

# Projekt2

Alicja Wiączkowska

2024-12-23

## Contents

<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>Opcje Eurpoejskie</b>	<b>2</b>
Wzór Blacka-Scholesa . . . . .	2
Estymator Crude Monte Carlo . . . . .	3
Zmienne antytetyczne . . . . .	3
Estymator zmiennych kontrolnych . . . . .	4
Stratyfikacja . . . . .	4
<b>Opcje azjatyckie</b>	<b>4</b>
Estymator Crude Monte Carlo . . . . .	5
Stratyfikacja . . . . .	5
<b>Wnioski / Podsumowanie</b>	<b>6</b>

## Wstęp

Opcja to instrument finansowy dający prawo m.in. do zakupu danego towaru w przyszłości po obecnie ustalonej cenie. Zfinalizowanie opcji nie jest obowiązkowe - można z niego zrezygnować np. w momencie gdy cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy spadnie poniżej ceny wykonania opcji.

W pracy będziemy rozważać dwa rodzaje opcji:

- **europejskie**, których wypłata (zysk wynikający z zakupu opcji) zależy jedynie od ceny rynkowej towaru, którego dotyczyła umowa w czasie realizacji opcji,
- **azjatyckie**, na których wypłatę wpływa cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w kilku punktach czasu.

W pracy zajmiemy się estymacją wartości oczekiwanej wypłaty opcji kupna w momencie wykonania  $T = 1$ . Do modelowania opcji użyty zostanie geometryczny ruch Browna  $GBM(\mu, \sigma)$  danej wzorem:

$$S(t) = S_0 \cdot e^{\mu^* t + \sigma B(t)} = S_0 \cdot \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot B(t) \right),$$

gdzie:

- $t \in [0, T] = [0, 1]$  - chwila w której badana jest wartość geometrycznego ruchu Browna,
- $B(t)$  - ruch Browna,
- $\sigma = 0.25$  - zmienność,
- $r = 0.05$  - stopa procentowa,
- $\mu^* = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) = 0.01875$  - stała zależna od zmienności i stopy procentowej,
- $S_0 = S(0) = 100$  - wartość początkowa, którą można interpretować jako cenę towaru w chwili 0.

## Opcje Europejskie

Oczekowaną wypłatę opcji europejskich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+] = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[\max\{S(1) - K, 0\}],$$

gdzie:  $K = 100$  - cena wykonania opcji,  $S(t) = S(1)$  - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie realizacji opcji  $T = 1$ .

## Wzór Blacka-Scholesa

Dla opcji europejskich wartość  $I$  można dokładnie wyliczyć korzystając ze wzoru Blacka-Scholesa:

$$e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+] = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K e^{-r} \Phi(d_2),$$

gdzie:

- $\Phi$  - dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,

- $d_1 = \frac{1}{\sigma} \left[ \ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + r + \frac{\sigma^2}{2} \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma$ .

Przy parametrach:  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$  otrzymamy wartość teoretyczną:

$$I = e^{-0.05} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - 100)_+] = 12.336.$$

## Estymator Crude Monte Carlo

W celu wyestymowania wartości  $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+]$  wygenerowano  $R = 5000$  replikacji  $Y_1, Y_2, \dots, Y_R$  będących realizacjami zmiennej losowej  $e^{-r} \cdot (S(1) - K)_+$ . Wówczas  $\mathbb{E}[Y_i] = I$ , a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna  $S(1) = S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma B(1)}$ , zmienną  $B(1)$  - wartość ruchu Browna w chwili  $t = 1$  - możemy zasymulować losową liczbą z rozkładu  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Wariancję tego estymatora obliczamy następująco:

$$Var(\hat{Y}_R^{CMC}) = Var\left(\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y_i\right) = \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^R Var(Y_i) = \frac{Var(Y_1)}{R} = \dots$$

## [1] 12.01691

## Zmienne antyetyczne

Jest to jedna z metod redukcji wariancji. Opierająca się na fakcie, że dla zależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  zachodzi

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \left(\sum_{i=1}^N Var(X_i)\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} Cov(X_i, X_j)$$

Zasadniczym krokiem jest takie dobranie par zmiennych, aby ich kowariancja była ujemna i możliwie duża co do modułu.

Estymując wartość  $I$  tym razem zamiast bazować estymator na  $R = 5000$  niezależnych zmiennych losowych, wykorzystamy pary zmiennych zależnych.

Symulując realizacje wartości ruchu Browna  $B(1)$  wygenerujemy  $R$  par  $(Z, -Z)$ , gdzie  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Oczywiście

$$Cov(Z, -Z) = (-1) \cdot Var(Z) = -1$$

Mamy więc zmienne losowe  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2R-1}, Z_{2R}$  takie że  $Z_{2i} = -Z_{2i-1}$ . Na ich podstawie zbudujemy realizacje wartości opcji europejskiej  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2R-1}, Y_{2R}$  w sposób analogiczny jak w przypadku estymatora *Crude Monte Carlo*:

$$Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma Z_i} - K)_+$$

Ostatecznie estymator zmiennych antytetycznych jest postaci:

$$\hat{Y}_{2R}^{ant} = \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^{2R} Y_i.$$

Zauważmy, że przy ustalonej mocy obliczeniowej przeznaczonej na generowanie liczb pseudolosowych, w przypadku estymatora zmiennych antytetycznych do redukcji wariancji przyczynia się nie tylko ujemna kowariancja zmiennych losowych, ale też fakt, że otrzymujemy dwukrotnie więcej replikacji niż dla estymatora *CMC*.

## [1] 12.22734

## Estymator zmiennych kontrolnych

Również w tej metodzie redukcja wariancji estymatora jest związana z zależnością generowanych zmiennych losowych. Oprócz replikacji  $Y_1, \dots, Y_R$  istotne są również tzw. *zmiennie kontrolne*  $X_1, \dots, X_R$ . Ważnym aspektem tej metody jest silna korelacja między  $Y_i$  a  $X_i$  oraz znajomość wartości oczekiwanej zmiennej kontrolnej. Do estymacji wartości  $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+]$  za zmienne kontrolne przyjmujemy realizację wartości ruchu Browna  $B(1)$ , na podstawie której obliczana zostaje wartość *GBM*. Tak więc mamy

$$X_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma X_i} - K)_+,$$

natomiast sam estymator jest postaci:

$$\hat{Y}_R^{CV} = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot (\hat{X}_R - \mathbb{E}X) = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot \hat{X}_R,$$

gdzie  $\hat{X}_R = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^R X_j$ , natomiast stała  $c$  jest optymalna (gwarantuje najmniejszą wariancję  $\hat{Y}_R^{CV}$ ) gdy spełnia

$$c = \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{Var(X_1)} - \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{1} = -Cov(Y_1, X_1) = -\mathbb{E}[(Y_1 - \mathbb{E}Y_1)(X_1 - \mathbb{E}X_1)] = -\mathbb{E}[(Y_1 - I) \cdot X_1]$$

Wartość  $-Cov(Y_1, X_1)$  nie jest nam znana, więc możemy ją estymować następująco:

$$\hat{c} = \hat{s}_{YX}^2 = -\frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (Y_i - \hat{Y}_R^{CMC}) \cdot X_i$$

## [1] 12.1756

## Stratyfikacja

## Opcje azjatyckie

Oczekowaną wypłatę opcji azjatyckich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(A_n - K)_+]$$

gdzie:

- $A_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S\left(\frac{j}{n}\right)$ ,
- $K = 100$  - cena wykonania opcji,
- $S(t)$  - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie  $t$ .

W przypadku opcji azjatyckich nie istnieje dokładny wzór opisujący wartość  $I$ , dlatego jedynym sposobem na przybliżenie tej wartości jest estymacja.

## Estrymator Crude Monte Carlo

Estymowaną wartością jest  $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(A_n - K)_+]$ . Za liczbę replikacji przyjęto  $R = 5000$ .

Przeprowadzając symulację wygenerowano  $R = 5000$  losowych ścieżek geometrycznego ruchu Browna i dla każdej z nich zapamiętano odpowiednią wartość zmiennej losowej  $A_n$ .

Niech zmienne losowe  $Y_1, Y_2, \dots, Y_R$  będą replikacjami realizacji zmiennej losowej  $e^{-r} \cdot (A_n - K)_+$ . Wówczas  $\mathbb{E}[Y_i] = I$ , a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna  $S(\frac{k}{n}) = S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma B(\frac{k}{n})}$ , zmienną  $B(\frac{k}{n})$  - wartość ścieżki geometrycznego ruchu Browna w chwili  $t = \frac{k}{n}$  - możemy zasymulować poprzez  $B(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^k Z_i$ , gdzie  $Z_i$  jest losową liczbą z rozkładu  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ .

## [1] 8.599591

## Stratyfikacja

Stratyfikacja opiera się na generowaniu ustalonej ilości zmiennych losowych z poszczególnych warstw  $W_1, W_2, \dots, W_m$ . Warstwy muszą być rozłączne i sumować się do zbioru wszystkich wartości, które może osiągnąć stratyfikowana zmienna losowa.

W pracy stratyfikacji poddany zostanie wektor  $\mathbf{B} = (B(\frac{1}{n}), B(\frac{2}{n}), \dots, B(1)) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$  reprezentujący wartości ścieżki ruchu Browna w poszczególnych punktach czasu. Wektor ten ma  $n$ -wymiarowy rozkład normalny o średniej  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ , i macierzy kowariancji  $\Sigma = [Cov(B(\frac{i}{n}), B(\frac{j}{n}))]_{i,j} = [\min\{\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\}]_{i,j}$ .

Zauważmy, że macierz  $\Sigma$  jest symetryczna i dodatnio określona. Możemy więc wykonując rozkład Choleskiego obliczyć (dolnotrójkątną) macierz  $A$ , która spełnia zależność  $\Sigma = AA^T$ . Przekształcając wektor z  $n$ -wymiarowego rozkładu normalnego  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Id)$  macierzą  $A$  otrzymamy realizację wektora  $\mathbf{B}$ .

Rozważmy rodzinę zbiorów  $\{W'_i\}_{i=1}^m$ :

- $W'_1 = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_1)$ ,
- $W'_j = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_j) \setminus \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{j-1})$ , dla  $i = 2, 3, \dots, m-1$ ,
- $W'_m = \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{m-1})$ ,

gdzie  $\mathbb{K}(\mathbf{0}, \rho)$  oznacza  $n$ -wymiarową kulę o środku w  $\mathbf{0}$  i promieniu  $\rho$ . Dobierzmy promienie kul  $r_i$  tak, aby  $\mathbb{P}(\mathbf{Z} \in W'_i) = \frac{1}{m}$ . Mamy więc

$$\frac{i}{m} = \mathbb{P}(\mathbf{Z} \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)) = \mathbb{P}((Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(Z_k \leq r_i) = (\Phi^{-1}(r_i))^n,$$

z czego wynika, że  $r_i = \Phi\left(\sqrt{\frac{i}{m}}\right)$  dla  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , gdzie  $\Phi$  oznacza dystrybucję standardowego rozkładu normalnego. Wówczas możemy zdefiniować warstwy  $W_i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{z} \in W'_i\}$ .

Wygenerujmy teraz wektor losowy  $\mathbf{Z}^{(i)} = (\mathbf{Z} \mid \mathbf{Z} \in W'_i)$ , który potem będziemy mogli przekształcić na zmienną z wybranej warstwy  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{B} \in W_i) = A\mathbf{Z}^{(i)}$ . Zaczniemy od wylosowania punktu na  $n$ -wymiarowej sferze jednostkowej  $\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}$  dla  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , gdzie  $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Następnie wylosujemy wartość  $D^{(i)}$  - odległość  $\mathbf{Z}^{(i)}$  od  $\mathbf{0}$ . Wiemy że  $\frac{2}{i} = \|Z^{(i)}\|^2 = \sum_{k=1}^n Z_k^{(i)} \sim \chi_n^2$ , zatem mając do dyspozycji zmienną ze standardowego rozkładu jednostajnego  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  dostaniemy

$$D^{(i)} = \sqrt{F_{\chi_n^2}^{-1} \left( \frac{i-1}{m} + \frac{U}{m} \right)},$$

gdzie  $F_{\chi_n^2}^{-1}$  jest dystrybucją odwrotną rozkładu  $\chi^2$  z  $n$  stopniami swobody. Ostatecznie otrzymujemy  $\mathbf{Z}^{(i)} = D^{(i)} \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}$ .

Dla każdej warstwy  $W_i$  na podstawie  $\mathbf{Z}^{(i)}$  budujemy wektory wartości ścieżki ruchu Browna  $\mathbf{B}$ , które później przekształcamy na wektory  $S$  wartości geometrycznego ruchu Browna. Następnie dla każdej warstwy tworzymy zmienne losowe  $Y_i$  i obliczamy ich estymator *CMC*. Ostateczny estymator stratyfikacji ma postać

$$\hat{Y}_R^{str} = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \hat{Y}_{R_j}^{CMC(j)},$$

gdzie  $R_j$  oznacza liczebność  $j$ -tej warstwy, a  $p_j = \frac{R_j}{R}$ . Dla każdej z  $m =$  warstw wygenerowano  $\frac{R}{m} =$  relizacji wektora losowego  $Y_i$ .

## Wnioski / Podsumowanie