

陆基导弹打击航母的数学建模与算法分析

摘要

海洋作为战争的重要战场，与海洋战争相关的武器需要得到重视与发展。陆基反舰导弹是克制敌方军舰的有效武器。反舰导弹属于近程导弹，采用自主式制导、自控飞行，当导弹进入目标区，导引头自动搜索、捕捉和攻击目标。反舰导弹打击航母的时间和命中率受到多种因素的影响。本文分别对导弹的发射段、中段、末制导段进行合理的建模与仿真，并设计导弹飞行的中段动态模型，搭建一套能让导弹以最快时间并难以拦截地打击航母的轨道曲线。

针对问题一，由于导弹轨道较为复杂，在一个坐标系内研究有难度，因此我们对发射段、中段、末段三段分别研究。在发射段，我们认为导弹是正对着航母发射的。反舰导弹主要经历了助推器脱落前后两个过程。随着发射方式的不同，助推器脱落前导弹轨迹并不是严格的抛物线，但由于研究这段轨迹对导弹打击航母的整段曲线意义不大，因此我们将其近似看作抛物线。于是我们根据抛物线顶点的高度计算得出含参数的发射轨迹的方程。

对中段，我们将航路看作直线和转向圆弧的连续光滑曲线。由于对方雷达探测点未知，并且导弹实际飞行时与理想规划会有误差，因此我们不选择几何规划的方法，而选取整条航程的平均被拦截概率和航程作为目标函数，用转向点的个数、每个转向点的转向角度以及每段直线飞行距离做决策变量，采用遗传算法做航路规划。得到给定转向点个数下的最优航路。并对模型进行了仿真分析。

对于末端轨迹，我们采用目前较为优化的基于有限时间的自动制导律，结合题目所给条件，用 *MATLAB* 进行弹道仿真，给定参数值，得到一条参考航路轨迹曲线。

针对问题二，我们先不考虑导弹受威胁的情况，建立以导弹中段起点为原点，以航母运动方向为极轴的极坐标系。采用比例引导法，给出具体的导弹相对目标航母的相对运动方程，给定不同的参数值，得到对应导弹的打击轨道曲线，根据不同战术，可调整参数值，适应实际作战的需要。若结合问题一中静态轨道曲线对威胁规避的考虑，可将每次航路转向点设为原点，使动态导引穿插在转向点之间，因此问题二可作为问题一的补充。

针对问题三，我们结合问题一和问题二的求解过程，分析并给出了影响导弹轨迹和命中率的参数指标，经过分析，我们的模型能有效地降低系统误差，提高命中率。

关键字： 反舰导弹 航路规划 遗传算法 轨道模型 多目标优化

目录

一、 问题重述.....	1
1.1 问题背景.....	1
1.2 问题提出.....	1
二、 模型的假设.....	1
三、 符号说明.....	1
四、 初始状态下的静态轨道模型.....	2
4.1 总述.....	2
4.2 发射模型.....	2
4.2.1 模型分析	2
4.2.2 模型假设	3
4.2.3 模型求解	3
4.3 中段模型.....	4
4.3.1 模型分析与被拦截指标的选取	4
4.3.2 第一个转向点的约束条件	5
4.3.3 最后一个转向点的约束条件	5
4.3.4 航向点与下一个航向点的约束条件	6
4.3.5 中段总航程的约束条件	6
4.3.6 平均被拦截概率的计算	7
4.3.7 目标函数的建立	8
4.3.8 遗传算法	8
4.3.9 模型求解	9
4.3.10 结果分析	9
4.4 末段模型.....	10
4.4.1 模型分析	10
4.4.2 模型建立	10
4.4.3 模型求解	11
4.4.4 模型解释	12
五、 中段动态模型.....	12
5.1 模型分析.....	12
5.2 相对运动方程的建立.....	13
5.3 模型求解.....	13
5.4 模型解释.....	14
六、 轨道曲线误差分析和命中率分析.....	15
6.1 航路转向点指标.....	15
6.2 转向角指标.....	15
6.3 航程指标.....	15
附录 A 问题一中段仿真程序—matlab 源程序	18
附录 B 问题二仿真程序—matlab 源程序.....	19

一、问题重述

1.1 问题背景

火箭军是保卫海疆主权的战略力量，导弹是国之利器。陆基反舰导弹属于近程导弹，采用自主式制导、自控飞行，当导弹进入目标区，导引头自动搜索、捕捉和攻击目标。反舰导弹具有较强的导弹突防能力，能够高效完成摧毁航母的任务。问题针对陆基导弹打击航母的数学建模与算法设计展开。导弹车和航母的坐标位置已知，导弹的发射速度和末端最高速度已知，不同的中段轨道设计直接影响导弹的突防能力。

1.2 问题提出

(1) 建立初始状态下，反舰导弹打击航母的静态轨道模型，即 $t = 0$ 时，连接导弹初始位置与航母坐标之间的轨道曲线模型；

(2) 在给定航母的航向和速度的航行状态下，设计导弹飞行的中段动态模型方程和算法步骤。中段通常以发射段的抛物线顶点为起点；

(3) 对设计的导弹打击航母的轨道曲线进行误差分析和命中率分析。

二、模型的假设

- 天气适宜导弹发射；
- 海面平静, 无大量大的岛屿；
- 导弹具有良好的性能，能顺利完成转弯等动作；
- 导弹燃料充足；
- 为了节省燃料且使导弹可以斜抛最长的水平距离，假定助推器在导弹仰角为 45° 时脱落；
- 中段大部分在稠密大气层外，空气阻力过小，可忽略，导弹的水平速度可看作不变；
- 导弹在中段绕地球圆周飞行，距离过短，近似看作导弹在平行于地面的平面上飞行。

三、符号说明

符号	意义
A	抛物线顶点
H	抛物线顶点距地面的高度
B	目标航母位置
g	重力加速度

$P_i(i = 1, 2, \dots, n)$	导弹转向点
P_0	中段目标点，即末段雷达开启点
R_{min}	导弹的最小转向半径
d_m	导弹转向后达到稳定平飞的最短距离
v_m	导弹飞行速度
$\alpha_i(i = 1, 2, \dots, n)$	导弹转向角
α_{max}	导弹最大转向角
l	导弹末制导时雷达的有效工作半径
S	导弹中段总航程
S_{max}	导弹的最大有效射程
$S_i(i = 1, 2, \dots, n)$	从转向点 P_{i+1} 到下一个转向点 P_i 的折线长度

四、 初始状态下的静态轨道模型

4.1 总述

建立初始状态下反舰导弹打击航母的静态轨道模型，就是不考虑航母的运动，认为航母禁止在海面上。我们需要在一个有界的三维空间内规划航路曲线，以求在最快时间内、且在被拦截概率最小的情况下，精准打击航母。也就是规划出导弹在发射段、中段、末段的轨道曲线，且每一段都需考虑到敌方的拦截系统。因此，我们分别给出导弹三段的轨道曲线。

4.2 发射模型

4.2.1 模型分析

首先，导弹在发射段以一定角度发射，轨道是一个抛物线。考虑到对方的雷达探测系统的探测范围，我们应尽量避免被探测到，因此抛物线的中点不宜距离发射中心太远，也就是发射时导弹的仰角不宜太小。所以，我们先给出带调节量的抛物线方程，调节量有一定的调节范围，该调节范围可以根据后面的中段和末段的飞行距离给出。

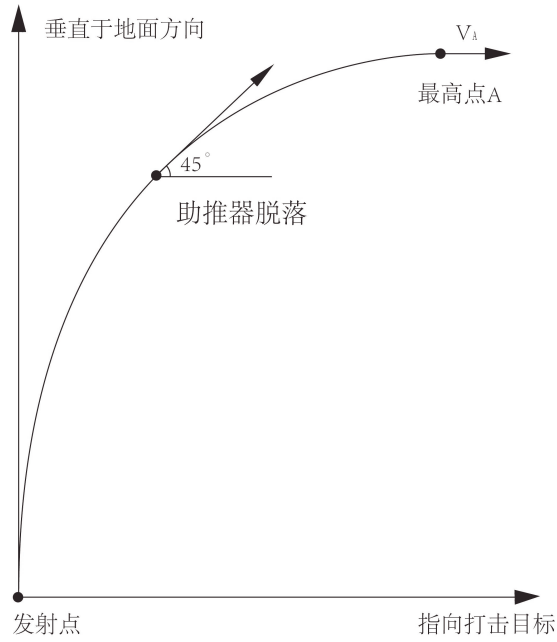


图 1 发射段抛物线轨迹

4.2.2 模型假设

- 为了减少能耗，假设导弹在发射车与航母连线的竖直平面内发射，即在抛物线顶线处，导弹正对着指向航母的方向；
- 由于在中段遥控制导过程中，导弹速度依然需要指挥中心发出的指令的调节，所以抛物线顶点处导弹的速度与真实值有微小误差对中段的轨迹分析影响不大，那么为了简化计算，在助推器脱落至导弹到达抛物线顶点的过程中，忽略空气阻力，导弹只受重力的影响，则在抛物线顶点处导弹速度为 $250\sqrt{2}\text{m/s}$ 。

4.2.3 模型求解

以发射车为原点，发射车与航母连线为 x 轴，竖直向上为 y 轴建立平面直角坐标系，如图 1 所示。由抛物线顶点 A 高度为 H ，可列运动学方程：

$$\begin{cases} y' = v_y - gt^2 \\ x' = v_x t \end{cases}$$

其中， x', y' ——抛物线顶点距助推器脱落位置的水平距离和竖直距离

v_x, v_y ——助推器脱落时导弹的水平 and 竖直速度

g ——重力加速度

解得 $y' = -\frac{g}{v_x^2}x'^2 + \frac{v_y}{v_x}x'$ ，则可设抛物线方程为 $y = -\frac{g}{v_x^2}x^2 + bx$ ，由抛物线顶点的

高度为 H ，可解得

$$y = -\frac{g}{v_x^2}x^2 + \frac{2\sqrt{Hg}}{v_x}x \quad (0 < x < v_x\sqrt{\frac{H}{g}}) \quad (1)$$

公式 (1) 即为发射段的轨道曲线方程，其中 H 是调节参数。

4.3 中段模型

4.3.1 模型分析与被拦截指标的选取

导弹从抛物线顶点开始进入中段。由导弹发射学可知，中段是巡航阶段，大部分在稠密大气层外，空气阻力可忽略，因此导弹的水平速度可近似看作不变。而由于重力以及稀薄空气的影响，导弹在中段绕地球圆周飞行，与地球圆周长相比距离过短，因此近似看作导弹在平行于地面的平面上飞行。导弹在此平面内做速度大小不变的曲线运动。

为了让导弹满足实际作战的需要，即在最短的时间内、且在被拦截概率最小的情况下打击航母，导弹在中段巡航的时间需要尽量短，由于导弹速度一定，也就是导弹在中段的航程尽量短。但考虑到对方拦截系统的探测，所以我们要规划出难以拦截，同时航程又尽量短的航路。因此我们规划航路时考虑两个要素：航程和难以拦截。

由于对方的导弹拦截系统的雷达探测点未知，若用简单的几何原理规划，让导弹走探测区的切线的方法，来绕开对方的探测区，在实际作战中，需要先知道雷达探测点的位置和探测范围，再进行几何规划，这种方法有一个致命缺陷在于没有考虑到导弹飞行的航向误差，若由于误差导致导弹进入了雷达探测区，那么被拦截的概率就不可控了。

因此，我们选用被拦截概率作为指标分析，使用遗传算法，选出在规划空间中平均被拦截概率最小的航路。

导弹的航路是一条曲线，为了便于分析和计算机的计算，我们将其离散成一个个位置点。将位置点连接后可以得到导弹的一条简化飞行航路，但由于导弹的航路是一条平滑的曲线，因此，我们将每一个转弯理想化为一段圆弧，如图 2 所示。

与圆弧相切的两条线的延长线交点定义为转向点 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，且 P_n 为第一个转向点， P_1 为最后一个转向点。导弹由于性能的限制，不能进行半径过小和转向角过大的转向，因此必然存在转向最小半径 R_{min} 和最大转向角 α_{max} 。为了模型的简化，并且使模型更具一般性，我们规定导弹每次都以最小半径转向。

为了保证末段制导的效率，即为了确保导弹在进入末段时雷达能检测到航母，中段的目标点应在以航母为圆心，雷达监测范围 l 为半径的圆上。

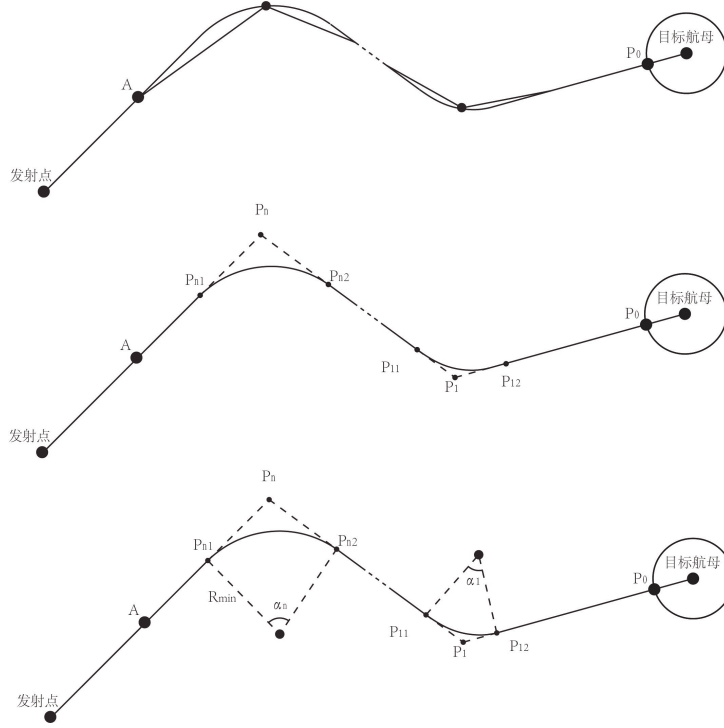


图 2 中段航路示意图

4.3.2 第一个转向点的约束条件

为了保证导弹在第一个航路转向点能够顺利转向，从抛物线顶点 A 到第一个航路转向点 P_n 之间的距离应该确保导弹能够稳定平飞。

如图 2 所示，抛物线顶点 A 到第一个航路转向点 P_n 之间的水平距离 S_n 应满足

$$S_n \geq d_m + R_{min} \tan \frac{\alpha_n}{2} \quad (2)$$

4.3.3 最后一个转向点的约束条件

为了保证导弹末制导时能有效地搜索目标，实现精准打击，提高命中率，导弹在进入末制导时应处在稳定平飞状态。同时为了缩短末制导的时间，也就是缩短敌方的反应时间，极大地减小被拦截的概率，提高命中率，导弹在雷达开启时应该保持一定的搜索航向。由几何学原理可知，导弹在进入末制导时，若正对着指向目标，飞行时间最短。因此我们预设导弹在进入末制导时，最理想的状态是稳定平飞且正对着航母。

如图 2 所示，导弹的雷达开启点 P_0 应在最后一个航路转向点 P_1 与目标航母 B 的连线上。我们可以得到最后一个转向点 P_1 与航母 B 之间的水平距离的约束条件：

$$S_{BP_1} \geq l + d_m + R_{min} \tan \frac{\alpha_1}{2} \quad (3)$$

4.3.4 航向点与下一个航向点的约束条件

由于导弹性能的限制，导弹转向后不能立刻进行下一次转向，要有一段时间调整和稳定航向。因此为了能有效地进行下一次转向，同时减小转向带来的方向偏差，两次转向之间要有一段调整距离。

如图 2 所示，相邻两次转向点间的水平距离 S_i 需要满足：

$$S_i \geq d_m + R_{min} \tan \frac{\alpha_i}{2} + R_{min} \tan \frac{\alpha_{i+1}}{2} \quad (4)$$

4.3.5 中段总航程的约束条件

由于燃料的限制，导弹的总航程存在一个最大有效射程 S_{max} 。中段的总航程不应超过最大有效射程。

如图 2 所示，每个航路转向点处的圆弧长度和折线长度为：

$$S_{P_i} = R_{min} \cdot \alpha_i \quad (5)$$

$$S_{P_{i12}} = 2R_{min} \cdot \tan \frac{\alpha_i}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

计算导弹中段的总航程：

$$S = \sum_{i=1}^n S_i + S_{BP_1} - l + \sum_{i=1}^n (S_{P_i} - S_{P_{i12}}) \quad (7)$$

将式 (5)(6) 带入式 (7) 中，可得导弹中段总航程的计算公式：

$$S = \sum_{i=1}^n S_i + S_{BP_1} - l + R_{min} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 2 \tan \frac{\alpha_i}{2}) \quad (8)$$

公式 (8) 中， $\sum_{i=1}^n S_i + S_{BP_1} - l$ 为简化的分段直线航路，令 $S' = \sum_{i=1}^n S_i + S_{BP_1} - l$ ，则导弹中段总航程可表示为：

$$S = S' + R_{min} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 2 \tan \frac{\alpha_i}{2}) \quad (9)$$

导弹中段航程应不超过最大有效射程：

$$S \leq S_{max} \quad (10)$$

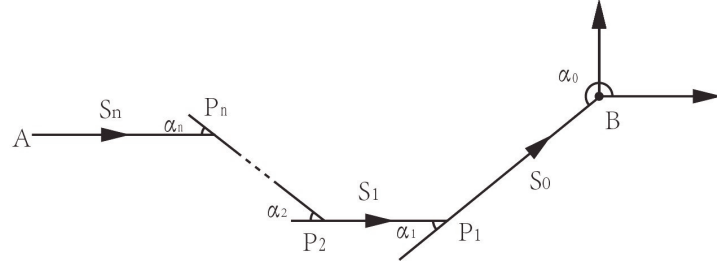


图 3 中段航路坐标系

4.3.6 平均被拦截概率的计算

以目标航母为原点，发射车与航母的连线为 x 轴正方向，平行于地面的平面上的垂线为 y 轴正方向，建立坐标系，如图 3 所示。则每一个转向点 P_i 的坐标为 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

为了计算的方便和简化，在计算被拦截概率时，我们用折线代替实际转弯的圆弧，因此导弹的航路可用一段段从转向点 P_{i+1} 到下一个转向点 P_i 的折线表示，即 S_i 。

为了表示上的统一性，设 x 轴逆时针转到 P_1 的角度为 α_0 ， $S_0 = S_{BP_1}$ ，其余转向角如图 3 所示。则转向点 P_1 的坐标为：

$$x_1 = S_0 \cos \alpha_0, y_1 = S_0 \sin \alpha_0$$

那么， P_2 的坐标为：

$$x_2 = x_1 + S_1 \cos(\alpha_0 + \alpha_1)$$

$$y_2 = y_1 + S_1 \sin(\alpha_0 + \alpha_1)$$

P_3 的坐标为：

$$x_3 = x_2 + S_2 \cos(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$y_3 = y_2 + S_2 \sin(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$$

以此类推， P_i 的坐标为：

$$x_i = x_{i-1} + S_{i-1} \cos\left(\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j\right) \quad (11)$$

$$y_i = y_{i-1} + S_{i-1} \sin\left(\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j\right) (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

设在点 (x, y) 处，导弹的被拦截概率为 $f(x, y)$ 。由于末段被拦截概率计算方法与中

段相同，故将末段的被拦截概率与中段一起考虑。从而设 \bar{P} 为整条航路的平均被拦截概率。有：

$$\bar{P} = \frac{\int_{S'+r} f(x, y) dl}{S' + r} \quad (13)$$

式中 $S' + r$ 根据上一节的定义，就是从抛物线顶点 A 到目标航母的简化航路的每段折线之和。

由参考书目 [3](P29) 可知，在有 m 个雷达探测点，坐标为 (x_j, y_j) 的情况下，

$$f(x, y) = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - e^{-(\frac{x-x_j}{50})^2 - (\frac{y-y_j}{50})^2}) \quad (14)$$

4.3.7 目标函数的建立

我们选取总航程 S 和整条航路的平均被拦截概率 \bar{P} 为优化目标，设

$$T = \mu_1 \frac{S}{S_{max}} + \mu_2 \bar{P} \quad (15)$$

式中, T 为总函数。用 S/S_{max} 减弱了航程与概率的量级不同导致目标无意义的影响, μ_1, μ_2 分别为总航程 S 和平均被拦截概率 \bar{P} 对航路选择的主观影响因子, 因人而异。且 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ 。在给定 μ_1, μ_2 的情况下, 最优航路应使函数 T 的值最小。

4.3.8 遗传算法

我们将一条参考航路看作一个个体。则其个体编码为 $S_0, S_1, \dots, S_n, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 。设 N 表示种群大小, x_i^k 表示第 k 代种群中第 i 个个体, $x_i^k = S_{i,0}^k, S_{i,1}^k, \dots, S_{i,n}^k, \alpha_{i,0}^k, \alpha_{i,1}^k, \dots, \alpha_{i,n}^k$ 。

对于个体 $x_i^0 (i = 0, 1, 2, \dots, N)$, 初始化为:

$$\begin{aligned} S_{i,j}^0 &= \frac{2[S_{max} - nd_m]X}{n} + d_m (j = 0, 1, 2, \dots, n-1) \\ \alpha_{i,0}^0 &= \alpha_c \\ \alpha_{i,j}^0 &= 2jX - j (j = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

式中, X 为 (0,1) 之间的均匀随机数。根据 $S_{i,j}^0, \alpha_{i,j}^0 (j = 0, 1, \dots, n-1)$ 和发射点坐标值, 可计算得到 $S_{i,n}^0$ 和 $\alpha_{i,n}^0$ 。

将参考航路的任一转向角度超过最大角度和航程超过导弹最大航程的参考航路都定义为非法航路, 并对其进行惩罚。对种群中的个体 $x_i^k (i = 1, 2, \dots, N)$ 按以下函数值进行降序排列:

$$f(x_i^k) = T - p_{Ang} F_{Ang} - p_{Dis} F_{Dis}$$

式中, T 为要优化的总目标函数; F_{Ang} 为个体 x_i^k 所对应的参考航路的第一个转向角是否

表 1 仿真结果

μ_2	\bar{P}	S/S_{max}	T
0.3	0.9698	0.6990	0.7802
0.7	0.9086	0.7150	0.8505

超过最大转向角度的标志, 当超过时 F_{Ang} 取值为 1, 否则取值为 0; F_{Dis} 为个体 x_i^k 所对应的参考航路的航程是否超过最大航程的标志, 当超过时取值为 1, 否则取值为 0。 p_{Ang}, p_{Dis} 为惩罚系数。

按线性排序计算个体的适应度之后, 再采用轮盘赌选择方式选择复制个体, 同时为了保存优良个体加快算法的收敛, 采用精英保存策略, 将当代种群中的最优个体直接复制至下一代。

遗传算法的变异选用均匀变异, 变异概率为 0.05, 交叉采用多点交叉算法, 交叉概率为 0.85。

4.3.9 模型求解

在 $350km \times 350km$ 的作战海平面内, 设定如下参数:

- (1) 中段开始点坐标为 $(-325, 211)$
- (2) 海域内有三个雷达探测点, 坐标分别为 $(-300, 155), (-100, 100), (0, 70)$
- (3) 转向点个数 $n=2$, 最大航程 $S_{max} = 550km$, 导弹转向后达到稳定平飞的最短距离 $d_m = 20km$, 初始化时 $\alpha_c = 250^\circ$

按以上条件分别取 $\mu_2 = 0.3, 0.7$ 仿真两次, 算法每次在 15 代稳定, 得到仿真结果如表 1 所示, 参考航路的折线图如图 4 所示。

4.3.10 结果分析

总函数的表达式中虽然用 S/S_{max} 在一定程度上削弱了航程与概率的量级不同对结果的影响, 但是 S/S_{max} 和被拦截概率都只是对满意度的近似, 因此仍然会导致由于影响因子的取值不同带来的总函数目标 T 在取值上的较大浮动, 如两次仿真的结果相差 0.0703, 这是正常现象, 我们只需求出在影响因子给定的情况下, 使得 T 最小的航路即可。

由仿真结果可知, 若被拦截的概率的影响因子 μ_2 过低, 则轨迹更近似为一条直线, 说明航程长短的影响过大, 模型趋向于选择最短的路径。而总转向点 n 越多, μ_2 越高, 模型则是趋向于选择能规避更多风险的航路。

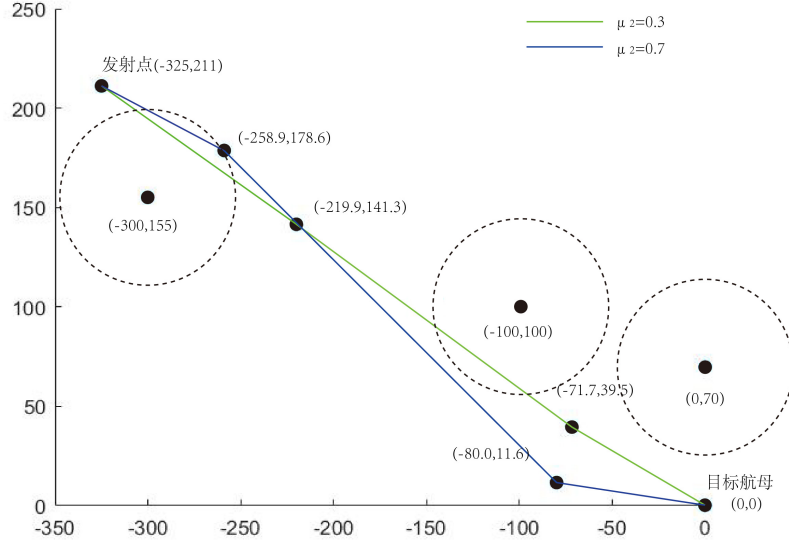


图 4 参考航路示意图

4.4 末段模型

4.4.1 模型分析

由于末段是自动制导，雷达工作范围和制导率都是极其复杂的，并且也都不是本题需要考虑的问题，因此我们参考目前命中率和速度相对最优的制导率，结合题目中给出的最大速度和工作时间的限制，调节参数，给出末制导的轨道曲线。

4.4.2 模型建立

末端制导过程中，我们考虑纵向拦截平面 Oxy 内弹目的相对运动，导弹与目标均视为质点，导弹在 M 点，目标在 T 点，导弹与目标的相对运动关系如图 5 所示。相关参数如表 2 所示。

由参考书目 [4](P100 – 103)，我们得到基于连续有限时间稳定理论设计的连续有限时间稳定制导律 (FTSG)：

$$a_c = \frac{-2\dot{r}x_2 + k_1 r \sin(x_2)|x_2|^\alpha + k_2 r \sin(\psi(x))|\psi(x)|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + \cos(\eta_t)a_t}{\cos(\eta_m)} + g\cos(\theta_m) \quad (16)$$

式中， $k_1, k_2 \in R^+, 0 < k_2 \leq k_1, \alpha \in (0, 1), \psi(x) = k_1 x_1 + \frac{1}{2-\alpha} \sin(x_2)|x_2|^{2-\alpha}$ 。

状态变量 $x_1 = q - q_d, x_2 = \dot{q}, a_c = a_m$ ，其中 q_d 为如下三角函数的解：

$$V_m \sin(q - \theta_m) - V_t \sin(q - \theta_t) = 0, |q - \theta_m| < \pi/2$$

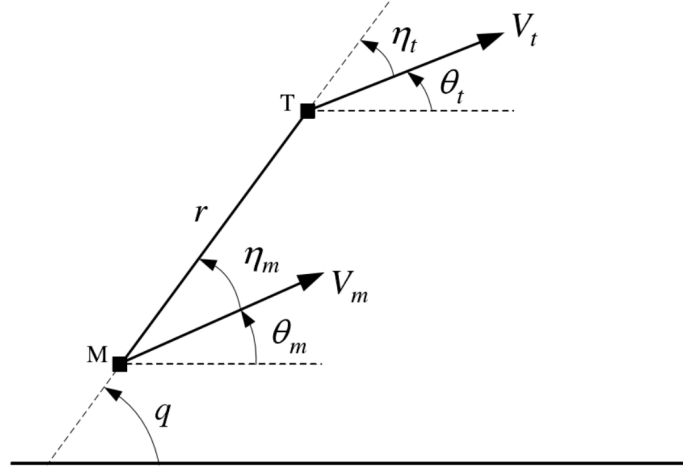


图 5 导弹与目标的相对运动关系

表 2 末段的参数及符号

r	导弹相对目标的距离
q	弹目视线与基准线间的夹角
V_m, V_t	导弹、目标速度大小
θ_m, θ_t	导弹、目标速度矢量与基准线之间的夹角， 即导弹弹道倾角和目标航向角
η_m, η_t	导弹、目标速度矢量与弹目视线之间的夹角， 即导弹速度矢量前置角和目标速度矢量前置角
a_m, a_t	导弹和目标加速度
a_c	导弹自动驾驶仪加速度

由于我们只考虑 $t = 0$ 时，即打击的是静态目标，那么制导律变为

$$a_c = \frac{-2\dot{r}x_2 + k_1 r \sin(x_2) |x_2|^\alpha + k_2 r \sin(\psi(x)) |\psi(x)|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}{\cos(\eta_m)} + g \cos(\theta_m) \quad (17)$$

且 $q_d = \theta_m$ 。式中，可通过雷达与导航组合解算出 $r, \dot{r}, \eta_m, \theta_m$ ，导引头提供视线角速率 \dot{q} 和视线角 q 。

4.4.3 模型求解

设导弹进入末制导时距海面高度为 $6km$ ，速度为 $510m/s$ ，导弹相对目标的距离 $r = 4km$ ，末段弹道倾角 θ_m 的期望值为 -60° 。制导参数 $\alpha = 0.65$ ， k_1 、 k_2 选取为随相对高度 $H(km)$ 的表达式，当 $H \leq 2km$ 时， $k_1 = 0.2, k_2 = 0.1$ ；当 $2km \leq H \leq 8km$ 时， $k_1 = (H - 2) * (0.02 - 0.2) / (8 - 2) + 0.2, k_2 = (H - 2) * (0.015 - 0.1) / (8 - 2) + 0.1$ ；

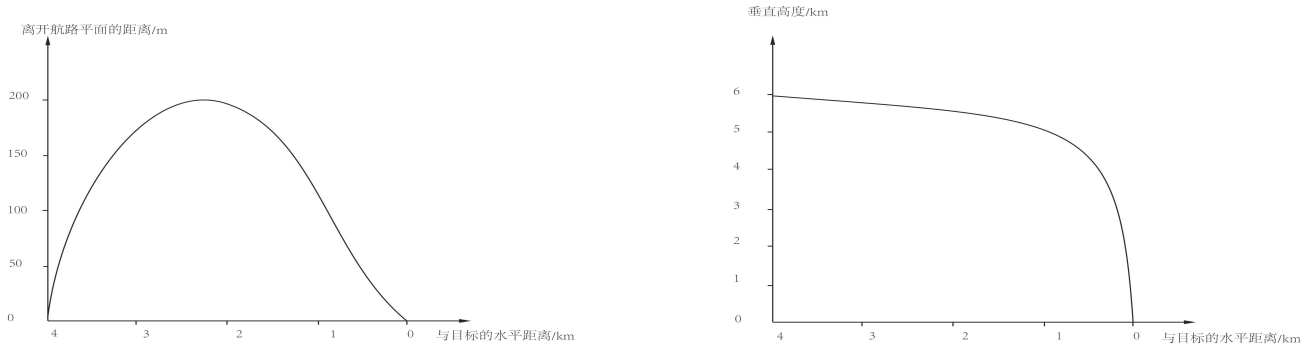


图 6 弹道

当 $H \geq 8km$ 时, $k_1 = 0.05, k_2 = 0.02$ 。通过上述制导率进行仿真, 导弹飞行时间为 $t_r = 18.7s$, 脱靶量为 $0.5m$, 仿真弹道如图 6 所示。

4.4.4 模型解释

由仿真结果可知, 导弹在末制导下, 进行蛇形机动, 先绕到航母侧面, 再垂直打向目标点, 配合较高的速度, 有效地避免了对方反导系统的拦截, 能进行精确有效的打击。

五、中段动态模型

5.1 模型分析

在考虑航母运动的情况下, 导弹打击航母成为一个追击问题。导弹与航母的相对位置、导弹的攻击角在时刻发生变化。因此需要一个可靠的动态引导律, 配合合适的坐标系来建立导弹与目标之间相对运动方程, 通过设定合适的参数, 得到导弹的运动轨迹。同时结合问题一中静态轨道曲线对威胁规避的考虑, 可将每次航路转向点设为原点, 使动态导引穿插在转向点之间, 作为问题一的补充。

为了描述导弹与航母的位置关系, 本节中仍然选用图 5 所示的相对关系和参数, 基准线可以任意取。

对于角度正负的说明: 导弹与目标间的连线成为弹目视线, 当基准线逆时针转到弹目视线上时, 弹目视线与基准线间的夹角 q 为正。同理, 分别以导弹和目标所在位置为原点, 当基准线逆时针转到各自的速度矢量上时, 导弹弹道倾角 θ_m 和目标航向角 θ_t 为正。 η_m, η_t 亦同理。

本模型中, 先不考虑导弹受威胁的情况, 建立以导弹中段起点为原点, 以航母运动方向为极轴的极坐标系。

5.2 相对运动方程的建立

考虑到几何原理以及引导关系方程，可以得到导弹与目标的相对运动方程组：

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = V_t \cos \eta_t - V_m \cos \eta_m \\ r \frac{dq}{dt} = V_m \sin \eta_m - V_t \sin \eta_t \\ q = \theta_m + \eta_m \\ q = \theta_t + \eta_t \end{cases} \quad (18)$$

这里我们选用比例引导法，选用理由在本节末的讨论中阐述。比例引导法的导引关系方程为：

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = k\dot{q} \\ \epsilon_1 = \dot{\theta}_m - k\dot{q} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

将方程组 (19) 带入公式 (18) 中，可得按比例引导时，导弹与目标之间的相对运动方程：

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = V_t \cos \eta_t - V_m \cos \eta_m \\ r \frac{dq}{dt} = V_m \sin \eta_m - V_t \sin \eta_t \\ q = \theta_m + \eta_m \\ q = \theta_t + \eta_t \\ \frac{d\eta_m}{dt} = k \frac{dq}{dt} \end{cases} \quad (20)$$

方程组 (20) 中，目标的速度 $V_t(t)$ 和航向 $\eta_t(t)$ 为已知量， $V_m(t)$ 根据第 5 节的讨论，也可认为是已知量。根据方程组，根据实际战术可以具体确定 k 值，从而可求解得到 $r(t), q(t)$ ，获得导弹相对目标的运动轨迹。根据目标航母相对于地面坐标系的运动轨迹，就可通过换算获得导弹相对地面坐标系的运动轨迹。

5.3 模型求解

依据题目条件，我们对该模型进行求解仿真。将基准线定为平行于航母的运动方向，正南方向为正。目标航母做 59km/h 的水平匀速运动，导弹匀速飞行，速度为 350m/s 。初始条件为 $r_0 = 350\text{km}, q_0 = 57^\circ, \theta_{m0} = 45^\circ$ 。根据已知条件，得出导弹与目标的相对运动方程：

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = V_t \cos q - V_m \cos[kq_0 - \theta_{m0} - (k-1)q] \\ \frac{dq}{dt} = \frac{1}{r}[-V_t \sin q + V_m \sin(kq_0 - \theta_0 - (k-1)q)] \end{cases} \quad (21)$$

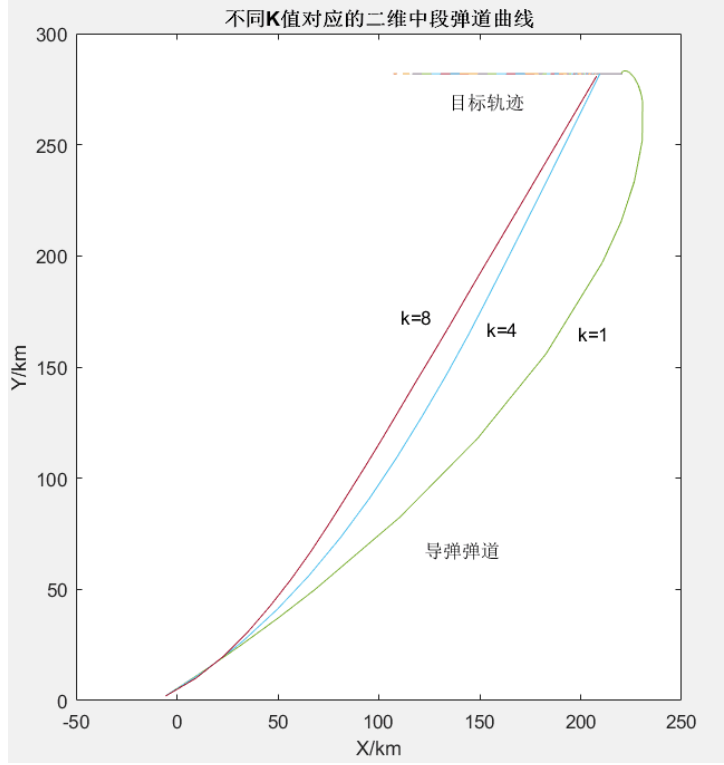


图 7 不同 k 值对应的二维弹道曲线

为了表述清楚未知量，均省略去导弹的参数下标，则公式 (21) 可写为：

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = V_t \cos q - V \cos[kq_0 - \theta_0 - (k-1)q] \\ \frac{dq}{dt} = \frac{1}{r} [-V_t \sin q + V \sin(kq_0 - \theta_0 - (k-1)q)] \end{cases} \quad (22)$$

为了方便确定弹道轨迹，选地面坐标系的原点与导弹中段的初始位置 A 重合。目标航母初始位置为 (x_{t0}, y_{t0}) ，即 $(r_0 \cos q_0, r_0 \sin q_0)$ ，弹道参数为 (x, y) ，导弹最终位置为 (x_r, y_r) ，其表达式为：

$$\begin{cases} x = x_t - r \cos q \\ y = y_t - r \sin q \\ x_r = x_{t0} = r_0 \cos q_0 \\ y_r = y_{t0} + V_t t = r_0 \sin q_0 + V_t t \end{cases} \quad (23)$$

利用 *MATLAB* 可以计算得到不同的 k 值下导弹在中段的运动轨迹。如图 7 所示。

5.4 模型解释

我们选用比例引导法的理由主要有以下几点：

- 可以得到较为平直的弹道；

- 在满足 $k > 2|\dot{r}|V_m \cos \eta_m$ 的条件下, $|q|$ 逐渐减小, 弹道前段较弯曲, 充分利用了导弹的机动能力, 也可在一定程度上减小被拦截概率;
- 弹道后段较为平直, 导弹具有较充裕的机动能力;
- 只要 k, η_{m0}, q_0 等参数组合适当, 就可以使全弹道上的需用过载均小于可用过载, 从而实现全向攻击。

模型求解时, 我们分别取 $k = 1, 4, 8$ 进行导弹轨迹的模拟, 由结果可知, 参数 k 对轨道的影响较大: k 值越大, 弹道逼近的越近, 但在实际中 k 值越大, 导弹的负载就越大, 所以根据不同导弹的性能有着各自的 k 值上限。同时, 本套动态模型方程可以得到较为平直的弹道, 便于实现问题一模型中的各种机动。

六、轨道曲线误差分析和命中率分析

我们在设计打击航母的轨道曲线时, 考虑到了时间和被拦截的影响, 选取了航程和平均被拦截概率两个关键的评价指标来评价航路的优劣。但航路的选取是两个目标函数按一定比例最优化的过程, 由于比例的不同, 误差往往也不同。下面将分别从引起误差的几个指标进行误差分析和讨论, 构建一套误差评价体系。

6.1 航路转向点指标

由于导弹机动的性能限制, 每次转向的转角大小、转向半径都会存在一定的误差。当导弹频繁地转向, 即转向点较多时, 这将增大中制导终点的分布误差, 进一步可能影响末制导打击航母的命中率。因此, 在尽可能规避危险区域的前提下, 应尽可能减少中段的航路转向点。这样, 不仅可以降低飞行航线的复杂度, 也可以充分的利用燃料, 更重要的是每次转向的累计误差有效减小, 提高导弹的射击精度。

6.2 转向角指标

同样由于导弹本身的性能限制, 导弹每次的转向角不能太大, 转向半径也不适宜取太小, 否则会导致导弹的负载过大, 执行效率大大下降, 与理想值相差甚远, 即所有转向角的均方差不适宜太大。在航路长度差不多的情况下, 若转向角的分布分散, 则轨迹曲线会非常不平滑, 违背了航线规划的基本要求。在航路转向点数量不变的情况下, 应当适当地约束各转向点绝对值之和, 这样可以使飞行的曲线更加的平滑。

6.3 航程指标

航路的长短直接受限于导弹的性能。对于同一个导弹, 航程越长, 即飞行时间越长, 代表着其导航系统的累积误差也越大, 直接影响中制导终点, 即末制导的起点的分布误差。

经以上分析，我们创建的模型在创建目标函数时，由于对航程和对拦截概率进行了优化，只要转向点选取不太大，以上指标带来的误差都能得到有效的控制，减小系统误差。同时，由于我们选用了出色的自动末制导率，脱靶量能做到 0.5m，因此命中率在仿真时有令人满意的表现。

参考文献

- [1] 刘钢. 基于几何模型优化的反舰导弹航路规划方法研究 [D]. 国防科学技术大学,2013.
- [2] 沈建锋, 许诚, 陈峰. 遗传算法在反舰导弹航路规划中的应用 [J]. 飞行力学,2005(03):52-55+66.
- [3] 汪民乐, 范阳涛. 弹道导弹突防中被拦截命中概率计算方法 [J]. 战术导弹技术,2016(01):28-33.
- [4] 刁兆师. 导弹精确高效末制导与控制若干关键技术研究 [D]. 北京理工大学,2015.
- [5] 朱成. 垂直发射防空导弹智能制导与控制 [D]. 南京航空航天大学,2015.

附录 A 问题一中段仿真程序—matlab 源程序

```
function f = gai(x)
syms t1 t2 t3 t4
x0=x(1);y0=x(2);x1=x(3);y1=x(4);
a=-325;b=211;
c=-300;d=155;
m=0;n=70;
e=-150;f=100;
for t1 =1:1:10000
    xa=(x0-a)/t1;ya= (y0-b)/t1;
    m1=(1-(1-exp(-(xa-(c-a))/60)^2-((ya-(d-b))/60)^2))*(1-exp(-(xa-(m-a))/50)^2-
        -((ya-(n-b))/50)^2))*(1-exp(-(xa-(e-a))/50)^2-((ya-(f-b))/50)^2))*0.001*((x0-a)^2+(y0-b)^2)^0.5
        ;
    w1=sum(m1);
end
%%w1=int(m1,t1,-4,x0) ;

for t2 =1:1:10000
    xb=(x0-x1)/t2;yb=(y0-y1)/t2;
    m2=(1-(1-exp(-(xb-(c-x1))/50)^2-((yb-(d-y1))/50)^2))*(1-exp(-(xb-(m-x1))/50)^2-
        ((yb-(n-y1))/50)^2))*(1-exp(-(xb-(e-x1))/50)^2-((yb-(f-y1))/50)^2))*0.001*((x1-x0)^2+(y1-y0)^2)^0.5;
    w2=sum(m2);
end
%%w2=int(m2,t2,x0,x1);

for t3 =1:1:10000
    xc=x1/t3;yc=y1/t3;
    m3=(1-(1-exp(-(xc-(c))/50)^2-((yc-(d))/50)^2))*(1-exp(-(xc-(m))/50)^2-((yc-(n))/50)^2))*(1-exp(-(xc-(e))/50)^2-((yc-(f))/50)^2))*0.001*((x1-x0)^2+(y1-y0)^2)^0.5;
    w3=sum(m3);
end
%%w3=int(m3,t3,x1,0);
f=0.8*((w1+w2+w3)/(((x0-a)^2+(y0-b)^2)^0.5+((x1-x0)^2+(y1-y0)^2)^0.5+(x1^2+y1^2)^0.5))+
    0.0000013*(((x0-a)^2+(y0-b)^2)^0.5+((x1-x0)^2+(y1-y0)^2)^0.5+(x1^2+y1^2)^0.5);
```

附录 B 问题二仿真程序—matlab 源程序

```
clear;
clc;
k=[1 4 8];
tf=[50 44 40 40];
for i=1:3
x0=[300,1.202,k(i)];
[t,x]=ode45(@kfun,[0 tf(i)],x0);
zt(:,i)=300*sin(70*pi/180);
xt(:,i)=300*cos(70*pi/180)+12.*t(1:60);
xm(:,i)=xt(:,i)-x(1:60,1).*cos(x(1:60,2));
zm(:,i)=zt(:,i)-x(1:60,1).*sin(x(1:60,2));
end
figure
plot(xt,zt,'-',xm,zm,'-');
xlabel('X/km');
ylabel('Y/km');
title('不同K值对应的二维中段弹道曲线');
gtext({'k=1';'k=4';'k=8';'目标轨迹';'导弹弹道'});

function f=kfun(t,x)
vt=1.6;
vm=35;
q0=70*pi/180;
tao0=40*pi/180;
faiv=x(3)*q0-tao0-(x(3)-1)*x(2);
f(1)=vt*cos(x(2))-vm*cos(faiv);
f(2)=(vm*sin(faiv)-vt*sin(x(2)))/x(1);
f(3)=0.001;
f=f(:);
```