

2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）：_____ B _____

我们的报名参赛队号为（8 位数字组成的编号）：_____ 10009054 _____

所属学校（请填写完整的全名）：_____ 东南大学 _____

参赛队员（打印并签名）：1. _____ 戴忱 _____

2. _____ 蒋小凡 _____

3. _____ 江磊 _____

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：_____ 陈恩水 _____

（论文纸质版与电子版中的以上信息必须一致，只是电子版中无需签名。以上内容请仔细核对，提交后将不再允许做任何修改。如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

日期：_____ 2014 _____ 年 _____ 09 _____ 月 _____ 15 _____ 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

创意平板折叠桌

摘要

本文对剪铰式折叠结构木桌的设计进行研究。

问题一：本文采用解析几何的方法，从直线运动的角度诱导得桌子侧面为直纹面，并求得直纹面方程和桌脚边缘线方程，求得其解析解，并利用 Matlab 软件绘出折叠桌的动态变化示意图和桌脚边缘曲线。通过建立“设计加工参数”模型并代入题设数据，求得各设计加工参数（包括圆形桌面直径、各木条长度、折叠后各木条与竖直方向的夹角、各木条开槽的起始坐标及开槽长度），并确定桌脚边缘线的曲线方程。

问题二：本文针对“稳固性好、加工方便和用材最少”三个指标，以折叠桌一侧分重心的位置、高度、重力矩条件作为稳固性指标，各木条开槽长度和总槽长的取值范围作为加工便利性指标，再对用材量与分重心高度进行标准化求和，得到目标函数和约束条件，从而建立了“最优化”模型。运用非线性规划（NLP）思想，利用 Matlab 的有效集算法优化目标函数。代入题设数据后，求得的最优设计加工参数如下：

平板尺寸：187.7cm× 80 cm × 3 cm；

钢筋位置：钢筋固定点到最外侧木条桌脚的距离与长度的比例系数 $\mu=0.65$ ；

开槽长度：0.00, 8.26, 11.74, 14.61, 17.11, 19.33, 21.31, 23.07, 24.62, 25.97, 27.15, 28.13, 28.93, 29.55, 29.99, 30.25（cm）

问题三：本文针对客户对桌面边缘线形状大小、桌脚边缘线形状和桌面高度的不同要求，通过问题二的“最优化”模型得到最外侧桌腿和钢筋位置的设计参数，并由问题一的改良模型，求得各设计加工参数（圆形桌面的直径、各木条长度、折叠后各木条与竖直方向的夹角、各木条开槽的起始坐标及开槽长度），最后通过检验稳定性和用材量，进一步优化设计方案，并给出不同设计的图样。

关键字：直纹面方程 非线性规划 多目标函数优化 重力矩理论

一、问题重述

某公司生产一种可折叠的桌子，桌面呈圆形，桌腿随着铰链的活动可以平摊成一张平板（如图 1-2 所示）。桌腿由若干根木条组成，分成两组，每组各用一根钢筋将木条连接，钢筋两端分别固定在桌腿各组最外侧的两根木条上，并且沿木条有空槽以保证滑动的自由度（见图 3）。桌子外形由直纹曲面构成，造型美观。附件视频展示了折叠桌的动态变化过程。试建立数学模型讨论下列问题：

1. 给定长方形平板尺寸为 $120\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ ，每根木条宽 2.5 cm ，连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置，折叠后桌子的高度为 53 cm 。试建立模型描述此折叠桌的动态变化过程，在此基础上给出此折叠桌的设计加工参数（例如，桌腿木条开槽的长度等）和桌脚边缘线（图 4 中红色曲线）的数学描述。

2. 折叠桌的设计应做到产品稳固性好、加工方便、用材最少。对于任意给定的折叠桌高度和圆形桌面直径的设计要求，讨论长方形平板材料和折叠桌的最优设计加工参数，例如，平板尺寸、钢筋位置、开槽长度等。对于桌高 70 cm ，桌面直径 80 cm 的情形，确定最优设计加工参数。

3. 公司计划开发一种折叠桌设计软件，根据客户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数，使得生产的折叠桌尽可能接近客户所期望的形状。你们团队的任务是帮助给出这一软件设计的数学模型，并根据所建立的模型给出几个你们自己设计的创意平板折叠桌。要求给出相应的设计加工参数，画出至少 8 张动态变化过程的示意图。

二、问题分析

问题一：本问要求分析折叠桌的动态变化过程，可从折叠过程中折叠桌直纹面和桌脚边缘线随桌子高度变化的改变来进行分析和建模，并根据本问所给的长方形平板的尺寸、木条宽度和折叠后桌子的高度，利用解析几何的方法求解出桌脚边缘线的曲线方程和设计加工参数（包括圆形桌面的直径、各木条的长度、各木条上开槽的起始坐标、开槽长度、折叠后各木条与竖直方向的夹角）。本文采用解析几何的方法，从直线运动的角度来诱导出直纹面方程，求解具体函数，并在此解析解的基础上借助 Matlab 得出折叠桌的动态变化过程和桌脚边缘线曲线（即离散化的数值解）。

问题二：本问要求所设计的折叠桌满足稳固性好、加工方便和用材少三个条件，本文将能同时满足用料少和重心低的多目标函数作为目标函数；根据平板尺寸、钢筋位置、开槽长度的不同，将最外侧木条与竖直方向的夹角、木板长度、钢筋固定点的长度比例系数作为决策变量；从稳固性和加工便利性两方面入手，将折叠桌半结构分重心重力矩、分重心位置及高度、开槽长度取值范围作为约束条件，运用多目标函数优化的思想，利用三点共线、直纹面由直线按一定方式旋转而成等模型特点，通过 Matlab 的有效集算法对目标函数进行优化，并求得其最小值和相对应的最优设计加工参数。

问题三：本问要求根据客户规定的折叠桌高度、桌面形状和折叠后桌脚边缘线的曲线方程这三个要求，得出设计加工参数：平板尺寸、各木条长度、各木条上开槽的起始坐标、开槽长度、折叠后各木条与竖直方向的夹角以及钢筋固定点的长度比例系数。根据问题一中的三个模型，可将其中的某些定值参量化，推导参量之间的函数关系，对模型进行更为普适的推广，从而设计出能满足客户要求的折叠桌模型。

三、模型假设

- 1、模型中所有材料的长度单位均为 **cm**；
- 2、木板材质均匀且各处相同，能严格按照设计尺寸进行加工制造；
- 3、为简化模型，假设平板的厚度始终为 **3cm**；
- 4、忽略桌子折叠后，因重力造成的微小形变和位移；
- 5、钢筋足够坚硬，始终保持为一条直线，且忽略钢筋所受重力对模型的影响；
- 6、忽略木条间存在的微小缝隙及相互摩擦对模型的影响；
- 7、忽略桌脚与地面间的摩擦对模型的影响；
- 8、假设桌腿木条与桌面的连接处牢固且自由转动，不会影响模型高度。

四、符号说明

L	长方形平板材料的长度
W	长方形平板材料的宽度
C	长方形平板材料的厚度
S	长方形平板材料的底面积
D	圆形桌面的直径
a	圆形桌面最外侧突出木块的长度
h	折叠后木桌上表面距离地面高度
j	木条编号, $0 \leq j \leq k$
$2n$	桌腿木条总根数, $n=2k$
d	桌腿木条宽度
θ_j	折叠后第 j 根木条所在直线与竖直方向的夹角
v_j	第 j 根木条上开槽的长度
m_j	第 j 根木条的长度
$A_j(x_j, y_j, z_j)$	第 j 根木条与圆桌接触点坐标
$B_j(x'_j, y'_j, z'_j)$	第 j 根木条桌脚底点坐标
$C_j(x_{cj}, y_{cj}, z_{cj})$	第 j 根木条与钢筋的交点坐标
μ	最外侧木条上钢筋固定点到桌脚的距离与该木条长度的比例系数

五、模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 模型的建立

建立“动态模型”，其包括“直纹面”和“桌脚边缘线”两部分。

5.1.1.1 建立空间直角坐标系

如图 1 所示，以圆形桌面的圆心 O 为坐标原点，以圆形桌面为 xoy 平面，以竖直方向为 z 轴，建立空间直角坐标系。

由于折叠桌桌面分别关于 x 轴和 y 轴对称，因此下文中只针对 $x>0, y>0$ 的部分求解相关函数。

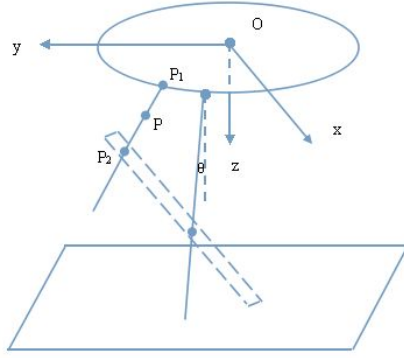


图 1 空间直角坐标系

5.1.1.2 直纹面模型

由圆桌的对称性可知：

$$a = \begin{cases} 2d, & n \text{ 为偶数} \\ d, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (1)$$

桌面圆直径 D 与木条宽度 d 满足：

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (kd)^2 \quad (2)$$

根据解析几何知识，可得桌面圆周曲线的方程：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (3)$$

钢筋所在的直线方程：

$$\begin{cases} y = \sqrt{\left(\frac{L-a}{4}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} \\ z = \frac{h}{2} \end{cases} \quad (4)$$

与钢筋垂直的平面 M : $Ax + By + Cz + F = 0$ ，因为 $A=1, B=C=0$, 所以

$$x + F = 0 \quad (5)$$

如图 1 所示，设 $P(x, y, z)$ 为直纹面轨迹上任意一点，过点 P 的动直线^[1]与两条曲线（桌面圆周线和钢筋所在直线）分别交于 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ，则 P_1 、 P_2 坐标均满足式(3)(4), 且满足：

P 、 P_1 、 P_2 三点共线：

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (6)$$

过点 P 的动直线与平面 M 垂直：

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \quad (7)$$

将 $A=1, B=C=0$ 代入式(7)得：

$$x = x_2 = x_1 \quad (8)$$

联立式(3)(4)(5)(8)，化简可得由桌腿木条组成的直纹面的曲面方程为：

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y_2 z - \frac{h}{2} y}{z - \frac{h}{2}} \right)^2 = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \\ \text{其中, } y_2 = \sqrt{\left(\frac{L-a}{4} \right)^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2} + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (9)$$

5.1.1.3 桌脚边缘线模型

设桌脚边缘线的曲线上任意一点 $P'(x, y, z)$ ，同理上述分析，存在 $P'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ 和 $P'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$ ，使得 P' 、 P'_1 、 P'_2 共线，且满足下列关系：

P'_1 在圆周上：

$$\begin{cases} x_1'^2 + y_1'^2 = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \\ z_1' = 0 \end{cases} \quad (10)$$

P'_2 在直线上：

$$\begin{cases} y_2' = \sqrt{\left(\frac{L-a}{4} \right)^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2} + \frac{a}{2} \\ z_2' = \frac{h}{2} \end{cases} \quad (11)$$

P' 、 P'_1 、 P'_2 三点共线：

$$\begin{cases} \frac{y - y_1'}{y_2' - y_1'} = \frac{z - z_1'}{z_2' - z_1'} \\ x = x_1' = x_2' \end{cases} \quad (12)$$

桌腿木条长度 m_j 满足：

$$(x - x_1')^2 + (y - y_1')^2 + (z - z_1')^2 = \left(\frac{L}{2} - y_1' \right)^2 \quad (13)$$

联列上述各式，可得桌脚边缘线的曲线方程为：

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y_2' z - \frac{h}{2} y}{z - \frac{h}{2}} \right)^2 = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \\ \left(y - \frac{L}{2} \right) \left(y + \frac{L}{2} - \frac{2y_2' z - hy}{z - \frac{h}{2}} \right) + z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{其中, } y_2' = \sqrt{\left(\frac{L-a}{4} \right)^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2} + \frac{a}{2} \quad (14)$$

5.1.1.4 设计加工参数模型

如图 2 所示，假设钢筋固定于最外侧木条 A_0B_0 上一点 C_0 ，且满足 $|A_0C_0| = \mu m_0, 0 < \mu < 1$ 。

由于桌面的厚度为 3，因此下底面距离地面的高度 $h=50$ ， $n=\frac{50}{2.5}=20, k=\frac{n}{2}=10$ 。

5.1.2.1 求解直纹面模型——描述动态过程

因为 n 为偶数，由式 (1) 得： $a=2d=5$ ，再由式 (2) 可得圆面直径： $\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (10 \times 2.5)^2$ ，解得 $D=5\sqrt{101} \approx 50.25$ 。

(1) 动态过程描述：

将 $a=5, D=50.25, L=120$ 代入式(9)，可得折叠桌在折叠的动态过程中，随着高度 h 的变化，桌腿木条所形成的直纹面方程为：

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y_2 z - \frac{h}{2} y}{z - \frac{h}{2}} \right)^2 = \left(\frac{50.25}{2} \right)^2 \\ \text{其中, } y_2 = \sqrt{\left(\frac{120-5}{4} \right)^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2} + \frac{5}{2} \end{cases} \quad (17)$$

(2) 模型的检验：

将 $h=50$ 代入式(18)可得，折叠桌完成折叠后的最终直纹面方程为：

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y_2 z - 25y}{z - 25} \right)^2 = \left(\frac{50.25}{2} \right)^2 \\ \text{其中, } y_2 = \sqrt{\left(\frac{120-5}{4} \right)^2 - \left(\frac{50}{2} \right)^2} + \frac{5}{2} = 16.7 \end{cases} \quad (18)$$

由于方程式(18)为解析解，故利用 MATLAB 中的 `implicitmesh` 函数进行作图，绘出解析解的图像如图 3 所示。

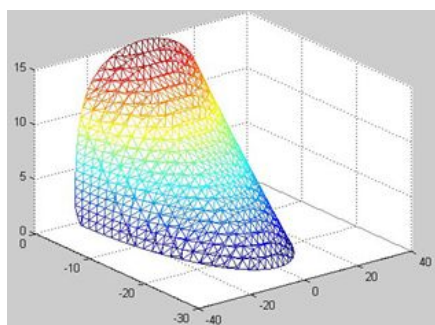


图 3 桌腿木条所构成的直纹面解析解图像

为验证模型，再考虑采用数值方法将其离散为若干直线，利用 MATLAB 软件，得到桌腿木条所构成的直纹面曲面的动态效果图以及最终效果图（如图 4）。

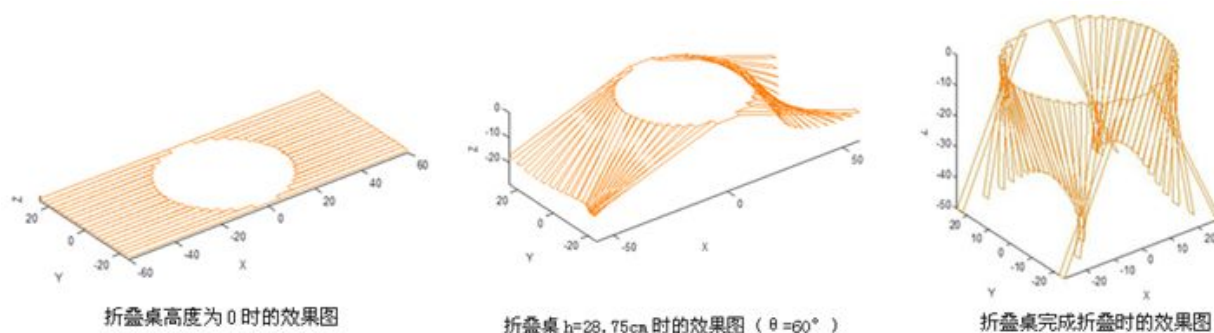


图 4 桌腿木条所构成的直纹面动态效果图

5.1.2.2 求解桌脚边缘线模型——描述动态过程

(1) 动态过程描述:

将 $a=5, D=50.25, L=120$ 代入式(14), 可得折叠桌在折叠的动态过程中, 随着高度 h 的变化, 桌腿木条所形成的桌脚边缘线方程为:

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y_2 z - \frac{h}{2} y}{z - \frac{h}{2}} \right)^2 = \left(\frac{50.25}{2} \right)^2 \\ (y - 60) \left(y + 60 - \frac{2y_2 z - hy}{z - \frac{h}{2}} \right) + z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{其中, } y_2 = \sqrt{\left(\frac{120-5}{4} \right)^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2} + \frac{5}{2} \quad (19)$$

(2) 模型的检验:

将 $h=50$ 代入式(15)方程, 可得折叠桌完成折叠后的最终桌脚边缘线方程为:

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{y_2 z - 25y}{z - 25} \right)^2 = \left(\frac{50.25}{2} \right)^2 \\ (y - 60) \left(y + 60 - \frac{2y_2 z - 50y}{z - 25} \right) + z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{其中, } y_2 = \sqrt{\left(\frac{120-5}{4} \right)^2 - \left(\frac{50}{2} \right)^2} + \frac{5}{2} \approx 16.70$$

由于方程式(15)为解析解, 无法显示出桌脚边缘线, 故考虑采用数值方法将其离散为若干直线, 利用 MATLAB 软件进行拟合, 得到桌脚边缘线的动态变化图 (图 5) 以及最终效果图 (图 6)。

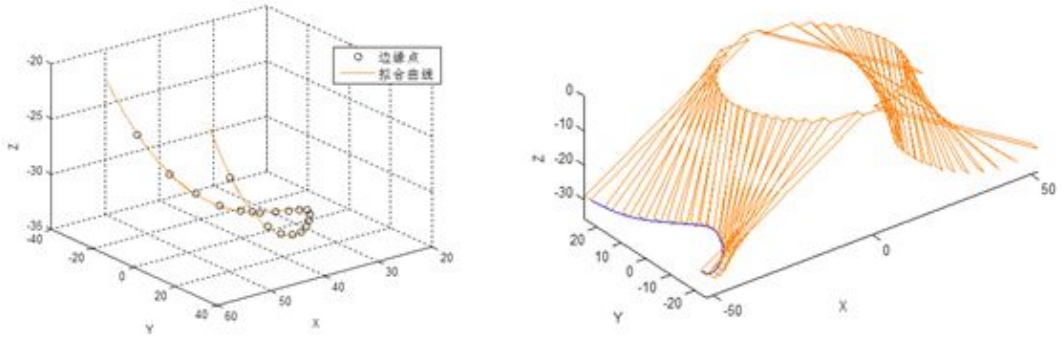


图 5 折叠桌 $\theta_0 = 60^\circ$ 时的桌脚边缘线

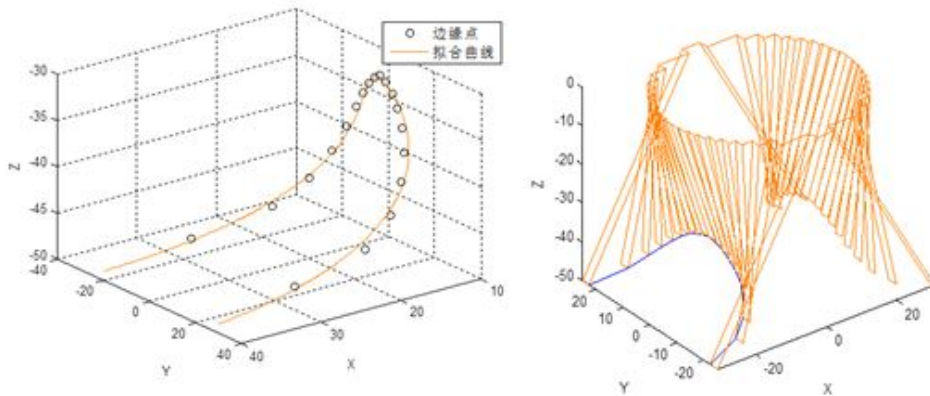


图 6 折叠桌完成折叠时的桌脚边缘线

5.1.2.3 求加工设计参数

将长方形平板尺寸为 120×50×3，木条宽度 d=2.5，高度 h=50，a=5，L=120，D=50.25，μ=0.5（钢筋固定于最外侧木条的中心位置）代入到所建模型中，并利用 MATLAB 编程辅助求解，得到结果如下表所示：

表 1. 设计加工参数数据

木条编号 j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
开槽起点到木板中心距离(cm)	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25
开槽终点到木板中心距离(cm)	31.25	36.78	40.25	43.06	45.39	47.31	48.84	50.02	50.85	51.34
开槽长度 v_j (cm)	0.00	5.53	9.00	11.81	14.14	16.06	17.59	18.77	19.60	20.09
竖直夹角 $\theta_j(^{\circ})$	29.59	12.44	3.41	3.05	7.88	11.52	14.26	16.24	17.59	18.37
木条长度 m_j (cm)	57.50	48.82	44.79	41.97	39.84	38.21	36.95	36.02	35.38	35.00

5.2 问题二

5.2.1 模型的建立

5.2.1.1 稳定性模型——约束条件 1

（1）稳定性条件：

根据《结构力学》^[7]知识，桌子结构关于 xoz 平面对称，自重分布均匀，G1 为圆桌面自重，G2 为左半边所有木条的自重之和，忽略地面摩擦力的影响，则半结构受力如下图。

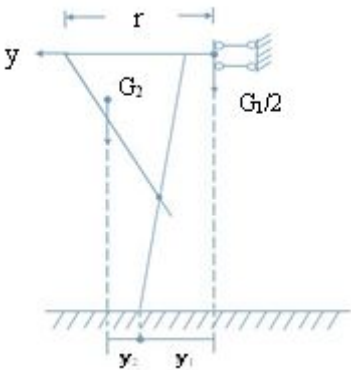


图 7 半结构受力图

对桌脚 A 求力矩：

$$\sum M_A = G_2 \cdot y_2 - \frac{G_1}{2} \cdot y_1$$

为保证桌子不在自重下垮塌，则应使 $\sum M_A \geq 0$ ，即 $G_2 y_2 \geq \frac{G_1}{2} y_1$ 。

同时，木条重心 G2 须在圆桌的垂直投影范围内，即 $0 < y_c \leq r$ ，其中， $y_2 = y_c$ ， $y_1 = y_0'$ 。将自重等效于面积，可将力矩关系转化为：

$$S_2 y_2 \geq \frac{1}{2} S_1 y_1$$

即

$$(y_c - y_0') \sum m_j d \geq \pi r^2 y_0'$$

综上可得，稳定性所形成的约束条件为：

$$\begin{cases} (y_c - y_0') \sum m_j d \geq \pi r^2 y_0' \\ 0 < y_c \leq r \end{cases} \quad (20)$$

(2) 求解半结构木条总重心的 y 轴坐标 y_c ：

由高等数学中数量函数积分知识可知，对于均质等厚薄板 Ω ，其质心公式为：

$$x_c = \frac{\int_{\Omega} x d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}, y_c = \frac{\int_{\Omega} y d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}, z_c = \frac{\int_{\Omega} z d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}, \text{其中} \int_{\Omega} d\Omega \text{是形体} \Omega \text{的度量。}$$

由于较难实现对第一问中所求得的直纹面方程进行积分的显示求解，因此考虑通过离散化（数值）方法求解 y_c 。半结构中木条总重心的 y 轴坐标 y_c 的表达式：

$$y_c = \frac{\sum y_j \Delta m_j}{m}, \text{其中, } \Delta m_j \text{ 和 } m \text{ 分别表示微元和板的长度。由此推得：}$$

$$\text{①当 } n \text{ 为偶数时, } y_c = \frac{\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} y_{jm} \cdot m_j}{\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} m_j} \quad (a = 2d)$$

$$\text{②当 } n \text{ 为奇数时, } y_c = \frac{\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} y_{jm} \cdot m_j + \frac{1}{2} y_{\left(\frac{n-1}{2}\right)m} \cdot m_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} m_j + \frac{1}{2} m_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \quad (a = d)$$

易知，第 j 根木条的长度：

$$m_j = \frac{L}{2} - y_j$$

第 j 根木条的中点 y 坐标：

$$y_{jm} = \frac{y_j + y_j'}{2} = \frac{y_j + y_j + m_j \sin \theta_j}{2} = y_j + \frac{m_j \sin \theta_j}{2}$$

其中，

$$y_j = \begin{cases} \sqrt{r^2 - (\mu - j)^2} d^2, & n \text{ 为偶数} \\ \sqrt{r^2 - \left(\mu - j - \frac{1}{2}\right)^2} d^2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\text{且满足: } \tan \theta_j = \frac{y_j - y_0 - \mu m_0 \sin \theta_0}{-\mu h}, \quad \cos \theta_0 = \frac{h}{m_0}, \quad m_0 = \frac{L - a}{2}$$

5.2.1.2 加工便利性模型——约束条件 2

由第一问中的设计加工参数模型可知，当钢筋位置不定时，即 $|A_0 C_0| = \mu m_0, 0 < \mu < 1$ 时，所有木条的总槽长需满足：

$$\sum_{j=0}^{2n-1} v_j \geq 4 \sum_{j=0}^{k-1} v_{j\min}$$

$$\text{其中, } v_{j\min} = \left| \sqrt{[y_j + (L - y_j) \sin \theta_j - y_0 - \mu m_0 \sin \theta_0]^2 + [(L - y_j) \cos \theta_j - \mu h]^2} - \mu m_0 \right|$$

5.2.1.3 目标函数

(1) 目标一：用量少

由于木板厚度一定，故所用材料最少即要求矩形木板底面积 S 最小。由前述分析可知，木板宽度为 nd ，木板长度 $L = m_0 \times 2 + a = \frac{2h}{\cos \theta_0} + a$ ，因此，

$$S = L \cdot nd = \left(\frac{2h}{\cos \theta_0} + a \right) nd \quad (21)$$

(2) 目标二：重心低

由于物体的稳定性与重心的高低及支撑面的大小有关，在一定范围内，重心越低，稳定性越高。对如图 7 所示的半结构而言，重心的高度即为半结构中木条总重心的 z 轴坐标 z_c 。同理 y_c 的求解过程，可求得 z_c 表达式如下：

$$\begin{aligned} \text{①当 } n \text{ 为偶数时, } z_c &= \frac{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} z_{jm} m_j}{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} m_j} \\ \text{②当 } n \text{ 为奇数时, } z_c &= \frac{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-2} z_{jm} m_j + \frac{1}{2} z_{\left(\frac{n-1}{2}\right)m} m_{\frac{n-1}{2}}}{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-2} m_j + \frac{1}{2} m_{\frac{n-1}{2}}} \end{aligned}$$

易知，第 j 根木条的中点 z 坐标：

$$z_{jm} = \frac{m_j \cos \theta_j}{2}$$

其余参数及数值关系与在 5.2.1.1 节中求解 y_c 时所得结果一致。

(3) 标准化处理求目标函数

由上述分析可知，用 MIN-MAX 法分别对材料用量 S 和重心高度 z_c 进行标准化处理，处理后可求得：

$$S' = \frac{S - S_{\min}}{S - S_{\max}}, z_c' = \frac{-z_c - (-z_c)_{\min}}{(-z_c)_{\max} - (-z_c)_{\min}}$$

从而得到目标函数：

$$\min f = S' + z_c' = \frac{S - S_{\min}}{S - S_{\max}} + \frac{-z_c - (-z_c)_{\min}}{(-z_c)_{\max} - (-z_c)_{\min}} \quad (22)$$

5.2.1.4 最优化模型

综上所述，可得最优化模型：

目标函数：

$$\min f = S' + z_c' = \frac{S - S_{\min}}{S - S_{\max}} + \frac{-z_c - (-z_c)_{\min}}{(-z_c)_{\max} - (-z_c)_{\min}}$$

其中,

$$S = \left(\frac{2h}{\cos \theta_0} + a \right) nd$$

$$z_c = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} z_{jm} m_j}{\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} m_j}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} z_{jm} m_j + \frac{1}{2} z_{\left(\frac{n-1}{2}\right)m} m_{\frac{n-1}{2}}}{\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} m_j + \frac{1}{2} m_{\frac{n-1}{2}}}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

约束条件:

$$\begin{cases} (y_c - y_0') \sum m_j d \geq \pi r^2 y_0' \\ 0 < y_c \leq r \\ v_{j\min} < v_j < m_j \end{cases}$$

5.2.2 模型的求解

该优化问题是典型的非线性规划(NLP)问题。将第二问中的已知条件： $h=70, D=80$ 代入并求解该 NLP 问题，我们调用了 MATLAB 中的 fmincon 函数，使用有效集算法求出最优解，求得的最优解结果如表 2.1 所示。

表 2.1 最优化模型结果

参数	数值
平板总长度(cm)	187.76
最外侧木条长度(cm)	91.38
最外侧木条与水平方向的夹角 (rad)	0.87
钢筋固定点到桌脚的距离(cm)	59.397
长度比例系数 μ	0.65

根据以上结果，可求得具体加工设计参数如表 2.2 所示：

表 2.2 最优设计加工参数数据

木条编号 j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
开槽长度	0.0	8.2	11.	14.	17.	19.	21.	23.	24.	25.	27.	28.	28.	29.	29.	30.
v_j (cm)	0	6	74	61	11	33	31	07	62	97	15	13	93	55	99	25

竖直夹角	0.8	1.1	1.2	1.3	1.4	1.4	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
$\theta_i(\text{rad})$	7	5	5	3	0	6	0	4	8	1	3	5	7	8	9	9
木条长度	91.	73.	68.	64.	61.	58.	56.	54.	52.	51.	50.	49.	48.	48.	47.	47.
$m_j(\text{cm})$	38	58	13	18	04	45	27	43	86	53	42	50	77	21	81	58

5.3 问题三

5.3.1 模型的建立

客户需求的选择范围如下：

1. 可规定桌面边缘线形状和大小（有圆形、椭圆、抛物线形和菱形四种形状可选）；
2. 可规定折叠后的桌脚边缘线形状，即可规定桌脚边缘线的曲线方程；
3. 可规定折叠后桌子高度 h 。

5.3.1.1 直纹面模型

类比问题一的思想，若明确桌面形状，即已知桌面边缘线的曲线方程，则可根据该模型求解出桌腿木条所形成的直纹面的曲面方程。

(1) 桌面边缘曲线为椭圆

如图 8 所示，以椭圆形桌面的中心 O 为坐标原点，以椭圆形桌面为 xoy 平面，以竖直方向为 z 轴，建立空间直角坐标系。设 $P(x, y, z)$ 为直纹面轨迹上任意一点，过点 P 的动直线与两条曲线（桌面边缘线和钢筋所在直线）分别交于 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 。

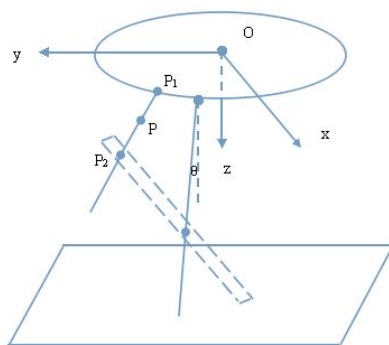


图 8 空间直角坐标系

根据解析几何知识，可得桌面边缘椭圆曲线的方程：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

钢筋所在的直线方程：

$$\begin{cases} y = \frac{a}{2} + \sqrt{(\mu m_0)^2 - (\mu h)^2} \\ z = \mu h \end{cases}$$

与钢筋垂直的平面 M ：

$$x + F = 0$$

同理 5.1.1.2 节中直纹面的求解过程，可得由桌腿木条组成的直纹面的曲面方程：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{\left(\frac{y_2 z - \mu h y}{z - \mu h}\right)}{B^2} = 1 \\ \text{其中, } y_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{(\mu m_0)^2 - (\mu h)^2} \end{cases} \quad (23)$$

(2) 桌面边缘曲线为抛物线

类比椭圆情况下的建系方法，可得桌面边缘抛物线曲线的方程：

$$\begin{cases} p(y - B) = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

同理 5.1.1.2 节中直纹面的求解过程，可得由桌腿木条组成的直纹面的曲面方程：

$$\begin{cases} x^2 = p \left(\frac{y_2 z - \mu h y}{z - \mu h} - B \right) \\ \text{其中, } y_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{(\mu m_0)^2 - (\mu h)^2} \end{cases} \quad (24)$$

(3) 桌面边缘曲线为菱形

桌面边缘菱形曲线的方程：

$$\begin{cases} y = -\frac{B}{A}x + B \\ z = 0 \end{cases}$$

同理 5.1.1.2 节中直纹面的求解过程，可得由桌腿木条组成的直纹面的曲面方程：

$$\begin{cases} \frac{y_2 z - \mu h y}{z - \mu h} = -\frac{B}{A}x + B \\ \text{其中, } y_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{(\mu m_0)^2 - (\mu h)^2} \end{cases} \quad (25)$$

5.3.1.2 平板边缘曲线模型

如图 9 所示，由于平板边缘形状与折叠后桌脚边缘线的形状以及桌面形状有关，若已知折叠后桌脚边缘线的曲线方程以及桌面边缘曲线的曲线方程函数，则可利用该模型求解得到平板边缘曲线的曲线方程。

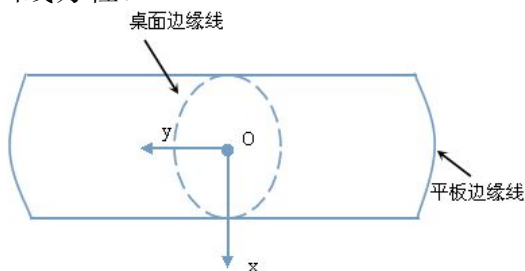


图 9 平板平面示意图

若已知桌脚边缘线的曲线方程：

$$\begin{cases} y = F_1(x) \\ z = F_2(x) \end{cases}$$

和桌面边缘曲线方程：

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

则假设平板边缘曲线的曲线方程：

$$\begin{cases} Y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$$

根据桌腿木条长度的等价表达和空间解析几何知识, 可知:

$$(Y - y)^2 = [f_1(x) - y]^2 + [F_2(x) - z]^2$$

整理可得平板边缘曲线的曲线方程:

$$Y = y + \sqrt{[F_1(x) - y]^2 + [F_2(x) - z]^2} \quad (26)$$

根据桌面边缘曲线的不同, 可分以下三种情况讨论:

(1) 桌面边缘曲线为椭圆

$$\text{设桌面边缘曲线方程为 } P: \begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 则}$$

$$y = \sqrt{B^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)}$$

代入式(26), 可得木板边缘曲线方程:

$$Y = \sqrt{B^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)} + \sqrt{\left[F_1(x) - \sqrt{B^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)} \right]^2 + [F_2(x)]^2} \quad (27)$$

(2) 桌面边缘曲线为抛物线

$$\text{设桌面边缘曲线方程为 } P: \begin{cases} p(y - B) = x^2 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 则}$$

$$y = \frac{x^2}{p} + B$$

代入式(26), 可得木板边缘曲线方程:

$$Y = \frac{x^2}{p} + B + \sqrt{\left(F_1(x) - \frac{x^2}{p} - B \right)^2 + [F_2(x)]^2} \quad (28)$$

(3) 桌面边缘曲线为菱形

$$\text{设桌面边缘曲线方程为 } P: \begin{cases} y = -\frac{B}{A}x + B \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 代入式(26), 可得木板边缘曲线方程:}$$

$$Y = -\frac{B}{A}x + B + \sqrt{(F_1(x) + x - A)^2 + [F_2(x)]^2} \quad (29)$$

5.3.1.3 设计加工参数模型

由于桌面最外侧突出木块的长度 a 的取值对整体模型的影响较小, 故不妨设 $a=2d$.

假设钢筋固定于最外侧木条 A_0B_0 上一点 C_0 , 且满足 $|A_0C_0| = \mu m_0, 0 < \mu < 1$. 设桌面边

缘曲线方程: $\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, 平板边缘曲线函数方程: $\begin{cases} Y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$ 。

类比 5.1.1.4 节中对设计加工参数的求解过程, 可得对于第 j 根木条 A_jB_j :

(1) 与桌面接触点 $A_j(x_j, y_j, z_j)$ 坐标:

$$x_j = \begin{cases} (k-j)d, & k \text{ 为偶数} \\ \left(k-j-\frac{1}{2}\right)d, & k \text{ 为奇数} \end{cases}, P(x_j, y_j)=0, z_j=0$$

(2) 平板尺寸:

平板长度 L: $L = a + 2m_0$

平板宽度 W: $W = 2x_0$

(3) 第 j 个木条长度: $m_j = Y_j - y_j$

(4) 第 j 个木条上的开槽长度:

$$A_0(x_0, y_0, 0), B_0(x_0, y_0 + m_0 \sin \theta_0, h), C_0(x_0, y_0 + \mu m_0 \sin \theta_0, \mu h) \\ A_j(x_j, y_j, 0), B_j(x_j, y_j + m_j \sin \theta_j, m_j \cos \theta_j), C_j(x_j, y_0 + \mu m_0 \sin \theta_0, \mu h)$$

木条与竖直方向的夹角度数 θ_j : $\tan \theta_j = \frac{y_j - y_0 - \mu m_0 \sin \theta_0}{- \mu h}$, 其中 $\cos \theta_0 = \frac{h}{m_0}$ 。

单个木条的开槽长度的最小值为:

$$v_{j\min} = \left| \sqrt{[y_j + m_j \sin \theta_j - y_0 - \mu m_0 \sin \theta_0]^2 + [m_j \cos \theta_j - \mu h]^2} - \mu m_0 \right|$$

木条的总槽长需满足:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} v_j \geq 4 \sum_{j=0}^{k-1} v_{j\min}$$

(5) 最优设计参数:

将上述求得的各设计参数代入 5.2.1.4 节所建的最优化模型中进行优化, 求出最优解, 即求出最优设计参数: 平板尺寸、各木条长度、各木条开槽位置及长度、和钢筋固定点的长度比例系数 μ 。

5.3.2 模型的求解

假定现有 2 位客户, 对折叠桌的设计要求分别如下:

第一位: 1、桌面边缘曲线为椭圆, 且椭圆方程为 $\begin{cases} \frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1; \\ z = 0 \end{cases}$;

2、折叠后桌子高度为 60cm。

第二位: 1、桌面为边缘曲线为菱形, 且菱形方程为 $\begin{cases} y = -2x + 50; \\ z = 0 \end{cases}$;

2、折叠后桌子高度为 60cm。

5.3.2.1 求解客户 1 的需求

(1) 最优设计参数

设木板形状为矩形, 木条宽度 $d=2.5$, 则 $a=2d=5$, 木板宽度 $W=2x_0=50$, 将 $A=25$, $B=15$, $h=60$ 代入 5.2.1.4 节所建的最优化模型中, 求得的最优解为:

表 3. 客户 1 最优化模型结果

参数	数值
平板总长度(cm)	145.18
最外侧木条长度(cm)	67.91
最外侧木条与竖直方向的夹角	0.49 (=27.92°)

钢筋固定点到桌脚的距离(cm)	18.199
长度比例系数 μ	0.268

(2) 求解直纹面——描述动态过程

将 $a=5, A=25, B=15, L=145.18, m_0=67.91, \mu=0.268, h=60$ 代入式(23), 可得折叠桌在折叠的动态过程中, 随着高度 h 的变化, 桌腿木条所形成的直纹面方程为:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25^2} + \frac{\left(\frac{y_2 z - 0.268 \times 60 y}{z - 0.268 \times 60} \right)^2}{15^2} = 1 \\ \text{其中, } y_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{(0.268 \times 67.91)^2 - (0.268 \times 60)^2} \approx 11.02 \end{cases}$$

仿照 5.1.2.1 节的方法, 利用 MATLAB 软件, 依次取 $h=0, 10, 20, 25, 30, 40, 50, 60$ 共 8 个状态, 得到桌腿木条所构成的直纹面曲面的动态效果图如图 11 所示:

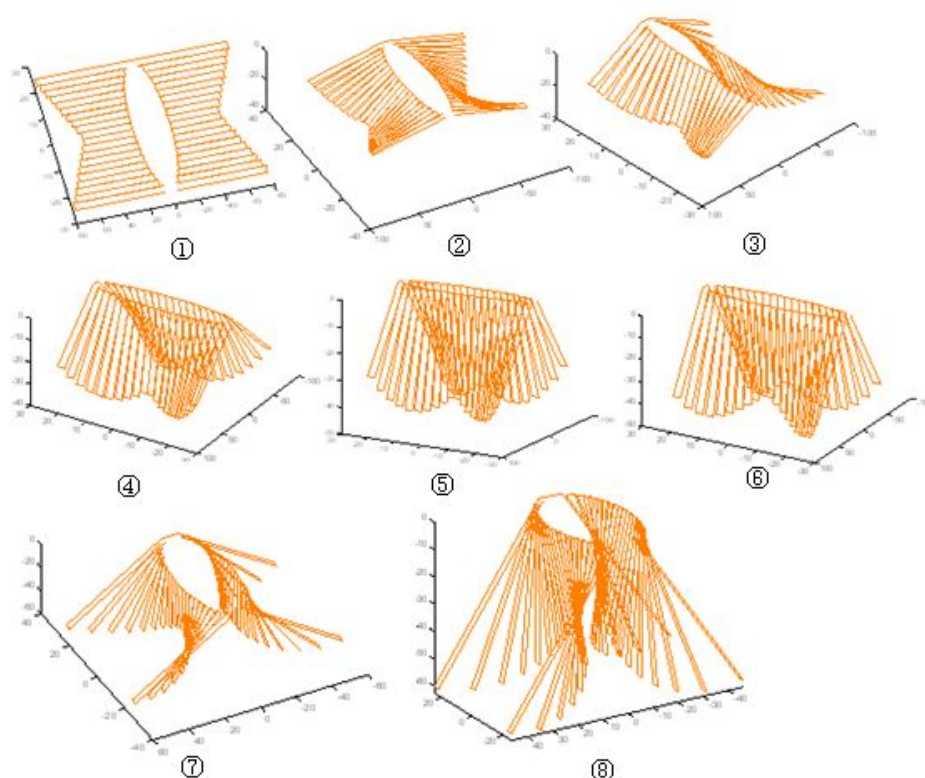


图 10 客户 1 产品动态变化过程的示意图

(3) 求解设计加工参数

将求得的参数值 $L=145.18, W=50, d=2.5, a=5, A=25, B=15, \mu=0.268, h=60$ 代入到 5.1.1.4 节所建的设计加工参数模型中, 并利用 Matlab 编程辅助求解, 得到结果如下表所示:

表 4. 客户 1 设计加工参数数据

木条编号 j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
开槽起点到桌面接触点距离(cm)	17.00	13.78	11.76	10.29	9.16	8.29	7.63	7.16	6.85	6.70
开槽终点到桌面接触点距离(cm)	26.05	23.60	22.17	21.18	20.46	19.94	19.56	19.29	19.13	19.04

开槽长度 v_j (cm)	9.05	9.82	10.40	10.89	11.30	11.65	11.92	12.13	12.27	12.34
竖直夹角 θ_{ji} (°)	18.85	8.05	0.02	0.91	-8.31	-11.31	-15.12	-15.12	-16.13	-16.63
木条长度 m_j (cm)	63.40	55.18	48.16	41.69	35.56	29.69	24.03	18.56	13.25	8.10

(4) 产品性能检验及优化

将所设计的产品代入 5.2.1.1 节中所建立的稳定性模型中进行稳定性检验可知,当该矩形平板的边缘曲线向内凹时,所改进得到的折叠桌在稳定性能上更优,同时用料更为节约。

5.3.2.2 求解客户 2 的需求

(1) 最优设计参数

设木板形状为矩形,木条宽度 $d=2.5$, 则 $a=2d=5$, 木板宽度 $W=2x_0=50$, 将 $A=25$, $B=50$, $h=60$ 代入 5.2.1.4 节所建的最优化模型中,求得的最优解如下表所示:

表 5. 客户 2 最优化模型结果

参数	数值
平板总长度(cm)	163.24
最外侧木条长度(cm)	79.12
最外侧木条与竖直方向的夹角	0.71 (40.68°)
钢筋固定点到桌脚的距离(cm)	47.488
长度比例系数 μ	0.600

(2) 求解直纹面——描述动态过程

将 $a=5, A=25$, $B=50$, $L=163.24$, $m_0=79.12$, $\mu=0.600$, $h=60$ 代入式(25), 可得折叠桌在折叠的动态过程中,随着高度 h 的变化,桌腿木条所形成的直纹面方程为:

$$\begin{cases} \frac{y_2 z - 0.6 \times 60 y}{z - 0.6 \times 60} = -2x + 50 \\ \text{其中, } y_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{(0.6 \times 79.12)^2 - (0.6 \times 60)^2} \approx 33.44 \end{cases}$$

仿照 5.1.2.1 节的方法,利用 MATLAB 软件,依次取 $h=0,10,20,25,30,35,40,50,60$ 共 9 个状态,得到桌腿木条所构成的直纹面曲面的动态效果图如图 12 所示:

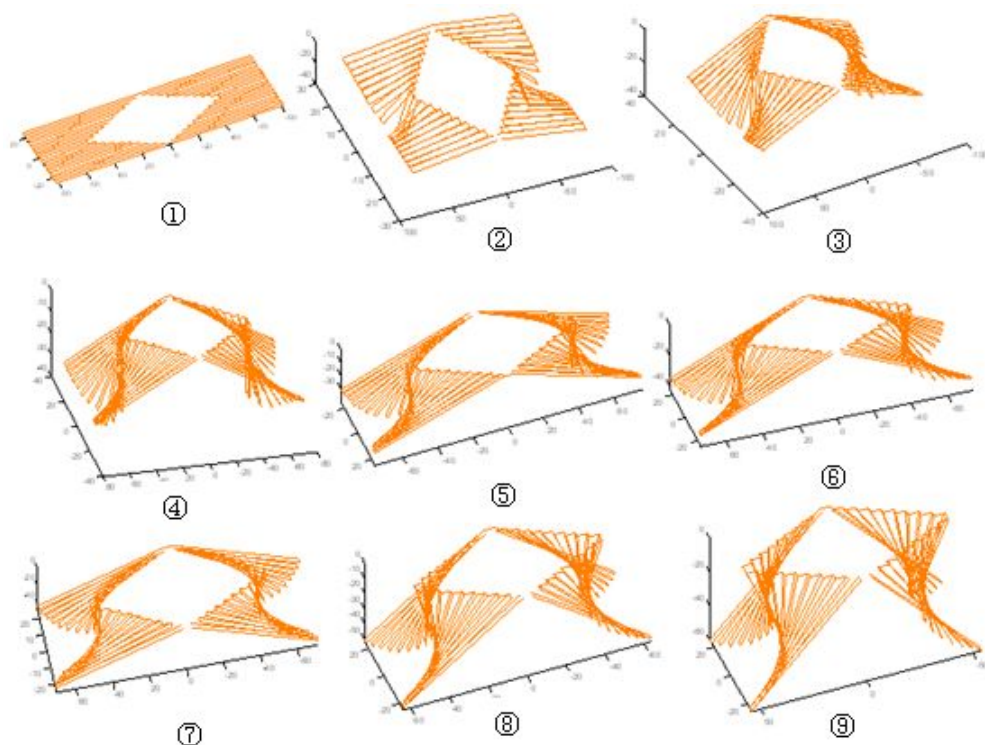


图 11 客户 2 产品动态变化过程的示意图

(3) 求解设计加工参数

将求得的参数值 $L=163.24$, $W=50$, $d=2.5$, $a=5$, $A=25$, $B=50$, $\mu=0.600$, $h=60$ 代入到 5.1.1.4 节所建的设计加工参数模型中, 并利用 Matlab 编程辅助求解, 得到结果如下表所示:

表 6. 客户 2 设计加工参数数据

木条编号 j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
开槽起点到桌面 接触点距离(cm)	47.48	42.48	37.48	32.48	27.48	22.48	17.48	12.48	7.48	2.48
开槽终点到桌面 接触点距离(cm)	62.90	58.87	55.00	51.33	47.89	44.75	41.98	39.64	37.82	36.60
开槽长度 v_j (cm)	15.42	16.39	17.52	18.84	20.41	22.27	24.49	27.16	30.34	34.12
竖直夹角 θ_{ji} (°)	40.68	35.78	30.19	23.89	16.92	9.39	1.52	-6.41	-14.10	-21.31
木条长度 m_j (cm)	79.12	74.12	69.12	64.12	59.12	54.12	49.12	44.12	39.12	34.12

(4) 产品性能检验及优化

将所设计的产品代入 5.2.1.1 节中所建立的稳定性模型中进行稳定性检验可知, 当该矩形平板的边缘曲线向内凹时, 所改进得到的折叠桌在稳定性能上更优, 同时用料更为节约。

六、模型的评价

模型的优点:

1、模型运用从直线运动的角度来诱导出直纹面方程, 桌脚边缘曲线方程, 求解具体解析解的思想, 得出具体动态方程, 形象描述直纹面的情况;

2、可以根据任意给出的桌脚边缘线函数、桌面边缘函数和桌子高度得出确定的平板边缘函数和设计加工尺寸的最优解。

模型的缺点：

直纹面方程和桌脚边缘曲线方程求解的是解析解，即为连续解，必须采用数值方法将其离散为若干直线，再利用 MATLAB 软件进行拟合，方能得到折叠桌的动态变化图以及桌脚边缘线。

七、模型的优化

在本文中，求平板边缘线时得到的解析解比较复杂，难以直接绘图，有时还须求得离散化的数值解才能拟合得到所需曲线或曲面。因此考虑采用两平面相交得到桌脚边缘线的方法进行模型简化，即考虑半结构中最外侧的两根木条（最长）的桌脚点 A、B 和最中间的木条（最短）的桌脚点 C，这三点所构成的平面与所求得的直纹曲面相交，从而截得桌脚边缘线并对其求解。

同时，在此法基础上，还可通过改变平板边缘线的形状（即曲线方程），优化所设计的产品，具体步骤如下：

1. 假设木板边缘为矩形，利用已建模型求解得桌脚边缘线方程和 A、B、C 点的坐标；
2. 沿最短木条所在直线分别向上、向下移动 C 点，即移动平面 ABC；
3. 分别得到 C 点向上、向下移动时，平面 ABC 与直纹曲面相交得到的桌脚边缘线，从而计算出每根木条的长度；
4. 利用木条长度公式 $m_j = Y_j - y_j$ 得到平板边缘线曲线方程；
5. 将向上、向下移动 C 点得出的折叠桌数据代入问题二所建的稳定性模型以及最优化模型，检验移动后产品的稳定性和用料量，从而得出较优的方案，并确定平板边缘线的大致方向。

八、参考文献

- [1] 刘绍颖.直纹面可视为动直线的轨迹.乐德民族师专学报, 1995, 20 (02): 24-27
- [2] 陈向阳, 关富玲.折叠结构几何非线性分析.计算力学学报, 2000,17 (04): 435-440
- [3] 崔恒忠, 曹资, 刘景园等.可展开折叠式空间结构的模型试验.《空间结构》 97.1
- [4] 马莉.数学实验与建模.北京: 清华大学出版, 2010
- [5] 王晓玉, 李嫣然, 孙锐然.一种给力的桌椅设计. http://wenku.baidu.com/link?url=1bMdEQ0834CjUZxe0A9kptygD_suy12Gb2tBzn5vsWAbPBzciit8XFd6wk_iYACYgpt6R6C5fHoff3zTlq6m3z5hbazM_xNxSgF9sG2DJtq&qq-pf-to=pcqq.group.2014.09.13
- [6] 阿佛里耳著, 李元熹等译:《非线性规划——分析与方法》, 上海科学技术出版社, 上海,1979。(M.Avriel, Nonlinear Programming analysis and methods, Prentice-Hall, 1976.)
- [7] 单建, 吕令毅主编.结构力学.南京:东南大学出版社, 2004