فصل دوم:

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

مونا نژند فومنی

تعریف:

- فرم کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه nام در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=R(x)\,,\qquad a_n(x)\neq 0 \qquad (۱)$$

درصورتی که $R(x)=0$ باشد، معادله را معادله دیفرانسیل همگن معادله (۱) می‌نامیم.

$$a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0\,,\qquad a_n(x)\neq 0 \qquad (۲)$$

- فرم کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه nام با ضرایب ثابت در حالت کلی به‌صورت زیر است:

$$a_ny^{(n)}+\cdots+a_1y'+a_0y=R(x),\qquad a_n\neq 0\,,\qquad a_i\in\mathbb{R}\,,\qquad 0\leq i\leq n$$

درصورتی که $R(x)=0$ باشد، معادله را معادله دیفرانسیل همگن معادله بالا می‌نامیم.

$$a_ny^{(n)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0,\qquad a_n\neq 0\,,\qquad a_i\in\mathbb{R}\,,\qquad 0\leq i\leq n$$

قضیه۱:

اگر y_g جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۲) و y_p جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۱) باشند، آنگاه جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y=y_g+\,y_p$$

قضیه۲:

اگر $y_1,\ldots,y_n$ ، n جواب معادله دیفرانسیل (۲) باشند، در این صورت ترکیب خطی این n جواب یعنی $c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ جوابی از معادله دیفرانسیل (۲) نیز می‌باشد.

قضیه۳:

اگر $y_1,\ldots,y_n$ ، n جواب معادله دیفرانسیل (۲) باشند و این n جواب نسبت به هم استقلال خطی داشته باشند در این صورت ترکیب خطی این n جواب، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۲) می‌باشد. یعنی

$$y_g=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$$

تعریف استقلال و وابستگی خطی:

n جواب $y_1, \dots, y_n$ را نسبت به هم مستقل خطی می‌نامیم، اگر داشته باشیم

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = 0$$

نتیجه شود

$$c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

درغیر این صورت وابسته خطی هستند.

مثال:

$$1.\ x, x^2 \quad \longrightarrow \quad c_1 x + c_2 x^2 = 0 = 0x + 0x^2 \quad \longrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$$ مستقل خطی

$$2.\ x, 5x \quad \longrightarrow \quad c_1 x + c_2(5x) = (c_1 + 5c_2)x = 0 = 0x \quad \longrightarrow \quad c_1 = -5c_2$$ وابسته خطی

رونسکین (رونسکینی-رونسکی):

اگر $y_1, \dots, y_n$ ، n جواب معادله دیفرانسیل (۲) باشند. آنگاه رونسکینی این n جواب به‌صورت زیر تعریف می شود

$$w\,(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

نکته:

- شرط لازم و کافی برای آنکه n جواب $y_1, \dots, y_n$ مستقل خطی باشند، آن است که رونسکینی آن مخالف صفر باشد.

- اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند، آنگاه

$$w\,(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c\ e^{-\int p(x)dx}$$

که آن را فرمول آبل می‌نامیم.

استفاده از یک جواب معلوم برای تعیین جواب عمومی:

فرم استاندارد معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن در حالت کلی به‌صورت زیر است

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

اگر y_1 جوابی معلوم از معادله دیفرانسیل $(*)$ باشد، آنگاه جواب y_2 از معادله دیفرانسیل $(*)$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$y_2 = vy_1 \,, \qquad v = \int y_1^{-2}\, e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$$

در این صورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(*)$ به‌صورت زیر است

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2$$

تذکر:

ضریب y'' باید یک باشد،اگر نبود ابتدا آن را یک می‌کنیم سپس $p(x)$ را درنظر می‌گیریم .

مثال۱:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \,, \qquad y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

پاسخ: ابتدا با تقسیم طرفین معادله دیفرانسیل بر x^2، ضریب y'' را یک می‌کنیم.

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)}\, y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

$$y_2 = vy_1 \,, \quad v = \int y_1^{-2}\, e^{-\int p(x)dx}\, dx = \int \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^{-2} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx$$

$$= \int \frac{x}{\sin^2 x}\, \underbrace{e^{-\ln x}}_{x^{-1}}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

$$y_2 = -\cot x \,.\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$\longrightarrow \qquad y_g = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) + c_2\left(-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)$$

نکته:

اگر در معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم مجموع ضرایب برابر صفر شود، یکی از جواب ها به‌صورت e^x است.

مثال ۲:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$$

پاسخ:

$$x - (2x+1) + (x+1) = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} y_1 = e^x$$

$$y'' \underbrace{-\left(2+\frac{1}{x}\right)}_{p(x)} y' + \left(1+\frac{1}{x}\right) y = 0$$

$$y_2 = vy_1, \quad v = \int y_1^{-2}\, e^{-\int p(x)dx}\, dx = \int e^{-2x}\, e^{+\int\left(2+\frac{1}{x}\right)dx} dx = \int e^{-2x}\, \underbrace{e^{2x+\ln x}}_{e^{2x}x}\, dx$$

$$= \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = \frac{x^2}{2} e^x$$

$$\longrightarrow \quad y_g = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2e^x\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

مثال ۳:

اگر در معادله دیفرانسیل مرتبه دومی داشته باشیم $w\,(y_1, y_2) = e^x$ و $y_1 = e^x$، جواب عمومی معادله را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$y_2 = vy_1, \qquad v = \int y_1^{-2}\, e^{-\int p(x)dx}\, dx$$

از طرفی $w\,(y_1, y_2) = e^{-\int p(x)dx} = e^x$ درنتیجه

$$v = \int e^{-2x}\, e^x\, dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$y_2 = -e^{-x}(e^x) = -1$$

$$.\longrightarrow \quad y_g = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2(-1)$$

تمرین:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $x^2y'' - 2x^2y' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$, $y_1 = \sqrt{x}\, e^x$
2. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$, $y_1 = x\cos x$
3. $y'' + (\tan x)\, y' + (cot^2 x)y = 0$, $y_1 = \cos(\sin x)$
4. $x(1 - x)y'' - (1 - 2x)y' + (1 - 3x + x^2)y = 0$
5. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$

معادلات دیفرانسیل همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت:

فرم کلی چنین معادلات دیفرانسیلی به‌صورت زیر می‌باشد

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \qquad a_2 \neq 0\,, \qquad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\,, \qquad (*)$$

با فرض اینکه $y = e^{mx}$ که در آن $m \in \mathbb{R}$ یا $m \in \mathbb{C}$ داریم

$$a_2\,(m^2\,e^{mx}) + a_1(me^{mx}) + a_0(e^{mx}) = 0$$

$$\longrightarrow\ e^{mx}(a_2m^2 + a_1m + a_0) = 0$$

$$\xrightarrow{e^{mx}>0}\ a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0$$

معادله بالا را معادله کمکی یا مشخصه معادله دیفرانسیل $(*)$ می‌نامیم.

با توجه به $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$، سه حالت را برای Δ در نظر می‌گیریم:

- حالت اول:

$\Delta > 0 \quad \Longrightarrow$ معادله کمکی دارای دوریشه حقیقی و متمایز m_1, m_2 است.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1x} \\ y_2 &= e^{m_2x} \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad y_g = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

- حالت دوم:

$\Delta = 0 \quad \Longrightarrow$ معادله کمکی دارای یک ریشه حقیقی و مضاعف m است.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{mx} \\ y_2 &= xe^{mx} \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad y_g = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}$$

- حالت سوم:

$\Delta < 0 \quad \Longrightarrow$ معادله کمکی دارای دو ریشه مختلط و مزدوج $m_1, m_2 = \alpha \pm i\beta$ است.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 &= e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad y_g = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

مثال۱:

جواب عمومی معادلات زیر را به‌دست آورید.

1. $y'' - 9y' + 20y = 0$

پاسخ:

$$m^2 - 9m + 20 = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta = 81 - 80 = 1$$

$$(m-4)(m-5) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} m_1 = 4 \\ m_2 = 5 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = e^{4x} \\ y_2 = e^{5x} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad y_g = c_1 e^{4x} + c_2 e^{5x}$$

2. $y'' + 2y' + y = 0$

پاسخ:

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta = 4 - 4 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad m = -1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad y_g = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

3. $2y'' + 2y' + 3y = 0$

پاسخ:

$$2m^2 + 2m + 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta = 4 - 24 = -20$$

$$m_1, m_2 = \frac{-2 \pm \overbrace{\sqrt{-20}}^{i\sqrt{20}}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\, i \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \dfrac{\sqrt{5}}{2} x \\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \dfrac{\sqrt{5}}{2} x \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad y_g = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{5}}{2} x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{5}}{2} x$$

مثال۲:

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگنی را بیابید که دو جواب آن $y_1 = 1394\, e^{2x} \cos 2x$ و $y_2 = 1395\, e^{2x} \sin 2x$ باشد؟

پاسخ: از جواب‌های معادله معلوم است که $\Delta < 0$ است پس از حالت سوم استفاده می‌کنیم

$$\alpha = 2\,, \beta = 2 \implies m_1\,, m_2 = 2 \pm 2i$$

$$(m-m_1)(m-m_2)=0 \qquad \longrightarrow \qquad m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2=0$$
$$m^2-(2+2i+2-2i)m+(2+2i)(2-2i)=0$$
$$m^2-4m+8=0 \Longrightarrow y''-4y'+8y=0$$

مثال ۳:

معادله دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر داده شده حل کنید.

$$yy''-y'^2=y^2\ln y\,, \qquad y=e^z$$

پاسخ:

$$y'=e^z z'\,, \qquad y''=e^z(z')^2+z''e^z$$

پس از جای‌گذاری این مقادیر در معادله بالا داریم

$$z''+z'^2-z'^2=z \qquad \longrightarrow \qquad z''=z$$

از معادله کمکی استفاده می‌کنیم .

$$m^2-1=0 \Longrightarrow m=\pm 1 \Longrightarrow \begin{cases} z_1=e^x \\ z_2=e^{-x} \end{cases}$$

$$z_g=c_1e^x+\ c_2e^{-x} \qquad \longrightarrow \qquad y_g=e^z=\ e^{c_1e^x+\,c_2e^{-x}}$$

تمرین ۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y''-2y'+4y=0$
2. $2y''+y'+y=0$

تمرین ۲:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $4x^2y''+4xy'+(4x^2-1)y=0$ را با تغییر متغیر $y=x^{-\frac{1}{2}}z(x)$ به دست آورید.

تمرین ۳:

۱. فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر $y(x)$ جواب دلخواهی از معادله دیفرانسیل $ay''+by'+cy=0$ باشد، نشان دهید $\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$.

۲. فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبت و $g(x)$ تابع پیوسته دلخواهی باشد. اگر $Y_1(x)$ و $Y_2(x)$ دو جواب از معادله دیفرانسیل $ay''+by'+cy=g(x)$ باشند، نشان دهید $\lim_{x\to+\infty}[Y_1(x)-Y_2(x)]=0$.

معادلات دیفرانسیل همگن مرتبه nام با ضرایب ثابت:

فرم کلی چنین معادلات دیفرانسیلی به‌صورت زیر می‌باشد

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_n \neq 0\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}\,, \qquad 0 \leq i \leq n \qquad (*)$$

با فرض اینکه $y = e^{mx}$ که در آن $m \in \mathbb{R}$ یا $m \in \mathbb{C}$ داریم :

$$a_n(m^n e^{mx}) + \cdots + a_1(m e^{mx}) + a_0(e^{mx}) = 0$$

$$e^{mx}(a_n m^n + \cdots + a_1 m + a_0) = 0$$

$$\xrightarrow{e^{mx}>0} a_n m^n + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

معادله بالا را معادله کمکی یا مشخصه معادله دیفرانسیل $(*)$ می‌نامیم.

برای ریشه‌های معادله کمکی حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

- حالت اول:

  اگر معادله کمکی دارای n ریشه حقیقی و متمایز باشد، آنگاه

  $$e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_n x}$$

  n جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل $(*)$ می‌شوند.

- حالت دوم:

  اگر یک ریشه حقیقی معادله کمکی مانند m، s مرتبه تکرار شود، آنگاه

  $$e^{mx}, xe^{mx}, \ldots, x^{s-1} e^{mx}$$

  s جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل $(*)$ می‌شوند.

- حالت سوم:

  به ازای هر دو ریشه موهومی و مزدوج $m = \alpha \pm i\beta$ از معادله کمکی، $\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$ دو جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل $(*)$ می‌شوند.

- حالت چهارم:

اگر $m = \alpha + i\beta$ یک ریشه موهومی معادله کمکی با توان تکرار s مرتبه باشد آنگاه مزدوج m یعنی $\alpha - i\beta$ نیز یک ریشه موهومی معادله کمکی با توان تکرار s مرتبه خواهد شد، آنگاه

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases},\qquad \begin{cases} xe^{\alpha x}\cos\beta x \\ xe^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases},\cdots,\qquad \begin{cases} x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

$2s$ جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل $(*)$ می‌شوند.

- به طور کلی ترکیب خطی n جواب مستقل خطی به‌دست آمده در چهار حالت بیان شده جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(*)$ را مشخص می‌کنند.

یادآوری:

اگر $z = x + iy$ آنگاه

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = tan^{-1}(\frac{y}{x}) \end{cases} \longrightarrow \qquad z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

و همچنین ریشه های nام z از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} w_k = \sqrt[n]{r}\,(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}) \\ k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

تبصره (عملگر):

با تعریف نماد $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ معادله دیفرانسیل مرتبه nام با ضرایب ثابت در حالت کلی به‌صورت زیر است

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x), \qquad a_n \neq 0\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}\,, \qquad 0 \leq i \leq n$$

$$a_n D^n y + \cdots + a_1 D y + a_0 y = R(x)$$

$$(a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0) y = R(x)$$

$$\mathrm{F}(D) y = R(x)$$

$\mathrm{F}(D)$ را عملگر چندجمله‌ای و $\mathrm{F}(m)$ را معادله کمکی معادله دیفرانسیل بالا می‌گوییم.

مثال۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y^{(6)} - y^{(4)} - y'' + y = 0$

پاسخ:

$$m^6 - m^4 - m^2 + 1 = 0 \Longrightarrow m^4(m^2-1) - (m^2-1) = 0$$

$$\Longrightarrow (m^2-1)(m^4-1) = 0 \Longrightarrow (m^2-1)(m^2-1)(m^2+1) = 0$$

$$\Longrightarrow (m-1)^2(m+1)^2(m^2+1) = 0$$

$$\begin{cases} m = 1 \quad \text{مضاعف} \quad \longrightarrow \quad e^x, xe^x \\ m = -1 \quad \text{مضاعف} \quad \longrightarrow \quad e^{-x}, xe^{-x} \\ m^2 = -1 \quad \longrightarrow \quad m = \pm i \quad \longrightarrow \quad e^{0x}cosx, e^{0x}sinx \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad y_g = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x} + c_5\cos x + c_6\sin x$$

2. $y^{(4)} + y = 0$

پاسخ:

$$m^4 + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad m^4 = -1 = -1 + 0i$$

$$r = 1\,, \quad \theta = tan^{-1}0 = \pi$$

$$\begin{cases} w_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \\ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_0, w_3 \longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x \\ y_2 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases} \qquad w_1\,, w_2 \longrightarrow \begin{cases} y_3 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x \\ y_4 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad y_g = c_1y_1 + \cdots + c_4y_4$$

3. $D(D-2)^3\,(D^2+4D+5)^2(D^2+3D+2)y = 0$

پاسخ:

$$m(m-2)^3(m^2+4m+5)^2(m^2+3m+2) = 0$$

$$m(m-2)^3(m^2+4m+5)^2(m+1)(m+2) = 0$$

$$\begin{cases} m = 0 \quad \longrightarrow \quad y_1 = e^{0x} = 1 \\ m = 2 \quad \longrightarrow \quad y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}, y_4 = x^2e^{2x} \\ \underbrace{m^2+4m+5=0}_{\text{مضاعف}} \longrightarrow \underbrace{m=-2\pm i}_{\text{مضاعف}} \longrightarrow \begin{cases} y_5 = e^{-2x}\cos x \\ y_6 = e^{-2x}\sin x \end{cases}, \begin{cases} y_7 = xe^{-2x}\cos x \\ y_8 = xe^{-2x}\sin x \end{cases} \\ m = -1 \quad \longrightarrow \quad y_9 = e^{-x} \\ m = -2 \quad \longrightarrow \quad y_{10} = e^{-2x} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad y_g = c_1y_1 + \cdots + c_{10}y_{10}$$

مثال۲:

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم همگنی را بیابید که دو جواب آن xe^x و $e^{-x}\sin 2x$ باشد.

پاسخ: با توجه به جواب‌ها می‌توان ریشه‌های معادله کمکی را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$xe^x \longrightarrow m = 1$ مضاعف , $e^{-x}\sin 2x \longrightarrow m = -1 \pm 2i$

$$(m-1)^2[m-(-1+2i)][m-(-1-2i)] = 0$$

$$(m^2-2m+1)(m^2+2m+5) = 0$$

$m^4 + 2m^2 - 8m + 5 = 0$ معادله کمکی

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$$

مثال ۳:

فرض کنید یکی از جواب‌های معادله دیفرانسیل $y^{(4)}+2y'''+10y''+18y'+9y=0$ به‌صورت $y=\sin 3x$ است. جواب عمومی معادله دیفرانسیل را بیابید.

پاسخ:

$$m^4+2m^3+10m^2+18m+9=0$$ معادله کمکی

چون جواب به‌صورت $y=\sin 3x$ است پس باید $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=3\end{cases}$ و در نتیجه $m=\pm 3i$ باشد. پس یک قسمت معادله کمکی به‌صورت $(m-3i)(m+3i)=m^2+9$ است که اگر مساوی صفر قرار دهیم $m=\pm 3i$ و در نتیجه $y_1=\sin 3x$ و $y_2=\cos 3x$ به‌دست می‌آید.

اگر معادله کمکی را بر m^2+9 تقسیم کنیم، داریم

$$m^4+2m^3+10m^2+18m+9=(m^2+9)(m^2+2m+1)$$

حال اگر $m^2+2m+1=0$ باشد آنگاه $m=-1$ با مرتبه تکرار ۲ به‌دست می‌آید. لذا جواب‌ها به‌صورت

$$y_1=e^{-x},\ y_2=xe^{-x},\ y_3=\sin 3x,\ y_4=\cos 3x$$

است و درنتیجه جواب عمومی برابر است با:

$$y_g=c_1y_1+\cdots+c_4y_4$$

تمرین۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y''' - y'' - y' + y = 0$
2. $(\mathrm{D}^3 - 1)y = 0$
3. $(D-3)^4\,(D^2 - 4D + 13)y = 0$
4. $y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0$

تمرین۲:

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم همگنی را بیابید که دو جواب آن x و xe^{3x} باشد.

تمرین۳:

آیا معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت همگن مرتبه پنجمی وجود دارد که جواب عمومی آن به‌صورت زیر باشد؟ اگر جواب مثبت است، معادله دیفرانسیل را بیابید. (ضرایب ثابت حقیقی هستند.)

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_5 \cos 6x$$

تمرین۴:

با ذکر دلیل مناسب و بدون جای‌گذاری، آیا تابع زیر در معادله دیفرانسیل $y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$ صدق می‌کند یا نه؟ توضیح دهید.

$$y(x) = 9(x-2)(1-x) + 2\cos^2 x - 13\sin x\cos x$$

حل معادلات دیفرانسیل غیرهمگن:

همان طور که می‌دانیم برای حل معادله دیفرانسیل غیرهمگن ابتدا معادله دیفرانسیل همگن را حل می‌کنیم سپس جواب عمومی این معادله را با جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیرهمگن جمع می‌کنیم.

$$y = y_g + y_p$$

حل معادلات دیفرانسیل همگن بررسی شد، برای به‌دست آوردن y_p دو روش را بیان می‌کنیم.

- روش ضرایب نامعین
- روش تغییر پارامتر لاگرانژ

روش ضرایب نامعین:

معادله دیفرانسیل مرتبه nام غیرهمگن با ضرایب ثابت را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x), \qquad a_n \neq 0\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}\,, \qquad 0 \leq i \leq n$$

دو حالت را برای $R(x)$ درنظر می‌گیریم:

- حالت اول:

$$R(x) = e^{\alpha x} S(x)$$

که در آن $S(x)$ یک چندجمله ای درجه n است.

در این صورت داریم:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} M(x)$$

که در آن k تعداد ریشه‌های معادله کمکی که برابر با α شده‌اند، است و $M(x)$ یک چندجمله ای کامل با ضرایب نامعین از درجه n است.

- حالت دوم:

$$R(x) = e^{\alpha x} S(x) \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases}$$

که در آن $S(x)$ یک چندجمله ای درجه n است.

در این صورت داریم:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} [M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x]$$

که در آن k تعداد ریشه‌های معادله کمکی که برابر با $\alpha + i\beta$ شده‌اند، است و $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله ای کامل با ضرایب نامعین از درجه n هستند.

- در هر دو حالت بعد از قرار دادن جواب خصوصی مذکور در معادله دیفرانسیل غیرهمگن داده شده و شرط صدق کردن آن در معادله، به‌دست می‌آید.

مثال:

جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y'' - 3y' + 2y = x$

پاسخ:

$\alpha = 0, \quad S(x) = x$ حالت اول

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \longrightarrow (m-1)(m-2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_p = x^k e^{0x}(Ax + B) \xrightarrow{k=0} y_p = Ax + B$$

$$y_p' = A\,,\ y_p'' = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \underbrace{0 - 3A + 2(Ax + B)}_{2Ax + (-3A + 2B)} = x \longrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}\,, B = \frac{3}{4} \longrightarrow y_p = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

2. $y'' - 9y = x^2 e^{3x}$

پاسخ:

$\alpha = 3, \quad S(x) = x^2$ حالت اول

$$m^2 - 9 = 0 \longrightarrow m = \pm 3$$

$$y_p = x^k e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) \xrightarrow{k=1} y_p = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx)$$

$$y_p', y_p'' = ? \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} A, B, C = ?$$

3. $y'' + y = x^2 \sin x$

پاسخ:

$\alpha = 0, \ \ \beta = 1, \ \ S(x) = x^2$ حالت دوم

$m^2 + 1 = 0 \ \longrightarrow \ m = \pm i$

$y_p = x^k e^{0x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x]$

$\alpha + i\beta = 0 + i = i \ \longrightarrow \ k = 1$

$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)\cos x + (Dx^3 + Dx^2 + Fx)\sin x$

$y_p', y_p'' = ? \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} A, B, C, D, E, F = ?$

4. $y'' + 2y' + y = e^x \cos x$

پاسخ:

$\alpha = 1, \ \ \beta = 1, \ \ S(x) = 1$ حالت دوم

$m^2 + 2m + 1 = 0 \ \longrightarrow \ (m+1)^2 = 0 \ \longrightarrow \ m = -1$ مضاعف

$y_p = x^k e^x[A\cos x + B\sin x] \xrightarrow{k=0} y_p = e^x[A\cos x + B\sin x]$

$\alpha + i\beta = 1 + i \longrightarrow \ k = 0$

$y_p', y_p'' = ? \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} A, B = ?$

تمرین۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به روش ضرایب نامعین به‌دست آورید. (نیازی به محاسبه ضرایب نیست.)

1. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 3e^{2x}$
2. $y^{(4)} + 4y^{(3)} = 2020$

تمرین۲:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر $y = \ln z$ به‌دست آورید.

$y'' - y' + (y')^2 = 2 + 3e^{x-y}$

تذکر:

روش ضرایب نامعین دارای دو ایراد اساسی می‌باشد.

۱. اگر $R(x)$ به‌صورت مجموعه‌ای از دو حالت بیان شده در روش ضرایب نامعین باشد.
۲. اگر $R(x)$ غیر از دو حالت بیان شده در روش ضرایب نامعین باشد یا معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر باشد.

آنگاه با توجه به روش ضرایب نامعین، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل به این روش قابل حل نیست.

برای رفع این دو ایراد، دو تبصره زیر را بیان می‌کنیم.

- تبصره۱: اصل برهم نهی جواب‌ها
- تبصره۲: روش تغییر پارامتر لاگرانژ

اصل برهم نهی جواب‌ها:

اگر $R(x)$ به‌صورت مجموعه‌ای از دو حالت روش ضرایب نامعین باشد، داریم:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R_1(x) + \cdots + R_n(x)$$

آنگاه برای به‌دست آوردن جواب خصوصی به روش ضرایب نامعین به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R_1(x) \quad \longrightarrow \quad y_{p_1}$$
$$\vdots$$
$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R_n(x) \quad \longrightarrow \quad y_{p_n}$$

$$\longrightarrow \quad y_p = y_{p_1} + \cdots + y_{p_n}$$

مثال:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به روش ضرایب نامعین به‌دست آورید. (نیازی به محاسبه ضرایب نیست.)

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = x + x^2 e^{3x} + \cos x$$

پاسخ:

$$y = y_g + y_p$$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$m^5 + 2m^3 + m = 0 \;\longrightarrow\; m(m^4 + 2m^2 + 1) = 0 \;\longrightarrow\; m(m^2+1)^2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m=0 \quad \rightarrow \quad y_1 = e^{0x} = 1 \\ m=\pm i \quad \text{مضاعف} \rightarrow \begin{cases} y_2 = e^{0x}\cos x \\ y_3 = e^{0x}\sin x \end{cases} , \quad \begin{cases} y_4 = xe^{0x}\cos x \\ y_5 = xe^{0x}\sin x \end{cases} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad y_g = c_1 y_1 + \cdots + c_5 y_5$$

حال جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را به روش ضرایب نامعین به‌دست می‌آوریم.

$y^{(5)} + 2y''' + y' = x, \quad \alpha = 0, \quad S(x) = x$ حالت اول

$$y_{p_1} = x^k e^{0x}(A_1 x + A_0) \xrightarrow{k=1} y_{p_1} = A_1 x^2 + A_0 x$$

$y^{(5)} + 2y''' + y' = x^2 e^{3x}, \quad \alpha = 3, \quad S(x) = x^2$ حالت اول

$$y_{p_2} = x^k e^{3x}(B_2 x^2 + B_1 x + B_0) \xrightarrow{k=0} y_{p_2} = e^{3x}(B_2 x^2 + B_1 x + B_0)$$

$y^{(5)} + 2y''' + y' = \cos x, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad S(x) = 1$ حالت دوم

$$y_{p_3} = x^k e^{0x}(C\cos x + D\sin x) \xrightarrow{k=2} y_{p_3} = C\,x^2\cos x + Dx^2\sin x$$

$$\alpha + i\beta = i$$

$$\longrightarrow \quad y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

تمرین:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به روش ضرایب نامعین به‌دست آورید. (نیازی به محاسبه ضرایب نیست.)

1. $y'' + y' + y = \sin^2 x$
2. $y'' - 2y' + 5y = e^x(1 - 2\cos^2 x) + 10x + 1$
3. $y''' - 3y'' = 2x^4 + x^2 e^{3x} + \sin 3x$
4. $y''' - y'' + y' - y = x^2\cosh x + \sin x$
5. $y''' + y' = 4\cos x + 2x - 1 + x^2\sin x$
6. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = e^x + 4 + \sin x + x^2$

روش تغییر پارامتر لاگرانژ:

اگر معادله دیفرانسیل به‌صورت $y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$ باشد، در این صورت با شرط معلوم بودن دو جواب مستقل خطی از همگن معادله دیفرانسیل فوق ، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2\, R(x)}{w(y_1, y_2)}\, dx \qquad , \qquad v_2 = \int \frac{y_1\, R(x)}{w(y_1, y_2)}\, dx$$

که در آن $w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)dx}$ است.

تذکر:

در این معادله دیفرانسیل ضریب y'' باید یک باشد، اگر نبود آن را یک می‌کنیم و سپس ادامه می دهیم.

مثال۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$1.\, x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = x^3e^x\,, \qquad y_1(x) = x\cos x$$

پاسخ:

$$y'' \underbrace{-\frac{2}{x}}_{p(x)} y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y = \underbrace{xe^x}_{R(x)}$$

$$y = y_g + y_p$$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$y_2 = vy_1\,, \quad v = \int y_1^{-2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int (x\cos x)^{-2} e^{+\int \frac{2}{x}dx} dx$$

$$= \int x^{-2}(sec^2 x)\, \underbrace{e^{2lnx}}_{x^2}\, dx = \int sec^2 x\, dx = \tan x$$

$$y_2 = \tan x . x\cos x = x\sin x$$

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حال جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را به روش تغییر پارامتر لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=e^{-\int p(x)dx}=x^2$$

$$v_1=-\int \frac{y_2\,R(x)}{w(y_1,y_2)}\,dx=-\int \frac{x\,sinx.\,xe^x}{x^2}dx=-\int sinx\;e^x dx=\frac{e^x(\cos x-\sin x)}{2}$$

$$v_2=\int \frac{y_1\,R(x)}{w(y_1,y_2)}\,dx=\int \frac{x\,cosx.\,xe^x}{x^2}dx=\int cosx.\,e^x dx=\frac{e^x(\cos x-\sin x)}{2}$$

$$2.\,(1-2x)y''+2y'+(2x-3)y=(1-2x)^2$$

پاسخ:

$$y''+\underbrace{\frac{2}{1-2x}}_{p(x)}y'+\frac{2x-3}{1-2x}y=\underbrace{1-2x}_{R(x)}$$

$$y=y_g+y_p$$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$(1-2x)+2+(2\,x-3)=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}}y_1=e^x$$

$$y_2=vy_1\,,\quad v=\int y_1^{-2}\,e^{-\int p(x)dx}dx=\int e^{-2x}e^{\int\frac{-2}{1-2x}dx}dx$$

$$=\int e^{-2x}e^{\ln(1-2x)}dx=\int e^{-2x}(1-2x)dx$$

$$=(1-2x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-(-2)\left(\frac{1}{4}e^{-2x}\right)=\;xe^{-2x}$$

$$y_2=xe^{-x}$$

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

حال جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را به روش تغییر پارامتر لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.

$$y_p=v_1y_1+v_2y_2$$

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=e^{-\int p(x)dx}=1-2x$$

$$v_1=-\int \frac{y_2\,R(x)}{w(y_1,y_2)}\,dx=-\int \frac{xe^{-x}(1-2x)}{1-2x}dx=-\int xe^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)$$

$$v_2=\int \frac{y_1\,R(x)}{w(y_1,y_2)}\,dx=\int \frac{e^x(1-2x)}{1-2x}dx=\int e^x dx=e^x$$

$3. y'' - 3y' + 2y = \cos(e^{-x})$

پاسخ:

$R(x) = \cos(e^{-x})$, $p(x) = -3$

$y = y_g + y_p$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \longrightarrow (m-1)(m-2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = e^{2x} \end{cases}$$

$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$

حال جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را به روش تغییر پارامتر لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.

$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int -3dx} = e^{3x}$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2\, R(x)}{w(y_1, y_2)}\, dx = -\int \frac{e^{2x}\cos(e^{-x})}{e^{3x}} dx = -\int e^{-x}\cos(e^{-x})dx = sin(e^{-x})$$

$$v_2 = \int \frac{y_1\, R(x)}{w(y_1, y_2)}\, dx = \int \frac{e^{x}\cos(e^{-x})}{e^{3x}} dx = \int e^{-2x}\cos(e^{-x})dx$$

$$= \int e^{-x}.e^{-x}.cos\,(e^{-x})\mathrm{dx} = -e^{-x}sin(e^{-x}) - cos(e^{-x})$$

مثال۲:

اگر یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ برابر با $(1+x)^2$ باشد و می‌دانیم رونسکین هر دو جواب معادله دیفرانسیل فوق ثابت است. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 1 + x$ را بیابید.

پاسخ:

$y_1(x) = (1+x)^2$, $w(y_1, y_2) = A$, $R(x) = 1 + x$

$y = y_g + y_p$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$y_2 = vy_1\,, \quad v = \int y_1^{-2}\, e^{-\int p(x)dx} dx = \int (1+x)^{-4}.\,A dx = A\frac{(1+x)^{-3}}{-3}$$

$$y_2 = -\frac{A}{3}(1+x)^{-3}.\,(1+x)^2 = -\frac{A}{3(1+x)}$$

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حال جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را به روش تغییر پارامتر لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2\, R(x)}{w(y_1, y_2)} dx = -\int \frac{-\dfrac{A}{3(1+x)}\ (1+x)}{A} dx = \frac{x}{3}$$

$$v_2 = \int \frac{y_1\, R(x)}{w(y_1, y_2)} dx = \int \frac{(1+x)^2\ (1+x)}{A} dx = \frac{(1+x)^4}{4A}$$

تمرین ۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 3x^{\frac{3}{2}}\sin x\ , \qquad y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

2. $(\sin^2 x)\ y'' - (\sin 2x)y' + (1 + \cos^2 x)y = \sin^3 x, \qquad y_1(x) = \sin x$

3. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2 + 1)^2\ , \qquad y_1(x) = x$

4. $(x^2 \cos x)y'' + (x \sin x - 2\cos x)(xy' - y) = x^3 \cos^2 x\ , \qquad y_1(x) = x$

5. $y'' - \frac{2}{x^2 - 2x}y' + \frac{2}{x^3 - 2x^2}y = \frac{1}{x}, \qquad y_1(x) = x$

6. $(1 - x)\ y'' + x\ y' - \ y = (x - 1)^2 e^x$

7. $x\ y'' - (1 + x)y' + \ y = x^2 e^{2x}$

8. $x(1 - x)\ y'' - (2x + 1)y' + (x + 1)\ y = (x^2 + x - 1)e^x$

9. $y'' + \ y = \tan x$

10. $y'' + 2\ y' + y = e^{-x} \ln x$

تمرین ۲:

اگر $y_1(x) = x$ یک جواب معادله دیفرانسیل همگن نظیر معادله دیفرانسیل زیر باشد:

اولاً: جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن را بیابید.

ثانیاً: اگر $y_p = \sin x$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیرهمگن زیر باشد، حاصل $\int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}dx$ را به‌دست آورید.

$$(x \sin x + \cos x)y'' - (x\cos x)y' + (\cos x)y = x$$

تمرین ۳:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر $y = \ln z$ به‌دست آورید.

$$y'' - y' + (y')^2 = 2 + 3e^{x-y}$$

معادلات دیفرانسیل کوشی-اویلر:

فرم کلی چنین معادلات دیفرانسیلی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = R(x)$$

روش حل: با استفاده از تغییر متغیر $x = e^z$ معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر را به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{x}\mathcal{D}y$$

$$xy' = \mathcal{D}y$$

$$\vdots$$

$$x^n y^{(n)} = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)\ldots(\mathcal{D}-(n-1))y$$

که در آن $\mathcal{D}^k = \frac{d^k}{dz^k}$.

فرم تعمیم یافته معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر به‌صورت زیر است:

$$c_n(ax+b)^n y^{(n)} + \cdots + c_1(ax+b)y' + c_0 y = R(x)$$

با استفاده از تغیر متغیر $ax + b = e^z$ این معادله دیفرانسیل را به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم.

$$(ax+b)^n y^{(n)} = a^n\, \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)\ldots(\mathcal{D}-(n-1))y$$

مثال:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$1. x^4y''' + 2x^3y'' = x\ln x$$

پاسخ: ابتدا معادله دیفرانسیل را بر x تقسیم می‌کنیم تا به فرم معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر در بیاید.

$$x^3y''' + 2x^2y'' = \ln x$$

حال از تغیر متغیر $x = e^z$ یا $z = \ln x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)y + 2\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y = z$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2+2)y = z$$

$$\mathcal{D}^2(\mathcal{D}-1)y = z$$ معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت غیرهمگن

$$y = y_g + y_p$$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$m^2(m-1) = 0 \quad\longrightarrow\quad \begin{cases} m_1 = 0 \quad \text{مضاعف} \\ m_2 = 1 \end{cases} \quad\longrightarrow\quad \begin{cases} y_1 = e^{0z} = 1, y_2 = ze^{0z} = \ln x \\ y_3 = e^z = x \end{cases}$$

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$$

حال جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را به روش ضرایب نامعین به‌دست می‌آوریم.

$$\alpha = 0,\quad S(z) = z$$ حالت اول

$$y_p = z^ke^{0z}(Az+B) \quad\xrightarrow{k=2}\quad y_p = Az^3 + Bz^2$$

$$\mathcal{D}^2(\mathcal{D}-1)\underbrace{(Az^3+Bz^2)}_{y_p} = z \quad\longrightarrow\quad \mathcal{D}^2(3Az^2 + 2Bz - Az^3 - Bz^2) = z$$

$$\longrightarrow\quad 6A - 6Az - 2B = z \quad\longrightarrow\quad -6Az + (6A-2B) = z \quad\longrightarrow\quad A = -\tfrac{1}{6},\ B = -\tfrac{1}{2}$$

$$y_p = -\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{6}(\ln x)^3 - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$2. (3x+2)^2y''+3(3x+2)y'-36y=3x^2+4x+1$

پاسخ: معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر تعمیم یافته

حال از تغیر متغیر $3x+2=e^z$ یا $x=\frac{e^z-2}{3}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم

$$3^2\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y+3.3\mathcal{D}y-36y=3\left(\frac{e^z-2}{3}\right)^2+4\left(\frac{e^z-2}{3}\right)+1$$

$$9(\mathcal{D}^2-\mathcal{D}+\mathcal{D}-4)y=3\frac{e^{2z}+4-4e^z}{9}+\frac{4e^z-8}{3}+1$$

$$(\mathcal{D}^2-4)y=\frac{1}{27}(e^{2z}-1)$$ معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت غیرهمگن

$$y=y_g+y_p$$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$m^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1=2 \\ m_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{2z}=(3x+2)^2 \\ y_2=e^{-2z}=(3x+2)^{-2} \end{cases}$$

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را می‌توان به دو روش ضرایب نامعین و تغییر پارامتر لاگرانژ به‌دست آورد که در این مثال به روش تغییر پارامتر لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.

$$y_p=v_1y_1+v_2y_2$$

$$w(y_1,y_2)=e^{-\int p(z)dz}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{2z} & e^{-2z} \\ 2e^{2z} & -2e^{-2z} \end{vmatrix}=-4$$

$$v_1=-\int\frac{y_2\,R(z)}{w(y_1,y_2)}\,dz=-\int\frac{e^{-2z}\frac{1}{27}(e^{2z}-1)}{-4}dz=\frac{1}{108}\int(1-e^{-2z})dz$$
$$=\frac{1}{108}\left(z+\frac{1}{2}e^{-2z}\right)=\frac{1}{108}[\ln(3x+2)+\frac{1}{2}(3x+2)^{-2}]$$

$$v_2=\int\frac{y_1\,R(z)}{w(y_1,y_2)}\,dz=\int\frac{e^{2z}\frac{1}{27}(e^{2z}-1)}{-4}dz=\frac{1}{108}\int(e^{2z}-e^{4z})dz$$
$$=\frac{1}{108}\left(\frac{1}{2}e^{2z}-\frac{1}{4}e^{4z}\right)=\frac{1}{108}[\frac{1}{2}(3x+2)^2-\frac{1}{4}(3x+2)^4]$$

3. $\frac{1}{8}(2x-1)^3 y''' + \frac{1}{2}(2x-1)^2 y'' + 2(2x-1)y' - 4y = 0$

پاسخ: معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر تعمیم یافته

حال از تغیر متغیر $2x-1=e^z$ یا $z=\ln(2x-1)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم

$$\frac{1}{8}.2^3\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)y + \frac{1}{2}.2^2\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y + 2.2\mathcal{D}y - 4y = 0$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)y + 2\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)y + 4\mathcal{D}y - 4y = 0$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2+2)y + 4(\mathcal{D}-1)y = 0$$

$$(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}^2+4)y = 0$$ معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت همگن

$$(m-1)(m^2+4) = 0$$

$$\begin{cases} m = 1 \implies y_1 = e^z = 2x-1 \\ m^2 = -4 \implies m = \pm 2i \implies \begin{cases} y_2 = e^{0z}\cos 2z = \cos(2\ln(2x-1)) \\ y_3 = e^{0z}\sin 2z = \sin(2\ln(2x-1)) \end{cases} \end{cases}$$

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$$

تمرین۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $x^2\, y'' + 2xy' - 2\, y = 2x^2 \ln x + 6x$
2. $x^2\, y'' + xy' - y = (x+1)^{-1}$
3. $x^2\, y'' - 6\, y = x^{-2} \ln x$
4. $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2}\, y = 2x - 1$
5. $x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = 1 - \ln x + \cos(\ln x)$
6. $x^3 y''' + xy' - y = \sin(\ln x^2) + x^2$
7. $x^3 D^3 y + 2x^2 D^2 y = x + \sin(\ln x)$
8. $(2x+1)^2\, y'' + 8(2x+1)\, y' + 8\, y = 4\sin(2x+1)$
9. $(2-3x)^2\, y'' + 3(2-3x)\, y' + 9y = 9(2-3x)^2 + 9$
10. $(3x+2)^2\, y'' - \frac{27}{4}\, y = 9(6x+1)\sqrt{3x+2}$

تمرین۲:

اگر جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^{(4)} - \frac{3}{4x^2} y'' = 1$ به‌صورت $y = c_1 + c_2 x + g(x, c_3, c_4) + h(x)$ باشد، توابع g و h را تعیین کنید.

تمرین۳:

به ازای چه مقادیری از a معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 2xy' + ay = 0$ دارای جواب‌هایی به فرم $y(x) = x^r$ است.

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل:

یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل همزمان، متشکل از تعدادی تابع مجهول و مشتقات آنها نسبت به یک متغیر مستقل را یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌نامیم.

یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات دیفرانسیل استفاده از عملگرها است که در این بخش به بیان این روش می‌پردازیم.

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به روش عملگر یا اپراتور:

- در حالت کلی یک دستگاه دو معادله دیفرانسیل خطی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{cases} f_1(D)\,x + f_2(D)\,y = g(t) \\ f_3(D)\,x + f_4(D)\,y = h(t) \end{cases} \qquad (*)$$

که در آن $D = \frac{d}{dt}$، x و y توابع مجهول، t متغیر مستقل و $f_i(D)$ ها $(0 \leq i \leq 4)$ عملگرهای چندجمله‌ای می‌باشند.

- در دستگاه فوق اگر $g(t)$ و $h(t)$ برابر صفر باشند آنگاه دستگاه حاصل را دستگاه همگن متناظر با دستگاه $(*)$ می‌نامیم.

- جواب عمومی دستگاه $(*)$ مجموعه‌ای از توابع $x = x(t)$، $y = y(t)$ و ثابت‌های پارامتری می‌باشد که در بازه‌ای مانند (a, b) در هر دو معادله دیفرانسیل دستگاه $(*)$ صدق می‌کند.

- دترمینان ضرایب یعنی

$$W(D) = \begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) \\ f_3(D) & f_4(D) \end{vmatrix} = f_1(D)\,f_4(D) - f_2(D)\,f_3(D)$$

را دترمینان دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌نامیم.

- با فرض اینکه $W(D) \neq 0$ باشد آنگاه تعداد ثابت‌های پارامتری در جواب عمومی دستگاه $(*)$، برابر با توان $W(D)$ است.

روش حل:

برای حل دستگاه $(*)$ از روش حذفی گاوس استفاده می‌کنیم.

با ضرب کردن $f_4(D)$ در معادله اول و $-f_2(D)$ در معادله دوم دستگاه $(*)$ و جمع کردن معادلات حاصل، y حذف می‌شود و یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت نسبت به x به‌دست می‌آید که می‌توان آن را توسط روش‌های بیان شده در این فصل حل کرد.

با جای‌گذاری مقدار x در یکی از دو معادله دیفرانسیل دستگاه $(*)$، معادله‌ای نسبت به y به‌دست می‌آید که می‌توان آن را نیز برای y حل نمود.

نکته:

این روش حل، یعنی ضرب کردن یک معادله دیفرانسیل توسط یک عملگر چندجمله‌ای، معمولاً مرتبه معادله دیفرانسیل داده شده را بالا می‌برد و در نتیجه باعث می‌شود تا ثابت‌های پارامتری اضافی در توابع $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ پدید آید.

بنابراین در جواب‌هایی از دستگاه‌هایی که تعداد ثابت‌های پارامتری بیشتر از توان $W(D)$ است، می‌توان ثابت‌های اضافی را با جای‌گذاری در دستگاه معادلات دیفرانسیل حذف کرد.

مثال:

جواب عمومی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$1.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه را با استفاده از نماد عملگر $D = \frac{d}{dt}$، به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{cases} Dx + 3x - 4y = 0 \\ \\ Dy + 2x - 3y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (D+3)x - 4y = 0 \\ \\ 2x + (D-3)y = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

حال معادله اول دستگاه $(*)$ را در $(D-3)$ و معادله دوم دستگاه $(*)$ را در ۴ ضرب می‌کنیم، سپس این دو معادله را با هم جمع کرده تا به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت همگن به‌صورت زیر برسیم

$$(D-3)(D+3)x-4(D-3)y+8x+4(D-3)y=0 \quad \longrightarrow \quad (D^2-1)x=0$$

$$m^2-1=0 \quad \longrightarrow \quad m=\pm 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x_1=e^t \\ x_2=e^{-t} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x=x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$$

در ادامه با جای‌گذاری $x=x(t)$ در معادله اول دستگاه $(*)$، می‌توان مقدار $y=y(t)$ را به‌دست آورد.

$$y=\frac{1}{4}(D+3)x=\frac{1}{4}(D+3)(c_1e^t+c_2e^{-t})=\frac{1}{4}(c_1e^t-c_2e^{-t}+3c_1e^t+3c_2e^{-t})$$

$$\longrightarrow \quad y=y(t)=c_1e^t+\frac{1}{2}c_2e^{-t}$$

در نهایت با به‌دست آوردن دترمینان دستگاه $(*)$ تعداد ثابت‌های پارامتری جواب عمومی دستگاه را مشخص می‌کنیم.

$$W(D)=\begin{vmatrix} D+3 & -4 \\ 2 & D-3 \end{vmatrix}=D^2-9+8=D^2-1$$

با توجه به درجه چندجمله‌ای دترمینان دستگاه $(*)$، جواب عمومی دستگاه $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ باید دارای دو ثابت پارامتری باشد.

$$2.\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-x+4y=1 \\ \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=t-1 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه را با استفاده از نماد عملگر $D=\frac{d}{dt}$، به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{cases} 2Dx+Dy-x+4y=1 \\ \\ Dx-Dy=t-1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} (2D-1)x+(D+4)y=1 \\ \\ Dx-Dy=t-1 \end{cases} \qquad (*)$$

حال معادله اول دستگاه $(*)$ را در D و معادله دوم دستگاه $(*)$ را در $(D+4)$ ضرب می‌کنیم، سپس این دو معادله را با هم جمع کرده تا به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت غیرهمگن به‌صورت زیر برسیم

$$D(2D-1)x+D(D+4)y+D(D+4)x-D(D+4)y=D(1)+\ (D+4)(t-1)$$

$$\longrightarrow \quad D(2D-1+D+4)x=0+1+4t-4 \quad \longrightarrow \quad D(D+1)x=\frac{4}{3}t-1$$

ابتدا جواب عمومی قسمت همگن را به‌دست می‌آوریم.

$$m(m+1)=0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} m_1=0 & \rightarrow \quad x_1=e^{0t}=1 \\ m_2=-1 & \rightarrow \quad x_2=e^{-t} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x_g=c_1+c_2e^{-t}$$

جواب خصوصی قسمت غیرهمگن را می‌توان به دو روش ضرایب نامعین و تغییر پارامتر لاگرانژ به‌دست آورد که در این مثال به روش ضرایب نامعین به‌دست می‌آوریم.

$\alpha=0,\quad S(t)=\frac{4}{3}t-1$ حالت اول

$$x_p=t^ke^{0t}(At+B) \xrightarrow{k=1} x_p=At^2+Bt$$

$$(D^2+D)\underbrace{(At^2+Bt)}_{x_p}=\frac{4}{3}t-1 \quad \longrightarrow \quad 2A+2At+B=\frac{4}{3}t-1$$

$$\longrightarrow \quad 2At+(2A+B)=\frac{4}{3}t-1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} A=\dfrac{2}{3} \\ \\ B=-\dfrac{7}{3} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x_p=\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t$$

$$x=x(t)=x_g+x_p=c_1+c_2e^{-t}+\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t$$

در ادامه با جای‌گذاری $x = x(t)$ در معادله دوم دستگاه $(*)$، می‌توان مقدار $y = y(t)$ را به‌دست آورد.

$$y = \frac{1}{D}(Dx + 1 - t) = x + \frac{1}{D}(1 - t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t + t - \frac{1}{2}t^2 + c_3$$

$$\longrightarrow \quad y = y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3$$

در نهایت با به‌دست آوردن دترمینان دستگاه $(*)$ تعداد ثابت‌های پارامتری جواب عمومی دستگاه را مشخص می‌کنیم.

$$W(D) = \begin{vmatrix} 2D - 1 & D + 4 \\ D & -D \end{vmatrix} = -2D^2 + D - D^2 - 4D = -3D^2 - 3D$$

با توجه به درجه چندجمله‌ای دترمینان دستگاه $(*)$، جواب عمومی دستگاه $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ باید دارای دو ثابت پارامتری باشد.

حال می‌توان ثابت اضافی جواب عمومی دستگاه را با جای‌گذاری x و y در معادله اول دستگاه $(*)$ حذف نمود.

$$(2D - 1)x + (D + 4)y = 1$$

$$\longrightarrow \quad (2D - 1)(c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t) + (D + 4)(c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3) = 1$$

$$\longrightarrow \quad 2\left(-c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3}\right) - \left(c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t\right) + \left(-c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3}\right)$$

$$+4(c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3) = 1$$

$$\longrightarrow \quad 3c_1 + 4c_3 - 6 = 1 \quad \longrightarrow \quad c_3 = -\frac{3}{4}c_1 + \frac{7}{4}$$

و درنهایت جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل برابر است با

$$\begin{cases} x = x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t \\ y = y(t) = \frac{1}{4}c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{7}{4} \end{cases}$$

تمرین:

جواب عمومی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$1.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+5y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x-2y\end{cases}$$

$$2.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}$$

$$3.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-5t+2\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=4x-2y-8t-8\end{cases}$$

$$4.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+3y+e^{t}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+4y\end{cases}$$

$$5.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt}+y=0\\[2ex]2\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}-2y=t\end{cases}$$

$$6.\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{d^2y}{dt^2}-4x+y=t\\[2ex]2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2}+x=0\end{cases}$$

خلاصه فصل دوم: