

反舰导弹打击航母的数学建模与算法设计

摘要

反舰导弹是打击水面舰船目标的利器，在各国的军事战略、国家安全及社会发展中发挥着不可替代的作用。本文通过对反舰导弹运行轨道曲线的三个阶段分别建立模型，并利用MATLAB/Simulink仿真导弹的弹道轨迹，给出打击静态目标和动态目标情况下的三维轨道曲线。

针对问题一，首先我们将反舰导弹视为可控质点，对其的运动特性进行分析；在此前提下建立简化的导弹发射段和中段的动力学微分方程模型，并推导出弹道导弹运动状态方程；接着利用卡尔曼滤波的实时估计方法，给出发射段和中段的三维轨道曲线；最后考虑到敌方拦截系统，我们将轨道的末段设计为螺旋机动轨道，极大地提高了反舰导弹的突防能力。

针对问题二，我们基于二次型指标的最优控制理论，建立考虑弹体动态特性情况下的比例导引模型。指挥中心利用已知航母的航向和速度建立航行模型，并实时地给导弹提供航母的航行数据，从而不断地对导弹的中段飞行轨迹进行修正。其他两个阶段的模型如下：发射段采用问题一中建立的动力学微分方程模型；末段采用螺旋机动模型来突破敌方拦截系统，提高导弹生存能力以达到对目标的精准致命打击。

针对问题三，我们分析了各种误差来源，并考虑表视力误差、海浪误差、建模不确定性误差的影响；由于多种误差的存在，实际弹道偏离理论设定的弹道是必然的。我们采用蒙特卡洛打靶仿真对导弹命中精度和命中率进行试验和分析，10000次的仿真结果显示，脱靶量在 $[0m, 15m]$ 占比60%，在 $[0m, 25m]$ 占比71%，在 $[0m, 35m]$ 占比77%，在 $[0m, 50m]$ 占比85%，综合评估命中率在88%。

最后，我们所建立的模型具有很强的理论基础，虽然在一定程度上不能完全反映反舰导弹三个阶段的轨道，但还是体现了弹体基本的动态特性，因此是值得应用和推广的。

关键词：比例导引，螺旋机动，仿真，卡尔曼滤波，蒙特卡洛法

目录

1	问题重述	1
1.1	问题的背景	1
1.2	问题的分析	1
1.2.1	概论	1
1.2.2	问题一的分析	1
1.2.3	问题二的分析	1
1.2.4	问题三的分析	2
2	模型假设	2
3	符号说明	2
4	模型建立与求解	3
4.1	反舰导弹轨道的静态模型	3
4.1.1	思路分析	3
4.1.2	发射段的轨道模型	3
4.1.3	中段轨道模型	4
4.1.4	末段的轨道模型	5
4.1.5	模型求解	7
4.2	反舰导弹轨道的动态模型	9
4.2.1	思路分析	9
4.2.2	模型建立	9
4.2.3	模型求解	12
5	导弹轨道曲线的误差分析和命中率分析	13
5.1	误差的来源	13
5.2	命中率分析	15
6	模型评价	16
6.1	模型优点	16
6.2	模型缺点	16
7	未来的工作	17
	参考文献	18

1 问题重述

1.1 问题的背景

反舰导弹具有射程远、命中率高和威力大等优点，是打击水面舰船目标的利器。同时，它也是尖端科学与航天技术高度融合的产物，是维护国家安全之重器。反舰导弹在各国的军事战略、国家安全及社会发展中发挥着不可替代的作用，世界各大军事强国均把反舰导弹技术发展作为实现国家战略目标的重中之重。多次海战的实践表明，1~2枚单价为四五十万美元的导弹就能使单价为1~2亿美元的驱护舰丧失战斗力甚至沉没，效费比达200~500倍，显然是十分合算的。因此，发展反舰导弹是十分合算的，更是十分必要的。

1.2 问题的分析

1.2.1 概论

反舰导弹的运行的轨道分为发射段、中段和末端，需要分别对这三个部分进行处理。我们查阅了大量有关反舰导弹弹道轨线的书籍和论文，并对其总结分析，李毅 [1] 等对战术弹道导弹的弹道进行仿真。一般而言，近程弹道导弹为抛物线型弹道，论文中对弹道分三段（助推段、自由飞段、再入段）分别建立了不同的仿真模型，该模型为反导体系的仿真提供了一个较为理想的作战对象。但由于模型比较简单，不能准确地描述导弹地飞行轨迹。潘越，周树德 [2] 在弹道导弹建模优化的研究中，针对弹道导弹防御技术仿真应用，建立了弹道导弹弹道仿真模型。他基于最优能量椭圆弹道理论，采用优化迭代方法，考虑地球自转影响，建立了弹道导弹自由段模型，并根据导弹性能参数，建立了主动段和再入段弹道模型，从而得到从发射点到落点的包含不同飞行段特性的完整弹道模型。虽然模型比较精确但过于复杂，求解模型比较复杂不满足导弹的实时性需求。在前人研究的基础上，我们给出几类行之有效、具有反拦截能力的反舰导弹的数学模型及其命中目标的算法，使其能够从理论上很好地打击敌方航母。

1.2.2 问题一的分析

在航母处于静止状态时，由于其坐标位置固定不动，直接建立连接导弹初始位置与航母坐标间的轨道模型即可。虽然题目中写道发射段的轨道通常为抛物线，但在查阅了多篇论文之后我们发现目前较为流行的发射方式为垂直发射。将反舰导弹视为可控质点，考虑导弹在空中飞行时的动力学微分方程，再利用Matlab/Simulink 仿真求解模型。

1.2.3 问题二的分析

题目中已给出航母的航行路线及航行速度，在中段时指挥中心可以实时地将航母的位置信息传输给导弹，从而实现导弹轨道的不断修正，达到跟踪并精准打击航母的目的。目前，在导弹飞行的中段动态飞行模型时，设计本文借鉴了陈宇强 [3] 考虑弹体动态特性的二次型最优制导律的方法，根据导弹仿真数据，绘制可直观显示弹道特性的理想弹道曲线。给出了比例导引法的差分方程，建立了比例导引法的三维弹道仿真模型，并用仿真求解模型。

1.2.4 问题三的分析

问题三要求对之前建立的轨道模型，进行误差分析和命中率分析。误差包括模型本身的误差以及外界环境对导弹飞行弹道产生的误差，主要是在前面模型和仿真基础上，在反舰导弹进行不同形式的末段机动时候，舰空导弹由不同的初始位置进行拦截，在计算机上进行多次打靶仿真，采用蒙特卡洛法，针对打靶数据计算各种末端机动方式的突防概率，比较末端直线运动、航向蛇行机动、纵向蛇行机动、螺旋机动和摆式机动，那种机动方式的突防概率最高。

2 模型假设

- 假设地球是一个圆球体。
- 假设弹道导弹可以看作是一个质点，其他星球对导弹的引力忽略不计。虽然导弹质量相对于地球质量可以忽略不计，但重力加速度依然按照二体运动的原理来计算。
- 假设推力加速度与速度方向一致，即反舰导弹飞行是零攻角。
- 假设在中段导弹仅受空气阻力、重力的作用。
- 假设在发射段，由于燃料消耗，导弹的质量按线性函数关系递减，即燃料质量燃烧率是一个常数。
- 假设单位质量的推进剂所能带来的冲量（比冲）是一个常数。
- 假设导弹绕螺旋线轴转动的角速度为常数。
- 假设在导弹末段其巡航的速度为常数。
- 航母在航行时可视为质点的运动。
- 指挥站可以控制导弹进入中段以及末段。这条假设是合理的，因为指挥站可以实时搜集航母的位置及其他航行信息，从而确定导弹与航母的距离，那么就可以实现控制进入各阶段轨道的时刻。

3 符号说明

本文中的部分符号及其含义见表格1

表 1: 符号及其含义

符号	含义	符号	含义
R	地球半径	v_s	沿螺旋轴心线 ox_l 的速度
p_x	当前时刻导弹在x轴方向上的位置	L_J	螺旋机动距离
p_y	当前时刻导弹在y轴方向上的位置	H_0	巡航高度
p_z	当前时刻导弹在z轴方向上的位置	h	螺旋距
v_x	当前时刻导弹在x轴方向上的速度	k	螺旋次数
v_y	当前时刻导弹在y轴方向上的速度	r	螺旋线底圆半径
v_z	当前时刻导弹在z轴方向上的速度	M_k	第k个时间间隔时导弹的空间位置
x_t	当前时刻目标在x轴方向上的位置	T_k	第k个时间间隔时导弹与目标之间的距离
y_t	当前时刻目标在y轴方向上的位置	S_m	导弹在一个时间间隔内运动的距离
z_t	当前时刻目标在z轴方向上的位置		
g	重力加速度		
$m(t)$	反舰导弹的质量		
$\dot{m}(t)$	燃料质量燃烧率		
I_{sp}	比冲, 即单位质量的推进剂所能带来的冲量		

4 模型建立与求解

4.1 反舰导弹轨道的静态模型

4.1.1 思路分析

反舰导弹的飞行分为发射端、中段和末段。在非惯性系中, 导弹在发射端受到的作用力主要为推进力、重力、空气阻力、柯氏力以及牵连惯性力; 在中段和末端导弹受到的作用力为重力、空气阻力、柯氏力以及牵连惯性力 [5]。在此处我们不考虑柯氏力以及牵连惯性力的影响。本文将对三个不同的阶段分别建立轨道模型, 并依次求解所得模型。首先将反舰导弹视为可控质点, 并对其的运动特性进行了分析, 在此前提下建立了简化了的反舰导弹发射段动力学模型; 其次, 我们发现导弹的中段的动力学方程与发射端非常相似, 只是中段仅受重力与空气阻力; 为了提高反舰导弹的反导拦截能力, 本文在导弹中段轨道为了避开舰上密集火力的拦截, 增强突防能力, 反舰导弹必须在其弹道末段具备一定的机动性能。为此, 我们设计了螺旋机动轨道来自主打击航母。

4.1.2 发射段的轨道模型

由之前的假设可知, 推力加速度方向为沿着弹体纵轴, 并且大小可表示为

$$a_T(t) = \frac{gI_{sp}\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (1)$$

公式1也可以用下式来表示:

$$a_T(t) = \frac{V_E M}{1 - Mt}$$

式中: $V_E = I_{sp}g$, 表示的是排气速度; $M = \frac{\dot{m}}{m(0)}$ 表示归一化后的质量变化率, 单位为 S^{-1} . 弹道导弹在圆球体地球模型中飞行动力学方程 [4]:

$$\dot{p}_x = v_x \quad (2)$$

$$\dot{p}_y = v_y \quad (3)$$

$$\dot{p}_z = v_z \quad (4)$$

$$\ddot{v}_x = \frac{V_E M}{1 - Mt} \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_x}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

$$\ddot{v}_y = \frac{V_E M}{1 - Mt} \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_y}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

$$\ddot{v}_z = \frac{V_E M}{1 - Mt} \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_z}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

将弹道导弹空间位置、速度、排气 速度和质量变化率作为待估状态量, 即状态向量为 [4]:

$$X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ V_E \ M]^T \quad (8)$$

由之前的公式2 3 4 5 6 7 得到反舰导弹运动方程:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{V}_E \\ \dot{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ a_T \frac{\dot{x}}{|r^3|} - \frac{\mu x}{r^3} \\ a_T \frac{\dot{y}}{|r^3|} - \frac{\mu y}{r^3} \\ -\frac{\mu z}{r^3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中: $a_T = \frac{V_E M}{1 - Mt}$, 其中 t 为当前时刻, 设弹道导弹发射得时刻为0时刻。

4.1.3 中段轨道模型

弹道导弹在圆球体地球模型中飞行动力学方程 [4]:

$$\dot{p}_x = v_x \quad (10)$$

$$\dot{p}_y = v_y \quad (11)$$

$$\dot{p}_z = v_z \quad (12)$$

$$\dot{v}_x = -\frac{\mu p_x}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (13)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{\mu p_y}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (14)$$

$$\dot{v}_z = -\frac{\mu p_z}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

和发射段类似，将弹道导弹空间位置、速度、排气速度和质最变化率作为待估状态量，即状态向量为 [4]:

$$X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ V_E \ M]^T \quad (16)$$

由公式10 11 12 13 14 15得到反舰导弹运动方程:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{V}_E \\ \dot{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ -\frac{\mu x}{r^3} \\ -\frac{\mu y}{r^3} \\ -\frac{\mu z}{r^3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

4.1.4 末段的轨道模型

“螺旋机动”是一种较为复杂的三维空间中的机动方式，目前比较常见的机动方式是“蛇形机动”。相关研究表明导弹若能采取一种周期性的机动方式一如立体的“螺旋机动”或平面情况的“蛇行机动”等，则突防的成功率会很高。因为根据制导理论，在拦截过程的某一特定最佳时刻，如果被拦截目标实施其最大机动加速度，则能够产生足够大的脱靶量。但是，这一最佳时刻是与拦截系统的时间常数等有关的。通常，目标是不知道拦截系统参数的，因而周期性的改变速度的大小和方向是目标的一种最佳生存策略 [5]。

$$h = \frac{L_j}{k}$$

标准螺旋线的参数方程如下:

$$\begin{cases} p_x = r \cos \omega t \\ p_y = r \sin \omega t \\ p_z = v_s t \end{cases} \quad (18)$$

令 $\theta = \omega t$ 则得到:

$$\begin{cases} p_x = r \cos \theta \\ p_y = r \sin \theta \\ p_z = b \theta \end{cases} \quad (19)$$

此时

$$b = \frac{v_s}{\omega}$$

螺距为

$$h = 2\pi b$$

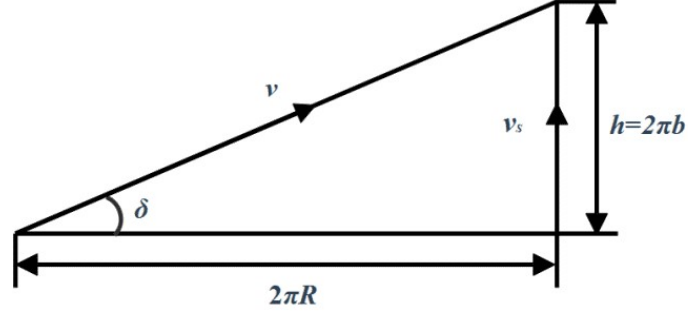


图 1: 螺旋侧面展开图

将螺旋图沿侧面展开，其形状如图所示1

$$\delta = \arctan \frac{b}{r}$$

$$v_s = v \sin \delta$$

$$b = \frac{v_s}{\omega} = \frac{h}{2\pi k}$$

在螺旋横截面上，导弹沿螺旋线运动产生的离心过载大小为:

$$n_l = \frac{r}{g} \omega^2$$

将该离心过载在螺旋机动坐标系中进行分解，得到沿 y_L 轴和 z_L 轴的过载控制分量为:

$$n_{cy} = -\frac{r}{g} \omega^2 \sin \omega t + 1 = n^*_y$$

$$n_{cx} = -\frac{r}{g} \omega^2 \cos \omega t = n^*_z$$

导弹相对对面的坐标为:

$$y^* = H_0 + r \sin \omega t$$

$$z^* = z_L = r \cos \omega t$$

由质心变化产生的过载控制信号为:

$$\bar{n}_{yH} = k_H |y - y^*|^\alpha \operatorname{sgn}(y - y^*) + k_H \dot{y}$$

$$\bar{n}_{zp} = k_z |z - z^*|^\beta \operatorname{sgn}(z - z^*) + k_z \dot{z}$$

4.1.5 模型求解

1.发射段和中段的轨道模型

微分方程的初值为：

$$v_x(0) = v \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma)$$

$$v_y(0) = v \sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)$$

$$p_x(0) = x_b^1$$

$$p_y(0) = y_b^1$$

取 $V_E = 2.459298$, $M = 0.009907$

采用卡尔曼滤波法对进行弹道导弹目标跟踪，将进行离散化和线性化，得到状态方程：

$$X_{k+1} = F_k X_k + \omega_k$$

其中 F_k 为状态转移矩阵， ω 为噪声。利用Simulink仿真得到的发射段和中段的三维弹道轨迹如下图2

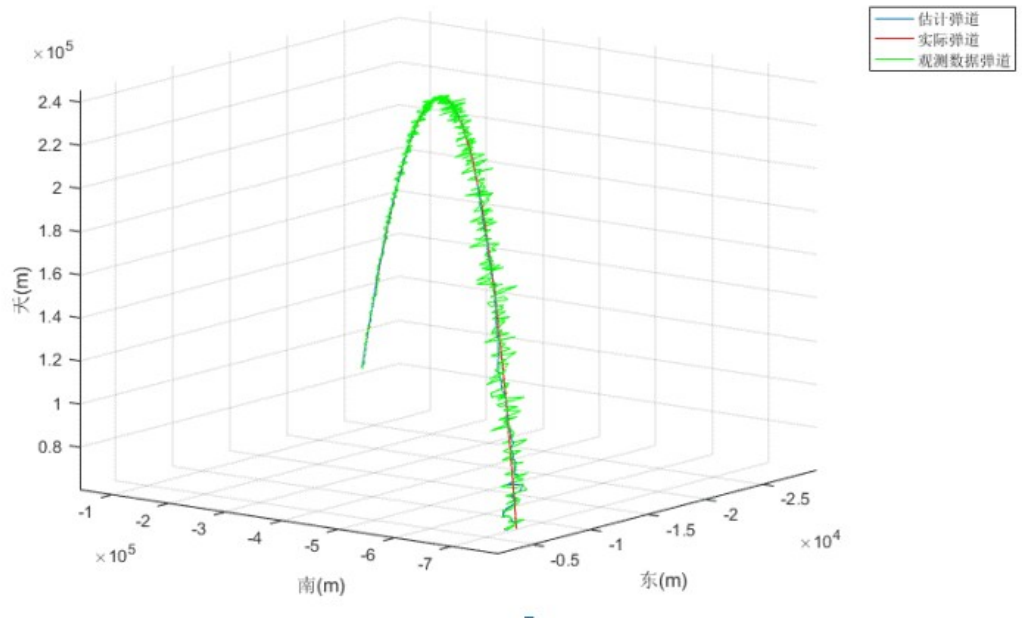


图 2: 发射段和中段的三维弹道轨迹

导弹飞行过程中的区噪声见下图3

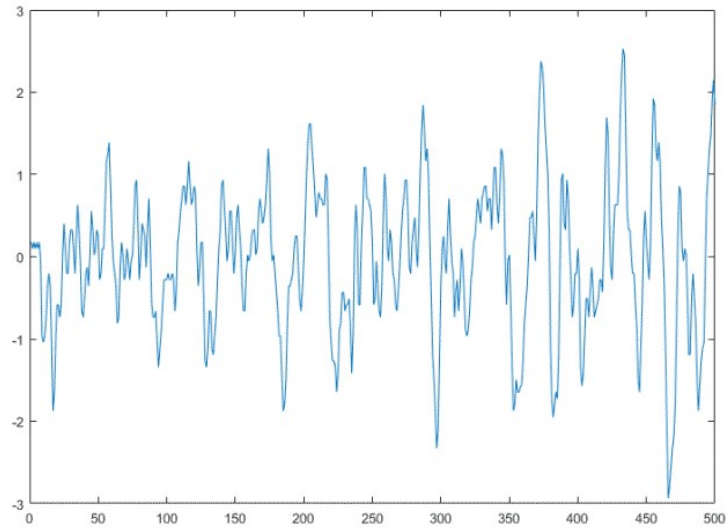


图 3: 导弹飞行过程中的区噪声

2.末段的轨道模型

求解时需预先设计螺旋机动的形式，即设定参数螺旋底圆的半径 r 、螺旋次数 k 以及螺旋机动的距离 L_J 的值。利用公式分别预先计算出 b 、 δ 、 v_s 、 ω 等参数装定在弹上控制系统中，在导弹飞行过程中再实时解算出过载控制信号及由质心变化产生的过载信号，利用这些过载信号控制导弹作螺旋机动。

设定 $r=500\text{m}$ 、 $k=5$ 、 $L_J=20\text{km}$ ，已知导弹速度为，对导弹的运动进行仿真，可得螺旋机动的立体原理图4 及其仿真效果图5

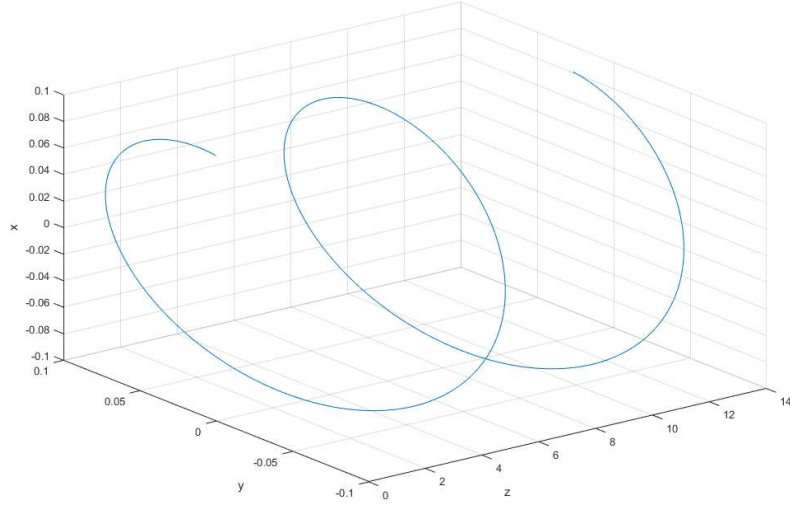


图 4: 螺旋机动原理图

4.2 反舰导弹轨道的动态模型

4.2.1 思路分析

精确制导武器中，在给定目标运动规律、导弹飞行速度变化和引导方法的条件下，通常略去导弹和制导系统的惯性，将导弹当作可控制的质点时，确定出的导弹飞向目标的弹道为理想弹道 [3]。目前常用的导引法是比例导引法，但随着制导精度要求的提高，理想弹道和比例导引法已不能满足要求。本文结合最优控制理论并根据比例导引差分方程，绘制出了可直观显示的弹道特性的三维弹道，计算了导弹与目标的遭遇时间，并对结果进行了比较分析。

4.2.2 模型建立

比例导引法是指在导弹导向目标过程中，导弹的速度向量的旋转角速度 $\dot{\theta}$ 与目标视线的旋转角速度 $\dot{\omega}$ 成正比的导引方法 [6],见图6。其导引方程为：

$$\dot{\theta} = K\dot{\omega}$$

其中K 为比例系数。

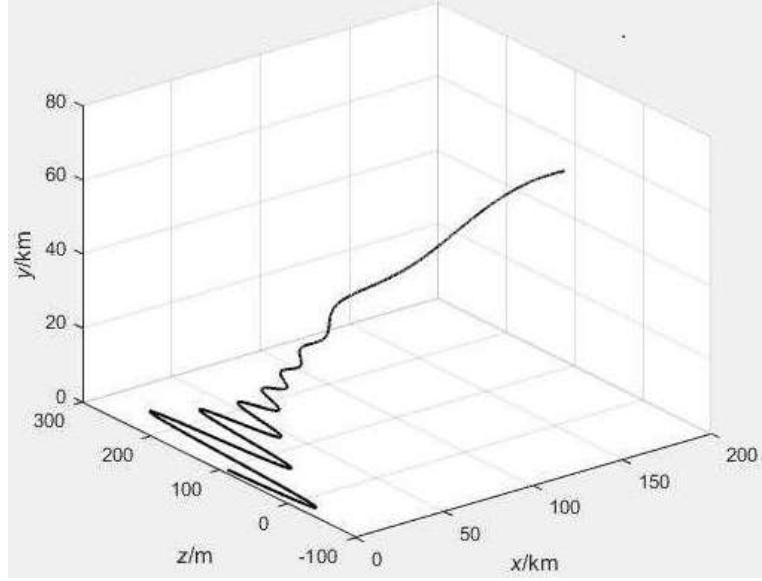


图 5: 螺旋机动仿真效果图

导弹与目标在同一平面中运动, $M_{k-1}M_k$ 表示导弹在一个时间间隔内运动的距离, $T_{k-1}T_k$ 表示目标在一个时间间隔内运动的距离, 大小为 S_t , 作 $M_{k-1}M_k$ 的平行线 $M_K B$ 。设 $M_{k-1}M_k = c$, $AM_{k-1} = c_1$, $AT_{k-1} = c_2$, $\angle AM_{k-1}T_{k-1} = \alpha k - 1$ 。

经典的比例导引制导律方程为 [3]

$$\begin{cases} q_k = q_{k-1} + \Delta q \\ \theta_k = \theta_{k-1} + K \Delta q \\ \alpha_k = \theta_k + q_{k-1} \end{cases} \quad (20)$$

目标和导弹的直角纵坐标的差分方程为

$$\begin{cases} x_1(k) = x_t(k-1) + \frac{c_2^2}{S_t^2} [x_t(k) - x_t(k-1)] \\ y_1(k) = y_t(k-1) + \frac{c_2^2}{S_t^2} [y_t(k) - y_t(k-1)] \\ z_1(k) = z_t(k-1) + \frac{c_2^2}{S_t^2} [z_t(k) - z_t(k-1)] \\ x_m(k) = x_m(k-1) + \frac{S_m}{c_1} [x_t(k) - x_m(k-1)] \\ y_m(k) = y_m(k-1) + \frac{S_m}{c_1} [y_t(k) - y_m(k-1)] \\ z_m(k) = z_m(k-1) + \frac{S_m}{c_1} [z_t(k) - z_m(k-1)] \end{cases} \quad (21)$$

导弹与目标比较近时, 用 $\angle AM_{k-1}T_{k-1}$ 近似 Δq_{k-1} 时误差较大, 因此需要校正, 即

$$c_3 = \sqrt{(c_1 - s_m)^2 + (c_2 - s_t)^2 + 2(c_1 - s_m)(c_2 - s_t)\cos(\alpha + \beta)} \quad (22)$$

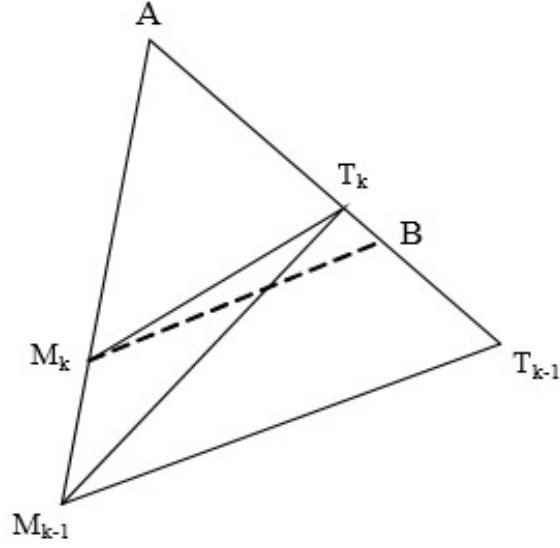


图 6: 比例导引示意图

$$\Delta q = \alpha - \arccos \frac{(c_1 - s_m)^2 + c_3^2 - (c_2 - s_t)^2}{2(c_1 - s_m)c_3} \quad (23)$$

可在进行差分迭代计算一次。

当系统考虑弹体惯性时，将弹体按二阶振荡环节处理，并假设弹体采用了人工阻尼装置，弹体最佳阻尼比 $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。考虑弹体动态特性的二次型最优制导律为：

$$\dot{\theta} = K_1(t)\dot{q} + K_2(t)\dot{\theta} + K_3(t)\ddot{\theta} \quad (24)$$

式中，

$$K_1(t) = \frac{3v_c[(t_f - t)^3 - \frac{\sqrt{2}}{q}(t_f - t)^2]}{K_d[(t_f - t)^3 - \frac{3\sqrt{2}}{q}(t_f - t)^2 + \frac{6(t_f - t)}{q^2} - \frac{15\sqrt{2}}{4q^3}]}$$

$$K_2(t) = \frac{\frac{3}{\omega}(t_f - t - \frac{\sqrt{2}}{\omega})[\sqrt{2}(t_f - t) - \frac{1}{\omega}]}{K_d[(t_f - t)^3 - \frac{3\sqrt{2}}{\omega}(t_f - t)^2 + \frac{6(t_f - t)}{\omega^2} - \frac{15\sqrt{2}}{4\omega^3}]}$$

$$K_3(t) = \frac{\frac{3}{\omega^2}(t_f - t - \frac{\sqrt{3}}{\omega})^2}{K_d[(t_f - t)^3 - \frac{3\sqrt{2}}{\omega}(t_f - t)^2 + \frac{6(t_f - t)}{\omega^2} - \frac{15\sqrt{2}}{4\omega^3}]}$$

其中， K_d 为最优制导律系数， ω 为二阶系统固有频率。

4.2.3 模型求解

首先需要对航母的航行轨迹进行建模。由题意知，航母一直向正南方行驶，且航速为32 节,约为59.264km/h(16.462m/s)，航母的初始坐标 $(\theta_0, \varphi_0, 0)$ ，其中 $\theta_0=123^\circ 45'0''$, $\varphi_0=25^\circ 39'0''$ 。因为航母一直向南航向，且可以将航母的航行视为质点运动，运动的参数方程为：

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 - at \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases} \quad (25)$$

其中a表示航母运动的角速度，且常数 $a = 16.462/6300000 = 2.61 \times 10^{-6}$ ，单位为度每秒($^\circ/s$)。由于之前模型是基于0-xyz坐标轴建立的，因此要对上述方程进行坐标变换，变换公式如下：

$$\begin{cases} x = R \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \cos \varphi \\ y = R \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \sin \varphi \\ z = R \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{cases} \quad (26)$$

考虑到弹体的二阶振荡环节的特性后，最佳导引律的主要项是 $K_1(t)\dot{q}$ ，这是变系数比例导引。

当导弹离目标较远时， $K_1(t)$ 基本上不随时间而变，因此这一段可看作常数比例导引。当导弹接近目标时， $K_1(t)$ 随时间变化比较剧烈。但当 $K_1(t)$ 剧烈变化，导弹已经进入末段轨道。可以事先设定当导弹与航母的距离为20km内时导弹进入末段轨道，也就是模型一中的螺旋末端轨道。因为航母的动态坐标由卫星和无人机实时提供给指挥中心，因此可以在中段对进行轨道不断地修正，再结合末段的螺旋机动轨道可以达到有效突防的效果。考虑弹体动态特性的二次型最优制导律，根据 [7] $K_1(t)$ 、 $K_2(t)$ 、 $K_3(t)$ 的变化关系曲线可以看出， $K_2(t)$ 和 $K_3(t)$ 与 $K_1(t)$ 相比较，小三到四个数量级，故在具体算法中可以忽略。最后的仿真结果验证了其可行性。其中，通过测试发现参数选取为 $K_d = 0.317$ 、 $\omega = 10$ 时，可达到不错的效果。

导弹的三维空间导引图见图7，同时给出了反舰导弹的纵向和横向加速度见8，导弹与航母三维弹道仿真结果见图9，这里仅显示导弹从刚进入中段到击中航母的弹道轨迹。其他一些参数见图10和图11。

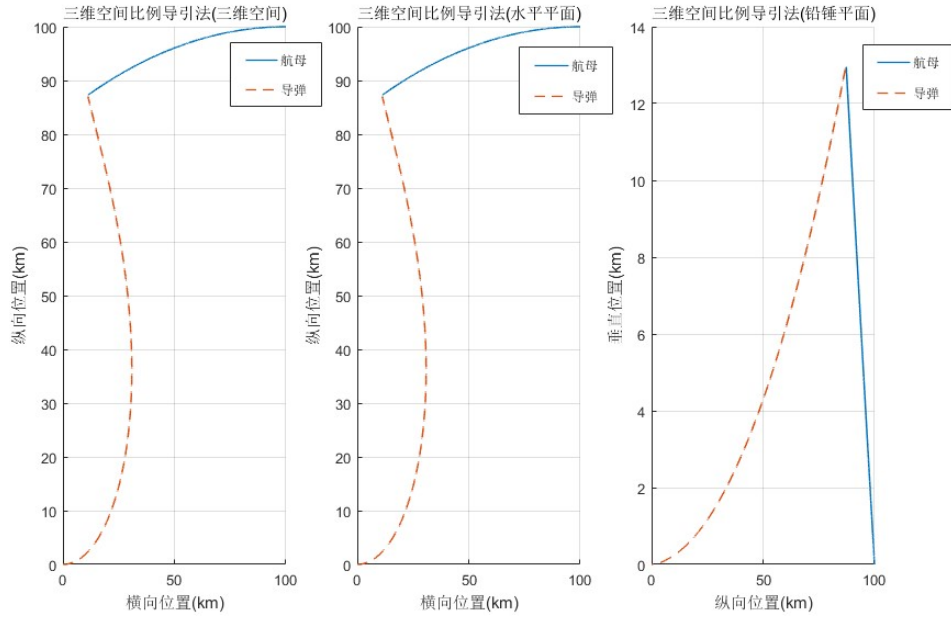


图 7: 三维空间导引图

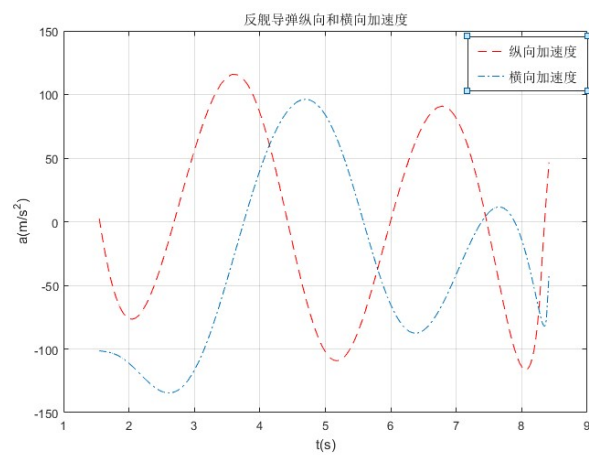


图 8: 反舰导弹的纵向和横向加速度

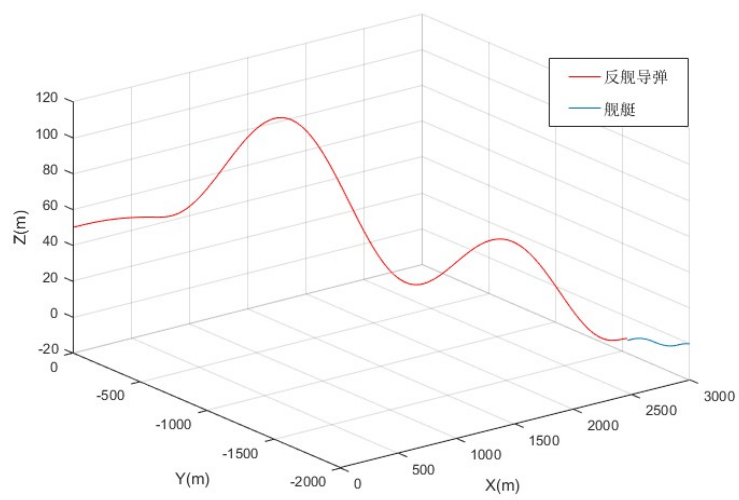


图 9: 导弹与航母三维弹道仿真

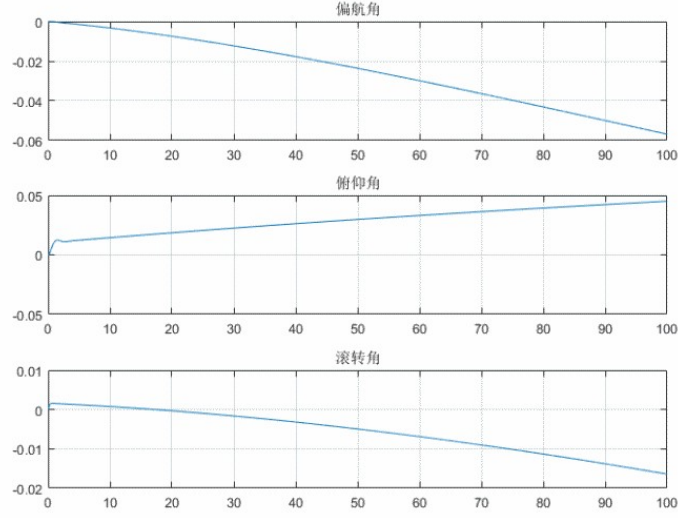


图 10: 偏航角、俯仰角、滚转角

5 导弹轨道曲线的误差分析和命中率分析

5.1 误差的来源

1. 动力学方程误差

在建立反舰导弹发射段的动力学方程时，我们的模型忽略了柯氏力以及牵连惯性力的影响，但根据张锋 [4] 的研究可知,考虑表示力（柯氏力以及牵连惯性力）的模型如下：

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= v_x \\
 \dot{p}_y &= v_y \\
 \dot{p}_z &= v_z \\
 \dot{v}_x &= -\frac{\mu p_x}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} + (2\omega v_y + \omega^2 p_x) \\
 \dot{v}_y &= -\frac{\mu p_y}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} + (-2\omega v_x + \omega^2 p_y) \\
 \dot{v}_z &= -\frac{\mu p_z}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

其中， ω 为地球自转的角速度大小，将其与 上小节的没有加入表视力加速度的动力学模型仿真对比知：随着射程的增加，落点差别很大，在地心固定直角坐标系中建立弹道导弹动力学模型时不能忽略表视力加速度，但实际上在之前的模型中我们忽略了表视力的影响。

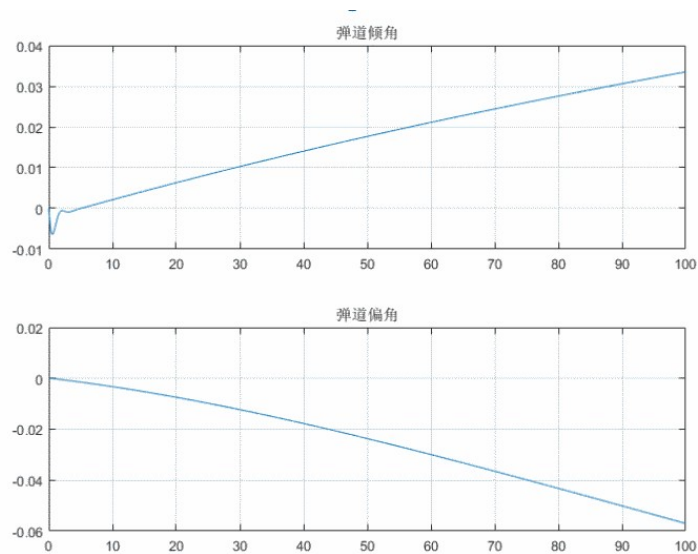


图 11: 弹道倾角、弹道偏角

2. 海浪影响

在导弹末段螺旋激动模型中，既需要改变纵向过载控制信号，又要求改变侧向过载控制信号。而且它对纵向上的飞行高度要求非常严格，必须保证导弹在低空作螺旋运动时不致于掉高击水，因此必须严格控制飞行高度 [5]。反舰导弹飞行过程中，当海面波动时无线电高度表的测量高度会因测量面的变化而变化，从而对导弹的高度控制产生影响，特别是在较大风浪时，导弹有可能因触浪而导致反舰导弹掉海 [8]。

3. 建模不确定性影响

由于反舰导弹在飞行过程中，其飞行运动参数受干扰或建模不确定性等影响，其运动参数需要进行一定的摄动。

5.2 命中率分析

本节主要是在前面模型和仿真基础上，采用蒙特卡洛打靶仿真对试验结果进行分析，得到如下结论见图12：我们将航母的甲板表面中心点视为理论弹道的落点，把航母视为一个靶平面，导弹的实际弹道相对于理论弹道的偏差称为脱靶量，即靶平面内的制导误差。以仿真次数为10000次为例，脱靶量在 $[0m, 15m]$ 占比60%，在 $[0m, 25m]$ 占比71%，在 $[0m, 35m]$ 占比77%，在 $[0m, 50m]$ 占比85%，综合评估命中率在88%，考虑到航母自身的宽度（50m）和长度（335m），我们将航母视为一个 $335m \times 50m$ 的靶子，在以宽度范围内的命中率达到70%左右，在长度范围内的命中率估算值接近90%，综合评估命中率在88%,见图13。

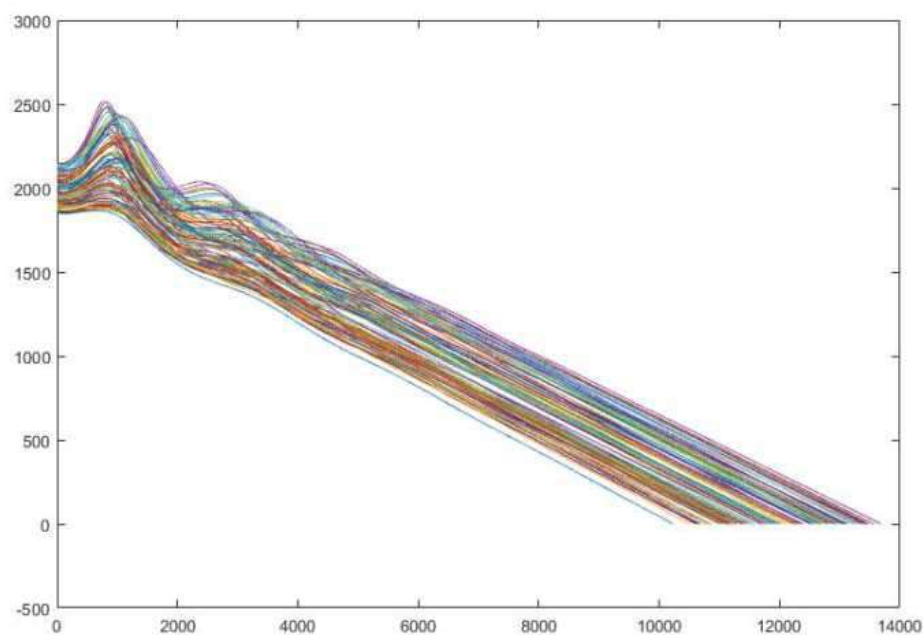


图 12: 10000次“蒙特卡洛”打靶试验图

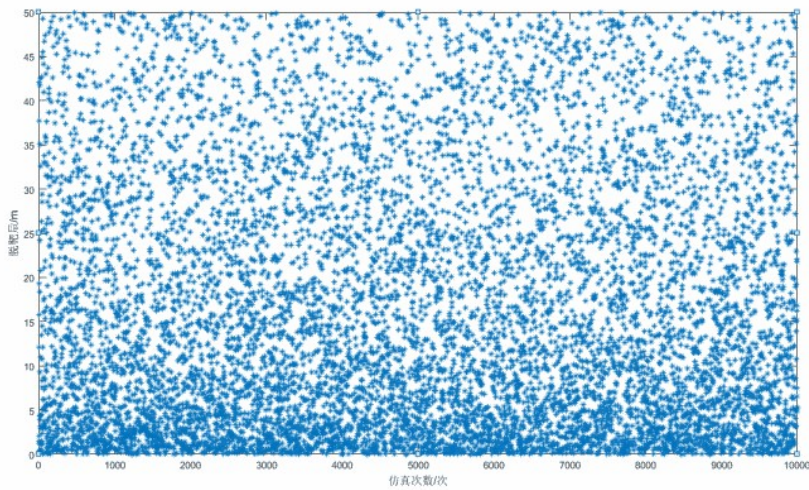


图 13: 导弹脱靶量与仿真次数的关系图

6 模型评价

6.1 模型优点

1. 反舰导弹各个阶段的模型大多建立在前人研究的基础之上，均有严格的数学理论基础。
2. 对于导弹发射段的建模是建立在分析了弹道导弹运动特性的基础上，并推导了状态方程。之后仿真了卡尔曼滤波法跟踪算法，同时文中给出了弹道导弹跟踪建模的具体方法和步骤。
3. 本文在建立模型的基础之上，采用Matlab/Simulink 仿真求解，并给出了三维的导弹轨道曲线，十分直观、形象。
4. 针对导弹的飞行轨道我们分三段分别建模讨论，这便于之后的模型进一步推广和深入的研究。

6.2 模型缺点

1. 在建立反舰导弹发射段的动力学方程时，我们的模型忽略了柯氏力以及牵连惯性力的影响，这降低了模型的精确度。
2. 在微分方程求解时采用Simulink 仿真，但程序实现起来比较复杂。

7 未来的工作

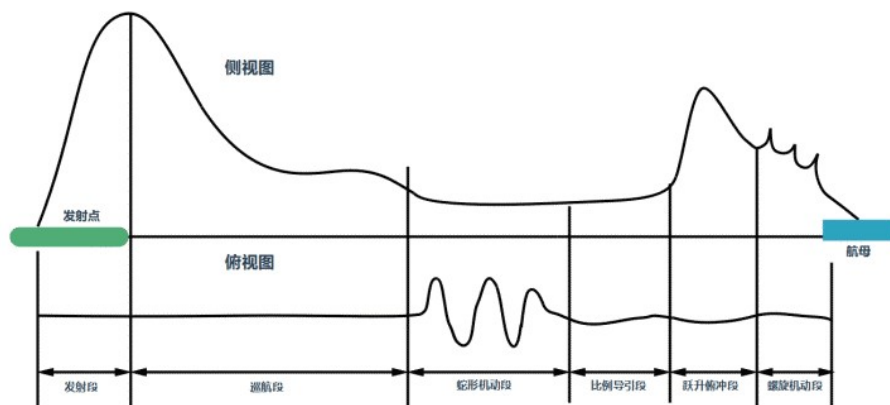


图 14: 突防能力更强的反舰导弹轨道模型示意图

考虑到我们之前建立模型作了不少简化，在以后可以进一步使模型更加精确。目前有许多这方面的研究，但受到时间的限制我们不得不做出额外的假设来简化模型，以此方便我们的仿真程序实现。

为了对抗反舰导弹带来的威胁，舰艇的反导防御体系在不断加强，特别是舰上的密集火炮拦截系统是在近程对付反舰导弹的有效手段，中段单一的比例导引法已很难突破舰艇的防御系统。为避开舰上密集火力的拦截，增强突防能力，反舰导弹必须在其弹道末端具备一定的机动性能。目前有多种机动弹道可供选择，如：跃升、蛇行和螺旋等 [6]。本文采用的是螺旋机动，但在之后可以进一步讨论不同的末段机动弹道的突防效果。图14是一种突防能力更强的导弹轨道模型示意图，其中段轨道结合多种制导和机动方式。

参考文献

- [1] 李毅, 刘晶, 邵锡军. 战术弹道导弹弹道仿真建模技术研究. 弹箭与制导学报, 2011, 31 (2) :145-148
- [2] 潘越, 周树德. 弹道导弹弹道建模与仿真技术研究. 计算机仿真, 2014, 31 (9) :71-74
- [3] 陈宇强, 赵育善. 导弹最优制导律弹道仿真分析. 指挥控制与仿真, 2007, 29 (3) :91-93
- [4] 张峰, 田康生, 息木林. 弹道导弹运动建模与跟踪研究. 弹箭与制导学报, 2012, 32 (3) :53-58
- [5] 张翼飞, 邓方林, 顾文锦. 反舰导弹末端机动弹道设计及弹道仿真. 计算机仿真. 2005, 22 (2) :19-22
- [6] 李鹏,胡炎. 反舰导弹典型运动建模与仿真. 计算机仿真, 2010, 27 (5) :46-48
- [7] 陈佳实. 导弹制导和控制系统的分析与设计[M]. 北京: 宇航出版社, 1989
- [8] 范作娥, 顾文锦, 姜鹏, 马培蓓. 基于蒙特卡洛法的反舰导弹末端机动突防效果研究. 海军航空工程学院学报, 2010, 25 (3) :241-246