

# Projekt 2

Estymacja wartości oczekiwanej opcji finansowych

Alicja Wiązkowska

2024-12-23

## Contents

<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>Opcje Eurpoejskie</b>	<b>2</b>
Wzór Blacka-Scholesa . . . . .	2
Estymator Crude Monte Carlo . . . . .	3
Zmienne antytetyczne . . . . .	3
Estymator zmiennych kontrolnych . . . . .	4
Stratyfikacja . . . . .	4
Porównanie estymatorów . . . . .	5
<b>Opcje azjatyckie</b>	<b>6</b>
Estymator Crude Monte Carlo . . . . .	6
Stratyfikacja . . . . .	7
Porównanie estymatorów . . . . .	8
<b>Podsumowanie</b>	<b>10</b>
<b>Tabela funkcji</b>	<b>10</b>

## Wstęp

Opcja to instrument finansowy dający prawo m.in. do zakupu danego towaru w przyszłości po obecnie ustalonej cenie. Sfinalizowanie opcji nie jest obowiązkowe - można z niego zrezygnować np. w momencie gdy cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy spadnie poniżej ceny wykonania opcji.

W pracy będziemy rozważać dwa rodzaje opcji:

- **europejskie**, których wypłata (zysk wynikający z zakupu opcji) zależy jedynie od ceny rynkowej towaru podlegającego umowie w czasie realizacji opcji,
- **azjatyckie**, na których wypłatę wpływa cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w kilku punktach czasu.

W pracy zajmiemy się estymacją wartości oczekiwanej wypłaty opcji kupna w momencie wykonania  $T = 1$ . Do modelowania opcji użyty zostanie geometryczny ruch Browna  $GBM(\mu, \sigma)$  danej wzorem:

$$S(t) = S_0 \cdot \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot B(t) \right) = S_0 \cdot e^{\mu^* t + \sigma B(t)},$$

gdzie:

- $t \in [0, T] = [0, 1]$  - chwila w której badana jest wartość geometrycznego ruchu Browna,
- $B(t)$  - ruch Browna,
- $\sigma = 0.25$  - zmienność,
- $r = 0.05$  - stopa procentowa,
- $\mu^* = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) = 0.01875$  - stała zależna od zmienności i stopy procentowej,
- $S_0 = S(0) = 100$  - wartość początkowa, którą można interpretować jako cenę towaru w chwili 0.

## Opcje Europejskie

Oczekowaną wypłatę opcji europejskich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+] = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[\max\{S(1) - K, 0\}],$$

gdzie:  $K = 100$  - cena wykonania opcji,  $S(t) = S(1)$  - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie realizacji opcji  $T = 1$ .

## Wzór Blacka-Scholesa

Dla opcji europejskich wartość  $I$  można dokładnie wyliczyć korzystając ze wzoru Blacka-Scholesa:

$$e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+] = S_0 \cdot \Phi(d_1) - K e^{-r} \Phi(d_2),$$

gdzie:

- $\Phi$  - dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,

- $d_1 = \frac{1}{\sigma} \left[ \ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + r + \frac{\sigma^2}{2} \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma$ .

Przy parametrach:  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$  otrzymamy wartość teoretyczną:

$$I = e^{-0.05} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - 100)_+] = 12.336.$$

## Estymator Crude Monte Carlo

W celu wyestymowania wartości  $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+]$  wygenerowano  $R = 5000$  replikacji  $Y_1, Y_2, \dots, Y_R$  będących realizacjami zmiennej losowej  $e^{-r} \cdot (S(1) - K)_+$ . Wówczas  $\mathbb{E}[Y_i] = I$ , a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna  $S(1) = S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma B(1)}$ , zmienną  $B(1)$  - wartość ruchu Browna w chwili  $t = 1$  - możemy zasymulować losową liczbą z rozkładu  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

## Zmienne antytetyczne

Jest to jedna z metod redukcji wariancji. Opierająca się na fakcie, że dla zależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  zachodzi

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y) \\ Var\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) &= \left(\sum_{i=1}^N Var(X_i)\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} Cov(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Zasadniczym krokiem jest takie dobranie par zmiennych, aby ich kowariancja była ujemna i możliwie duża co do modułu.

Estymując wartość  $I$  tym razem zamiast bazować estymator na  $R = 5000$  niezależnych zmiennych losowych, wykorzystamy pary zmiennych zależnych.

Symulując realizacje wartości ruchu Browna  $B(1)$  wygenerujemy  $R$  par  $(Z, -Z)$ , gdzie  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Oczywiście

$$Cov(Z, -Z) = (-1) \cdot Var(Z) = -1$$

Mamy więc zmienne losowe  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2R-1}, Z_{2R}$  takie że  $Z_{2i} = -Z_{2i-1}$ . Na ich podstawie zbudujemy realizacje wartości opcji europejskiej  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2R-1}, Y_{2R}$  w sposób analogiczny jak w przypadku estymatora *Crude Monte Carlo*:

$$Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma Z_i} - K)_+$$

Ostatecznie estymator zmiennych antytetycznych jest postaci:

$$\hat{Y}_{2R}^{ant} = \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^{2R} Y_i.$$

Zauważmy, że przy ustalonej mocy obliczeniowej przeznaczonej na generowanie liczb pseudolosowych, w przypadku estymatora zmiennych antytetycznych do redukcji wariancji przyczynia się nie tylko ujemna kowariancja zmiennych losowych, ale też fakt, że otrzymujemy dwukrotnie więcej replikacji niż dla estymatora *CMC*.

## Estymator zmiennych kontrolnych

Również w tej metodzie redukcja wariancji estymatora jest związana z zależnością generowanych zmiennych losowych. Oprócz replikacji  $Y_1, \dots, Y_R$  istotne są również tzw. *zmiennne kontrolne*  $X_1, \dots, X_R$ . Ważnym aspektem tej metody jest silna korelacja między  $Y_i$  a  $X_i$  oraz znajomość wartości oczekiwanej zmiennej kontrolnej. Do estymacji wartości  $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(S(1) - K)_+]$  za zmienne kontrolne przyjmujemy realizację wartości ruchu Browna  $B(1)$ , na podstawie której obliczana zostaje wartość *GBM*. Tak więc mamy

$$X_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y_i = e^{-r} \cdot (S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma X_i} - K)_+,$$

natomiast sam estymator jest postaci:

$$\hat{Y}_R^{CV} = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot (\hat{X}_R - \mathbb{E}X) = \hat{Y}_R^{CMC} + c \cdot \hat{X}_R,$$

gdzie  $\hat{X}_R = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^R X_j$ , natomiast stała  $c$  jest optymalna (gwarantuje najmniejszą wariancję  $\hat{Y}_R^{CV}$ ) gdy spełnia

$$c = \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{Var(X_1)} - \frac{-Cov(Y_1, X_1)}{1} = -Cov(Y_1, X_1) = -\mathbb{E}[(Y_1 - \mathbb{E}Y_1)(X_1 - \mathbb{E}X_1)] = -\mathbb{E}[(Y_1 - I) \cdot X_1]$$

Wartość  $-Cov(Y_1, X_1)$  nie jest nam znana, więc możemy ją estymować następująco:

$$\hat{c} = -\hat{s}_{YX}^2 = -\frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (Y_i - \hat{Y}_R^{CMC}) \cdot X_i$$

## Stratyfikacja

Stratyfikacja opiera się na generowaniu ustalonej ilości zmiennych losowych z poszczególnych warstw  $W_1, W_2, \dots, W_m$ . Warstwy muszą być rozłączne i sumować się do zbioru wszystkich wartości, które może osiągnąć stratyfikowana zmienna losowa.

Przeprowadzimy ją na realizacjach wartości ruchu Browna w momencie realizacji opcji  $B(1) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Rozważmy rodzinę zbiorów  $\{W_i\}_{i=1}^m$ , w której

- $W_1 = [-r_1, r_1]$ ,
- $W_j = [-r_j, -r_{j-1}) \cup (r_{j-1}, r_j]$ , dla  $i = 2, 3, \dots, m-1$ ,
- $W_m = \mathbb{R} \setminus [-r_{m-1}, r_{m-1}]$ .

Zbiory te możemy interpretować jako pierścienie w przestrzeni 1-wymiarowej. Dobierzmy wartości  $r_i$  tak, aby  $\mathbb{P}(B \in W_i') = \frac{1}{m}$ , co jest równoważne z  $\mathbb{P}(B \in [-r_i, r_i]) = \frac{i}{m}$ . Otrzymujemy

$$\frac{i}{m} = \mathbb{P}(|B| \leq r_i) = \mathbb{P}(B \leq r_i) - \mathbb{P}(B \leq -r_i) = \Phi^{-1}(r_i) - \Phi^{-1}(-r_i) = 2\Phi^{-1}(r_i) - 1,$$

z czego wynika, że  $r_i = \Phi\left(0.5 \cdot \left(\frac{i}{m} + 1\right)\right)$  dla  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , gdzie  $\Phi$  jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Wygenerujmy teraz zmienną losową  $B^{(i)} = (B \mid B \in W_i)$ . Zaczniemy od wylosowania znaku  $sgn(B^{(i)})$  plus lub minus z równym prawdopodobieństwem 0.5. Losowanie to odpowiada wybraniu punktu na 1-wymiarowej sferze jednostkowej. Następnie wylosujemy wartość  $D^{(i)}$  - odległość  $B^{(i)}$  od zera. Zauważmy, że  $\|B^{(i)}\|^2 = (D^{(i)})^2 \sim \chi_1^2$ . Weźmy teraz zmienną z rozkładu jednostajnego  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  i dostaniemy

$$D^{(i)} = \sqrt{F_{\chi_1^2}^{-1}\left(\frac{i-1}{m} + \frac{U}{m}\right)},$$

gdzie  $F_{\chi_1^2}^{-1}$  jest dystrybuantą odwrotną rozkładu  $\chi^2$  z 1 stopniem swobody. Ostatecznie otrzymamy  $B^{(i)} = D^{(i)} \cdot \text{sgn}(B^{(i)})$ .

Dla każdej warstwy  $W_j$  realizacje wartości ruchu Browna  $B^{(j)}$  w chwili 1, przekształcamy na geometryczny ruch Browna, a Następnie dla każdej warstwy tworzymy zmienne losowe  $Y_i$  i obliczamy ich estymator  $CMC$ . Ostateczny estymator stratyfikacji ma postać

$$\hat{Y}_R^{str} = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \hat{Y}_{R_j}^{CMC(j)},$$

gdzie  $R_j$  oznacza liczebność  $j$ -tej warstwy, a  $p_j = \frac{1}{m}$  prawdopodobieństwo wybrania  $j$ -tej warstwy.

Estymator stratyfikacji ma najmniejszą wariancję, gdy

$$R_j = \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i} R,$$

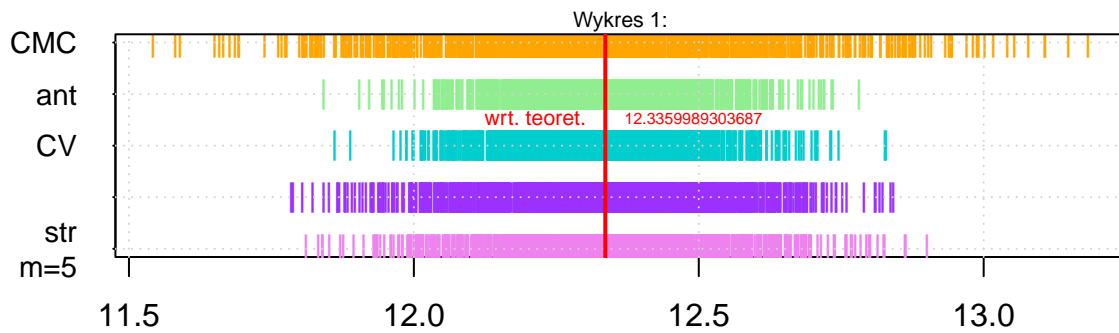
gdzie  $\sigma_j$  oznacza odchylenie standardowe zmiennej losowej  $(Y|Y \in W_i)$ .

w miejsce odchylenia standardowego  $(Y|Y \in W_i)$  do wzoru podstawimy wyestymowaną wartość odchylenia próbkowego  $s_i$ . Dla zapewnienia  $R_j \in \mathbb{N}$  wynik zaokrąglamy w górę otrzymując ostatecznie

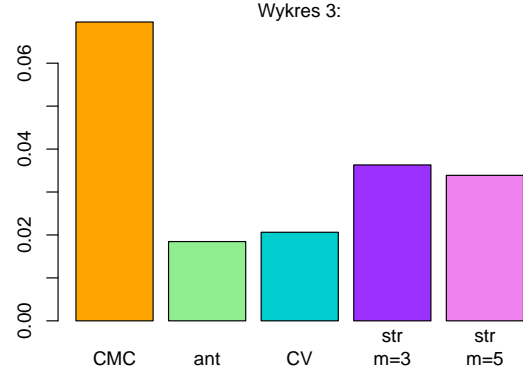
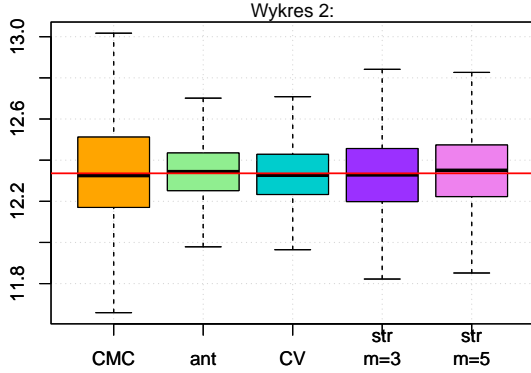
$$R_j = \left\lceil \frac{p_j s_j}{\sum_{i=1}^m p_i s_i} R \right\rceil.$$

## Porównanie estymatorów

W celu porównania powyżej opisanych metod, przyjmijmy  $R = 5000$  i wygenerujmy po  $R' = 1000$  realizacji każdego z estymatorów. Estymator stratyfikacji obliczymy dla liczby warstw  $m = 3$  oraz  $m = 5$ . Poniżej na wykresie możemy zobaczyć wartości obliczonych estymatorów.



Rozrzut każdego z estymatorów możemy dokładniej zobaczyć na poniższym wykresie pudełkowym, w którym odrzucone zostały wartości odstające. Natomiast na z wykresu słupkowego z prawej strony odczytać możemy wartości wariancji dla poszczególnych estymatorów.



Na podstawie zaprezentowanych informacji możemy stwierdzić, że każda z metod redukcji wariancji spełniła swoją rolę - najbardziej rozrzuty okazał się wektor estymatorów *Crude Monte Carlo*. W przypadku zaprezentowanych symulacji najmniejszą wariancję uzyskał estymator zmiennych antytetycznych, porównywalnie dobry wynik uzyskaliśmy również przy estymatorze zmiennych kontrolnych. W przypadku stratyfikacji dostrzec można, że większa liczba warstw miała niewielki wpływ na redukcję wariancji estymatora. Niezależnie od metody, wartości wszystkich estymatorów skupiają się wokół obliczonego wyniku teoretycznego.

## Opcje azjatyckie

Oczekowaną wypłatę opcji azjatyckich możemy zapisać wzorem

$$I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(A_n - K)_+]$$

gdzie:

- $A_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S\left(\frac{j}{n}\right)$ ,
- $K = 100$  - cena wykonania opcji,
- $S(t)$  - cena rynkowa towaru będącego przedmiotem umowy w momencie  $t$ .

W przypadku opcji azjatyckich nie istnieje dokładny wzór opisujący wartość  $I$ , dlatego jedynym sposobem na przybliżenie tej wartości jest estymacja.

## Estymator Crude Monte Carlo

Estymowaną wartością jest  $I = e^{-r} \cdot \mathbb{E}[(A_n - K)_+]$ . Za liczbę replikacji przyjęto  $R = 5000$ .

Przeprowadzając symulację wygenerowano  $R = 5000$  losowych ścieżek geometrycznego ruchu Browna i dla każdej z nich zapamiętano odpowiednią wartość zmiennej losowej  $A_n$ .

Niech zmienne losowe  $Y_1, Y_2, \dots, Y_R$  będą replikacjami realizacji zmiennej losowej  $e^{-r} \cdot (A_n - K)_+$ . Wówczas  $\mathbb{E}[Y_i] = I$ , a estymator Crude Monte Carlo jest postaci

$$\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R Y_i.$$

Zauważmy również, że do wygenerowania wartości geometrycznego ruchu Browna  $S(\frac{k}{n}) = S_0 \cdot e^{\mu^* + \sigma B(\frac{k}{n})}$ , zmienną  $B(\frac{k}{n})$  - wartość ścieżki geometrycznego ruchu Browna w chwili  $t = \frac{k}{n}$  - możemy zasymulować poprzez  $B(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^k Z_i$ , gdzie  $Z_i$  jest losową liczbą z rozkładu  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ .

## Stratyfikacja

Stratyfikacja opiera się na generowaniu ustalonej ilości zmiennych losowych z poszczególnych warstw  $W_1, W_2, \dots, W_m$ . Warstwy muszą być rozłączne i sumować się do zbioru wszystkich wartości, które może osiągnąć stratyfikowana zmienna losowa.

W pracy stratyfikacji poddany zostaną realizacje wektora  $\mathbf{B} = (B(\frac{1}{n}), B(\frac{2}{n}), \dots, B(1)) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$  reprezentujące wartości ścieżki ruchu Browna w poszczególnych punktach czasu. Wektor  $\mathbf{B}$  ma  $n$ -wymiarowy rozkład normalny o średniej  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ , i macierzy kowariancji  $\Sigma = [Cov(B(\frac{i}{n}), B(\frac{j}{n}))]_{i,j} = [\min\{\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\}]_{i,j}$ .

Zauważmy, że macierz  $\Sigma$  jest symetryczna i dodatnio określona. Możemy więc wykonując rozkład Choleskiego obliczyć (dolnotrójkątną) macierz  $A$ , która spełnia zależność  $\Sigma = AA^T$ . Przekształcając wektor z  $n$ -wymiarowego rozkładu normalnego  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Id)$  macierzą  $A$  otrzymamy realizację wektora  $\mathbf{B}$ .

Rozważmy rodzinę zbiorów  $\{W'_i\}_{i=1}^m$ :

- $W'_1 = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_1)$ ,
- $W'_j = \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_j) \setminus \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{j-1})$ , dla  $j = 2, 3, \dots, m-1$ ,
- $W'_m = \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_{m-1})$ ,

gdzie  $\mathbb{K}(\mathbf{0}, \rho)$  oznacza  $n$ -wymiarową kulę o środku w  $\mathbf{0}$  i promieniu  $\rho$ . Dobierzmy promienie kul  $r_i$  tak, aby  $\mathbb{P}(\mathbf{Z} \in W'_i) = \frac{i}{m}$ . Mamy więc

$$\frac{i}{m} = \mathbb{P}(\mathbf{Z} \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)) = \mathbb{P}((Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{K}(\mathbf{0}, r_i)) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(|Z_k| \leq r_i) = (2 \cdot \Phi^{-1}(r_i) - 1)^n,$$

z czego wynika, że  $r_i = \Phi\left(0.5 \cdot \sqrt[n]{\frac{i}{m} + 1}\right)$  dla  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , gdzie  $\Phi$  oznacza dystrybucję standardowego rozkładu normalnego. Wówczas możemy zdefiniować warstwy  $W_i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{z} \in W'_i\}$ .

Wygenerujemy teraz wektor losowy  $\mathbf{Z}^{(i)} = (\mathbf{Z} \mid \mathbf{Z} \in W'_i)$ , który potem będziemy mogli przekształcić na zmienną z wybranej warstwy  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{B} \in W_i) = A\mathbf{Z}^{(i)}$ . Zaczniemy od wylosowania punktu na  $n$ -wymiarowej sferze jednostkowej  $\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}$  dla  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , gdzie  $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Następnie wylosujemy wartość  $D^{(i)}$  - odległość  $\mathbf{Z}^{(i)}$  od  $\mathbf{0}$ . Wiemy że  $\|\mathbf{Z}^{(i)}\|^2 = \sum_{k=1}^n (Z_k^{(i)})^2 \sim \chi_n^2$ , zatem mając do dyspozycji zmienną ze standardowego rozkładu jednostajnego  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  dostaniemy

$$D^{(i)} = \sqrt{F_{\chi_n^2}^{-1}\left(\frac{i-1}{m} + \frac{U}{m}\right)},$$

gdzie  $F_{\chi_n^2}^{-1}$  jest dystrybucją odwrotną rozkładu  $\chi^2$  z  $n$  stopniami swobody. Ostatecznie otrzymujemy  $\mathbf{Z}^{(i)} = D^{(i)} \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}$ .

Dla każdej warstwy  $W_i$  na podstawie  $\mathbf{Z}^{(i)}$  budujemy wektory wartości ścieżki ruchu Browna  $\mathbf{B}$ , które później przekształcamy na wektory  $S$  wartości geometrycznego ruchu Browna. Następnie dla każdej warstwy tworzymy zmienne losowe  $Y_i$  i obliczamy ich estymator CMC. Ostateczny estymator stratyfikacji ma postać

$$\hat{Y}_R^{str} = \sum_{j=1}^m p_j \cdot \hat{Y}_{R_j}^{CMC^{(j)}},$$

gdzie  $R_j$  oznacza liczebność  $j$ -tej warstwy, a  $p_j = \frac{1}{m}$  prawdopodobieństwo wybrania  $j$ -tej warstwy.

Estymator stratyfikacji ma najmniejszą wariancję, gdy

$$R_j = \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^m p_i \sigma_i} R,$$

gdzie  $\sigma_j$  oznacza odchylenie standardowe zmiennej losowej  $(Y|Y \in W_i)$ .

Niestety wartość odchylenia standardowego  $(Y|Y \in W_i)$  nie są znane, więc do wzoru podstawimy wyestymowaną wartość odchylenia próbkowego  $s_i$ . Dla zapewnienia  $R_j \in \mathbb{N}$  wynik zaokrąglamy w górę otrzymując ostatecznie

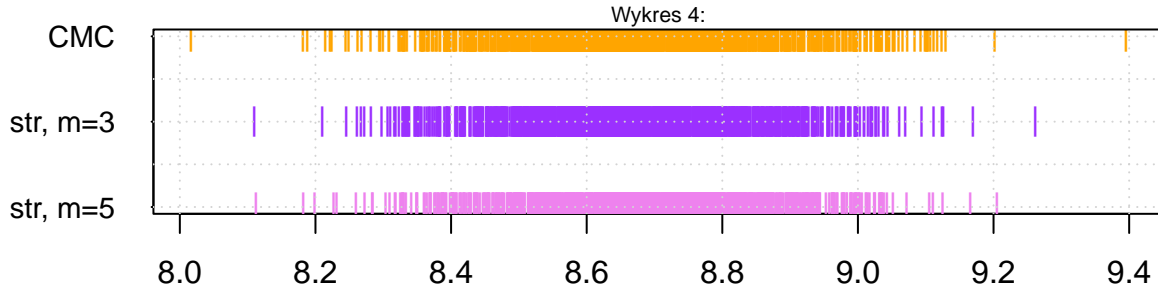
$$R_j = \left\lceil \frac{p_j s_j}{\sum_{i=1}^m p_i s_i} R \right\rceil.$$

## Porównanie estymatorów

W celu porównania opisanych metod, rozważymy dwa przypadki:  $n = 3$  oraz  $n = 10$ . Przyjmijmy ponownie  $R = 5000$  i wygenerujmy po  $R' = 1000$  realizacji każdego z estymatorów. Estymatory stratyfikacji obliczymy dla  $m = 3$  oraz  $m = 5$  warstw.

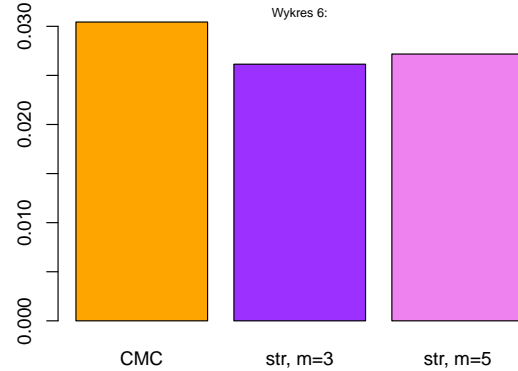
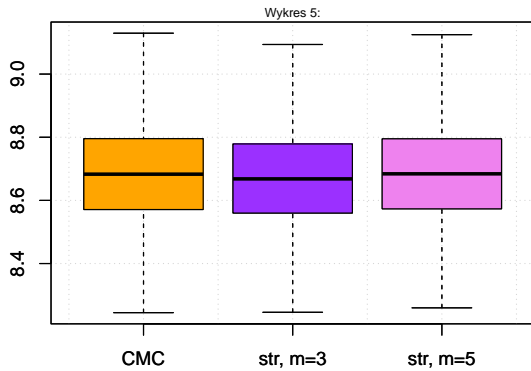
**n = 3**

Zajmijmy się najpierw opcjami, których wartość zależy od ceny w  $n = 3$  punktach czasu. Poniżej możemy zobaczyć wartości obliczonych estymatorów.



Już z wykresu 4 możemy wywnioskować, że najbardziej skrajne wartości znaleźć możemy w estymatorze *CMC* - co jest zgodne z intuicją. Zauważyć można, że rozważane estymatory stratyfikacji zwracają podobne wyniki. Więcej szczegółów dotyczących rozrzutu rozważanych estymatorów możemy odczytać z poniższego wykresu pudełowego oraz wykresu słupkowego przedstawiającego obliczone wariancje.

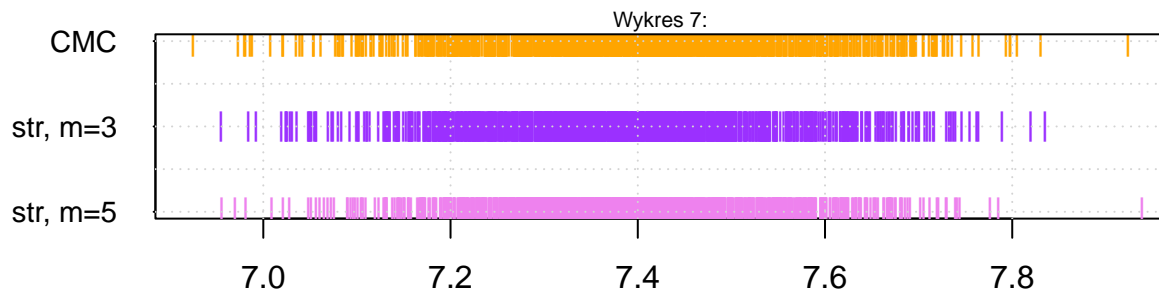




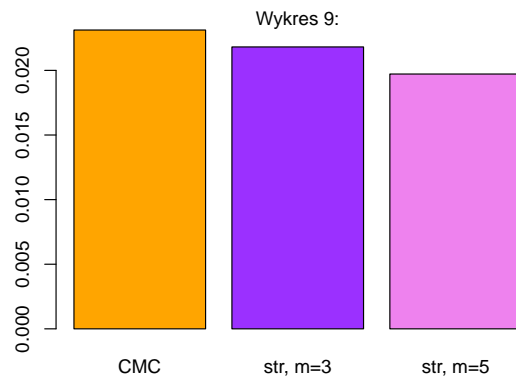
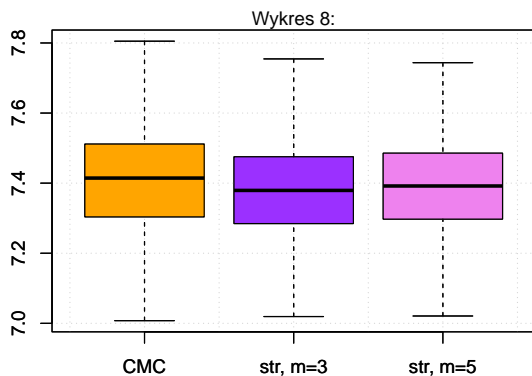
Po usunięciu wartości odstających rozkłady dla wszystkich estymatorów prezentują się podobnie. Jednak na wykresie wariacji możemy zauważyć, że stratyfikacja wpłynęła w bardzo niewielkim stopniu na zmniejszenie rozrzutu. Różnica jest pomijalna, co sugeruje, że wykorzystywanie metody stratyfikacji w tym przypadku nie jest konieczne. Również liczba warstw nie miała większego znaczenia, lepszy efekt uzyskano przy  $m = 3$ . Doświadczenie sugeruje, że przy  $n = 3$  badana wartość oczekiwana opcji azjatyckiej  $I$  wynosi w przybliżeniu 8.7.

**$n = 10$**

Rozważmy teraz opcje, których wartość zależy od ceny rynkowej w  $n = 10$  punktach czasu. Na wykresie 7 przedstawiono realizacje estymatorów wartości  $I$ .



Z powyższego wykresu widzimy, że estymatory stratyfikacji dla  $m = 3$  i  $m = 5$  są podobnie rozrzucone i prawdopodobnie mają nieco mniejsze odchylenie standardowe niż estymator  $CMC$ , jednak więcej szczegółów możemy odczytać z wykresu 8 i 9.



Na wykresie pudełowym możemy zaobserwować potwierdzenie faktu, iż estymator *Crude Monte Carlo* ma największy rozrzut. Stratyfikacja przy wybranych liczbach warstw zwraca podobne wyniki, jednak ich wariancja nie różni się znacząco od tej obliczonej dla *CMC*. Doświadczenie sugeruje, że badana wartość  $I$  najprawdopodobniej wynosi około 7.4.

## Podsumowanie

Wszystkie opisane metody redukcji wariancji w przypadku badania wartości oczekiwanej opcji finansowych spełniły swoją rolę - zmniejszyły rozrzut estymowanej wartości. Niestety w zbadanych przypadkach opcji azjatyckich poprawa wynikająca ze stratyfikacji była niewielka. Niezależnie od metody, estymatory zbiegały do podobnej wartości, a w przypadku opcji europejskich mamy pewność, że zbiegają one do wartości teoretycznej. Z projektu możemy wywnioskować, że oczekiwana wartość wypłaty  $I$  spada wraz ze wzrostem wartości  $n$ .

## Tabela funkcji

W poniższej tabeli przedstawiono funkcje wywołujące wykresy znajdujące się w pracy.

nr wykresu	chunk	funkcja	parametry
1	plot 1	plot_estymators1	()
2 & 3	boxplot 1	boxplot_estymators1	()
4	plot 3	plot_estymators	(estyms3, est_names, colrs)
5	boxplot 3	boxplot_estymators	(estyms3, est_names, colrs)
6	boxplot 3	vars_barplot	(estyms3, est_names, colrs)
7	plot 10	plot_estymators	(estyms10, est_names, colrs)
8	boxplot 10	boxplot_estymators	(estyms10, est_names, colrs)
9	boxplot 10	vars_barplot	(estyms10, est_names, colrs)