# Projekt2

Alicja Wiączkowska

2024-12-23

## Contents

# Wstęp

Opcja to instrument finansowy dający prawo m.in. do zakupu danego towaru w przyszłości po obecnie ustalonej cenie. Zfinalizowanie opcji nie jest obiwiązkowe - można z niego zrezygnować np. w momencie gdy cena rynkowa towaru będącego przedmoitem umowy spadnie poniżej ceny wykonania opcji.

W pracy będziemy rozważać dwa rodzaje opcji:

- **europejsie**, których wypłata (zysk wynikający z zakupu opcji) zależy jedynie od ceny rynkowej towaru, kórego dotyczyła umowa w czasie realizacji opcji,
- **azjatyckie**, na których wypłatę wpływa cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w kilku punktach czasu.

W pracy zajmiemy się estymacją wartości oczekiwanej wypłaty opcji kupna w momencie wykonania $T = 1$. Do modelowania opcji użyty zostanie geometryczny ruch Browna $GBM(\mu, \sigma)$ daney wzorem:

$$S(t) = S_0 \cdot e^{\ \mu^* t + \sigma B(t)} = S_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot B(t)\right),$$

gdzie:

- $t \in [0, T] = [0, 1]$ - chwila w której badana jest wartość geometrycznego ruchu Browna,
- $B(t)$ - ruch Browna,
- $\sigma = 0.25$ - zmienność,
- $r = 0.05$ - stopa procentowa,
- $\mu^* = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) = 0.01875$ - stała zależna od zmienności i stopy procentowej,
- $S_0 = S(0) = 100$ - wartość początkowa, którą można interpretować jako cenę towaru w chwili 0.

# Opcje Eurpoejskie

Oczekowaną wypłatę opcji europejskich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S(1) - K)_+\right] = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[max\{S(1) - K, 0\}\right],$$

gdzie: $K = 100$ - cena wykonania opcji, $S(t) = S(1)$ - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie realizacji opcji $T = 1$.

## Wzór Blacka-Scholesa

Dla opcji europejskich wartość $I$ można dokładnie wyliczyć korzystając ze wzoru Blacka-Scholesa:

$$e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S(1) - K)_+\right] = S_0 \cdot \Phi(d_1) - Ke^{-r}\Phi(d_2),$$

gdzie:

- $\Phi$ - dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$,

- $d_1 = \frac{1}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + r + \frac{\sigma^2}{2}\right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma$.

Przy parmetrach: $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $S_0 = 100$, $K = 100$ otrzymamy wartość teoretyczną:

$$I = e^{-0.05} \cdot \mathbb{E}\left[(S(1) - 100)_+\right] = 12.336.$$

## Estrymator Crude Monte Carlo

W celu wyestymowania wartości $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S(1) - K)_+\right]$ wygenerowano $R = 5000$ replikacji $Y_1, Y_2, ..., Y_R$ będących realizacjami zmiennej losowej $e^{-r} \cdot (S(1) - K)_+$. Wówczas $\mathbb{E}[Y_i] = I$, a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna $S(1) = S_0 \cdot e^{\ \mu^* + \sigma B(1)}$, zmienną $B(1)$ - wartość ruchu Browna w chwili $t = 1$ - możemy zasymulować losową liczbą z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Wariancję tego estymatora obliczamy następująco:

$$Var\left(\hat{Y}_R^{CMC}\right) = Var\left(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Y_i\right) = \frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{R} Var(Y_i) = \frac{Var(Y_1)}{R} = ...$$

```
## [1] 12.01691
```

## Zmienne antytetyczne

Jest to jedna z metod redukcji wariancji. Opierająca się na fakcie, że dla zależnych zmiennych losowych $X$ i $Y$ zachodzi

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$$
$$Var\left(\sum_{i=1}^{N} Xi\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} Var(X_i)\right) + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} Cov(X_i, X_j)$$

Zasadniczym krokiem jest takie dobranie par zmiennych, aby ich kowariancja była ujemna i możliwie duża co do modułu.

Estymując wartość $I$ tym razem zamiast bazować estymator na $R = 5000$ niezależnych zmiennych losowych, wykorzystamy pary zmiennych zależnych.

Symulując realizacje wartości ruchu Browna $B(1)$ wygenerujemy $R$ par $(Z, -Z)$, gdzie $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Oczywiście

$$Cov(Z, -Z) = (-1) \cdot Var(Z) = -1$$

Mamy więc zmienne losowe $Z_1, Z_2, ..., Z_{2R-1}, Z_{2R}$ takie że $Z_{2i} = -Z_{2i-1}$. Na ich podstwie zbudujemy realizacje wartości opcji europejsiej $Y_1, Y_2, ..., Y_{2R-1}, Y_{2R}$ w sposób analogiczny jak w przypadku estymatora *Crude Monte Carlo*:

$$Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\ \mu^* + \sigma Z_i} - K)_+$$

Ostatecznie estymator zmiennych antytetycznych jest postci:

$$\hat{Y}_{2R}^{ant} = \frac{1}{2R}\sum_{i=1}^{2R} Y_i.$$

Zauważmy, że przy ustalonej mocy obliczeniowej preznaczonej na generowanie liczb pseudolosowych, w przypadku estymatora zmiennych antytetycznych do redukcji wariancji przyczynia się nie tylko ujemna kowariancja zmiennych losowych, ale też fakt, że otrzymujemy dwukrotnie więcej replikacji niż dla estymatora *CMC*.

```
## [1] 12.22734
```

### Estymator zmiennych kontrolnych

Również w tej metodzie redukcja wariancji estymatora jest związana z zależnoscią generowanych zmiennych losowych. Oprócz replikacji $Y_1, ..., Y_R$ istotne są również tzw. *zmienne kontrolne* $X_1, ..., X_R$. Ważnym aspektem tej metody jest silna korelacja między $Y_i$ a $X_i$ oraz znajomość wartości oczekiwanej zmiennej kontrolnej. Do estymacji wartości $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S(1) - K)_+\right]$ za zmienne kontrolne przyjmiemy realizację wartości ruchu Browna $B(1)$, na podstawie której obliczana zostaje wartość $GBM$. Tak więc mamy

$$X_i \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\ \mu^* + \sigma X_i} - K)_+,$$

natomiast sam estymtor jest postaci:

$$\hat{Y}_R^{CV} = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot \left(\hat{X}_R - \mathbb{E}X\right) = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot \hat{X}_R,$$

gdzie $\hat{X}_R = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^R X_j$, natomiast stała $c$ jest optymalna (gwarantuje najmniejszą wariancję $\hat{Y}_R^{CV}$) gdy spełnia

$$c = \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{Var(X_1)} - \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{1} = -Cov(Y_1, X_1) = -\mathbb{E}[(Y_1 - \mathbb{E}Y_1)(X_1 - \mathbb{E}X_1)] = -\mathbb{E}[(Y_1 - I) \cdot X_1]$$

Wartość $-Cov(Y_1, X_1)$ nie jest nam znana, więc możemy ją estymować następująco:

$$\hat{c} = \hat{s}^2_{_{YX}} = -\frac{1}{R-1}\sum_{i=1}^R \left(Y_i - \hat{Y}_R^{CMC}\right) \cdot X_i$$

```
## [1] 12.1756
```

### Stratyfikacja

## Opcje azjatyckie

Oczekowaną wypłatę opcji azjatyckich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[\left(A_n - K\right)_+\right]$$

gdzie:

- $A_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n S\left(\frac{j}{n}\right)$,
- $K = 100$ - cena wykonania opcji,
- $S(t)$ - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie $t = 1$.

W przypadku opcji azjatyckich nie istieje dokładny wzór opisujący wartość $I$, dlatego jedynym sposobem na przybliżenie tej wartości jest estmacja.

## Estrymator Crude Monte Carlo

Estymowaną wartością jest $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(A_n - K)_+\right]$. Za liczbę replikacji przyjęto $R = 5000$.

Przeporwadzając symulację wygenerowano $R = 5000$ losowych ścieżek geometrycznego ruchu Browna i dla każdej z nich zapamiętano odpowiednią wartość zmiennej losowej $A_n$.

Niech zmienne losowe $Y_1, Y_2, ..., Y_R$ będą replikacjami realizacji zmiennej losowej $e^{-r} \cdot (A_n - K)_+$. Wówczas $\mathbb{E}[Y_i] = I$, a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna $S(\frac{k}{n}) = S_0 \cdot e^{\ \mu^* + \sigma B(\frac{k}{n})}$, zmienną $B(\frac{k}{n})$ - wartość ścieżki geometrycznego ruchu Browna w chwili $t = \frac{k}{n}$ - możemy zasymulować poprzez $B(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^{k} Z_i$, gdzie $Z_i$ jest losową liczbą z rozkładu $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$.

```
## [1] 8.599591
```

## Stratyfikacja

Stratyfikacja opiera się na generowaniu ustalonej ilości zmiennych losowych z poszczególnych warstw $W_1, W_2, ..., W_m$. Warstwy muszą być rozłączne i sumować się do zbioru wszystkich wartości, które może osiągnąć stratyfikowana zmienna losowa.

W pracy stratyfikacji poddany zostanie wektor $\mathbf{B} = \left(B\left(\frac{1}{n}\right), B\left(\frac{2}{n}\right), ..., B\left(1\right)\right) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ reprezentujący wartości ścieżki ruchu Browna w poszczególnych punktach czasu. Wektor ten ma $n$-wymiarowy rozkład normalny o średniej $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$, i macierzy kowariancji $\Sigma = \left[Cov\left(B(\frac{i}{n}), B(\frac{j}{n})\right)\right]_{i,j} = \left[min\left\{\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right\}\right]_{i,j}$.

Zauważmy, że macierz $\Sigma$ jest symetryczna i dodatnio określona. Możemy więc wykonując rozkład Choleskiego obliczyć (dolnotrójkątną) macierz $A$, która spełnia zależność $\Sigma = AA^T$. Przekształcając wektor z $n$-wymiarowego rozkładu normalnego $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Id)$ macierzą $A$ otrzymamy realizację wektora $\mathbf{B}$.

Rozważmy rodzinę zbiorów $\{W_i'\}_{i=1}^m$:

- $W_1' = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_1)$,
- $W_j' = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_j) \backslash \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{j-1})$, dla $i = 2, 3, ..., m-1$,
- $W_m' = \mathbb{R}^m \backslash \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{m-1})$,

gdzie $\mathbb{K}(\mathbf{0}, \rho)$ oznacza $n$-wymiarową kulę o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu $\rho$. Dobierzmy promienie kul $r_i$ tak, aby $\mathbb{P}(\mathbf{Z} \in W_i') = \frac{1}{m}$. Mamy więc

$$\frac{i}{m} = \mathbb{P}\left(\mathbf{Z} \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)\right) = \mathbb{P}\left((Z_1, ..., Z_n) \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(Z_k \le r_i\right) = \left(\Phi^{-1}(r_i)\right)^n,$$

z czego wynika, że $r_i = \Phi\left(\sqrt[n]{\frac{i}{m}}\right)$ dla $i = 1, 2, ..., m-1$, gdzie $\Phi$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Wówczas możemy zdefiniować warstwy $W_i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{z} \in W_i'\}$.

Wygenerujmy teraz wektor losowy $\mathbf{Z}^{(i)} = (\mathbf{Z} \mid \mathbf{Z} \in W_i')$, którą potem będziemy mogli przekształcić na zmienną z wybranej warstwy $(\mathbf{B} \mid \mathbf{B} \in W_i) = A\mathbf{Z}^{(i)}$. Zacznijmy od wylosowania punktu na $n$-wymiarowej sferze jednostkowej $\frac{\boldsymbol{\xi}}{||\boldsymbol{\xi}||}$ dla $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$, gdzie $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Następnie wylosujmy wartość $D_i$ - odległość $\mathbf{Z}^{(i)}$ od $\mathbf{0}$. Wiemy że ${}^2_i = ||Z^{(i)}||^2 = \sum_{k=1}^n Z_k^{(i)} \sim \chi^2_n$, zatem mając do dyspozycji zmienną ze standardowego rozkładu jednostajnego $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ dostaniemy

$$D_i = \sqrt{F^{-1}_{\chi^2_n}\left(\frac{i-1}{m} + \frac{U}{m}\right)},$$

gdzie $F^{-1}_{\chi^2_n}$ jest dystrybuantą rozkładu $\chi^2$ z $n$ stopniami swobody. Ostatecznie otrzymujemy $\mathbf{Z}^{(i)} = D_i \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{||\boldsymbol{\xi}||}$.

# Wnioski / Podsumowanie