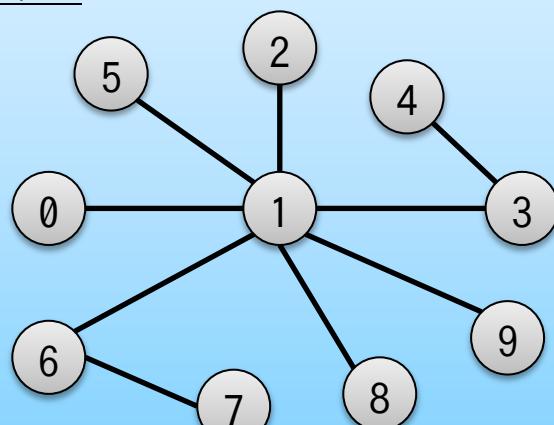
- ファイルの1行目 : 最大頂点数、枝数を記録
- ファイルの2行目以降 : 最大頂点数まで、各頂点がどの頂点に枝を張ったかを記録
- ファイルを各300個生成

最大頂点数:10の場合

テキスト

1	0	9
0	1	
1	2	
1	3	
3	4	
1	5	
1	6	
6	7	
1	8	
1	9	

グラフ



## 4.1 -実験準備-

### プログラム内での次数の格納の仕方

最大頂点数まで、各頂点がどの頂点に枝を張ったのか読み取り、  
プログラム内に格納

最大頂点数:10の場合

テキスト

1	0	9
0	1	
1	2	
1	3	
3	4	
1	5	
1	6	
6	7	
1	8	
1	9	

プログラム内  
に格納

頂点 頂点へのポインタ

0	1								
1	0	2	3	5	6	8	9		
2	1								
3	1	4							
4	3								
5	1								
6	1	7							
7	6								
8	1								
9	1								

可視化

他のプログラムで使用

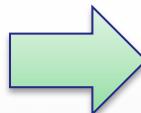
## 4.2 -①ネットワークの可視化方法-

### 可視化の前処理

頂点 頂点へのポインタ

0	1							
1	0	2	3	5	6	8	9	
2	1							
3	1	4						
4	3							
5	1							
6	1	7						
7	6							
8	1							
9	1							

自分より低い  
頂点を削除



頂点 頂点へのポインタ

0	1							
1	2	3	5	6	8	9		
2								
3	4							
4								
5								
6	7							
7								
8								
9								

## 4.2 -①ネットワークの可視化方法-

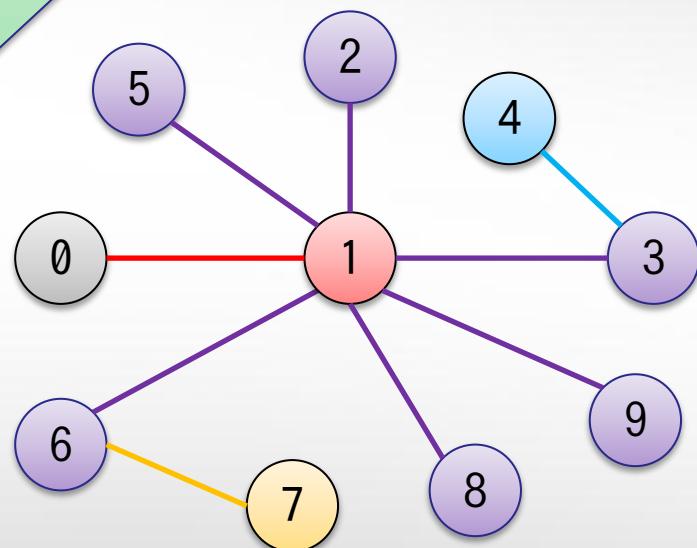
### 可視化の前処理

頂点 頂点へのポインタ

0	1								
1	2	3	5	6	8	9			
2									
3	4								
4									
5									
6	7								
7									
8									
9									

1. 現在の頂点を置く
2. 頂点から頂点へのポインタ全てに枝を張る
3. 次の頂点へ移動

Graphviz  
Gvizで可視化



可視化！

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

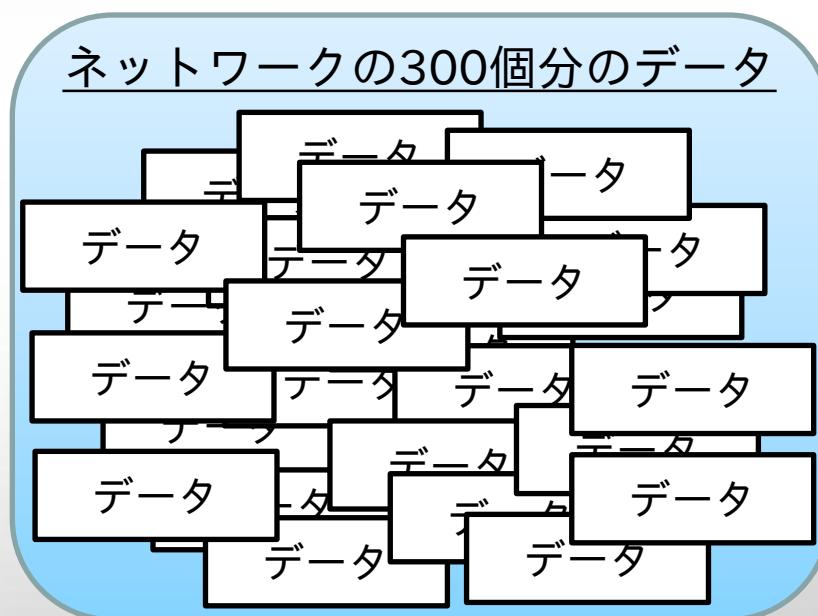
### 用語説明

eccentricity : 現在の頂点から各頂点への深さの最大値

直径(diameter) : eccentricityの最大値

半径(radius) : eccentricityの最小値

平均値 : eccentricityの平均値



直径、半径、  
平均値を計算



### グラフ化

300個の直径  
の分布図

300個の半径  
の分布図

300個の平均値  
の分布図

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

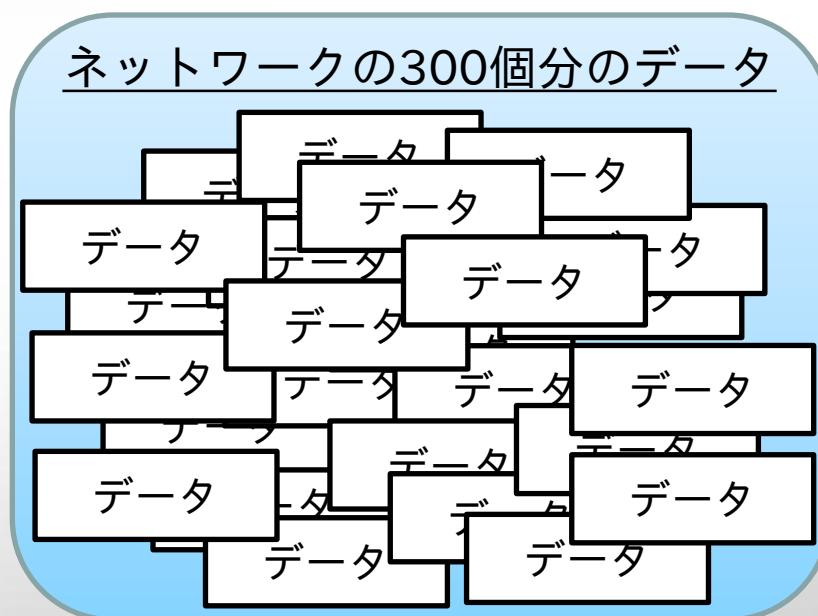
### 用語説明

eccentricity : 現在の頂点から各頂点への深さの最大値

直径(diameter) : eccentricityの最大値

半径(radius) : eccentricityの最小値

平均値 : eccentricityの平均値



直径、半径、  
平均値を計算



### グラフ化

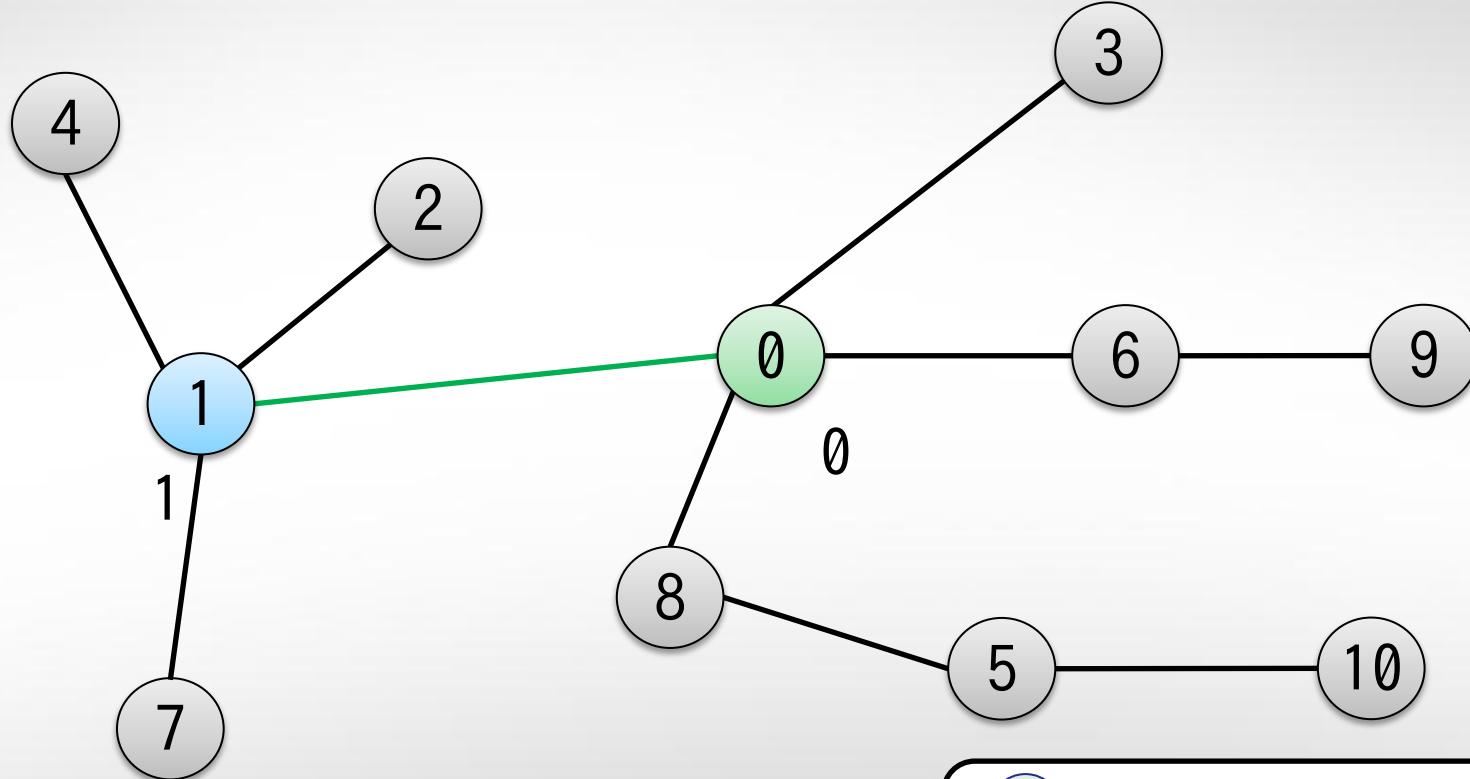
300個の直径  
の分布図

300個の半径  
の分布図

300個の平均値  
の分布図

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

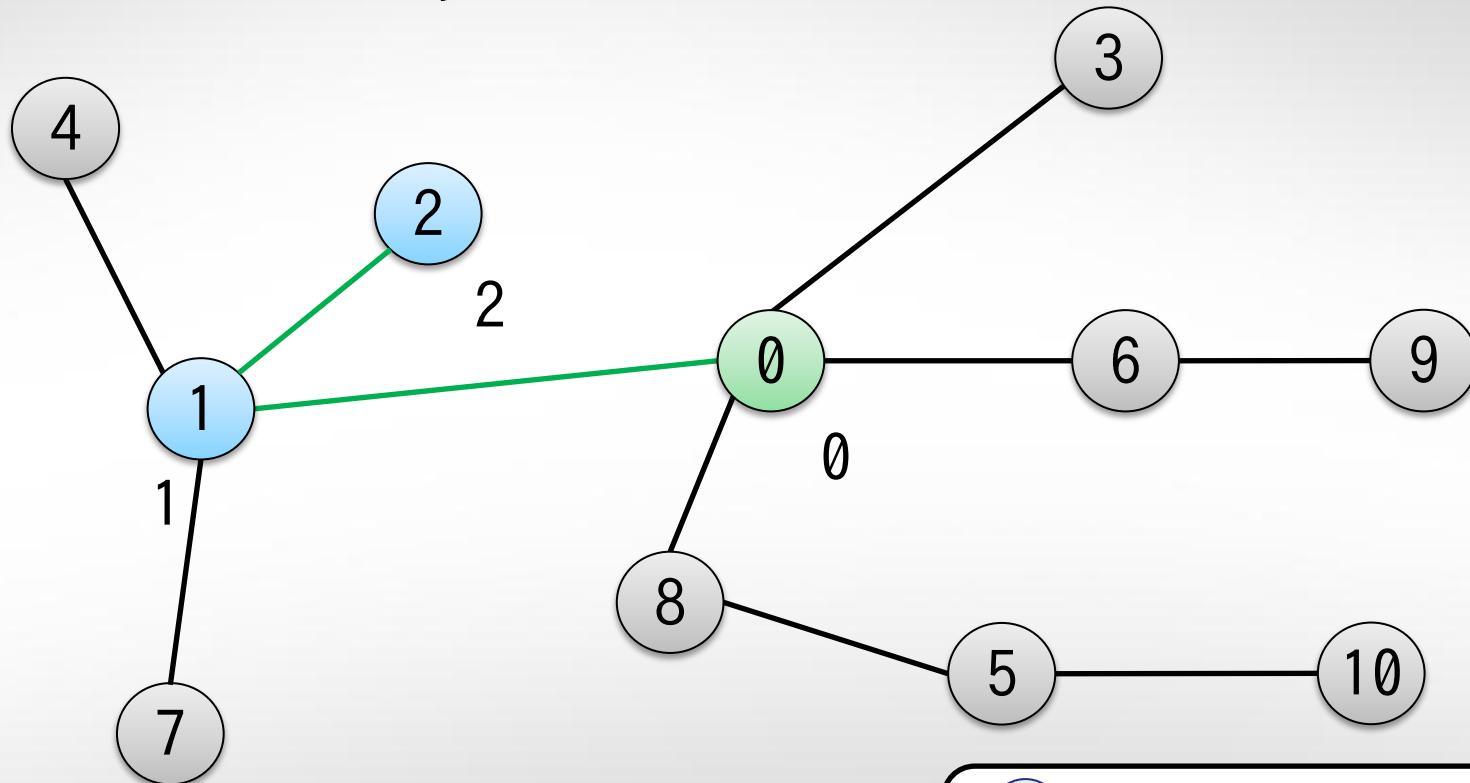
### 頂点のeccentricity



: 現在の頂点  
: 調査済みの頂点

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

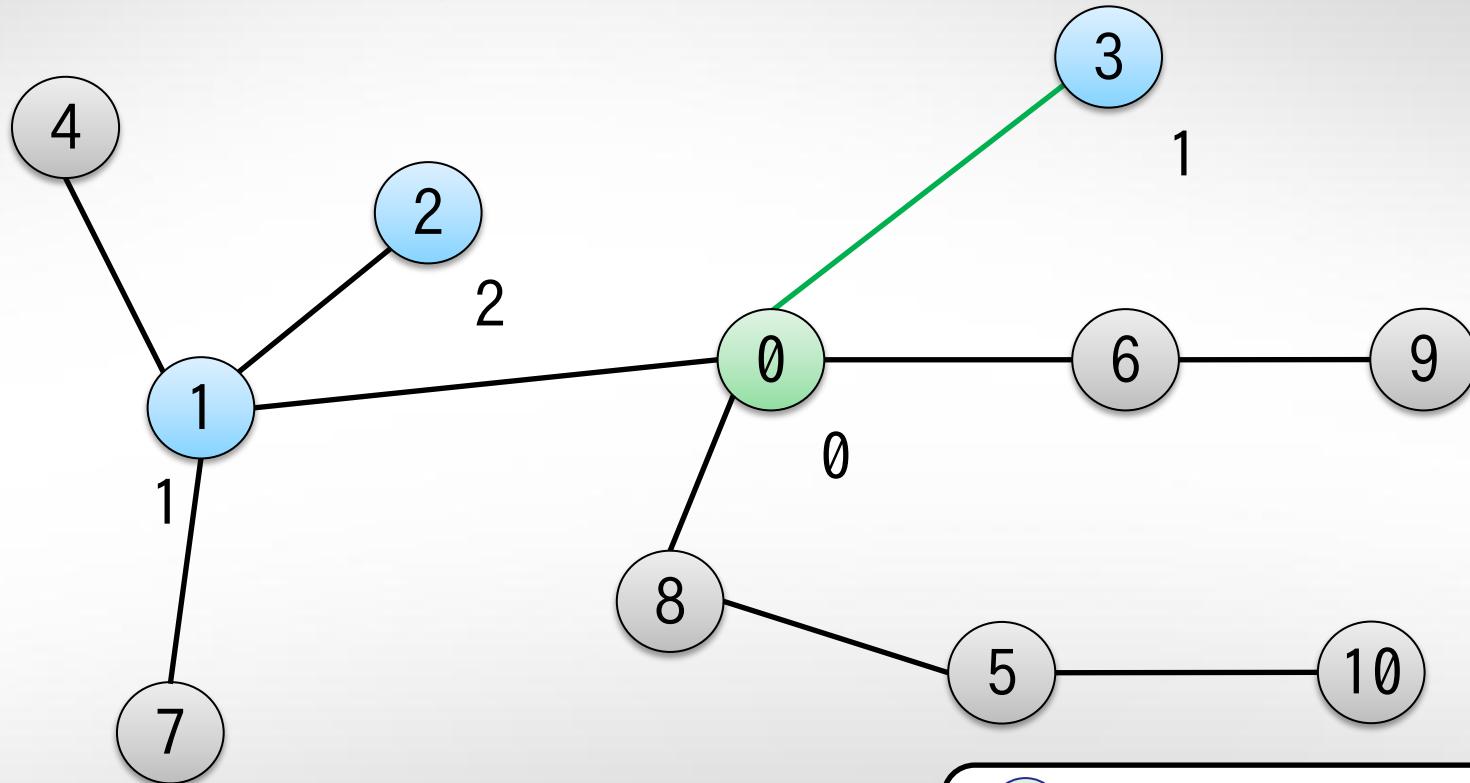
### 頂点のeccentricity



: 現在の頂点  
: 調査済みの頂点

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

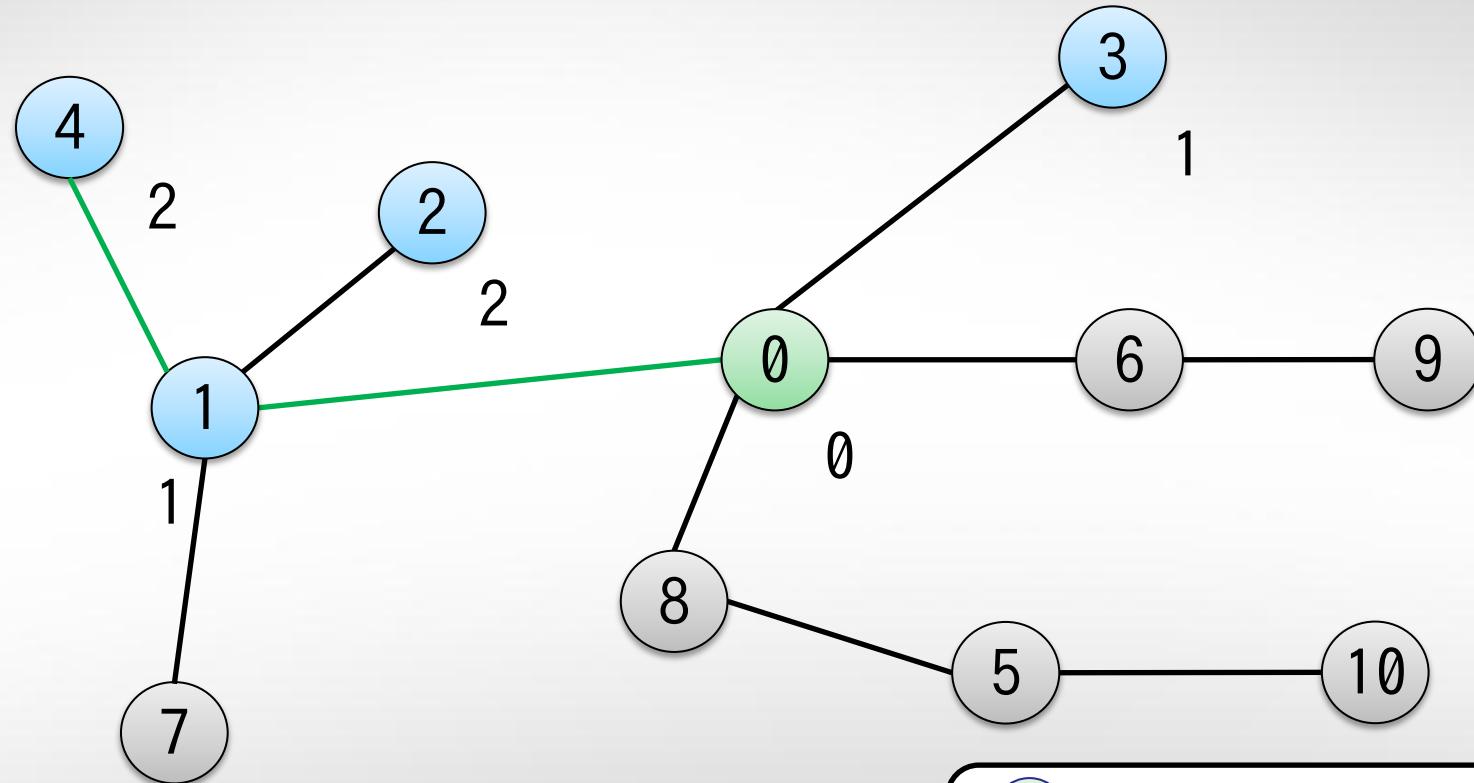
### 頂点のeccentricity



: 現在の頂点  
: 調査済みの頂点

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

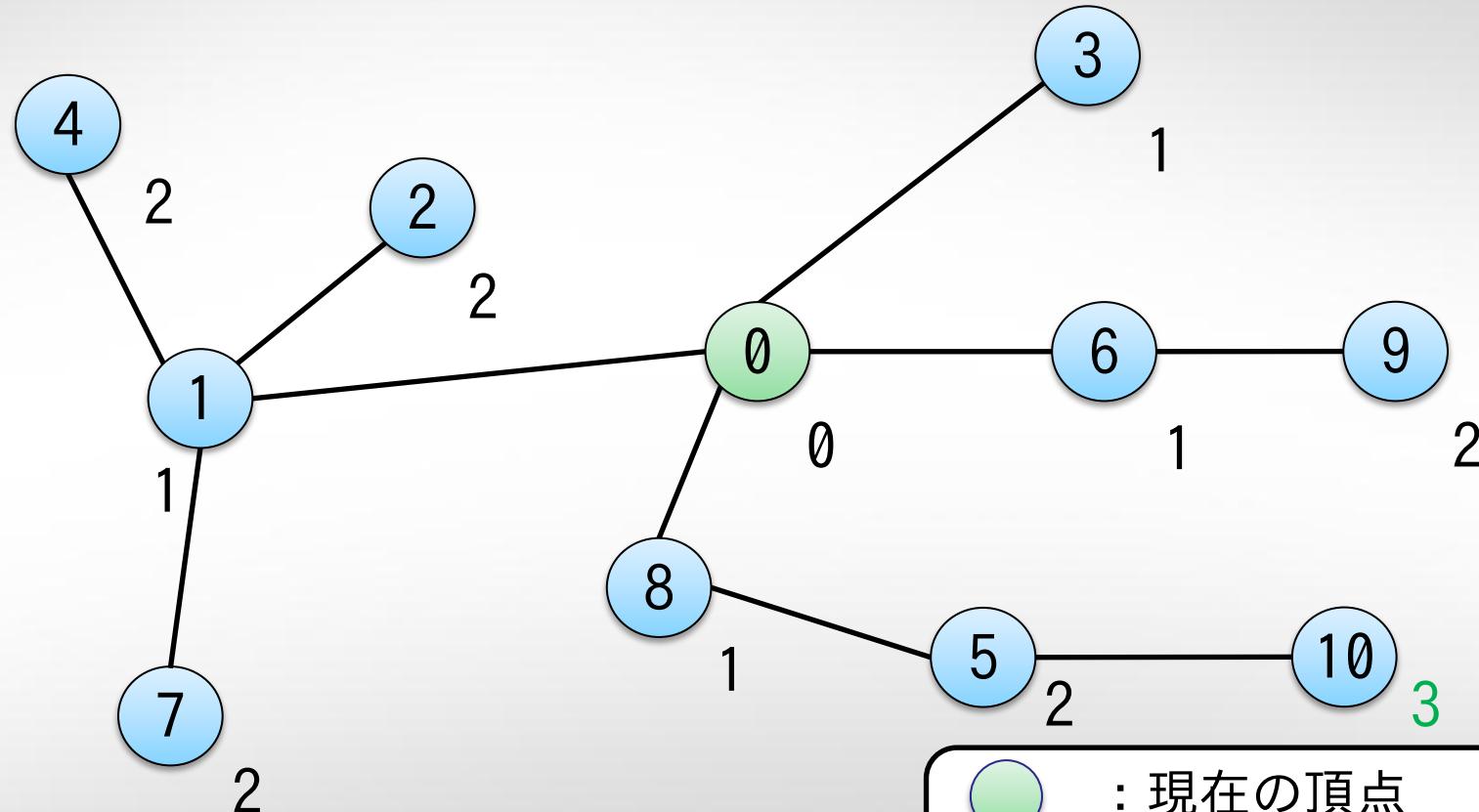
### 頂点のeccentricity



: 現在の頂点  
: 調査済みの頂点

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

### 頂点のeccentricity



例. 頂点0のeccentricityは3



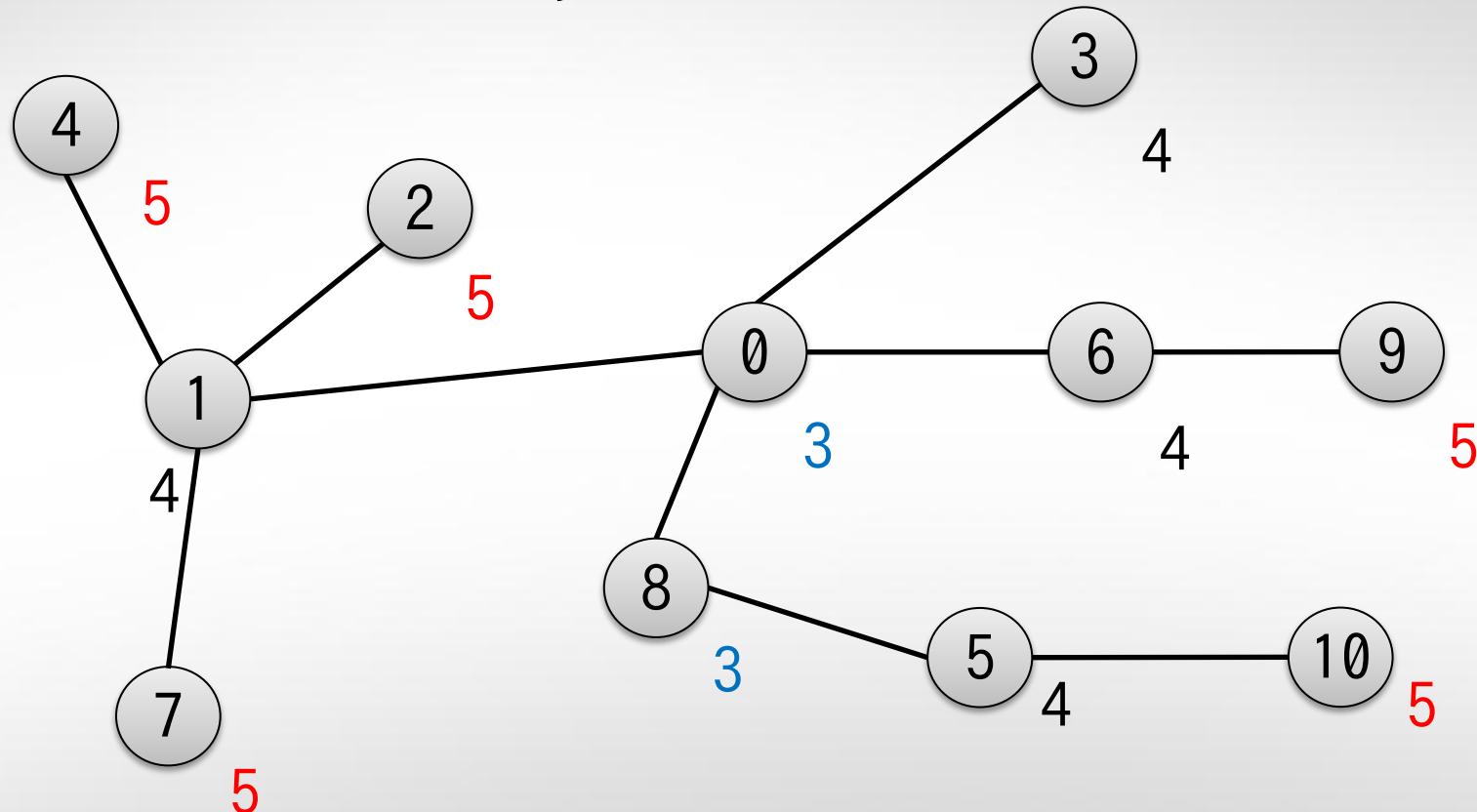
: 現在の頂点



: 調査済みの頂点

## 4.3 -②ネットワークの直径、半径、平均値の計算-

直径、半径、eccentricityの平均値



例. 直径5、半径3、eccentricityの平均値4.7

## 4.4 -③次数分布図の描画方法-

次数分布図は、  
次数分布の累積分布の両対数でグラフ描画⇒作成

次数分布の累積分布の両対数をで描画

X 軸：次数  $k$

Y 軸：累積分布

X 軸・Y 軸共に両対数で描画

※次数  $k \Rightarrow 1 \sim$  最大頂点数

## 4.4 -③次数分布図の描画方法-

次数分布の累積分布の両対数で描画

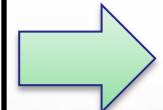
頂点 頂点へのポインタ

0	1								
1	0	2	3	5	6	8	9		
2	1								
3	1	4							
4	3								
5	1								
6	1	7							
7	6								
8	1								
9	1								

次数  $k$  累積分布(0はカウントしない)

1	7
2	2
3	0
4	0
5	0
6	0
7	1
8	0
9	0

描写



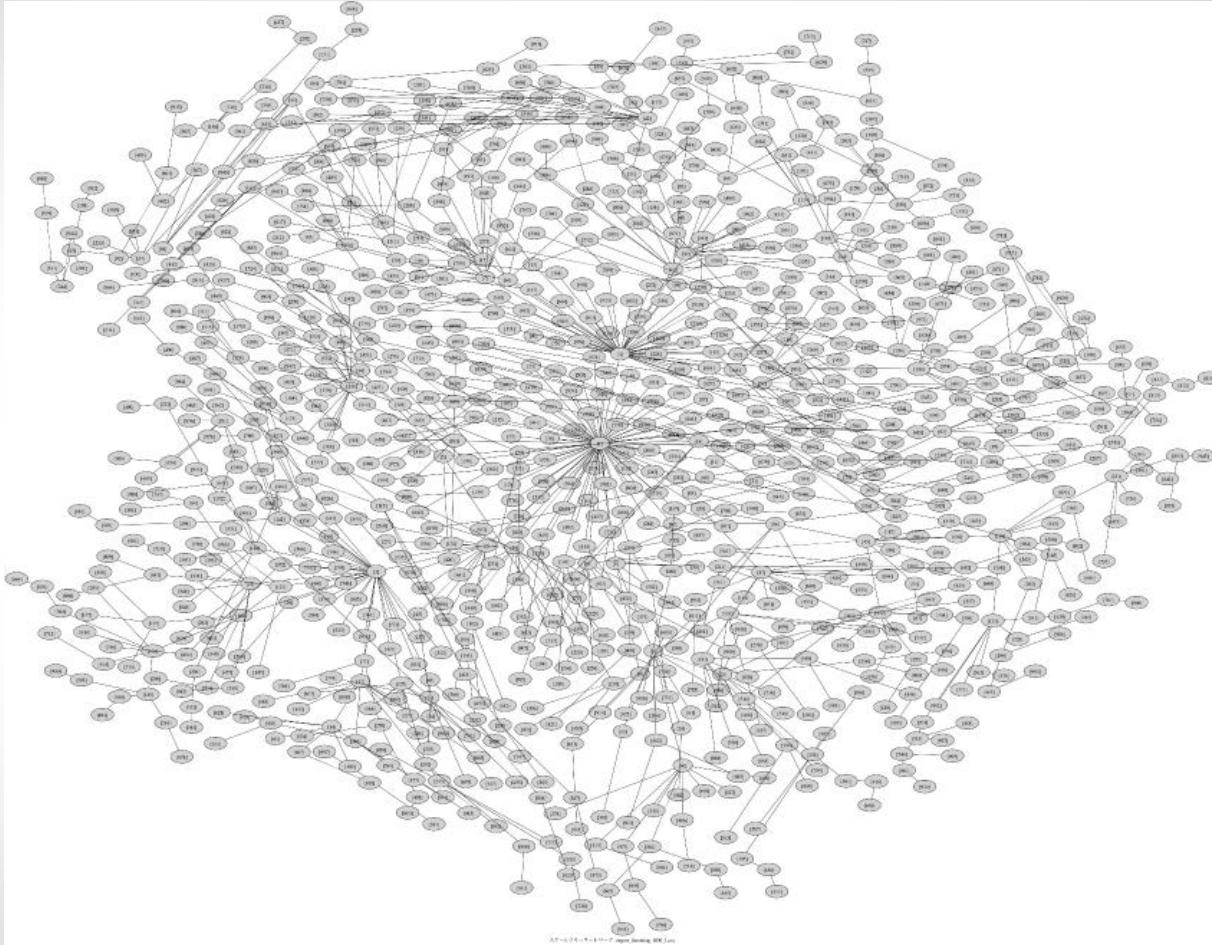
---

# 5 章. 実験結果



# 5. 実験結果

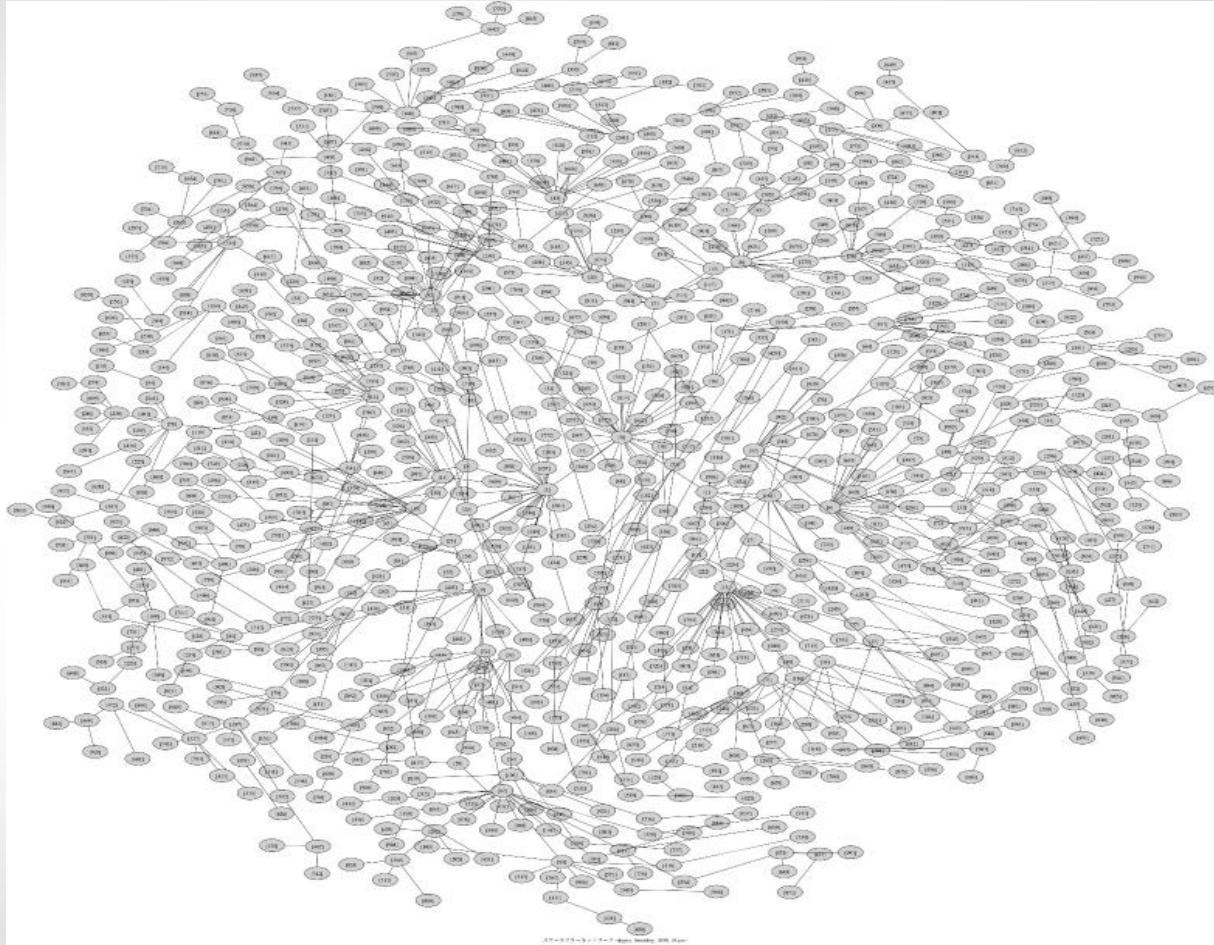
-①直感的にも判断できるよう、ネットワークを可視化-



頂点数1000の修正版BAモデル(No.1)

# 5. 実験結果

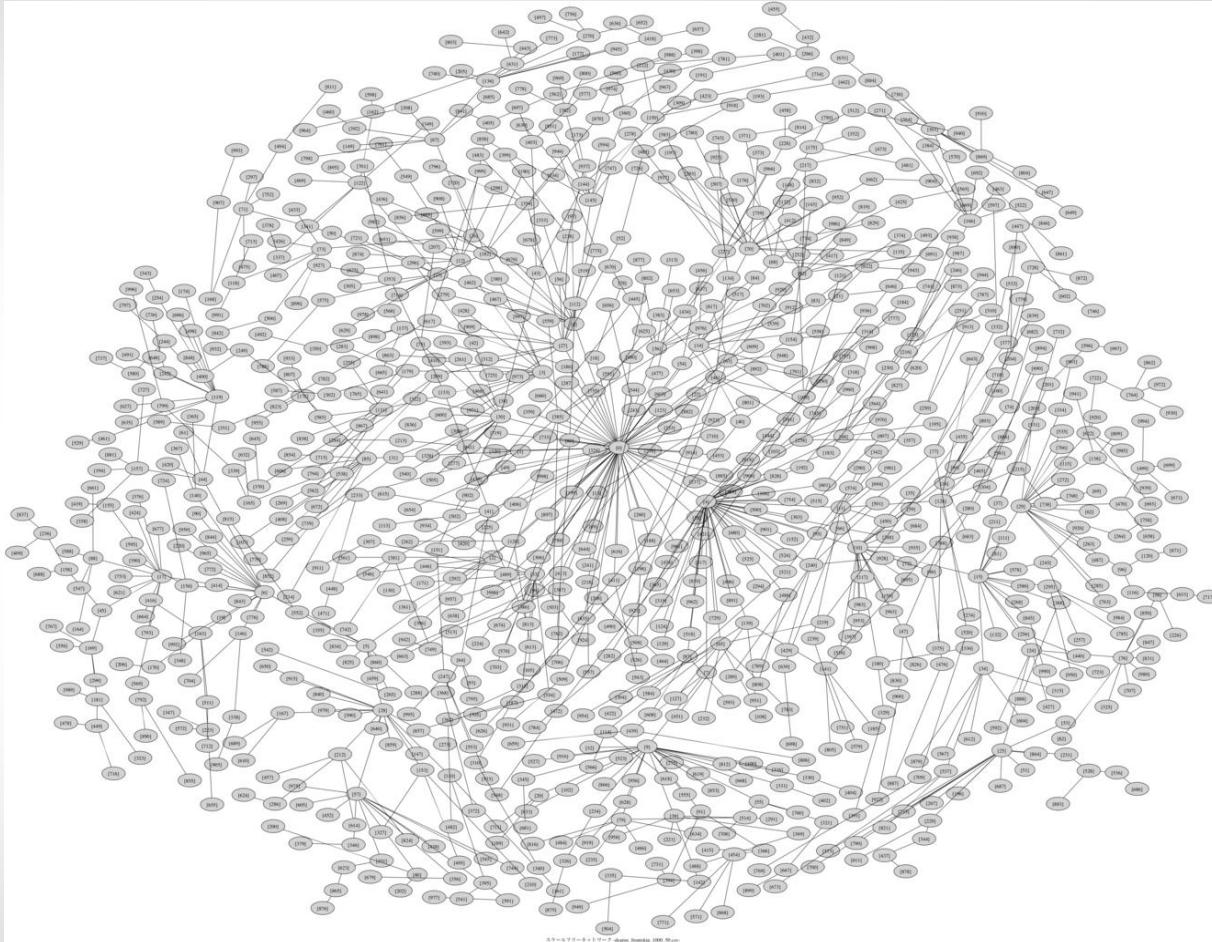
-①直感的にも判断できるよう、ネットワークを可視化-



頂点数1000の修正版BAモデル(No.10)

# 5. 実験結果

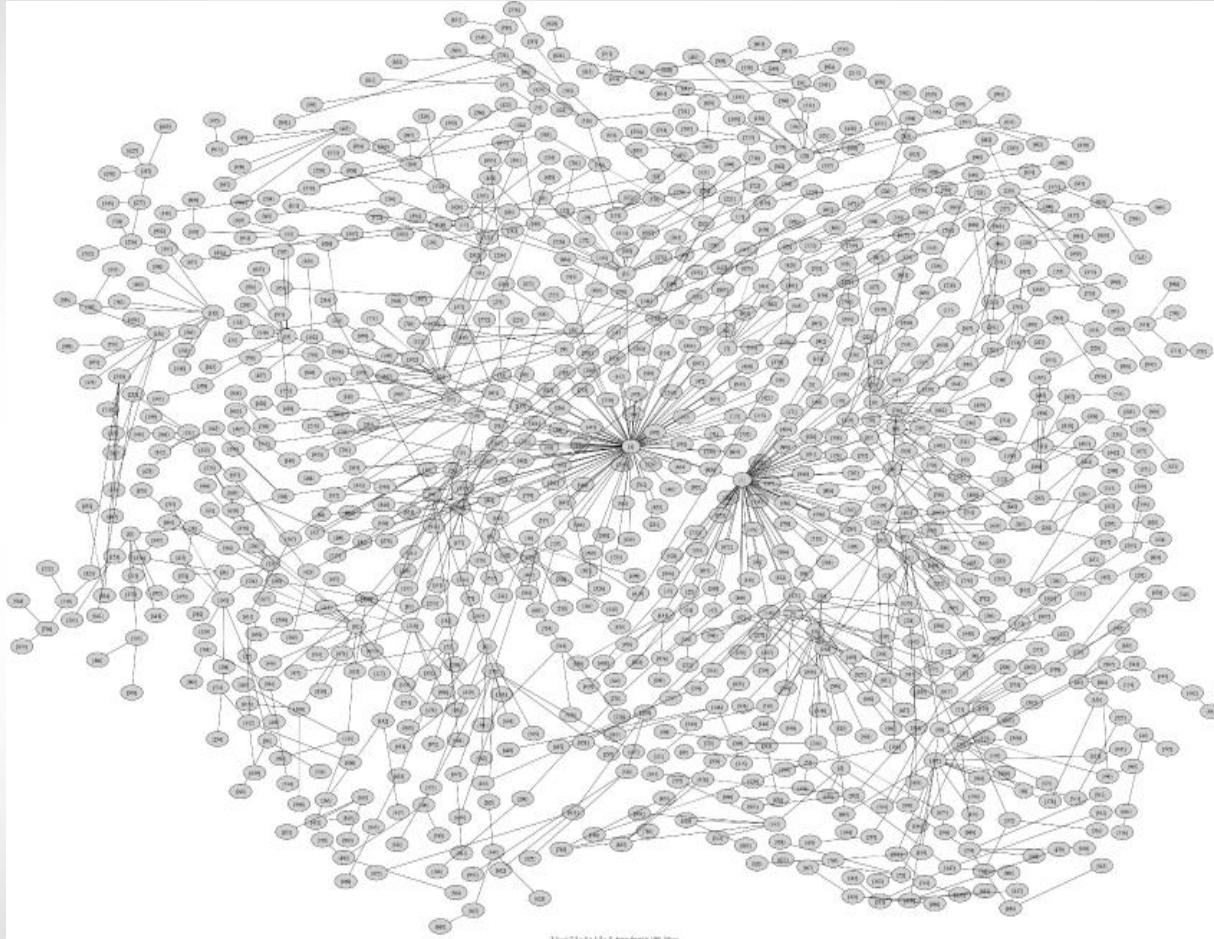
-①直感的にも判断できるよう、ネットワークを可視化-



頂点数1000の修正版BAモデル(No.50)

# 5. 実験結果

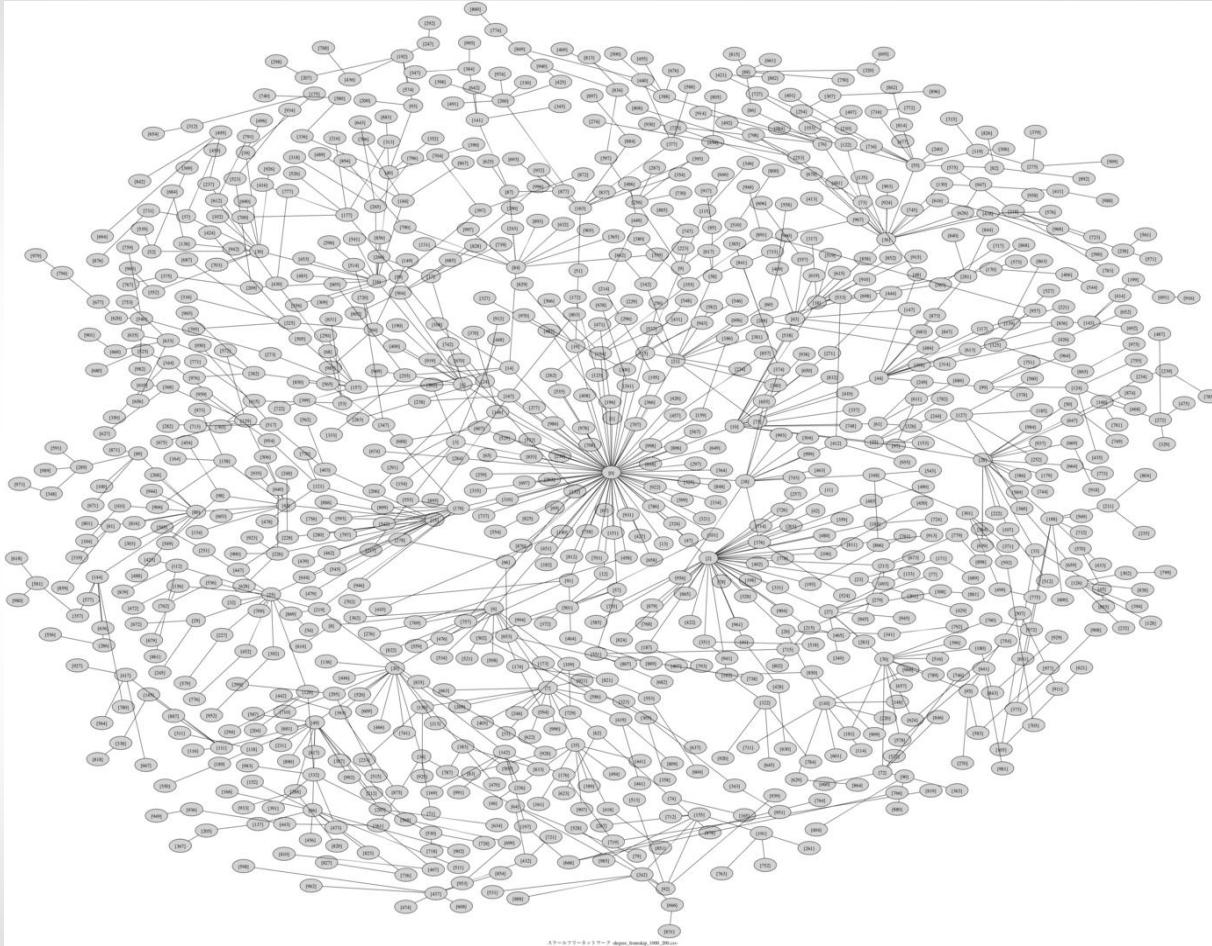
-①直感的にも判断できるよう、ネットワークを可視化-



頂点数1000の修正版BAモデル(No.100)

# 5. 実験結果

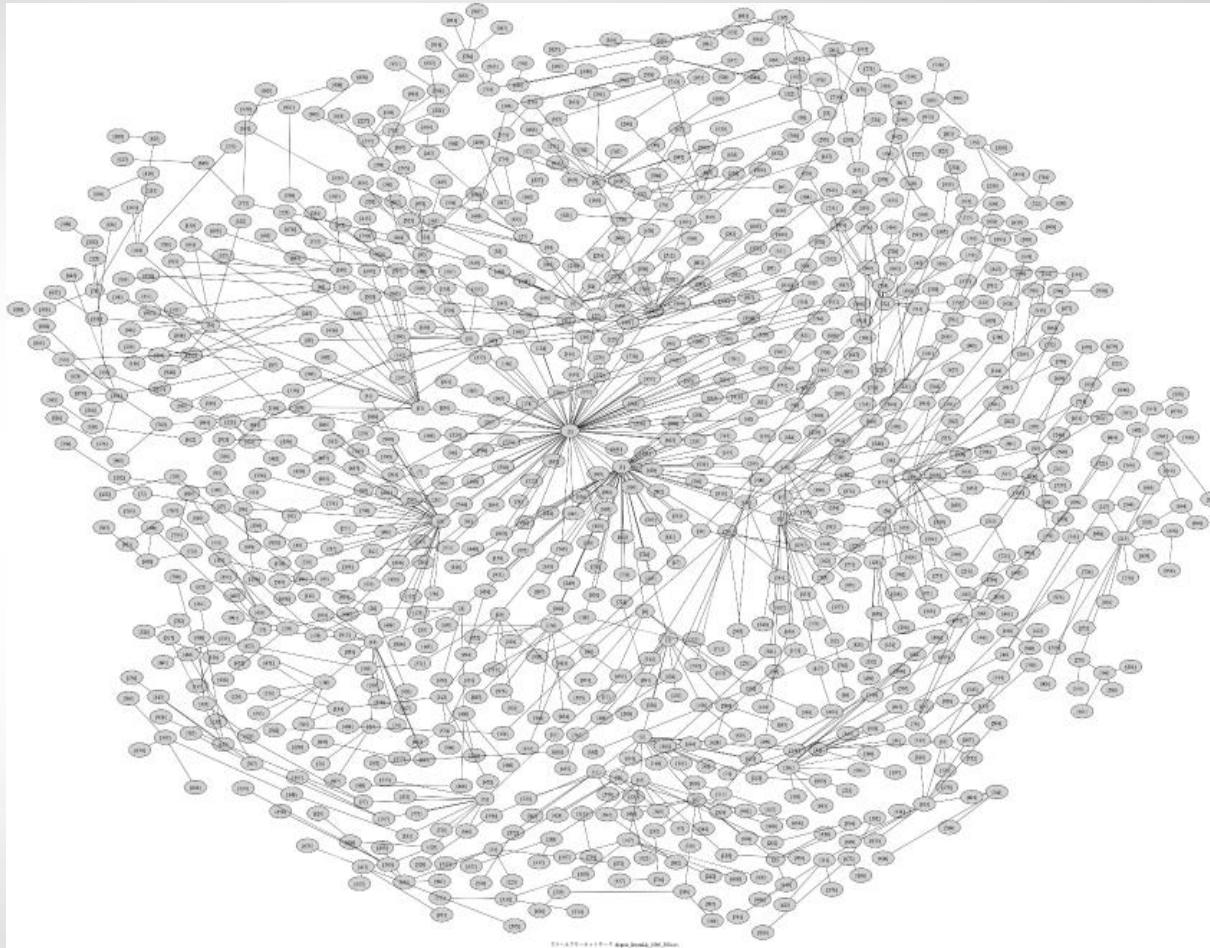
-①直感的にも判断できるよう、ネットワークを可視化-



頂点数1000の修正版BAモデル(No.200)

# 5. 実験結果

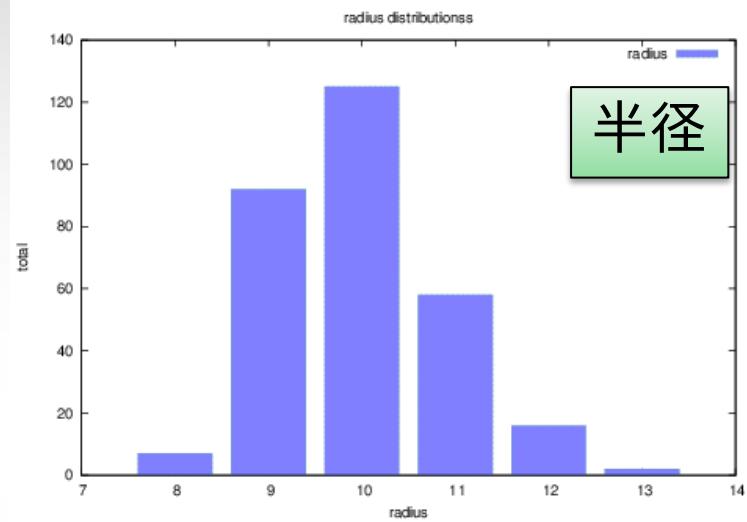
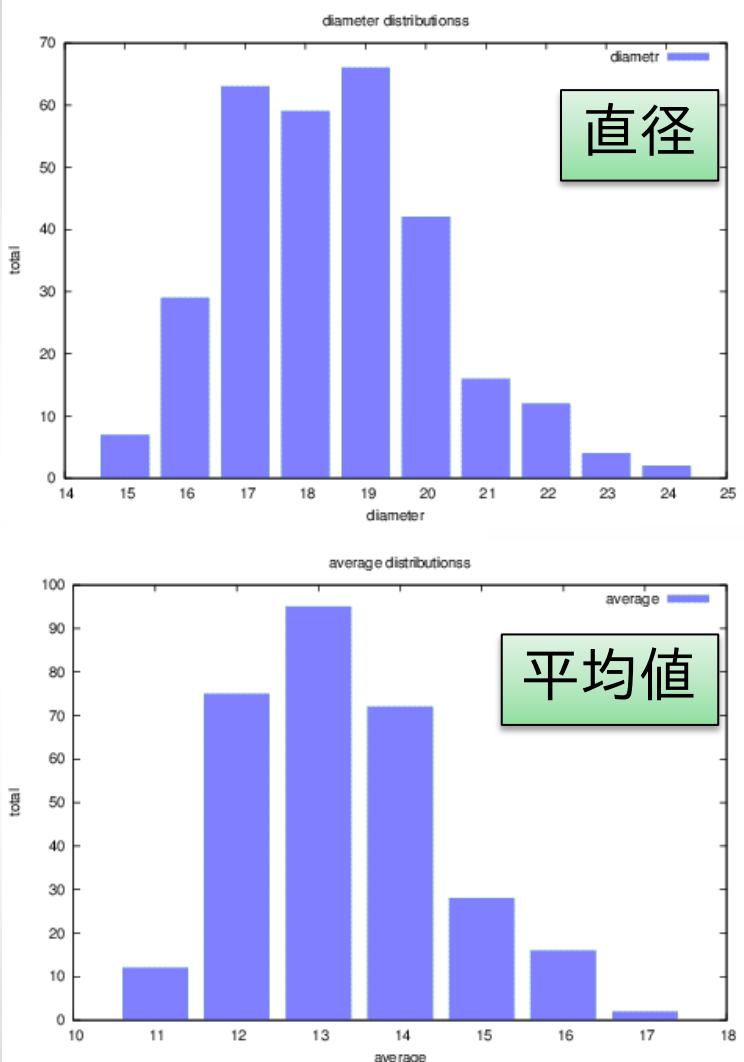
-①直感的にも判断できるよう、ネットワークを可視化-



頂点数1000の修正版BAモデル(No.300)

# 5. 実験結果

-②ネットワークの直径、半径、平均値を計算し、グラフを描画-

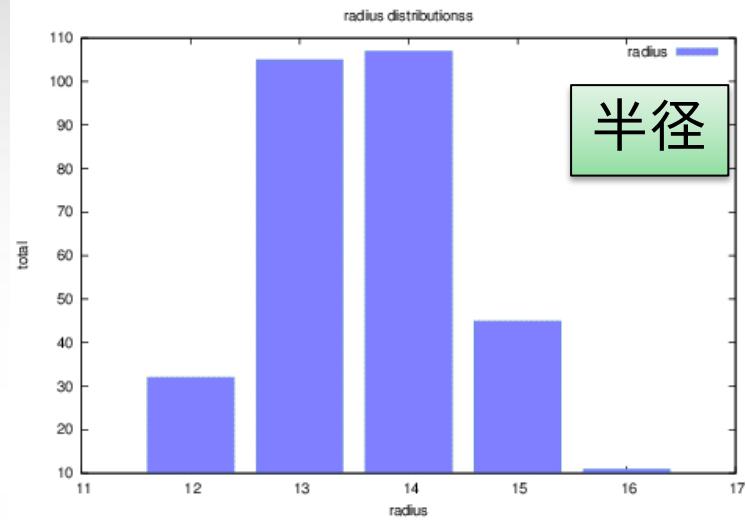
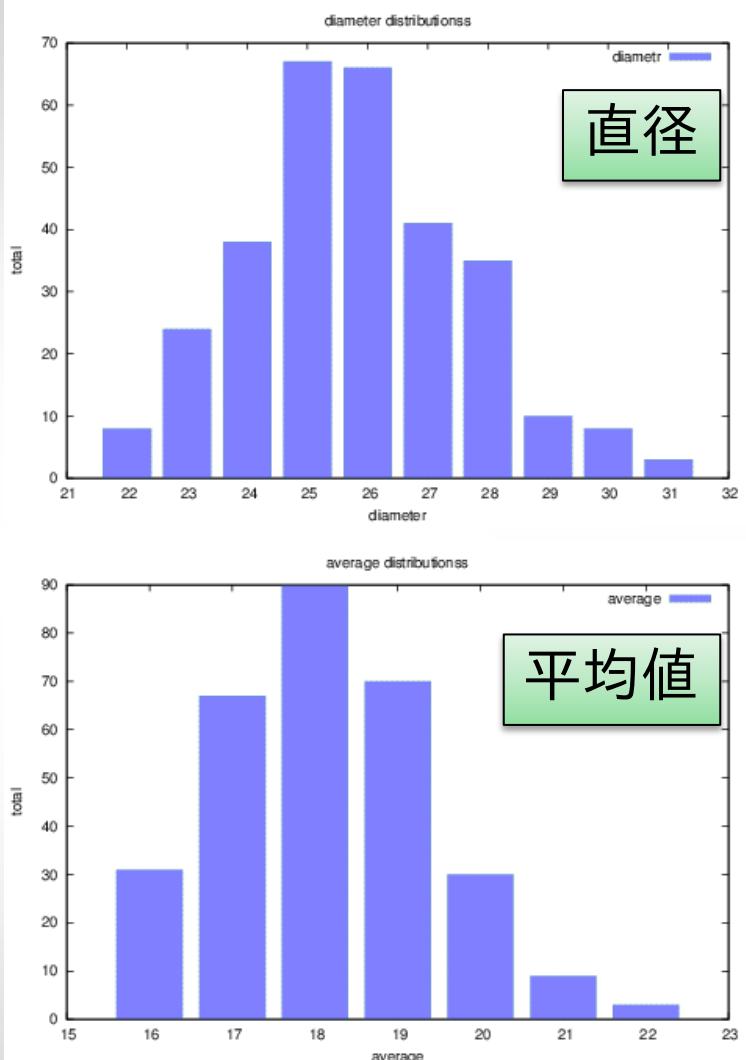


頂点数1000のネットワークの  
直径・半径・平均値の計算結果  
300個分

X軸: 直径 or 半径 or 平均値  
Y軸: 直径 or 半径 or 平均値 の個数

# 5. 実験結果

-②ネットワークの直径、半径、平均値を計算し、グラフを描画-

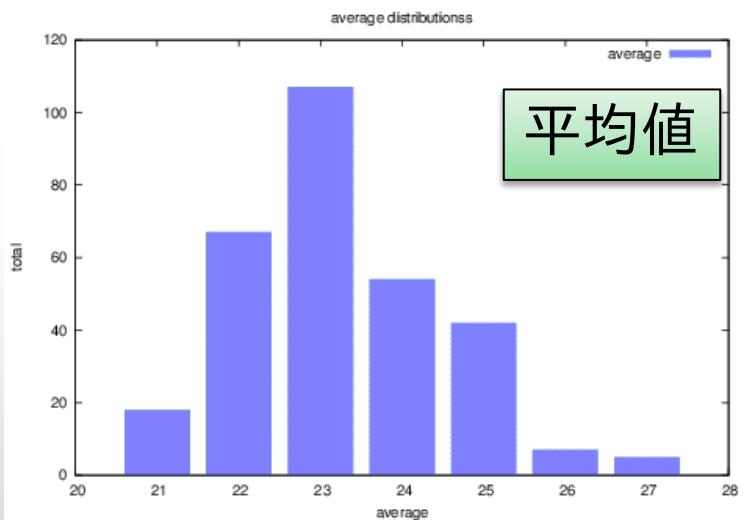
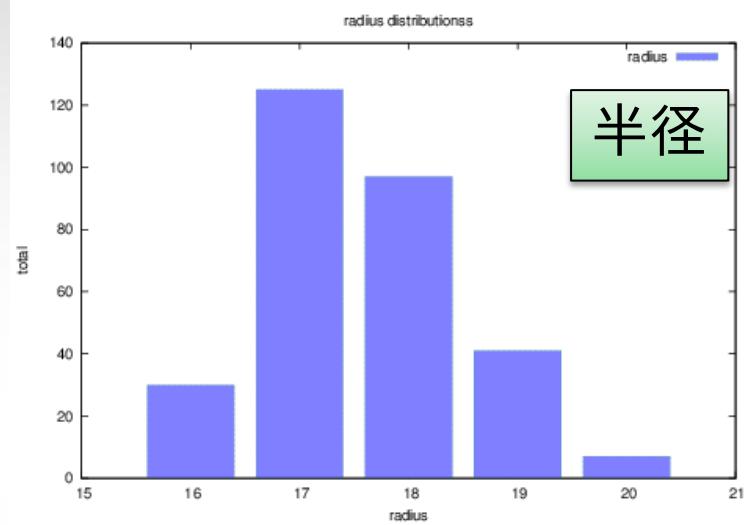
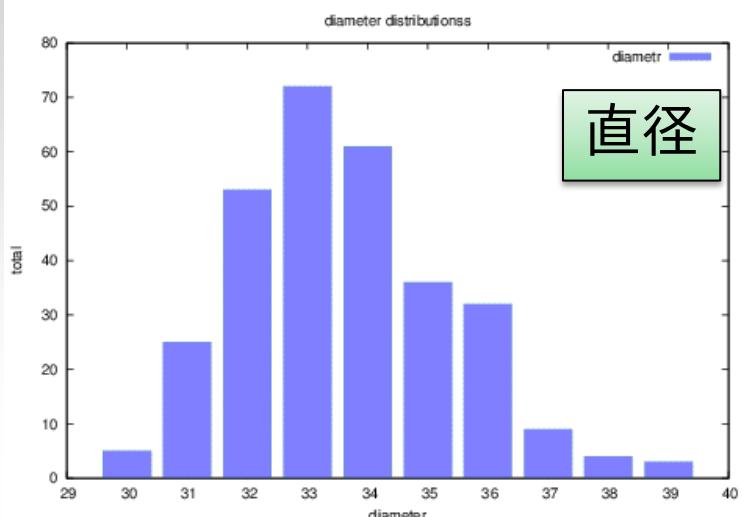


頂点数10000のネットワークの  
直径・半径・平均値の計算結果  
300個分

X軸: 直径 or 半径 or 平均値  
Y軸: 直径 or 半径 or 平均値 の個数

# 5. 実験結果

-②ネットワークの直径、半径、平均値を計算し、グラフを描画-

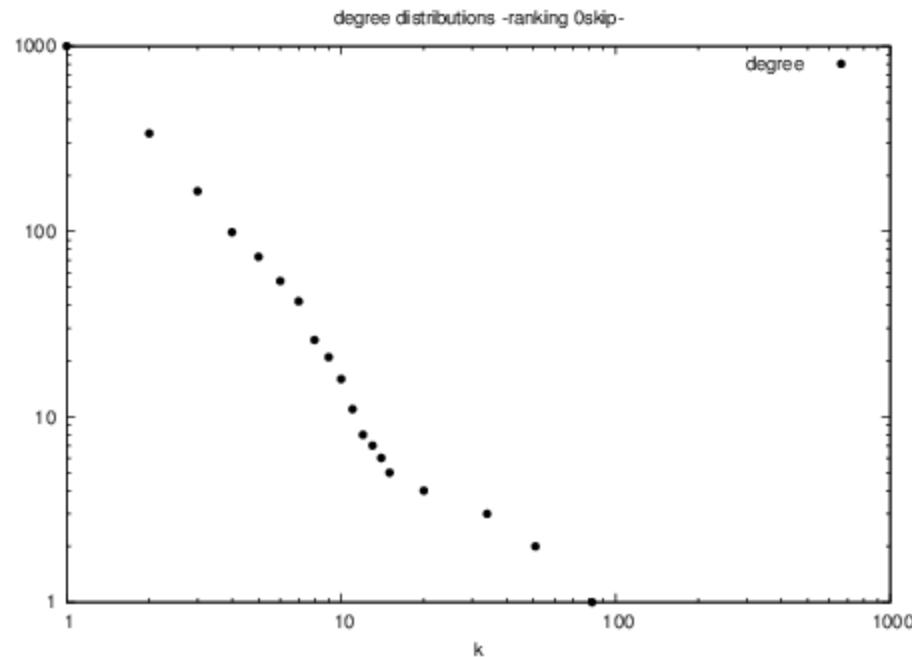


頂点数100000のネットワークの  
直径・半径・平均値の計算結果  
300個分

X軸: 直径 or 半径 or 平均値  
Y軸: 直径 or 半径 or 平均値 の個数

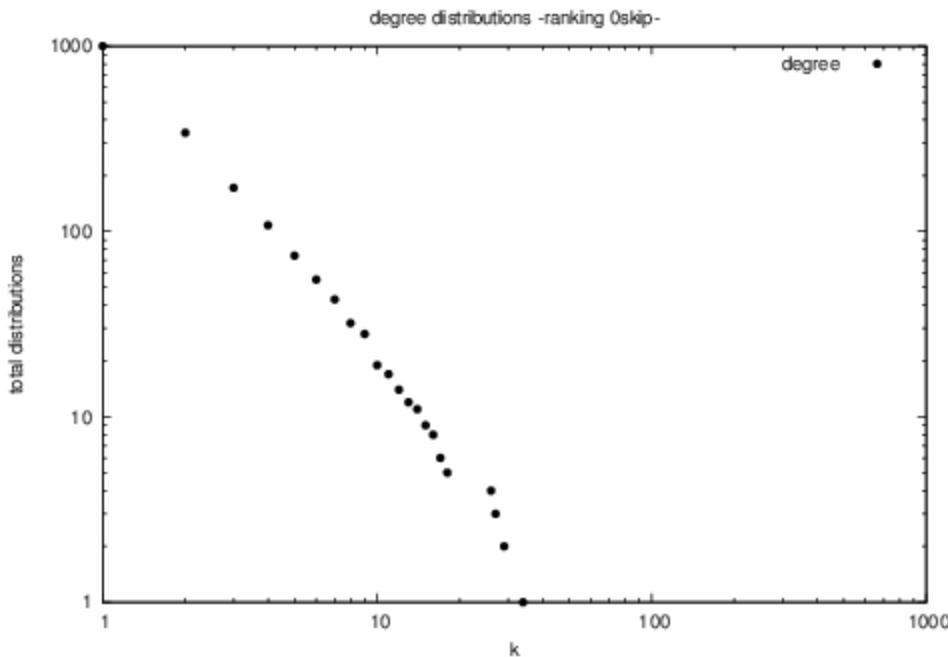
# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.1)

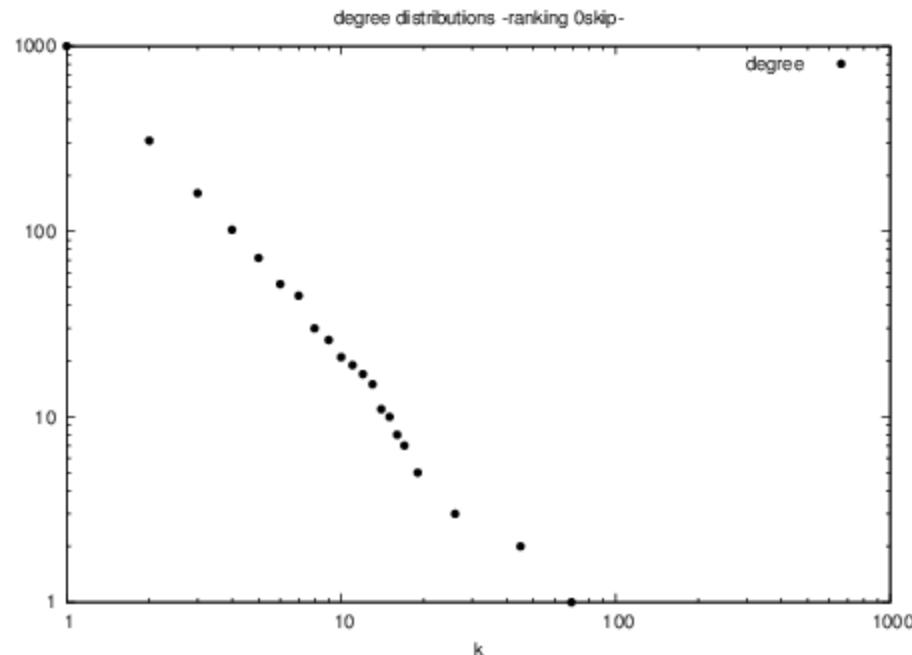
頂点数1000の修正版BAモデルの次数分布図



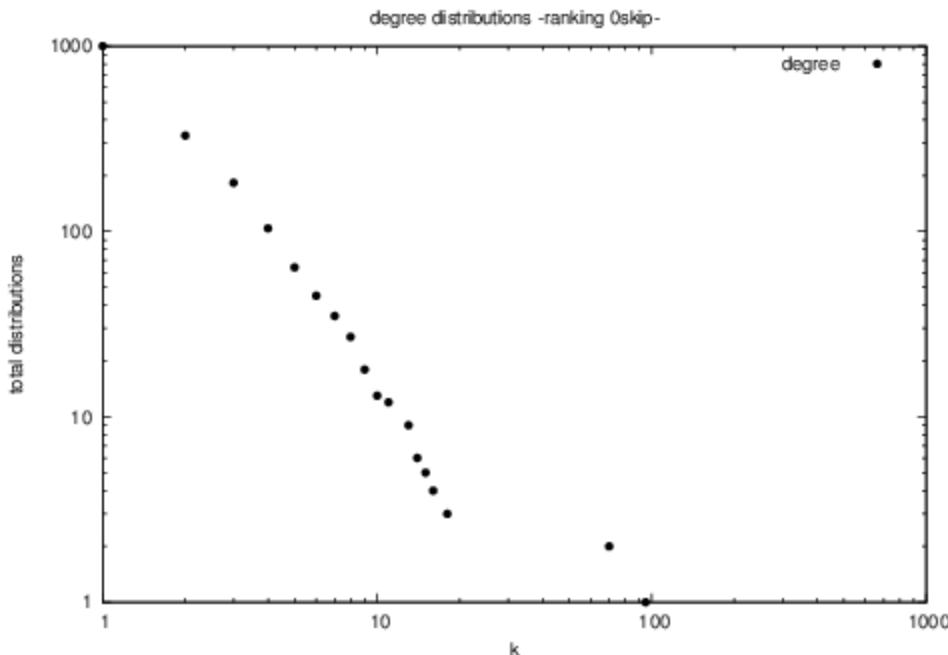
次数分布の  
累計分布の両対数(No.10)

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.50)

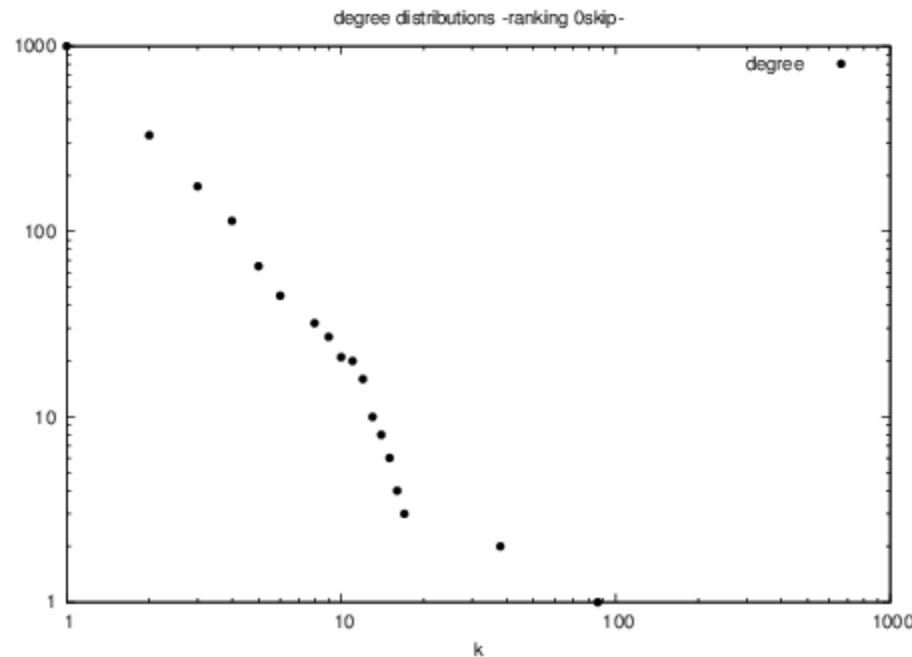


次数分布の  
累計分布の両対数(No.100)

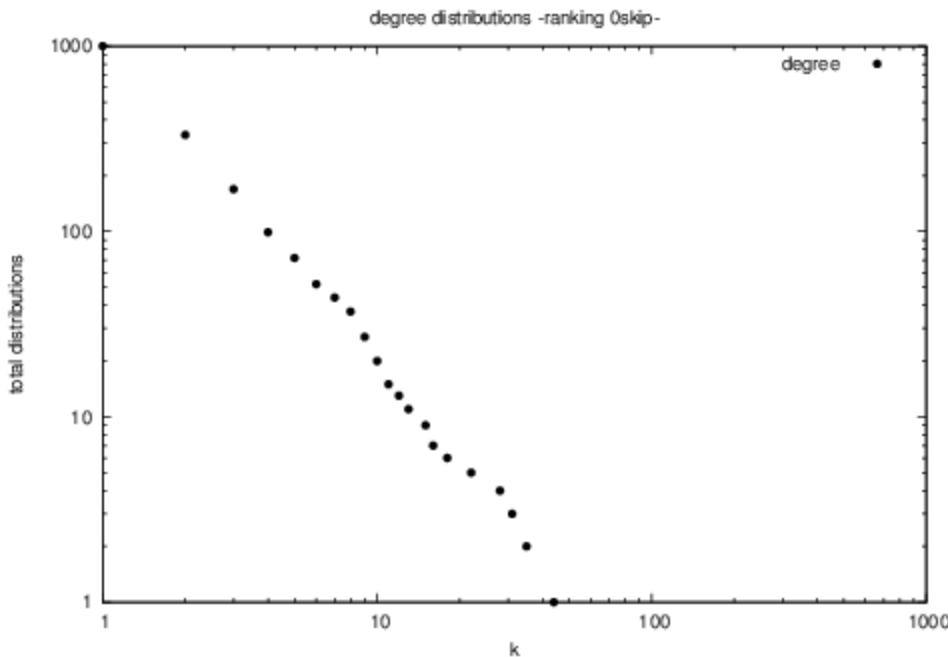
頂点数1000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.200)

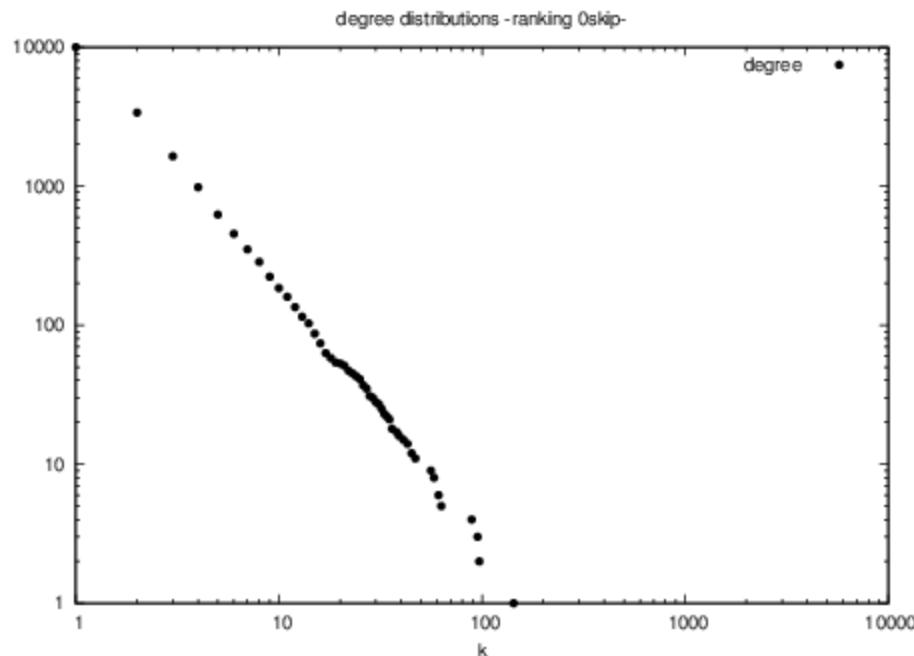


次数分布の  
累計分布の両対数(No.300)

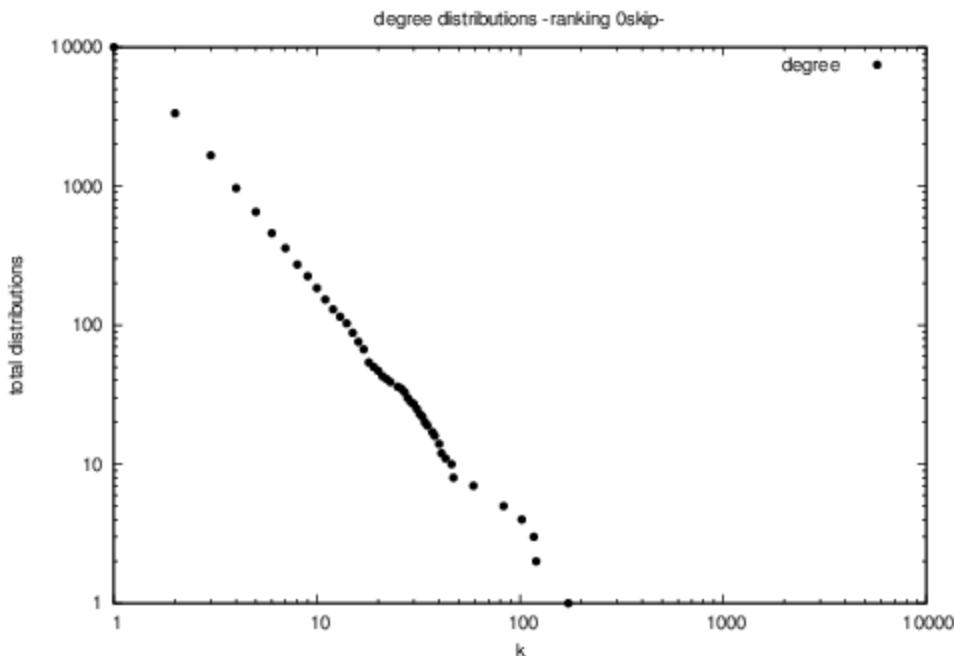
頂点数1000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.1)

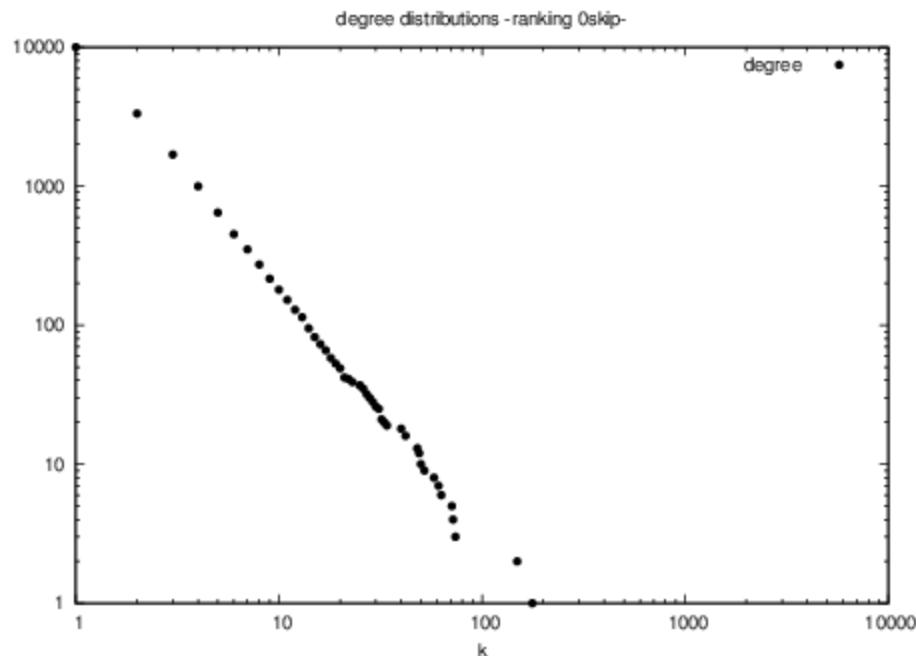


次数分布の  
累計分布の両対数(No.10)

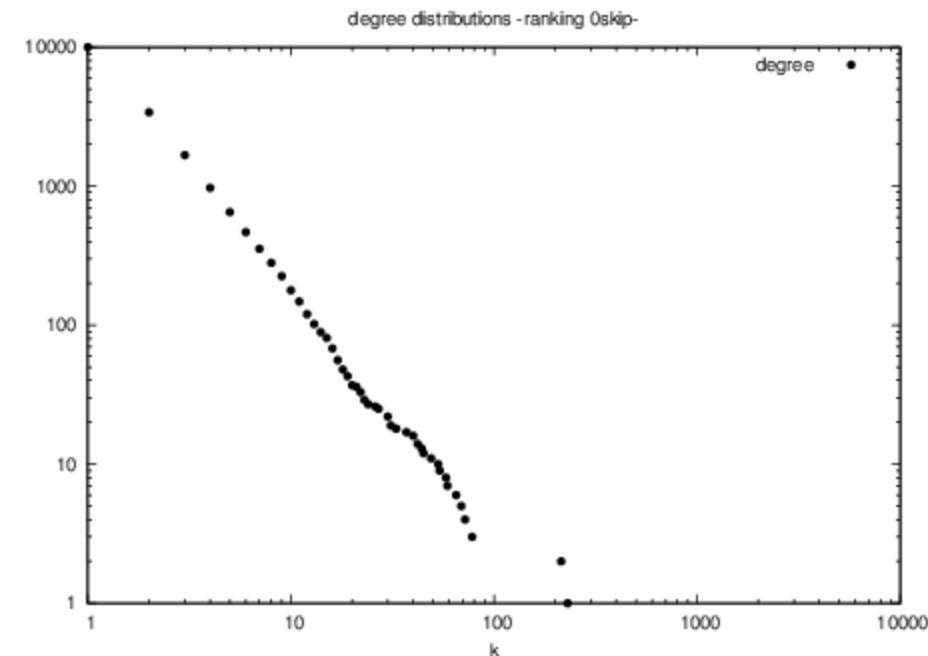
頂点数10000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.50)

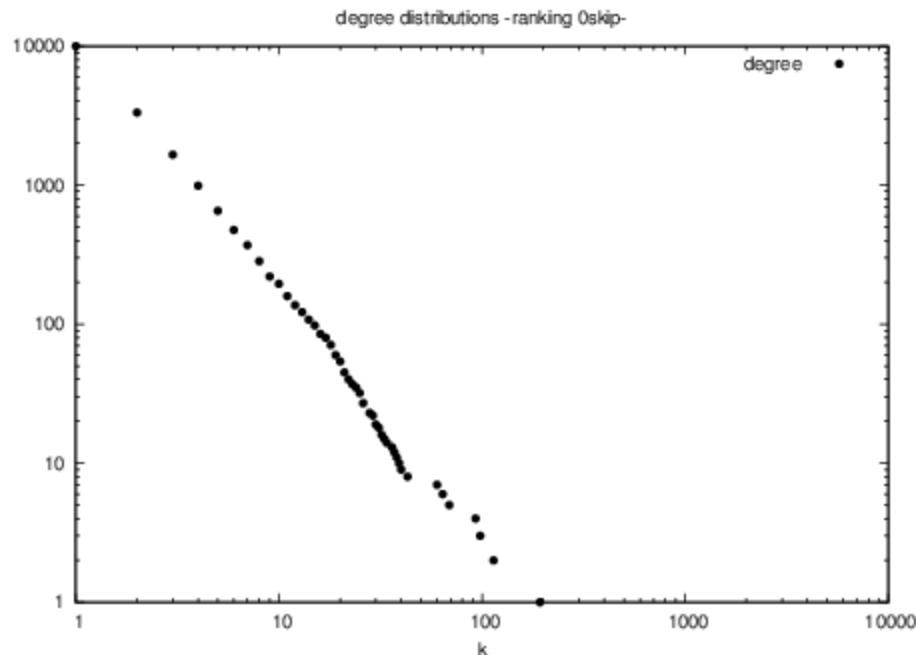


次数分布の  
累計分布の両対数(No.100)

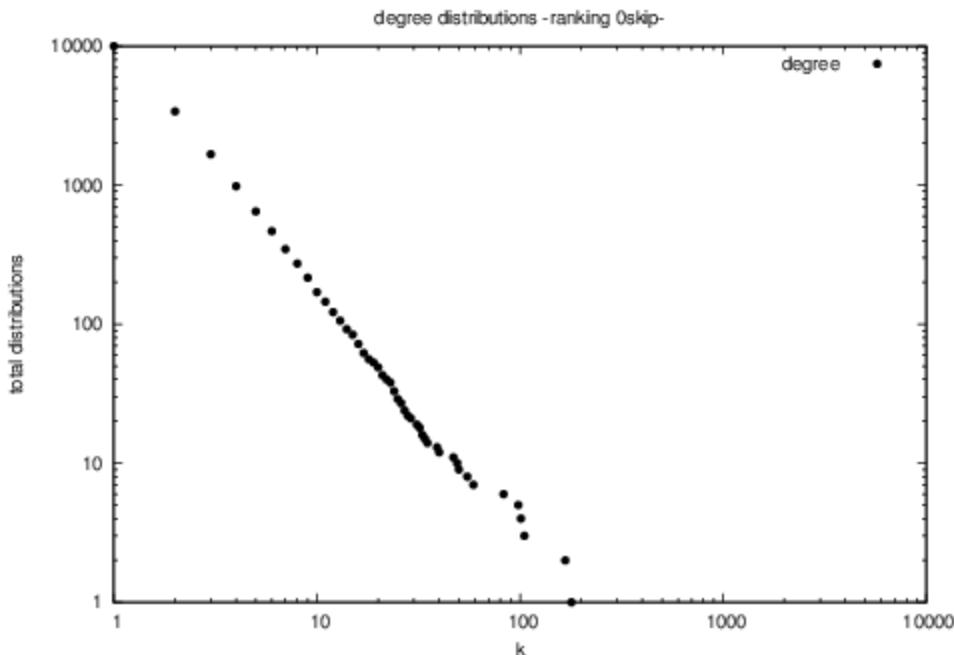
頂点数10000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.200)

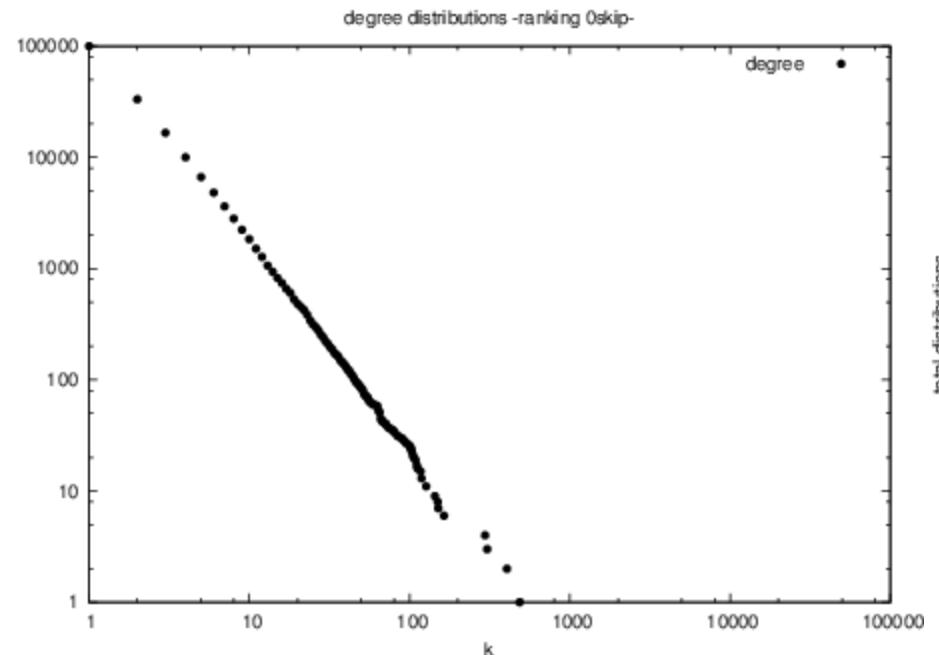


次数分布の  
累計分布の両対数(No.300)

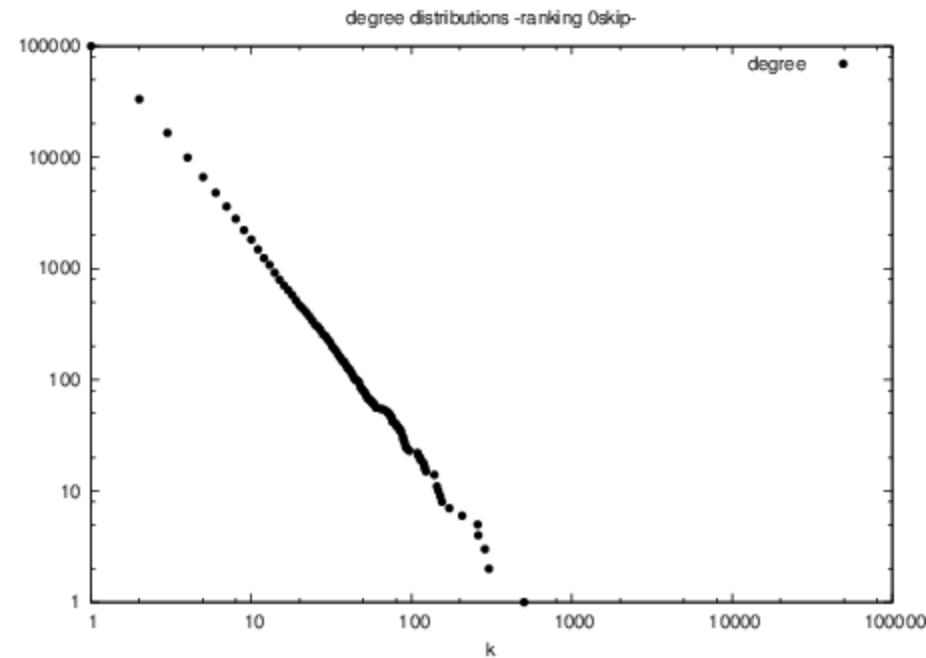
頂点数10000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.1)

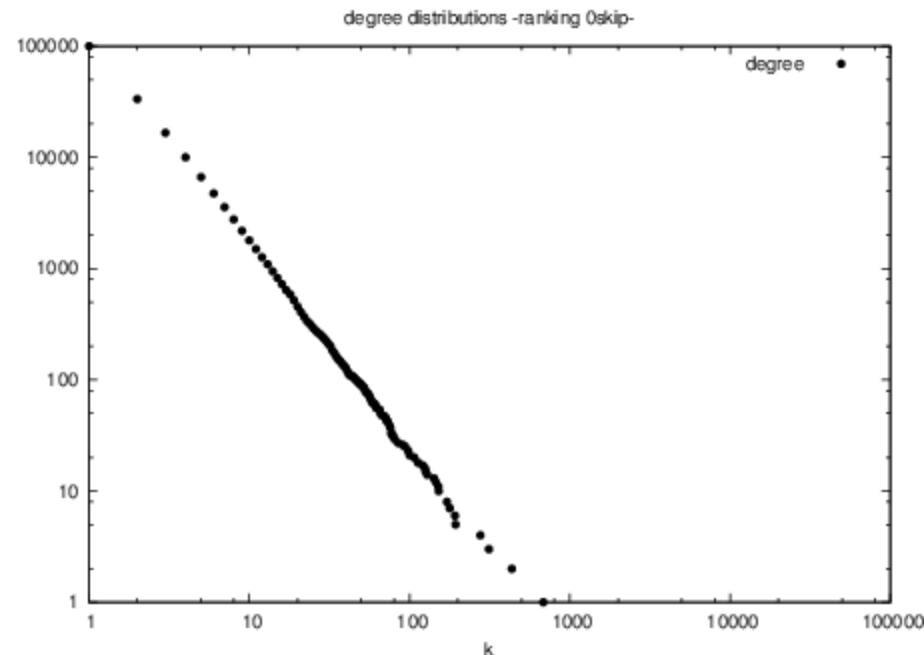


次数分布の  
累計分布の両対数(No.10)

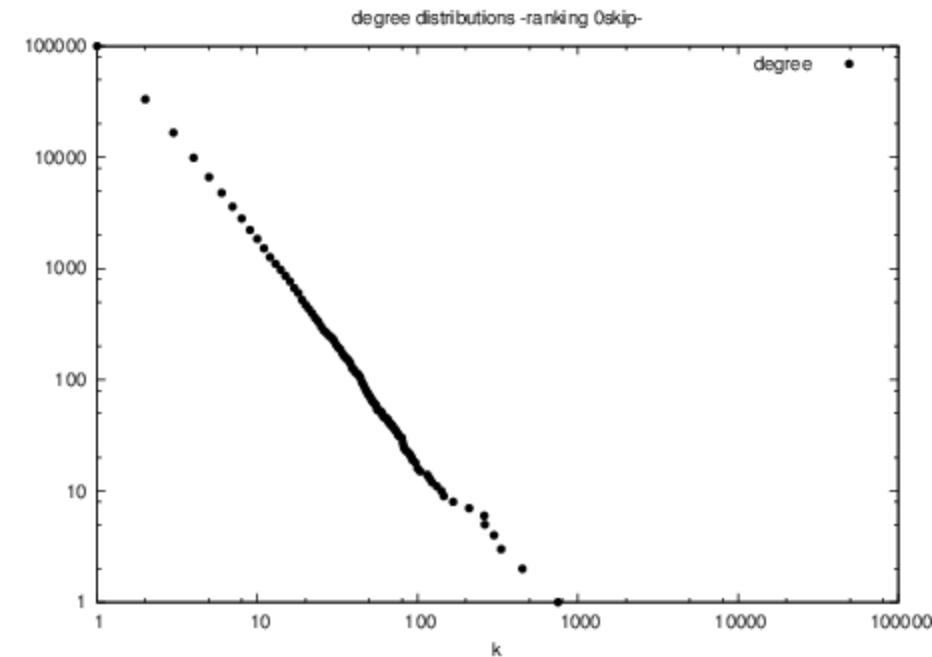
頂点数100000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.50)

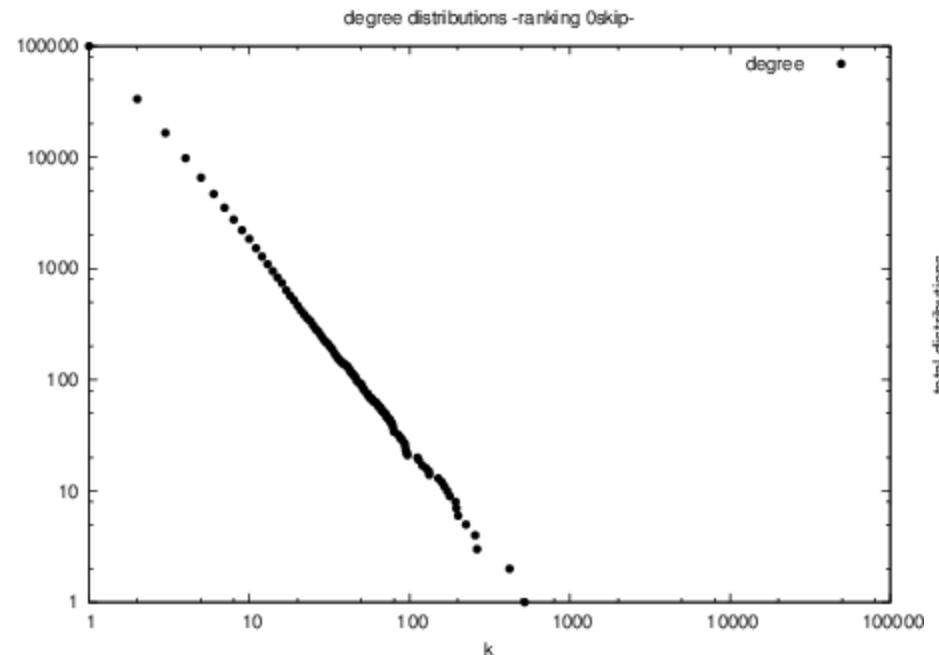


次数分布の  
累計分布の両対数(No.100)

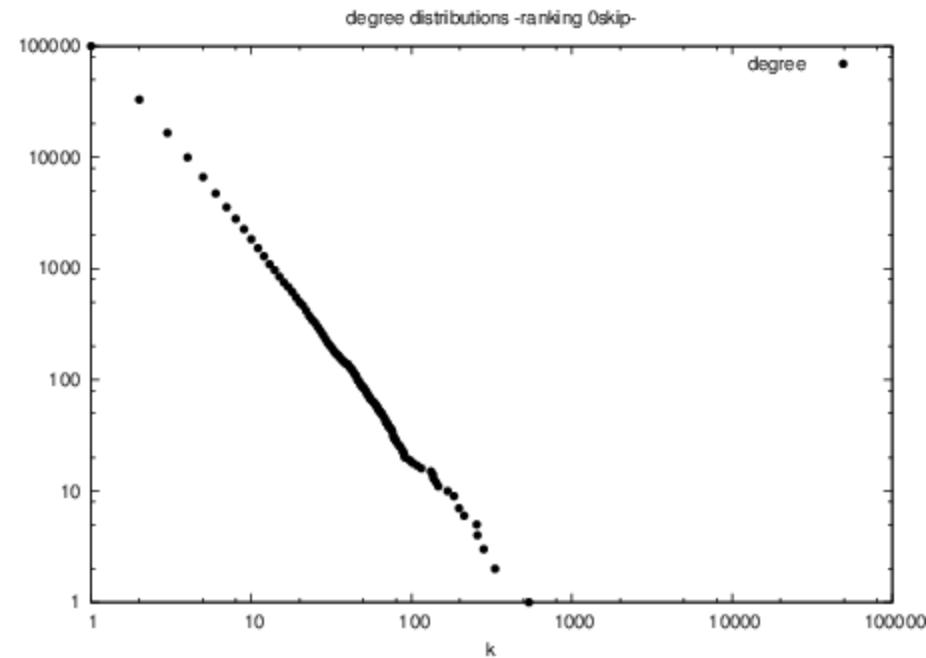
頂点数100000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

-③次数分布図を描画し、データの配置を調査-



次数分布の  
累計分布の両対数(No.200)



次数分布の  
累計分布の両対数(No.300)

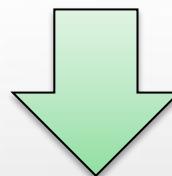
頂点数100000の修正版BAモデルの次数分布図

# 5. 実験結果

---

## 実験結果から分ること

- 可視化したネットワークを直感的に見ても、一部の頂点に枝が集中している
- ネットワークの直径・半径が十分に短い
- 次数分布図が直線を描いており、ネットワーク上の次数分布はベキ分布に従っている



生成したネットワークは、十分なスケールフリー性を満たしている

## 6. 今後の課題

---

1. ネットワークの頂点数、調査する個数の増加
2. 他のネットワークモデルでも直径、半径、  
eccentricityの平均値を計算し、結果の比較
3. 次数がベキ則に従っているかを判定する方法に、次数  
分布図が描写を使用した  
⇒この方法では厳密な判定はできない

そこで統計モデルで

$$P(k) = \propto k^{-\tau}, (\tau > 0)$$

の  $\tau$  を推定して、検定

## 2.1 -スケールフリーネットワークの歴史-

従来のインターネットなどのネットワークのイメージ

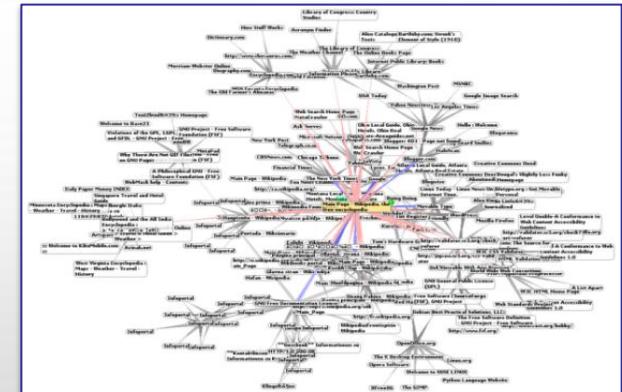
頂点間の枝が指向性も規則性もなく、ランダムに張られているイメージ  
⇒ランダムネットワーク



そうではない何か新しい構造をとっていると気がつき、調査



結果、一部の頂点に枝が極度に集中している  
ネットワークを発見  
⇒スケールフリーネットワークの発見



例：ウィキペディア周辺のWWWの構造

出典: フリー百科事典  
『ウィキペディア(Wikipedia)』(2012/12/10 07:10 UTC版)

## 2.3 -スケールフリーネットワークの特徴-

### スケールフリーネットワークの特徴

新しい頂点が参入しても、ネットワークの形状が変化しない

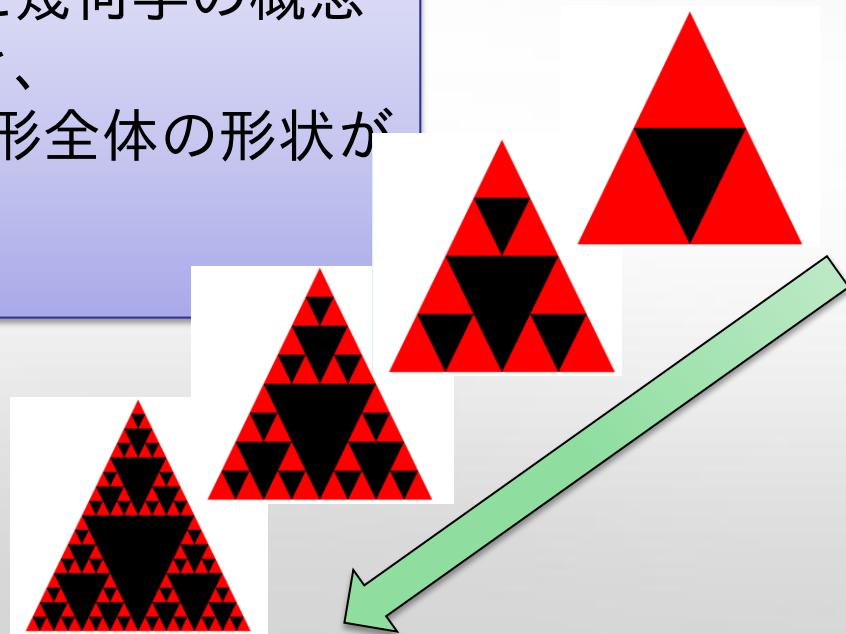
⇒フラクタル性をもっている

### フラクタルとは？

- ・ ブノア・マンデルブロが導入した幾何学の概念
- ・ ある図形の断片を取ってきたとき、  
それより小さな断片の形状と、図形全体の形状が  
相似になっているもの  
※自己相似的=フラクタルではない

### 使用例

- ・ 現実の地形や物の次元を表現、再現
- ・ ゲームなどの地形を自動生成



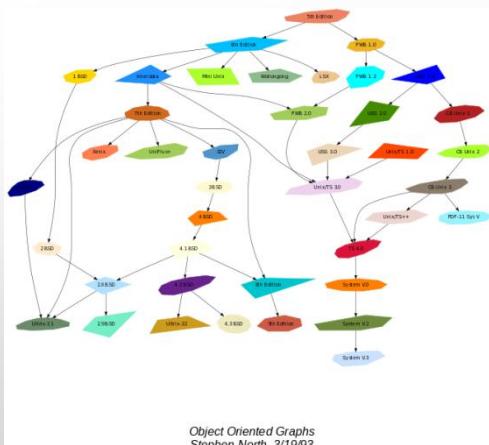
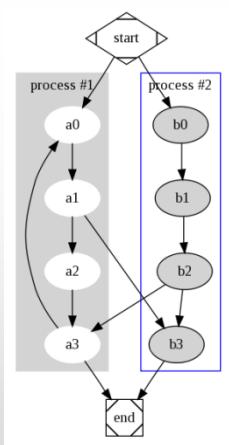
## 4.2 -①ネットワークの可視化方法-

ネットワークの可視化にはGraphvizを使用

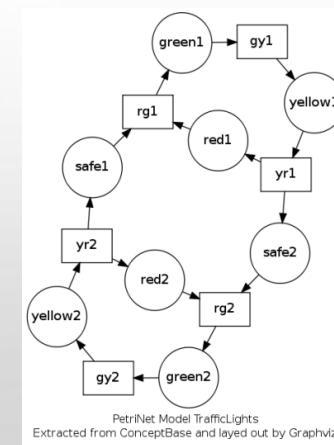
### Graphviz

- アメリカ合衆国の電話会社であるAT&Tの研究所が開発した、オープンソースのツールパッケージ
- DOT言語のスクリプトで示されたネットワークを描画
- ユーザインターフェースはCUI

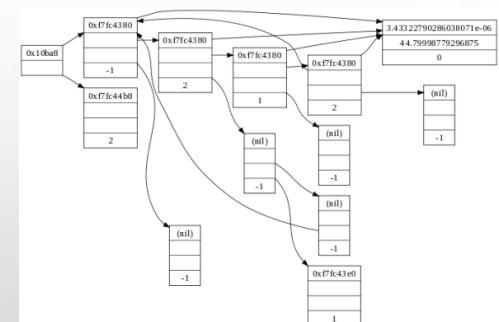
⇒高品質な有向グラフの描画が可能



Object Oriented Graphs  
Stephen North, 3/19/93



PetriNet Model TrafficLights  
Extracted from ConceptBase and layed out by Graphviz



出典『Graphviz | Graphviz - Graph Visualization Software』  
(2013/01/26 12:41 UTC版)

## 4.2 -①ネットワークの可視化方法-

Graphvizでは、DOTファイルを書くことになる  
DOT言語には弱点があり、制御構造を持ってない

### 制御構造

プログラムにおける処理の流れを変更するために用意された  
式構造

⇒C言語でいう、while文、if文、for文、do-while文、switch 文等



そこで…

Rubyを、Graphvizインターフェースとして使用

※プログラムの作成には、GvizというRubyのプラグインを使用

## 4.5 -グラフの描画方法：gnuplot-

グラフの描画にはgnuplotを使用した

gnuplot

2次元および3次元のグラフを描画するためのフリーウェア

ユーザインターフェース

CUI（利用者がコマンドを打ち込んでゆく形態）

特徴

- 2次元グラフ描画機能が極めて強力  
(各種の関数やデータのグラフが自由自在に作成可能)
- 3次元グラフも描画可能 (2次元ほど強力ではない)
- 多様な画像の形式をサポート (PostScript、EPS、PNGなど)

# 4.5 -グラフの描画方法：gnuplot-

## gnuplotの基本的な使い方

gnuplotを起動し、下記のコマンドを入力

```
$gnuplot
GNUPLOT
Version 4.6 patchlevel 0      last modified 2012-03-04
Build System: CYGWIN_NT-6.1-WOW64 i686

Copyright (C) 1986-1993, 1998, 2004, 2007-2012
Thomas Williams, Colin Kelley and many others

gnuplot home:    http://www.gnuplot.info
faq, bugs, etc:  type "help FAQ"
immediate help:  type "help"  (plot window: hit 'h')

Terminal type set to 'x11'
gnuplot> plot sin(x)
gnuplot> replot cos(x)
gnuplot> replot
```

終了コマンド

```
gnuplot> exit
```

x11で表示される  
(入ってない場合はエラー)

