Projekt2

Alicja Wiączkowska

2024-12-23

Contents

Wstęp

Opcja to instrument finansowy dający prawo m.in. do zakupu danego towaru w przyszłości po obecnie ustalonej cenie. Zfinalizowanie opcji nie jest obiwiązkowe - można z niego zrezygnować np. w momencie gdy cena rynkowa towaru będącego przedmoitem umowy spadnie poniżej ceny wykonania opcji.

W pracy będziemy rozważać dwa rodzaje opcji:

- **europejsie**, których wypłata (zysk wynikający z zakupu opcji) zależy jedynie od ceny rynkowej towaru, kórego dotyczyła umowa w czasie realizacji opcji,
- **azjatyckie**, na których wypłatę wpływa cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w kilku punktach czasu.

W pracy zajmiemy się estymacją wartości oczekiwanej wypłaty opcji kupna w momencie wykonania $T = 1$. Do modelowania opcji użyty zostanie geometryczny ruch Browna $GBM(\mu, \sigma)$ daney wzorem:

$$S_t = S_0 \cdot e^{\,\mu^* t + \sigma B_t} = S_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot B_t\right),$$

gdzie:

- $t \in [0, T] = [0, 1]$ - chwila w której badana jest wartość geometrycznego ruchu Browna,
- B_t - ruch Browna,
- $\sigma = 0.25$ - zmienność,
- $r = 0.05$ - stopa procentowa,
- $\mu^* = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ - stała zależna od zmienności i stopy procentowej,
- $S_0 = 100$ - wartość początkowa, którą można interpretować jako cenę towaru w chwili 0.

Opcje Eurpoejskie

Oczekowaną wypłatę opcji europejskich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S_1 - K)_+\right] = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[max\{S_1 - K, 0\}\right],$$

gdzie: $K = 100$ - cena wykonania opcji, $S_T = S_1$ - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie realizacji opcji $T = 1$.

Wzór Blacka-Scholesa

Dla opcji europejskich wartość I można dokładnie wyliczyć korzystając ze wzoru Blacka-Scholesa:

$$e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S_1 - K)_+\right] = S_0 \cdot \Phi(d_1) - Ke^{-r}\Phi(d_2),$$

gdzie:

- Φ - dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$,

- $d_1 = \frac{1}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + r + \frac{\sigma^2}{2}\right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma.$

Przy parmetrach: $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $S_0 = 100$, $K = 100$ otrzymamy wartość teoretyczną:

$$I = e^{-0.05} \cdot \mathbb{E}\left[(S_1 - 100)_+\right] = 12.336.$$

Estrymator Crude Monte Carlo

W celu wyestymowania wartości $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S_1 - K)_+\right]$ wygenerowano $R = 5000$ replikacji $Y_1, Y_2, ..., Y_R$ będących realizacjami zmiennej losowej $e^{-r} \cdot (S_1 - K)_+$. Wówczas $\mathbb{E}[Y_i] = I$, a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna $S_1 = S_0 \cdot e^{\,\mu^* + \sigma B_1}$, zmienną B_1 - wartość ruchu Browna w chwili $t = 1$ - możemy zasymulować losową liczbą z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

Wariancję tego estymatora obliczamy następująco:

$$Var\left(\hat{Y}_R^{CMC}\right) = Var\left(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Y_i\right) = \frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{R} Var(Y_i) = \frac{Var(Y_1)}{R} = ...$$

```
## [1] 12.01691
```

Zmienne antytetyczne

Jest to jedna z metod redukcji wariancji. Opierająca się na fakcie, że dla zależnych zmiennych losowych X i Y zachodzi

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X,Y)$$
$$Var\left(\sum_{i=1}^{N} Xi\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} Var(X_i)\right) + 2\sum_{1 \le i < j \le N} Cov(X_i, X_j)$$

Zasadniczym krokiem jest takie dobranie par zmiennych, aby ich kowariancja była ujemna i możliwie duża co do modułu.

Estymując wartość I tym razem zamiast bazować estymator na $R = 5000$ niezależnych zmiennych losowych, wykorzystamy pary zmiennych zależnych.

Symulując realizacje wartości ruchu Browna B_1 wygenerujemy R par $(Z, -Z)$, gdzie $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Oczywiście

$$Cov(Z, -Z) = (-1) \cdot Var(Z) = -1$$

Mamy więc zmienne losowe $Z_1, Z_2, ..., Z_{2R-1}, Z_{2R}$ takie że $Z_{2i} = -Z_{2i-1}$. Na ich podstwie zbudujemy realizacje wartości opcji europejsiej $Y_1, Y_2, ..., Y_{2R-1}, Y_{2R}$ w sposób analogiczny jak w przypadku estymatora *Crude Monte Carlo*:

$$Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\,\mu^* + \sigma Z_i} - K)_+$$

Ostatecznie estymator zmiennych antytetycznych jest postci:

$$\hat{Y}_{2R}^{ant} = \frac{1}{2R}\sum_{i=1}^{2R} Y_i.$$

Zauważmy, że przy ustalonej mocy obliczeniowej preznaczonej na generowanie liczb pseudolosowych, w przypadku estymatora zmiennych antytetycznych do redukcji wariancji przyczynia się nie tylko ujemna kowariancja zmiennych losowych, ale też fakt, że otrzymujemy dwukrotnie więcej replikacji niż dla estymatora *CMC*.

```
## [1] 12.22734
```

Estymator zmiennych kontrolnych

Również w tej metodzie redukcja wariancji estymatora jest związana z zależnoscią generowanych zmiennych losowych. Oprócz replikacji $Y_1, ..., Y_R$ istotne są również tzw. *zmienne kontrolne* $X_1, ..., X_R$. Ważnym aspektem tej metody jest silna korelacja między Y_i a X_i oraz znajomość wartości oczekiwanej zmiennej kontrolnej. Do estymacji wartości $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(S_1 - K)_+\right]$ za zmienne kontrolne przyjmiemy realizację wartości ruchu Browna B_1, na podstawie której obliczana zostaje wartość GBM. Tak więc mamy

$$X_i \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\;\mu^* + \sigma X_i} - K)_+,$$

natomiast sam estymtor jest postaci:

$$\hat{Y}_R^{CV} = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot \left(\hat{X}_R - \mathbb{E}X\right) = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot \hat{X}_R,$$

gdzie $\hat{X}_R = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} X_j$, natomiast stała c jest optymalna (gwarantuje najmniejszą wariancję $\hat{Y}_R^{CV}$) gdy spełnia

$$c = \frac{-Cov(Y_i, X_i)}{Var(X_i)} - \frac{-Cov(Y_i, X_i)}{1} = -Cov(Y_i, X_i) = -\mathbb{E}[(Y_i - \mathbb{E}Y_i)(X_i - \mathbb{E}X_i)] = -\mathbb{E}[(Y_i - I) \cdot X_i]$$

Wartość $ -Cov(Y_i,X_i)$ nie jest nam znana, więc możemy ją estymować następująco:

$$\hat{c} = \hat{s}^2_{YX} = -\frac{1}{R-1}\sum_{i=1}^{R}\left(Y_i - \hat{Y}_R^{CMC}\right) \cdot X_i$$

```
## [1] 12.1756
```

Stratyfikacja

Opcje azjatyckie

Oczekowaną wypłatę opcji azjatyckich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(A_n - K)_+\right]$$

gdzie:

- $A_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{j/n}\right)$,
- $K = 100$ - cena wykonania opcji,
- $S_T = S_1$ - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie realizacji opcji $T = 1$.

Estrymator Crude Monte Carlo

Estymowaną wartością jest $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}\left[(A_n - K)_+\right]$. Za liczbę replikacji przyjęto $R = 5000$.

Przeporwadzając symulację wygenerowano $R = 5000$ losowych ścieżek geometrycznego ruchu Browna i dla każdej z nich zapamiętano odpowiednią wartość zmiennej losowej A_n.

Niech zmienne losowe $Y_1, Y_2, ..., Y_R$ będą replikacjami realizacji zmiennej losowej $e^{-r} \cdot (A_n - K)_+$. Wówczas $\mathbb{E}[Y_i] = I$, a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{R} Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna $S_{k/n} = S_0 \cdot e^{\ \mu^* + \sigma B_{k/n}}$, zmienną $B_{k/n}$ - wartość ścieżki geometrycznego ruchu Browna w chwili $t = \frac{k}{n}$ - możemy zasymulować poprzez $B_{k/n} = \sum_{i=1}^{k} Z_i$, gdzie Z_i jest losową liczbą z rozkładu $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$.

```
## [1] 8.701756
```

Stratyfikacja

Wnioski / Podsumowanie