

“北纬 27° ” 行动

摘要

本文主要对导弹发射的整个过程进行了合理性的分析，在运动分析和受力分析的基础上分别构建了静态航母打击、动态制导、反拦截模型。随后进行了命中率和误差分析并讨论了模型的优缺点。

针对问题一，首先我们进行经纬度到站心坐标系的转化，然后将导弹过程分为瞄准段、巡航段、打击段三段进行受力和运动分析。我们通过分析导弹受力情况建立了微分方程模型并用龙格库塔法进行求解，并进行拟合及插值。最终我们求解得到了总过程的运动学方程，同时绘制了导弹的飞行轨迹仿真图。

针对问题二，我们主要采用改进的比例制导模型进行求解，首先在第一问基础上求解出顶点坐标及导弹在顶点的速度，随后构建运动方程，改进比例制导模型的算法进行 matlab 仿真，最后分析结果。结果表明导弹与目标的距离也成线性变化，过程中目标线与基准线夹角越到后期变化越小，弹道相对平直。导弹的需用法向过载较小。

针对问题三，我们首先构建航空导弹拦截模型，针对此模型，我们改进终端导弹的飞行轨迹，设计出蛇形机动和螺旋机动两种反拦截模型。在分析命中率的时候，我们采用蒙特卡罗算法去计算两种模型在反拦截情况下的脱靶量，以此作为基础来分析两种弹道的命中率。最终得出机动幅度大比机动次数多的反舰导弹更难拦截的结论。

最后，我们讨论了模型的优缺点，同时提出了改进想法，经过模型的检验，我们可以知道该模型在静态和动态打击上都具有较大的适用性。

关键词：微分方程模型；比例制导；静态航母打击模型；龙格库塔法；matlab 仿真；蒙特卡罗算法；反拦截模型

目录

题目.....	1
摘要.....	1
一、问题重述.....	3
二、模型假设.....	3
三、符号说明.....	4
四、问题一.....	5
4.1 问题分析.....	5
4.2 发射分段的模型建立与求解.....	6
五、问题二.....	16
5.1 问题分析.....	16
5.2 模型建立.....	17
5.3 模型求解.....	18
六、问题三.....	21
6.1 模型建立.....	21
6.2 舰空导弹拦截模型.....	22
6.3 模型求解与分析.....	24
6.4 模型命中率分析.....	25
6.5 相对误差分析.....	25
七、模型评价、推广与改进.....	26
7.1 模型的优点.....	26
7.2 模型的缺点.....	26
7.3 模型的优化思路.....	27
参考文献.....	27

一、问题重述

近年来，中国在完成建国大业的道路上都会面临航母的威胁，众所周知，航母用于远洋作战，而现代海战的原则是以空制海。想要用导弹打击航母，用普通的导弹和鱼雷对数万吨级的航母造成有效杀伤，势必有些吃力。保卫国家，匹夫有责。刚刚迈向远海的中国海军短时间无法与敌人正面交锋，为实现对敌人的有效威慑，海军必须发展一款能够切实威慑敌航母舰队的利器，科研工作者们开始探讨研究陆基反舰弹道导弹。

问题一中，给定初始状态，要求我们建立反舰导弹打击航母的静态轨道模型，即为时间为零的条件下，导弹原始位置坐标与航母坐标的轨道曲线模型。我们将该过程分为三个部分：有推力和矫正力部分-有推力和升力部分-斜抛部分。对这三个过程我们分别进行受力和运动分析。最终得到三个过程的运动方程。

问题二中，给定了导弹飞行轨道为连续且光滑，发射速度为 500m/s ，要求我们设计导弹飞行的中段动态模型和算法步骤。我们依照题目对导弹中段进行制导，首先进行运动学分析，构建动力学方程，然后用比例制导法进行制导。

问题三中，我们将对我们所设计的导弹打击航母的轨道曲线进行误差分析和命中率分析。

二、模型假设

2.1 第一问

1. 假设飞行中的导弹不受科里奥利力。
2. 假设飞行中的导弹是一个质点，不考虑外形。
3. 假设飞行中的导弹只在瞄准段和巡航段受恒定大小的升力，打击段由于减速下坠所以不考虑升力的作用。
4. 假设飞行中的导弹在整个飞行过程中始终受到与飞行速度方向相反的空气阻力，且阻力系数始终恒定。
5. 假设飞行中的导弹受到的重力方向始终指向坐标轴 $-z$ 方向。
6. 假设航母为一个质点，且最终落点与航母坐标直线距离在 100m 以内即可打击到航母。
7. 假设飞行过程中导弹质量不变

2.2 第二问

1. 忽略相对论效应和科里奥利力效应。
2. 略去速度和高度对火箭推力的影响。
3. 认为重力加速度恒为 g 。
4. 假设作用在导弹上的绕其重心的力矩任何瞬时都处于平衡状态。
5. 忽略惯性和时间延迟。

三、符号说明

符号	符号说明
m	质量
p	推力
F	矫正力
F'	升力
k	阻力系数
G	重力
g	重力加速度
θ	倾角
t	时间
f	空气阻力
r	导弹相对目标的距离
q	目标方位角
σ, σ_M	分别为导弹、目标速度矢量与基准线之间的夹角
η, η_M	分别为导弹、目标速度矢量与目标线之间的夹角
V_D	导弹速度矢量
V_t	导弹速度标量
V_M	目标速度
K	比例制导法中的比例系数
q_0	目标线与基准线初始夹角

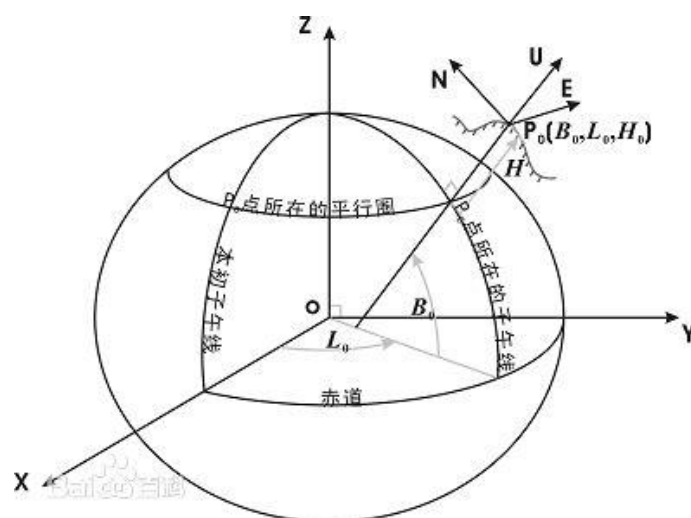
σ_t	速度与基准线夹角
T	振幅
A	周期
P	动量
L	相对于原点 O 的角动量
I	相对于原点的转动惯量
Ω	角速度

四、问题一

4.1 问题分析

4.1.1 坐标系的变换:

由于我们已知的是发射车以及目标航母的经纬度位置,而在该经纬度参考系中要研究导弹的飞行规律比较困难,所以我们需要建立一个新的坐标系来衡量导弹的运动以及导弹跟航母的相对位置关系,并给出这两个参考系的变换矩阵。我们选取的参考系是站心参考系,即以发射车为原点,正北方向为 N 轴正向,正东方向为 E 轴正向,垂直于地球表面指向球外为 U 轴正向。下图为示意图:



根据给出的发射车跟航母的经纬坐标我们可以将其转化为站心坐标:

Matlab 代码为:

```
syms X Y Z X0 Y0 Z0 L0 B0 E N U
```

%XYZ 是空间直角坐标系的坐标，X0Y0Z0 是站心坐标系原点的坐标 L0B0 是站心的经度纬度

%ENU 是站心坐标

%空间直角坐标变换为站心坐标

$E=-(X-X0)*\sin(L0)+(Y-Y0)*\cos(L0);$

$N=-(X-X0)*\sin(B0)*\cos(L0)-(Y-Y0)*\sin(B0)*\sin(L0)+(Z-Z0)*\cos(B0);$

$U=(X-X0)*\cos(B0)*\cos(L0)+(Y-Y0)*\cos(B0)*\sin(L0)+(Z-Z0)*\sin(B0);$

%站心坐标变换为空间直角坐标

$X=-E*\sin(L0)-N*\sin(B0)*\cos(L0)+U*\cos(B0)*\cos(L0)+X0;$

$Y=E*\cos(L0)-N*\sin(B0)*\sin(L0)+U*\cos(B0)*\sin(L0)+Y0;$

$Z=N*\cos(B0)+U*\sin(B0)+Z0;$

所得航母站心坐标为 (E,N,U)=(321908.0,-199168.1,-11.3887)

4.2 发射分段的模型建立与求解

4.2.1 瞄准阶段

受力：①沿速度方向的推力 $P=200000N$

②与速度方向相反的空气阻力 f ($f=kv^2$)

③指向站心坐标系-z 方向的重力 $G=mg=24479N$

④垂直于速度方向，斜向下的矫正力 $F=200000N$

为了较方便的研究导弹打击航母的运动轨迹，我们建立新的坐标系，以发射站为原点，垂直地面指向地外为 z 轴正向，指向航母且与地球表面相切为 x 轴正向。在新的坐标系中航母的坐标为 (378591.2m, -11388.7m)

受力分析图：

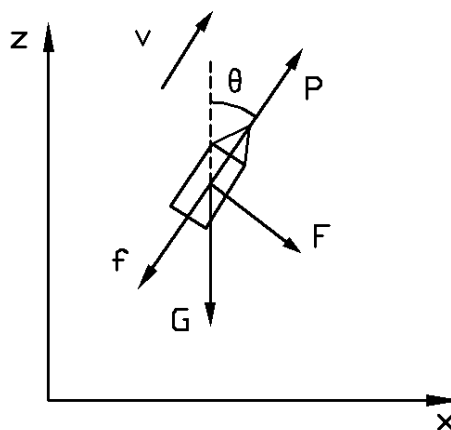


Figure1: 瞄准阶段受力图

微分方程的建立：

$$\left\{ \begin{array}{l} P\cos\theta + F\cos\theta - f\sin\theta = ma_x \\ P\cos\theta - F\sin\theta - f\cos\theta - G = ma_z \\ f = kv^2 \\ v = \sqrt{(V_x)^2 + (V_z)^2} \\ \tan\theta = \frac{V_x}{V_z} \\ V_x = \frac{dx}{dt} \\ a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \\ x(0) = 0, z(0) = 0, \theta(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0, \frac{dz}{dt}(0) = 500 \end{array} \right.$$

简化后的方程组为：

我们利用龙格库塔法对该微分方程组进行求解，matlab 代码如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} 200000 \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} + 200000 \sqrt{\frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 0.08 \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} = 2500 \frac{d^2x}{dt^2} \\ 200000 \sqrt{\frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 200000 \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 0.08 \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 24479 = 2500 \frac{d^2z}{dt^2} \\ x(0) = 0, z(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0, \frac{dz}{dt}(0) = 500 \end{array} \right.$$

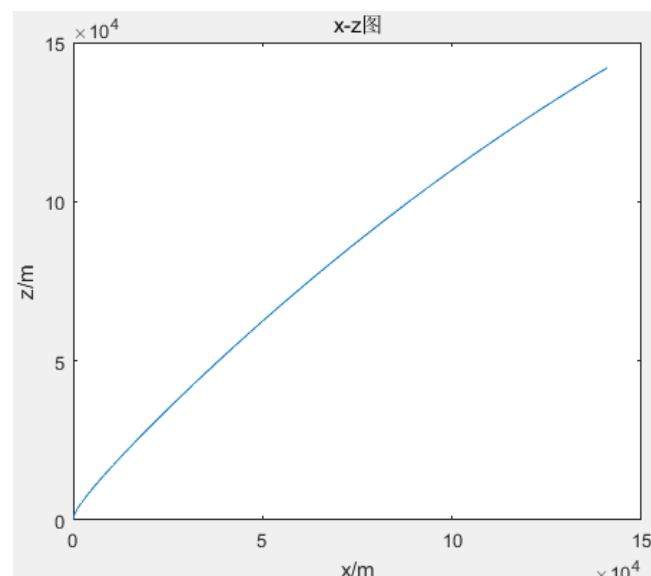
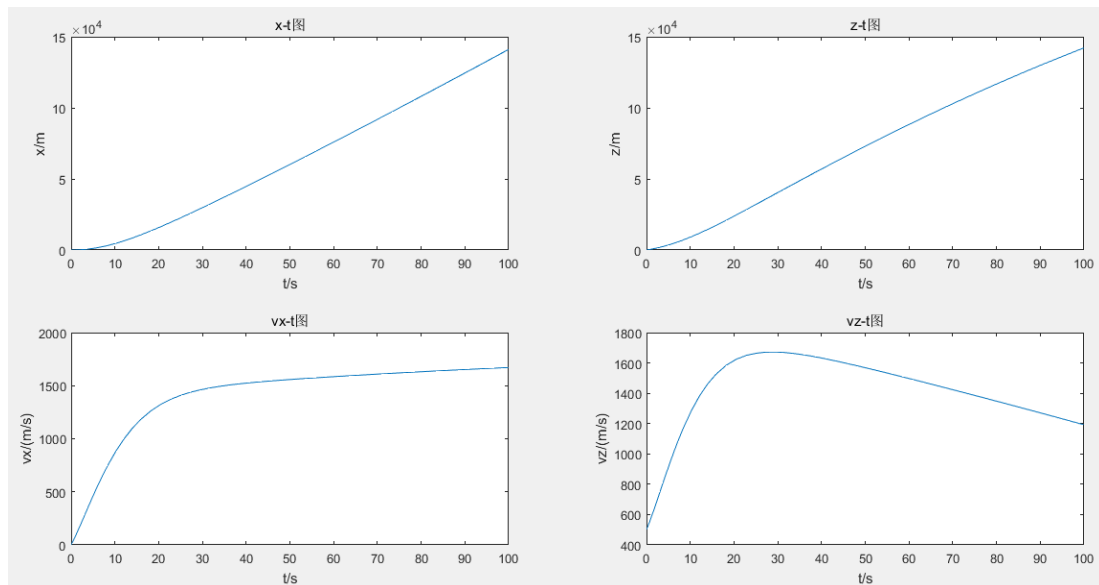
1. 龙格库塔函数的定义：

```
1 %描述微分方程组
2 function dy=eq4(t,y)
3 %说明微分变量是四维的，令y(1)=x,y(2)=z;
4 dy=zeros(4,1);
5 %微分方程组
6 dy(1)=y(3);
7 dy(2)=y(4);
8 dy(3)=(200000*sqrt((y(3))^2/((y(4))^2+(y(3))^2))+200000*sqrt((y(4))^2/((y(4))^2+(y(3))^2))...
9 -0.08*((y(3))^2+(y(4))^2)*sqrt((y(3))^2/((y(4))^2+(y(3))^2)))/2500;
10 dy(4)=(200000*sqrt((y(4))^2/((y(4))^2+(y(3))^2))-200000*sqrt((y(3))^2/((y(4))^2+(y(3))^2))...
11 -0.08*((y(3))^2+(y(4))^2)*sqrt((y(3))^2/((y(4))^2+(y(3))^2))-24479)/2500;
```

2. 函数的调用

```
1 %发射段
2 %龙格库塔函数调用
3 [T,Y]=ode45(@eq4,[0 100],[0 0 0 500]);
4 plot(Y(:,1),Y(:,2),'-')
5 A1=Y(:,1);
6 A2=Y(:,2);
7 A3=Y(:,3);
8 A4=Y(:,4);
```

3. 图像的绘制



4. 曲线的拟合

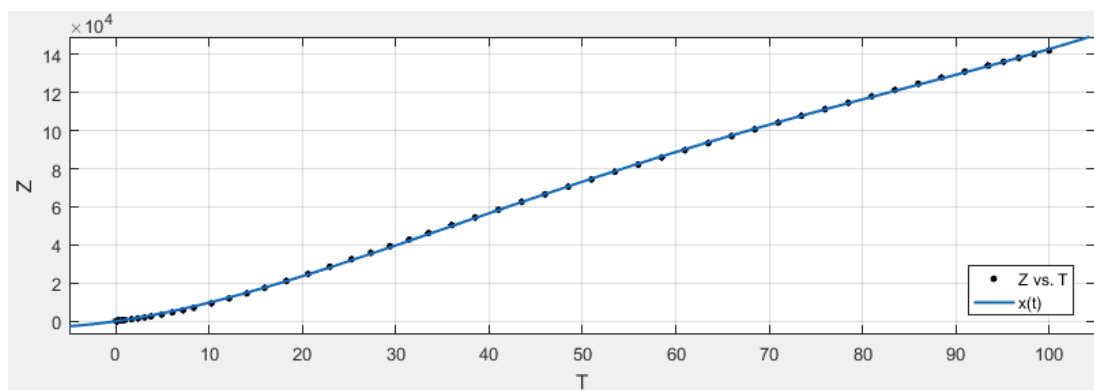
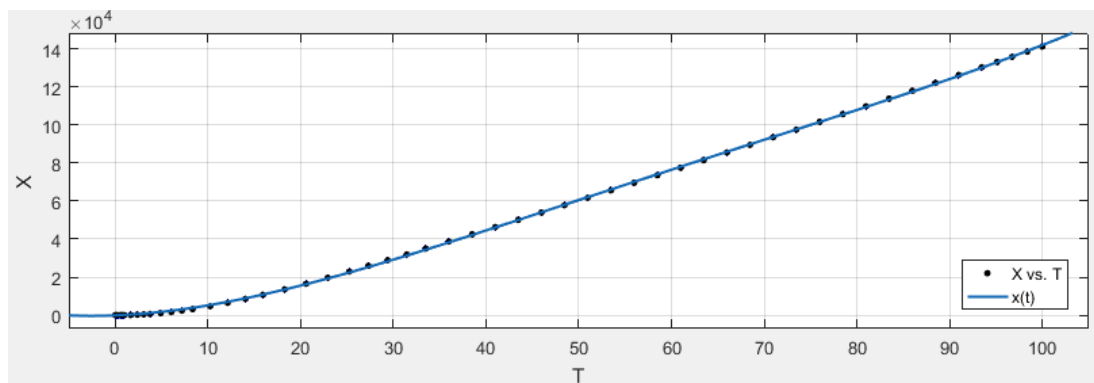
根据龙格库塔法得到的 0-100s 内的导弹 t 、 x 、 z 、 x' 、 z' 数据，我们可以拟合出导弹飞行轨迹，即 $x(t)$ 和 $z(t)$ 。我们使用 matlab 的 `cftool` 工具包，通过尝试用指数拟合、多项式拟合、对数拟合、傅里叶拟合等几种拟合方式后发

现，这几种拟合方式均可达到很高的精度，为了模型的实用性，我们最终选用较为简单的四次多项式拟合。拟合结果如下：

$$x(t)=0.001761t^4-0.4257t^3+37.21t^2+195.2t-97.8$$

$$z(t)=0.001763t^4-0.426t^3+32.32t^2+695.1t-98.16$$

拟合图像如图所示：



4.2.2 巡航阶段

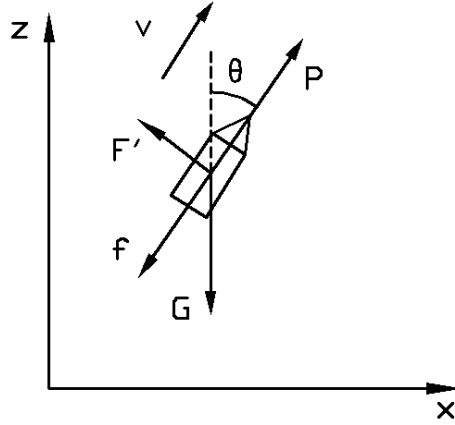
受力：①沿速度方向的推力 $P=200000\text{N}$

②与速度方向相反的空气阻力 f ($f=kv^2$)

③指向站心坐标系 $-z$ 方向的重力 $G=24479\text{N}$

④垂直于速度方向，斜向上的升力 $F' = 60915\text{N}$

受力分析图：



微分方程的建立:

我们假设瞄准阶段 $t=100s$ 时进入巡航阶段，即把瞄准阶段的末尾位置坐标以及速度作为巡航阶段 $t=0$ 时的初值条件。

通过计算，瞄准阶段 $t=100s$ 时导弹的相应运动参数如下：

$$x=141130m$$

$$z=142170m$$

$$x' = 1671.1m/s$$

$$z' = 1192m/s$$

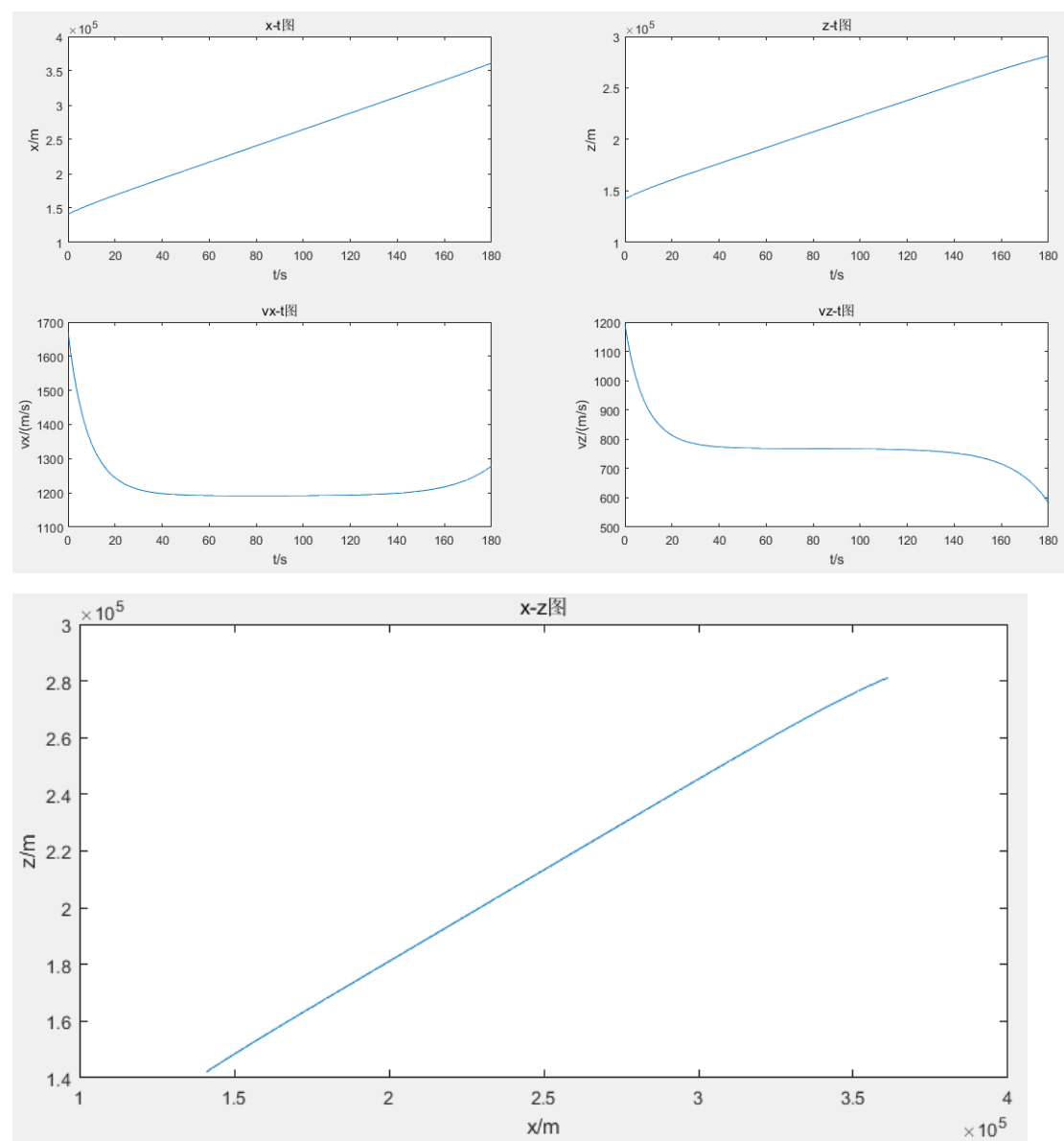
可列如下微分方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} P\cos\theta - F'\cos\theta - f\sin\theta = ma_x \\ P\cos\theta + F'\sin\theta - f\cos\theta - G = ma_z \\ f = kv^2 \\ v = \sqrt{(V_x)^2 + (V_z)^2} \\ \tan\theta = \frac{V_x}{V_z} \\ V_x = \frac{dx}{dt} \\ a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \\ x(0) = 141130, z(0) = 142170 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 1671.1, \frac{dz}{dt}(0) = 1192 \end{array} \right.$$

简化后的方程组为：

$$\left\{ \begin{array}{l} 200000 \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 60915 \sqrt{\frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 0.08 \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} = 2500 \frac{d^2 x}{dt^2} \\ 200000 \sqrt{\frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} + 60915 \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 0.08 \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 24479 = 2500 \frac{d^2 z}{dt^2} \\ x(0) = 141130, z(0) = 142170 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 1671.1, \frac{dz}{dt}(0) = 1192 \end{array} \right.$$

利用龙格库塔法求得结果如下：



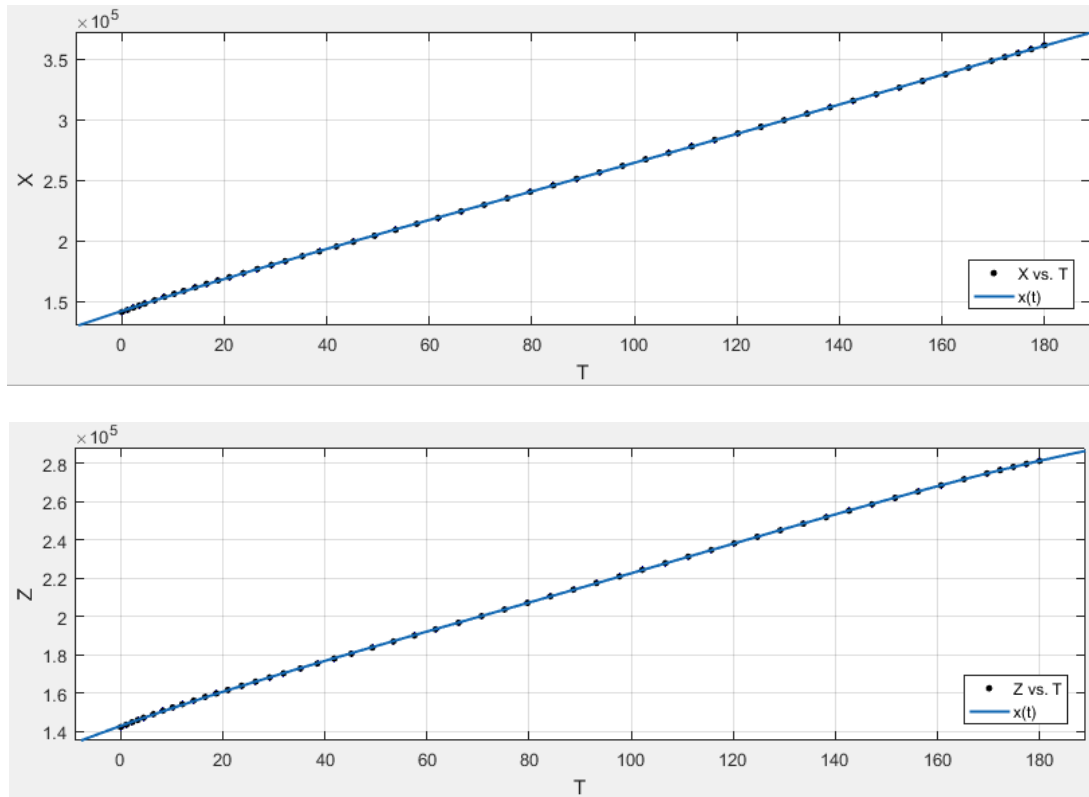
曲线的拟合：

我们仍然采用四次多项式拟合法，拟合结果如下：

$$x(t) = -4.564 \times 10^{-5}t^4 + 0.02084t^3 - 3.172t^2 + 1378t + 1.42 \times 10^5$$

$$z(t) = -7.495 \times 10^{-5}t^4 + 0.02765t^3 - 3.569t^2 + 952.4t + 1.428 \times 10^5$$

拟合图像如下：

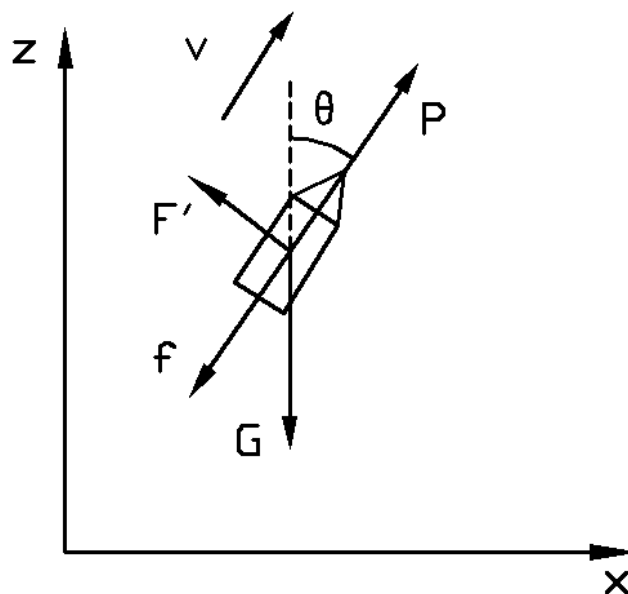


4.2.3 打击阶段

受力：①与速度方向相反的空气阻力 f ($f=kv^2$)

②指向站心坐标系-z 方向的重力 G ($G=mg=24479N$)

受力分析图：



微分方程的建立:

可列如下微分方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} -f \sin \theta = m a_x \\ -f \cos \theta - G = m a_z \\ f = k v^2 \\ v = \sqrt{(V_x)^2 + (V_z)^2} \\ \tan \theta = \frac{V_x}{V_z} \\ V_x = \frac{dx}{dt} \\ a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \\ a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \\ x(0) = \dots, z(0) = \dots \\ \frac{dx}{dt}(0) = \dots, \frac{dz}{dt}(0) = \dots \end{array} \right.$$

简化后的方程组为:

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.08\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} = 2500 \frac{d^2x}{dt^2} \\ -0.08\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) \sqrt{\frac{(dz)^2}{(dz)^2 + (dx)^2}} - 24479 = 2500 \frac{d^2z}{dt^2} \\ x(0) = \dots, z(0) \dots \\ \frac{dx}{dt}(0) = \dots, \frac{dz}{dt}(0) \dots \end{array} \right.$$

由于巡航段与末段的衔接点直接决定导弹是否能打到航母，所以不能任意选定，我们通过二分法不断尝试用计算出的离散衔接点作为末段的初值条件。在不断调整巡航阶段与打击阶段的衔接点并初步确定一个衔接点后，我们发现由于巡航阶段数据离散化程度过大，找不到一个合适的衔接点使得导弹的落点与航母足够接近，所以我们在所有求出的离散衔接点中找到落点与航母最接近的两个点并对这两点之间进行插值，从插值中找到一个相对最优的衔接点作为打击阶段的起始点。

落点与航母最接近的两个衔接点：

X (m)	Z (m)	dX/dT (m/s)	dZ/dT (m/s)	T (s)
310140	251800	1198.2	734.5	138.1875
315530	255190	1200.4	750.2	142.6875
320940	258550	1203.2	744.5	147.1875
326360	261880	1207	736.9	151.6875
331800	265180	1212	726.9	156.1875
337270	268420	1218.5	713.6	160.6875
342770	271590	1227.1	695.8	165.1875
348320	274670	1238.4	672.2	169.6875
351520	276390	1246.3	655.2	172.2656
354750	278050	1255.5	635.1	174.8427

插值：

我们对巡航段函数在上面选出的两个相对最优衔接点之间进行插值离散化，离散化结果如下：

T(s)	X(m)	Z(m)	dX/dT(m/s)	dZ/dT(m/s)
156.1875	332090	265240	1216.7	718.7859
156.6875	332700	265600	1216.6	717.188
157.1875	333310	265950	1216.5	715.5611
157.6875	333910	266310	1216.4	713.9051
158.1875	334520	266670	1216.3	712.2195
158.6875	335130	267020	1216.1	710.5043
159.1875	335740	267380	1216	708.7593
159.6875	336350	267730	1215.8	706.9841
160.1875	336950	268090	1215.6	705.1786
160.6875	337560	268440	1215.4	703.3425

通过逐点尝试，我们发现当

$$T=158.6875 \text{ s}$$

$$X=335130 \text{ m}$$

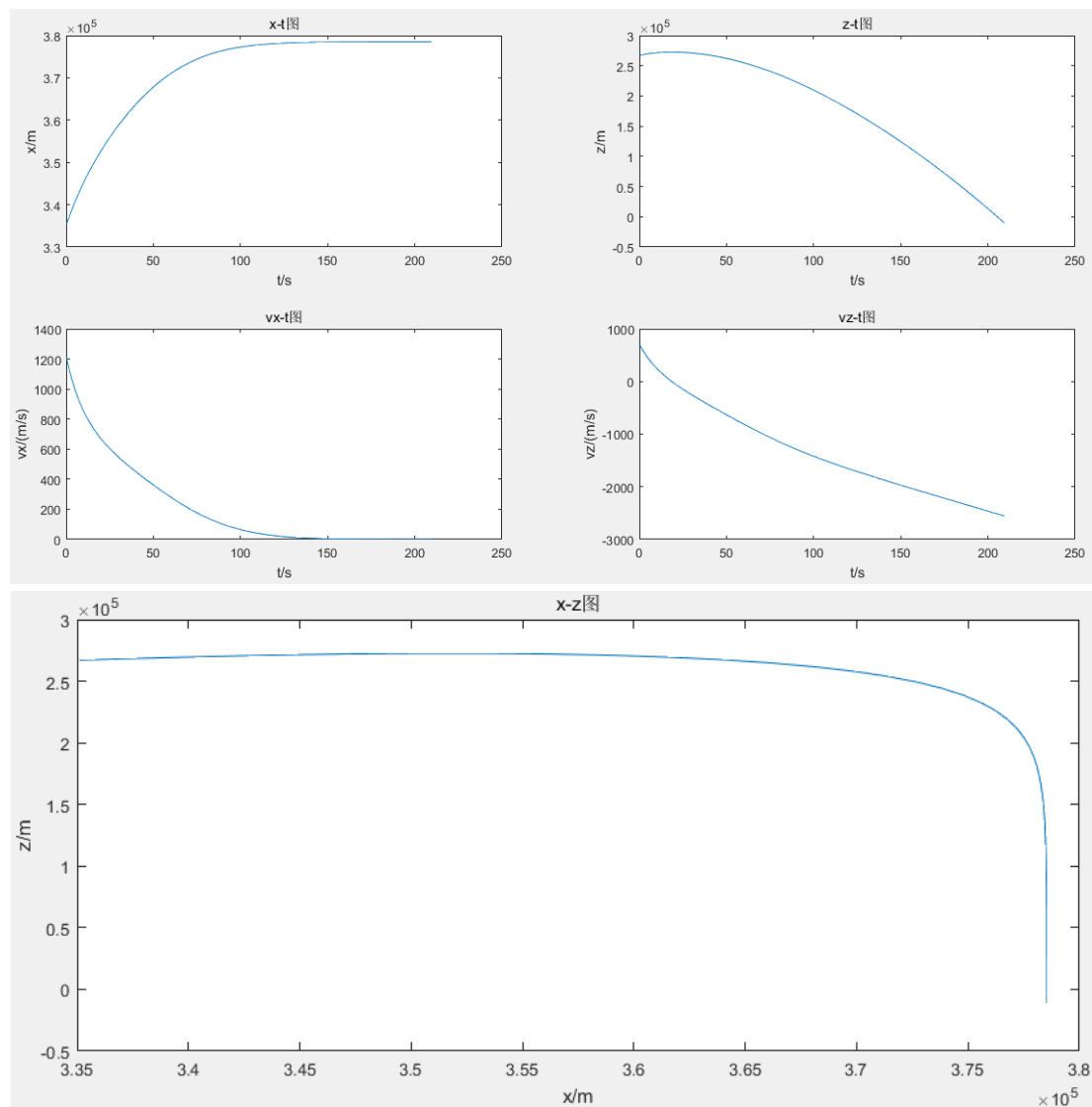
$$Z=267020 \text{ m}$$

$$dX/dT=1216.1 \text{ m/s}$$

$$dZ/dT=710.5043 \text{ m/s} \quad \text{时}$$

落点与航母最为接近。

将该初值条件代入微分方程可得：



打击阶段曲线拟合结果：

$$x(t)=-5.516 \times 10^{-5}t^4+0.03681t^3-9.204t^2+1025t+3.355 \times 10^{-5}$$

$$z(t)=-5.52 \times 10^{-5}t^4+0.03683t^3-14.1t^2+519.3t+2.674 \times 10^{-5}$$

通过不断调试打击段飞行时间最终得到，当 $t=209.9\text{s}$ 时，导弹的坐标为

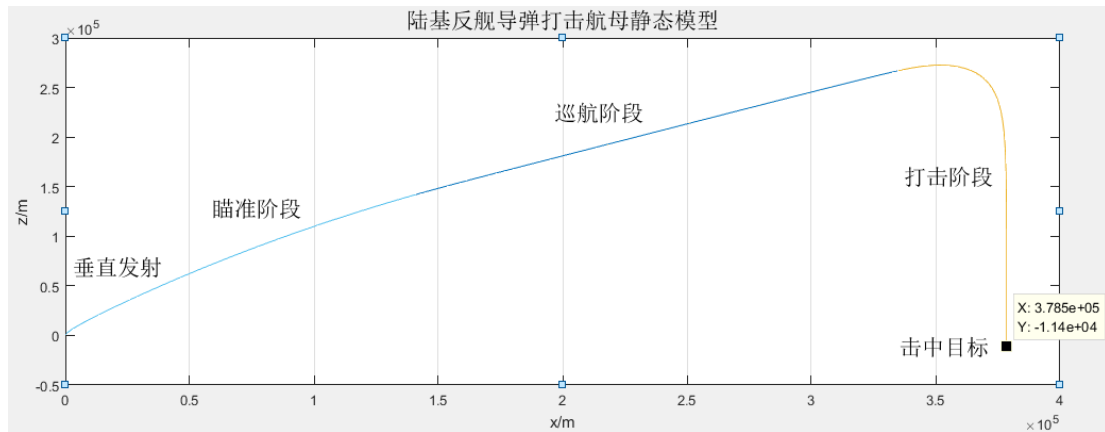
(378500m, -11400m)，而航母的坐标为(378591.2m, -11388.7m)，此时两点直线距离相对最近，为91.8974m，航母的舰长为335m，所以航母处在导弹的有效攻击范围内。

4.2.4. 总过程

综合上述三个过程可以得到陆基导弹打击航母静态模型

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{矫正段: } \begin{cases} x(t) = 0.001761t^4 - 0.4257t^3 + 37.21t^2 + 195.2t - 97.8 (0 < t \leq 100s) \\ z(t) = 0.001763t^4 - 0.426t^3 + 32.32t^2 + 695.1t - 98.16 (0 < t \leq 100s) \end{cases} \\ \text{巡航段: } \begin{cases} x(t) = -4.564 \times 10^{-5}t^4 + 0.02084t^3 - 3.172t^2 + 1378t + 1.42 \times 10^{-5} \\ \quad (0 < t \leq 158.6875 s) \\ z(t) = -7.495 \times 10^{-5}t^4 + 0.02765t^3 - 3.569t^2 + 952.4t + 1.428 \times 10^{-5} \\ \quad (0 < t \leq 158.6875 s) \end{cases} \\ \text{打击段: } \begin{cases} x(t) = -5.516 \times 10^{-5}t^4 + 0.03681t^3 - 9.204t^2 + 1025t + 3.355 \times 10^{-5} \\ \quad (0 < t \leq 209.9 s) \\ z(t) = -5.52 \times 10^{-5}t^4 + 0.03683t^3 - 14.1t^2 + 519.3t + 2.674 \times 10^{-5} \\ \quad (0 < t \leq 209.9 s) \end{cases} \end{array} \right.$$

下图为导弹整个飞行过程的轨迹图：



五、问题二

5.1 问题分析：

相对运动方程是指描述导弹、目标、制导中心之间相对运动关系的方程，建立相对运动方程是导引弹道运动学分析方法的基础。在本题中，要求建立卫星、无人机和导弹之间的制导关系，可以理解为制导的基础为这三者相互影响的动力学方程。在此基础上，首先我们要给出导弹的动力学方程，其中有相应的假设和忽略。得到动力学关系后，按照题目要求我们随之建立比例制导模型，达到制导的效果。

下面分别建立制导的相对运动方程。运动分析如下图所示：

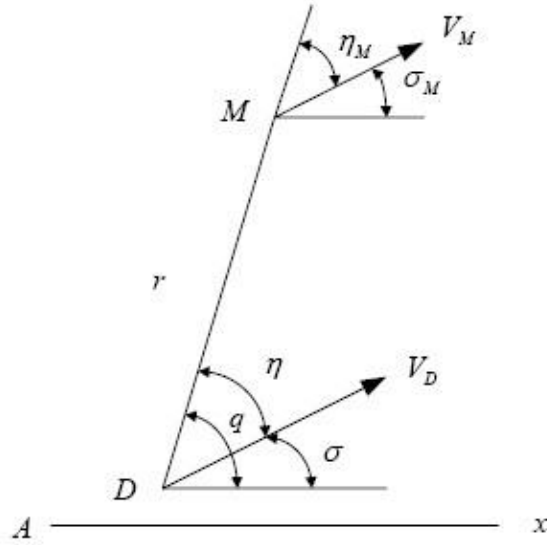


图 1：制导过程相对运动图

5.2 模型建立

考虑到上图所示角度间的几何关系，以及导引关系方程，就可以得到制导的相对运动方程组，在分析模型导引关系中采用比例引导法。

弹道方程组：

$$\frac{dr}{dt} = V_M \cos \eta_M - V_D \cos \eta$$

$$r \frac{dq}{dt} = V_D \sin \eta - V_M \sin \eta_M$$

$$q = \sigma + \eta$$

$$q = \sigma_M + \eta_M$$

$$\varepsilon_1 = 0$$

比例导引法：用导弹速度向量的转动角速度与目标线的转动角速度成正比，此法既可用于自动瞄准制导系统，也可用于遥控制导系统。

函数形式： $\dot{\sigma} = K \dot{q}$, $\varepsilon_1 = \dot{\sigma} - K \dot{q} = 0$ 。其中 K 要满足 $K > \frac{2|r|}{V_D \cos \eta}$ 。

其中， $V_D(t), V_M(t), \eta_M(t)$ （或 $\sigma_M(t)$ ）为已知，方程组中只含有 5 个未知数： $r(t)$ 、 $q(t)$ 、 σ_M （或 $\eta_M(t)$ ）、 $\sigma(t)$ 、 $\eta(t)$ ，因此方程组是封闭的，可以求得确定解。根据 $r(t)$ 、 $q(t)$ 可获得导弹相对目标的运动轨迹，称为导弹的相对弹道（即观察者在目标上所观察到的导弹运动轨迹）。若已知目标相对地面坐标系（惯性坐标系）的运动轨迹后，则通过换算可获得导弹相对地面坐标系的运动轨迹——绝对弹道。

5.3 模型求解

5.3.1 模型的求解

由第一问拟合结果，我们求打击阶段的曲线最高点：

代码如下：

```
syms T Z;
Z=(-5.52e-05)*T^4+0.03683*T^3+(-14.1)*T^2+519.3*T+2.674e+05;
dZ=diff(Z);
t=solve(dZ);
t=double(t)
Z1=(-5.52e-05)*t.^4+0.03683*t.^3+(-14.1)*t.^2+519.3*t+2.674e+05
fplot(Z,[0,209.9])
```

求得在打击阶段 $T=19.91s$ 时导弹达到最高点，此时导弹的坐标为（352540m，272430m）。

因为我们此时求得的导弹坐标为竖直二位平面坐标系内的坐标，所以我们需要将这个坐标转换为站心坐标系的坐标，即乘上一个旋转矩阵即可。

最高点速度为（700.5307m/s，0），（由于计算机精度限制，）对于站心坐标系下最高点速度采用同样的计算方式。

设最高点在站心坐标系内坐标为 $\begin{pmatrix} N \\ E \\ U \end{pmatrix}$ ，则

$$\begin{pmatrix} N \\ E \\ U \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} N \\ E \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 31.7408^\circ & 0 \\ -\sin 31.7408^\circ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 352540 \\ 272430 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 299812.9572 \\ -185463.3180 \\ 272430 \end{pmatrix}$$

设站心坐标系内最高点速度为 $\begin{pmatrix} V_n \\ V_e \\ V_u \end{pmatrix}$ ，则

$$\begin{pmatrix} V_n \\ V_e \\ V_u \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} V_x \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 31.7408^\circ & 0 \\ -\sin 31.7408^\circ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700.5307 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 595.3057 \\ -368.2542 \\ 0 \end{pmatrix}$$

相关参数结果如下：

$$\begin{cases} M = 700; \\ r = 285009; \\ V_t = M; \\ V_m = 16.46; \\ q_0 = 31.7^\circ; \\ \sigma_t = 180^\circ; \end{cases}$$

构建比例导引法所决定的导弹和目标的运动学关系如下：

1) 引导运动方程：

$$q = \eta + \sigma = \eta + Kq = \sigma_t + \eta_t = 31.7^\circ + \eta_t;$$

$$\frac{dr}{dt} = V_t \cos \eta_t - V_m \cos \eta;$$

$$r \frac{dq}{dt} = V_m \sin \eta - V_t \sin \eta_t = V_m \sin \eta - \frac{V_t}{2} = 0;$$

其中，K 为比例引导参数，取 K=5。

matlab 仿真结果：

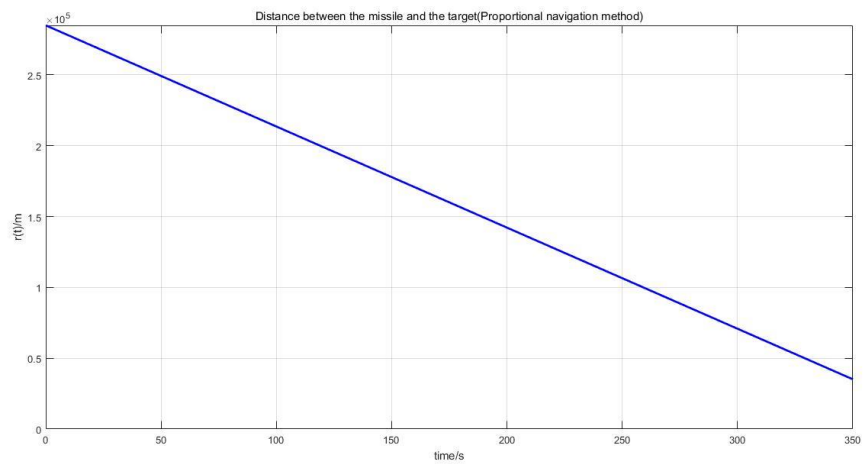


图 1. 导弹与目标距离变化图

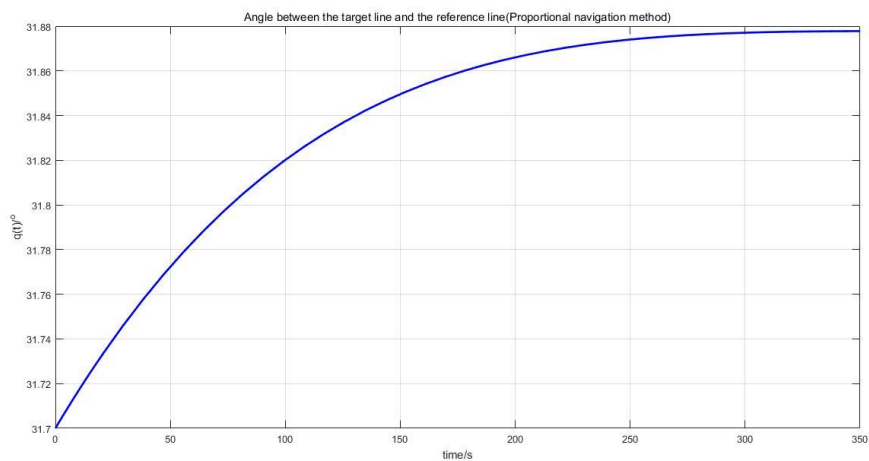


图 2. 目标线与基准线夹角变化图

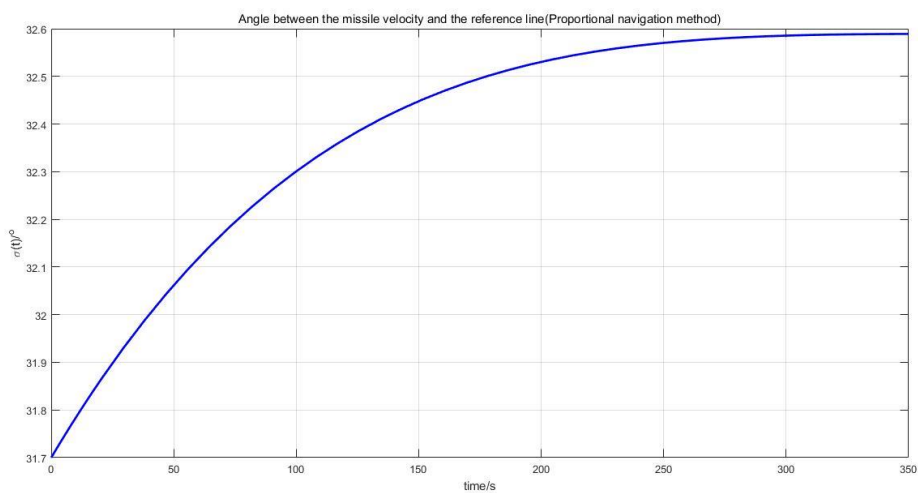


图 3 导弹速度与基准线夹角变化图

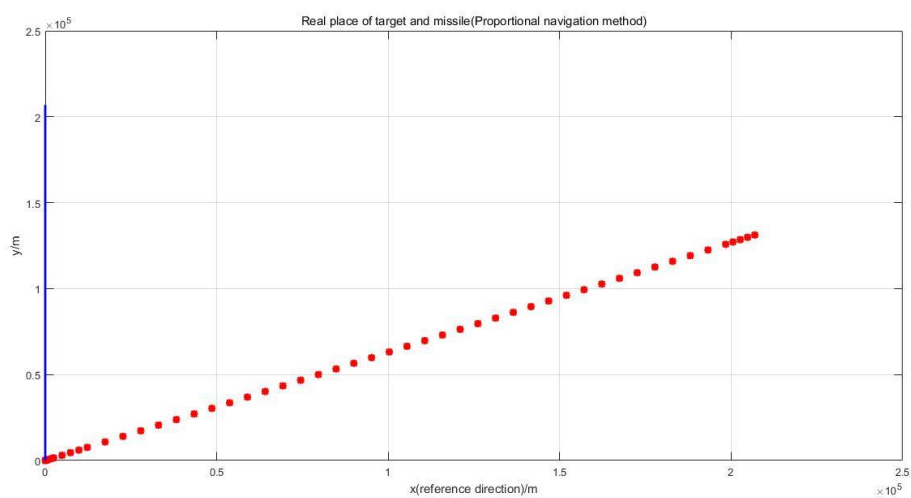


图 4 目标与导弹位置变化图

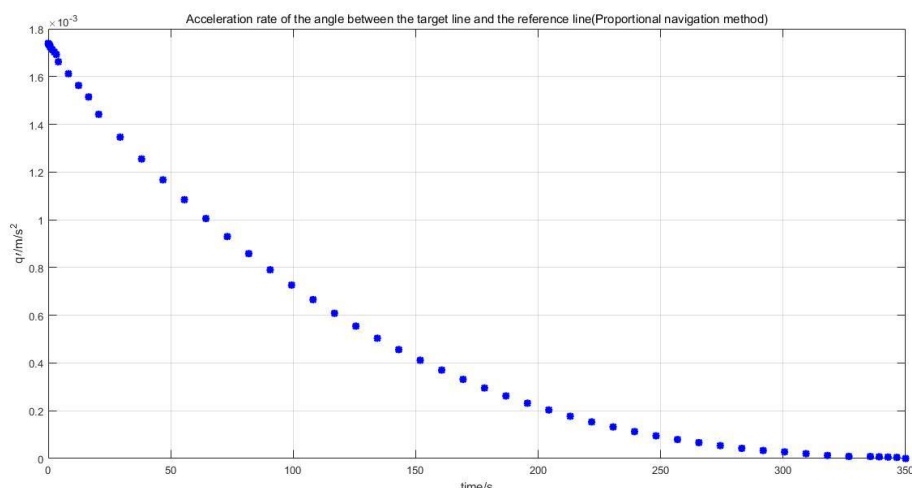


图 5 目标线与基准线夹角速度变化图

5.3.2 模型结果分析

由上述图像，导弹与目标的距离也成线性变化。仿真时间 350 秒时，导弹接近目标。过程中目标线与基准线夹角越到后期变化越小，弹道相对平直。导弹的需用法向过载较小。

六、问题三

6.1 模型建立

6.1.1 蛇形机动模型

实现蛇形机动飞行一般采用过载控制方案，开始机动后，通过舵偏指令控制导弹飞行，主要体现为航向角和水平面法向加速度的反复变化，机动的程度受到最大侧向过载的限制为了方便计算起见，假设其在水平面内做轴线平行于坐标轴的正弦曲线运动，周期为 T ，振幅为 A ，且保持不变，机动开始和结束时刻导弹速度都平行于坐标轴。

机动段开始时刻 $t=0$ ，导弹在 B 点，位移 $B=(X_B, Y_B, Z_B)$ ，假设在 B 点导弹平行于 X 轴飞行，若导弹速度仍为 $V_B=(V_{BX}, V_{BY}, V_{BZ})$ ， $V_{BY}=0, V_{BZ}=0$ ，机动段 t 任意时刻反舰导弹的位移和速度分别为 $T=(X_T, Y_T, Z_T)$ 和 $V_T=(V_{TX}, V_{TY}, V_{TZ})$ ，则有：

$$X_T = X_B + V_{TX}t$$

$$Y_T = Y_B$$

$$Z_T = Z_B - A + A \sin \left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V_{TX} = V_{BX}$$

$$V_{TY} = V_{BY} = 0$$

$$V_{TZ} = \frac{2\pi A}{T} \cos \left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2} \right)$$

蛇形机动最大过载

$$a = A \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2。$$

6.1.2 螺旋机动模型

蛇形机动是水平面内的机动，而螺旋机动则是在纵向和横向 2 个方向上的机动，是真正意义上的三维机动。螺旋机动的水平方向和垂直方向上同时存在着相同频率和振幅的舵偏指令，只不过相位差 $\pi/2$ 。同样为了运动方程的简化，假设其轴线平行于坐标轴，幅度 A 和周期 T 恒定，机动开始和结束时刻导弹速度都平行于坐标轴。

$t=0$ 时导弹在 B 点，位移 $B = (X_B, Y_B, Z_B)$ ，假设在 B 点导弹平行于 x 轴飞行，若导弹速度仍为 $V_B = (V_{BX}, V_{BY}, V_{BZ})$ $V_{BY}=0, V_{BZ}=0$ ，机动段 t 任意时刻反舰导弹的位移和速度分别为 $T = (X_T, Y_T, Z_T)$ 和 $V_T = (V_{TX}, V_{TY}, V_{TZ})$ ，则有：

$$X_T = X_B + V_{TX}t$$

$$Y_T = Y_B + A + A \sin \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$Z_T = Z_B + A \cos \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V_{TX} = V_{BX}$$

$$V_{TY} = \frac{2\pi A}{T} \cos \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V_{TZ} = - \frac{2\pi A}{T} \sin \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2} \right)$$

螺旋机动最大过载为

$$a = A \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2。$$

6.2 舰空导弹拦截模型

设反舰导弹质量为 m ，动量为 $P = mVt$ ，相对于原点 O 的角动量 L ，用速度表示：

$$L = R \times P = mR \times V_t$$

其相对于原点的转动惯量为 I ，矢量 R 的转动角速度为 Ω ，根据转动惯量定义 $I = mR^2$ ，则角动量 L 用角速度表示：

$$L = I \Omega = mR^2 \Omega$$

$$\Omega = R \times V_r / R^2$$

$$V_c = - |V_c| R / |R|$$

由相对速度平行方向分解公式和点积定义式，得：

$$|V_c| = |RV_t| / |R|$$

由上式得

$$V_c = - |RV_r| R / |R|^2$$

真比例引导率的指令加速度 a_m 施加在垂直于视线的方向，其大小正比于接近速度 V_c 大小和视线角速率 $|\Omega|$ 的乘积，即：

$$|a_m| = N |V_c| |\Omega|$$

由右手螺旋定则知 Ω 垂直于视线转移平面内的矢量 a_m 和 V_c ，且相互垂直，所以导引律矢量形式为

$$a_m = N V_c \times \Omega$$

$$a_m = - N |RV_r| R \times (R \times V_r)$$

理想情况下，视线角速度只是由相对运动产生的，事实上它还受进入导引头闪烁噪声、接收机噪声和角噪声等大量干扰因素的影响[12]，由中心极限定理知，满足一定条件下大量随机变量和的极限是高斯分布的，所以可以合理假设导引头输出量视线角速率上存在一个符合 $N(\zeta, \sigma^2)$ 高斯噪声 x ，视线角速度的方向仍然不变。则有：

$$\Omega' = (|\Omega| + x) \Omega / |\Omega|$$

加速度受弹体操作力矩的限制，不一定能满足上述指令加速度的要求，实际作用于弹体的加速度

$$a_m' = a_m, |a_m| < a_{max}$$

$$a_m' = a_{max} (a_m / |a_m|), |a_m| > a_{max}$$

加速度和速度，速度和位移的关系为：

$$dv_M / dt = a_M$$

$$dr_M / dt = V_M$$

若已知舰空导弹的初始位移和速度和目标的运动方程，可以通过数值积分的

方法计算出任意时刻舰空导弹的运动状态。

6.3 模型求解与分析

6.3.1 弹道仿真

模型仿真，仿真步长 0.001s, 有效导航比为 4. 反舰导弹的速度为 550m/s

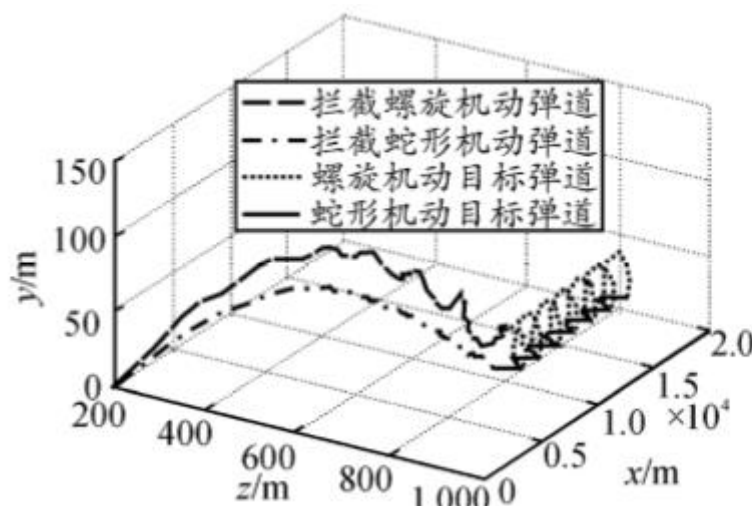


图 2 种机动的拦截弹道

6.3.2 蒙特卡罗算法模型：

把拦截蛇形机动、螺旋机动脱靶量进行 500 次蒙特卡罗仿真结果，用变步长法精确仿真实际脱靶量，制导盲区距离设为 150 m，为了方便比较，表中目标机动和视线角速率噪声选取 11 种不同的组合。

6.3.3 蒙特卡罗求解

蒙特卡罗方法的解题过程可以归结为三个主要步骤：构造或描述概率过程；实现从已知概率分布抽样；建立各种估计量

把拦截蛇形机动、螺旋机动脱靶量进行 500 次蒙特卡罗仿真结果，用变步长法精确仿真实际脱靶量，制导盲区距离设为 150 m，为了方便比较，表中目标机动和视线角速率噪声选取 11 种不同的组合。

表 1：舰空导弹拦截蛇形机动目标脱靶量

序号	A_s/m	T_s/s	N_s	$a_{smax}/(m/s^2)$	$\xi/(mrad/s)$	$\sigma/(mrad/s)$	d_{sm}/m	σ_d/m
1	20.0	2.00	7	20.0	0	0	0.50	0
2	20.0	2.00	7	20.0	4	4	1.63	0.17
3	20.0	2.00	7	20.0	4	8	1.87	0.31
4	20.0	2.00	7	20.0	8	4	2.90	0.24
5	20.0	2.00	7	20.0	8	8	3.27	0.46
6	26.7	2.00	7	26.7	4	4	8.09	0.25
7	26.7	2.00	7	26.7	4	8	8.34	0.51
8	26.7	2.00	7	26.7	8	4	11.37	0.31
9	26.7	2.00	7	26.7	8	8	11.83	0.59
10	20.0	1.73	8	26.7	4	4	6.68	0.28
11	20.0	1.73	8	26.7	8	8	9.46	0.62

表 2：舰空导弹拦截螺旋机动目标脱靶量

序号	A_l/m	T_l/s	N_l	$a_{lmax}/(m/s^2)$	$\xi/(mrad/s)$	$\sigma/(mrad/s)$	d_{sl}/m	σ_d/m
1	20.0	2.00	7	20.0	0	0	1.20	0
2	20.0	2.00	7	20.0	4	4	2.29	0.17
3	20.0	2.00	7	20.0	4	8	2.75	0.35
4	20.0	2.00	7	20.0	8	4	3.74	0.24
5	20.0	2.00	7	20.0	8	8	4.16	0.46
6	26.7	2.00	7	26.7	4	4	11.79	0.32
7	26.7	2.00	7	26.7	4	8	12.41	0.69
8	26.7	2.00	7	26.7	8	4	13.54	0.31
9	26.7	2.00	7	26.7	8	8	14.04	0.69
10	20.0	1.73	8	26.7	4	4	9.52	0.27
11	20.0	1.73	8	26.7	8	8	11.96	0.58

6.4 模型命中率分析

基于蒙特卡罗算法的导弹终段模型：

- 1、在同样噪声条件下，相同幅度、周期和最大机动过载的螺旋机动比蛇形机动造成的脱靶量平均值大，脱靶量标准差基本相同。
- 2、如果舰空导弹过载限制 30g，反舰导弹最大机动过载 20g，经仿真知，对于蛇形机动需要噪声均值和标准差都超过 9×10^{-3} rad/s，对于螺旋机动要超过 8×10^{-3} rad/s，即可造成反舰导弹的脱靶量均值大于 4 m，如果其杀伤距离为 4 m，这样大小的噪声干扰会大大减小反舰导弹的命中概率。
- 3、相同最大过载条件下，蛇形机动和螺旋机动的机动幅度增大比机动周期减小造成的脱靶量大，即机动幅度大比机动次数多的反舰导弹更难拦截。

6.5 相对误差分析

- 1、问题一中，航母静态坐标为（378591.2，-11388.7）

打击位置为（378500，-11400）

相对距离 $\Delta r = 91m$

$\Delta r < 335m$ (舰长), 所以静态模型误差较小，模型建立较成功。

2、问题二中， $r=285009$ ，导弹速度 $V_T=700\text{m/s}$ ，目标速度 $V_M=16.46\text{m/s}$ ，预计到达时间 T 为 400s

则预计时间 $T_1=r/(V_T-V_M)=416\text{s}$

误差 $\Delta T=T_1-T=16\text{s}$

距离误差 $\Delta S=\Delta T(V_T-V_M)=10936.6\text{m}$

相对误差为 $\Delta N=\Delta S/r=0.038$ ，相对误差较小，但是误差距离较大，模型存在误差需修正。

七、模型评价、推广与改进

7.1 模型的优点

7.1.1 基于微分方程的静态轨道模型

1. 利用 4/5 阶龙格库塔法求解导弹运行轨迹微分方程，相对于欧拉法以及改进的欧拉法具有更高的精度。
2. 我们将无制导导弹打击航母静态模型分为三段：瞄准段（垂直发射后需瞄准目标）、巡航段、打击段（近似看成竖直击中目标，因为通常各种检测设备的盲区在正上方），而不是简单的抛物线，更符合导弹打击静态目标实际情况。

7.1.2 基于比例制导法的动态模型

1. 比例引导法要求导弹飞行过程中，保持速度矢量的转动角速度与目标视线的转动角速度成给定的比例关系。这使得导弹的理想弹道的曲率较小，尤其到后期的需用过载较小。从响应速度和制导精度上来讲，比例导引法都具有较大的优势。

2. 可以得到较为平直的弹道，在满足 $K > \frac{2|r|}{V_d \cos \eta}$ 的条件下，弹道前段能充分利用

导弹的机动能力；导弹后端则较为平直，使导弹具有较富裕的机动能力，只要参数组合适当，就可以使全弹道上的需用过载小于可用过载而实现全向攻击。

它对瞄准发射时的初始条件要求不严，只需要测量 q 、 θ 就行。

7.2 模型的缺点

7.2.1 基于微分方程的静态轨道模型

1. 在对导弹进行受力分析时，因为忽略了导弹外形从而未考虑了空气动力学等一系列复杂方程，并将一些变力视为恒力，虽然对模型求解带来了一定的方便但是与实际情况相比会有较大的误差。
2. 未考虑导弹飞行时受到的科里奥利力，所以将整个模型局限在了一个二维竖直平面内，与实际情况不符合。

7.2.2 基于比例制导法的动态模型

1. 速度变化对命中点过载有影响。
2. 攻击方向对过载有影响。

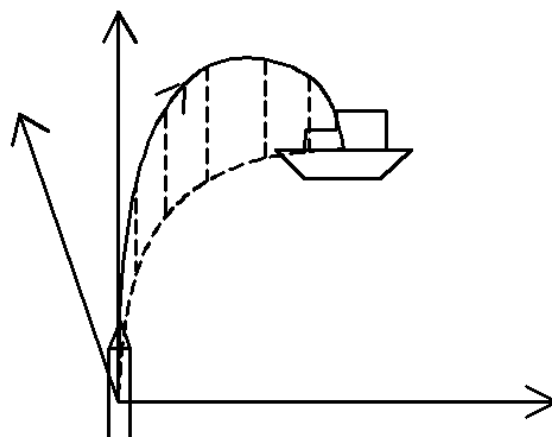
7.3 模型的优化思路

在模型的优化中我们需要进一步考虑导弹的实际受力情况，主要是科里奥利力以及空气对导弹的作用力，在这里我们以科里奥利力为例。

科里奥利力的产生是由于选取的动参考系在转动，会为在该参考系中运动的物体附加一个加速度即科氏加速度 a_k ，科氏加速度的定义式为

$$a_k = -2\omega \times v_r$$

其中， ω 为参考系转动的角速度，其方向遵循右手螺旋法则，在该导弹打击航母模型中，由于导弹处在地球的参考系中，地球的自转方向是逆时针，所以其角速度方向指向北极。 v_r 为物体相对于动参考系的运动方向，负号的含义为科氏加速度的方向与 $2\omega \times v_r$ 的方向相反。在我们的模型中，由于导弹与航母均处于北半球，所以导弹在飞行过程中会始终受到一个垂直于速度方向且向右的科氏力，对轨迹的影响预测如下图。



参考文献

- [1] A. A. 德米特里耶夫斯基著, 孟宪昌译, 外弹道学, 国防工业出版社, 1977。
- [2] 华崛编, 50102 讲义, 北京科学教育出版社, 1961。
- [3] 赵凡编, 50103 讲义, 北京科学教育出版社, 1961。
- [4] B. 埃特肯著, 何植岱等译, 大气飞行动力学, 科学出版社, 1970。
- [5] 陈士橹, 吕学富合编, 导弹飞行力学, 西北工业大学印刷, 1974。
- [6] 吴义明, 齐欢, 地空导弹追踪法的改进, 华中科技大学系统工程研究所, 湖北武汉, 430074。
- [7] 周开利, 邓春晖. MATLAB 基础及应用教程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007。
- [8] 赵广元. MATLAB 与控制系统仿真实践[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2009。
- [9] 张德丰. 雷晓平. 周燕. MATLAB 基础与工程应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011。
- [10] 李庆杨. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008. 。
- [11] 罗小明. 弹道导弹攻防对抗的建模与仿真[M]. 北京: 国防工业出版社. 2009。
- [12] 王正. 林王琪. MATLAB/Simulink 与控制系统仿真[M]. 北京: 电子工业出版社. 2008。
- [13] 孟秀云. 导弹制导与控制系统原理. 北京: 理工大学出版社, 2003. 2。
- [14] 赵善友. 防空导弹武器寻的制导控制系统设计. 北京: 宇航出版社, 1996。
- [15] 刘兴堂. 导弹制导控制系统分析、设计与仿真. 西安: 西北工业大学出版社, 2006. 1
- [16] 张葛祥, 李娜. 《MATLAB 仿真技术与应用》电子书. 北京: 清华大学出版社, 2003。
- [17] 戴嘉尊, 邱建贤, 微分方程数值解法, 南京: 东南大学出版社, 2003