

Projekt 2

Estymacja wartości oczekiwanej opcji finansowych

Alicja Wiązkowska

2024-12-23

Contents

Wstęp	2
Opcje Eurpoejskie	2
Wzór Blacka-Scholesa	2
Estymator Crude Monte Carlo	3
Zmienne antytetyczne	3
Estymator zmiennych kontrolnych	4
Stratyfikacja	4
Porównanie estymatorów	5
Opcje azjatyckie	6
Estymator Crude Monte Carlo	6
Stratyfikacja	7
Porównanie estymatorów	8
Podsumowanie	10
Tabela funkcji	10

Wstęp

Opcja to instrument finansowy dający prawo m.in. do zakupu danego towaru w przyszłości po obecnie ustalonej cenie. Sfinalizowanie opcji nie jest obowiązkowe - można z niego zrezygnować np. w momencie gdy cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy spadnie poniżej ceny wykonania opcji.

W pracy będziemy rozważać dwa rodzaje opcji:

- **europejskie**, których wypłata (zysk wynikający z zakupu opcji) zależy jedynie od ceny rynkowej towaru podlegającego umowie w czasie realizacji opcji,
- **azjatyckie**, na których wypłatę wpływa cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w kilku punktach czasu.

W pracy zajmiemy się estymacją wartości oczekiwanej wypłaty opcji kupna w momencie wykonania $T = 1$. Do modelowania opcji użyty zostanie geometryczny ruch Browna $GBM(\mu, \sigma)$ danej wzorem:

$$S(t) = S_0 \cdot \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot B(t) \right) = S_0 \cdot e^{\mu^* t + \sigma B(t)},$$

gdzie:

- $t \in [0, T] = [0, 1]$ - chwila w której badana jest wartość geometrycznego ruchu Browna,
- $B(t)$ - ruch Browna,
- $\sigma = 0.25$ - zmienność,
- $r = 0.05$ - stopa procentowa,
- $\mu^* = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) = 0.01875$ - stała zależna od zmienności i stopy procentowej,
- $S_0 = S(0) = 100$ - wartość początkowa, którą można interpretować jako cenę towaru w chwili 0.

Opcje Europejskie

Oczekowaną wypłatę opcji europejskich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+] = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[\max\{S(1) - K, 0\}],$$

gdzie: $K = 100$ - cena wykonania opcji, $S(t) = S(1)$ - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie realizacji opcji $T = 1$.

Wzór Blacka-Scholesa

Dla opcji europejskich wartość I można dokładnie wyliczyć korzystając ze wzoru Blacka-Scholesa:

$$e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+] = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K e^{-r} \Phi(d_2),$$

gdzie:

- Φ - dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$,

- $d_1 = \frac{1}{\sigma} \left[\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + r + \frac{\sigma^2}{2} \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma$.

Przy parametrach: $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $S_0 = 100$, $K = 100$ otrzymamy wartość teoretyczną:

$$I = e^{-0.05} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - 100)_+] = 12.336.$$

Estymator Crude Monte Carlo

W celu wyestymowania wartości $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+]$ wygenerowano $R = 5000$ replikacji Y_1, Y_2, \dots, Y_R będących realizacjami zmiennej losowej $e^{-r} \cdot (S(1) - K)_+$. Wówczas $\mathbb{E}[Y_i] = I$, a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna $S(1) = S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma B(1)}$, zmienną $B(1)$ - wartość ruchu Browna w chwili $t = 1$ - możemy zasymulować losową liczbą z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zmienne antytetyczne

Jest to jedna z metod redukcji wariancji. Opierająca się na fakcie, że dla zależnych zmiennych losowych X i Y zachodzi

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) &= \left(\sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i)\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Zasadniczym krokiem jest takie dobranie par zmiennych, aby ich kowariancja była ujemna i możliwie duża co do modułu.

Estymując wartość I tym razem zamiast bazować estymator na $R = 5000$ niezależnych zmiennych losowych, wykorzystamy pary zmiennych zależnych.

Symulując realizacje wartości ruchu Browna $B(1)$ wygenerujemy R par $(Z, -Z)$, gdzie $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Oczywiście

$$\text{Cov}(Z, -Z) = (-1) \cdot \text{Var}(Z) = -1$$

Mamy więc zmienne losowe $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2R-1}, Z_{2R}$ takie że $Z_{2i} = -Z_{2i-1}$. Na ich podstawie zbudujemy realizacje wartości opcji europejskiej $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2R-1}, Y_{2R}$ w sposób analogiczny jak w przypadku estymatora *Crude Monte Carlo*:

$$Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma Z_i} - K)_+$$

Ostatecznie estymator zmiennych antytetycznych jest postaci:

$$\hat{Y}_{2R}^{ant} = \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^{2R} Y_i.$$

Zauważmy, że przy ustalonej mocy obliczeniowej przeznaczonej na generowanie liczb pseudolosowych, w przypadku estymatora zmiennych antytetycznych do redukcji wariancji przyczynia się nie tylko ujemna kowariancja zmiennych losowych, ale też fakt, że otrzymujemy dwukrotnie więcej replikacji niż dla estymatora *CMC*.

Estymator zmiennych kontrolnych

Również w tej metodzie redukcja wariancji estymatora jest związana z zależnością generowanych zmiennych losowych. Oprócz replikacji Y_1, \dots, Y_R istotne są również tzw. *zmiennne kontrolne* X_1, \dots, X_R . Ważnym aspektem tej metody jest silna korelacja między Y_i a X_i oraz znajomość wartości oczekiwanej zmiennej kontrolnej. Do estymacji wartości $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+]$ za zmienne kontrolne przyjmujemy realizację wartości ruchu Browna $B(1)$, na podstawie której obliczana zostaje wartość *GBM*. Tak więc mamy

$$X_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma X_i} - K)_+,$$

natomiast sam estymator jest postaci:

$$\hat{Y}_R^{CV} = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot (\hat{X}_R - \mathbb{E}X) = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot \hat{X}_R,$$

gdzie $\hat{X}_R = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^R X_j$, natomiast stała c jest optymalna (gwarantuje najmniejszą wariancję \hat{Y}_R^{CV}) gdy spełnia

$$c = \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{Var(X_1)} - \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{1} = -Cov(Y_1, X_1) = -\mathbb{E}[(Y_1 - \mathbb{E}Y_1)(X_1 - \mathbb{E}X_1)] = -\mathbb{E}[(Y_1 - I) \cdot X_1]$$

Wartość $-Cov(Y_1, X_1)$ nie jest nam znana, więc możemy ją estymować następująco:

$$\hat{c} = -\hat{s}_{YX}^2 = -\frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (Y_i - \hat{Y}_R^{CMC}) \cdot X_i$$

Stratyfikacja

Stratyfikacja opiera się na generowaniu ustalonej ilości zmiennych losowych z poszczególnych warstw W_1, W_2, \dots, W_m . Warstwy muszą być rozłączne i sumować się do zbioru wszystkich wartości, które może osiągnąć stratyfikowana zmienna losowa.

Przeprowadzimy ją na realizacjach wartości ruchu Browna w momencie realizacji opcji $B(1) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Rozważmy rodzinę zbiorów $\{W_i\}_{i=1}^m$, w której

- $W_1 = [-r_1, r_1]$,
- $W_j = [-r_j, -r_{j-1}) \cup (r_{j-1}, r_j]$, dla $i = 2, 3, \dots, m-1$,
- $W_m = \mathbb{R} \setminus [-r_{m-1}, r_{m-1}]$.

Zbiory te możemy interpretować jako pierścienie w przestrzeni 1-wymiarowej. Dobierzmy wartości r_i tak, aby $\mathbb{P}(B \in W_i') = \frac{1}{m}$, co jest równoważne z $\mathbb{P}(B \in [-r_i, r_i]) = \frac{i}{m}$. Otrzymujemy

$$\frac{i}{m} = \mathbb{P}(|B| \leq r_i) = \mathbb{P}(B \leq r_i) - \mathbb{P}(B \leq -r_i) = \Phi^{-1}(r_i) - \Phi^{-1}(-r_i) = 2\Phi^{-1}(r_i) - 1,$$

z czego wynika, że $r_i = \Phi\left(0.5 \cdot \left(\frac{i}{m} + 1\right)\right)$ dla $i = 1, 2, \dots, m-1$, gdzie Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Wygenerujmy teraz zmienną losową $B^{(i)} = (B \mid B \in W_i)$. Zaczniemy od wylosowania znaku $sgn(B^{(i)})$ plus lub minus z równym prawdopodobieństwem 0.5. Losowanie to odpowiada wybraniu punktu na 1-wymiarowej sferze jednostkowej. Następnie wylosujemy wartość $D^{(i)}$ - odległość $B^{(i)}$ od zera. Zauważmy, że $\|B^{(i)}\|^2 = (D^{(i)})^2 \sim \chi_1^2$. Weźmy teraz zmienną z rozkładu jednostajnego $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ i dostaniemy

$$D^{(i)} = \sqrt{F_{\chi_1^2}^{-1}\left(\frac{i-1}{m} + \frac{U}{m}\right)},$$

gdzie $F_{\chi_1^2}^{-1}$ jest dystrybuantą odwrotną rozkładu χ^2 z 1 stopniem swobody. Ostatecznie otrzymamy $B^{(i)} = D^{(i)} \cdot \text{sgn}(B^{(i)})$.

Dla każdej warstwy W_j realizacje wartości ruchu Browna $B^{(j)}$ w chwili 1, przekształcamy na geometryczny ruch Browna, a Następnie dla każdej warstwy tworzymy zmienne losowe Y_i i obliczamy ich estymator CMC . Ostateczny estymator stratyfikacji ma postać

$$\hat{Y}_R^{str} = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \hat{Y}_{R_j}^{CMC(j)},$$

gdzie R_j oznacza liczebność j -tej warstwy, a $p_j = \frac{1}{m}$ prawdopodobieństwo wybrania j -tej warstwy.

Estymator stratyfikacji ma najmniejszą wariancję, gdy

$$R_j = \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i} R,$$

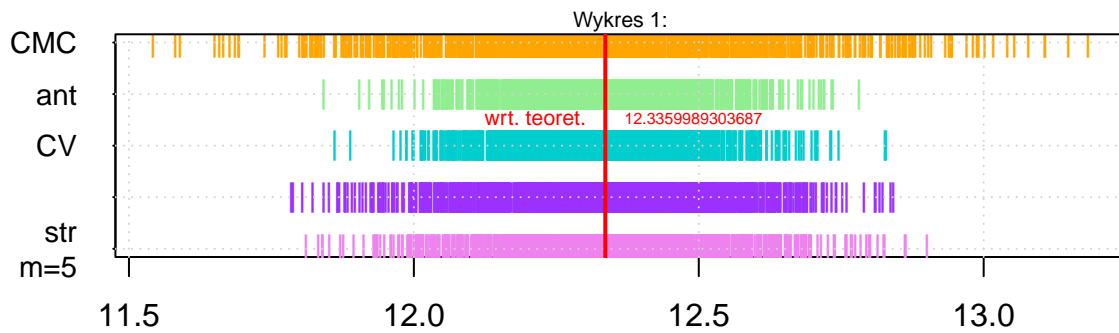
gdzie σ_j oznacza odchylenie standardowe zmiennej losowej $(Y|Y \in W_i)$.

w miejsce odchylenia standardowego $(Y|Y \in W_i)$ do wzoru podstawimy wyestymowaną wartość odchylenia próbkowego s_i . Dla zapewnienia $R_j \in \mathbb{N}$ wynik zaokrąglamy w górę otrzymując ostatecznie

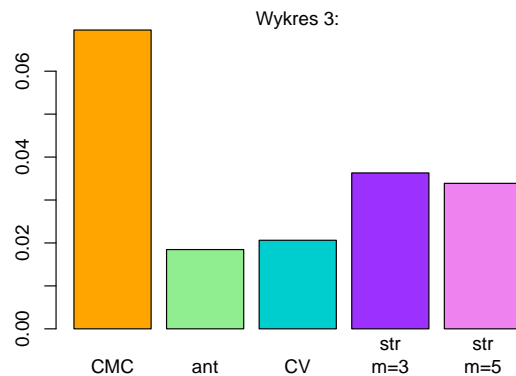
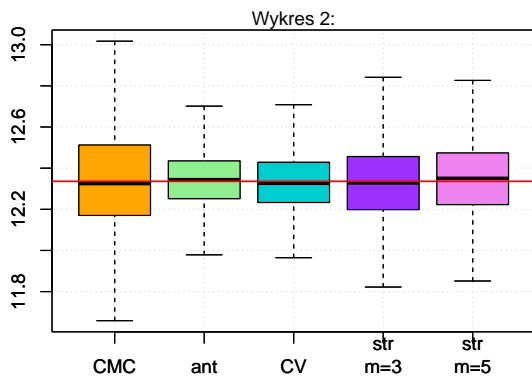
$$R_j = \left\lceil \frac{p_j s_j}{\sum_{i=1}^m p_i s_i} R \right\rceil.$$

Porównanie estymatorów

W celu porównania powyżej opisanych metod, przyjmijmy $R = 5000$ i wygenerujmy po $R' = 1000$ realizacji każdego z estymatorów. Estymator stratyfikacji obliczymy dla liczby warstw $m = 3$ oraz $m = 5$. Poniżej na wykresie możemy zobaczyć wartości obliczonych estymatorów.



Rozrzut każdego z estymatorów możemy dokładniej zobaczyć na poniższym wykresie pudełkowym, w którym odrzucone zostały wartości odstające. Natomiast na z wykresu słupkowego z prawej strony odczytać możemy wartości wariancji dla poszczególnych estymatorów.



Na podstawie zaprezentowanych informacji możemy stwierdzić, że każda z metod redukcji wariancji spełniła swoją rolę - najbardziej rozrzucony okazał się wektor estymatorów *Crude Monte Carlo*. W przypadku zaprezentowanych symulacji najmniejszą wariancję uzyskał estymator zmiennych antytetycznych, porównywalnie dobry wynik uzyskaliśmy również przy estymatorze zmiennych kontrolnych. W przypadku stratyfikacji dostrzec można, że większa liczba warstw miała pewien wpływ na redukcję wariancji estymatora. Niezależnie od metody, wartości wszystkich estymatorów skupiają się wokół obliczonego wyniku teoretycznego.

Opcje azjatyckie

Oczekowaną wypłatę opcji azjatyckich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(A_n - K)_+]$$

gdzie:

- $A_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S\left(\frac{j}{n}\right)$,
- $K = 100$ - cena wykonania opcji,
- $S(t)$ - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie t .

W przypadku opcji azjatyckich nie istnieje dokładny wzór opisujący wartość I , dlatego jedynym sposobem na przybliżenie tej wartości jest estymacja.

Estymator Crude Monte Carlo

Estymowaną wartością jest $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(A_n - K)_+]$. Za liczbę replikacji przyjęto $R = 5000$.

Przeprowadzając symulację wygenerowano $R = 5000$ losowych ścieżek geometrycznego ruchu Browna i dla każdej z nich zapamiętano odpowiednią wartość zmiennej losowej A_n .

Niech zmienne losowe Y_1, Y_2, \dots, Y_R będą replikacjami realizacji zmiennej losowej $e^{-r} \cdot (A_n - K)_+$. Wówczas $\mathbb{E}[Y_i] = I$, a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna $S(\frac{k}{n}) = S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma B(\frac{k}{n})}$, zmienną $B(\frac{k}{n})$ - wartość ścieżki geometrycznego ruchu Browna w chwili $t = \frac{k}{n}$ - możemy zasymulować poprzez $B(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^k Z_i$, gdzie Z_i jest losową liczbą z rozkładu $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$.

Stratyfikacja

Stratyfikacja opiera się na generowaniu ustalonej ilości zmiennych losowych z poszczególnych warstw W_1, W_2, \dots, W_m . Warstwy muszą być rozłączne i sumować się do zbioru wszystkich wartości, które może osiągnąć stratyfikowana zmienna losowa.

W pracy stratyfikacji poddany zostaną realizacje wektora $\mathbf{B} = (B(\frac{1}{n}), B(\frac{2}{n}), \dots, B(1)) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ reprezentujące wartości ścieżki ruchu Browna w poszczególnych punktach czasu. Wektor \mathbf{B} ma n -wymiarowy rozkład normalny o średniej $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, i macierzy kowariancji $\Sigma = [Cov(B(\frac{i}{n}), B(\frac{j}{n}))]_{i,j} = [\min\{\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\}]_{i,j}$.

Zauważmy, że macierz Σ jest symetryczna i dodatnio określona. Możemy więc wykonując rozkład Choleskiego obliczyć (dolnotrójkątną) macierz A , która spełnia zależność $\Sigma = AA^T$. Przekształcając wektor z n -wymiarowego rozkładu normalnego $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Id)$ macierzą A otrzymamy realizację wektora \mathbf{B} .

Rozważmy rodzinę zbiorów $\{W'_i\}_{i=1}^m$:

- $W'_1 = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_1)$,
- $W'_j = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_j) \setminus \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{j-1})$, dla $j = 2, 3, \dots, m-1$,
- $W'_m = \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{m-1})$,

gdzie $\mathbb{K}(\mathbf{0}, \rho)$ oznacza n -wymiarową kulę o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu ρ . Dobierzmy promienie kul r_i tak, aby $\mathbb{P}(\mathbf{Z} \in W'_i) = \frac{i}{m}$. Mamy więc

$$\frac{i}{m} = \mathbb{P}(\mathbf{Z} \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)) = \mathbb{P}((Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(|Z_k| \leq r_i) = (2 \cdot \Phi^{-1}(r_i) - 1)^n,$$

z czego wynika, że $r_i = \Phi\left(0.5 \cdot \sqrt[n]{\frac{i}{m} + 1}\right)$ dla $i = 1, 2, \dots, m-1$, gdzie Φ oznacza dystrybucję standardowego rozkładu normalnego. Wówczas możemy zdefiniować warstwy $W_i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{z} \in W'_i\}$.

Wygenerujemy teraz wektor losowy $\mathbf{Z}^{(i)} = (\mathbf{Z} \mid \mathbf{Z} \in W'_i)$, który potem będziemy mogli przekształcić na zmienną z wybranej warstwy $(\mathbf{B} \mid \mathbf{B} \in W_i) = A\mathbf{Z}^{(i)}$. Zaczniemy od wylosowania punktu na n -wymiarowej sferze jednostkowej $\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}$ dla $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, gdzie $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Następnie wylosujemy wartość $D^{(i)}$ - odległość $\mathbf{Z}^{(i)}$ od $\mathbf{0}$. Wiemy że $\|\mathbf{Z}^{(i)}\|^2 = \sum_{k=1}^n (Z_k^{(i)})^2 \sim \chi_n^2$, zatem mając do dyspozycji zmienną ze standardowego rozkładu jednostajnego $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ dostaniemy

$$D^{(i)} = \sqrt{F_{\chi_n^2}^{-1}\left(\frac{i-1}{m} + \frac{U}{m}\right)},$$

gdzie $F_{\chi_n^2}^{-1}$ jest dystrybucją odwrotną rozkładu χ^2 z n stopniami swobody. Ostatecznie otrzymujemy $\mathbf{Z}^{(i)} = D^{(i)} \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}$.

Dla każdej warstwy W_i na podstawie $\mathbf{Z}^{(i)}$ budujemy wektory wartości ścieżki ruchu Browna \mathbf{B} , które później przekształcamy na wektory S wartości geometrycznego ruchu Browna. Następnie dla każdej warstwy tworzymy zmienne losowe Y_i i obliczamy ich estymator CMC. Ostateczny estymator stratyfikacji ma postać

$$\hat{Y}_R^{str} = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \hat{Y}_{R_j}^{CMC^{(j)}},$$

gdzie R_j oznacza liczebność j -tej warstwy, a $p_j = \frac{1}{m}$ prawdopodobieństwo wybrania j -tej warstwy.

Estymator stratyfikacji ma najmniejszą wariancję, gdy

$$R_j = \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i} R,$$

gdzie σ_j oznacza odchylenie standardowe zmiennej losowej $(Y|Y \in W_i)$.

Niestety wartość odchylenia standardowego $(Y|Y \in W_i)$ nie są znane, więc do wzoru podstawimy wyestymowaną wartość odchylenia próbkowego s_i . Dla zapewnienia $R_j \in \mathbb{N}$ wynik zaokrąglamy w górę otrzymując ostatecznie

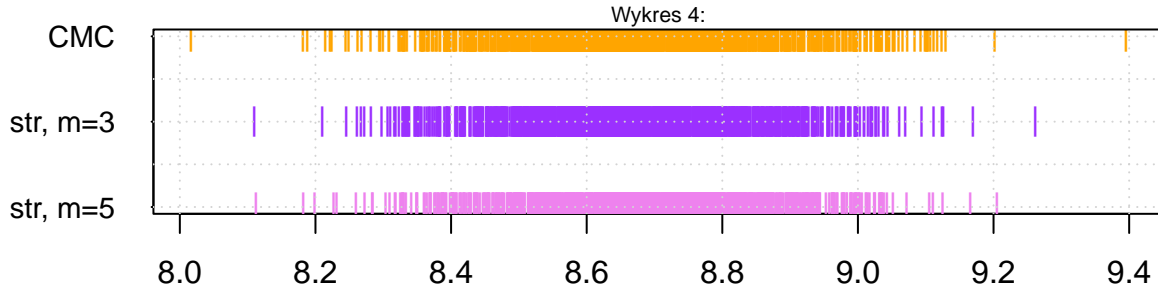
$$R_j = \left\lceil \frac{p_j s_j}{\sum_{i=1}^m p_i s_i} R \right\rceil.$$

Porównanie estymatorów

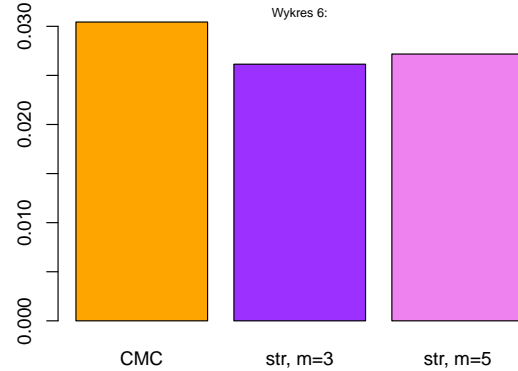
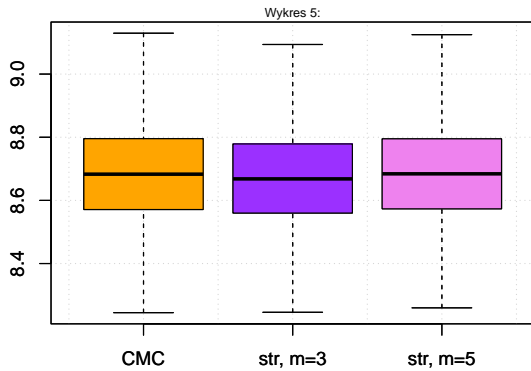
W celu porównania opisanych metod, rozważymy dwa przypadki: $n = 3$ oraz $n = 10$. Przyjmijmy ponownie $R = 5000$ i wygenerujmy po $R' = 1000$ realizacji każdego z estymatorów. Estymatory stratyfikacji obliczymy dla $m = 3$ oraz $m = 5$ warstw.

n = 3

Zajmijmy się najpierw opcjami, których wartość zależy od ceny w $n = 3$ punktach czasu. Poniżej możemy zobaczyć wartości obliczonych estymatorów.



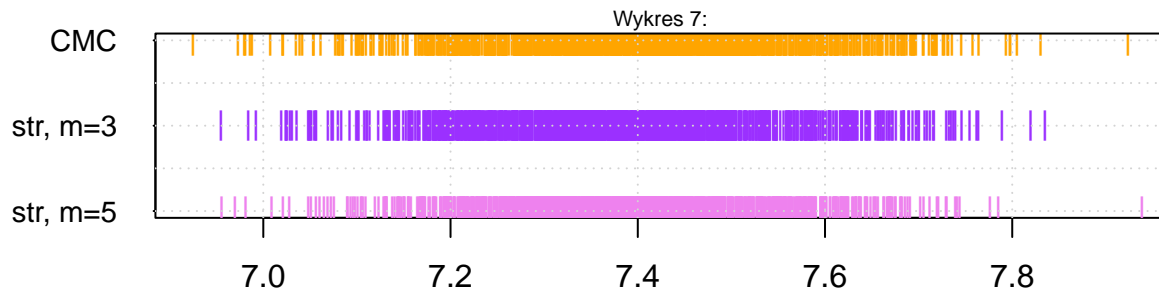
Już z wykresu 4 możemy wywnioskować, że najbardziej skrajne wartości znaleźć możemy w estymatorze *CMC* - co jest zgodne z intuicją. Zauważyć też można, że rozważane estymatory stratyfikacji zwracają zbliżone wyniki. Więcej szczegółów dotyczących rozrzutu rozważanych estymatorów możemy odczytać z poniższego wykresu pudełowego oraz wykresu słupkowego przedstawiającego obliczone wariancje.



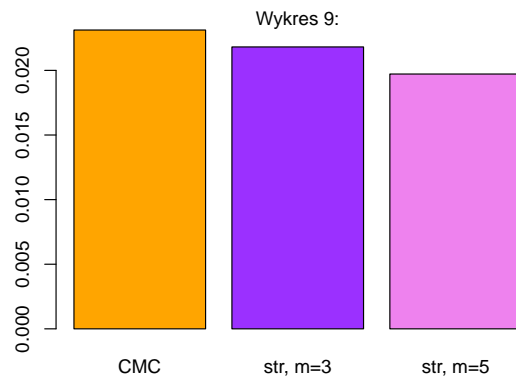
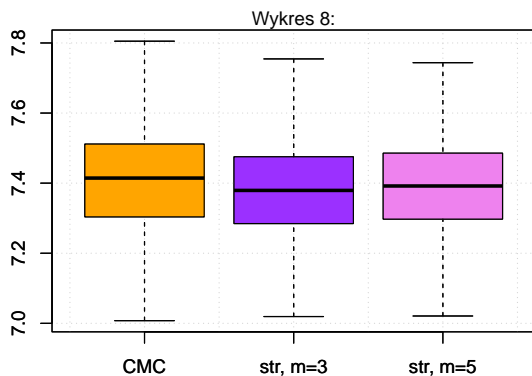
Po usunięciu wartości odstających rozkłady dla wszystkich estymatorów prezentują się podobnie, jednak na wykresie wariacji możemy zauważyć, że stratyfikacja wpłynęła na zmniejszenie rozrzutu. Liczba warstw nie miała większego znaczenia, lepszy efekt uzyskano przy $m = 3$. Doświadczenie sugeruje, że przy $n = 3$ badana wartość oczekiwana opcji azjatyckiej I wynosi w przybliżeniu 8.7.

$n = 10$

Rozważmy teraz opcje, których wartość zależy od ceny rynkowej w $n = 10$ punktach czasu. Na wykresie 7 przedstawiono realizacje estymatorów wartości I .



Z powyższego wykresu widzimy, że estymatory stratyfikacji dla $m = 3$ i $m = 5$ są podobnie rozrzucone i prawdopodobnie mają mniejsze odchylenie standardowe niż estymator CMC , jednak więcej szczegółów możemy odczytać z wykresu 8 i 9.



Na wykresie pudełowym możemy zaobserwować potwierdzenie faktu, iż estymator *Crude Monte Carlo* ma największy rozrzut oraz o podobieństwie wyników dla estymatorów stratyfikacji. Najmniejszą wariancję uzyskano dla stratyfikacji o $m = 5$ warstwch, największą dla estymatora *CMC*. Doświadczenie sugeruje, że badana wartość I najprawdopodobniej wynosi około 7.4.

Podsumowanie

Wszystkie opisane metody redukcji wariancji w przypadku badania wartości oczekiwanej opcji finansowych spełniły swoją rolę - zmniejszyły rozrzut estymowanej wartości. Niezależnie od metody, estymatory zbiegały do podobnej wartości, a w przypadku opcji europejskich mamy pewność, że zbiegają one do wartości teoretycznej. Z projektu możemy wywnioskować, że oczekiwana wartość wypłaty I spada wraz ze wzrostem n .

Tabela funkcji

W poniższej tabeli przedstawiono funkcje wywołujące wykresy znajdujące się w pracy.

nr wykresu	chunk	funkcja	parametry
1	plot 1	plot_estymators1	()
2 & 3	boxplot 1	boxplot_estymators1	()
4	plot 3	plot_estymators	(estyms3, est_names, colrs)
5	boxplot 3	boxplot_estymators	(estyms3, est_names, colrs)
6	boxplot 3	vars_barplot	(estyms3, est_names, colrs)
7	plot 10	plot_estymators	(estyms10, est_names, colrs)
8	boxplot 10	boxplot_estymators	(estyms10, est_names, colrs)
9	boxplot 10	vars_barplot	(estyms10, est_names, colrs)