

Sprawozdanie 3

Alicja Wiączkowska

2023-11-28

Contents

Przedział ufności dla średniej przy znanej wariancji	1
Zad 3 Przedział ufności dla średniej przy nieznannej wariancji	3
Zad 5 Przedział ufności dla wariancji przy znanej średniej w modelu normalnym	8
Zad 7 Przedział ufności dla wariancji przy nieznannej średniej w modelu normalnym	12
Zad 9 Asymptotyczny przedział ufności dla proporcji	16

Przedział ufności dla średniej przy znanej wariancji

Przedziałem ufności na poziomie $1-\alpha$ dla parametru μ to taki zbiór $[a, b]$, dla którego zachodzi $\mathbb{P}(\mu \in [a, b]) = 1 - \alpha$.

Dla średniej przy znanej wariancji σ^2 w modelu normalnym przedział ten jest postaci

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \quad \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \right]$$

gdzie $Z_{\alpha/2}$ jest odpowiednim kwantylem ze standardowego rozkładu normalnego.

Jeśli wariancja jest znana, długość przedziału ufności jest stała niezależnie od próby.

Uzasadnienie postaci przedziału ufności

Z Centralnego Twierdzenia Granicznego wynika, że średnia próby (zmienna losowa \bar{X}) ma asymptotycznie rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Gdy próbki są losowane z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, rozkładem zmiennej \bar{X} jest dokładnie $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Zatem

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Wiadomo, że $\mathbb{P}(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$,

czyli

$$1 - \alpha = \mathbb{P} \left(-\mathcal{Z}_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \mathcal{Z}_{\alpha/2} \right) = \mathbb{P} \left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mathcal{Z}_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mathcal{Z}_{\alpha/2} \right)$$

Skąd wynika przedział ufności dla rzeczywistej średniej μ .

Symulacje

Przeprowadzono symulację polegającą na 10000-krotnym wygenerowaniu próbki rozmiaru n z rozkładu o zadanych parametrach (w przypadku rozkładów dwuparametrowych przyjęto parametr położenia $\mu = 0$; parametr przesunięcia został oznaczony jako σ) i obliczeniu na jej podstawie 95%-owego przedziału ufności dla średniej w modelu normalnym przy założeniu, że wariancja jest znana. Prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej średniej przez przedział ufności obliczono empirycznie korzystając z wygenerowanych prób. Wyniki symulacji przedstawiono poniżej.

Table 1: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9498	0.9470	0.9507
2	0.9473	0.9539	0.9498
3	0.9483	0.9500	0.9495

Table 2: Długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie normalnym w zależności od n

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.8765225	0.5543615	0.3919928
2	1.7530451	1.1087231	0.7839856
3	2.6295676	1.6630846	1.1759784

Table 3: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9514	0.9519	0.9472
2	0.9500	0.9476	0.9456
3	0.9515	0.9536	0.9452

Table 4: Długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie logistycznym w zależności od n

sigma	n=20	n=50	n=100
1	1.589836	1.005501	0.7109963
2	3.179672	2.011001	1.4219926
3	4.769508	3.016502	2.1329889

Table 5: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.2588	0.1635	0.1225
2	0.2677	0.1659	0.1240
3	0.2739	0.1753	0.1217

Table 6: Długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie Cauchy'ego w zależności od n

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.8765225	0.5543615	0.3919928
2	1.7530451	1.1087231	0.7839856
3	2.6295676	1.6630846	1.1759784

Table 7: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie wykładniczym

lambda	n=20	n=50	n=100
1	0.9557	0.9534	0.9502
2	0.9542	0.9549	0.9523
3	0.9536	0.9525	0.9527

Table 8: Długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie wykładniczym w zależności od n

lambda	n=20	n=50	n=100
1	0.8765225	0.5543615	0.3919928
2	0.4382613	0.2771808	0.1959964
3	0.2921742	0.1847872	0.1306643

W przypadku próbek generowanych z rozkładu normalnego pokrycie średniej przez wyznaczony przedział ufności zgadza się z założoną wartością dla wszystkich zbadanych wielkości próby. Oczywiście długość PU zwiększa się wraz ze wzrostem wariancji, a maleje gdy wielkości próby rośnie.

Table 9: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie chi kwadrat

ni	n=20	n=50	n=100
1	0.9568	0.9505	0.9536
2	0.9510	0.9520	0.9488
3	0.9530	0.9488	0.9528

Table 10: Długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie chi kwadrat w zależności od n

ni	n=20	n=50	n=100
1	1.239590	0.7839856	0.5543615
2	1.753045	1.1087231	0.7839856
3	2.147033	1.3579029	0.9601823

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku rozkładu logistycznego, jednak długości wyznaczonych przedziałów ufności są około 2 razy większe niż w przypadku rozkładu normalnego, co wynika z faktu, że wariancja w rozkładzie logistycznym wynosi $\frac{\pi^2 \sigma^2}{3}$ dla zadanego parametru skali σ , podczas gdy w rozkładzie normalnym wariancją jest po prostu σ^2 .

Natomiast w przypadku rozkładu Cauchy'ego wyznaczone przedziały ufności okazały się być bardzo niemiarodajne. Pokrycie rzeczywistej średniej przez PU wynosi poniżej 30% i maleje wraz ze wzrostem wielkości próby n . Sytuacja ta jest spowodowana faktem, iż dla rozkładu Cauchy'ego wariancja ani wartość średnia nie są określone. Do wyznaczenia przedziału posłużono się parametrem skali σ przyjmując jego kwadrat za wariancję. Z tego powodu długości przedziałów ufności zgadzają się z tymi wyznaczonymi dla rozkładu normalnego, jednak nie wnoszą żadnej merytorycznej informacji o rozkładzie, z którego losowano próbki. Model normalny nie jest odpowiedni do wyznaczania przedziału ufności dla parametru skali rozkładu Cauchy'ego.

W przypadku rozkładu wykładniczego prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej średniej przez przedział ufności zgadza się z zamierzonym. Przy spadku wartości $\frac{1}{\lambda}$ (równej odchyleniu standardowemu rozkładu) zmniejsza się długość przedziału ufności. Oczywiście również wzrost wielkości próby zmniejsza długość przedziału ufności.

Dla rozkładu χ^2_ν z ν stopniami swobody długości przedziałów są porównywalne z tymi otrzymanymi dla rozkładu normalnego, nieco krótsze dla χ^2_3 niż dla $\mathcal{N}(0, 3^2)$, co wynika z faktu, że wariancja dla χ^2_ν wynosi $2\nu = 6$, czyli znacząco mniej niż dla rozkładu normalnego z wariancją $3^2 = 9$. Oczywiście prawdopodobieństwo wpanięcia rzeczywistej średniej rozkładu do przedziału ufności zgadza się z zamierzonym.

Zad 3 Przedział ufności dla średniej przy nieznanej wariancji

Przy nieznanej wariancji σ^2 przedział ufności dla średniej w modelu normalnym na poziomie $1 - \alpha$ jest postaci

$$\left[\bar{X} - SE \cdot t_{n-1, \alpha/2}^*, \quad \bar{X} + SE \cdot t_{n-1, \alpha/2}^* \right]$$

gdzie $SE = \frac{s}{\sqrt{n}}$, s -próbkowe odchylenie standardowe, $t_{n-1, \alpha/2}^*$ - odpowiedni kwantyl z rozkładu Studenta z $n - 1$ stopniami swobody.

Uzasadnienie postaci przedziału ufności

Wiadomo, że statystyka testowa T ma rozkład Studenta z $n - 1$ stopniami swobody.

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{SE} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Postać przedziału ufności wynika z poniższego rachunku.

$$1 - \alpha = \mathbb{P} \left(-t_{n-1, \alpha/2}^* \leq T \leq t_{n-1, \alpha/2}^* \right) = \mathbb{P} \left(-t_{n-1, \alpha/2}^* \leq \frac{\bar{X} - \mu}{SE} \leq t_{n-1, \alpha/2}^* \right)$$

$$= \mathbb{P} \left(\bar{X} - SE \cdot t_{n-1, \alpha/2}^* \leq \mu \leq \bar{X} + SE \cdot t_{n-1, \alpha/2}^* \right)$$

Symulacje

Przeprowadzono symulację polegającą na 10000-krotnym wygenerowaniu próbki rozmiaru n z rozkładu o zadanych parametrach (w przypadku rozkładów dwuparametrowych przyjęto parametr położenia $\mu = 0$; parametr przesunięcia został oznaczony jako σ) i obliczeniu na jej podstawie 95%-owego przedziału ufności dla średniej w modelu normalnym przy założeniu, że wariancja nie jest znana. Prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej średniej przez przedział ufności obliczono empirycznie korzystając z wygenerowanych prób. Wyniki symulacji przedstawiono poniżej. W celu zobrazowania rozkładu długości PU narysowano wykresy gęstości tej zmiennej. Odpowiadają one uciąglonej wersji histogramu, jednak są bardziej czytelne przy tak dużej ilości danych do zaprezentowania.

Table 11: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9510	0.9492	0.9476
2	0.9501	0.9499	0.9500
3	0.9471	0.9503	0.9483

Table 12: Średnia długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.920662	0.5654348	0.3960046
2	1.844455	1.1330559	0.7920902
3	2.766507	1.6963543	1.1868557

Wykresy gestosci dla dlugosci przedziału ufności w rozkładzie normalnym

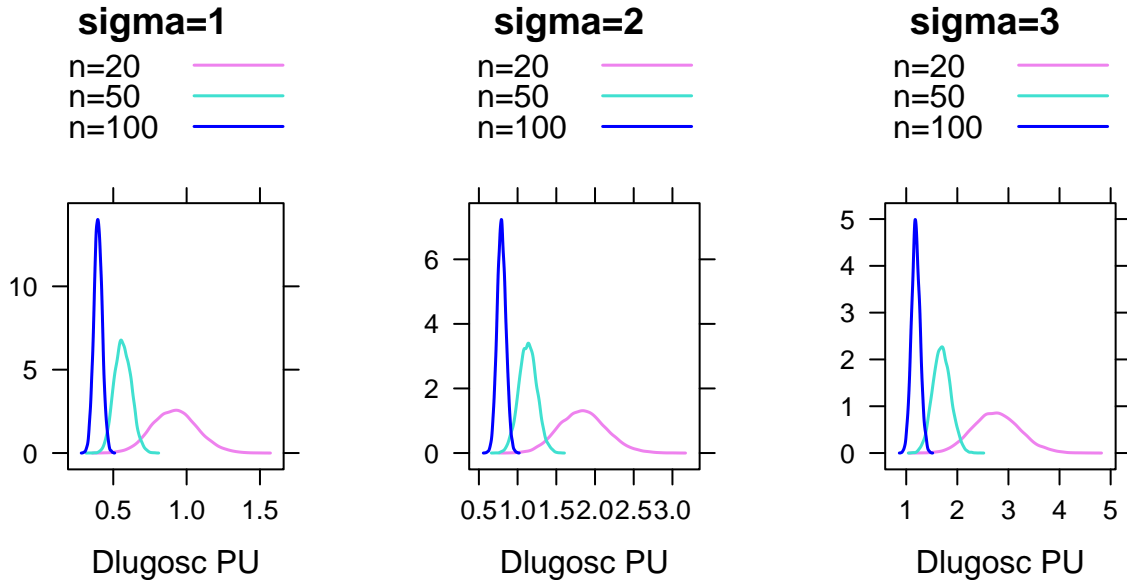


Table 13: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9515	0.9506	0.9510
2	0.9529	0.9520	0.9491
3	0.9555	0.9514	0.9505

Table 14: Średnia długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	1.658114	1.022568	0.717216
2	3.327387	2.046774	1.436810
3	5.007504	3.068070	2.151895

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie logistycznym

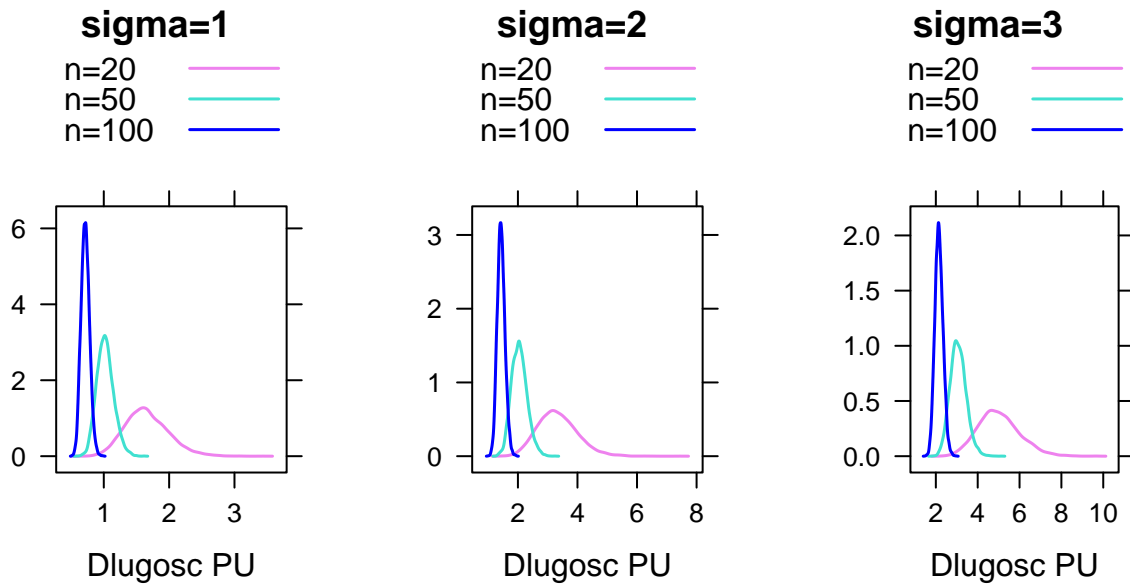


Table 15: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9834	0.9788	0.9820
2	0.9800	0.9768	0.9784
3	0.9795	0.9799	0.9800

Table 16: Średnia długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	22.45404	41.98041	20.27142
2	53.22842	39.36984	49.60476
3	122.12771	81.13200	77.89550

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie Cauchy'ego

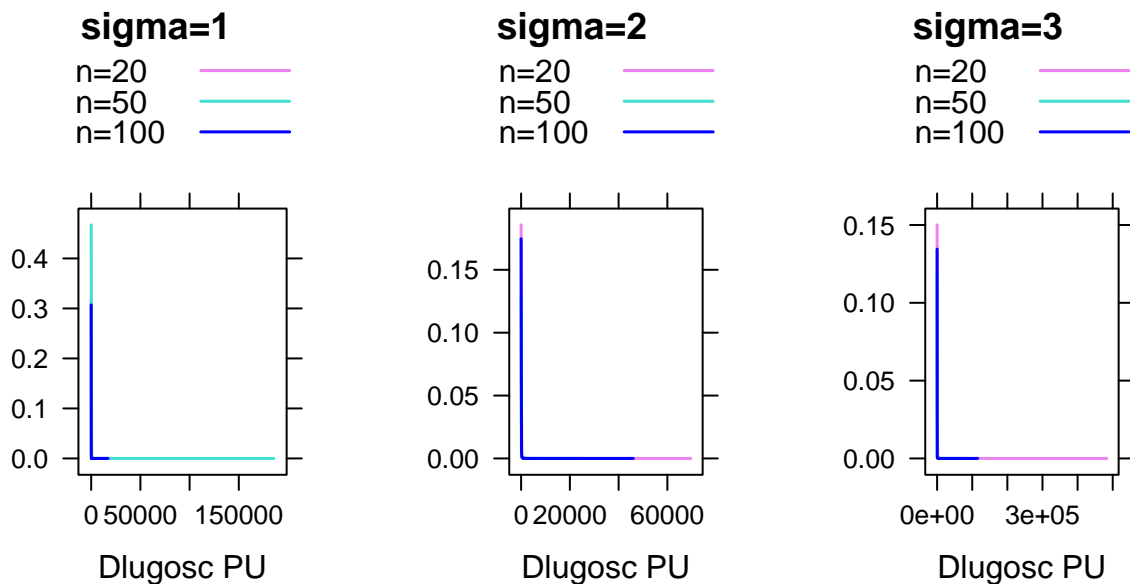


Table 17: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie wykładniczym

lambda	n=20	n=50	n=100
1	0.9174	0.9313	0.9411
2	0.9184	0.9354	0.9446
3	0.9138	0.9326	0.9434

Table 18: Średnia długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie wykładniczym

lambda	n=20	n=50	n=100
1	0.8931797	0.5568675	0.3937120
2	0.4455011	0.2797381	0.1962383
3	0.2978644	0.1856401	0.1311099

Wykresy gestosci dla dlugosci przedziału ufności w rozkładzie wykładniczym

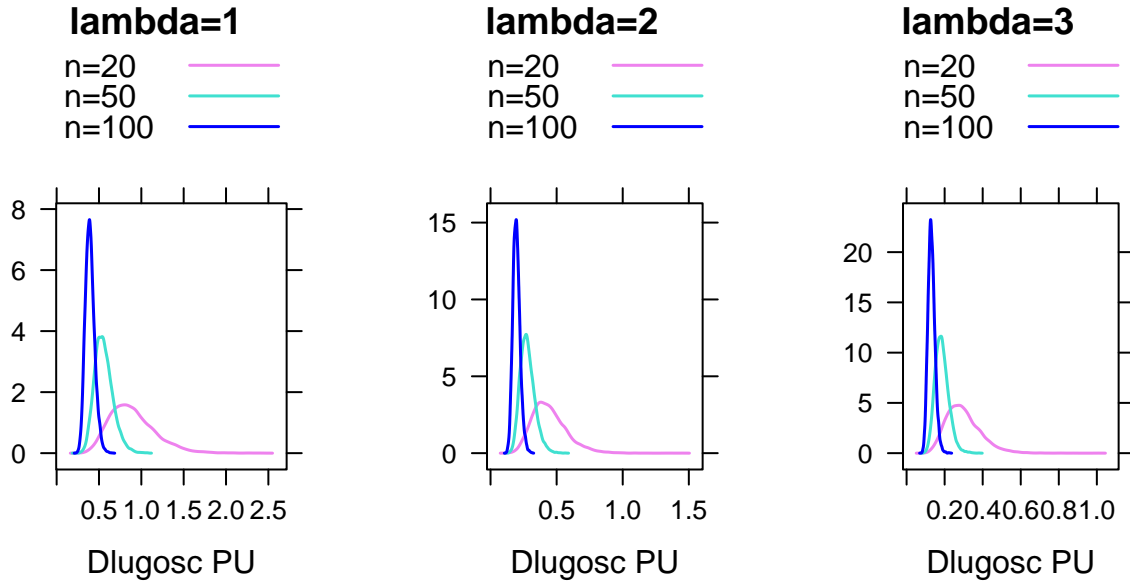


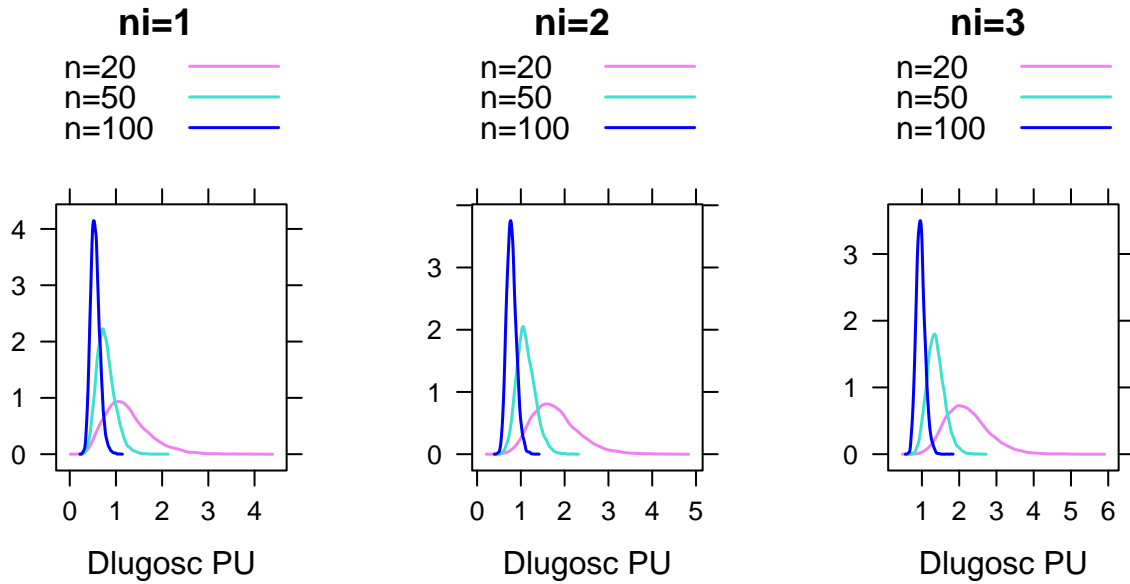
Table 19: Prawdopodobieństwo pokrycia średniej przez PU w rozkładzie chi kwadrat

ni	n=20	n=50	n=100
1	0.8885	0.9179	0.9361
2	0.9169	0.9321	0.9447
3	0.9300	0.9417	0.9445

Table 20: Średnia długość przedziału ufności dla średniej w rozkładzie chi kwadrat

ni	n=20	n=50	n=100
1	1.235408	0.7792675	0.5515662
2	1.783339	1.1159340	0.7852581
3	2.218059	1.3748421	0.9644333

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkladzie chi kwadrat



W przypadku próbek generowanych z rozkładu normalnego pokrycie średniej przez wyznaczony przedział ufności zgadza się z założoną wartością dla wszystkich zbadanych wielkości próby. Długości przedziałów ufności są zmienne w zależności od próbki. Średnio długości są nieznacznie większe niż w przypadku gdy wariancja była znana. Oczywiście średnia długość PU zwiększa się wraz ze wzrostem wariancji, a maleje gdy wielkości próby rośnie. Rozrzut długości przedziałów również zmniejsza się dla coraz większych wartości n .

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku rozkładu logistycznego. Pokrycie rzeczywistej średniej w przybliżeniu wynosi 95%, a długości przedziałów średnio są nieznacznie dłuższe niż w przypadku gdy wariancja była znana. Wykresy gęstości pokazują, że średnia długość PU oraz rozrzut wartości długości przedziału ufności maleją wraz ze wzrostem wielkości próby. Naturalnie większa wariancja implikuje dłuższy PU.

Natomiast w przypadku rozkładu Cauchy'ego co prawda wyznaczone przedziały ufności uzyskały wyższe pokrycie niż założono: ponad 97%, jednak uzyskane długości przedziałów okazały się być bardzo rozrzucone i niejednokrotnie przyjmujące wyjątkowo duże wartości. Nadzwyczajnie dużą wariancję zmiennej opisującej długość PU można zauważyć na wykresie gęstości biorąc pod uwagę, że automatycznie dobrana skala sięga liczb rzędu 10^6 . Tak szeroki zakres osi powoduje optyczne spłaszczenie krzywej w poziomie i redukcję jej dopięonowej prostej. Średnia długość przedziału ufności jest w każdym przypadku conajmniej liczbą dwucyfrową. Przedziały ufności dla średniej uzyskane dla rozkładu Cauchy'ego są nieoptymalne i nie dostarczają żadnych użytecznych informacji na temat rzeczywistej wartości średniej. Nie jest to jednak niespodziewaną obserwacją, ponieważ rzeczywista wartość średnia nie jest określona. Przedział ufności wyznaczony w modelu normalnym nie niesie też odpowiedniej informacji na temat parametru skali rozkładu Cauchy'ego.

W przypadku rozkładu wykładniczego prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej średniej przez przedział ufności wynosi około 92% (jest większe dla liczniejszej wielkości próby), więc w przybliżeniu zgadza się z oczekiwaniami, jednak niższe niż założono, co może wynikać z faktu, iż rozkład wykładniczy nie jest symetryczny. Średnie długości przedziału ufności nie odbiegają od tych wyznaczonych przy znanej średniej. Na wykresach gęstości można zaobserwować, że wzrost parametru λ powoduje zmniejszenie rozrzutu zmiennej opisującej długość PU, co jest spodziewane - bowiem w tej sytuacji maleje wariancja. Naturalnie, jak we wcześniejszych przypadkach, wraz ze wzrostem wielkości próby n Maleje średnia długość przedziału ufności oraz rozrzut opisującej go zmiennej. Wyznaczone przedziały ufności są optymalne.

Dla rozkładu χ^2_ν z ν stopniami swobody średnie długości przedziałów są porównywalne z tymi otrzymanymi w przy znanej wariancji. Pokrycie rzeczywistej średniej przez przedziału ufności wynosi od 88% do 94%. Jest tym lepsze im większa jest liczebność próby. Również w tym przypadku asymetria rozkładu mogła przyczynić

się do pogorszenia poziomu ufności wyznaczanych przedziałów. Wykresy gęstości zmiennej opisującej długość przedziału ufności wyglądają standardowo - analogicznie do poprzednich przykładów.

Zad 5 Przedział ufności dla wariancji przy znanej średniej w modelu normalnym

Gdy średnia populacji μ jest znana, estymatorem nieobciążonym wariancji jest statystyka $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, a przedział ufności dla wariancji ma postać

$$\left[\frac{n}{\chi_{n,1-\alpha/2}^2} \hat{\sigma}^2, \quad \frac{n}{\chi_{n,\alpha/2}^2} \hat{\sigma}^2 \right]$$

gdzie $\chi_{n,\alpha/2}^2$ oraz $\chi_{n,1-\alpha/2}^2$ są odpowiednimi kwantylami z rozkładu χ_n^2 z n stopniami swobody (przy czym $\chi_{n,\alpha/2}^2 < \chi_{n,1-\alpha/2}^2$)

Uzasadnienie postaci przedziału ufności

Do wyprowadzenia tego wzoru posłużono się faktem, że dla i.i.d. zmiennych Z_1, \dots, Z_n o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$ suma $\sum_{i=1}^n Z_i^2$ ma rozkład χ_n^2 z n stopniami swobody.

W takim razie dla próby X_1, \dots, X_n z rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ zmienna losowa $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2$ ma również rozkład χ^2 z n stopniami swobody.

Wówczas postać przedziału ufności wynika z rachunku

$$1 - \alpha = \mathbb{P} \left(\chi_{n,\alpha/2}^2 \leq \frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \leq \chi_{n,1-\alpha/2}^2 \right) = \mathbb{P} \left(\frac{\chi_{n,\alpha/2}^2}{n \hat{\sigma}^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi_{n,1-\alpha/2}^2}{n \hat{\sigma}^2} \right) = \mathbb{P} \left(\frac{n \hat{\sigma}^2}{\chi_{n,\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{n \hat{\sigma}^2}{\chi_{n,1-\alpha/2}^2} \right)$$

Symulacje

Przeprowadzono symulację polegającą na 10000-krotnym wygenerowaniu próbki rozmiaru n z rozkładu o zadanych parametrach (w przypadku rozkładów dwuparametrowych przyjęto parametr położenia $\mu = 0$; parametr przesunięcia został oznaczony jako σ) i obliczeniu na jej podstawie 95%-owego przedziału ufności dla wariancji w modelu normalnym przy założeniu, że średnia jest znana. Prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej wariancji przez przedział ufności obliczono empirycznie korzystając z wygenerowanych prób. Wyniki symulacji przedstawiono poniżej.

Table 21: Prawdopodobieństwo pokrycia wariancji przez PU w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9523	0.9533	0.9464
2	0.9499	0.9497	0.9515
3	0.9515	0.9493	0.9463

Table 22: Średnia długość przedziału ufności dla wariancji w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	1.500224	0.8445248	0.5758448
2	5.995193	3.3775150	2.3058872
3	13.485709	7.5883978	5.1968494

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie normalnym

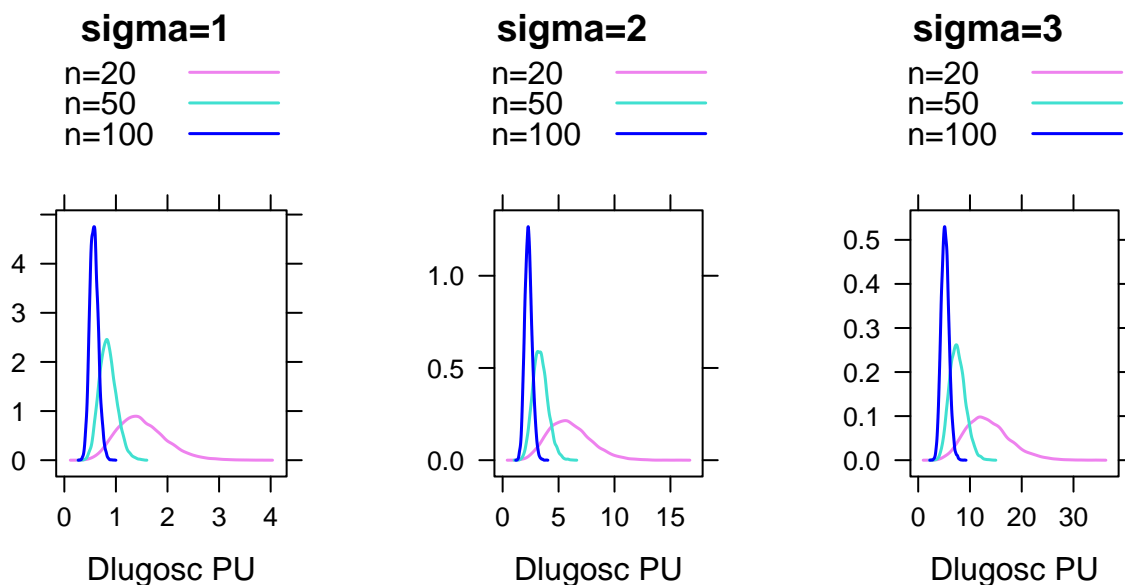


Table 23: Prawdopodobieństwo pokrycia wariacji przez PU w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.8985	0.8823	0.8846
2	0.8963	0.8832	0.8803
3	0.8903	0.8846	0.8866

Table 24: Średnia długość przedziału ufności dla wariacji w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	4.910083	2.781017	1.894040
2	19.665707	11.135850	7.571123
3	44.465075	25.100910	17.049740

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie logistycznym

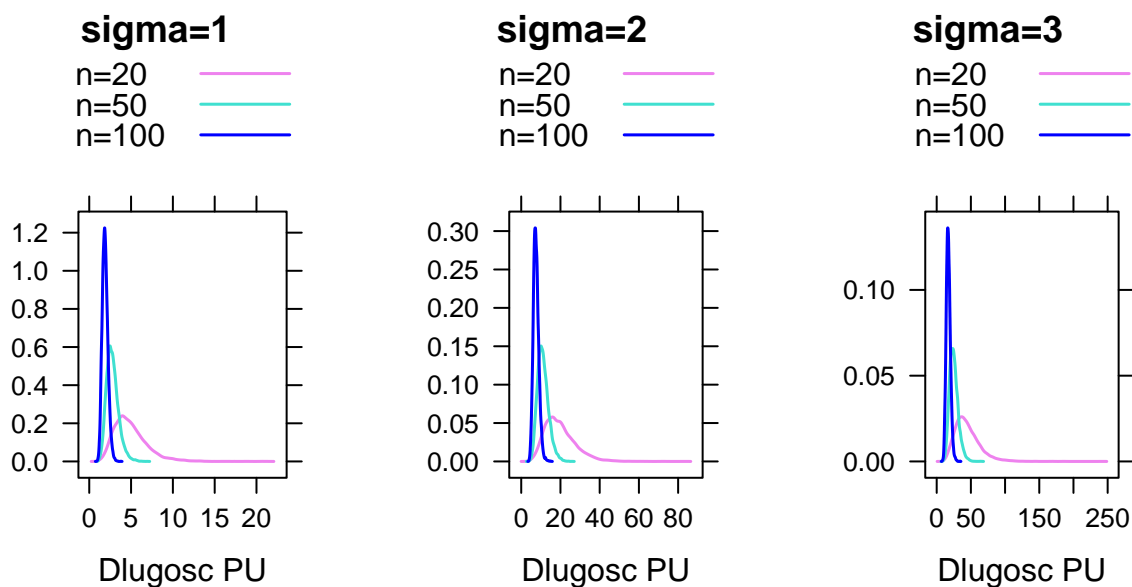


Table 25: Prawdopodobieństwo pokrycia wariacji przez PU w rozkładzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.0120	0	0
2	0.0123	0	0
3	0.0139	0	0

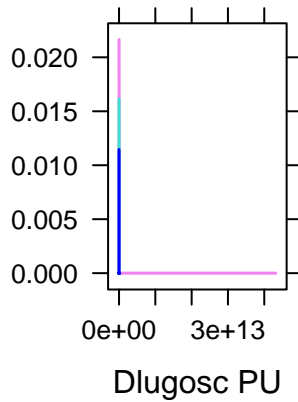
Table 26: Średnia długość przedziału ufności dla wariacji w rozkładzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	4314745504.5	510156.5	52217.29
2	27761164.1	1188535.5	4382094.50
3	214420.3	1725702.3	2231400.75

Wykresy gestosci dla dlugosci przedziału ufności w rozkładzie Cauchy'ego

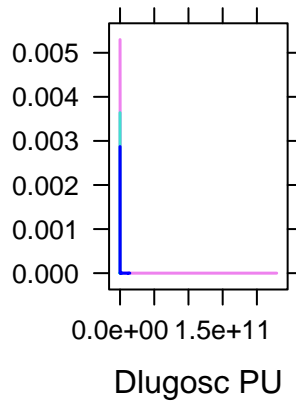
sigma=1

n=20
n=50
n=100



sigma=2

n=20
n=50
n=100



sigma=3

n=20
n=50
n=100

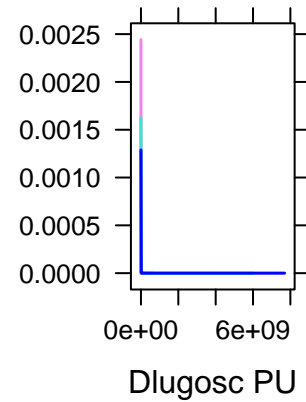


Table 27: Prawdopodobieństwo pokrycia wariacji przez PU w rozkładzie wykładniczym

lambda	n=20	n=50	n=100
1	0.7466	0.7066	0.6855
2	0.7459	0.7033	0.6956
3	0.7451	0.7008	0.6907

Table 28: Średnia długość przedziału ufności dla wariacji w rozkładzie wykładniczym

lambda	n=20	n=50	n=100
1	1.5005105	0.8382603	0.5746340
2	0.3760699	0.2121796	0.1438801
3	0.1691275	0.0943791	0.0638908

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie wykładniczym

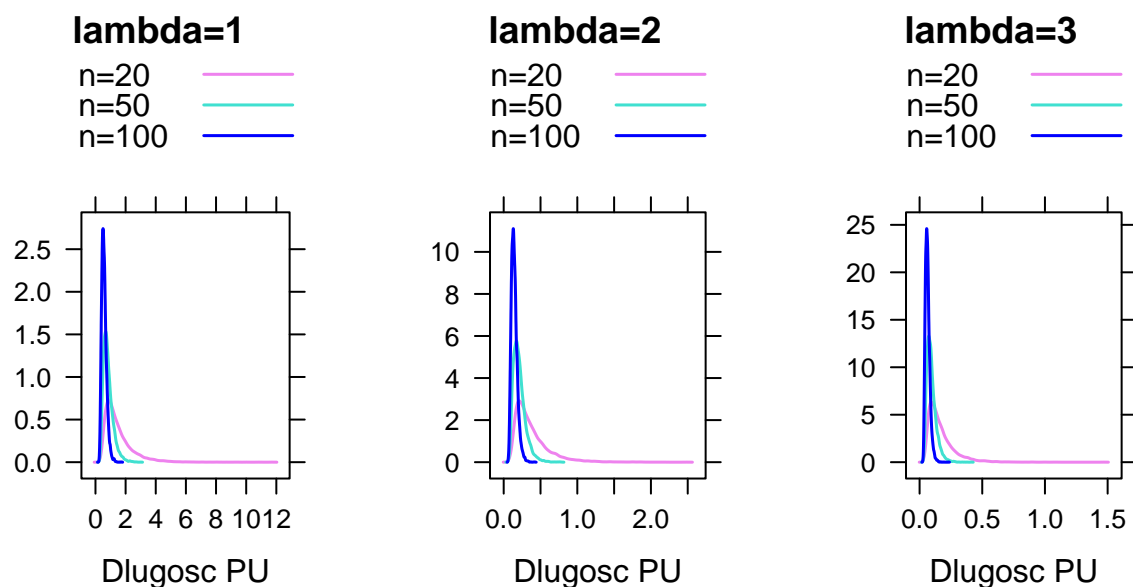


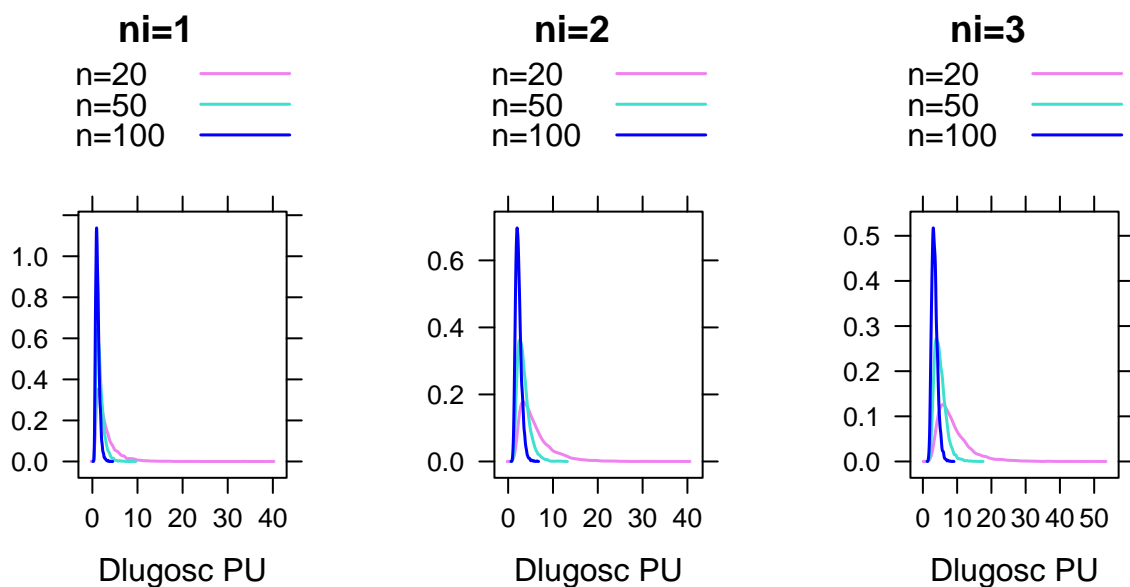
Table 29: Prawdopodobieństwo pokrycia wariancji przez PU w rozkładzie chi kwadrat

ni	n=20	n=50	n=100
1	0.5969	0.5711	0.5646
2	0.7377	0.7012	0.6893
3	0.8140	0.7809	0.7543

Table 30: Średnia długość przedziału ufności dla wariancji w rozkładzie chi kwadrat

ni	n=20	n=50	n=100
1	2.965816	1.679819	1.159458
2	6.037270	3.388779	2.307983
3	8.940674	5.020818	3.442076

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie chi kwadrat



Rzeczywista wartość wariancji wpada do przedziału ufności w przybliżeniu w 95% przypadków dla każdego rozmiaru próby. Naturalnie zmienna opisująca długość PU ma tym mniejszą średnią i rozrzut im większy

jest rozmiar próby n . Różnice w średniej długości przedziału ufności wywołane zmianą wielkości próby są jednak znacznie bardziej widoczne niż w przypadku PU wyznaczanych dla średniej μ . Własności zmiennej opisującej długości przedziału ufności zależą również od nieznanej wartości wariancji σ^2 - im większy jest ten parametr tym przedział jest dłuższy i bardziej rozrzucony.

Dla rozkładu logistycznego pokrycie rzeczywistej wariancji przez przedział ufności plasuje się na poziomie 89% i nie wzrasta wraz ze zwiększeniem liczebności próby. Wynika to z faktu, że przedziały ufności wyznaczone dla wariancji są znacznie wrażliwsze na odbieganie badanego rozkładu od normalnego niż działają one w przypadku PU dla wartości średniej μ . Przedziały ufności wyznaczone dla rozkładu logistycznego są zauważalnie dłuższe niż te dla rozkładu normalnego. Wynika to jednak z faktu, że rzeczywista wariancja wpływająca na zmienną opisującą długość przedziału ufności w przypadku rozkładu logistycznego wynosi $\frac{\pi^2 \sigma^2}{3}$, co niezależnie od parametru skali σ przyjmuje większe wartości niż wariancja rozkładu normalnego wynosząca dla tego parametru σ^2 . Również w tym przypadku spadek parametru skali lub wzrost wielkości próby implikuje zmniejszenie się średniej i rozrzutu zmiennej opisującej długości przedziałów ufności.

Metoda przybliżania wariancji lub kwadratu parametru skali przedziałem ufności w normalnym jest zupełnie niemiarodajna w przypadku rozkładu Cauchy'ego. Wyznaczone przedziały ufności nie pokrywają badanego parametru nawet w 2% przypadków. Ponadto zmienna opisująca długość przedziału ufności ma ogromny rozrzut i średnią. Wyznaczone przedziały ufności nie niosą żadnej merytorycznej informacji na temat parametrów rozkładu. Wynik ten nie jest jednak zaskakujący, gdy weźmie się pod uwagę fakt, że parametr położenia μ nie jest w rzeczywistości wartością średnią, która dla rozkładu Cauchy'ego nie jest określona, podobnie jak wariancja, którą przedziały ufności miały przybliżyć.

Dla rozkładu wykładniczego wariancja równa $\frac{1}{\lambda^2}$ wpada do wyznaczonego przedziału ufności jedynie w około 70% przypadków i nie wzrasta wraz ze wzrostem wielkości próby (a nawet wydaje się maleć). Wynika to z faktu, że rozkład wykładniczy nie tylko odbiega od normalnego, a w dodatku nie jest nawet symetryczny. Długości przedziałów ufności są tym mniejsze i mniej rozrzucone im parametr skali λ lub rozmiar próby n są większe.

Rozkład χ^2_ν również odbiega od rozkładu normalnego, co skutkuje obniżonym poziomem ufności przedziału. Ilość stopni swobody istotnie wpływa na kształt dystrybuanty. Pokrycie wariancji przez przedział ufności wynosi pomiędzy 50 a 80%. Wzrost wielkości próby nie poprawia poziomu ufności, natomiast robi to wzrost parametru ϑ . Średnia długość PU maleje wraz ze wzrostem liczebności próby. Podobnie jest z rozrzutem.

ZAd 7 Przedział ufności dla wariancji przy nieznanej średniej w modelu normalnym

Kiedy średnia populacji μ jest znana, estymatorem nieobciążonym wariancji jest wariancja próbkowa $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, a przedział ufności dla wariancji ma postać

$$\left[\frac{n-1}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2} \hat{\sigma}^2, \quad \frac{n-1}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \hat{\sigma}^2 \right]$$

gdzie $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$ oraz $\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ są odpowiednimi kwantylami z rozkładu χ_{n-1}^2 z $n-1$ stopniami swobody (przy czym $\chi_{n-1, \alpha/2}^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$)

Uzasadnienie postaci przedziału ufności

Do wyprowadzenia tego wzoru posłużono się faktem, dla próby X_1, \dots, X_n z rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ zmienna losowa $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2$ ma rozkład χ_{n-1}^2 z $n-1$ stopniami swobody.

Wówczas postać przedziału ufności wynika z rachunku

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\chi_{n-1,\alpha/2}^2 \leq \frac{n-1}{\sigma} \hat{\sigma}^2 \leq \chi_{n-1,1-\alpha/2}^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\chi_{n-1,\alpha/2}^2}{(n-1)\hat{\sigma}^2} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}{(n-1)\hat{\sigma}^2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}^2} \leq \sigma \leq \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}\right)$$

Symulacje

Przeprowadzono symulację polegającą na 10000-krotnym wygenerowaniu próbki rozmiaru n z rozkładu o zadanych parametrach (w przypadku rozkładów dwuparametrowych przyjęto parametr położenia $\mu = 0$; parametr przesunięcia został oznaczony jako σ) i obliczeniu na jej podstawie 95%-owego przedziału ufności dla wariancji w modelu normalnym przy założeniu, że średnia nie jest znana. Prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej wariancji przez przedział ufności obliczono empirycznie korzystając z wygenerowanych prób. Wyniki symulacji przedstawiono poniżej.

Table 31: Prawdopodobieństwo pokrycia wariancji przez PU w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9439	0.9474	0.9489
2	0.9420	0.9476	0.9470
3	0.9432	0.9449	0.9477

Table 32: Średnia długość przedziału ufności dla wariancji w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	1.642085	0.8714543	0.5831398
2	6.547275	3.4874607	2.3363296
3	14.773755	7.8690823	5.2627099

Wykresy gestosci dla dlugosci przedziału ufności w rozkładzie normalnym

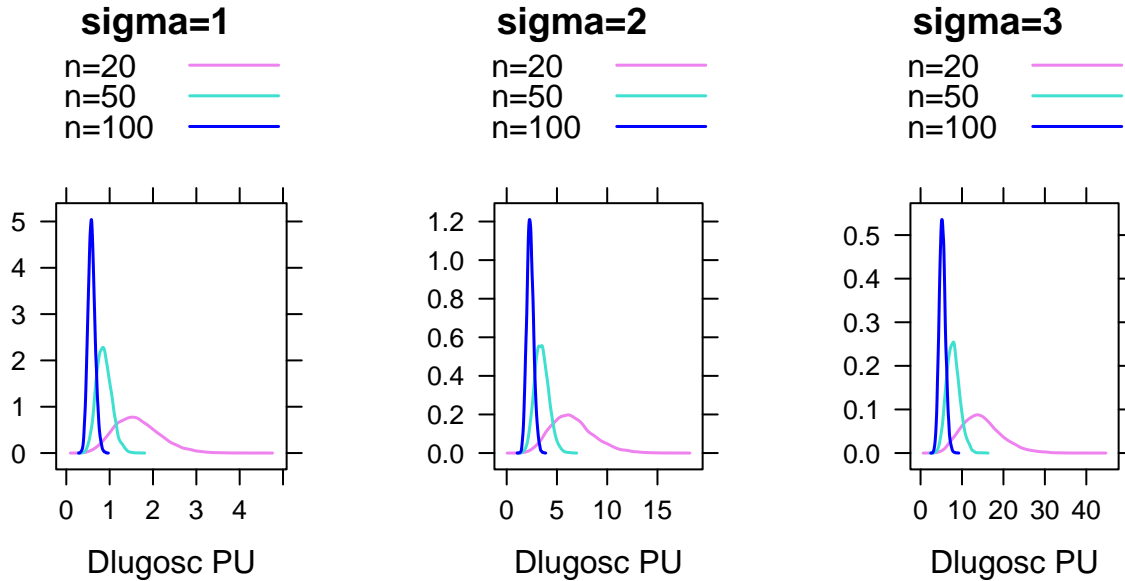


Table 33: Prawdopodobieństwo pokrycia wariancji przez PU w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.8905	0.8857	0.8837
2	0.8910	0.8856	0.8869
3	0.8905	0.8863	0.8809

Table 34: Średnia długość przedziału ufności dla wariancji w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	5.413755	2.859923	1.917156
2	21.621844	11.486449	7.681333
3	48.540615	25.881628	17.305737

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufnosci w rozkladzie logistycznym

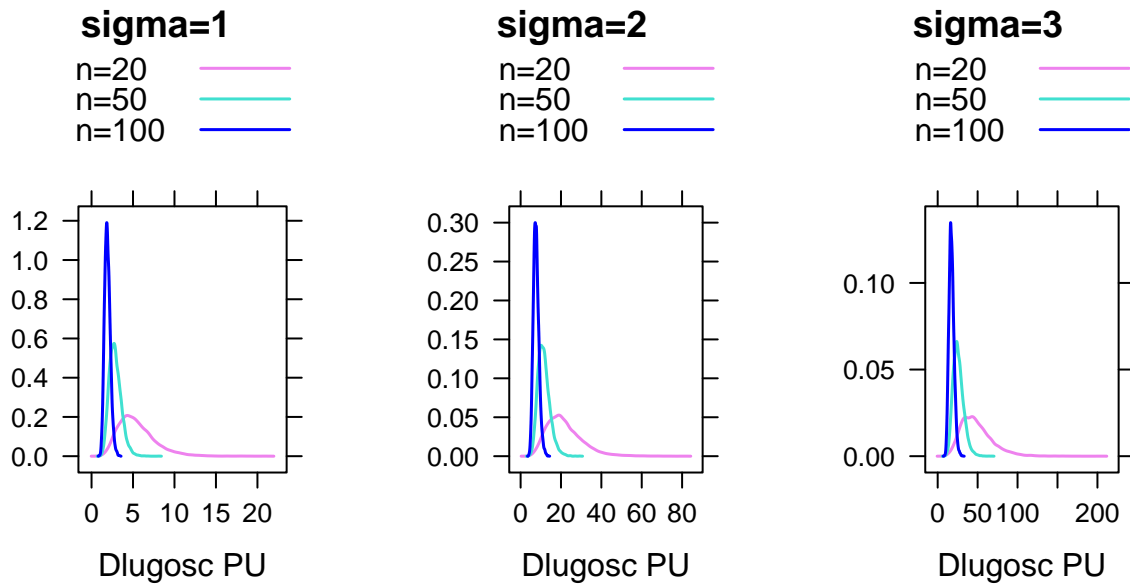


Table 35: Prawdopodobienstwo pokrycia wariacji przez PU w rozkladzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.0117	1e-04	0
2	0.0116	0e+00	0
3	0.0118	0e+00	0

Table 36: Średnia długość przedziału ufnosci dla wariacji w rozkladzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	63977.69	8586017	73394574.8
2	2469591.91	4143565	698628.2
3	1804357.23	5001000	1427596.5

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufnosci w rozkladzie Cauchy'ego

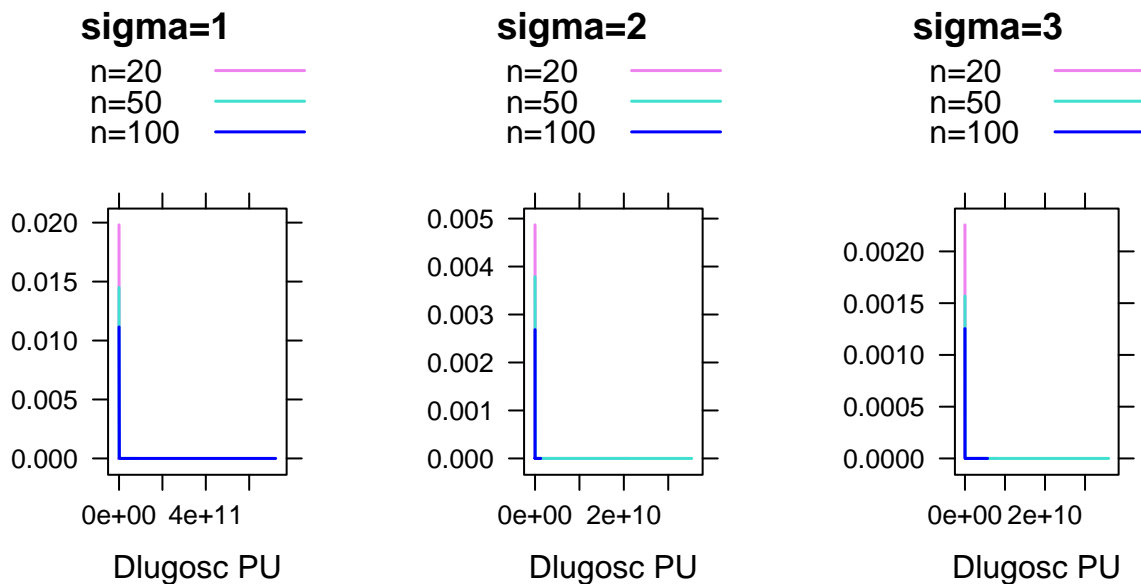


Table 37: Prawdopodobieństwo pokrycia wariacji przez PU w rozkładzie wykładniczym

lambda	n=20	n=50	n=100
1	0.7334	0.6995	0.6930
2	0.7316	0.6885	0.7002
3	0.7308	0.7064	0.6926

Table 38: Średnia długość przedziału ufności dla wariacji w rozkładzie wykładniczym

lambda	n=20	n=50	n=100
1	1.6301522	0.8738421	0.5830079
2	0.4095029	0.2184253	0.1455915
3	0.1830145	0.0968096	0.0650362

Wykresy gestosci dla dlugosci przedziału ufności w rozkładzie wykładniczym

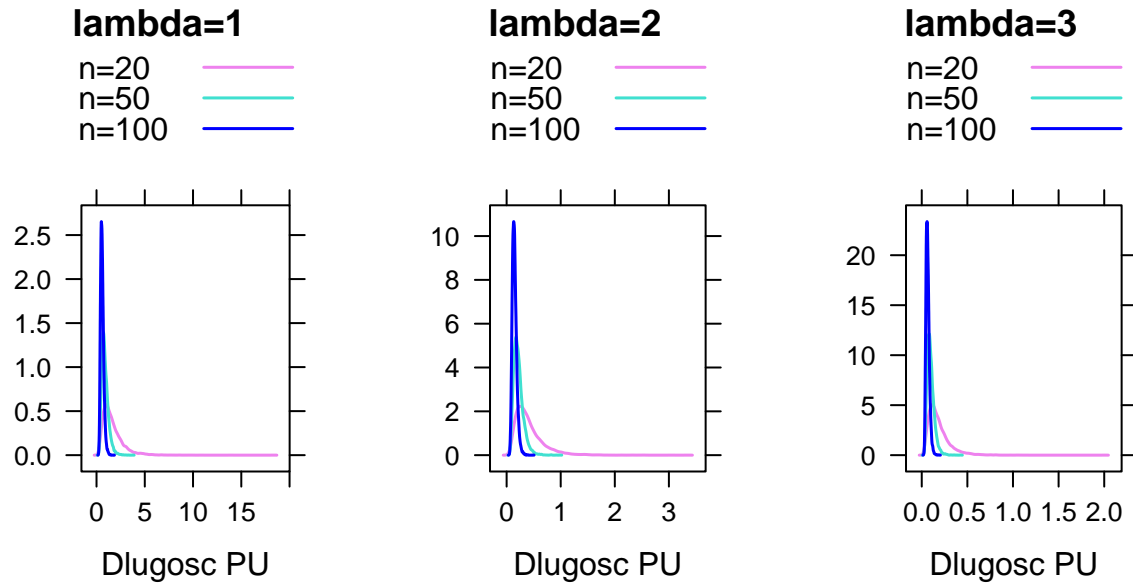


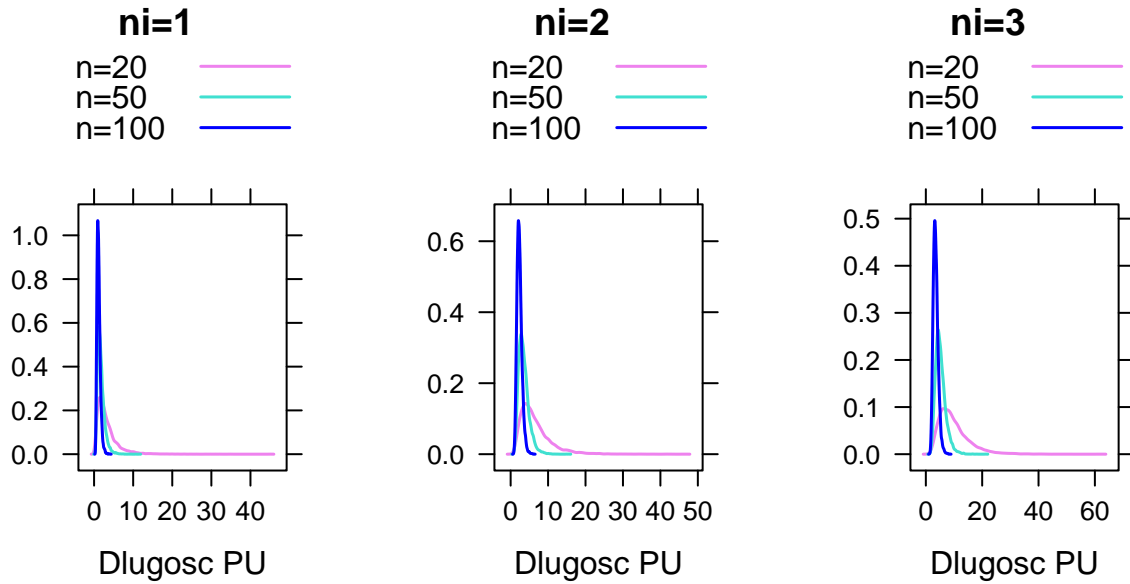
Table 39: Prawdopodobieństwo pokrycia wariacji przez PU w rozkładzie chi kwadrat

ni	n=20	n=50	n=100
1	0.6136	0.5817	0.5680
2	0.7343	0.7005	0.6938
3	0.7844	0.7695	0.7460

Table 40: Średnia długość przedziału ufności dla wariacji w rozkładzie chi kwadrat

ni	n=20	n=50	n=100
1	3.282120	1.741845	1.168695
2	6.564701	3.486919	2.354182
3	9.919553	5.225712	3.497179

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkladzie chi kwadrat



W przypadku rozkładu normalnego pokrycie rzeczywistej wariancji przez przedział ufności zgadza się z założonym. Długości Przedziałów ufności są porównywalne do sytuacji gdy wartość średnia μ była znana. Wykresy gęstości zachowują się analogicznie do przypadku ze znaną wartością oczekiwaną.

Dla rozkładu logistycznego wyznaczone przedziały są na analogicznym przedziale ufności, jak w sytuacji znanej wariancji - pokrycie wariancji przez PU wynosi około 88%. Średnie długości PU nie różnią się zbyt od tych wyznaczonych przy znanej średniej μ . Delikatną rozbieżność widać jedynie w przypadku, gdy $n = 20$, w pozostałych przypadkach przy nieznannej średniej przedział ufności jest nieznacznie dłuższy. Wykresy gęstości zmiennej opisującej długości przedziału są analogiczne do przypadku ze znaną wartością oczekiwaną.

W przypadku rozkładu Cauchy'ego, podobnie jak przy znanym parametrze przesunięcia - kwadrat parametru skali praktycznie w ogóle nie wpada do przedziału ufności wyznaczonego dla wariancji. Wykresy gęstości dla długości przedziału wyglądają analogicznie. Nadal pojawiają się duże wartości, które wydłużają oś odciętych. Rozrzut jest bardzo duży. Przedziały ufności obliczone dla wariancji w modelu normalnym w przypadku rozkładu Cauchy'ego nie niosą żadnej informacji o parametrach.

W przypadku rozkładu wykładniczego pokrycie zgadza się z tym wyznaczonym przy znanej średniej μ i również nie wzrasta wraz z rozmiarem próby. Średnie długości są nieznacznie większe niż w przypadku ze znaną wartością oczekiwaną. Wykresy gęstości zmiennej opisującej długości PU są analogiczne.

Również w przypadku rozkładu chi kwadrat nie ma znaczących różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi w zależności od informacji czy średnia μ jest znana. Średnia długość PU nieznacznie wzrosła, wykresy gęstości wyglądają analogicznie do tych uzyskanych przy znanej wartości oczekiwanej.

Zad 9 Asymptotyczny przedział ufności dla proporcji

W przypadku zmiennej losowej o rozkładzie zero-jedynkowym z prawdopodobieństwem sukcesu p , przybliżony przedział ufności dla średniej $\mathbb{E}X = p$ to

$$[\hat{p} - Z_{\alpha/2} \cdot SE, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \cdot SE]$$

gdzie $\hat{p} = \bar{X}$ to średnia próbkowa, $SE = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, $Z_{\alpha/2}$ - odpowiedni kwantyl rozkładu normalnego.

Uzasadnienie postaci przedziału ufności

Zmienna losowa $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład dwumianowy $Bin(n, p)$, który przy dostatecznie dużej wartości n można przybliżać rozkładem normalnym $\mathcal{N}(np, p(1-p))$. Z tego powodu zmienna losowa $\hat{p} = \bar{X}$ ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$

Dlatego też statystyka $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ ma standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$.

Wartość $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ jest w przybliżeniu równa $SE = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, ponieważ \hat{p} jest nieobciążonym estymatorem średniej $\mathbb{E}X = p$.

Postać przedziału ufności wynika z rachunku:

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{SE} \leq Z_{\alpha/2}\right) = \mathbb{P}\left(\hat{p} - SE \cdot Z_{\alpha/2} \leq p \leq \hat{p} + SE \cdot Z_{\alpha/2}\right)$$

Symulacje

Przeprowadzono symulację polegającą na 10000-krotnym wygenerowaniu próbki rozmiaru n z rozkładu o zadanych parametrach (w przypadku rozkładów dwuparametrowych przyjęto parametr położenia $\mu = 0$; parametr przesunięcia został oznaczony jako σ) i obliczeniu na jej podstawie 95%-owego przedziału ufności dla proporcji wylosowanych liczb dodatniej p . Prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej proporcji przez przedział ufności obliczono empirycznie korzystając z wygenerowanych prób. Wyniki symulacji zostały przedstawione poniżej.

W symulacji obliczano przedziały ufności dla proporcji liczb dodatnich losowanych z ciągłych rozkładów (normalnego, logistycznego oraz Cauchy'ego), zatem do obliczenia rzeczywistej wartości parametru p można posłużyć się dustrybuantami, bowiem $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - F_X(0)$. Jednakże w tym przypadku badane rozkłady są symetryczne o średniej równej zero, zatem rzeczywista proporcja ma wartość $p = \frac{1}{2}$.

Table 41: Prawdopodobieństwo pokrycia proporcji przez PU w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9622	0.9356	0.9464
2	0.9573	0.9370	0.9433
3	0.9575	0.9351	0.9423

Table 42: Średnia długość przedziału ufności dla proporcji w rozkładzie normalnym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.4269095	0.2743490	0.1950260
2	0.4269420	0.2744110	0.1949992
3	0.4269745	0.2743529	0.1949969

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie normalnym

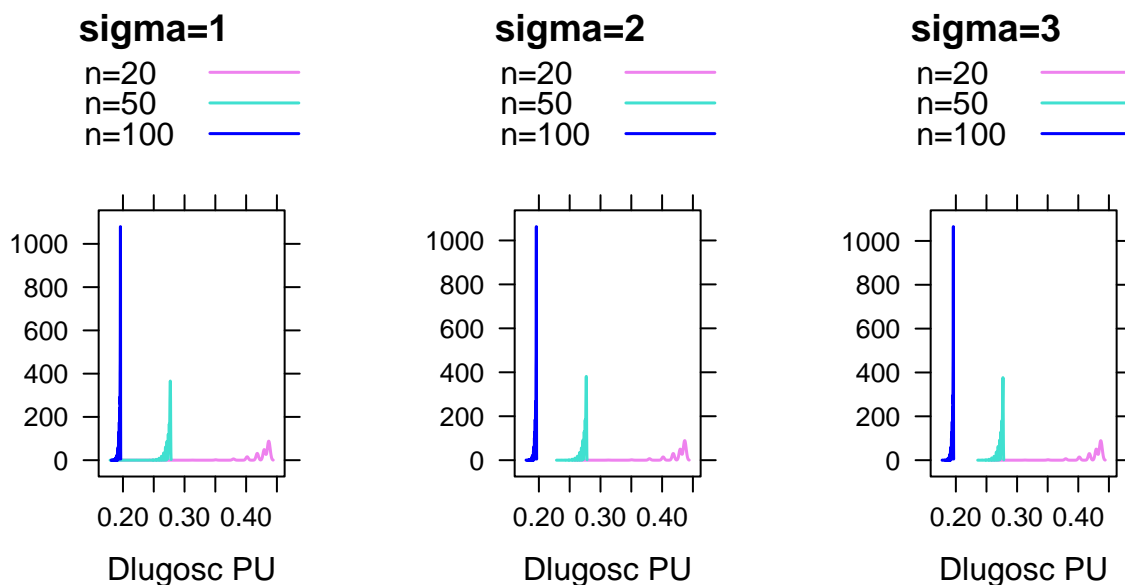


Table 43: Prawdopodobieństwo pokrycia proporcji przez PU w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9581	0.9356	0.9442
2	0.9593	0.9321	0.9408
3	0.9561	0.9317	0.9413

Table 44: Średnia długość przedziału ufności dla proporcji w rozkładzie logistycznym

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.4268155	0.2743687	0.1950128
2	0.4268578	0.2743509	0.1949918
3	0.4267886	0.2743029	0.1950069

Wykresy gestosci dla dlugosci przedzialu ufności w rozkładzie logistycznym

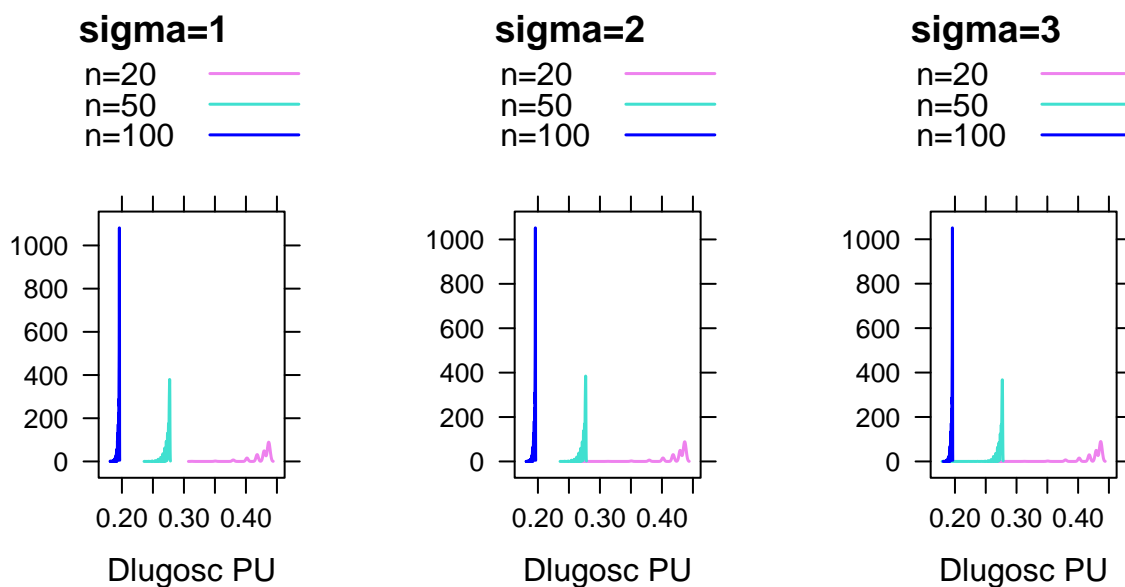


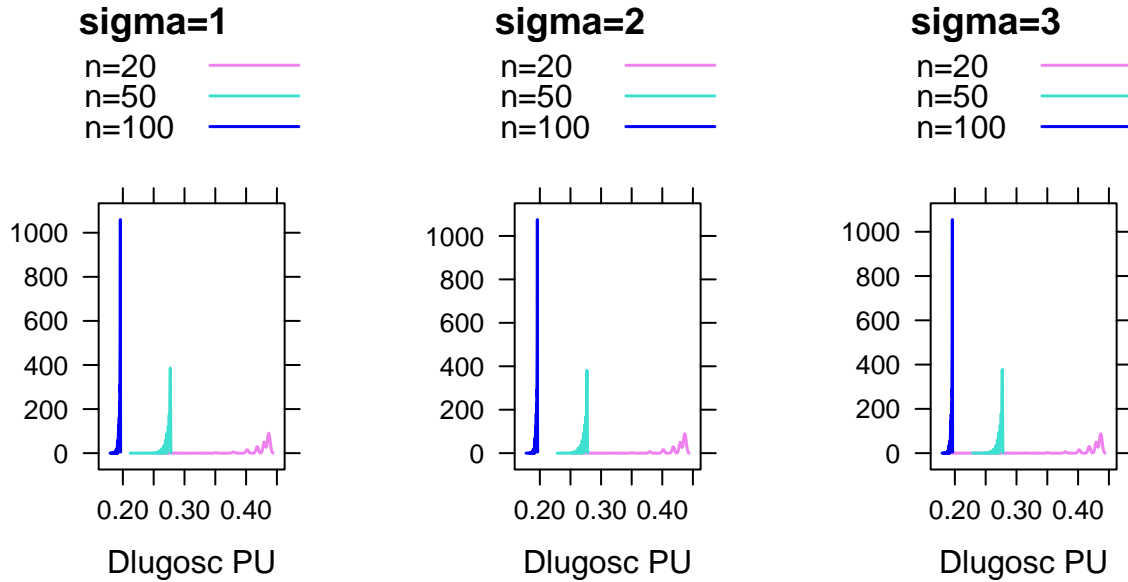
Table 45: Prawdopodobieństwo pokrycia proporcji przez PU w rozkładzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.9621	0.9356	0.9461
2	0.9582	0.9328	0.9426
3	0.9566	0.9394	0.9439

Table 46: Średnia długość przedziału ufności dla proporcji w rozkładzie Cauchy'ego

sigma	n=20	n=50	n=100
1	0.4271221	0.2743795	0.1950303
2	0.4268158	0.2743266	0.1950161
3	0.4265763	0.2743958	0.1950144

Wykresy gestosci dla dlugosci przedziału ufności w rozkładzie Cauchy'ego



We wszystkich symulacjach prawdopodobieństwo pokrycia rzeczywistej proporcji p przez przedział ufności jest zgodne z założonym, długości przedziałów nie zależą od rozkładu, z którego losowano liczby, a jedynie od wielkości próby. Jest tak, ponieważ nie miały znaczenia faktyczne wartości wylosowanych liczb, a jedynie ich znak. Ponieważ wszystkie rozkłady, z których losowano były symetryczne ze średnią równą zero, tak na prawdę trzykrotnie powtórzono eksperyment losowania liczb z rozkładu dwumianowego $Bin(n, \frac{1}{2})$ i otrzymano zbliżone wyniki.