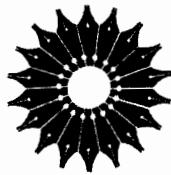


شونینگ تی. لین و یو - فنگ. لین



نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن

ترجمهٔ عمید رسولیان



نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن

شووینگ تی. لین و یو - فنگ. لین

ترجمه عمید رسولیان

مرکز نشر دانشگاهی



Set Theory with Applications
Shwu Yeng T. Lin and You-Feng Lin
Second Edition
Mariner Publishing Company, Inc., 1981

نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن
تألیف شووینگ تی. لین، یو-فنگ. لین
ترجمه عمید رسولیان
ویراسته دکتر منوچهر وصال
ناظر چاپ: خشایار تصیری منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ سیزدهم ۱۳۸۸
تعداد ۸۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: نقش نیزار
۹۶۰۰ تومان
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرستنويسي پيش از انتشار کتابخانه ملي جمهوری اسلامي ايران

Lin, ShwuYeng T.
نظریه مجموعه‌ها و کاربردهای آن /شووینگ تی. لین و یو-فنگ. لین؛ ترجمه عیید
رسولیان. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
پنج، ۲۳۷ ص: مصور، جدول. — (مرکز نشر دانشگاهی، ۴۶۲، ریاضی، آمار، و
کامپیوتر) (۵۳)

ISBN 978-964-01-0462-0

فهرستنويسي براساس اطلاعات فني.
عنوان اصلی:
وازنده.

كتابنامه: ص. [۲۱۸]-۲۱۹.
چاپ سیزدهم: ۱۳۸۸.

۱. نظریه مجموعه‌ها. الف. لین، یو-فنگ. — ۱۹۶۲.
رسولیان، عیید، مترجم. چ. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.

۵۱۱/۲۲۲

QA۲۲۸/۱۹۰۵۹

۱۳۶۸

كتابخانه ملي ايران

۴۶۲-۱۲۱۱

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحة	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱. منطق مقدماتی
۳	۱. گزاره‌ها و رابطه‌ای آنها
۸	۲. سه نماد دیگر
۱۲	۳. راستگو، استلزم، و همارزی
۱۹	۴. تناقض
۲۱	۵. استدلال قیاسی
۲۳	۶. قواعد تسویر
۲۶	۷. برهان ددستی
۳۲	۸. استراتی ریاضی
۳۷	۲. مفهوم مجموعه
۳۷	۱. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها
۴۰	۲. تصریح مجموعه‌ها
۴۲	۳. اجتماع و اشتراك
۴۷	۴. مجموعه‌های متم
۵۲	۵. نمودار ون
۵۵	۶. خانواده‌های مجموعه‌های اندیسدار
۶۱	۷. پارادوکس راسل
۶۲	۸. یک توضیح تاریخی

عنوان	
۳. رابطه و تابع	
۱. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه	۶۴
۲. رابطه	۶۴
۳. افزایش و رابطه همارزی	۶۸
۴. تابع	۷۲
۵. نگاره و نگاره وارون مجموعه	۷۷
۶. تابع یک به یک، پوششی، و درسونی	۸۲
۷. ترکیب تابع	۸۸
۸. جبر بول و کاربردهای آن	۹۲
۱. جبر بول	۹۷
۲. تابع بول	۹۷
۳. تابع بول و درجه‌های منطقی	۱۰۲
۴. کاربرد در مدارهای کامپیوتری	۱۰۶
۵. مجموعه‌های شمارای نامتناهی و ناشمارا	۱۱۰
۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۱۱۶
۲. همتوانی مجموعه‌ها	۱۱۶
۳. چند مثال و ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی	۱۲۲
۴. مجموعه‌های ناشمارا	۱۲۵
۶. اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی	۱۲۸
۱. مفهوم اعداد اصلی	۱۳۱
۲. مرتب کردن اعداد اصلی- قضیه شرودر- برنشتاين	۱۳۱
۳. عدد اصلی یک مجموعه توانی- قضیه کانتور	۱۳۳
۴. جمع اعداد اصلی	۱۳۶
۵. ضرب اعداد اصلی	۱۳۸
۶. توان اعداد اصلی	۱۴۰
۷. چند مثال دیگر از حساب اعداد اصلی	۱۴۲
۸. فرضیه پیوستار و تعیین آن	۱۴۶
۷. اصل انتخاب و برخی از صورتهای همارز آن	۱۴۸
۱. مقدمه	۱۵۱
۲. اصل ماکسیمال هادسدورف	۱۵۱
۱۰۲	

صفحه	عنوان
۱۵۷	۳. لمتسورن
۱۶۰	۴. اصل خوشترتیبی
۱۶۲	۵. اصل استقرای ترا متا هی
۱۶۵	۶. نکات تاریخی
۱۶۸	۷. اعداد ترتیبی و حساب ترتیبی
۱۶۸	۱. مفهوم اعداد ترتیبی
۱۷۰	۲. ترتیب اعداد ترتیبی
۱۷۳	۳. جمع اعداد ترتیبی
۱۷۶	۴. ضرب اعداد ترتیبی
۱۷۹	۵. نتیجه
۱۸۲	ضییمه
۱۸۲	اصول موضوع پثانو برای اعداد طبیعی
۱۸۶	پاسخ مسائل برگزیده
۲۱۵	فهرست نمادها
۲۱۸	مراجع برگزیده
۲۲۰	واژه نامه انگلیسی - فارسی
۲۲۵	واژه نامه فارسی - انگلیسی
۲۳۰	فهرست راهنمای

پیشگفتار

بیش از شش سال است که از زمان چاپ کتاب مقدمه‌ای بر نظریه شهودی مجموعه‌ها، چاپ قبلی این کتاب، می‌گذرد. در طول این چند سال برنامه‌های ریاضی تغییرهای زیادی کرده و ریاضیات جدید خواهان بیشتری پیدا کرده است. در آن زمان در دانشگاه فلوریدای جنوبی فقط دانشجویان ریاضی در کلاس‌های درس نظریه مجموعه‌ها حاضر می‌شدند، اما در حال حاضر نیمی از کلاس از دانشجویان دانشکده مهندسی، بخصوص مهندسی برق و علوم کامپیوتر تشکیل می‌شود. بنابراین تصحیم گرفتیم که فصل جدیدی درباره جبر بول و کاربرد آن در طراحی مدارهای منطقی و شبکه‌های مدارهای رقمی به کتاب بیفزاییم. این فصل جدید ارائه کاربردهای عملی فصلهای قبلی منطق و مجموعه‌هاست. چون این فصل به هیچ گونه زمینه قبلی مهندسی نیاز ندارد، امید داریم که دانشجوی غیرمهندسی نیز از دیدن کاربردهای موضوعی نظری، همچون نظریه مجموعه‌ها، در تکنولوژی مدرن لذت ببرد.

بدون شک، ارائه نظریه مجموعه‌ها در چارچوب یک دستگاه اصل موضوعی از نظر دقیق، بیشتر رضایت‌بخش است. اما هیچ نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها نیست که برای دانشجویان مبتدی آسان باشد. بدین جهت روش شهودی را برای عرضه نظریه مجموعه‌ها به کار بردیم.

به علاوه سعی کرده‌ایم آنچه را که برای فهم مطالب لازم است در کتاب بیاوریم، مواد اصلی لازم برای دانشجویانی که می‌خواهند درس‌هایی نظیر جبر مدرن، آنالیز، توپولوژی وغیره بخوانند، در کتاب آورده شده است. اما امید داریم که خود مباحثت کتاب، نظر معلم و دانشجو را جلب کند. جای تأسف خواهد بود اگر مشاهده شود که به موضوع جالبی همچون نظریه مجموعه‌ها، تنها به عنوان پیش‌نیازی برای درس‌های دیگر توجه می‌شود. یکی از پیش‌نیازهای این کتاب، آشنایی با ریاضیات دیفرانسیل و انتگرال زیاد در ریاضیات نیازی نیست. بهتر است خواننده با یک درس حساب دیفرانسیل و انتگرال سه ماهه یا نیمساله آشنا شده باشد. تمام کتاب برای تدریس یک درس نیمساله یا دو درس سه ماهه در نظریه مقدماتی مجموعه‌ها در سطح دوره کارشناسی نوشته شده است. با حذف چند فصل آخر، می‌توان از کتاب برای یک درس سه ماهه یا یک درس کوتاه تابستانی

استفاده کرد. پیشنهاد می‌کنیم که مدرس، دو فصل اول را سریعتر و فصلهای بعدی را با تأمل بیشتری تدریس کند.

در چاپ جدید اشتباههای کوچک و برخی ابهامات موجود در چاپ قبلی، تصحیح شده است. مسائل تمرینی بیشتری در سطحی وسیعتر و متنوعتر نیز آورده شده است.*

شووینگ-لین

یوفنگ-لین

تمپل تراس، فلوریدا

* قسمتی که در پایان پیشگفتار مؤلف به تشکر از اشخاص و مؤسسه انتشاراتی پرداخته ترجمه نشده است. ب.م.

منطق مقدماتی

دایین فصل مطالعی از منطق (یاضی) که برای مطالعه بقیه
فصلهای کتاب لازم است، ادامه می‌شود.

۱. گزاره‌ها و رابطه‌ای آنها

منطق بررسی اصول و روش‌هایی است که برای تمیز دادن استدلالهای درست از استدلالهای نادرست به کار می‌رودند. منظور ما از این فصل مقدماتی منطق این است که خواننده را به اصول و روش‌هایی که در هر مرحله برخان به کار می‌رود آشنا سازیم.

منطق با لفظ «گزاره» که به معنای خاصی به کار می‌رود شروع می‌شود. منظور ما از «گزاره»، یک جملهٔ خبری است که یا راست است یا دروغ ولی هم راست و هم دروغ نیست. لازم نیست بدانیم که گزاره راست است یا دروغ، بلکه فقط کافی است بدانیم که تنها دارای یکی از این دو ارزش است. معمولاً به آسانی دیده می‌شود که گزاره راست است یا دروغ، اما در بعضی موارد تعیین ارزش گزاره مستلزم کمی وقت است، و در موادی مسکن است تعیین ارزش آن محال باشد. مثالهای زیرین مطلب را روشن می‌کنند.

* اگر گزاره راست باشد می‌گوییم ارزش راستی گزاره داشت و اگر دروغ باشد می‌گوییم ارزش راستی آن دروغ است... .

۴ منطق مقدماتی

مثال ۱. هر یک از عبارتهای زیر یک گزاره است.

(الف) شیراز شهری در استان فارس است.

(ب) $2+1 = 5$ است.

(ج) صد و پنجمین رقم اعشاری $\sqrt{3}$ ، ۷ است.

(د) ماه از پنیر آبی به وجود آمده است.

(ه) در مریخ جاندار با شعور وجود ندارد.

(و) هوا بارانی است.

بدینهی است که (الف) راست است در حالی که (ب) و (د) دروغ هستند. ارزش‌های (ج) و (ه) (راست یا دروغ) بر ما معلوم نیستند، اما این تنها به خاطر نقص معلومات ماست. پس (ج) و (ه) نیز گزاره هستند. درستی یا نادرستی (و) بدوعضیت هوا در ذهنی که این گزاره گفته می‌شود بستگی دارد.

مثال ۲. هیچ کدام از عبارتهای زیر گزاره نیستند، زیرا این سؤال که آنها راست یا دروغ هستند مفهومی ندارد.

(الف) بهمهانی ما بیا!

(ب) آسمان غنی است.

(ج) حال شما چطور است؟

(د) خدا حافظ، عزیزم.

گزاره‌هایی که در مثال ۱ عنوان شدند، همگی گزاره‌های ساده هستند. ترکیبی از چند گزاره ساده را یک گزاره مركب می‌نامیم. به عنوان مثال « $2+1 = 5$ است و صد و پنجمین رقم اعشاری $\sqrt{3}$ ، ۷ است» یک گزاره مركب است.

در جبر با استناده از حروف برای نمایش اعداد آشنا شده‌ایم. در منطق حروف نظیر p, q, r, \dots را برای نمایش گزاره‌ها به کار می‌بریم. حرفی مانند p ممکن است نمایانگر یک گزاره ساده یا یک گزاره مركب باشد، ولی معمولاً ما حروف p, Q, R, \dots را به عنوان گزاره مركب به کار می‌بریم، مگر اینکه خلاف آن را قید کنیم.

برای ربط دادن گزاره‌هایی چون p, q, r, \dots جهت تشکیل گزاره‌های مركب راههای زیادی وجود دارد. ما فقط پنج رابط را که زیاد به کار می‌روند در اینجا ذکر می‌کنیم. این پنج (اخط) عبارت اند از: (الف) «نفی» که با سه نمایش داده می‌شود؛ (ب) «و» که با ۸ نمایش داده می‌شود؛ (ج) «یا» که با ۷ نمایش داده می‌شود؛ (د) «اگر... آنگاه...» که با \rightarrow نمایش داده می‌شود؛ و بالاخره (ه) «... اگر و تنها اگر...» که با \leftrightarrow نمایش داده می‌شود.

در این بخش دو نماد \rightarrow و \wedge را بررسی کرده و مطالعه نمادهای \neg ، \wedge و $\neg\neg$ را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

گیریم p یک گزاره باشد. آنگاه گزاره p س، بخوانید «نفی p » یا «نتیجه p » داشت است هرگاه p دروغ باشد و دروغ است هرگاه p راست باشد. به عنوان مثال، اگر p گزاره «این درس آسانی است» باشد، نفیض آن، $\sim p$ س، گزاره «این درس آسانی نیست» یا «چنین نیست که این درس آسانی است» می‌باشد.

ارزش $p \sim p$ بستگی به ارزش p دارد. مناسب است که این بستگی را به صورت جدول ادغش زیر نمایش دهیم

جدول ۱

p	$\sim p$
T	F
F	T

که در آن « T » و « F » به ترتیب بهجای «راست» و «دروغ» آمده‌اند. درستون اول جدول ۱ دو ارزش ممکن یعنی T یا F را برای گزاره p نوشته‌ایم. هر دویف جدول ارزش بیانگر حالتی است که باید در نظر گرفته شود و البته در این وضعیت بسیار ماده تنها دو حالت وجود دارد. با استفاده از دلیفهای جدول ۱ می‌بینیم که اگر p راست باشد $p \sim p$ دروغ است و اگر p دروغ باشد، $p \sim p$ راست است. بنابراین جدول ۱ ارزش گزاره $p \sim p$ را در هر حالت بیان می‌کند.

تعریف ۱. رابطه \wedge را می‌توان بین هر دو گزاره p و q قرار داد و گزاره مرکب $p \wedge q$ را، که ارزشهای آن در جدول ارزش زیر نمایش داده شده‌اند، تشکیل داد.

جدول ۲

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارت $p \wedge q$ را « p و q » یا «ترکیب عطفی p و q » می‌خوانیم. مثلاً، گیریم p گزاره «آسان آمی است» و q گزاره «گل سرخ فرمز است» باشد. آنگاه گزاره عطفی

* حرف اول true به معنی راست و false به معنی دروغ است...

عبارت «آسمان آیی است و گل سرخ قرمز است» می‌باشد. در یک گزاره مرکب، $p \wedge q$ مانند $p \wedge q$ ، هر یک از گزاره‌های p و q را مؤلفه گویند. مؤلفه ممکن است یک گزاره ساده یا یک گزاره مرکب باشد. در گزاره‌های مرکب با دو مؤلفه، مانند $p \wedge q$ ، حداکثر $(2 \times 2) = 4$ حالت وجود دارد، که حالتهای منطقی یا امکانهای منطقی نامیده می‌شوند و در زیر می‌آیند:

- (۱) p راست و q راست است.
- (۲) p راست و q دروغ است.
- (۳) p دروغ و q راست است.
- (۴) p دروغ و q دروغ است.

در واقع، هر یک از چهار حالت بالا، یک ردیف از جدول ۲ است. ستون آخر جدول، ارزش $p \wedge q$ را بیان می‌کند. یا کمی دقت دیده می‌شود که گزاره $p \wedge q$ فقط در یک حالت راست است و آن وقتی است که p و q هردو راست باشند، و در بقیه موارد، $p \wedge q$ دروغ است. خواننده متفکر متوجه می‌شود که این جدول ارزش در واقع روش استفاده عاطف «و» در محاورات روزانه را منعکس می‌کند.

با استفاده از جدولهای ۱ و ۲ می‌توان ارزش گزاره‌های پیچیده‌تری را که فقط شامل رابطه‌ای \sim و \wedge هستند، معلوم کرد.

مثال ۳. جدول ارزش گزاره مرکب زیر را تشکیل دهید.

$$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$$

حل:

جدول ۳

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F
مرحله				۱	۲
					۳

اگر روش تشکیل جدول بالا برای شما واضح نیست به توضیحی که در زیر می‌آید توجه کنید: عنوانهای ستونها طوری انتخاب شده‌اند که گزاره مرکب مورد نظر به تدریج از

گزاره‌ها و رابطه‌ای آنها ۷

مُؤلفه‌ایش (درستون آخر) ساخته شود. در دوستون اول صرفاً ارزش‌های p و q را برای تمام حالات ممکن ثبت کرده‌ایم. سپس با استفاده از جدول ۱ درستونهای سوم و چهارم ارزش‌های $p \sim$ و $q \sim$ متناظر را نوشته‌ایم. درستون پنجم، ارزش‌های ترکیب عطفی عنوانهای ستونهای سوم و چهارم را با استفاده از جدول ۲ نمایانده‌ایم و بالاخره درستون ششم ارزش‌های نقیض ستون پنجم، یعنی ارزش‌های گزاره اصلی $[(q \sim) \wedge (p \sim)] \sim$ را با استفاده از جدول ۱ نوشته‌ایم. اکنون بدانشجو توصیه می‌شود از گزاره مرکب اخیر صورت برداشته کتاب را بینند و سعی کنند این جدول ارزش را خود تشکیل دهد.

در گزاره مثال بالا، $[(q \sim) \wedge (p \sim)] \sim$ ، از پرانتزها و کروشهای برای نشان‌دادن ترتیبی که رابطه‌ای عمل می‌کنند استفاده شده است. اغلب هر جا امسان داشته باشد برطبق قراردادهایی برای ساده کردن عبارات، پرانتزها یا کروشهای را حذف می‌کنیم. قرارداد معمول آن است که توافق کنیم \sim مقدم بر \wedge است؛ یعنی رابطه \sim اول بر گزاره تأثیر کند بعد \wedge . به عنوان مثال عبارت $(q \sim) \wedge (p \sim)$ را می‌توان به صورت ساده $\sim p \wedge \sim q$ نوشت.

تمرین ۱۰۱

در مسائل ۱ تا ۱۵ یک جمله فارسی داده شده است. در هر کدام تعیین کنید که جمله، گزاره است یا نیست.

۱. در ۷ ژانویه ۱۴۴۲، در قسمتی از فلوریدا برف بارید.
۲. ادسطو پاهای بهنی داشت.
۳. جامعه گرانی خطاست.
۴. ثروتمندترین مرد دنیا آقای هانت در تگزاس است.
۵. علی و چمشید بچه‌های خوبی هستند.
۶. این ماشین چقدر می‌ارزد؟
۷. روی چمن راه نروید.
۸. همیشه کمر بند صندلی تان را محکم بیندید.
۹. عدد $432 + 54321 = 987654321$ یک عدد اول است.
۱۰. بعضی از موسیقه‌ای شوین را بهنوون نوشته است.
۱۱. در گزاره‌های مسائل ۱ تا ۱۵ ارزش آنایی را که می‌دانید راست است با T نشان دهید و جلوی آنایی که تعیین ارزشان برایتان مشکل است D بگذارید.

در مسائل ۱۲ تا ۱۹ ارزش راستی هریک از گزاره‌ها را تعیین کنید. برای آنایی که دو حالت دارند، از جدول ۱ و برای آنایی که چهار حالت دارند از جدول ۲ استفاده کنید.

$$\sim [(\sim p)] \sim .13$$

$$\sim (p \sim) \sim .12$$

$$\sim (p \wedge \sim p) .15$$

$$p \wedge p .14$$

$$\sim p \wedge q ۱۷ \quad p \wedge \sim q ۱۶$$

$$\sim (p \wedge q) ۱۹ \quad (p \wedge q) \wedge \sim p ۱۸$$

۲۰. در یک گزاره مرکب که شامل سه گزاره p , q و r است، چند حالت منطقی باید در نظر گرفت؟ اگر چهار گزاره متفاوت داشته باشیم، چند حالت؟ در حالت کلی وقتی n گزاره متفاوت داریم، چند حالت لازم است؟

۲۱. در شکل زیر کوشش شده است حالت‌های مختلف یک گزاره مرکب مشکل از سه مؤلفه p , q و r تنظیم شود. این جدول ناتمام را کامل کنید:

p	q	r	
T	T		
T	T	F	
T		T	
T		F	
	T	T	
	T	F	
F	F		
F	F		

در مسائل ۲۲ تا ۲۵، جدول ارزش هر یک از گزاره‌ها را تشکیل دهید. از الگوی تمرین ۲۱ برای تشخیص حالت‌های مختلف استفاده کنید.

$$p \wedge (q \wedge r) ۲۳ \quad (p \wedge q) \wedge r ۲۲$$

$$\sim q \wedge (r \wedge p) ۲۵ \quad (p \wedge \sim q) \wedge r ۲۴$$

۳. سه نماد دیگر

در زبان فارسی وقتی در جمله «یا» بدکار می‌رود ابهامی وجود دارد. گزاره «من درجه فوق لیسانس یا دکترا را دریافت می‌کنم». به این معنی است که امکان دارد گوینده هر دو درجه فوق لیسانس و دکترا را دریافت کند. اما در گزاره دیگر «من با مریم یا ناهید ازدواج می‌کنم». حرف «یا» این معنی را می‌دهد که فقط یکی از این دو دختر انتخاب خواهد شد.^{۱۰} در ریاضیات و منطق، نمی‌توانیم ابهام داشته باشیم. لذا باید روی معنی حرف «یا» تصمیم بگیریم.

* این «یا» را «یای شمول» (inclusive disjunction) یا «یای منطقی» می‌نامند..م.

** این «یا» را «یای مانع جمع» (exclusive disjunction) می‌نامند..م.

تعریف ۲. رابط \vee مابین دو گزاره p و q برای تشکیل گزاره مرکب $p \vee q$ به کار می‌رود. ارزش‌های راستی $p \vee q$ در جدول ۴ نشان داده شده است. بنابراین رابط \vee به معنای «یا شمول» یعنی به معنای «یا»‌ی در گزاره اول بالاست.

جدول ۴

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نماد $p \vee q$ را « p یا q » یا «ترکیب فصلی p و q » بخوانید. توجه کنید که ترکیب عطفی p و q راست است تنها وقتی که هر دو مؤلفه راست باشند (جدول ۲)، در صورتی که ترکیب فصلی دروغ است تنها وقتی که هر دو مؤلفه دروغ باشند (جدول ۴). با مقایسه جداولهای ارزش‌گذاره‌های $(\sim p \wedge \sim q) \sim$ و $p \vee q$ (جدوالهای ۳ و ۴) درمی‌بایس که ستون آخر هر دو جدول $TTTF$ است، پس ارزش راستی این دو گزاره در هر یک از چهار امکان منطقی، یکی است. تعیین اینکه برخی گزاره‌ها در هر حالت یک ارزش راستی دارند، بخش مهمی از منطق است. در واقع، منطق این گزاره‌ها را صورتهای مختلف یک گزاره به حساب می‌آورد.

تعریف ۳. هر گاه دو گزاره P و Q ، ساده یا مرکب، برای تمام حالتهای منطقی دارای یک ارزش باشند، گزاره P را هم‌دانسته منطقی یا به طور ساده هم‌داند Q گویند، و می‌نویسند $P \equiv Q$.

خلاصه کلام اینکه، دو گزاره منطقاً هم ارز هستند هر گاه دارای یک جدول ارزش باشند. بنابراین داریم

$$p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

اگرچه تا جایی که به منطق مربوط می‌شود، دو گزاره منطقاً هم ارز یکی در نظر گرفته می‌شوند، اما گزاره ساده‌تر « p یا q » را بر گزاره هم ارز بی‌جایده ترش، یعنی «چنین نیست که نه p و نه q » ترجیح می‌دهیم.

تعریف ۴. رابط \rightarrow را که مابین دو گزاره p و q برای تشکیل گزاره مرکب $p \rightarrow q$ به کار برده می‌شود، رابط شرطی می‌گویند (بخوانید: «اگر p آنگاه q »). بنابر تعریف،

گزاره $q \rightarrow p$ هم ارز گزاره $(p \wedge \sim q) \sim$ است. ارزش‌های راستی $q \rightarrow p$ در جدول ۵ نشان داده شده است.

جدول ۵

حالت	p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q [\equiv \sim (p \wedge \sim q)]$
۱	T	T	F	F	T
۲	T	F	T	T	F
۳	F	T	F	F	T
۴	F	F	T	F	T

بجاست به یک انگیزه تعریف ۴ اشاره کنیم. فرض کنید p گزاره «ها بارانی است» و q گزاره «من به شما سواری خواهم داد» باشد. حال گزاره مركب $q \rightarrow p$ ، «اگر هوا بارانی باشد آنگاه من به شما سواری خواهم داد» است. از نظر ما این قرار (گزاره) چه وقت نفس شده (دروغ) است؟ بدیهی است که این قرار فقط در حالتی که هوا بارانی باشد (p راست باشد) و من به شما سواری ندهم (q دروغ باشد) نفس شده است. یعنی ستون نهایی جدول ارزش $q \rightarrow p$ ، بجز در حالت ۲، باید در هر حالتی ارزش « T » داشته باشد. برطبق تعریف ۴، معنی گزاره شرطی $p \rightarrow q$ اساساً با طرزی که گزاره «اگر p آنگاه q » را در محاورة عادی به کار می‌بریم اختلاف دارد. در زبان عادی^۱ جمله‌ای به صورت «اگر p آنگاه q » به‌این معنوم است که هر وقت p راست باشد، q راست است. بنابراین حالتی که p دروغ است مطرح نمی‌شوند.

به عنوان مثال، گزاره «اگر لینکلن، گرانت را می‌کشت، آنگاه جفرسون اولین رئیس جمهور بود» بی معنی تلقی می‌شود، زیرا هر دو مؤلفه دروغ هستند. درنتیجه در گفتگوی عادی ارزش راستی چنین گزاره‌ای بررسی نمی‌شود. اما برای ایجاد یک زبان صوری، منطقیون خواستار تعیین ارزش‌های راستی گزاره $q \rightarrow p$ در هر چهار حالت منطقی هستند، هر چند که در زبان عادی دو حالت از چهار حالت فوق بی معنی به نظر بر سده بنابر دلایل گوناگونی، که به موقع خود گفته خواهند شد، منطقیون روی تعریفی که در بالا آمد، توافق کرده‌اند. بنابراین در زبان صوری گزاره $q \rightarrow p$ در هر حالتی راست است بجز حالت ۲ (به جدول ۵ نگاه کنید). به عنوان یک تیجه این توافق می‌توانیم چند قضیه ساده و مفید را ثابت کنیم. بدون یک چنین فرادردادی، برخانها یا خیلی مشکل می‌شدند یا زشت و ناهنجار^۲.

اکنون آخرین رابط از این پنج رابط را که در صورت قضیه‌های ریاضی به فراوانی به کار می‌رود، معرفی می‌کنیم.

۱. دمقابل «زبان عادی» منطق را یک زبان صوری می‌گویند.

۲. مثلاً قضیه‌های ۱ و ۷ فصل ۲ را ببینید.

تعریف ۵. رابط \leftrightarrow را رابط دوشرطی می‌گویند. ترکیب دوشرطی دوگزاره p و q را به صورت $p \leftrightarrow q$ می‌نویسند (بخوانید: p اگر و فقط اگر q یا بخوانید: p اگر و تنها اگر q). گزاره $q \leftrightarrow p$ هم ارز گزاره مرکب $(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$ تعریف می‌شود. ارزش‌های درستی $p \leftrightarrow q$ در جدول ۶ آمده است.

مثال ۴. جدول ارزش $q \leftrightarrow p$ را بیاورد.

حل: با روشهای پیش از این شرح دادیم جدول ۶ را تشکیل می‌دهیم.

جدول ۶

حالات	p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q [\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
۱	T	T	T	T	T
۲	T	F	F	T	F
۳	F	T	T	F	F
۴	F	F	T	T	T
مرحله			۱	۱	۲

از جدول ارزش بالا در می‌باییم که $q \leftrightarrow p$ وقتی راست است که هر دو مؤلفه راست یا هر دو مؤلفه دروغ باشند. در هر حالت دیگر (حالات ۲ و ۳) گزاره $q \leftrightarrow p$ دروغ است.

تمرين ۲۰۱

در مسائل ۱ تا ۱۲ جدول ارزش گزاره‌های داده شده را تشکیل دهید.

$$\sim(p \vee \sim p) \quad .1 \quad p \vee \sim p \quad .1$$

$$\sim p \vee q \quad .2 \quad \sim(\sim p \vee \sim p) \quad .3$$

$$q \leftrightarrow p \quad .4 \quad (\sim q) \rightarrow (\sim p) \quad .5$$

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad .6 \quad p \wedge (q \vee r) \quad .7$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad .8 \quad p \vee (q \wedge r) \quad .9$$

$$p \vee (q \vee r) \quad .10 \quad (p \vee q) \vee r \quad .11$$

۱۳. آیا گزاره $(\sim p) \rightarrow (\sim q)$ (مسئله ۵) هم ارز منطقی گزاره $q \rightarrow p$ است؟

۱۴. آیا گزاره $q \sim p \vee q \sim p \vee q$ (مسئله ۴) هم ارز منطقی گزاره $q \rightarrow p$ است؟

۱۵. از گزاره‌های مسائل ۱ تا ۱۲، تعیین کنید کدام گزاره‌ها هم ارز منطقی هستند.

۱۶. در هر یک از حالتهای زیر، گزاره‌های مرکب داده شده را با استفاده از نمادهای پیشنهادی، به صورت نمادی بروگردانید.

(الف) چنین نیست که من با شما مهربان نیستم. (M)

(ب) اگر او فرشته است، آنگاه او دو بال دارد. (F, B)

(ج) قیمت گوشت افزایش می‌باشد اگر و تنها اگر عرضه انتخابی گوشت کمتر باشد. (G, A)

(د) یا کشاورزان قیمتها را پایین خواهند آورد یا دولت دخالت خواهد کرد. (K, D)

(ه) اگر صادرات گوشت افزایش باید بیا پرورش دام زیاد نشود، آنگاه قیمتها افزایش می‌باشد. (S, P, G)

۱۷. گاهی اوقات $q \rightarrow p$ را « p فقط اگر q » می‌خوانند. هر یک از گزاره‌های زیرین را با استفاده از نمادهای پیشنهادی به صورت نمادی بروگردانید.

(الف) در این درس موقع خواهم شد فقط اگر مجدانه تلاش کنم. (D, T)

(ب) تابع مشتق دارد فقط اگر پیوسته باشد. (M, P)

(ج) ماتریس وارون دارد فقط اگر دترمینانش صفر نباشد. (V, D)

(د) ماتریس دترمینان ناصلر دارد فقط اگر وارون داشته باشد. (D, V)

۱۸. در گزاره $q \rightarrow p$ ، p را شرط کافی برای q و q را شرط لازم برای p می‌گویند گزاره‌های (الف) تا (د) مسئله ۱۷ را نخست بسا بیان «شرط کافی» و سپس با بیان «شرط لازم» بنویسید.

۱۹. آیا $(p \leftrightarrow q)$ هم ارز منطقی $\sim p \leftrightarrow q$ است؟ نتیجه گیری خود را با تشکیل جدول ارزش بیازماید.

۲۰. آیا $\sim q \leftrightarrow p$ هم ارز منطقی $q \leftrightarrow p$ است؟

۲۱. اگر یک گزاره مرکب منشکل از گزاره‌های ماده p و q ، جدول ارزش زیر را داشته باشد:

p	q	?
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

آیا می‌توانید گزاره مرکب را بیا بینید؟

۳. راستگو، استلزم، و هم ارزی
حال جدول ارزش گزاره $p \sim q$ را بررسی می‌کیم:

جدول ۷

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

می بینیم که گزاره $p \vee \sim p$ در هر حالت، یعنی در تمام حالات منطقی، راست است. این نوع گزاره مهم شایسته نامی ویژه است.

تعریف ۶. گزاره‌ای که در تمام حالات منطقی راست باشد، (راستگو نامیده می‌شود).

دو گزاره مرکب یا ساده P و Q مفروض‌اند. اگر گزاره شرطی $P \rightarrow Q$ راستگو باشد، استلزم نامیده می‌شود و آن را با $Q \Rightarrow P$ نمایش می‌دهند (بخوانید: P مستلزم Q است یا بگویید Q از P لازم می‌آید). بنابراین، گزاره‌های شرطی زیر همگی استلزم هستند:

$$\cdot p \rightarrow p \quad (1)$$

$$\cdot p \wedge q \rightarrow q \wedge p \quad (2)$$

$$\cdot p \rightarrow p \wedge p \quad (3)$$

$$\cdot \neg p \wedge q \rightarrow q \quad (4)$$

در منطق یا ریاضیات، «قضایا» به معنی گزاره‌های راست هستند، و «برهان» (قضیه) اثبات درستی آن است.

قضیه ۱. گیریم p و q دو گزاره هستند. آنگاه قوانین زیر برقرارند:

$$\cdot p \Rightarrow p \vee q \quad (\text{الف})$$

$$\cdot p \wedge q \Rightarrow q, p \wedge q \Rightarrow p \quad (\text{ب})$$

$$\cdot (p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q \quad (\text{ج})$$

برهان. برهان (الف) و (ب) را به عنوان تمرین بخواهند و اگذار می‌کنیم. جدول ارزش اختصاری برای $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ در زیر آمده است:

۱. فرض می‌کنیم که \wedge و \vee بیش از \rightarrow و \leftrightarrow گزاره‌ها را بهم ربط می‌دهند و بنابراین مثلاً بمجای $(p \vee q) \rightarrow p$ می‌نویسیم $p \vee q \rightarrow p$. به پاراگراف آخر پخش ۱ نیز رجوع کنید.

جدول ۸

$(p \vee q)$	\wedge	$\sim p$	\rightarrow	q
$T \quad T$	F	F	T	T
$T \quad F$	F	F	T	F
$F \quad T$	T	T	T	T
$F \quad F$	F	T	T	F

مرحله ۱ ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۱

حال طرز تشكيل جدول ارزش اختصاری را در چند کلمه شرح می دهیم، ارزش‌های راستی در جدول ۸، ستون بهستون، به ترتیب شماره‌هایی که در پایین جدول دیده می‌شوند، نوشته شده است. در یک جدول ارزش اختصاری، نخست ارزش‌های راستی را مستقیماً زیر هر مؤلفه، و سپس زیر رابطه‌ها می‌نویسیم. با این روش هم در زمان و هم در جا صرف‌جویی می‌شود.

اکنون، به برهان قضیه بازمی‌گردیم. چون مرحله آخری (مرحله چهارم) در جدول ۸، فقط شامل T است، گزاره شرطی $q \sim p \rightarrow (p \wedge q)$ یک استلزم است.

گزاره دوشرطی $Q \leftrightarrow P$ اگر راستگو باشد، هم‌اُذی نامیده می‌شود و آن را با $P \leftrightarrow Q$ نشان می‌دهند (بخوانید: P هم از Q است). از تعریف ۵ و جدول ۶، دیده می‌شود که $P \leftrightarrow Q$ ، بشرط اینکه در تمام حالات منطقی، P و Q یک ارزش راستی داشته باشند، و بر عکس، اگر P و Q در تمام حالات منطقی یک ارزش راستی داشته باشند، آنگاه $Q \leftrightarrow P$. پس، بنا بر تعریف ۳، $P \leftrightarrow Q \equiv P \equiv Q$ یک معنی دارند، و از این رو می‌توانیم \leftrightarrow و \equiv را به جای یکدیگر به کار ببریم.

قضیه ۲. گیریم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

(الف) قانون نفی مضاعف: $\sim(\sim p) \equiv p$

(ب) قانون جا به جایی: $p \vee q \equiv q \vee p$ ، $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(ج) قانون خودتوانی: $p \vee p \equiv p$ ، $p \wedge p \equiv p$

(د) قانون عکس نقیض: $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow (\sim p))$

برهان. برهان قسمتهای (الف)، (ب)، (ج) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم و اصول برهان (د) را ارائه می‌دهیم.

رأستگو، استلزم، و هم ارزی ۱۵

جدول ارزش اختصاری زیر برای گزاره دو شرطی $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

جدول ۹

$(p \rightarrow q)$			\leftrightarrow	$(\sim q \rightarrow \sim p)$		
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>

مرحله

شان می‌دهد که $p \rightarrow q$ با $\sim p \rightarrow \sim q$ هم ارز است.
 قضیه زیر، که به او گاستس دمورگن* منسوب است، یکی از مناسبترین ابزارها در
 منطق است.

قضیه ۳. (قانون دمو(گن)). فرض کنیم p و q دو گزاره هستند. آنگاه

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

برهان. ما قسمت اول این قضیه را ثابت می‌کنیم و قسمت دیگر را به عنوان تمرین
 به خواننده واگذار می‌کنیم. جدول ارزش اختصاری زیر برای گزاره دو شرطی
 $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

جدول ۱۰

\sim	$(p \wedge q)$				\leftrightarrow	$(\sim p \vee \sim q)$		
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>

مرحله

* Augustus De Morgan (1806-1871)

نشان می‌دهد که $\sim(p \wedge q) \sim p \vee \sim q$ هم ارز است.

قضیه ۴. فرض می‌کنیم p ، q و r گزاره هستند. آنگاه

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r)$$

برهان. برهانهای قانونهای شرکتپذیری و دومین قانون پخشپذیری را به عنوان تمرین به خواهانده و آگذار می‌کیم.

ثابت کیم که $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$. چون این گزاره شامل سه مؤلفه است، $2^3 = 8$ حالت منطقی وجود دارد که باید در نظر گرفته شود. جدول ارزش زیر نشان می‌دهد که $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ و $p \wedge (q \vee r)$ در هر یک از هشت حالت منطقی دارای یک ارزش راستی هستند. بنابراین $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ و $p \wedge (q \vee r)$ هم ارزند.

جدول ۱۱

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

برای صرقوه‌جوری در وقت و جا، یک جدول ارزش اختصاری همان‌گونه که در جدول \wedge معرفی شد، برای $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ تشکیل می‌دهیم.

جدول ۱۲

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$										
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
مرحله							۱	۲	۱	۱
۱	۲	۱	۳	۱	۲	۱	۲	۱	۲	۱

چون مرحله آخر (مرحله ۴) فقط از T تشکیل شده است، قانون تعدد ثابت شده است.

بنابر قانون شرکت‌نیزی، در

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad , \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

به پرانتزها نیازی نیست و عبارات $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ و $p \vee q \vee r$ و $p \wedge q \wedge r$ و همچنین $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ معانی مشخصی دارند.

قضیة ۵. گیریم p, q, r, s گزاره هستند. آنگاه

(الف) قیاس ذوالوجهین موجب

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$$

(ب) قیاس ذوالوجهین منفی

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim q \vee \sim s \rightarrow \sim p \vee \sim r)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim s \rightarrow \sim p \wedge \sim r)$$

برهان. برهان قضیه ۵ به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنید p و q گزاره هستند. آنگاه

- (الف) قیاس استثنایی $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
- (ب) قیاس دفع $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$
- (ج) برهان خلف $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow q \wedge \sim p)$

برهان. برهان به عنوان تمرین به عنوان اندیشه واگذار می‌شود.

تمرین ۳۰۱

۱. قسمتهای (الف) و (ب) قضیه ۱ را ثابت کنید.
۲. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) قضیه ۲ را ثابت کنید.
۳. ثابت کنید که $(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \sim \cdot$.
۴. قسمت (الف) قضیه ۴ را ثابت کنید.
۵. ثابت کنید که $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
۶. ثابت کنید که $(p \rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$.
۷. ثابت کنید که $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \leftrightarrow q)$.
۸. با استفاده از قانون دمورگن، نقیض گزاره «این تابع مشتق دارد یا من احمد هست» را به زبان عادی بنویسید.
۹. قوانین دمورگن را برای سه مؤلفه ثابت کنید

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & \sim(p \wedge q \wedge r) \equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim r \\ \text{(ب)} \quad & \sim(p \vee q \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \end{aligned}$$

۱۰. آیا، بدون اثبات، می‌توانید قوانین دمورگن را برای n مؤلفه تعیین دهید؟ مسئله ۹ برای $n=3$ را بینید.
۱۱. قوانین جذب زیر را ثابت کنید.

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & p \wedge (p \vee r) \equiv p \\ \text{(ب)} \quad & p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{aligned}$$

۱۲. قضیه ۵ را ثابت کنید.
۱۳. قضیه ۶ را ثابت کنید.
۱۴. آیا $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ همارز منطقی است؟
۱۵. آیا $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$ همارز منطقی است؟
۱۶. ثابت کنید $p \vee q \wedge \sim p \sim q \wedge \sim p$ است.

تناقض ۱۹

۱۷. ثابت کنید $(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ هم ارز منطقی است.

در هر کدام از مسائل ۱۸ الی ۲۵، ستون آخر جدول ارزش یک گزاره مجهول شامل گزاره‌های ساده p ، q و r داده شده است. این گزاره مرکب را پیدا کنید.

- $FFFFFFFFFF$.۱۸

- $FFFFFFFFFF$.۱۹

۱۸. [راهنمایی: اگر X و Y به ترتیب جواب‌های مسائل ۱۸ و ۱۹ باشند آنگاه $X \vee Y$ جواب مسئله ۲۰ است].

۴. تناقض

برخلاف راستگوها، گزاره‌های وجود دارند که ارزش راستی آنها برای هر امکان منطقی دروغ است. چنین گزاره‌هایی را تناقض می‌گویند. به عنوان مثال، $p \wedge \sim p$ یک تناقض است.

بدیهی است که اگر t یک راستگو باشد، آنگاه $\sim t$ یک تناقض است و بر عکس، اگر c یک تناقض باشد آنگاه $\sim c$ یک راستگو است.

قضیه ۷. گیریم $\sim c$ و p به ترتیب یک راستگو، یک تناقض و یک گزاره دلخواه باشند.

آنگاه

$$p \wedge t \Leftrightarrow p, \quad \text{(الف)}$$

$$p \vee t \Leftrightarrow t. \quad \text{}$$

$$p \vee c \Leftrightarrow p, \quad \text{(ب)}$$

$$p \wedge c \Leftrightarrow c. \quad \text{}$$

$$\cdot p \Rightarrow t, c \Rightarrow p \quad \text{(ج)}$$

برهان. (الف) جدول ارزش ذیر برای $p \wedge t \Leftrightarrow p$ ، نشان می‌دهد که $p \wedge t$ با p هم ارز است.

جدول ۱۳

p	\wedge	t	\Leftrightarrow	p
T	T	T	T	T
F	F	T	T	F
۱ مرحله	۱	۲	۱	۲

هم ارزی $t \Leftrightarrow p \vee t$ به طریقی مشابه ثابت می‌شود.
 (ب) از جدول ارزش زیر درمی‌یابیم که گزاره شرطی $p \leftrightarrow p \vee c \Leftrightarrow p$ یک راستگو است و از این‌رو، $p \vee c \Leftrightarrow p$.

جدول ۱۴

p	\vee	c	\leftrightarrow	p
T	T	F	T	T
F	F	F	T	F
۱	۲	۱	۳	۱
مرحله				

برهان $c \Leftrightarrow p \wedge c \Leftrightarrow p$ به طریقی مشابه ثابت می‌شود.
 (ج) جدولهای ارزش $p \rightarrow t \wedge c \Rightarrow p \rightarrow t$ و $c \Rightarrow p$ نشان می‌دهند که $p \Rightarrow t \wedge c \Rightarrow p$ راستگو هستند.

جدول ۱۵

c	\rightarrow	p	p	\rightarrow	t
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T

از این به بعد، نماد c با اندیس یا به تنها یی (ا) برای تناقض و نماد t با اندیس یا به تنها یی (آ) برای راستگو بکار می‌بریم.

تمرین ۴.۱

۱. ثابت کنید که $t \Leftrightarrow p \wedge c \Leftrightarrow c \wedge p \vee t$.

۲. ثابت کنید که $c \Leftrightarrow t \Leftrightarrow \sim t \Leftrightarrow \sim c$.

۳. برهان خلف زیر را ثابت کنید

$$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

۴. ثابت کنید که $c \Leftrightarrow p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$.

۵. ثابت کنید که برای هر گزاره r ، $r \rightarrow q \vee r \Rightarrow (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$.

۶. جواب ادعا می‌کرد که هر کاری را می‌تواند انجام دهد. آیا جواب می‌توانست شیوه بسازد که نتواند آن را بلند کند.

۵. استدلال قیاسی

چنانکه در مثالهای ۵ تا ۷ نشان داده شده است، هفده قانونی که در قضیه‌های اول تا ششم خلاصه شده‌اند برای هم ارزیها و استنارمهای منطقی ابزارهای بسیار مفید هستند. این ۱۷ قانون را «قاعده‌های استنتاج» می‌نامیم. باید توجه داشت که این قاعده‌ها فقط به عنوان یک مرجع مناسب انتخاب شده‌اند و از یکدیگر مستقل نیستند. مثلاً، قانون عکس نقیض را، همان‌گونه که در مثال زیر دیده می‌شود، می‌توان با استفاده از قوانین دیگر و تعاریف مربوط با «استدلال قیاسی» بدست آورد.

مثال ۵. قانون عکس نقیض، $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \rightarrow \sim q)$ را با استفاده از تعاریف مربوط و دیگر قاعده‌های استنتاج ثابت کنید.

تعريف ۴

$$(p \rightarrow q) \equiv \sim(p \wedge \sim q) \quad \text{حل:}$$

قانون جابه‌جایی

$$\equiv \sim(\sim q \wedge p)$$

قانون نفی مضاعف

$$\equiv \sim[\sim q \wedge \sim(\sim p)]$$

تعريف ۴

$$\equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$$

$$\text{از این‌رو، بنابر قانون تعدی، } (p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p).$$

روش برهان مثال ۵ را، «وش قیاسی یا استدلال قیاسی» می‌گویند. این روش البته با روش استفاده از جدول ارزش متفاوت است.

به طور کلی، در استدلال قیاسی به کاربردن اصول موضوعه، تعاریف و قضایایی که قبلًا گفته شده باشند و همچنین قواعد استنتاج، جایز است.

مثال ۶. قانون رفع مؤلفه را با استدلال قیاسی ثابت کنید.

قانون جابه‌جایی

$$(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge (p \vee q) \quad \text{حل:}$$

قانون پخش‌ذیری

$$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$$

$\sim p \wedge p \equiv c$

$$\equiv c \vee (\sim p \wedge q)$$

قانون جابه‌جایی

$$\equiv (\sim p \wedge q) \vee c$$

قضیة ۷ (ب)

$$\equiv \sim p \wedge q$$

قانون اختصار

$$\Rightarrow q$$

$$\text{و بالآخره بنابر قانون تعدی داریم: } (p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q.$$

مثال ۷. قانون تغییک دو مقدم را با استدلال قیاسی ثابت کنید:

$$(p \wedge q \rightarrow r) \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

$$\text{حل: } [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow \sim(q \wedge \sim r)] \quad \text{تعريف ۴}$$

$$\begin{aligned} & \text{تعريف ۴، قانون نفی مضاعف} \\ & \equiv \sim[p \wedge (q \wedge \sim r)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{قانون شرکت‌پذیری} \\ & \equiv \sim[(p \wedge q) \wedge \sim r] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{تعريف ۴} \\ & \equiv (p \wedge q \rightarrow r) \end{aligned}$$

$$\therefore (p \wedge q \rightarrow r) \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \quad \text{از این دو،}$$

مثال ۸. با استفاده از استدلال قیاسی ثابت کنید که

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \equiv (p \wedge q \rightarrow r \vee s)$$

حل:

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee \sim(q \wedge \sim s) \quad \text{تعريف ۴}$$

$$\begin{aligned} & \text{قانون دمودگن و نفی مضاعف} \\ & \equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{قانون جابه‌جایی و شرکت‌پذیری} \\ & \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{قانون دمودگن و نفی مضاعف} \\ & \equiv \sim[(p \wedge q) \wedge \sim(r \vee s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{تعريف ۴} \\ & \equiv (p \wedge q \rightarrow r \vee s) \end{aligned}$$

چرا به کار بردن استدلال قیاسی را بر استفاده از جدول ارزش ترجیح می‌دهیم، از مقایسه زیر دیلده می‌شود: برای بررسی هم ارزی در مثال ۸، به روش جدول ارزش، باید یک جدول بسیار بزرگ با $(= 2^4 = 16)$ حالت تشکیل دهیم (مسئله ۲۰ تمرین ۱.۱ یا مسئله ۱۲ تمرین ۱.۱ را ببینید) و حال آنکه در بالا این هم ارزی را با استدلال قیاسی در پنج مرحله کوتاه، نشان داده ایم.

تمرین ۵.۱

راستگوهای زیر را به روش قیاسی ثابت کنید.

$$1. \text{ قیاس استثنایی } p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$$

$$2. \text{ قیاس دفع } \sim q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \sim p$$

$$3. \text{ برهان خلف } (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \rightarrow c)$$

$$4. \text{ دفع مؤلفه } (p \vee q \vee r) \wedge \sim r \wedge \sim q \Rightarrow p$$

$$\begin{aligned}
 & .\cdot ۵ \quad \text{قضیه } \forall (x) : c \Rightarrow p \\
 & (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow p \wedge q) .\cdot ۶ \\
 & (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow q) .\cdot ۷ \\
 & (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q .\cdot ۸ \\
 & (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r) .\cdot ۹ \\
 & (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r) .\cdot ۱۰ \\
 & (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p .\cdot ۱۱ \\
 & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r) .\cdot ۱۲ \\
 & (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r) .\cdot ۱۳ \\
 & (p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow q .\cdot ۱۴ \\
 & (p \rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \rightarrow r) .\cdot ۱۵ \\
 & [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow r) .\cdot ۱۶ \\
 & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r .\cdot ۱۷ \\
 & [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \wedge p \Rightarrow q \vee r .\cdot ۱۸ \\
 & (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow q \vee r .\cdot ۱۹ \\
 & (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p \vee \sim r .\cdot ۲۰
 \end{aligned}$$

۶. قواعد تسویر

در هر بحثی، یک عالم سخن یا حوزه سخن بخصوصی را در نظر داریم، یعنی دسته‌ای از اشیاء که خواصشان مورد نظر هستند. مثلاً، در گزاره «تمام انسانها، میرا هستند»، عالم، دسته تمام انسانها است. با این مفهوم عالم، گزاره «تمام انسانها، میرا هستند» را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

برای تمام x ‌های در عالم، x میراست.

عبارت «برای تمام x ‌های در عالم» را سود عمومی گویند و آن را با $(\forall x)$ نشان می‌دهند. جمله « x میراست» چیزی درباره x می‌گویند که ما آن را با $p(x)$ نشان می‌دهیم. با به کار بردن این علامتها عبارت «تمام انسانها میرا هستند»، به صورت زیر در می‌آید

$$(\forall x)(p(x))$$

حال، گزاره «بعضی از انسانها میرا هستند» را در نظر بگیرید. در اینجا عالم (یا حوزه سخن) هنوز همانند گزاره قبلی است. با در نظر داشتن این عالم، می‌توانیم گزاره «بعضی از انسانها میرا هستند» را به صورت‌های زیر بیاوریم.

حداقل یک فرد وجود دارد که میر است.

حداقل یک بز وجود دارد به قسمی که بز میراست.

و یا

حداقل یک x وجود دارد به قسمی که $p(x)$.

عبارت «حداقل یک بز وجود دارد به قسمی که» را سود وجودی گویند و آن را با $(\exists x)p(x)$ نمایش می‌دهند. با این علامت جدید می‌توان گزاره «بعضی از انسانها میرا هستند» را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(\exists x)(p(x))$$

در حالت کلی، فرض کنید که یک حوزه سخن U و یک گزاره کلی $(x)p$ داریم، که آن را گزاره‌نما می‌نامیم و در آن «متغیر» x ، در U تغییر می‌کند. حال $(\forall x)(p(x))$ بیان می‌کند که برای هر x در U ، گزاره $(x)p$ درباره x راست است، و $(\exists x)(p(x))$ به این معنی است که حداقل یک بز در U وجود دارد که برای آن $(x)p$ راست است.

در ریاضیات مقدماتی، معمولاً برای اختصار، از سورها صرفنظر می‌شود. مثلاً، در جبر دیفرانسیال عبارت $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) = (1 - x)(x + 1)$ به این معنی است که «برای هر عدد حقیقی x ، $1 - x^2 = (1 - x)(x + 1)$ ». در ریاضیات، «برای هر» و «برای تمام» به یک معنی هستند و هر دو را با \forall نشان می‌دهند؛ و «برای بعضی» همان معنی «وجود دارد» را می‌دهند که با \exists نمایش داده می‌شود. در عبارتها بیان که کمتر رسمی هستند گاهی سورها را بعد از گزاره می‌آوریم. مثلاً، گزاره $f(x) = 0$ برای تمام برهای f دقیقاً به معنی $(\exists x)(f(x) = 0)$ است.

در منطق و در ریاضیات، نقیض گزاره $(x)p$ برای هر x (در U) راست است، یعنی $(\forall x)(p(x))$ ، به معنی «حداقل یک x (در U) وجود دارد که برای آن $(x)p$ دروغ است»، $(\sim p(x))$ ، در نظر گرفته می‌شود.

همچنین، $(\exists x)(p(x))$ به معنی «هیچ x ای (در U) وجود ندارد که برای آن $(x)p$ راست باشد» یا به عبارت دیگر، « $(x)p$ برای تمام x ها (در U) دروغ است» یا $(\forall x)(\sim p(x))$ در نظر گرفته می‌شود. در زیر خلاصه می‌کنیم.

قاعده نقیض سود. اگر فرض کنیم $(x)p$ یک گزاره‌نما، یعنی یک گزاره در باره یک شیء نامشخص x در یک عالم مفروض باشد، آنگاه،

$$\sim[(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

و

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

نماد «≡» را برای نشان دادن اینکه دو گزاره مسور دو طرف ≡ از نظر منطق یک

گزاره به حساب می‌آیند* به کار برده‌ایم. در بخش بعد خواهیم دید که این نماد را برای هم‌ارزیهای منطقی نیز به کار می‌بریم و این دو تعییر نماد \equiv باهم سازگار هستند. برای درک بهتر گزاره‌های مسورد $((\forall x)(p(x)) \wedge (\exists x)(p(x)))$ ، حالتی را که در آن حوزه سخن از تعدادی متاهی متغیر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. آنگاه چون $((\forall x)(p(x)) \wedge (\exists x)(p(x)))$ به این معنی است که $p(x)$ برای هر متغیر a_1, a_2, \dots, a_n راست است، گزاره $((\forall x)(p(x)) \wedge (\exists x)(p(x)))$ راست است اگر و تنها اگر عطف

$$p(a_1), p(a_2), p(a_3), \dots, p(a_n)$$

راست باشد. بنابراین

$$p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n) \quad (\forall x)(p(x))$$

همچنین،

$$(\exists x)(p(x)) \wedge p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n) \quad p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n) \quad (\exists x)(p(x))$$

بنابراین، قاعدة نقیض سور را می‌توان به عنوان یک تعییم قانون دمورگن در نظر گرفت (قضیه ۳).

مثال ۹. کدام یک از گزاره‌های زیر هم ارز نهی گزاره «همه مارها سمی هستند» است؟

- (الف) هیچ ماری سمی نیست.
- (ب) بعضی از مارها سمی هستند.
- (ج) بعضی از مارها سمی نیستند.

حل: حوزه سخن U ، خانواده تمام مارها است. فرض کنیم p گزاره نمای، x سمی است، باشد، (که در آن متغیر x در U تغییر می‌کند). گزاره «تمام مارها سمی هستند»، به صورت $((\forall x)(p(x)) \wedge (\exists x)(p(x)))$ نوشته می‌شود. بنابر قاعدة نقیض سور، $[(\forall x)(p(x)) \wedge (\exists x)(\sim p(x))]$ هم ارز است، که بیانگر «بعضی از مارها سمی نیستند» می‌باشد.

تمرین ۶.۱

۱. با استفاده از یک سور، گزاره «معادله $5 = -3x + 2$ جواب دارد» منتخب از جبر مقدماتی را به زبان منطق بنویسید. حوزه سخن در اینجا چیست؟
۲. اتحاد « $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ » جبر مقدماتی را با استفاده از سور به زبان منطقی برگردانید. حوزه سخن در اینجا چیست؟
۳. یک تعییم قانون دمورگن در زیر آمده است:

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee \sim p_n \quad (\text{الف})$$

* یعنی از نظر منطق بین این دو گزاره مسور تمايزی قائل نمی‌شود.^{۱۰}

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \dots \wedge \sim p_n \quad (\text{ب})$$

با به کار بردن سورهای مناسب و حوزه سخن مناسب، این عبارات را به زبان منطقی برگردانید. حوزه سخن در اینجا چیست؟
۴. گزاره هم ارز نقیض هر یک از گزاره های زیر را با استفاده از قاعدة نقیض سور بیاورد.

(الف) تمام مارها خزنده هستند.

(ب) بعضی اسبها رام هستند.

(ج) بعضی از ریاضیدانان خوش مشرب نیستند.

(د) تمام دانشجویان یا باهوش هستند یا پر کار.

(ه) هیچ کودکی حیله گر نیست.

۵. حوزه سخن را برای هر یک از پنج گزاره مسئله ۴ بیاورد.

۶. از

$$\sim[(\forall x)(q(x))] \equiv (\exists x)(\sim q(x))$$

نتیجه بگیرید

$$\sim[(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

۷. از

$$\sim[(\exists x)(q(x))] \equiv (\forall x)(\sim q(x))$$

نتیجه بگیرید

$$\sim[(\forall x)(p(x))] \equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

۸. ثابت کنید که

$$\sim[(\exists x)(\sim q(x))] \equiv (\forall x)(q(x))$$

[راهنمایی: قاعدة نقیض سور را به کار بروید].

۷. برهان درستی

یکی از مهمترین وظایف یک منطقدان آزمون حکمه است. یک حکم تصدیق این است که گزاره ای بدنام نتیجه از گزاره های دیگری بynam مفروضات یا مقدمات، به دست می آید. یک حکم دست تلقی می شود هر گاه تر کیب عطفی مفروضات نتیجه را ایجاد کند. مثلاً آنچه در زیر می آید، یک حکم است که در آن چهار گزاره اول مفروضات هستند و گزاره آخر نتیجه است.

اگر او پژوهشکی می خواند، آنگاه درآمد خوبی در انتظارش است.

اگر به تحصیل هنر می بردازد، آنگاه زندگانی خوبی در انتظارش است.

اگر درآمد خوبی در انتظارش است یا زندگانی خوبی در انتظارش است، شهریه ای که به کالج می بردازد به هدر نرفته است.

شهریه کالج او به هدر رفته است.

بنابراین، او نه پزشکی می خواند نه هنر تحصیل می کند.

این حکم را می توان به صورت نمادی زیر نوشت:

$$\text{ف ۱. } P \rightarrow D \quad (\text{ف} = \text{فرض، } P = \text{او پزشکی می خواند، } D = \text{درآمد})$$

خوبی درانتظارش است)

$$\text{ف ۲. } T \rightarrow Z \quad (T = \text{به تحصیل هنر می پردازد، } Z = \text{زندگانی خوبی})$$

درانتظارش است)

$$\text{ف ۳. } DVZ \rightarrow \sim S \quad (\text{ شهریه کالج او به هدر رفته است})$$

$$\text{ف ۴. } S$$

$$\text{ن } \therefore \sim P \wedge \sim T$$

اینات درستی این حکم با جدول ارزش مستلزم یک جدول ($\equiv ۳۲$) ($= ۲^5$) سطrix است. اما راه دیگر اینات درستی این حکم این است که با به کار بردن قواعد استنتاج، در چند مرحله کوتاه نتیجه را از مفروضات بدست آوریم.

از فرضهای ف ۳ و ف ۴، (یعنی از $S \rightarrow DVZ$ و $DVZ \rightarrow \sim S$) بر طبق قانون قیاس دفع، $(DVZ) \sim$ نتیجه می شود و این بنابر قانون دمورگن با $\sim DVZ \sim$ هم ارز است. بنابر قانون اختصار از $\sim DVZ \sim$ با $\sim D \wedge \sim V \wedge \sim Z$ درستی $\sim D \wedge \sim V \wedge \sim Z$ دارد. از ف ۱ (یعنی از $P \rightarrow D$) و $\sim D \sim$ درستی $\sim P$ را بدست می آوریم همچنین از ف ۲ (یعنی از $Z \rightarrow T$) و $\sim Z \sim$ درستی $\sim T$ را نتیجه می گیریم. بالاخره، عطف $\sim P \wedge \sim T$ و $\sim P \wedge \sim T$ را نتیجه می دهد. در این برهان، قواعد استنتاج قیاس دفع، قانون دمورگن و قانون اختصار به کار گرفته شده اند.

یک روش صوری و مختصرتر برای بیان این برهان درستی این است که فرضها و گزاره های را که از فرضها نتیجه می شوند در یک طرف بنویسیم و در هر مرحله توجیه آن را کتابش ذکر کنیم. در هر مرحله «توجیه» مشخص می کند که گزاره این مرحله از کدام گزاره های قبلی و چه قواعد استنتاجی به دست آمده است. برای آسانی مراجعه، بهتر است که فرضها و گزاره های متنع از آنها را شماره گذاری کرده و نتیجه را درست می چپ آخرین فرض بنویسیم و آن را با خطی کج مانند / از فرض جدا کنیم تا مشخص شود که گزاره های قبل از آن همگی مفروضات هستند. برهان صوری درستی حکم بالا را می توان به صورت زیر نوشت

$$(f) \quad P \rightarrow D \ . \ 1$$

$$(f) \quad T \rightarrow Z \ . \ 2$$

$$(f) \quad DVZ \rightarrow \sim S \ . \ 3$$

$$(f/n) \quad S / \therefore \sim P \wedge \sim T \ . \ 4$$

۳، ۴، قیاس دفع	$\sim(D \vee Z)$.۵
۵، دمورگن	$\sim D \wedge \sim Z$.۶
۶، اختصار	$\sim D$.۷
۷، اختصار	$\sim Z$.۸
۸، ۹، قیاس دفع	$\sim P$.۹
۱۰، ۱۱، قیاس دفع	$\sim T$.۱۰
۱۲، ۱۳، قانون عطف	$\sim P \wedge \sim T$.۱۱

در مرحله ۱۱ بالا، حکم زیر را که به روشنی معتبر است و قانون عطف خوانده می‌شود، به کار برده‌ایم:

$$\begin{array}{ccc} f & p \\ f & q \\ \hline & n \\ & \therefore p \wedge q \end{array}$$

برهان دستی همچنان یک حکم داده شده، دنباله‌ای از گزاره‌های است که هر یک یا فرض حکم است یا از گزاره‌های قبلی با حکمی که درستی آن شناخته شده به دست آمده است، و به نتیجه حکم ختم می‌شود.

مثال ۱۰. برای حکم زیر یک برهان دستی صوری بیاورید. نمادهای پیشنهادی را به کار بربند.

یا واجدی به ریاست هیئت مدیره انتخاب شده است (W) یا هدایت و لطفی به معاونت هیئت مدیره انتخاب شده‌اند (H, L). اگر یا واجدی به ریاست هیئت مدیره انتخاب شود یا هدایت به معاونت هیئت مدیره انتخاب شود، آنگاه داود اعتراض خواهد کرد (D). بنابراین، یا واجدی به ریاست هیئت مدیره انتخاب شده است یا داود اعتراض کرده است.

$$W \vee (H \wedge L) .1 \quad \text{برهان.}$$

$$W \vee H \rightarrow D / \therefore W \vee D .2$$

۱، پخش‌پذیری	$(W \vee H) \wedge (W \vee L)$.۳
۳، اختصار	$W \vee H$.۴
۲، ۳، قیاس استثنایی	D .۵
۵، جمع	$D \vee W$.۶
۶، جا به جایی	$W \vee D$.۷

برهان درستی ۲۹

یک روش دیگر برهان، روش برهان غیرمستقیم، یا «پوش برهان خلف» است. در این روش برای اثبات درستی یک حکم مفروض، نقض نتیجه را به مفروضات حکم می‌افزاییم و پس یک تناقض به دست می‌آوریم؛ با به دست آوردن تناقض، برهان کامل می‌شود.

مثال ۱۱. یک برهان غیرمستقیم برای درستی حکم زیر بیاورید.

$$p \vee q \rightarrow r$$

$$s \rightarrow p \wedge u$$

$$q \vee s / \therefore r$$

$$p \vee q \rightarrow r \quad .1 \quad \text{برهان خلف}$$

$$s \rightarrow p \wedge u \quad .2$$

$$q \vee s / \therefore r \quad .3$$

$$\text{برهان خلف} \quad \sim r \quad .4$$

$$.5, ۱، ۴، \text{ قیاس دفع} \quad \sim(p \vee q)$$

$$.6, ۵، \text{ دمورگن} \quad \sim p \wedge \sim q$$

$$.7, \text{ اختصار} \quad \sim p$$

$$.8, \text{ اختصار} \quad \sim q$$

$$.9, ۳، ۸، \text{ رفع مؤلفه} \quad s$$

$$.10, ۲، ۹، \text{ قیاس استثنای} \quad p \wedge u$$

$$.11, \text{ اختصار} \quad p$$

$$.12, ۷، ۱۱، \text{ قانون عطف} \quad p \wedge \sim p$$

گزاره $p \wedge \sim p$ در مرحله ۱۲ یک تناقض است؛ پس برهان غیرمستقیم درستی کامل است.

در مقابل «برهان غیرمستقیم» برهان درستی صوری را که «قبلًاً» به آن اشاره کردیم می‌توان «برهان مستقیم» نامید. در یک برهان ریاضی می‌توان یک برهان مستقیم یا یک برهان غیرمستقیم به کار برد. انتخاب روش برهان برای یک حکم ریاضی مفروض، بستگی دارد به سلیقه و توانایی روش با حکم.

تمرین ۷۰۱

هر یک از مسائل ۱ تا ۴ یک برهان درستی صوری حکمی است که در مسئله مشخص شده است.
برای هر خط که درست نیست، دلیل بیاورید.

$p \wedge q \rightarrow r$.۲	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$.۱
$(p \rightarrow r) \rightarrow s$		$\sim r / \therefore \sim q$	
$\sim q \vee u / \therefore q \rightarrow s \wedge u$		$\sim r \vee \sim s$	
$q \wedge p \rightarrow r$		$\sim (r \wedge s)$	
$q \rightarrow (p \rightarrow r)$		$\sim (p \vee q)$	
$q \rightarrow s$		$\sim p \wedge \sim q$	
$\sim q \vee s$		$\sim q$	
$(\sim q \vee s) \wedge (\sim q \vee u)$			
$\sim q \vee (s \wedge u)$			
$q \rightarrow s \wedge u$			
$\sim p \wedge s \wedge \sim (\sim p \wedge q)$.۴	$p \wedge (q \vee s)$.۳
$p \vee q \vee (r \wedge s) / \therefore \sim p \wedge r$		$p \rightarrow (s \rightarrow u)$	
$\sim p \wedge s$		$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
$\sim p$		$\sim r / \therefore u$	
$p \vee [q \vee (r \wedge s)]$		$p \wedge s \rightarrow u$	
$q \vee (r \wedge s)$		$p \wedge q \rightarrow r$	
$(q \vee r) \wedge (q \vee s)$		$(p \wedge q) \vee (p \wedge s)$	
$q \vee r$		$(p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \wedge s \rightarrow u)$	
$\sim p \wedge (q \vee r)$		$(p \wedge q) \vee (p \wedge s) \rightarrow r \vee u$	
$(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$		$r \vee u$	
$(\sim p \wedge s) \wedge \sim (\sim p \wedge q)$		u	
$\sim (\sim p \wedge q)$			
$\sim p \wedge r$			

برای هر یک از حکمهای زیر یک برهان مستقیم یا یک برهان غیرمستقیم درستی پیاوید.

$B \vee (C \rightarrow E)$.۶	$A \vee (B \wedge C)$.۵
$B \rightarrow D$		$B \rightarrow D$	
$\sim D \rightarrow (E \rightarrow A)$		$C \rightarrow E$	

$$\sim D / \therefore C \rightarrow A$$

$$D \wedge E \rightarrow F$$

$$\sim A / \therefore F$$

$$A \vee B$$

.۸

$$(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow D \wedge E) \quad .۷$$

$$\sim B \vee C / \therefore A \vee C$$

$$A \wedge C / \therefore E \vee F$$

$$A \wedge B \rightarrow C$$

.۱۰

$$B \vee C \rightarrow B \wedge A \quad .۹$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow D$$

$$\sim B / \therefore \sim C$$

$$\sim B \vee E / \therefore B \rightarrow D \wedge E$$

در برهانهای حکمهای ذیر، از علامتهای پیشنهادی استفاده کنید.

۱۱. اگر جمیعت به سرعت افزایش یابد و تولید ثابت بماند، آنگاه قیمتها بالا می‌روند.

اگر قیمتها بالا روند آنگاه دولت قیمتها را کنترل خواهد کرد. اگر من ثروتمند باشم آنگاه نگران افزایش قیمتها نیستم. چنین نیست که من ثروتمند نیستم. یا دولت قیمتها را کنترل نمی‌کند یا من نگران افزایش قیمتها هستم. بنابراین، چنین نیست که جمیعت به سرعت افزایش می‌یابد و تولید ثابت می‌ماند. (جمیعت به سرعت افزایش می‌یابد P ، تولید ثابت می‌ماند C . قیمتها بالا می‌روند R). دولت قیمتها را کنترل خواهد کرد G . من نگران افزایش قیمتها هستم H . من نگران افزایش قیمتها هستم I).

۱۲. رئیس مرا تمجید می‌کند تها اگر بتوانم به خودم مغفول باشم. یا من در کلاس خوب کار می‌کنم یا نمی‌توانم به خودم مغفول باشم. اگر در ورزش کوشای باشم، آنگاه نمی‌توانم در کلاس خوب کار کنم. بنابراین، اگر رئیس مرا تمجید کند آنگاه نمی‌توانم در ورزش کوشای باشم. (رئیس مرا تمجید می‌کند A ، می‌توانم به خودم مغفول باشم P . در کلاس خوب کار می‌کنم C . در ورزش کوشای باشم S).

۱۳. اگر واجدی یا هدایت پیروز شوند آنگاه لطفی و سلیمان گریه می‌کنند. سلیمان گریه نمی‌کند. بنابراین هدایت پیروز نشده است. (واجدی پیروز می‌شود W .

هدایت پیروز می‌شود H . لطفی گریه می‌کند L . سلیمان گریه می‌کند S).

۱۴. اگر من در این درس شرکت کنم و زیاد درس بخوانم آنگاه نمرات خوبی می‌گیرم. اگر نمرات خوبی بگیرم آنگاه خوشحال می‌شوم. من خوشحال نیستم. بنابراین یا من در این درس شرکت نکردم یا زیاد درس نخوانده‌ام. (من در این درس شرکت می‌کنم E . من زیاد درس می‌خوانم S . من نمرات خوبی می‌گیرم G . من خوشحال هستم H).

۱۵. اگر او به همانی بسرود موهایش را برس خواهد کشید. برای اینکه دلربا جلوه کند لازم است که آراسته باشد. اگر معتقد باشد تسلط بر نفس ندارد. اگر موهایش را برس بکشد، دلربا جلوه می‌کند. او دستکشهای سفید (پوست بزغاله‌ای) می‌بoshد تها وقتی که به همانی برسود. تسلط بر نفس نداشتن کافی است که او را نا آراسته

جلوه گسر کند. بنابراین آدم معتمد دستکش سفید (پوست بزغاله‌ای) نمی‌پوشد. (او بهمهمانی می‌رود = P . او موها را برس نمی‌کشد = B . او دلربا جلوه می‌کند = F . او آراسته است = T . او معتمد است = O . او تسلط بر نفس دارد = S . او دستکش سفید (پوست بزغاله‌ای) می‌پوشد = G .)

۸. استقرای ریاضی

روش دیگر برهان که برای اثبات درستی یک حکم ریاضی $P(n)$ مربوط به عدد طبیعی n خیلی به کار می‌رود اصل استقرای (ریاضی) است که در زیر می‌آید.

استقرای ریاضی. اگر $P(n)$ یک حکم مربوط به عدد طبیعی n باشد به طوری که
(۱) $P(1)$ راست باشد، و

(۲) برای هر عدد طبیعی k ، $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n راست است.

اصل بالا نتیجه‌ای از یکی از اصول موضوع پثانو برای اعداد طبیعی است، که در ضمیمه برای ارجاع ذکر شده‌اند.

برای استفاده از اصل استقرای ریاضی در اثبات یک قضیه، باید قضیه را بتوان به حالت‌های تجزیه کرد به طوری که برای هر عدد طبیعی یک حالت داشته باشیم. آنگاه باید درستی شرایط (۱) و (۲) را بررسی کنیم. بررسی (۱)، که «معمول» ماده است، ما را مطمئن می‌کند که قضیه حداقل برای حالت $n=1$ راست است. برای تحقیق در درستی شرط (۲)، باید این قضیه کمکی را که فرضش « $P(k)$ راست است» و نتیجه‌اش « $P(k+1)$ راست است» می‌باشد، ثابت کنیم. فرض « $P(k)$ راست است» را فرض استقرا می‌گویند.

مثال ۱۲. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

برهان. در اینجا $P(n)$ حکم زیر است:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

بهویژه، $P(1)$ نمایانگر « $1+1=2$ » است که آشکارا یک گزاره راست است. پس، شرط (۱) استقرای ریاضی برقرار است.

برای اثبات شرط (۲)، فرض می‌کنیم $P(k)$ ، یعنی

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

راست است. سپس به طرفین تساوی $1+k$ اضافه می‌کیم، داریم

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $P(k+1)$ راست است. نشان دادیم که شرایط (۱) و (۲) استقرای ریاضی برقرار هستند. پس، بنا بر اصل استقرای ریاضی،

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

برای هر عدد طبیعی n راست است.

اصل استقرای ریاضی را می‌توان برای تعریفهای مربوط به اعداد طبیعی به کار برد. مثلاً توانهای یک عدد مجهول x را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$x^1 = x$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \quad \text{برای هر عدد طبیعی } n$$

دو معادله بالا نشان می‌دهند که $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, ..., $x^n = x^{n-1} \cdot x$. به عنوان کاربرد دیگر تعریف استقرایی، نماد $C(n, r)$ را در زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف ۷. گیریم n عدد طبیعی و r عدد صحیح باشد. علامت $C(n, r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C(0, 0) = 1, \quad C(0, r) = 0 \quad r \neq 0$$

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$$

قضیه ۸. اگر n و r اعدادی صحیح باشند به طوری که $0 \leq r \leq n$ ، آنگاه

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

که در آن $n!$ حاصلضرب n عدد طبیعی متوالی از ۱ تا n ، یعنی $n \cdot (n-1) \cdots 1$ است. به ازای $r < n$ را نشان می‌دهد و نیز بنا بر قرارداد $0! = 1$.

برهان. برهان را به عنوان تمرین بر عهله خواننده می‌گذاریم.

قضیه ۹. (قضیه دو جمله‌ای). اگر x و y دو متغیر و n یک عدد طبیعی باشند، آنگاه

$$(x+y)^n = C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y + \cdots + C(n, r)x^{n-r}y^r + \cdots + C(n, n)y^n$$

برهان. درستی این قضیه را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. نخست، بدیهی است که قضیه برای حالت $n=1$ درست است. برای تکمیل برهان، فرض می‌کنیم که قضیه برای حالت $n=k$ درست است، یعنی فرض می‌کنیم

$$(x+y)^k = C(k, 0)x^k + C(k, 1)x^{k-1}y + \cdots + C(k, r)x^{k-r}y^r + \cdots + C(k, k)y^k$$

آنگاه دو طرف تساوی بالا را در $(x+y)$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned} (x+y)^{k+1} &= (x+y)[x^k + C(k, 1)x^{k-1}y + \cdots + C(k, r)x^{k-r}y^r + \cdots + y^k] \\ &= x^{k+1} + [C(k, 0) + C(k, 1)]x^ky + \cdots + [C(k, r-1) \\ &\quad + C(k, r)]x^{k+1-r}y^r + \cdots + y^{k+1} \\ &= C(k+1, 0)x^{k+1} + C(k+1, 1)x^ky + \cdots \\ &\quad + C(k+1, r)x^{k+1-r}y^r + \cdots + C(k+1, k+1)y^{k+1} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد اگر قضیه برای $n=k$ درست باشد برای $n=k+1$ نیز درست است. بنابراین، بنا بر استقرای ریاضی، قضیه دو جمله‌ای برای تمام اعداد طبیعی n درست است.

اعداد $C(n, r)$ در قضیه دو جمله‌ای، خواص دو جمله‌ای گفته می‌شوند.

تمرين ۸۰۱

۱. قضیه ۸ را با استقرای ریاضی ثابت کنید.

۲. نشان دهید که برای تمام اعداد طبیعی n ، $C(n, 0) = 1 = C(n, n)$

۳. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$$

۴. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۵. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + r(r+1) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

۶. با استقرای ریاضی ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۷. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

۸. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$(1+2+3+\dots+n)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

۹. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

۱۰. ثابت کنید که برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

۱۱. قوانین دمورگن تعمیم یافته زیر را ثابت کنید.

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee \sim p_n \quad (\text{الف})$$

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Leftrightarrow \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \dots \wedge \sim p_n \quad (\text{ب})$$

۱۲. قوانین پخشیز بری تعمیم یافته زیر را ثابت کنید.

$$p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \dots \vee (p \wedge q_n) \quad (\text{الف})$$

$$p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \dots \wedge (p \vee q_n) \quad (\text{ب})$$

۱۳. ثابت کنید که اگر k یک عدد طبیعی ثابت باشد، آنگاه برای تمام اعداد طبیعی n ،

$$1 + 2 + \dots + k + 2 + 3 + \dots + (k+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+k-1)$$

$$= \frac{1}{k+1} n(n+1)(n+2) \dots (n+k).$$

۳

مفهوم مجموعه

در این فصل، مفاهیم مجموعه، زیرمجموعه، اعمال در مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک و متام مجموعه‌ها) و قواعد حاکم بر این اعمال (ا مطرح می‌کنیم. این مطالب به موازات مطالب فصل ۱ (منطق گزاره‌ها) آمده‌اند. خانواده‌های اندیس داد مود بحث قرار گرفته‌اند. فصل با پارادوکس (اسل و یک توضیح تاریخی پایان می‌یابد.

۱. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

پاسخ به این پرسش که «مجموعه چیست؟» بسیار دشوار است.^۱ در این کتاب مقدماتی، وارد نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها نمی‌شویم و بدین‌رفت تعریف زیر اکتفا می‌کنیم: یک مجموعه هر توده‌ای از اشیاء، به نام عناصر، است که از لحاظ حسی یا فکری متمایز و معین باشد. این تعریف شهودی مجموعه را تختین بار گنور گشتور^{*} (۱۸۴۵–۱۹۱۸)، که نظریه مجموعه‌ها را در سال ۱۸۹۵ پایه‌ریزی کرد، آورده است. چند مثال:

- (الف) مجموعه تمام صندلی‌های این کلاس.
- (ب) مجموعه تمام دانشجویان این دانشگاه.

^۱. وقتی که دانشجویان به بخش‌های ۷ و ۸ برسند، به اشکال بی خواهند برد.

- (ج) مجموعه حروف a, b, c و d .
- (د) مجموعه قوانین خوابگاههای دانشگاه.
- (ه) مجموعه تمام اعداد گویا که مربعان ۲ است.
- (و) مجموعه تمام اعداد طبیعی.
- (ز) مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۱.

بلک مجموعه را که فقط شامل تعدادی متناهی عنصر باشد مجموعه متناهی می‌گویند. مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که متناهی نباشد. مثالهای بالا از (الف) تا (ه) همگی مجموعه‌های متناهی و مثالهای (و) و (ز) مجموعه‌های نامتناهی هستند.

معولاً در صورت امکان، مجموعه‌ها را با عنصرهایش در میان دوابر و نمایش می‌دهند. بنابراین، مجموعه مثال (ج) را به صورت $\{a, b, c, d\}$ می‌نویسند و مجموعه مثال (و) را می‌توان به صورت $\{\dots, 1, 2, 3, \dots\}$ نشان داد. مجموعه مثال (ه) هیچ عنصری ندارد و چنین مجموعه‌ای را مجموعه‌تهی گویند که با نماد \emptyset نمایش داده می‌شود.

حروف بزرگ را برای نمایش مجموعه‌ها و حروف کوچک را برای نمایش عنصرهای مجموعه به کار خواهیم برد. اگر a عنصری از مجموعه A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ (بخوانید: « a از A است» یا « a متعلق به A است»)، نماد $A \neq B$ بدین معنی است که b عنصری از A نیست.

تعریف ۱. دو مجموعه A و B را مساوی گویند و نویسند $A = B$ ، اگر عنصرهایشان یکی باشد. یعنی $A = B$ به معنی $[x \in A] \leftrightarrow [x \in B]$ ($\forall x$) است.

در نوشتن عنصرهای مجموعه، ترتیب خاصی رعایت نمی‌شود. مثلاً $\{a, b, c\}$ یا $\{c, b, a\}$ یا $\{b, c, a\}$ هر سه یک مجموعه را نمایش می‌دهند. به علاوه، چون عنصرهای یک مجموعه متمايز هستند، مثلاً $\{a, a, b\}$ نماد مناسبی برای مجموعه $\{a, b\}$ نیست. اگر a عنصری از یک مجموعه باشد، باید a را متمايز از $\{a\}$ در نظر گرفت، یعنی $\{a\} \neq a$. ذیرا $\{a\}$ مجموعه‌ای است که تنها از عنصر a تشکیل شده است، در صورتی که a عنصر مجموعه $\{a\}$ است.

تعریف ۲. گیریم A و B دو مجموعه باشند. اگر هر عنصر A ، عنصر B نیز باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ یا $B \supseteq A$. اگر A زیرمجموعه B باشد، B را ابرمجموعه A می‌نامیم.

بنابراین، به زبان منطق:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x)[(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

بدیهی است که هر مجموعه یک زیرمجموعه (و یک ابرمجموعه) خودش است. هرگاه $A \neq B$ و $A \subseteq B$ باشد، می‌نویسیم $A \subset B$ یا $B \supset A$ و $A \subset B$ و $A \subseteq B$ ، و می‌خوانیم: A زیرمجموعه سره B ، یا B ابرمجموعه سره A است. به عبارت دیگر، A زیرمجموعه سره B است، به معنی آن

است که هر عنصر A ، عنصر B است، و عنصری در B وجود دارد که عنصر A نیست. اگر زیرمجموعه B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

قضیه ۱. مجموعه‌تنهی \emptyset ، زیرمجموعه هر مجموعه است.

برهان. فرض کنیم A یک مجموعه باشد. باید ثابت کنیم که گزاره شرطی

$$(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)$$

برای هر x درست است. چون مجموعه تنهی عضوی ندارد، گزاره « $x \in \emptyset$ » دروغ است، گزاره « $x \in A$ » چه راست باشد چه دروغ، گزاره شرطی $(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)$ ، بنابر جدول ارزش گزاره شرطی، راست است (حالتهای ۳ و ۴ جدول ۵، فصل ۱). پس، به ازای هر مجموعه A ، $\emptyset \subseteq A$.

قضیه ۲. اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه

برهان. باید نشان دهیم که $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B) \quad A \subseteq B \quad \text{زیرا}$$

$$(x \in B) \Rightarrow (x \in C) \quad B \subseteq C \quad \text{زیرا}$$

از این رو، بنابر قانون تعلق (قضیه ۴ (ج)، فصل ۱)، داریم

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$$

پس ثابت کردیم $A \subseteq C$.

تمرین ۱۰۲

۱. نشان دهید که مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بینایین» با مجموعه حروف لازم

برای هجی کردن «بیان» مساوی است.

۲. تعیین کنید که در میان مجموعه‌های زیر، کدام مجموعه، زیرمجموعه دیگری است.

(الف) $\{x \mid \text{تعداد حقیقی } x \text{ که } 12 = 1 + 2 + \dots + x^2 \text{ صدق می‌کنند}\} =$

$$(b) \quad B = \{2, 4, 6\}$$

$$(c) \quad C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$(d) \quad D = \{6\}$$

۳. تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ را بنویسید.

۴. ثابت کنید که $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$. [تعبره: اغلب در ریاضیات

بهترین راه برای نشان دادن $A = B$ آن است که نشان دهیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

۵. ثابت کنید که $(A \subseteq \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)$

۶. ثابت کنید که

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

$$(b) [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

۷. مثالی بیاورید از مجموعه‌ای که هریک از عناصرهایش یک مجموعه باشد.

۸. در هریک از حکمهای زیر تعیین کنید حکم راست است یا دروغ. درستی احکام را

که راست هستند ثابت کنید. نادرستی احکام دروغ را با یک مثال ثابت کنید. (مثالی

را که نادرستی حکمی را ثابت کند، مثال نمی‌پوشاند).

(الف) اگر $x \in B$ و $x \in A$ ، آنگاه $A \subseteq B$

(ب) اگر $A \in C$ و $B \in C$ ، آنگاه $A \subseteq B$

(ج) اگر $A \not\subseteq C$ و $B \subseteq C$ ، آنگاه $A \not\subseteq B$

(د) اگر $A \not\subseteq C$ و $B \not\subseteq C$ ، آنگاه $A \not\subseteq B$

(ه) اگر $x \notin B$ ، آنگاه $A \not\subseteq B$ و $x \in A$

(و) اگر $x \notin A$ ، آنگاه $x \notin B$ و $A \subseteq B$

۹. تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر راست و کدام یک دروغ است.

(الف) $x \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$

(ب) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$

(ج) $\{1, x, 2\} \subseteq \{1, 2, x\}$

(د) $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$

(ه) $\{x\} \in \{x\}$

۱۰. تعیین کنید گزاره‌های زیر راست هستند یا دروغ

(الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$

(ب) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(ج) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

(د) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$

۱۱. یک مجموعه n عنصری داده شده است. ثابت کنید که این مجموعه $C(n, r)$ ذیر مجموعه

r عنصری دارد.

۲. تصریح مجموعه‌ها

یک روش ساختن یک مجموعه جدید از مجموعه مفروض، مشخص کردن عناصرهایی از مجموعه

مفهوم است که در یک ویژگی خاص صدق می‌کنند. مثلاً "فرض کیم A مجموعهٔ تمام دانشجویان این دانشگاه باشد. گزاره « x زن است» برای بعضی از عناصرهای A راست و برای بقیهٔ دروغ است. نماد

$$\{x \in A \mid x \text{ زن است}\}$$

را برای شناسایی مجموعهٔ تمام دانشجویان زن این دانشگاه به کار می‌بریم. همچنین

$$\{x \in A \mid x \text{ زن نیست}\}$$

مجموعهٔ تمام دانشجویان مرد این دانشگاه را مشخص می‌کند.

به عنوان یک قاعده، می‌گوییم متناظر با هر مجموعهٔ A ده حکم $(x) p$ در با (۰)، $x \in A$ ، یک مجموعهٔ $\{x \in A \mid p(x)\}$ وجود دارد که عناصرهایش دقیقاً آن عناصرهای A ، ماتنند x ، هستند که حکم $(x) p$ برای آنها داشت است. در نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها، این قاعده را معمولاً "یک اصل موضوع به نام اصل موضوع تحریح" می‌گیرند. نساد $\{x \in A \mid p(x)\}$ راست است. نساد به صورت خوانده می‌شود: مجموعهٔ تمام x ‌های در A به طوری که $(x) p$ راست است. نساد $\{x \in A \mid p(x)\}$ که مجموعه را مشخص می‌کند، نساد مجموعه‌ساز نامیده می‌شود.

مثال ۱. فرض کیم \mathbb{R} مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی باشد. آنگاه

(الف) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = x + 1\}$ ، مجموعهٔ تهی است.

(ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\}$ ، مجموعهٔ $\{-1/2, 3\}$ است.

(ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ ، مجموعهٔ تهی است.

چون در این کتاب و در مباحث دیگر ریاضی مجموعه‌های زیر بارها به کار می‌روند، نسادهای زیر را با این مجموعه‌ها تخصیص می‌دهیم:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ عدد حقیقی است}\}$$

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ عدد گویا است}\}$$

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ عدد صحیح است}\}$$

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ عدد طبیعی است}\}$$

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

توجه دارید که $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

امکان دارد که هر عنصر مجموعه، خود یک مجموعه باشد. مثلاً، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ مفروض A ، هر عنصرش یک مجموعه است. این مجموعه را

مجموعه توانی A می‌گویند و آن را با $\mathcal{P}(A)$ نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} \text{مثال ۱. } & \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}, \\ & \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \end{aligned}$$

قضیه زیر انگیزه نامگذاری «مجموعه توانی» را آشکار می‌سازد.

قضیه ۲. اگر A از n عنصر تشکیل شده باشد آنگاه مجموعه توانی $\mathcal{P}(A)$ ، دقیقاً 2^n عنصر دارد.

برهان. بدیهی است که قضیه برای $A = \emptyset$ راست است. وقتی A تهی نیست، آن را $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ می‌گیریم. یک عنصر A مانند a_i در نظر می‌گیریم، هر زیرمجموعه A دو حالت دارد: یا شامل a_i است یا نیست. از این دو مسئله یافتن تعداد زیرمجموعه‌های A برمی‌گردد به این مسئله که n مربع خالی $\square \square \dots \square$ در نظر بگیریم و به انواع مختلف در هر یک از این مربعها عدد ۰ یا ۱ بگذاریم. چون به 2^n صورت این n مربع را با اعداد ۰ و ۱ می‌توان پر کرد و هر یک از n مربعهای پر شده با یک زیرمجموعه A متناظر است (به این ترتیب که a_i را در زیرمجموعه می‌گیریم اگر و تنها اگر در k این مربع عدد ۱ باشد)، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های A دقیقاً 2^n است. شاید دانستن برهان دیگری که برای قضیه ۳ در زیرمی‌آید، جالب باشد.

برهان دیگر. اولاً «مجموعه \emptyset متعلق به $\mathcal{P}(A)$ » است. ثانیاً متناظر با هر عنصر A ، مجموعه $\{x\}$ متعلق به $\mathcal{P}(A)$ است. توجه کنید که تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عنصری، $C(n, 1)$ است. به همین ترتیب، $C(n, 2)$ تعداد زیرمجموعه‌های دو‌عنصری A است. بالاخره $C(n, n) = 1$ تعداد زیرمجموعه‌های n عناصری A ، یعنی خود A است. با درنظر گرفتن مجموعه تهی، تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر است با

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$$

اکنون بسط دوجمله‌ای را برای $(1+1)^n$ می‌نویسیم

$$(1+1)^n = C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n)$$

بنابراین، تعداد عنصرهای $\mathcal{P}(A)$ برابر است با $2^n = (1+1)^n$.

- در نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها، وجود مجموعه توانی مسلم فرض نشده است. چون وجود مجموعه توانی از اصل موضوع تصریح نتیجه نمی‌شود، بهیک اصل موضوع جدید نیاز است. این موضوع جدید را معمولاً اصل موضوع مجموعه‌های توانی می‌گویند که به صورت زیر بیان می‌شود: متناظر با هر مجموعه، مجموعه‌ای از مجموعه‌ها وجود دارد که عضوهایش از تمام زیرمجموعه‌های مجموعه داده شده تشکیل یافته است.
- به مسئله ۱۱، تمرین ۱.۲ رجوع کنید.

تمرین ۲۰۲

۱. عناصرهای هریک از مجموعه‌های زیر را در میان دوابر و بنویسید.

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 25\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{Q} \mid 10x^2 + 3x - 1 = 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbf{R}_+ \mid 4x^2 - 4x - 1 = 0\}$$

۲. عناصر هریک از مجموعه‌های زیر را در میان دوابر و نمایش دهید.

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 < x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 25 \leq x^2 < 36\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{پایتخت است}\} \text{ اروپا}$$

۳. هریک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از نماد مجموعه‌ساز بنویسید.

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$B = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$C = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

$$D = \{2, 9, 28, 65, \dots\}$$

$$E = \{a, e, i, o, u\}$$

۴. هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد مجموعه‌ساز نشان دهید.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \left\{ -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$D = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$$

۵. عناصرهای مجموعه توانی مجموعه $\{x, \{y, z\}\}$ چه هستند؟ این مجموعه توانی چند عنصر دارد؟
۶. آیا مجموعه توانی مجموعه تهی، تهی است؟ چرا؟
۷. مجموعه توانی مجموعه توانی مجموعه تهی چند عنصر دارد؟
۸. مجموعه $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ را بنویسید. آیا این مجموعه بیش از مجموعه $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ عنصر دارد؟
۹. آیا برای هر مجموعه A و هر مجموعه B ، $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ چرا؟
۱۰. آیا برای هر مجموعه A و هر مجموعه B ، $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ چرا؟
۱۱. فرض کنید B یک زیرمجموعه A باشد، و $\mathcal{P}(A:B) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq B\}$.
- (الف) فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $B = \{a, b\}$. عناصرهای مجموعه $\mathcal{P}(A:B)$ را بنویسید؛ تعداد این عناصر را تعیین کنید.
- (ب) نشان دهید که $\mathcal{P}(A:\emptyset) = \mathcal{P}(A)$.
۱۲. A را یک مجموعه n عنصری و B را یک زیرمجموعه m عنصری A فرض کنید. $n \geq m$
- (الف) تعداد عناصرهای مجموعه $(A:B)$ را پیدا کنید.
- (ب) $B = \emptyset$ گرفته، قضیه ۳ را از (الف) تتجیه بگیرید.

۳. اجتماع و اشتراك

در حساب می‌توانیم دو عدد را جمع، ضرب، یا تفریق کنیم. در نظریه مجموعه‌ها، سه عمل اجتماع، اشتراك و متمم‌گیری به ترتیب نظریه جمع، ضرب و تفریق در اعداد هستند.

تعریف ۳. اجتماع دو مجموعه A و B ، که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام عناصرهایی است که حداقل به یکی از دو مجموعه A و B متعلق‌اند. یعنی $x \in A \cup B$ اگر و تنها اگر $x \in A \vee x \in B$.

تعریف ۴. اشتراك دو مجموعه A و B ، که با $A \cap B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه تمام عناصرهایی است که هم متعلق به A هستند و هم متعلق به B . یعنی $x \in A \cap B$ اگر و تنها اگر $x \in A \wedge x \in B$.

$$\{x \in A \mid x \in B\}, \text{ یا } A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

اگر \emptyset آنگاه دو مجموعه A و B را مجزا گویند.

به عنوان مثال، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ باشد، آنگاه $A \cap B = \{3, 4\}$ و $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ نمایانگر مجموعه اعداد موهومی باشد، آنگاه مجموعه‌های \mathbb{N} و \mathbb{Z} مجزا هستند.

مثال ۳. مجموعه‌های \mathbb{I} ، \mathbb{N} ، \mathbb{Z} ، ... را که در بخش قبل تعریف کردیم، در نظر می‌گیریم.

- . $N \cap I = \{1\}$ و $I \cap Z = \{0, 1\}$ (الف)
 . $Z \cap Q = Z$ و $Z \cup Q = Q$ (ب)
 . $I \cap I = I$ و $I \cup I = I$ (ج)

قضية ۴. گیریم X یک مجموعه و A, B, C زیرمجموعه‌هایی از X هستند. آنگاه داریم:
 (الف) یک‌ها

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap X = A$$

(ب) قانونهای خودتوانی

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

(ج) قانونهای جابهجایی

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

(د) قانونهای شرکتپذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(ه) قانونهای پخشپذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

برهان. برهان قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) را بهخواندن و اگذار می‌کنیم.

(د) بنابر تعریف ۳،

$$x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \vee (x \in B \cup C)$$

و

$$x \in B \cup C \iff x \in B \vee x \in C$$

پس

$$x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

بنابر قانون شرکتپذیری در ترکیب فصلی، (۱) با

هم ارز است. بنابر تعریف ۳، گسزاره اخیر با
هم ارز است، و از این رو $x \in (A \cup B) \cup C$ داریم

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

پس بنابر تعریف ۱، $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

برهان بالا را می توان به صورتی روشن در قالب منظم از مرحله های منطقی اساسی خلاصه کرد و برای سهوالت ارجاع، دلیل درستی هر مرحله را در سمت چپ آن نوشت.

تعريف \cup	$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cup C)$
تعريف \cup	$\Leftrightarrow (x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)]$
شرکت‌بندی \vee	$\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \vee (x \in C)$
تعريف \cup	$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C)$
تعريف \cup	$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

از این رو، بنابر تعریف ۱، ثابت کردیم که $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
دانشجویان باید سعی کنند ارزش این نوع برهان دقیق منظم از راه منطق را دریابند.
برهان $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ را به خواننده واگذار می کنیم.
(۵) در این قسمت نیز فقط قسمت اول حکم (۵) را ثابت و قسمت دیگر را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.

تعريف \cap	$x \in [A \cap (B \cap C)] \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B \cap C)]$
تعريف \cap	$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \in C)]$
قانون پخش‌بندی \wedge	$\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]$
منطق (فصل اول)	
تعريف \cap	$\Leftrightarrow [(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)]$
تعريف \cap	$\Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

از این رو، بنابر تعریف ۱، $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

تمرین ۴۰۲

۱. ثابت کنید که $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

۲. ثابت کنید $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

۳. قسمت های (الف)، (ب) و (ج) قضیه ۴ را ثابت کنید.

۴. قسمت دوم قضیه ۴ (د) را ثابت کنید.

۵. قسمت دوم قضیه ۴ (۵) را ثابت کنید.
۶. ثابت کنید که $(A \cup B) \subseteq C$ و $B \subseteq C$ ، $A \subseteq C$ نتیجه می‌شود.
- (الف) از C و $A \subseteq C$ ، $A \subseteq (B \cap C)$ نتیجه می‌شود.
- [راهنمایی: می‌توانید از قضیه ۵ فصل ۱ استفاده کنید.]
۷. ثابت کنید $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$
۸. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
۹. ثابت کنید $A = B \iff A \cup B = A \cap B$
۱۰. ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آنگاه برای هر مجموعه C و $A \cup C \subseteq B \cup C$ ، $A \cap C \subseteq B \cap C$
۱۱. ثابت کنید که اگر $A \subseteq C \cup D$ و $A \subseteq C$ آنگاه $B \subseteq D$ و $A \subseteq C$
۱۲. درستی یا نادرستی دو عبارت زیر را تحقیق کنید
- (الف) اگر $B = C$ آنگاه $A \cup B = A \cup C$
- (ب) اگر $B = C$ آنگاه $A \cap B = A \cap C$
۱۳. ثابت کنید که برای مجموعه‌های A, B_1, B_2, \dots, B_n ، داریم
- (الف)
- $$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$
۱۴. ثابت کنید
- (الف) اگر برای $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \subseteq B$ ، $A_i \subseteq B$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ آنگاه $A \subseteq B$
- (ب) اگر برای $A \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ ، $A \subseteq B_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ آنگاه $A \subseteq B$

۴. مجموعه‌های متمم

در نظریه مجموعه‌ها، عمل متغیری، مشابه عمل تفکیک در حساب است.

تعریف ۵. اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم B نسبت به A مجموعه $A - B$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

در این تعریف، $B \subseteq A$ فرض نشده است.

مثال ۴. گیریم

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{و} \quad B = \{c, d, e, f\}$$

مجموعه‌های $A - B$ و $A - (A \cap B)$ را پیدا کنید.

حل:

$$A - B = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$$

و

$$A - (A \cap B) = \{a, b, c, d\} - \{c, d\} = \{a, b\}$$

اگرچه مجموعه جهانی، یعنی مجموعه تمام مجموعه‌ها، به مفهوم مطلق آن وجود ندارد (به پارادوکس راسل در بخش ۷ نگاه کنید)، اما می‌توان فرض کرد که تمام مجموعه‌هایی که از این به بعد در این کتاب آورده می‌شوند، ذیر مجموعه‌هایی اذیک مجموعه ثابت U هستند که می‌توان آن را (موقتاً) به عنوان یک مجموعه جهانی، به معنای محدود آن، در نظر گرفته برای اراده قواعد اساسی مربوط به متغیری به ساده ترین صورت ممکن، تمام متممها نسبت به این مجموعه‌ی U محسوب می‌شوند، مگر اینکه خلاف آن قید شده باشد. در این حالت $U - A$ را با A' نمایش می‌دهیم.

$$\text{مثال ۵. نشان دهید که } A - B = A \cap B'$$

حل:

$$\begin{aligned}
 & \text{تعريف } \cap, \text{ تعريف }' \\
 & x \in A \cap B' \equiv (x \in A) \wedge (x \in U - B) \\
 & \text{تعريف ۵} \qquad \qquad \qquad \equiv (x \in A) \wedge [(x \in U) \wedge (x \notin B)] \\
 & \text{شرکتذیری} \qquad \qquad \qquad \equiv [(x \in A) \wedge (x \in U)] \wedge (x \notin B) \\
 & \text{تعريف } \cap \qquad \qquad \qquad \equiv (x \in A \cap U) \wedge (x \notin B) \\
 & A \cap U = A \qquad \qquad \qquad \equiv (x \in A) \wedge (x \notin B) \\
 & \text{تعريف ۵} \qquad \qquad \qquad \equiv x \in (A - B)
 \end{aligned}$$

$$\text{پس بنا بر تعريف ۱، } A \cap B' = A - B$$

قضية ۵. گیریم A و B دو مجموعه هستند. آنگاه

$$(الف) (A')' = A$$

$$(ب) U' = \emptyset \text{ و } \emptyset' = U$$

$$(ج) A \cup A' = U \text{ و } A \cap A' = \emptyset$$

$$(د) A' \subseteq A \text{ و تنها اگر } A \subseteq B$$

برهان. قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) به آسانی از تعريفها بدست می‌آیند و آوردن برهانهای آنها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم و برهان قسمت (د) را

ارائه می‌دهیم:

تعريف \subseteq	$A \subseteq B \equiv [(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$
قانون عکس نقیض	$\equiv [(x \notin B) \rightarrow (x \notin A)]'$
تعريف $'$	$\equiv [(x \in B') \rightarrow (x \in A')]$
تعريف \subseteq	$\equiv (B' \subseteq A')$
پس ثابت کردیم که $(A \subseteq B) \equiv (B' \subseteq A')$	

در برهان بالا نیز تعدادها و قوانین منطق (فصل ۱) را به کار بردیم. با این روش توانستیم به طور دقیق و مرتب هر مرحله برهان را عرضه کنیم و دلیلها را درست چه آن بیاوریم. به خواننده توصیه می‌کنیم هر جا امکان دارد برای برهانها از فصل ۱ به طور کامل استفاده کند.

مفیدترین ویژگی متممهای، قضیه دمورگن است که در زیر می‌آید. شایسته است خواننده این قضیه را با قانون دمورگن فصل ۱ مقایسه کند.

قضیه ۶. (قضیه دمورگن). اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، آنگاه

$$(الف) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(ب) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

برهان. (الف):

تعريف $'$	$x \in (A \cup B)' \equiv \sim [x \in (A \cup B)]$
تعريف \cup	$\equiv \sim [(x \in A) \vee (x \in B)]$
دمورگن در منطق	$\equiv \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B)$
تعريف $'$	$\equiv (x \in A') \wedge (x \in B')$
تعريف \cap	$\equiv x \in (A' \cap B')$
پس با بر تعریف ۱، $(A \cup B)' = A' \cap B'$.	
اثبات (ب) به خواننده واگذار می‌شود.	

مثال ۶. سه مجموعه دلخواه A ، B ، و C مفروض است. تعیین کنید آیا مجموعه $A \cap (B - C)$ با مجموعه $A \cap B - (A \cap C)$ مساوی است.

۱. یادآوری می‌شود که نقیض $B \subseteq x$ ، یعنی $(x \in B) \sim$ ، با $x \notin B$ نمایش داده می‌شود.

حل:

$$\begin{aligned}
 & \text{مثال ۵} \quad (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' \\
 & \text{قضیه دمورگن (قضیه ۶)} \quad = (A \cap B) \cap (A' \cup C') \\
 & \text{پخشندیری} \quad = (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') \\
 & \text{جایه جایی} \quad = (A \cap A' \cap B) \cup (A \cap B \cap C') \\
 & \text{ قضیه ۵ (ج): } A \cap A' = \emptyset \quad = \emptyset \cup [A \cap (B \cap C')] \\
 & \text{قضیه ۴ (الف)، مثال ۵} \quad = A \cap (B - C) \\
 & \therefore A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) \quad \text{بنابراین ثابت کردیم که (ج) معتبر است.}
 \end{aligned}$$

تمرین ۴۰۲

۱. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید که $A - B = A - (B \cap A)$.
۲. قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) قضیه ۵ را ثابت کنید.
۳. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $B \subseteq A'$ اگر و تنها اگر $\emptyset = A \cap B$.
۴. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $A \cap B = \emptyset$ اگر و تنها اگر $A \cap B' = A$.
۵. ثابت کنید که برای هر دو مجموعه A و B ، $A - B' = B - A$.
۶. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید $(A - B) \cup B = A$ اگر و تنها اگر $B \subseteq A$.
۷. قضیه ۶ (ب) را ثابت کنید.
۸. گیریم A ، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$ (الف).
۹. گیریم A_1, A_2, \dots, A_n و C مجموعه هستند. ثابت کنید $(A_1 - C) \cup (A_2 - C) \cup \dots \cup (A_n - C) = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) - C$.
۱۰. گیریم A و B دو مجموعه هستند. ثابت کنید $(B_1 - C) \cap (B_2 - C) \cap \dots \cap (B_n - C) = (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) - C$.
۱۱. گیریم A و B دو مجموعه هستند. ثابت کنید $A - B = A \cup (B - A)$. (این نشان می‌دهد چگونه $A \cup B$ را با جمعانع دو مجموعه مجزا بنویسیم.)
۱۲. ثابت کنید که $(A' \cup B')' = A \cap B$ و $(A' \cap B')' = A \cup B$.
۱۳. مجموعه‌های A و B چه شرط‌هایی باید داشته باشند تا $A - B = B - A$ برقرار باشد؟

۱۴. گیریم A و B سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)-C = (A-C)-(B-C)$$

۱۵. گیریم A و B سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B)-C = A-(B \cup C)$$

۱۶. گیریم A و B دو مجموعه هستند. ثابت کنید $A \cap B' = \emptyset = A' \cap B$ اگر و تنها $A = B$

۱۷. گیریم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه X هستند. درستی یا نادرستی رابطه زیر را تحقیق کنید

$$(X-A) \cap (X-B) = X - (A \cap B)$$

۱۸. گیریم A ، B و C سه مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$$

$$(b) (A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$$

این نتایج را به گزاره‌هایی که مربوط به n مجموعه A_1, A_2, \dots, A_n هستند تعیین دهید.

۱۹. دومجموعه اختیاری A و B مفروض‌اند، درستی یا نادرستی حکمهای زیر را تعیین کنید.

$$(الف) \varphi(A) \cap \varphi(B) = \varphi(A \cap B)$$

$$(ب) \varphi(A) \cup \varphi(B) = \varphi(A \cup B)$$

۲۰. ثابت کنید که اگر $A = C - B$ ، $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = C$ ، $B \subseteq C$ ، $A \subseteq C$ باشند. آنگاه

۲۱. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

۲۲. فرض کنید X مجموعه توانی یک مجموعه مفروض و ناتهی U باشد. در X عمل دوتایی \oplus را که تفاضل مقادن نامیده می‌شود، چنین تعریف می‌کنیم

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) \quad A, B \in X$$

ثابت کنید برای A, B و C در X

$$(الف) A \oplus B \in X$$

$$(ب) A \oplus B = B \oplus A$$

$$(ج) A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

$$(د) A \oplus \emptyset = A$$

$$A \oplus A = \emptyset \quad (\text{۱})$$

۲۳. با فرضهای مسئله ۲۲ی بالا، ثابت کنید

$$A \oplus A' = U \quad (\text{الف})$$

$$C = \emptyset \text{ اگر و تنها اگر } A \oplus C = A \quad (\text{ب})$$

$$C = A \text{ اگر و تنها اگر } A \oplus C = \emptyset \quad (\text{ج})$$

$$A = B \text{ آنگاه } A \oplus C = B \oplus C \quad (\text{د})$$

۲۴. با فرضهای مسئله ۲۲ی بالا، ثابت کنید

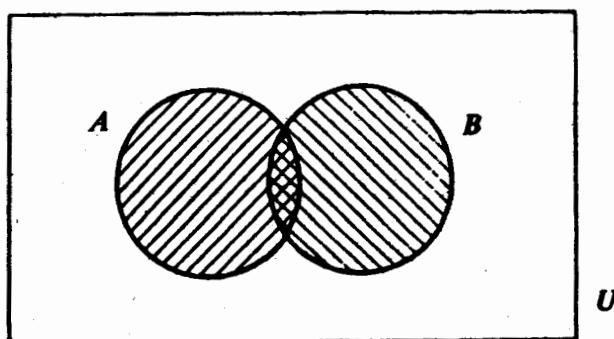
$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

تذکر: دستگاهی مانند (\oplus, X) که از یک مجموعه و یک عمل دوتایی تشکیل شده است و در شرطهای (الف) تا (ه)ی مسئله ۲۲ صدق می کند یک گرده (جبری) نامیده می شود.

۵. نمودار ون*

برای اینکه اعمال روی مجموعه و نتایج آنها را به چشم بینیم، نمودارهایی را که به نمودارهای ون معروف هستند، معرفی می کیم. مجموعه فرضی و نسبی جهانی U را با یک مستطیل و زیرمجموعه های U را با دایره هایی در داخل این مستطیل نشان می دهیم. مثلاً، در شکل ۱ دو مجموعه A و B را با دایره های تیره نشان داده ایم. قسمت تیره تر، مجموعه اشتراک $A \cap B$ و تمام سطح تیره اجتماع $A \cup B$ است.

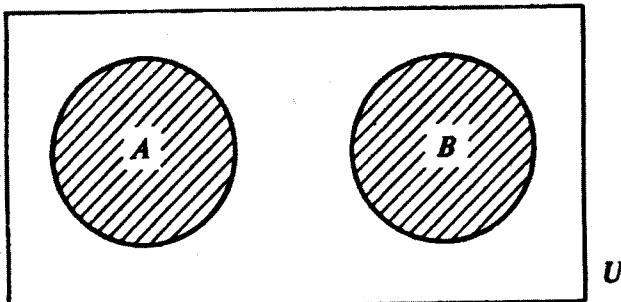
شکل ۲ نشان می دهد که دو مجموعه A و B مجزا هستند. سطح تیره در شکل ۳ متمم مجموعه A یعنی A' را نمایان می سازد. در شکل ۴ مجموعه $B - A$ ، متمم B نسبت به A ، با قسمت تیره شکل مشخص شده است.



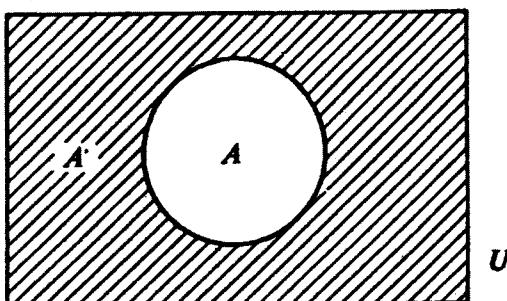
شکل ۱

* Venn diagram

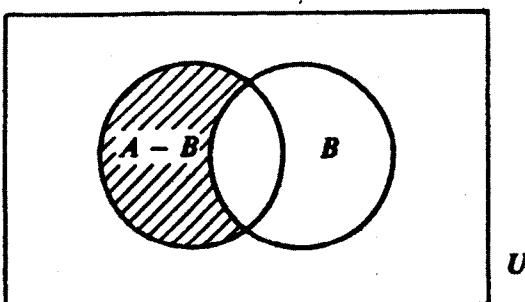
نمودار ون ۵۳



شکل ۲



شکل ۳

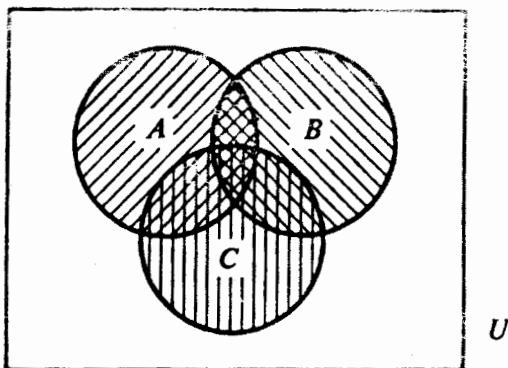


شکل ۴

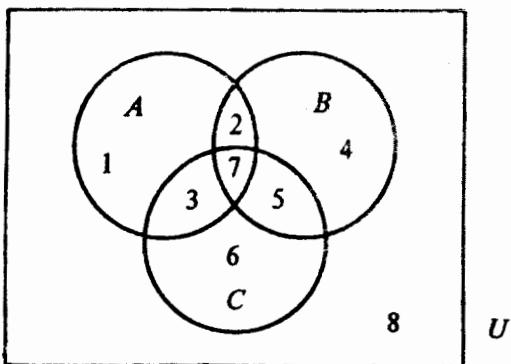
شکل ۵ نمونه‌ای است از نمودار ون برای سه مجموعه A ، B و C . این سه مجموعه، مجموعه جهانی U را بهشت قسمت که در شکل ۶ مشخص شده‌اند تقسیم می‌کنند، با دیاگرام بالا می‌توانیم مثلاً درستی قانون پخش‌ذییری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

را به صورت ذیر تسویه کنیم: در شکل ۶، مجموعه $A \cap (B \cup C)$ از سطوح ۲، ۳ و ۷



شکل ۵



شکل

تشکیل شده است. از طرف دیگر، $(A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap (B \cup C))$ قابل قبول به نظر است. بنابراین، تساوی $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ می‌آید. البته در ریاضیات این توجیه و نظایر آن را نمی‌توان به عنوان یک برهان قبول کرده

تمرین ۵.۲

۱. یک نمودار ون برای $A \subset B$ رسم کنید.
۲. برای $A' \cap B'$ ، $A' \cap B$ و $A \cap B'$ نمودارهای ون رسم کنید.
۳. برای $A' \cup B'$ ، $A' \cup B$ و $A \cup B'$ نمودارهای ون رسم کنید.
۴. یک نمودار ون برای $A \oplus B$ رسم کنید.

در مسائل ۵ تا ۱۳، نمودارهای ون رسم کرده و هر یک از رابطه‌ها را توجیه کنید.

$$\cdot A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad .\text{۵}$$

$$\cdot A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad .\text{۶}$$

$$\cdot A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad .\text{۷}$$

$$\cdot (A \cup B)' = A' \cap B' \quad .\text{۸}$$

$$\cdot (A \cap B)' = A' \cup B' \quad .\text{۹}$$

$$\cdot A \cup (B - A) = A \cup B \quad A \cap (B - A) = \emptyset \quad .\text{۱۰}$$

$$\cdot (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \quad .\text{۱۱}$$

[راهنمایی: برای ۱۲ تا ۱۴، از شکل ۶ استفاده کنید.]

$$\cdot A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C) \quad .\text{۱۳}$$

در مسائل ۱۴ تا ۲۵ برای اثبات نادرستی رابطه‌های زیر از نمودار ون استفاده کنید.

$$\cdot A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C) \quad .\text{۱۴}$$

۱۵. اگر $A \not\subseteq B$ و $x \in A$ آنگاه $x \notin B$ [مسئله ۸]، تمرین ۱۰۲.

۱۶. اگر $A \not\subseteq C$ و $A \not\subseteq B$ آنگاه $A \not\subseteq C$ [مسئله ۸]، تمرین ۱۰۲.

۱۷. اگر $A \not\subseteq C$ و $A \not\subseteq B$ آنگاه $A \not\subseteq C$ [مسئله ۸]، تمرین ۱۰۲.

۱۸. (الف) اگر $B = C$ آنگاه $A \cup B = A \cup C$ [مسئله ۱۲، تمرین ۳۰۲].

(ب) اگر $B = C$ آنگاه $A \cap B = A \cap C$

۱۹. اگر A و B زیرمجموعه‌های X باشند، آنگاه

$$(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cap B)$$

[مسئله ۱۷، تمرین ۴۰۲]

۲۰. اگر A و B زیرمجموعه‌های X باشند، آنگاه

$$(X - A) \cup (X - B) = X - (A \cup B)$$

۶. خانواده‌های مجموعه‌های اندیسدار

یادآوری می‌شود که مجموعه دسته‌ای از عناصرهای متمایز است. به عبارتی ساده‌ولی نه چندان دقیق، یک خانواده دسته‌ای از اشیاء است که ممکن است از یکدیگر متمایز نباشند. هر یک از این اشیاء عضو خانواده نامیده می‌شود. مثلاً، $\{a, a, a, a\}$ یک خانواده با سه عضو است، اما همین خانواده $\{a, a, a\}$ اگر به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته شود، مجموعه تک عنصری $\{a\}$ است که تنها یک عنصر a دارد.

فرض کنید Γ یک مجموعه است و با هر عنصر Γ مرتبط γ یک مجموعه A_γ متناظر است. خانواده تمام مجموعه‌های A_γ را خانواده مجموعه‌های اندیسدار گویند.

همچنین می‌گویند خانواده مجموعه‌ها با مجموعه Γ اندیسدار شده است و آن را با نماد زیر نشان می‌دهند

$$\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

مثلًا خانواده مجموعه‌های $\dots, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \dots$ را می‌توان خانواده مجموعه‌های اندیسداری در نظر گرفت که با مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} اندیسدار شده‌اند و در آن به‌ازای $\{n, 2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. این خانواده مجموعه‌ها را می‌توان با نماد $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ نشان داد.

یک خانواده دلخواه مجموعه‌ها ممکن است اندیسدار نباشد، اما در بسیاری از حالتها به‌آسانی می‌توان یک مجموعه Γ برای اندیسدار کردن خانواده مجموعه‌های داده شده پیدا کرد.

مثال ۷. خانواده \mathcal{G} مشکل از مجموعه‌های $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ را اندیسدار کنید.

حل: چون این خانواده شش عضو دارد که دو عضو آن مجموعه \mathbb{R} است، Γ را مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم $A_1 = \mathbb{Z}, A_2 = \mathbb{N}, A_3 = \emptyset, A_4 = \mathbb{Q}, A_5 = \mathbb{R}, A_6 = \mathbb{R}$. اکنون این خانواده‌ای است از مجموعه‌های اندیسدار.

تمام نمادهایی را که برای مجموعه‌ها به کار برده‌ایم، برای خانواده‌ها نیز به کار می‌بریم. به عنوان مثال، $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$ و $\mathcal{G}_+ \subseteq \mathcal{G}$ به‌این معنی است که هر عضوی از خانواده \mathcal{G} است و \mathcal{G}_+ عضوی از \mathcal{G} نیست. همچنین می‌توانیم بنویسیم $\{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}$. اکنون مفاهیم اجتماع و اشتراک (\cap تعریفهای ۳ و ۴) را به خانواده مجموعه‌ها تعیین می‌دهیم.

تعریف ۶. گیریم \mathcal{G} خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد. اجتماع مجموعه‌های خانواده \mathcal{G} ، مجموعه تمام عناصرهایی است که به‌یکی از مجموعه‌های خانواده \mathcal{G} ، مانند A_i ، متعلق هستند. این اجتماع را با نماد $\bigcup_{A \in \mathcal{G}}$ یا $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A = \{x \in U \mid x \in A, A \in \mathcal{G}\}$$

اگر خانواده \mathcal{G} با Γ اندیسگذاری شده باشد، می‌توان نماد دیگری را که در زیر می‌آید به کار برد.

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid x \in A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$$

اگر Γ ، مجموعه اندیس، متنه‌ی باشد، یعنی به‌ازای یک عدد طبیعی n ، $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ ، آنگاه اغلب به‌جای $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ از نمادهایی مانند

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{یا} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

که بهذهن نزدیکتر هستند، استفاده می‌شود.

مثال ۸. اجتماع خانواده مجموعه‌های زیر را پیدا کنید

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \dots, \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$$

حل. این خانواده مجموعه‌ها را می‌توان با $\Gamma = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ اندیسگذاری کرد، در این صورت به ازای هر $i \in \Gamma$ ، $i, i+1, \dots, 2i-1 \in A_i = \{i, i+1, \dots, 2i-1\}$. مسئله برمی‌گردد به یافتن مجموعه $\{1, 2, \dots, 2n-1\} = \bigcup_{i=1}^n A_i$. توجه کنید که هر عدد صحیح بین ۱ تا $2n-1$ به بعضی از این A_i ‌ها این خانواده متعلق است، و هیچ عنصر دیگری به هیچ یک از این A_i ‌ها متعلق نیست. پس

$$\bigcup_{i=1}^n \{i, i+1, \dots, 2i-1\} = \{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$$

تعریف ۷. گیریم Γ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های \mathcal{F} . اشتراک مجموعه‌های Γ ، مجموعه تمام عضرهایی است که به تمام مجموعه‌های \mathcal{F} تعلق دارند. اشتراک را با نماد $\bigcap_{A \in \Gamma} A$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$\text{به ازای هر } \Gamma \quad \bigcap_{A \in \Gamma} A = \{x \in U \mid x \in A, A \in \mathcal{F}\}$$

گزاره «به ازای هر $x \in A, A \in \mathcal{F}$ » را که در اینجا آمده است، می‌توان به صورت « $x \in A \rightarrow A \in \mathcal{F}$ » نیز بیان کرد. طرزیابان اخیر، همان گونه که در قضیه ۷ خواهیم دید، برای اثبات قضایا مزیت دارد.
اگر خانواده Γ با Γ اندیسگذاری شده باشد، می‌توان نماد دیگری را که در زیر می‌آید به کار برد.

$$\text{به ازای هر } \Gamma \quad \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid x \in A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$$

اگر Γ ، مجموعه اندیس، متناهی باشد، یعنی به ازای یک عدد صحیح مثبت n ، $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ ، آنگاه همانند حالت اجتماع به جای $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ ، می‌نویسیم:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

گیریم a و b دو عدد حقیقی هستند. منظور از فاصله بین (a, b) ، مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ است. پس اگر $a \geq b$ آنگاه $a > b \Rightarrow \emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

مثال ۹. اشتراک خانواده فاصله‌های باز زیر را پیدا کنید

$$(0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \dots$$

حل: باید مجموعه $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n)$ را بیایم. آشکارا دیده می‌شود که خانواده داده شده یک دنباله از فاصله‌های «کاهشی» $(0, 1/n)$ است که در آن فاصله $(0, 1/n)$ ، وقتی که n بزرگ‌گردد، به مجموعه تهی \emptyset «می‌گراید». بدین جهت می‌توانیم حدس بزنیم که اشتراک $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n)$ باید مجموعه تهی باشد. حال ثابت می‌کنیم که این حدس درست است. برخلاف حکم، فرض کنیم که عدد حقیقی $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n)$ وجود دارد. آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ باید $n > a$ باشد. اما می‌دانیم که برای هر عدد ثابت a همیشه یک $n \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ و وجود دارد که $a < n$. این تناقض نشان می‌دهد که $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1/n) = \emptyset$.

قضیه ۷. گیریم $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده تهی مجموعه‌ها است. یعنی $\emptyset = \Gamma$. آنگاه

$$\bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma = \emptyset \quad (\text{الف})$$

$$\bigcap_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma = U \quad (\text{ب})$$

برهان. (الف) برای اثبات $\bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma = \emptyset$ ، همارا زآن «برای هر x (در U)، $x \notin \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma$ » را ثابت می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{نماد } \notin & \qquad x \notin \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \equiv \sim(x \in \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma) \\ \text{تعريف } \sim & \qquad \qquad \qquad \equiv \sim(x \in A_\gamma, \quad \gamma \in \emptyset) \\ \text{نقیض سازی سود (فصل ۱)} & \qquad \qquad \qquad \equiv (x \notin A_\gamma, \quad \gamma \in \emptyset) \\ & \qquad \qquad \qquad \equiv (\gamma \in \emptyset \rightarrow x \notin A_\gamma) \end{aligned}$$

چون $\emptyset \in \gamma$ یک تناقض است، بنابر قضیه ۷ (ج) فصل ۱، گزاره اخیر برای هر $U \in x$ درست است. پس برهان قسمت (الف) کامل است.

(ب) ثابت می‌کنیم که برای هر x در U , $x \in \bigcap_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma$. توجه کنید که

$$\begin{aligned} \text{تعريف } \forall & \qquad x \in \bigcap_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \equiv (x \in A_\gamma, \quad \forall \gamma \in \emptyset) \\ & \qquad \qquad \qquad \equiv (\gamma \in \emptyset \rightarrow x \in A_\gamma) \end{aligned}$$

چنانکه در برهان قسمت (الف) شرح دادیم، گزاره اخیر برای هر $U \in x$ راست است. پس اثبات کامل است.

خیلی از قضایای مربوط به اعمال روی تعدادی متناهی مجموعه را می‌توان به قضایایی که به اعمال روی یک خانواده دلخواه مجموعه‌های مربوط می‌شوند تعمیم داد. مثلاً، قضیه زیر تعمیم قضیه دمورگن است. توصیه می‌شود دانشجو این قضیه را با قضیه ع مقایسه کند.

قضیه ۸. (تعمیم قضیه دمورگن). گیریم $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های است. آنگاه

خانواده‌های مجموعه‌های اندیسدار ۵۹

$$\begin{aligned} (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma && \text{(الف)} \\ (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma && \text{(ب)} \end{aligned}$$

برهان. ما فقط قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم و قسمت (ب) را به دانشجو وا می‌گذاریم.

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)' &\equiv \sim \left(x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right) \\ \text{تعريف } ۶ & \qquad \qquad \qquad \equiv \sim (\exists \gamma \in \Gamma) (x \in A_\gamma) \\ \text{تفیض‌سازی سور (فصل ۱)} & \qquad \qquad \qquad \equiv (\forall \gamma \in \Gamma) (x \notin A_\gamma) \\ \text{تعريف } ۷ & \qquad \qquad \qquad \equiv (\forall \gamma \in \Gamma) (x \in A'_\gamma) \\ \text{تعريف } ۷ & \qquad \qquad \qquad \equiv x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma \\ \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)' &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma \end{aligned}$$

پس بنا بر تعریف ۱، قضیه زیر یک تعمیم قضیه ۴ است.

قضیه ۴. (تعمیم قانونهای پخش‌پذیری). گیریم A یک مجموعه و $\mathcal{G} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده دلخواه مجموعه‌های است. آنگاه

$$\begin{aligned} A \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma) && \text{(الف)} \\ A \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup B_\gamma) && \text{(ب)} \end{aligned}$$

برهان. (الف) عنصر x در مجموعه $A \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma)$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ ، که مطابق تعریف ۶، هم ارز است با $x \in A$ و $x \in B_\gamma$ و $\gamma \in \Gamma$ و به ازای یک

بنابر تعریف ۴، شرط اخیر را می‌توان با عبارت

$$x \in A \cap B_\gamma \quad \gamma \in \Gamma \quad \text{به ازای یک}$$

بیان کرد، و این بنابر تعریف ۶ بمعنای $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$ است. پس، بنابر تعریف ۱، $A \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$.
برهان قسمت (ب) به عنوان تمرین به خوانده واگذار می‌شود.

تمرین ۶.۲

۱. گیریم $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{b, c, d\}$, $A_3 = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A_4 = \{a, b\}$. مجموعه‌های زیر را بیایید.

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i \quad \text{(الف)}$$

(ب) $\bigcap_{i=1}^n A_i$

۲. برای هر دو عدد حقیقی a و b ، منظور از فاصله بین $[a, b]$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ است. اگر $b > a$ ، آنگاه $[a, b] = \emptyset$. مجموعه‌های زیر را باید.

(الف) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1/n]$ (ب) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1/n]$ (ج) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1/n]$

۳. گیریم A_k فاصله باز $(-1/k, 1/k)$ برای $k \in \mathbb{N}$ است. مجموعه‌های زیر را باید:

(الف) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ (ب) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$

۴. برای هر دو عدد حقیقی a و b ، مجموعه‌های $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ و $\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ را فاصله‌های نیمپاز یا فاصله‌های نیمپسته نامیده آنها را به ترتیب با $[a, b)$ و $(a, b]$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌های زیر را باید.

(الف) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (k, k+1)$ (ب) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (-k, -k+1)$ (ج) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k, k+1)$ (د) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k)$ ۵. قضیه ۸ (ب) را ثابت کنید: $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma$ ۶. قضیه ۹ (ب) را ثابت کنید: $A \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup B_\gamma)$

۷. مجموعه زیر را به صورت اجتماع چند اشتراک بنویسید

(الف) $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

و همچنین مجموعه زیر را به صورت اشتراک چند اجتماع بنویسید.

(ب) $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

[راهنمایی: قضیه ۹ را چندبار به کار ببرید.]

۸. مجموعه‌های زیر را به صورت اجتماع اشتراکها و اشتراک اجتماعها بسط دهید [مسئله ۷ را بینید].

(الف) $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^m B_j)$ (ب) $(\bigcap_{i=1}^n A_i) \cup (\bigcap_{j=1}^m B_j)$

۹. گیریم $\{B_\delta | \delta \in \Delta\}$ و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ دو خانواده مجموعه‌ها هستند. مجموعه‌های زیر را به صورت اجتماع اشتراکها و اشتراک اجتماعها بسط دهید. [مسائل ۷ و ۸ را بینید]

(الف) $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \cap (\bigcup_{\delta \in \Delta} B_\delta)$ (ب) $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \cup (\bigcap_{\delta \in \Delta} B_\delta)$

۷. پارادوکس راسل

در این مرحله ممکن است بسیاری از ما فکر کنیم که حداقل به طور شهودی، معنی مجموعه را می‌دانیم. اکثر آنها بی که برای نخستین بار درس نظریه مجموعه‌ها را می‌گذرانند، ممکن است توجه نکنند که در نظر گرفتن «مجموعه تمام مجموعه‌ها» یا، «مجموعه جهانی» به معنای مطلق آن چه اشکالی دارد. در واقع مدت زمانی (حداقل از سال ۱۸۹۵ که گثورگ کانتور برای نخستین بار نظریه مجموعه‌ها را به وجود آورد، تا سال ۱۹۰۲ که پارادوکس راسل منتشر شد)، وجود مجموعه جهانی مطلق، فرضی مسلم بود. برتراند راسل (۱۸۷۵–۱۸۲۲) فیلسوف مشهور انگلیسی بود که در سال ۱۹۰۲ با اعلام این مطلب که قبول وجود مجموعه تمام مجموعه‌ها به تناقض منجر می‌شود، جماعت ریاضیدانان را به لرزه درآورد. این پارادوکس مشهور راسل است. ما این پارادوکس را به صورت دو لم ظاهرآً متناقض بیان می‌کنیم و از آن یک قضیه نتیجه می‌گیریم.

لم ۱. فرض کنید که \mathcal{U} مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود دارد. فرض کنید $S \notin \mathcal{U}$. آنگاه $R \notin \mathcal{U}$.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که $R \in \mathcal{U}$. آنگاه از تعریف مجموعه R نتیجه می‌شود $R \notin \mathcal{U}$ ، که با فرض $R \in \mathcal{U}$ متناقض است. با این تناقض $R \notin \mathcal{U}$ ثابت می‌شود.

لم ۲. فرض کنید که \mathcal{U} مجموعه تمام مجموعه‌ها، وجود دارد. فرض کنید $S \notin \mathcal{U}$. آنگاه $R \in \mathcal{U}$.

۱. برتراند راسل (Bertrand Russell) در ۱۸ مه سال ۱۸۷۲ در شهر ترلک (Trelleck) واقع در ولز (Wales) متولد شد. چهار سال نداشت که والدین خود را از دست داد. پیش از ورود به تربیتی کالج دانشگاه کمبریج در سال ۱۸۹۰، خجالتی و آرام بود. پس از سه سال مطالعه ریاضیات به این نتیجه رسید که آنچه با او آموخته‌اند پر از اشتباه بوده است. کتابهای ریاضی خود را فروخت و به فلسفه گرایی. در کتاب تاریخی اصول (Principia Mathematica) که مشتمل بر سه جلد است و با همکاری وایتهد (Alfred North Whitehead) تألیف کرده است، کوشش نمود تئوری مجموعه‌ها را با اجتناب از پارادوکسها بازسازی کرد. در ۱۹۱۸ چنین نوشت، «می‌خواهم در کنار جهان پایstem و بدور ای تاریکی خیره شوم و کمی بیش از آنچه دیگران دیده‌اند، بیینم، می‌خواهم خردی اندک به جهان آدمیان بازگردانم.» مسلم است که بیش از «خردی اندک» به جهان عرضه کرد. در همان سال به علت اظهار نظری نامساعد در باره ارتق آمریکا، به زندان افتاد. در ۱۹۵۰ به دریافت فرمان لیاقت از پادشاه انگلستان و جایزه نوبل در رشته ادبیات نایل شد. در سالهای بعد تظاهرات زیادی بر علیه جنگ هسته‌ای برداه انداخت.

۲. بنابر اصل تصریح، R یک مجموعه است و اغلب «مجموعه راسل» نامیده می‌شود.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که $R \notin R$. آنگاه چون $R \in \mathcal{U}$ ، از تعریف R نتیجه می‌شود $R \in R$. این یک تناقض است. پس $R \in R$

قضیه ۱۰ مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

برهان. بنابراین ۱ و ۲، مجموعه تمام مجموعه‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد. زیرا، وجود این مجموعه به تناقض $R \notin R$ و $R \in R$ منجر می‌شود.

هالموس این قضیه را چنین بیان می‌کند: «هیچ چیز شامل همه‌چیز نیست.»^۱

۸. یک توضیح تاریخی

عقیده عموم براین است که ریاضیدان نامی گنورگ کانتور (Cantor) تئوری نوبن مجموعه‌ها را در ۱۸۹۵ به وجود آورد. او به نگام مطالعه سریهای متناهی متوجه شد که به وجود چنین نظریه‌ای نیاز است. کانتور نوشت: «منظور از مجموعه هر دسته‌ای از اشیاء متمایز در شعور یا فکر ماست به صورت يك كل» این تعریف مانع نمی‌شود کسی مجموعه تمام مجموعه‌ها را در نظر بگیرد همچنانکه برتراند راسل این کار را کرد. مشکل واقعی در تعریف کانتور برای مجموعه، لغت «دسته» است. دسته چیست؟ البته می‌توانیم به یک فرهنگ لغات نگاه کنیم و به چیزی شبیه به این تعریفها دست یابیم:

«دسته: گروهی از اشیاء گردآوری شده»

«گروه: يك گردایه یا دسته»

«گردایه: يك دسته»

با این تعریفها دردی دوا نمی‌شود. هنگامی که یک ریاضیدان تعریفی ارائه می‌دهد منظورش تنها آوردن یک مترادف مانند دسته به جای مجموعه و یا تعریف دوری که در فرهنگ لغات می‌باشیم، نیست. ظاهر آکانتور واقع نبود که واژه مجموعه واقعاً تعریف ناپذیر است. برای اجتناب از هرمشکلی نظری پارادوکس راسل در نظریه مجموعه‌ها، باید واژه‌های «مجموعه» و «عنصر» را به عنوان واژه‌های تعریف نشده، یا اولیه، پیذیریم و چند اصل موضوع، از جمله اصل موضوع تصریح و اصل موضوع مجموعه‌های توانی را که در بخش ۱۲ آمده‌اند، راهنمای این واژه‌های اصلی قرار دهیم. اصول موضوع دیگری را نیز غالباً در نظریه مجموعه‌ها می‌آورند، مانند « $A = B$ » اگر و تنها اگر عناصر A همان عناصر B

1. Paul. R. Halmos, *Naive Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1960, p. 6.

2. گنورگ کانتور (Georg Cantor) در سال ۱۸۴۵ در سن پطرزبورگ، روسیه، به دنیا آمد و در سال ۱۸۵۶ به آلمان رفت، ریاضیات را در دانشگاه برلین (۱۸۶۹–۱۸۶۳) فراگرفت و در دانشگاه هاله به تدریس پرداخت (۱۸۶۹–۱۸۶۹). یکی از مباحثت مورد علاقه کانتور سریهای متناهی بود، که او را به بررسی اصول آنالیز کشاند. یک نتیجه این بررسی، بوجود آوردن نظریه انقلابی مجموعه‌ها و حساب اعداد تراامتناهی بود.

باشد» (اصل موضوع تعمیم)، « \forall یک مجموعه است» (اصل موضوع مجموعه تهی)، «اگر A و B مجموعه باشد آنگاه $\{A, B\}$ نیز مجموعه است» (اصل موضوع جفت‌سازی)، «اگر $\{A\}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد آنگاه $\{\{A\}\}$ یک مجموعه است» (اصل موضوع اجتماع). پارادوکس راسل تنها پارادوکسی بود که در نظریه مجموعه‌ها پدید آمد، کمی بعد از اینکه پارادوکس راسل منتشر شد، ریاضیدانان و منطقیون پارادوکسهای بسیاری ساختند. نتیجه تمام این پارادوکسها این شد که بسیاری از ریاضیدانان و منطقیون روی انواع زیادی نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها کار کردند. منظور هریک از این نظریه‌ها این بود که از پارادوکسها احتراز شود و هسته اصلی نظریه مجموعه‌های کانتور محفوظ بماند. معهداً تا این زمان هنوز کسی موفق نشده است یک سیستم اصل موضوعی کاملاً رضایت‌بخش برای نظریه مجموعه‌ها ارائه دهد.

با وجود مشکلات فوق الذکر، نظریه مجموعه‌های کانتور امروزه در تمام رشته‌های ریاضیات نوین وارد شده و ثابت شده است که در پایه گذاری آنالیز مدرن و توپولوژی اهمیت خاصی دارد. در واقع حتی ساده‌ترین سیستمهای اصل موضوعی کاملاً توسعه یافته نظریه مجموعه‌ها برای کار ریاضیات کلامیک (مانند نظریه اعداد حقیقی و مختلط، جبر و توپولوژی و غیره) کاملاً کافی است.

رابطه و تابع

این فصل را با بحثی درباره جفت‌های مرتب و حاصلضرب دکارتی گنجینه شروع می‌کنیم. سپس رابطه را به عنوان مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب تعریف می‌کنیم. به دقت به رابطه نزدیک بین افزار و رابطه همان‌ذی دریک مجموعه می‌پردازیم. مفهوم تابع را به عنوان نوعی خاص از رابطه معروفی می‌کنیم. برای آماده کردن کسانی که می‌خواهند بیشتر در دیاضیات جدید کار کنند، ویژگیهای مهم تابعها را بررسی می‌کنیم. در هر قسم مثالهای فراوانی می‌آوریم.

۱. حاصلضرب دکارتی گنجینه

برای هر دو شیء داده شده a و b ، می‌توانیم شیء جدید (a, b) را، به نام جفت مرتب a و b تشکیل دهیم^۱. صفت «مرتب» در اینجا، تأکید بر آن دارد که ترتیب نوشتن اشیاء a و b در داخل پرانتز مهم است. بنابراین، (a, b) و (b, a) دو جفت مرتب متفاوت هستند. باید توجه داشت که جفت مرتب (a, b) با مجموعه $\{a, b\}$ یکی نیست. یک شیوه

۱. متأسفانه این نماد، وقتی هر دو اعدادی حقیقی هستند، برای فاصله باز هم به کار می‌رود. اما همواره خواهند باکمی دقت بمعنای مناسب آن در متون می‌خواهد برد.

رضایت‌بخش اما تا حدی پیچیده، این است که جفت مرتب (a, b) را مجموعه $\{a, \{a, b\}\}$ تعریف کنیم. از این تعریف به نتیجه $(a, b) = (c, d) \iff a=c \wedge b=d$ می‌رسیم.

(مسئله ۲۱، تمرین ۱۰۳ را ببینید).

دو جفت مرتب (a, b) و (c, d) را مساوی گوییم اگر و تنها اگر $a=c \wedge b=d$ مثلاً $(7, 8) = (x, y) \iff x=7 \wedge y=8$. در هندسه تحلیلی، صفحه دکارتی را می‌توان مجموعه تمام جفت‌های مرتب اعداد حقیقی دنظر گرفت. بیان صوری این مفهوم چنین است:

تعریف ۱. A و B را دو مجموعه می‌گیریم. مجموعه تمام جفت‌های مرتب (x, y) ، $x \in A$ و $y \in B$ را حاصل‌ضرب دکارتی A و B نامیده با $A \times B$ نمایش می‌دهند. به زبان نمادی:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

a را مختص اول و b را مختص دوم جفت مرتب (a, b) می‌گویند.

مثال ۱. گیریم $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$. حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ را بیابید.

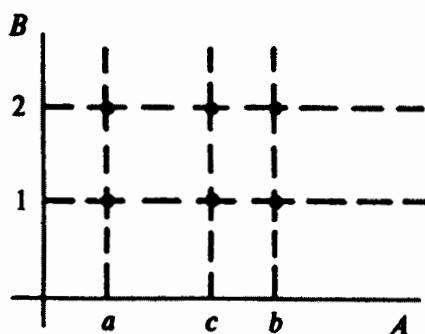
حل: بنابر تعریف ۱ بالا، داریم

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

و

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

دیگر می‌شود که $A \times B \neq B \times A$. حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ را می‌توانیم مجموعه نقاط شکل زیر مجسم کنیم.



شکل ۷

مثال ۲. A یک مجموعه است. $A \times \emptyset$ و $\emptyset \times A$ دا بیايد.

حل: چون $A \times \emptyset$ مجموعه تمام جفت‌های مرتب (a, b) است که در آن $a \in A$ و $b \in \emptyset$ ، و چون مجموعه تهی \emptyset عنصری ندارد، هیچ عنصری مانند b در \emptyset وجود ندارد لذا $\emptyset \times A = \emptyset$. همچنین دلله می‌شود که $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

قضیه ۱. A و B ، A و C را سه مجموعه می‌گیریم. آنگاه

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (\text{الف})$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (\text{ب})$$

برهان.

$$(a, x) \in A \times (B \cap C) \quad (\text{الف})$$

$$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C) \quad \text{خودتوانی، شرکت‌پذیری (فصل ۱)}$$

$$\Leftrightarrow [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \in C)] \quad \text{جا به جایی، شرکت‌پذیری (فصل ۱)}$$

$$\Leftrightarrow [(a, x) \in A \times B] \wedge [(a, x) \in A \times C] \quad \text{تعريف ۱}$$

$$\Leftrightarrow (a, x) \in (A \times B) \cap (A \times C) \quad \text{تعريف \cap}$$

از این رو، بنا بر تعریف ۱ فصل ۲، ثابت کردیم که

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

این تساوی به زبانی ساده، چنین بیان می‌شود: حاصلضرب دکارتی نسبت به اشتراک پخشپذیر است. قسمت (ب) را به عنوان تمرین به خواهانده و اگذار می‌کیم.

قضیه ۲. اگر A ، B و C سه مجموعه باشند، آنگاه

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

یعنی، حاصلضرب دکارتی نسبت به منفیگیری پخشپذیر است.

برهان.

$$(a, x) \in A \times (B - C)$$

$$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B - C)$$

$$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge [(x \in B) \wedge (x \notin C)] \quad \text{تعريف ۵ (فصل ۲)}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{خودتوانی، شرکتپذیری (فصل ۱)} \iff (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C) \\
 & \text{جا به جایی، شرکتپذیری (فصل ۱)} \iff [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \notin C)] \\
 & \text{تعریف ۱} \iff [(a, x) \in A \times B] \wedge [(a, x) \notin A \times C] \\
 & \text{تعریف ۵ (فصل ۲)} \iff (a, x) \in (A \times B) - (A \times C)
 \end{aligned}$$

بنابراین، ثابت کردیم که

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

تمرین ۱۰۳

۱. هریک از مجموعه‌های زیر را با رسم یک نمودار در صفحه دکارتی به طور هندسی نمایش دهید:

$$(الف) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$$

$$(ب) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$$

$$(ج) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x + y| \leq 1\}$$

۲. مجموعه‌های A و B چه شرایطی دارا باشند تا تساوی $A \times B = B \times A$ راست باشد؟
۳. قضیه ۱ (ب) را ثابت کنید: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
۴. ثابت کنید که $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$.
۵. ثابت کنید که اگر A, B ، و C مجموعه باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \times C \subseteq B \times C$.
۶. اگر مجموعه A ، m عنصر و مجموعه B ، n عنصر داشته باشد، مجموعه $A \times B$ چند عنصر (جفت مرتب) دارد؟
۷. مجموعه $A \times A$ نه عنصر دارد که $(1, 0)$ و $(0, 1)$ (دو عنصر آن هستند). مجموعه A و عضورهای دیگر $A \times A$ را بیابید.
۸. درستی یا نادرستی (با آوردن یک مثال تدقیق) هریک از حکم‌های زیر را ثابت کنید.
- (الف) $A \times B \subseteq C \times D \wedge A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$.
- (ب) مجموعه توانی $A \times B$ ، یعنی $(A \times B)^P$ ، حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های توانی $(A^P)^Q$ و $(B^P)^Q$ ، یعنی $(A^P) \times (B^P)$ است.
۹. اگر A, B, C ، و D چهار مجموعه باشند، ثابت کنید

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

۱۰. گیریم A_1, A_2, \dots, A_n مجموعه هستند. آیا می‌توانید تعریف ۱ را برای حاصلضرب دکارتی سه مجموعه $A_1 \times A_2 \times A_3$ تعمیم دهید؟ آیا می‌توانید این تعریف را برای حاصلضرب دکارتی «مجموعه بالا»، یعنی $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ، تعمیم دهید؟

۱۱. ثابت کنید که اگر $A = B$ آنگاه $A \times A = B \times B$.
۱۲. ثابت کنید که اگر $C \neq \emptyset$ و $A = B$ آنگاه $A \times C = B \times C$.
۱۳. درستی یا نادرستی تساوی $(A \cup B) \times (A \cup C) = (A \cup (B \times C))$ را بررسی کنید.
۱۴. ثابت کنید که $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
۱۵. آیا تساوی $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ صحیح است؟
۱۶. ثابت کنید که اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه برای هر مجموعه C و هر مجموعه D ، $(A \times C) \cap (B \times D) = \emptyset$.
۱۷. فرض کنیم A, B, C و D مجموعه‌های ناتهی باشند. ثابت کنید $A \times B = C \times D$ اگر و فقط اگر $A = C$ و $B = D$.
۱۸. ثابت کنید که

$$(A \times B) - (C \times C) = (A - C) \times B \cup A \times (B - C)$$

۱۹. ثابت کنید که

$$(A \times A) - (B \times C) = (A - B) \times A \cup A \times (A - C)$$

۲۰. ثابت کنید که

$$(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times B \cup A \times (B - D)$$

۲۱. جفت مرتب (y, x) را مجموعه $\{(x, y)\}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از این تعریف ثابت کنید که $(a, b) = (c, d)$ اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$.

۲. رابطه

دوم مجموعه A و B ، که الزاماً متمایز نیستند، داده شده‌اند. جمله «یک عنصر a از A با یک رابطه \mathcal{R} به یک عنصر b از B نظیر شده است» گزاره‌ای است درباره جفت مرتب (a, b) در حاصلضرب دکارتی $A \times B$. از این‌رو، تعریف ریاضی رابطه را می‌توان بر حسب جفت‌های مرتب حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها بیان کرد.

تعریف ۲. یک زیرمجموعه حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را یک رابطه \mathcal{R} از A به B می‌نامیم. معمولاً به جای $(a, b) \in \mathcal{R}$ می‌نویسند $a \mathcal{R} b$. نماد $a \mathcal{R} b$ خوانده می‌شود « a با \mathcal{R} به b مربوط است».

اغلب مجموعه‌های A و B یکی هستند، در این صورت این دو مجموعه را X می‌نامیم و به جای اینکه بگوییم یک رابطه «از X به X » است، می‌گوییم یک رابطه در X است. مثلاً فرض کنید X مجموعه مردم شهر قزوین است و a (احمد) و b (برجیس) از اهالی قزوین هستند و \mathcal{R} رابطه (شوهر کسی بودن) است. آنگاه وقتی می‌گوییم a شوهر

* مسئله ۱۴ تکرار مسئله ۹ است. ۴۰

b است، احمد و برجیس را یک جفت مرتب (a, b) متعلق به رابطه \mathcal{S} در نظر می‌گیریم.
نماد $a \mathcal{S} b$ یا $a \in \mathcal{S}(b)$ را می‌خوانیم « a شوهر b است».

همچنین می‌توانیم درجت مرتب، برجیس را قبل از احمد بیاوریم و بگوییم برجیس زن احمد است. یا اگر \mathcal{Z} رابطه (زن کسی بودن) باشد، بگوییم جفت مرتب (b, a) به رابطه \mathcal{Z} متعلق است. $b \mathcal{Z} a$ یا $b \in \mathcal{Z}(a)$ را می‌خوانیم: « b زن a است». در این مثال، رابطه \mathcal{Z} را وارون رابطه \mathcal{S} می‌گوییم.

تعریف ۳. A و B را دومجموعه، که الزاماً متمایز نیستند، فرض می‌کنیم. اگر \mathcal{R} رابطه‌ای از A به B باشد، آنگاه وارون رابطه \mathcal{R}^{-1} ، رابطه‌ای است از B به A به قسمی که $a \mathcal{R}^{-1} b$ اگر و تنها اگر $a \mathcal{R} b$. یعنی،

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

مثال ۳. (الف) گیریم $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ ، $B = \{x, y, z\}$ ، $A = \{a, b\}$ و $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$ به صورت $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, a), (y, b)\} \subseteq B \times A$ نشان داده شده است. آنگاه \mathcal{R}^{-1} داده شده است. آنگاه (ب) گیریم

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x, y \text{ را بخش می‌کند}\}$$

آنگاه

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | y \text{ مضری از } x \text{ است}\}$$

گیریم \mathcal{R} رابطه‌ای از A به B است. حوزه رابطه \mathcal{R} ، که با $\text{Dom}(\mathcal{R})$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام عناصرهای $a \in A$ است به قسمی که $a \mathcal{R} b$ برای یک $b \in B$ و نگاره b است. آنگاه $\text{Im}(\mathcal{R})$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمام عناصرهای $b \in B$ است به قسمی که b برای یک $a \in A$ به زبان نمادی $a \mathcal{R} b$

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A | (a, b) \in \mathcal{R}, b \in B\}$$

و

$$\text{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B | (a, b) \in \mathcal{R}, a \in A\}$$

در مثال مر بوط به رابطه \mathcal{S} (شوهر کسی بودن) و \mathcal{Z} (زن کسی بودن) در شهر X (قروین)، حوزه \mathcal{S} مجموعه تمام مردانی در X است که ازدواج کرده‌اند، و نگاره \mathcal{S} مجموعه تمام زنانی در X است که ازدواج کرده‌اند، در حالی که، حوزه \mathcal{Z} مجموعه تمام زنهای شوهردار در X است و نگاره \mathcal{Z} مجموعه تمام شوهرها در X است. یعنی

* حروف اول **domain** به معنای حوزه است و **Im** حروف اول به معنای نگاره است. م.

$$\text{Dom}(\mathcal{Z}) = \text{Im}(\mathcal{S})$$

و

$$\text{Dom}(\mathcal{S}) = \text{Im}(\mathcal{Z})$$

آیا می‌توانید یک نتیجه کلی بگیرید؟ (مسئله ۳ در آخر این بخش را ببینید.)

مثال ۴. در مثال ۳ (الف)، $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{a, b\}$ و $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{x, y\}$ و $\text{Im}(\mathcal{R}) = \{a, b\}$. در مثال ۳ (ب)، $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \mathbb{N}$ و $\text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{N}$

تعریف ۴. \mathcal{R} رابطه‌ای در مجموعه X است. می‌گوییم

(الف) \mathcal{R} اندکامی است اگر و فقط اگر $\forall x \in X, x \mathcal{R} x$.

(ب) \mathcal{R} هنقاًدان است اگر و فقط اگر $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.

(پ) \mathcal{R} متعدد است اگر و فقط اگر $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

(ت) \mathcal{R} یک رابطه هم‌اُذی است اگر و فقط اگر \mathcal{R} انعکاسی، متقارن، و متعدد باشد.

بدیهی است که رابطه تساوی، $=$ ، در مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} ، یک رابطه همارزی است. گیریم X مجموعه‌ای از گویهای رنگی است و فرض کنیم a با b مربوط است اگر و تنها اگر a و b هم‌رنگ باشند. آنگاه \mathcal{R} یک رابطه همارزی است.

رابطه‌های همارزی در ریاضیات نوین از اهمیت خاصی برخوردارند. مثلاً، گروههای سازه در جبر، فضاهای خارج قسمت در تopo لوژی، و دستگاه اعداد همنهشت در نظریه اعداد، همگی با نوعی از رابطه‌های همارزی مربوط هستند.

در یک مجموعه ناتهی مفروض X ، همواره حداقل دو رابطه همارزی وجود دارد؛ یکی از این دو، «ابطه قطری» Δ_X (یا «ابطه همانی») است که با

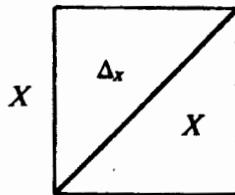
$$\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$$

تعریف می‌شود و هر عنصر را به خودش نظیر می‌کند. اگر X را با یک پاره خط نمایش دهیم، آنگاه $X \times X$ یک مربع و Δ_X قطر «اصلی» این مربع است.

رابطه همارزی دیگر که همیشه روی X وجود دارد، رابطه $\mathcal{R} = X \times X$ است. درین تمام رابطه‌های همارزی که در زیرمجموعه‌های $X \times X$ ، روی X می‌توان تعریف کرد، Δ_X کوچکترین رابطه همارزی و $X \times X$ بزرگترین است.

مثال ۵. عددی صحیح، ثابت، ثابت و دلخواه است. (ابطه همنهشتی \equiv به بیانه m (یا مدولو m) در مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} ، با $y \equiv x \pmod{m}$) این مربع است. اگر و تنها $x - y - k$ بازای یک $k \in \mathbb{Z}$ ، تعریف می‌شود، رابطه همنهشتی یک رابطه همارزی روی \mathbb{Z} است.

۱. وقتی حوزه رابطه \mathcal{R} در X ، آشکارا خود X است، بسیاری از ریاضیدانان ترجیح می‌دهند که به جای «وابطه \mathcal{R} در X » بگویند «وابطه \mathcal{R} روی X ».



شکل ۸

برهان. (الف) برای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، چون $x \equiv x \pmod{m}$ داریم بنابراین رابطه انعکاسی است.

(ب) اگر $x, y \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه برای یک $k \in \mathbb{Z}$ $x - y = km$ ، پس $y \equiv x \pmod{m}$ در نتیجه

$-k \in \mathbb{Z}$ و در آن $y - x = (-k)m$ و رابطه متقابن است.

(ج) اگر $x, y, z \in \mathbb{Z}$ و $x \equiv y \pmod{m}$ و $y \equiv z \pmod{m}$ ، آنگاه $x - y = km$ و

$y - z = lm$ بنابراین $x - z = k_1 m + l m$ که بازی یک $k_1 + l \in \mathbb{Z}$ و یک $m \in \mathbb{Z}$ است.

$$x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)m$$

و $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ ، که نشان می‌دهد $x \equiv z \pmod{m}$. پس رابطه متعدی است. بنابراین ما ثابت کردیم که رابطه همنهشتی (به پیمانه m) یک رابطه هم‌ارزی روی \mathbb{Z} است.

بعنوان یک حالت خاص این مثال، $m=2$ می‌گیریم. آنگاه (۲) اگر و تنها اگر $y - x$ یک عدد صحیح زوج باشد. در نتیجه (۲) اگر و تنها اگر x و y هردو زوج یا هردو فرد باشند.

تمرین ۴۰۳

۱. روابطه‌ای از A به B است. ثابت کنید $R^{-1} = R$.

۲. گیریم $A = \{(a, c), (c, b), (a, b)\}$ و $R = \{(a, c), (b, a), (c, a), (a, b)\}$. حوزه و نگاره R را بایا بیند.

۳. روابطه‌ای از A به B است. ثابت کنید که

$$\text{(الف)} \quad \text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$$

$$\text{(ب)} \quad \text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$$

۴. گیریم $A = \{a, b, c\}$ و

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$$

ثابت کنید R منعکس و متقابن است، اما متعدی نیست.

۵. روابطه‌ای مثال بیاورید که انعکاسی و متقابن باشد، اما متعادی نباشد.

۶. روابطه‌ای مثال بیاورید که متعادی و متقابن باشد، اما انعکاسی نباشد.

۷. روابطه‌ای در مجموعه X است. ثابت کنید که

(الف) \mathcal{R} انعکاسی است اگر و تنها اگر $\Delta_X \subseteq \mathcal{R}$.

(ب) \mathcal{R} متقارن است اگر و تنها اگر $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

(پ) \mathcal{R} انعکاسی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R}$ انعکاسی باشد.

(ت) \mathcal{R} متقارن است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R}$ متقارن باشد.

(ث) \mathcal{R} متعدی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R}$ متعدی باشد.

(ج) \mathcal{R} یک رابطه هم ارزی است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{R}$ یک رابطه هم ارزی باشد.

۸. چند رابطه روی یک مجموعه «عضوی وجود دارد؟

۹. چند رابطه از یک مجموعه m عضوی در یک مجموعه n عضوی وجود دارد؟

۱۰. فرض کنید \mathcal{R} یک رابطه از A به B است و $D \subseteq A$. منظور از تحدید \mathcal{R} به D ، رابطه $\mathcal{R}|D = \{(x, y) \in \mathcal{R} \mid x \in D\}$

$$\mathcal{R}|D = \mathcal{R} \cap (D \times \text{Im}(\mathcal{R}))$$

۱۱. ثابت کنید که اگر \mathcal{R} یک رابطه از A به B و D و E زیرمجموعه های A باشند، آنگاه

$$(الف) (\mathcal{R}|D \cup E) = (\mathcal{R}|D) \cup (\mathcal{R}|E)$$

$$(ب) (\mathcal{R}|D \cap E) = (\mathcal{R}|D) \cap (\mathcal{R}|E)$$

۱۲. فرض کنید \mathcal{R} یک رابطه از A به B و X یک زیرمجموعه دلخواه A باشد. $\mathcal{R}(X)$ را چنین تعریف کنید

$$\mathcal{R}(X) = \{y \in B \mid x \in X \text{ و } (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

ثابت کنید که اگر D و E زیرمجموعه های A باشند، آنگاه

$$(الف) \mathcal{R}(D \cup E) = \mathcal{R}(D) \cup \mathcal{R}(E)$$

$$(ب) \mathcal{R}(D \cap E) \subseteq \mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(E)$$

۱۳. با در نظر گرفتن فرضهای مسئله ۱۲، ثابت کنید

$$(الف) \text{Dom}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}(B)$$

$$(ب) \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}(A)$$

۱۴. اگر \mathcal{R} و \mathcal{S} رابطه هایی از A به B باشند، آنگاه $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ یک رابطه از A به B است.

ثابت کنید

$$(الف) \text{Dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \text{Dom}(\mathcal{R}) \cup \text{Dom}(\mathcal{S})$$

$$(ب) \text{Im}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \text{Im}(\mathcal{R}) \cup \text{Im}(\mathcal{S})$$

$$(پ) \text{برای هر } X \subseteq A, (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(X) = \mathcal{R}(X) \cup \mathcal{S}(X)$$

۱۵. فرض کنید \mathcal{R} یک رابطه روی X است. ثابت کنید $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه متقارن روی X است و اگر \mathcal{S} یک رابطه متقارن روی X باشد که شامل \mathcal{R} است، آنگاه $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ کوچکترین رابطه متقارن شامل \mathcal{R} است.

۱۶. فرض کنید \mathcal{R} یک رابطه روی X است. ثابت کنید $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ یک رابطه متقارن روی X است و اگر \mathcal{S} یک رابطه متقارن روی X باشد به قسمی که $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ ، آنگاه $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$. بنابراین $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ بزرگترین رابطه متقارن مشمول \mathcal{R} است.

۱۷. ثابت کنید

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$$

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1}$$

۱۸. گیریم $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. رابطه \sim روی X را با $(a, b) \sim (c, d)$ اگر و تنها اگر $ad = bc$ تعریف کنید. ثابت کنید که رابطه \sim یک رابطه همارزی است.

۳. افراز و رابطه همارزی

تعریف ۵. X مجموعه‌ای غیر ناتیه است. منظور از یک افراز X مانند \mathcal{P} ، یک مجموعه از زیرمجموعه‌های ناتیه X است به قسمی که

(الف) اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A, B \in \mathcal{P}$ ، آنگاه M

(ب) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = X$

به تعبیری شهودی افراز X یک « تقسیم X » به قطعه‌های مجزای ناتیه است.

مثال ۶. عددی صحیح، مثبت و ثابت است. به ازای هر عدد صحیح $j < m \leq 0$ تعریف می‌کنیم $\{x \in \mathbb{Z} | x - j = km, k \in \mathbb{Z}\}$. آنگاه مجموعه

$$\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_{m-1}\}$$

یک افراز \mathbb{Z} است در حالت خاص $m=2$ ، مجموعه مجموعه‌های

$$Z_0 = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ زوج است}\}$$

$$Z_1 = \{x \in \mathbb{Z} | x - 1 \text{ زوج است}\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ فرد است}\}$$

یک افراز \mathbb{Z} است. (مسئله ۸ تمرین ۳۰.۳ را نیز بینیمد).
ین افراز یک مجموعه ناتیه و یک رابطه همارزی روی آن مجموعه ارتباط بسیار نزدیکی وجود دارد. برای درک این ارتباط، به تعریف زیر احتیاج داریم.

تعریف ۶. \mathcal{E} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه ناتیه است. به ازای هر $x \in X$ ، مجموعه

$$x/\mathcal{E} = \{y \in X | y \mathcal{E} x\}$$

را داده هم‌اُذی مربوط به عنصر x تعریف می‌کنیم. مجموعه تمام این رده‌های همارزی در X را با X/\mathcal{E} نمایش می‌دهیم؛ یعنی $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} | x \in X\}$. نساد \mathcal{E}/X را

قضیه ۳. \mathcal{E} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه ناتهی X است. آنگاه $X \text{ modulo } \mathcal{E}$ با فقط « $x \text{ mod } \mathcal{E}$ » می خوانیم.

قضیه ۳. \mathcal{E} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه ناتهی X است. آنگاه

(الف) هر x/\mathcal{E} یک زیرمجموعه ناتهی X است.

(ب) $\emptyset \neq y/\mathcal{E} \cap x/\mathcal{E}$ اگر و تنها اگر $y \mathcal{E} x$.

(ج) $x \mathcal{E} y$ اگر و تنها اگر $y/\mathcal{E} = x/\mathcal{E}$.

برهان. (الف) چون برای هر $x \in X$ ، x/\mathcal{E} انعکاسی است، داریم $x \in x/\mathcal{E}$. بنابر تعریف ۶،

$x \in x/\mathcal{E}$ ، یک زیرمجموعه ناتهی X است.

(ب) چون \mathcal{E} یک رابطه همارزی و $\emptyset \neq X$ ، داریم

$$x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset \iff (\exists z)(z \in x/\mathcal{E} \wedge z \in y/\mathcal{E})$$

$$\iff (z \mathcal{E} x) \wedge (z \mathcal{E} y) \quad \text{تعریف ۶}$$

$$\iff (x \mathcal{E} z) \wedge (z \mathcal{E} y) \quad \text{متقارن است}$$

$$\iff x \mathcal{E} y \quad \text{متعدی است}$$

(ج) از (الف) و (ب) به سادگی نتیجه می شود که $y/\mathcal{E} = x/\mathcal{E} \Rightarrow x \mathcal{E} y \Rightarrow y/\mathcal{E} = x/\mathcal{E}$. حال باید ثابت کنیم که $y/\mathcal{E} = x/\mathcal{E} \Rightarrow x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$. گیریم $y/\mathcal{E} \subseteq x/\mathcal{E}$ ، آنگاه

$$\text{تعریف ۶} \quad z \in x/\mathcal{E} \Rightarrow z \mathcal{E} x$$

$$\text{متعدی است} \quad (z \mathcal{E} x) \wedge (x \mathcal{E} y) \Rightarrow z \mathcal{E} y$$

$$\text{تعریف ۶} \quad \Rightarrow z \in y/\mathcal{E}$$

چون z اختیاری است، نتیجه می شود که $y/\mathcal{E} \subseteq x/\mathcal{E}$. استدلالی مشابه نتیجه می دهد که $x/\mathcal{E} \subseteq y/\mathcal{E}$. پس $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$.

قضیه ۴. اگر \mathcal{E} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه ناتهی X باشد، آنگاه \mathcal{E} یک افزار X است.

برهان. بنابر قضیه ۳ (الف) و تعریف ۶، $\{x/\mathcal{E} | x \in X\} = X/\mathcal{E}$ خانواده ای از زیرمجموعه های ناتهی X است. اکنون نشان می دهیم که

$$x/\mathcal{E} \neq y/\mathcal{E} \Rightarrow (x/\mathcal{E}) \cap (y/\mathcal{E}) = \emptyset$$

برای این منظور عکس نتیж آن: $[x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset] \Rightarrow [x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}] \Rightarrow [x/\mathcal{E} \subseteq y/\mathcal{E}]$ را ثابت می کنیم. اما این رابطه یک نتیجه مستقیم قضیه ۳ (ب) و (ج) است. بالاخره، باید نشان دهیم که $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \Rightarrow x \mathcal{E} y$. این نیز بدیهی است، زیرا هر $x \in X$ به $y \in Y$ متعلق است، به این ترتیب برهان قضیه کامل است.

هم اکنون در قضیه ۴ دیدیم که یک رابطه همارزی روی مجموعه ناتهی X ، یک افزار

X ایجاد می‌کند. اگر نشان خواهیم داد که عکس قضیه ۴ نیز درست است؛ یعنی، هر افراز X یک رابطه همارزی روی X ایجاد می‌کند.

تعريف ۷. φ یک افراز مجموعهٔ ناتهی X است. یک رابطه X/φ روی X با y ($x(X/\varphi)y$) وجود داشته باشد به قسمی که $x, y \in A \in \varphi$ و تها اگر یک مجموعهٔ $A \in \varphi$ باشد به قسمی که $x, y \in A$ ، تعريف می‌کنیم.

تذکر. به خواننده توصیه می‌شود تعاریف ۶ و ۷ را با دقت بخواند و با یکدیگر مقایسه کنند، تا اختلاف ظریف بین نمادهای مشابه \mathcal{E}/X و X/φ را دریابد.

قضیه ۵. اگر φ یک افراز مجموعهٔ ناتهی X باشد، آنگاه رابطه X/φ یک رابطه همارزی روی X است، و رده‌های همارزی که از رابطه همارزی X/φ به وجود می‌آیند $\cdot X/(X/\varphi) = \varphi$ دلیقاً مجموعه‌های افراز φ هستند. به زبان نمادی

برهان. چون هر عنصر X مانند x متعلق به یکی از $A \in \varphi$ است، $x(X/\varphi)x$ پس X/φ انتکاسی است. تقارن X/φ یک نتیجه بدیهی تعریف ۷ است. برای اینکه نشان دهیم رابطه X/φ متعدی است، فرض کنید x, y و z سه عنصر X هستند که در شرط‌های زیر صدق می‌کنند

$$x(X/\varphi)y, \quad y(X/\varphi)z$$

آنگاه، بنابر تعریف ۷، x و B در φ وجود دارند به قسمی که $y \in A \cap B \neq \emptyset$. از تعریف افراز، نتیجه می‌شود $A = B$. از این‌رو، $x, z \in A$ و بنابراین $z(X/\varphi)x$. پس X/φ یک رابطه همارزی روی X است.

برای اثبات بقیه قضیه، گیریم x یک عنصر اختیاری X باشد. یک و فقط یک مجموعه A در φ وجود دارد به قسمی که $x \in A$ (چرا؟). در نتیجه، بنابر تعریف ۶، داریم

$$x/(X/\varphi) = A$$

ثابت شد که هر رده همارزی مدولو X/φ یک مجموعه از خانواده φ است. بر عکس فرض کنیم A یک مجموعه افراز φ باشد. چون $\emptyset \neq A \neq X$ و وجود دارد که متعلق به A است. پس با استدلال قبلی، $A = (X/\varphi)/x$. بداین ترتیب ثابت شد که $X/(X/\varphi) = \varphi$ و برهان قضیه کامل است.

هر رابطه همارزی \mathcal{E} روی مجموعه ناتهی X یک افراز \mathcal{E}/X (قضیه ۴) به وجود می‌آورد. با این افراز رابطه همارزی $(X/\mathcal{E})/X$ مشخص می‌شود (قضیه ۵). مهم است بدانیم که $\mathcal{E} = (X/\mathcal{E})/X$ (مسئله ۱ ادا بیشند). با این رابطه و رابطه $X/(X/\varphi) = \varphi$ ارتباط نزدیک بین رابطه‌های همارزی و افرازها روشن می‌شود.

قضیه ۵ را با یک مثال خاص توضیح می‌دهیم. گیریم \mathbb{Z}_1 و \mathbb{Z}_2 به ترتیب مجموعه

اعداد صحیح زوج و مجموعه اعداد صحیح فرد باشند. آنگاه $\varphi = \{Z_0, Z_1\}$ یک افزار مجموعه اعداد صحیح Z است. بنا بر تعریف رابطه Z/φ ، داریم $a(Z/\varphi)b$ اگر و تنها اگر $a, b \in Z$ یا $a, b \in Z_0$. یعنی $a(Z/\varphi)b$ اگر و تنها اگر $b \in a$ هردو زوج یا هردو فرد باشند. به سادگی دیده می شود که این رابطه یک رابطه همارزی است. در واقع، $a(Z/\varphi)b$ اگر و تنها اگر $a \equiv b \pmod{2}$ است. [مثال ۵ را بینید.]

بر عکس اگر، مجموعه Z و رابطه همارزی \mathcal{E} داده شده باشند به قسمی که $x \mathcal{E} y$ اگر و تنها اگر $x \equiv y \pmod{2}$ است. آنگاه

$$a/\mathcal{E} = \{x \in Z \mid x \equiv a \pmod{2}\} = \begin{cases} Z_0 & \text{اگر } a \text{ زوج باشد} \\ Z_1 & \text{اگر } a \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

بنابراین $Z/\mathcal{E} = \{Z_0, Z_1\}$ ، که آشکارا یک افزار Z است.

تمرین ۳.۳

۱. فرض کنید $B = \{c, d, e\}$ و $A = \{a, b\}$ ، $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, d), (d, c), (c, c), (d, d)\}$

(الف) تحقیق کنید که $\{A, B\}$ یک افزار X است.

(ب) رابطه $X/\{A, B\}$ را که از افزار $\{A, B\}$ پدید آمده است، بررسی کنید.

۲. فرض کنید $X = \{a, b, c, d\}$ و

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, d), (d, c), (c, c), (d, d)\}$$

(الف) تحقیق کنید که \mathcal{R} یک رابطه همارزی روی X است.

(ب) افزار X/\mathcal{R} را که از \mathcal{R} پدید آمده است، بیابید.

۳. فرض کنید φ افزار X/\mathcal{R} مسئله ۲-ی باشد. رابطه X/φ روی X را که از φ پدید آمده است، بیابید.

۴. φ یک افزار مجموعه ناتهی X و رابطه همارزی X/φ مفروض اند. ثابت کنید

$$X/\varphi = \bigcup_{A \in \varphi} A \times A$$

۵. در مسئله ۱، چند عنصر در $A \times A \cup B \times B$ وجود دارد؟ چند جفت مرتب در $X/\{A, B\}$ وجود دارد؟

۶. X را یک مجموعه متناهی و φ ، افزار X را

$$\varphi = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$$

بگویید و فرض کنید مجموعه A_j ، $j = 1, 2, \dots, k$ ، n_j عضو دارد. ثابت کنید که تعداد جفتهای مرتب در رابطه همارزی X/φ دقیقاً $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2$ است.

۷. گیریم $\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}$ و $X = \{a, b, c, d, e\}$

(الف) نشان دهید که φ یک افزار X است.

(ب) رابطه هم ارزی X/φ روی X را به صورت مجموعه جفتهای مرتب مشخص کنید.
 (پ) X/φ را ع بنامید و مجموعه های $\mathcal{E}, a/\mathcal{E}, b/\mathcal{E}, c/\mathcal{E}, d/\mathcal{E}$ و e/\mathcal{E} را صریحاً مشخص کنید.

۸. مثال ۶ را به ازای $m=3$ بررسی کنید.

۹. X را \mathbb{Z} ، مجموعه اعداد صحیح بگیرید. فرض کنید رابطه \mathcal{E} روی X با $y \in \mathcal{E}$ بسا $x \in \mathcal{E}$ اگر و تنها اگر $y = kx$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، تعریف شده است.

(الف) ثابت کنید رابطه \mathcal{E} یک رابطه هم ارزی روی X است.

(ب) افزای X/\mathcal{E} را پیدا کنید.

(ج) تحقیق کنید که رابطه هم ارزی $(X/\mathcal{E})/(X/\mathcal{E})$ در واقع همان رابطه هم ارزی \mathcal{E} است.

۱۰. فرض کنید $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ یک افزای مجموعه A ، و $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ یک افزای مجموعه B است. ثابت کنید

$$\{A_i \times B_j | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$$

یک افزای $A \times B$ است.

۱۱. چ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه ناتپی X است. ثابت کنید $\mathcal{E} = X/(X/\mathcal{E})$.

۴. تابع

بی شک، مفهوم تابع یکی از اساسی ترین مفاهیم در هر شاخه ریاضی است. ممکن است خواننده با تعریف زیر آشنا شده باشد. تابع یک قاعدة تناظر است که به عنصر x از یک مجموعه (که حوزه تابع نامیده می شود) یک و فقط یک عنصر y از مجموعه دیگری را (که بود تابع نامیده می شود) نظیر می کند. این تعریف روشن نیست. دقیقاً منظور از یک «قاعده» چیست؟ برای اجتناب از هرگونه ابهامی، ریاضیدانان با استفاده از زبان مجموعه ها تعریفی دقیق برای تابع درست کرده اند.

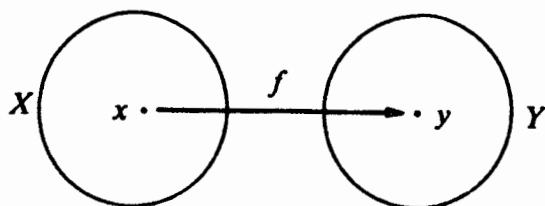
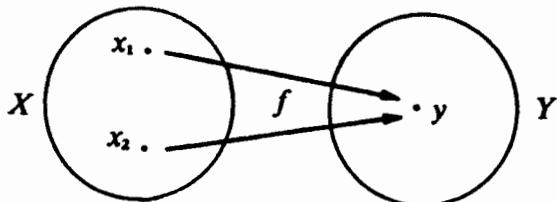
تعریف ۸. X و Y را دو مجموعه می گیریم. یک قابع از X به Y ، یک مه‌گانه f است که در آن f رابطه ای از X به Y است که در شرط های زیر صدق می کند:

$$(الف) \text{Dom}(f) = X$$

$$(ب) \text{اگر } y \in f(x, y) \in f \text{ و } (x, z) \in f \text{، آنگاه } z = y$$

فرض کنیم (f, X, Y) تابعی از X به Y باشد. از این بعد ماهم به تعییت از عرف به جای $f(x, y)$ و $f \in f$ به ترتیب نمادهای معمولی $f : X \rightarrow Y$ و $y = f(x)$ به کار خواهیم برد. اما دلیل اینکه « $y = f(x)$ » را می توان به جای « $(x, y) \in f$ » به کار بردن، این است که

برای هر عنصر $x \in X$ یک و فقط یک $y \in Y$ وجود دارد به قسمی که $(x, y) \in f$

شکل ۹. y نگاره x است.شکل ۱۰. x_1 و x_2 پیشگاره‌های y هستند.

برای اینکه بینید این ادعا درست است، فرض کنید $X \in x$. آنگاه بنا بر شرط (الف) تعریف f ، یک عنصر $y \in Y$ وجود دارد به قسمی که $y \in f(x)$ ؛ اگر یک عنصر دیگر $z \in Y$ با شرط $f(z) \in f(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه بنا بر شرط (ب)، $z = y$. حال می‌بینید، y که با $x \in X$ مشخص می‌شود یکتاست.

تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. اگر $(x) = f(y)$ ، گسویم y نگاره x تحت f است و x یک پیشگاره y تحت f است. خواننده می‌تواند این مطلب را، همان گونه که در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده، پیش‌خود مجسم کند. ماجموعه Y را، در $f: X \rightarrow Y$ ، برد تابع می‌گوییم. خواننده باید توجه داشته باشد که برد تابع ممکن است نگاره تابع نباشد (به مثال ۷، در زیر نگاره کنید). توجه خواننده را به این حقیقت جلب می‌کنیم که بعضی از نویسندهای لغت «برد» را به معنی «نگاره» به کار می‌برند، اما به یک دلیل تکنیکی، که در بخش ۶ خواهید دید، بین «نگاره» و «برد» تابع تفاوت قائل می‌شویم. در حالت کلی نگاره تابع زیرمجموعه‌ای از برد تابع است.

مثال ۷. فرض کنید $f: R \rightarrow R$ با $f(x) = [x]$ به ازای تمام x -های در R تعریف شده است و $[x]$ به معنای بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x یا مساوی با x است، مثلاً $\sqrt{2} = 1$ و $-1/2 = -1$. در اینجا برد f ، R است، در حالی که نگاره f ، Z است، که یک زیرمجموعه سره R می‌باشد.

۱. نگاره تابع $f: X \rightarrow Y$ را برابر با $\text{Im}(f)$ نگاره رابطه f ، یعنی $\text{Im}(f) = \{f(x) | x \in X\}$ است. بنا بر این

$$\text{Im}(f) = \{f(x) | x \in X\}$$

می‌توان برد یک تابع را، بدون تغییردادن تابع، عوض کرد. به عنوان نمونه، برای همان تابع مثال ۷ بالا، $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ و $\mathbf{f}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Q}$ تابع هستند، زیرا در تعریف آن صدق می‌کنند. در حالت کلی، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۶. تابع $f: X \rightarrow Y$ و W یک مجموعه شامل نگاره f مفروض‌اند. آنگاه $f: X \rightarrow W$ نیز یک تابع است.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که f یک رابطه از X به W است:

$$\begin{array}{ll} \text{تعریف } \text{Im}(f) & (x, y) \in f \Rightarrow x \in X \wedge y \in (\text{Im } f) \\ \text{Im}(f) \subseteq W & \Rightarrow x \in X \wedge y \in W \\ \text{تعریف ۱} & \Rightarrow (x, y) \in X \times W \end{array}$$

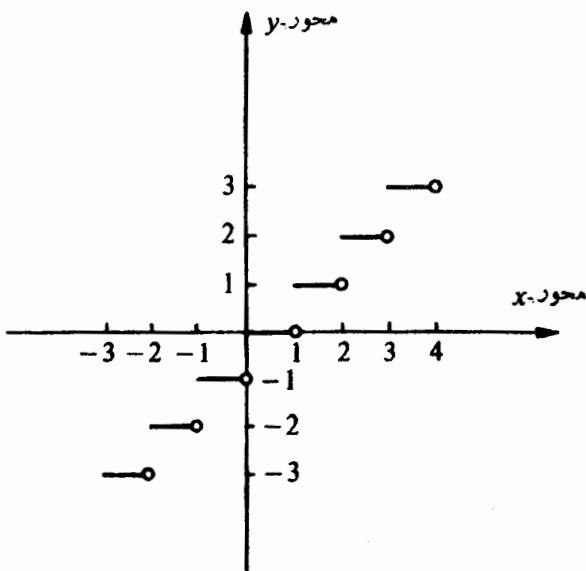
ثابت شده که $f \subseteq X \times W$; به عبارت دیگر، f یک رابطه از X به W است. حال چون $f: X \rightarrow Y$ یک تابع است، $\text{Dom}(f) = X$ و شرط (ب) تعریف آن برقرار است. بنابراین، $f: X \rightarrow W$ یک تابع است.

قضیه ۷. توابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: X \rightarrow Y$ مفروض‌اند. آنگاه $f = g$ اگر و تنها اگر $\forall x \in X, f(x) = g(x)$

$$\begin{array}{ll} \text{برهان. (۱) فرض کنیم که } f = g \text{ و } x \text{ یک عنصر دلخواه } X \text{ باشد. آنگاه} \\ \text{نماد} & y = f(x) \iff (x, y) \in f \\ f = g & \iff (x, y) \in g \\ \text{نماد} & \iff g(x) = y \\ & \therefore f(x) = g(x) \quad \text{بنابراین (۱)} \\ \text{نماد} & \text{فرض کنیم که } \forall x \in X, f(x) = g(x). \text{ آنگاه} \\ f(x) = g(x) & (x, y) \in f \iff y = f(x) \\ \text{نماد} & \iff y = g(x) \\ & \iff (x, y) \in g \end{array}$$

بنابراین $f = g$. اگر حوزه و برد یک تابع زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی باشند، آنگاه نظیر کاری که در هندسه تحلیلی می‌شود، نمودار تابع را می‌توان در یک صفحه دکارتی رسم کرد. مثلاً شکل ۱۱ نمودار تابع مثال ۷ است.

مثال ۸. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ناتهی X است. آنگاه رابطه



شکل ۱۱

$\{(x, y) \in X \times \{0, 1\} | y = 1, x \in A, x \neq 0\}$ و اگر $y = 0$ ، $x \in A$

تابعی از X به $\{0, 1\}$ است. این تابع را تابع مشخصه A در X می‌نامند و آن را "معمولان" با χ_A نمایش می‌دهند. حرف یونانی χ را خی تلفظ کنید. به عبارت دیگر

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in A \\ 0 & \text{اگر } x \in X - A \end{cases}$$

اگرچه یک تابع، بنا بر تعریف، به صورت $f : X \rightarrow Y$ یا $f : (f, X, Y)$ نوشت می‌شود، اما اغلب وقتی از من به طور ضمنی حوزه و برد تابع مشخص می‌شوند، تو شتن آنها ضرورت ندارد. به این جهت وقتی حوزه و برد تابع معلوم هستند، تابع را به f نمایش خواهیم داد، بدون اینکه حوزه و برد f را ذکر کنیم.

مثال ۹. مجموعه X مفروض است. رابطه قطری Δ_X روی X که در صفحه ۷۵ تعریف شده است، یک تابع از X به X است. وقتی می‌خواهیم تأکید کنیم که رابطه Δ_X یک تابع است، نماد دیگر $I_X : X \rightarrow X$ را بدکار می‌بریم. با این نماد، برای هر x در X ، $I_X(x) = x$. تابع I_X ، تابع همانی روی X نام دارد.*

* حرف اول identity function، اصطلاح انگلیسی تابع همانی است... .

مثال ۱۰. فرض کنیم X و Y دو مجموعه ناتهی و b یک عنصر ثابت Y باشد. با رابطه

$$C_b = \{(x, b) | x \in X\}$$

تابع $C_b: X \rightarrow Y$ به وجود می‌آید. تابع C_b را تابع ثابت می‌گویند و با $C_b(x) = b$ برای هر x در X ، مشخص می‌شود.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، اغلب به توابعی که با دو قاعدة تنازن (یا با یعنی از دو قاعدة) تعریف شده‌اند، برخوردار کرده‌ایم. مثلاً تابع $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیرداده شده است،

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

با دو قاعدة تعریف شده است. این تابع ممکن است به صورت اجتماع دو تابع زیر در نظر گرفته شود:

(۱) $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = 1 - 2x, \quad \forall x \in (-\infty, 0]$$

(۲) $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف شده است:

$$g(x) = x^2 + 1, \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

خواننده باید توجه کند که در اینجا $\{0\}$ در $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ قرار نمی‌گیرد. مثلاً اخیر قصیه عمومی زیر را موجب می‌شود.

قضیه ۸. دو تابع $f: A \rightarrow C$ و $g: B \rightarrow D$ به قسمی که مفروض آنند. آنگاه $h: A \cup B \rightarrow C \cup D$

$$h = f \cup g: A \cup B \rightarrow C \cup D$$

که در آن

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

یک تابع است.

برهان. چون f و g رابطه هستند، $f \subseteq A \times C$ و $g \subseteq B \times D$ و داریم

$$\begin{aligned} h &= f \cup g \subseteq (A \times C) \cup (B \times D) \\ &\subseteq (A \cup B) \times (C \cup D) \end{aligned}$$

زیرا هر دو مجموعه $C \cup D$ و $A \cup B$ زیرمجموعه‌های $(A \cup B) \times (C \cup D)$ هستند.

بنا بر این، h یک رابطه از $B \cup A$ به $C \cup D$ است. تحقیق درستی رابطه زیر را به عهده خواننده می‌گذاریم

$$\text{Dom}(h) = \text{Dom}(f) \cup \text{Dom}(g) = A \cup B$$

این نشان می‌دهد که رابطه h در تعریف آ (الف) صدق می‌کند.

برای هر $x \in A \cup B$ ، می‌توان سه حالت زیر را در نظر گرفت.

(۱) $f: A \rightarrow C$ ، $x \in A - A \cap B$ (۲)، $x \in A \cap B$ (۳)

برای هر $x \in A \cap B$ ، می‌توان سه حالت زیر را در نظر گرفت.

(۱) $f: A \rightarrow C$ ، $x \in A - B$ (۲)، $x \in A \cap B$ (۳)

برای هر $x \in B - A$ ، می‌توان سه حالت زیر را در نظر گرفت.

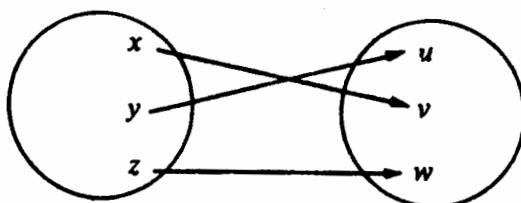
(۱) $g: B \rightarrow D$ (ب) صدق می‌کند و $f(x) = g(x)$ ، $\forall x \in A \cap B$

می‌شود که $h(x)$ در هر سه حالت تعریف شده و یکنامت است. بنا بر این رابطه h در تعریف آ (ب) هم صدق می‌کند. از این دو $h: A \cup B \rightarrow C \cup D$ واقعاً یک تابع است.

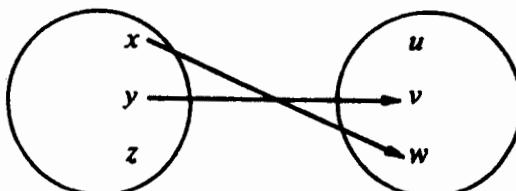
تمرین ۴۰۳

۱. بررسی کنید که با کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع از $\{x, y, z\}$ به $\{u, v, w\}$ تعریف می‌شود.

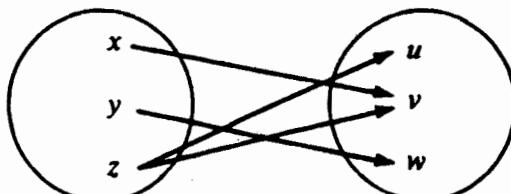
(الف)



(ب)



(c)



۴. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ -3 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

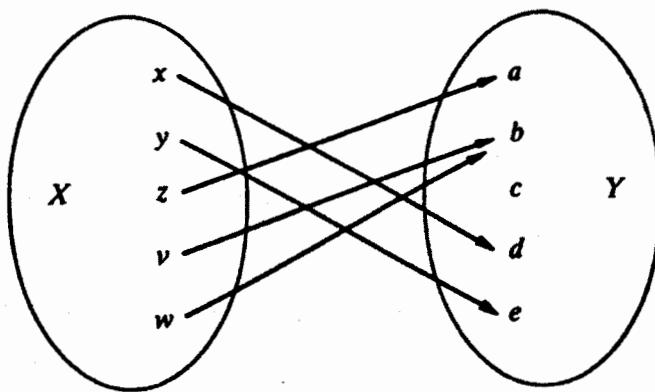
۵. $f(1/3), f(7), f(0), \dots, f(1234567)$ را باید.

۶. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 4x+3 & x > 5 \\ x^2-2 & -6 \leq x \leq 5 \\ 4-5x & x < -6 \end{cases}$$

$f(-7), f(3), f(6), f(-4)$ را باید.

۷. فرض کنید تابع $f: X \rightarrow Y$ با نمودار زیر تعریف شده است



نگاره این تابع چیست؟

۸. فرض کنید تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ با $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $f(x) = x^2 - 3$ برای هر $x \in X$ تعریف شده است. نگاره تابع f را باید.

۹. هر یک از عبارتهای زیر یک تابع از \mathbb{R} به \mathbb{R} تعریف می‌کند. نگاره هر یک از این تابعها را باید.

$$(الف) f(x) = 2x^2 + 5$$

$$(ب) g(x) = \cos x$$

$$(پ) h(x) = x^3 - 1$$

۱۰. گیریم $X \subseteq Y$ و $f = \{(x, x) | x \in X\}$. ثابت کنید که $f: X \rightarrow Y$ یک تابع است.

[تذکر: این تابع را تابع شمولی می‌گویند و می‌توان آن را با $f: X \subseteq Y$ نشان داد.]

۱۱. مجموعه‌های $X = \{x, y, z\}$ و $Y = \{1, 2, 3\}$ مفروض اند. با کدام یک از عبارات زیر یک تابع از X به Y مشخص می‌شود؟ برای هر عبارت که تابع نیست، دلیل تابع

تبودن را ذکر کنید.

(الف) $f = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$

(ب) $g = (x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$

(ج) $h = \{(x, 2), (y, 1)\}$

(د) $i = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$

۹. در مسئله ۸، بالا،

(الف) رابطه‌های وارون f^{-1}, g^{-1}, h^{-1} و i^{-1} را بیابید.

(ب) کدام یک از رابطه‌های وارون در (الف)، تابعی از Y به X هستند، و کدام یک تابع نیستند؟ چرا؟

۱۰. آیا f^{-1} در مسئله ۴ یک تابع از Y به X هست؟

۱۱. اگر $\{x, y, z\} = X$ و $\{1, 2\} = Y$ ، چند تابع از X به Y وجود دارد؟ در حالت کلیتر، اگر مجموعه X ، m عنصر و مجموعه Y ، n عنصر داشته باشد، چند تابع از X به Y وجود دارد؟

۱۲. چند تابع از توابع مسئله ۱۱، توابع ثابت هستند؟

۱۳. فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و A یک زیرمجموعه ناتهی X است. ثابت کنید که $f|A: A \rightarrow Y$ تحدید تابع $f: X \rightarrow Y$ یک تابع است. [برای تعریف «تحدید» مسئله ۱۵، تمرین ۲۰۳ را بینید.]

۱۴. تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. ثابت کنید که هر زیرمجموعه f مانند g نیز یک تابع است.

۱۵. فرض کنید $X \rightarrow f$ یک تابع از X به X ، و همچنین یک رابطه انکاسی روی X است. ثابت کنید که در این صورت f تابع همانی $I_X: X \rightarrow X$ است.

۱۶. فرض کنید X فاصله یکه $[1, 5]$ است. یک تابع $f: X \rightarrow X$ بیابید که یک رابطه متقابران روی X باشد.

۱۷. فرض کنید که دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: X \rightarrow Y$ یک حوزه و یک برد دارند. ثابت کنید که اگر $f \subseteq g$ آنگاه f نگاره g باشد.

۵. نگاره و نگاره وارون مجموعه

یادآوری می‌شود که اگر $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و x و y به ترتیب عناصرهایی از X و Y باشند بهقsmی که $f(x) = y$ ، آنگاه y نگاره x است، و x یک پیش‌نگاره y است. این مفهوم طبیعاً از عناصرها به زیرمجموعه‌ها، به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

تعریف ۹. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع، و A و B به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از X و Y باشند.

(الف) نگاره A تحت f ، که با $f(A)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام نگاره های $x \in A$ است به قسمی که $f(x)$

(ب) نگاره دادن B تحت f^{-1} ، که با $f^{-1}(B)$ نشان داده می شود، مجموعه تمام پیش نگاره های y های متعلق به B است.

با استفاده از نماد مجموعه ساز، $f(A)$ و $f^{-1}(B)$ با عبارتهای زیر بیان می شوند:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$$

قضیه ۹. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع است. آنگاه

$$(الف) f(\emptyset) = \emptyset$$

$$(ب) \forall x \in X, f(\{x\}) = \{f(x)\}$$

$$(ج) \text{اگر } A \subseteq B \subseteq X \text{، آنگاه } f(A) \subseteq f(B)$$

$$(د) \text{اگر } C \subseteq D \subseteq Y \text{، آنگاه } f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$$

چون قضیه ۹ به آسانی از تعریف ۹ نتیجه می شود، اثبات آن به خواننده واگذار می شود.

قضیه ۱۰. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از زیرمجموعه های X مفروض اند. آنگاه

$$(الف) f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$(ب) f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

برهان. (الف) تعریف ۹، و تعریف ۶ فصل ۲ را مکرر به کار می بیم، بدست می آید

$$y \in f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \iff y = f(x) \quad x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

$$\iff y = f(x) \quad \gamma \in \Gamma, \text{ بازی یک یا چند } x \in A_\gamma$$

$$\iff y \in f(A_\gamma) \quad \gamma \in \Gamma$$

$$\iff y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$\text{بنابراین، } f(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

(ب) چون بنابر قضیه ۹ (ج)، برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subseteq A_\gamma$ ، پس

برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq f(A_\gamma)$. از تعریف ۷ فصل ۲ نتیجه می شود که

$$f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

همچنانکه درمثال بعد می بینیم، نماد تساوی را نمی توان در قضیه ۱۵ (ب) بهجای نماد شمول \subseteq گذاشت.

مثال ۱۱. گیریم $A_1 = \{b\}$ ، $A_2 = \{a\}$ ، $\Gamma = \{1, 2\}$ ، $Y = \{c\}$ ، $X = \{a, b\}$ و $f : X \rightarrow Y$ تابع ثابت باشد. آنگاه $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$ باشد. این نشان می دهد که در همه حال $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) = \{c\}$ درست نیست.

قضیه ۱۱. تابع $f : X \rightarrow Y$ و $\{B_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های Y مفروض اند. آنگاه

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & f^{-1}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \\ \text{(ب)} \quad & f^{-1}(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \end{aligned}$$

برهان. (الف) تعریف ۹، و تعریف ۶ فصل ۲ را چندبار به کار می بریم، به دست می آید:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) & \iff f(x) \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \\ & \iff f(x) \in B_\gamma \quad \gamma \in \Gamma \\ & \iff x \in f^{-1}(B_\gamma) \quad \gamma \in \Gamma \\ & \iff x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \end{aligned}$$

بنابراین، ثابت شد که $f^{-1}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.
(b) با گذاشتن \bigcap بهجای \bigcup و عبارت «بهازی هر» بهجای «بهازی یک یا چند» در برهان قسمت (الف)، یک برهان قسمت (ب) به دست می آید. دانشجو باید، مرحله به مرحله، جایگزینی را تا آنجا که کاملاً قانع شود، انجام دهد.

قضیه ۱۲. گیریم $f : X \rightarrow Y$ یک تابع و B و C زیرمجموعه هایی از Y هستند. آنگاه

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

برهان. بهم ارزیهای زیر توجه می کنیم:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B - C) & \iff f(x) \in B - C \quad \text{تعریف ۹} \\ & \iff f(x) \in B \wedge f(x) \notin C \\ \text{تعریف ۵ (فصل ۲)} & \iff x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C) \\ \text{تعریف ۹} & \iff x \in [f^{-1}(B) - f^{-1}(C)] \\ \text{تعریف ۵ (فصل ۲)} & \end{aligned}$$

به این ترتیب ثابت می شود که

$$f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

تمرین ۵.۳

۱. در مسئله ۲، تمرین ۴.۳، مقادیر زیر را باید

$$(الف) \{1, 5, \log 2\}, f(\{\sqrt{2}, \pi\}), f(\{-1, 0\})$$

$$(ب) f^{-1}(\{-3, 4, 5\}), f^{-1}(\{0, 1\}), f^{-1}(\{4, 5\}), f^{-1}(\{-3, 3\})$$

۲. در مسئله ۳، تمرین ۴.۳، مقادیر زیر را باید

$$(الف) \{6, 4, 1, 8\}, f(\{-7, 3, 2, 7\}), f(\{-8, 2, 1\})$$

$$(ب) f^{-1}(\{1, 2, 3\}), f^{-1}(\{-3, 2\}), f^{-1}(\{5, 1\})$$

۳. در مسئله ۴، تمرین ۴.۳، مقادیر $f^{-1}(\{c\}), f(\{v, w\}), f^{-1}(\{a, b\})$ را باید.

۴. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع، و $A \subseteq X, B \subseteq Y$ هستند. ثابت کنید

$$(الف) A \subseteq f^{-1}(f(A))$$

$$(ب) f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

۵. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و $A \subseteq X, B \subseteq Y$ هستند. مثالهایی بیاورید که نشان دهد حکمهای زیر دروغ می باشدند

$$(الف) \text{اگر } B \neq \emptyset, f^{-1}(B) \neq \emptyset, \text{ آنگاه } f$$

$$(ب) f^{-1}(f(A)) = A$$

$$(ج) f(f^{-1}(B)) = B$$

$$(د) f(X) = Y$$

۶. ثابت کنید که اگر $f(X) = Y$ ، مسئله ۵ (ج) راست است.

۷. گیریم $f: X \rightarrow Y$ تابع بدهقانی است که $f(X) = Y$ و $B \subseteq C \subseteq Y$ زیرمجموعه هایی از Y هستند. ثابت کنید اگر $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$ ، آنگاه $B = C$. مثالی بیاورید که نشان دهد که در حالت $f(X) \neq Y$ ، حکم نادرست است.

۸. گیریم X و Y دومجموعه، و $p_X: X \times Y \rightarrow X$ و $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ به ترتیب

توابعی هستند که با $p_X(x, y) = x$ و $p_Y(x, y) = y$ برای تمام $(x, y) \in X \times Y$

داده شده اند. (p_X و p_Y به ترتیب X -تحمیل و Y -تحمیل گفته می شوند). ثابت کنید که

اگر \mathcal{R} یک رابطه از X به Y باشد، یعنی $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ ، آنگاه

$$\text{و } p_Y(\mathcal{R}) = \text{Im } \mathcal{R}$$

۹. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $A \subseteq X, B \subseteq Y$ مفروض اند. ثابت کنید

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B \quad (\text{الف})$$

$$\text{۱۰. } f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \quad (\text{ب})$$

تابع $f: X \rightarrow Y$ و $B \subseteq Y$ مفروض است. ثابت کنید.

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

۱۱. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع، و A و B زیرمجموعه‌هایی از X هستند. مثالی بیاورید که نشان دهد عبارت زیر نادرست است.

$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

۱۲. قضیه ۹ را ثابت کنید.

۱۳. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع است. ثابت کنید خانواده مجموعه‌های $\varphi = \{f^{-1}(y) | f^{-1}(y) \neq \emptyset, y \in Y\}$ یک افزای X است.

۱۴. تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. ثابت کنید رابطه

$$\mathcal{R}(f) = \{(a, b) \in X \times X | f(a) = f(b)\}$$

یک رابطه هم ارزی در X است.

۱۵. فرض کنیم f ، φ و $\mathcal{R}(f)$ همانهایی باشند که در مسئله ۱۳ و ۱۴ عنوان شده است. ثابت کنید $\varphi = \mathcal{R}(f)$ و $X/\varphi = X/\mathcal{R}(f)$.

۶. تابع یک به یک، پوششی، و دوسویی

در مطالعه توابع، مناسب می‌دانیم که سه نوع مهم از توابع را نامگذاری کنیم.

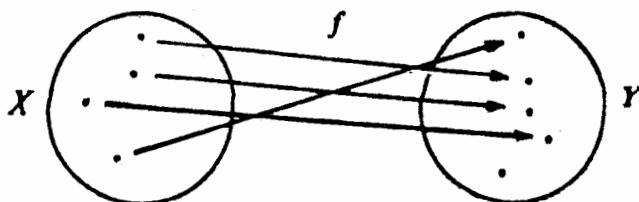
تعریف ۱۰. تابع $f: X \rightarrow Y$ یک به یک یا اثباتیو گفته می‌شود اگر $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) = f(x_2)$ ، آنگاه $x_1 = x_2$. تابع اثباتیورا اثباتیون نیز می‌گویند. بنابر قانون عکس نقیض در منطق، این تعریف هم ارز است با اینکه بگوییم تابع $f: X \rightarrow Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر از $x_1, x_2 \in X$ و $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود $f(x_1) \neq f(x_2)$. مثلاً، تابع شمول در مسئله ۷، تمرین ۴۰۳، یک به یک است.

تعریف ۱۱. تابع $f: X \rightarrow Y$ یا پوششی گفته می‌شود در صورتی که اگر $y \in Y$ آنگاه حداقل یک $x \in X$ وجود داشته باشد به قسمی که $y = f(x)$. تابع سورژیتی، سورژیون نیز نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، $f: X \rightarrow Y$ سورژیتیون است اگر و تنها اگر $f(x) = Y$.

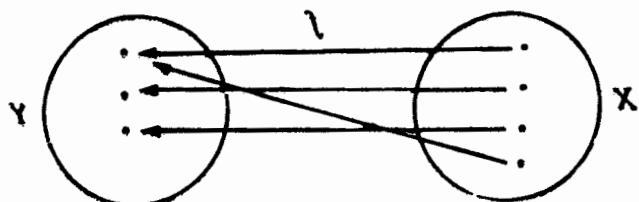
مثال ۱۲. تابع مثال ۷، بخش ۴، پوششی نیست.

مثال ۱۲. تابع سینوسی $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ که با $f(x) = \sin x$ تعریف می‌شود پوششی است. اما اگر به جای $[-1, 1]$ ، برد تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پوششی نیست.

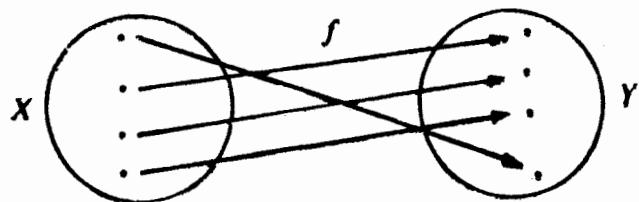
تابع یک به یک، پوششی، و دوسویی ۱۹



شکل ۰۱۲ $f: X \rightarrow Y$ یک به یک است.



شکل ۰۱۳ $f: X \rightarrow Y$ پوششی است.



شکل ۰۱۴ $f: X \rightarrow Y$ دوسویی است.

تعریف ۱۲. تابع $Y \rightarrow X$ دوسویی یا بیزکتیو گفته می شود اگر هم یک به یک باشد و هم پوششی. به تابع دوسویی، تنازن یک به یک نیز گفته می شود.

مثلاً، تابع همانی در مثال ۹، بخش ۴، یک دوسویی است. تعاریف ۱۵، ۱۱، ۱۰، ۱۲ و ۱۳، ۱۴ و ۱۵ نشان داده شده اند. مجموعه های X و Y به صورت مجموعه هایی از نقاط داخل دایره ها نشان داده شده اند. در هر شکل، هر نقطه X با یک پیکان به یک نقطه Y مربوط شده است. با مجموعه جفت هایی که به این ترتیب بدست می آیند یک تابع $f: X \rightarrow Y$ مشخص می شود.

حکم قضیه ۱۵ (ب) را می توان برای تابع یک به یک به صورت بهتری درآورد.

قضیه ۱۳. گیریم $Y \rightarrow X$: f یک به یک است و $\{\gamma \in \Gamma \mid A_\gamma\}$ خانواده ای از زیرمجموعه های X هستند. آنگاه

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

برهان. بنابر تعریف ۹، و تعریف ۷ فصل ۲، داریم

$$y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \iff y \in f(A_\gamma) \forall \gamma \in \Gamma$$

$$\iff (\exists x_\gamma \in A_\gamma, y = f(x_\gamma)) \forall \gamma \in \Gamma$$

چون $Y \rightarrow X$ یک به یک است، همه این x_γ ها یکی هستند؛ این عنصر را با x نشان می‌دهیم. پس داریم

$$y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \iff \exists x \in A \quad \forall \gamma \in \Gamma, y = f(x)$$

$$\iff \exists x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \quad y = f(x)$$

$$\iff y \in f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$$

$$\therefore f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

بنا بر این، $f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$ یادآوری می‌شود که اگر \mathcal{R} یک رابطه از X به Y باشد، آنگاه رابطه وارون آن

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

یک رابطه از Y به X است. چون تابع $f: X \rightarrow Y$ (نوع بخصوصی از) یک رابطه از X به Y است، f^{-1} حداقل یک رابطه از Y به X است. طبیعی است سؤال شود که چه وقت f^{-1} یک تابع است. جواب این سؤال در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱۴. گیریم $Y \rightarrow X$ دوسویی است، آنگاه $X \rightarrow Y$ دوسویی است.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که رابطه f^{-1} از Y به X یک تابع است. چون $X \rightarrow Y$ پوششی است، بنابر مسئله ۳ (الف) تمرین ۲۰۳ داریم

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = Y$$

بنابر این شرط (الف) تعریف ۸ برقرار است. برای اینکه نشان داده شود که f^{-1} در شرط دیگر نیز صدق می‌کند، فرض می‌کنیم که $(y_1, x_1) \in f^{-1}$ و $(y_2, x_2) \in f^{-1}$ و $y_1 = y_2$. آنگاه داریم $f(x_1, y) \in f^{-1}$ و $f(x_2, y) \in f^{-1}$. در نتیجه $f(x_1, y) = f(x_2, y)$. حال چون f یک رابطه از X به Y است، تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $x_1 = x_2$. در نتیجه ثابت کردۀ ایم که $f^{-1}: Y \rightarrow X$ یک تابع است.

برای اینکه نشان دهیم $Y \rightarrow X$ یک به یک است، گیریم $y_1, y_2 \in Y$ و $y_1 = y_2$. پس داریم $f(x) = y_1$ و $f(x) = y_2$ و $y_1 = y_2$. این ثابت می‌کند که f^{-1} یک به یک است.

بالاخره باید نشان داده شود که $X \rightarrow Y$ پوششی است. بنابر مسئله ۳ (ب)، تمرین

۲.۳ داریم $X = \text{Dom}(f) = \text{Im}(f^{-1})$ ، که نشان می‌دهد f^{-1} پوششی است. به این ترتیب اثبات کامل است.

اگر $f: Y \rightarrow X$ دوسویی باشد، تابع $X \rightarrow Y$ f^{-1} تابع وارون گفته می‌شود (مسئله ۱۷، تمرین ۴.۳ را هم بینید).

بنابر قضیه ۱۴، اگر $f: Y \rightarrow X$ دوسویی باشد (= تناظر یک به یک)، می‌توانیم بگوییم f یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌های X و Y است.

تمرین ۶.۳

۱. کدام یک از توابع مسائل ۲، ۳ و ۴ تمرین ۴.۳ یک به یک هستند؟ کدام یک پوششی هستند؟

۲. کدام یک از توابع مسائل ۵ و ۶ تمرین ۴.۳ یک به یک هستند؟ پوششی هستند؟ دوسویی هستند؟

۳. گیریم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی است که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ با $f(x) = 3x - 2$ تعریف شده است.

(الف) ثابت کنید که تابع f دوسویی است.

(ب) تابع وارون f ، یعنی f^{-1} را پیدا کنید.

۴. گیریم $\mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$: تابعی است که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ با $\tan x = g(x) = \tan x$ تعریف شده است. آیا این تابع دوسویی است؟ اگر چنین است، تابع وارون آن را پیدا کنید.

۵. ثابت کنید که تابع مشخصه $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ که در مثال ۸، بخش ۴ آمده است، پوششی است اگر و تنها اگر $A \subset X$ و $A \neq \emptyset$. چه وقت $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ دوسویی می‌شود؟

۶. ثابت کنید که تابع ثابت $C_b: X \rightarrow Y$ پوششی است اگر و تنها اگر $\{b\} = Y$. چه وقت $C_b: X \rightarrow Y$ یک به یک می‌شود؟

۷. ثابت کنید که X -تصویر $X \times Y \rightarrow Y$ -تصویر $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ که در مسئله ۸، تمرین ۵.۳ آمده‌اند، پوششی هستند. چه وقت X -تصویر یک به یک است؟

۸. ثابت کنید که یک تناظر یک به یک بین مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} و مجموعه اعداد طبیعی زوج وجود دارد.

۹. ثابت کنید که یک تناظر یک به یک بین مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} و مجموعه تمام اعداد صحیح فرد وجود دارد.

۱۰. گیریم X یک مجموعه متناهی با m عنصر و Y یک مجموعه متناهی با n عنصر است. ثابت کنید

(الف) اگر $n > m$ ، آنگاه هیچ تابع یک به یک $f: X \rightarrow Y$ وجود ندارد.

(ب) اگر $n \leq m$ ، آنگاه دقیقاً $n!/(n-m)!$ تابع یک به یک وجود دارد.

[به مسئله ۱۱، تمرین ۴.۳ نگاه کنید.]

۱۱. گیریم X یک مجموعه متناهی با m عنصر است. چند تابع دوسویی از X روی X وجود دارد؟

[تذکر: یک تابع دوسویی از یک مجموعه متناهی روی خودش، در مواردی جایگشت نامیده می‌شود.]

۱۲. تابع $f: X \rightarrow Y$ و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ مفروض آن‌د. ثابت کنید

(الف) اگر f یک به‌یک باشد، آنگاه $f^{-1}(f(A)) = A$

(ب) اگر f پوششی باشد، آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$

۱۳. عکس مسئله ۱۲ را ثابت کنید:

(الف) اگر برای هر f یک به‌یک باشد، $f^{-1}(f(A)) = A$, $A \subseteq X$.

(ب) اگر برای هر f یک به‌یک باشد، $f(f^{-1}(B)) = B$, $B \subseteq Y$.

۱۴. فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک به‌یک است و $B \subseteq X$. ثابت کنید $f(X-B) = f(X) - f(B)$.

۱۵. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک به‌یک، و A و B زیرمجموعه‌های X هستند. ثابت کنید که $f(A-B) = f(A) - f(B)$. [با مسئله ۱۱ تمرین ۵.۰.۳ مقایسه کنید]

۱۶. فرض کنیم تابع $f: X \rightarrow X$ چنان باشد که برای هر $x \in X$, $f(f(x)) = x$. ثابت کنید f یک رابطه متقارن روی X است.

۱۷. عکس قضیه ۱۴ را ثابت کنید: فرض کنید $f: Y \rightarrow X$ چنان تابعی است که f^{-1} تابعی از Y به X است. آنگاه f دوسویی است.

۱۸. ثابت کنید $f: X \rightarrow Y$ یک به‌یک است اگر و تنها اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B , $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

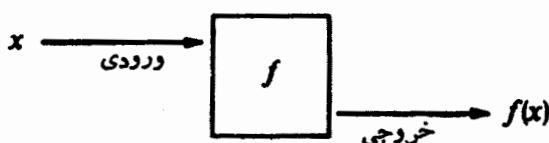
۱۹. عکس مسئله ۱۵ را ثابت کنید:

اگر برای تمام زیرمجموعه‌های X مانند A و B , $f(A-B) = f(A) - f(B)$ یک به‌یک است.

۲۰. آیا عکس مسئله ۱۴ صحیح است؟

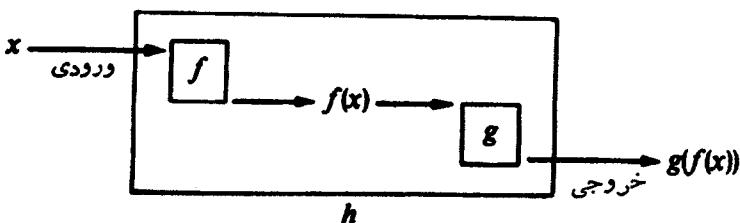
۷. ترکیب توابع

یک تابع $f: X \rightarrow Y$ را می‌توان ماشینی تصویر کرد که شیوه اختیاری از مجموعه X مانند x را می‌گیرد، روی آن به‌طریقی عمل می‌کند، و آن را به‌شیوه جدید $f(x)$ تبدیل کرده تحویل می‌دهد. این تغییر در شکل ۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۵

ترکیب توابع ۹۳



شکل ۱۶

دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ بهطوری که حوزه تابع دومی برد تابع اولی است، مفروض اند. این دو تابع را دو ماشین تصور کنید، مثلاً یکی ماشین لباسشویی و دیگری ماشین خشک کن. لازم نیست مختصر باشیم تا بتوانیم تصور کنیم که امکان دارد از ترکیب این دو ماشین، ماشین جدیدی بسازیم؛ ماشینی می‌سازیم که لباس چرک x را می‌شویده آن را به لباس پاک و خیس (x) تبدیل می‌کند و سپس آن را خشک می‌کند. چیزی که از ماشین خارج می‌شود لباس پاک و خشک $((f)(x))g$ است. این طرز فکر در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

از «ترکیب» ماشینهای $Y \rightarrow f: X \rightarrow Z$ و $g: Y \rightarrow Z$ ، که با $h: X \rightarrow Z$ نمایش داده می‌شود، ماشین جدیدی به دست می‌آید که یک شیء دلخواه X مانند x را می‌گیرد و آن را پوششی $h(x) = g(f(x))$ ، که یکی از اشیاء Z است، تبدیل می‌کند. نماد مرسوم برای h $f \circ g$ است و $((f)(x))g = g(f(x))$ را «ترکیب» f و g می‌نامند. اکنون می‌توانیم تعریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۱۳. دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ مفروض اند. ترکیب این دو تابع، تابع $g \circ f: X \rightarrow Z$ است که در آن به ازای هر x در X ، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. به صورت دیگر

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$$

مثال ۱۳. گیریم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هستند که به ترتیب برای تمام x های در \mathbb{R} به صورت $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$ داده شده اند. ترکیب $(g \circ f)(x)$ و $(f \circ g)(x)$ را بیاورد.

حل. با استفاده از تعریف ۱۳، داریم

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) & (1) \\
 &= g(x+1) \\
 &= (x+1)^2 \\
 &= x^2 + 2x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(x^4) \\
 &= x^8 + 1
 \end{aligned} \tag{۲}$$

از مثال ۱۳ نتیجه می‌شود که در حالت کلی $f \circ g \neq g \circ f$ و بنابراین، ترکیب تابعی، جا به جایی نیست.

قضیه ۱۵. ترکیب تابعی شرکنپذیر است. یعنی اگر $f: Y \rightarrow Z$, $g: X \rightarrow Y$, $h: Z \rightarrow W$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

برهان. نخست توجه می‌کنیم که $(h \circ g) \circ f$ و $h \circ (g \circ f)$ هردو توابعی از X به W هستند. پس، بنابر قضیه ۷ بخش ۴ کافی است نشان دهیم که برای هر x در X $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$.
اما از تعریف ۱۳ نتیجه می‌شود که برای هر x در X

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

و

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

از این دو رابطه دیده می‌شود که $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
اکنون اثبات کامل است.

قضیه ۱۶. تابع $X \rightarrow Y$: f مفروض است. آنگاه
(الف) اگر تابع $X \rightarrow Y$: g وجود داشته باشد به‌طوری که $I_X \circ f = I_X$ (که در آن $X \rightarrow X$: I_X تابع همانی است که در مثال ۹، بخش ۴ تعریف شده است)، آنگاه $f: X \rightarrow Y$ یک به‌یک است.

(ب) اگر تابع $X \rightarrow Y$: h وجود داشته باشد به‌طوری که $I_Y \circ h = I_Y$, آنگاه $f: X \rightarrow Y$ پوششی است.

برهان. (الف) فرض کنید تابع $X \rightarrow Y$: g به‌طوری که $I_X \circ f = I_X$ و وجود دارد.
آنگاه برای هر x_1 و x_2 در X به‌طوری که $f(x_1) = f(x_2)$ داریم:

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$$

این نشان می‌دهد که $f: X \rightarrow Y$ یک به‌یک است.

ترکیب توابع ۹۵

(ب) فرض کنید تابع $X \rightarrow Y \rightarrow f \circ h = I_Y$ به طوری که $h: Y \rightarrow X$ وجود دارد. آنگاه برای هر $y \in Y$ ، یک عنصر

$$x = h(y) \in X$$

وجود دارد به قسمی که

$$f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = I_Y(y) = y$$

بنابر تعریف $f: X \rightarrow Y$ پوششی است.

تمرین ۷.۳

۱. فرض کنید که دو تابع $f: R \rightarrow R$ و $g: R \rightarrow R$ به ترتیب با $f(x) = 2x^3 + 1$ و $g(x) = \cot x$ برای هر $x \in R$ تعریف شده‌اند.

(الف) ترکیب $f \circ g$ را بایاورد.

(ب) ترکیب $g \circ f$ را بایاورد.

۲. فرض کنید که دو تابع $f: R_+ \rightarrow R$ و $g: R \rightarrow R_+$ به ترتیب با $f(x) = 10^x$ و $g(x) = \log_{10} x$ برای هر $x \in R$ تعریف شده‌اند.

(الف) ترکیب $R_+ \rightarrow R \circ f$ را بایاورد.

(ب) ترکیب $R \rightarrow R \circ g \circ f$ را بایاورد.

۳. گیریم f ، g ، و h توابع داده شده در مسئله ۶، تمرین ۴.۳ هستند.

(الف) ترکیب $f \circ g \circ h$ را بایاورد.

(ب) ترکیب $g \circ h \circ f$ را بایاورد.

(پ) ترکیب $(g \circ f) \circ h$ را بایاورد.

(ت) ترکیب $f \circ (h \circ g)$ را بایاورد.

(ث) دوتابع $(g \circ f) \circ h$ و $f \circ (h \circ g)$ را که بدست آورده‌اید باهم مقایسه کنید؟ آیا آنها یکی هستند؟

۴. تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. ثابت کنید که $f \circ I_X = f = I_Y \circ f$. گیریم $f: X \rightarrow Y$ دوسویی و $f^{-1}: Y \rightarrow X$ تابع دارون f است. ثابت کنید که $f^{-1} \circ f = I_X$ و $f \circ f^{-1} = I_Y$.

۵. گیریم $f: X \rightarrow Y$ یک تابع است. اگر توابع $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ و $g: Y \rightarrow X$ داشته باشند به طوری که $f \circ h = I_X$ و $g \circ f = I_Y$ دوسویی باشند، آنگاه $g \circ h = f^{-1}$ داشته باشد.

۶. دو تابع $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ مفروض‌اند. ثابت کنید (الف) اگر $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ یک به یک باشند، آنگاه $g \circ f: X \rightarrow Z$ نیز یک به یک است.

(ب) اگر $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ یک به یک باشند، آنگاه $g \circ f: X \rightarrow Z$ نیز یک به یک است.

پوششی است.

۸. گیریم \mathcal{R} یک رابطه از X به Y و \mathcal{S} یک رابطه از Y به Z است. می‌توانیم، همانند ترکیب توابع، ترکیب این رابطه‌ها را با

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y)(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}\}$$

که رابطه‌ای از X به Z است، تعریف کنیم. ثابت کنید که

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$$

(ب) اگر بخلافه \mathcal{S} یک رابطه از Z به W باشد، آنگاه $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. فرض کنیم \mathcal{R} یک رابطه روی X است. ثابت کنید

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \supseteq I_X$$

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$$

۹. فرض کنید \mathcal{R} یک رابطه از X به Y و \mathcal{S} ، \mathcal{T} رابطه‌ایی از Y به Z هستند. ثابت کنید

$$(\mathcal{T} \cup \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$$

۱۰. فرض کنید \mathcal{R} و \mathcal{T} رابطه‌ایی از X به Y هستند و \mathcal{S} یک رابطه از Y به Z است. ثابت کنید

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})$$

۱۱. گیریم $Y \rightarrow Z : f$ و $Y \rightarrow X : g$ دو تابع دوسویی هستند. ثابت کنید که $f \circ g : X \rightarrow Z$ دوسویی است، و تابع وارون $f^{-1} : Z \rightarrow X$ ، $(g \circ f)^{-1} : Z \rightarrow X$ است، که در آن تابهای $Z \rightarrow Y$ و $g^{-1} : Z \rightarrow X$ و $f^{-1} : Y \rightarrow X$ به ترتیب وارون توابع g و f هستند. خلاصه اینکه $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

۴۵

جبر بول و کاربردهای آن

مطالعه جالب و مفید مجموعه‌ها در ارتباط با عملهای اجتماعی، اشتراک و متمم‌گیری به تحریید دستگاه جبری مهم و مفیدی منجری شود که به جبر بول (به انگلیسی جوونج بول^{*}) معروف است. (یا پیدان و منطقدان) در این فصل، دیگریهای اصلی جبر بول و کاردید آن در طراحی مدارهای الکترونیکی و مدارهای دقی مطالعه شده است.

۱. جبر بول

تعریفهای همارز اما ظاهرآ متفاوتی از جبر بول وجود دارد، ما به خاطر تشابه آن با ساختمان بعضی از مجموعه‌ای مجموعه‌ها، تعریف زیر را انتخاب می‌کنیم. منظور از یک عمل دو تایی روی مجموعه S ، تابعی است مانند \circ از حاصلضرب دکارتی $S \times S$ به S . برای هر $(a, b) \in S \times S$ به جای $a \circ b$ معمولاً aob می‌نویسیم.

تعریف ۱. جبر بول یک سه‌گانه $(+, \cdot, \circ)$ است که در آن \circ یک مجموعه غیر تهی، و

* George Boole (1815–1864)

+ و \circ دو عمل دوتایی روی \mathcal{B} هستند که به ازای هر $a, b, c \in \mathcal{B}$ در شرط‌های (الف) تا (ه) صدق می‌کنند:

$$a+b=b+a \quad \text{(الف) جابه‌جایی:}$$

$$a \circ b = b \circ a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{(ب) شرکت‌پذیری:}$$

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c) \quad \text{(ج) پخش‌پذیری:}$$

$$a + (b \circ c) = (a + b) \circ (a + c)$$

(د) یکه‌ها: عضوهای $1 \in \mathcal{B}$ ، $0 \in \mathcal{B}$ یا شرط $1 \neq 0$ وجود دارند به قسمی که

$$a + 0 = a \quad \text{و} \quad a \circ 1 = a$$

(ه) منمیگیری: برای هر $a \in \mathcal{B}$ ، عضو $a' \in \mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که

$$a + a' = 1 \quad \text{و} \quad a \circ a' = 0$$

عملهای + و \circ به ترتیب جمع (یا) و ضرب (یا) نامیده می‌شوند. عضوهای ۰ و ۱ در (د)، گرچه هیچ‌گونه ربطی با اعداد ۰ و ۱ ندارند، عنصرهای حفظ و همانی گفته می‌شوند عضو a' در (ه) متنم a گفته می‌شود.

مثال ۱. ۰ گیریم $\{0, 1\} = \mathcal{B}_2$ و عملهای دوتایی + و \circ روی \mathcal{B}_2 با جدولهای زیر داده شده‌اند

جدول ۱

+	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

آنگاه، سه گانه $(0, +, \circ)$ در تعریف جبر بول صدق می‌کند. بنابر (د) بدینهی است که تعداد عضوهای این جبر بول کمترین است. عضوهای ۰ و ۱ را باید.

مثال ۲. U مجموعه‌ای است غیرتنهی. در مجموعه توانی $(U)^{\varphi}$ ، گیریم برای هر

جبر بول ۹۹

مثال ۳. گیریم \mathcal{B} مجموعه کلاس‌های همارزی منطقی گزاره‌های پدیدآمده از مجموعه‌ای از گزاره‌های ساده $\{p, q, r \dots\}$ است. آنگاه سه‌گانه $(\mathcal{B}, \vee, \wedge)$ یک جبر بول است که در آن \circ کلاس تناقضها و 1 کلاس راستگوها است. برای $a, a' \in \mathcal{B}$ چیست؟

اکنون آماده‌ایم چند قضیه اساسی در جبر بول را ثابت کنیم.

قضیه ۱. در جبر بول،

(الف) $0 \circ 1 = 0$ یکتا هستند.

(ب) برای هر a در \mathcal{B} ، $a \circ a' = 0$ یکتا است.

برهان. (الف) گیریم \neg یک عنصر صفر دیگر در \mathcal{B} باشد. داریم

$$\neg \circ \neg = 0 \quad \text{بنابر تعریف ۱ (د)}$$

$$= 0 \circ \neg \quad \text{بنابر تعریف ۱ (الف)}$$

$$= 0 \quad \text{بنابر تعریف ۱ (د)، زیرا } \neg \text{ عنصر صفر است}$$

برهان یکتایی ۱ با آنچه گفته شد مشابه است.

(ب) گیریم x یک عضو \mathcal{B} است به قسمی که $1 = a + x = 0$ و $a \circ x = 0$. آنگاه

$$\text{تعریف ۱ (د)} \quad x = x \circ 1$$

$$\text{تعریف ۱ (د)} \quad = x \circ (a + a')$$

$$\text{تعریف ۱ (ج)} \quad = (x \circ a) + (x \circ a')$$

$$\text{تعریف ۱ (الف)} \quad = (a \circ x) + (x \circ a')$$

$$a \circ x = 0 \quad = 0 + (x \circ a')$$

$$\text{تعریف ۱ (د)} \quad = x \circ a'$$

همچنین، می‌توان ثابت کرد که $x \circ a' = a' \circ x = a'$. بنابر این $a' = x$ و از این‌رو a' بکا است.

قضیه ۲. برای هر $a, a \in \mathcal{B}$ ، $(a')' = a$.

برهان این قضیه به عنوان تمرین بخواننده واگذار می‌شود (تمرین ۳ را ببینید).

قضیه ۳. عملهای $+$ و \circ خود توان هستند:

$$\text{برای هر } a, a \in \mathcal{B} \quad a \circ a = a \quad a + a = a$$

برهان.

$$\begin{array}{ll}
 \text{تعريف ۱ (د)} & a+a = (a+a) \cdot 1 \\
 \text{تعريف ۱ (ه)} & = (a+a) \cdot (a+a') \\
 \text{تعريف ۱ (ج)} & = a+(a \cdot a') \\
 \text{تعريف ۱ (ه)} & = a+0 \\
 \text{تعريف ۱ (د)} & = a
 \end{array}$$

برهان $a \cdot a = a$ به عنوان تعریف واگذار می‌شود.

قضیة ۴. در جبر بول، $1 = 1'$ و $0 = 0'$.

برهان. بنابر تعریف ۱ (الف) و ۱ (د) داریم $1 = 1 + 0 = 1 + 0 = 0 + 1 = 0 + 1 = 1'$ ، و از تعریف ۱ (د) داریم $0 = 1 - 1 = 0$ ، پس بنابر تعریف ۱ (ه) و قضیه ۱ (ب) داریم $1 = 0'$. معادله دوم $0 = 1'$ به همین ترتیب، یا با به کار بردن قضیه ۲ برای $1 = 0'$ ثابت می‌شود.

قضیه ۵. برای هر $a \in \mathcal{B}$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

برهان.

$$\begin{array}{ll}
 \text{تعريف ۱ (ه)} & a \cdot 1 = a + (a + a') \\
 \text{تعريف ۱ (ب)} & = (a + a) + a' \\
 \text{قضیه ۳} & = a + a' \\
 \text{تعريف ۱ (ه)} & = 1
 \end{array}$$

برهان $0 = a \cdot 0$ به عنوان تعریف ۱ به عنوان تعریف واگذار می‌شود.

قضیه ۶. قانون دمودگن: برای هر $a, b \in \mathcal{B}$ داریم $(a+b)' = a' \cdot b'$ و $(a \cdot b)' = a' + b'$

برهان. برای اثبات قسمت اول، بنابر تعریف ۱ (ه) و قضیه ۱ (ب) کافی است نشان دهیم که $1 = (a+b) + (a' \cdot b')$.
 $(a+b) + (a' \cdot b') = (a+b) + (a' \cdot b') = 0$.
اما داریم

$$\begin{array}{ll}
 \text{تعريف ۱ (ج)} & (a+b) + (a' \cdot b') = [(a+b) + a'] \cdot [(a+b) + b'] \\
 \text{تعريف ۱ (الف) و ۱ (ب)} & = [a' + (a+b)] \cdot [a + (b+b')] \\
 \text{تعريف ۱ (ه) و ۱ (ه)} & = [(a'+a)+b] \cdot [a+1]
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{تعريف ۱ (۵)} &= (1+b) \cdot (a+1) \\
 \text{تعريف ۱ (الف)، قضیه ۵} &= 1 \cdot 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

برهان $\circ = (a+b) \cdot (a'+b')$ و قسمت دوم قضیه به عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

جبر بول (U, \cup, \cap, \circ) نقش مهمی در مطالعه جبرهای بول مجرد دارد. اگر $(B, +, \circ)$ یک جبر بول متناهی باشد، آنگاه می‌توان ثابت کرد که یک مجموعه متناهی U وجود دارد به قسمی که $(\varphi(U), \cup, \cap, \circ)$ دقیقاً دارای همان خواص جبری $(B, +, \circ)$ است و بنابراین (U, \cup, \cap, \circ) را می‌توان کاملاً به جای $(B, +, \circ)$ به کار برد. اگر B نامتناهی باشد، این مطلب دقیقاً درست نیست، اما $(B, +, \circ)$ را می‌توان با یک زیرخانواده (U, \cup, \cap, \circ) از یک مجموعه نامتناهی مناسب U ، تطبیق داد.

تمرین ۱۰۴

۱. نشان دهید که $(B_2, +, \circ)$ در مثال ۱ کوچکترین جبر بول است.
۲. نشان دهید که (U, \cup, \cap, \circ) در مثال ۲، در شرایط تعريف ۱ از (الف) تا (ه) صدق می‌کند.
۳. قضیه ۲ را ثابت کنید: برای هر $a \in B$ ، $a' = a'$.
۴. آیا می‌توانید جبر بولی بازید که دقیقاً سه عنصر داشته باشد؟ چرا؟
۵. آیا یک جبر بول می‌تواند عنصری مانند a داشته باشد به طوری که $a' = a$ ؟
۶. ثابت کنید که برای هر a متعلق به B داریم $a \cdot a = a$.
۷. ثابت کنید که $\circ = \circ'$.
۸. ثابت کنید که $a \cdot \circ = \circ$.
۹. قانونهای جذب زیر را ثابت کنید:

$$(الف) \quad a \cdot (a+b) = a \quad (ب) \quad a+(a \cdot b) = a$$

۱۰. ثابت کنید که $\circ = (a' \cdot b') \cdot (a+b)$.
 ۱۱. قسمت دوم قضیه ۶ را ثابت کنید: $(a \cdot b)' = a' + b'$.
 ۱۲. ثابت کنید که اگر $a+b = \circ$ آنگاه $a = \circ$ و $b = \circ$.
 ۱۳. ثابت کنید که اگر $a \cdot b = 1$ آنگاه $a = 1$ و $b = 1$.
 ۱۴. ثابت کنید که $a \cdot (a' + b) = a \cdot b$.
 ۱۵. گیریم a و b دو عضو یک جبر بول هستند. ثابت کنید که چهار شرط زیر هم ارزند.
- | | |
|----------------------|-----------------|
| $a' + b = 1$ | $a + b = b$ |
| $a' \cdot b = \circ$ | $a \cdot b = a$ |

۱۶. در یک جبر بول \mathcal{B} ، می‌گوییم a مقدم بر b است و آن را با $a \leqslant b$ نشان می‌دهیم، اگر و تها اگر یکی از چهار شرط مسئله ۱۵ برقرار باشد. ثابت کنید

(الف) \leqslant انکاسی است: برای هر $a, a \in \mathcal{B}$

(ب) \leqslant متعدی است: اگر $b \leqslant c$ آنگاه $a \leqslant c$

(ج) \leqslant پادمتقارن است: اگر $b \leqslant a$ و $a = b$ آنگاه $b \leqslant a$

[چنین رابطه‌ای را، «ابطله ترتیب جزئی» می‌گویند.]

۱۷. ثابت کنید برای هر $a \in \mathcal{B}$ ، $a \leqslant a$.

۳. تابع بول

متغیری که ارزشهاش فقط ۰ ۱ است یا، متغیر دوقابی نامیده می‌شود. تابع بول، عبارتی صوری مشکل از متغیرهای دوتایی، عملهای دوتایی $+ \cdot \circ$ ، عمل یکتایی، و پرانتزهاست. ما همواره جدولهای عمل در جبر بول \mathcal{B}_2 مثال ۱ را برای ارزیابی ارزش یک تابع بول به کار خواهیم برد. پس، هر وقت ارزشها متغیرها داده شده باشند، ارزش تابع بول ۰ است یا ۱. نمادهای منطقی $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ که در فصل اول آمده‌اند، متغیرهای دوتایی با ارزشها ۰ (برای دروغ) و ۱ (برای راست) هستند. هر عبارت منطقی، مانند $(q \wedge r) \vee p$ ، یک تابع بول است که در آن ۰، ۱ و x به ترتیب مجموع، حاصلضرب و متمم در جبر بول مثال ۳ هستند.

جدول ارزش برای یک تابع بول جدولی است شیوه جدول ارزش یک گزاره منطقی با این تفاوت که ۰ و ۱ به جای F و T در آن به کار رفته است. یک تفاوت جزئی بین جدولهای ارزش تابعهای بول و جدولهای ارزش در منطق است: در منطق، جدولهای ارزش از T به سوی F می‌روند، در حالی که در تابعهای بول، جدولهای ارزش از ۰ به سوی ۱ می‌روند. علت اصلی اینکه «جدول ارزش پرسو» را انتخاب کرده‌ایم این است که با ترتیبی که در کدگذاری دوتایی اعداد اعشاری معمول است همانگشت باشد.

برای اختصار، از این به بعد بسایر نشان دادن حاصلضرب بولی \circ (یا \wedge)، عاملهای ضرب را پهلوی هم می‌نویسیم. هرجا قانون شرکت‌پذیری پیش می‌آید، پرانتزها را حذف می‌کنیم. مثلاً به جای $(x \circ z) \circ y$ یا $x \circ (y \circ z)$ می‌نویسیم xyz .

مثال ۴. جدولهای ارزش تابعهای بول $x'y' + x'z$ و $G = x'yz$ ، $F = x + y'z$ و $H = xy' + x'z$ در یک جدول بزرگ، که در آن سه ستون آخر ارزشها F ، G و H را نشان می‌دهند، گردآوری شده است.

جدول ۲

x	y	z	F	G	H
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰

تابعهای بول را اغلب می‌توان با مینیمم کردن تعداد «لفظها» و تعداد جمله‌ها با استفاده از $x+x'=1$ ، $x+x' = x$ و دیگر اتحادهای ساده‌تر کسرد. یک لفظ یا یک متغیر پریم دار (متهم متغیر) است، یا یک متغیر بدون پریم. در کار بردهای نظریه جبر بول در طرحهای مداری (بخشهای ۳ و ۴ را بینید) مینیمم کردن تعداد لفظها به این معنی است که در مواد و وسائل می‌توان صرفه‌جویی کرد.

مثال ۵. تابعهای بول زیر را ساده کنید:

$$(الف) xy+xy'+x'y'$$

$$(ب) xy+xz+y'z$$

$$(ج) x+x'y$$

حل. (الف)

تعريف ۱ (ج)

$$xy+xy'+x'y' = x(y+y') + x'y'$$

$$y+y'=1$$

$$= x + x'y'$$

تعريف ۱ (ج)

$$= (x+x')(x+y')$$

$$x+x'=1$$

$$= x + y'$$

$$y+y'=1$$

$$xy+xz+y'z = xy + (y+y')xz + y'z \quad (ب)$$

تعريف ۱ (الف) و (ج)

$$= xy + xyz + xy'z + y'z$$

$$\begin{array}{ll} \text{تعريف ۱ (ج)} & = xy(1+z) + (x+1)y'z \\ \text{قضیه ۵} & = xy + y'z \end{array}$$

ساده کردن (ج) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

در کاربردهای عملی، همانند طراحی مدارهای رقمی، معمولاً از جدول ارزش داده شده یک تابع بول می سازند. این نوع مسئله راه حلی معین دارد. برای توضیح، حالت سه متغیری x , y و z را که جدول ارزش آن ($= 2^3 = 8$) ر دیف دارد، در نظر می گیریم

جدول ۳

x	y	z	$F = F(x, y, z)$
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰

حالت ۱. تابع بول داده شده، در ردیف زام، $\leqslant j \leqslant 8$ ، دارای ارزش ۱ و در حقیقت ردیفها دارای ارزش ۰ است.

برای حل این مسئله ساده تابعهای بول اساسی زیر را در نظر می گیریم

$$G_1 : x'y'z'$$

$$G_2 : x'y'z$$

$$G_3 : x'yz'$$

$$G_4 : x'yz$$

$$G_5 : xy'z'$$

$$G_6 : xyz'$$

$$G_7 : xyz$$

به راحتی دیده می شود که ارزش هر G_j ، $1 \leq j \leq 8$ ، در ردیف زام برابر با واحد رجاهای دیگر است.

حالت ۲. تابع داده شده در ردیفهای $j=1, \dots, j_1, \dots, j_{\ell}, \dots, j_r$ دارای ارزش ۱، و در بقیه جاها دارای ارزش ۰ است.
در این حالت، $F = G_{j_1} + G_{j_2} + \dots + G_{j_r}$ در شرط داده شده صدق می کند.
این مطلب مثلاً با پرسی $G_2 + G_3 = x'y'z + x'y'z'$ که دارای ارزش ۱ در ردیفهای ۲ و ۳، و ارزش ۰ در ردیفهای دیگر است، به آسانی دیده می شود.
فرایند بالا برای یافتن یک تابع بول از یک جدول ارزش داده شده تنها به سه متغیر محدود نیست. در حقیقت فرایند مذبور را می توان بهمین نحو برای هر تعداد متغیر از متغیرها به کار برد. جواب کلی که در بالا برای حالت ۲ به دست آورده به صورت «مجموع حاصلضرب ریها» است. یک راه دیگر برای حل این گونه مسائل، این است که جواب به صورت «حاصلضرب مجموعها» بیان شود. در مسئله های ۱۸، ۱۹ و ۲۰ زیر، به این راه اشاره شده است.

تمرین ۲۴

در مسئله های ۱ تا ۱۵، تابعهای بول داده شده را ساده کنید:

$$\begin{array}{ll}
 (x+y)(x+z)(y'+z) & .6 \quad x+x'y \quad .1 \\
 x'yz+x'y'z'+xy'z+xy'z' & .7 \quad xy+x'y+x'y' \quad .2 \\
 xyz'+xy'z'+x'yz'+x'y'z' & .8 \quad x'y+yz+xz \quad .3 \\
 xy+xy'z & .9 \quad x(x'+y) \quad .4 \\
 x(y'z+yz)+yz & .10 \quad xy'z'+xy'z+x'z' & .5
 \end{array}$$

در مسئله های ۱۱ تا ۱۳، تابعهای بول داده شده را ساده کنید به طوری که لفظهای تابعهای ساده شده به تعدادی باشد که در مقابل هر مسئله تعیین شده است

$$\begin{array}{ll}
 3 \text{ لفظ} & xy+zw+x+(x+z'+w')' \quad .11 \\
 4 \text{ لفظ} & xy+yz+xz'+yzw \quad .12 \\
 5 \text{ لفظ} & xyz+xyz'+x'yz+x'y'z+x'y'z' \quad .13
 \end{array}$$

۱۴. با جدول ارزش، نشان دهید که $G_2 + G_5 = x'y'z + xy'z'$ در ردیفهای ۲ و ۵ دارای ارزش ۱ و در بقیه ردیفها دارای ارزش ۰ است.

۱۵. نشان دهید که $G_2 + G_5 + G_7 = x'y'z + xy'z' + xyz'$ در ردیفهای ۲، ۵ و ۷ دارای ارزش ۱ و در بقیه ردیفها دارای ارزش ۰ است.

۱۶. یک تابع بول مثال بز نیز که در هر ردیف دارای ارزش ۰ باشد.

۱۷. یک تابع بول مثال بز نیز که در هر ردیف دارای ارزش ۱ باشد.

۱۸. با متممگیری از $z'yz$ تا $G_1 = x'y'z'$ داریم

$$G'_1 = x + y + z, \dots, G'_A = x' + y' + z'$$

ارزش‌های G'_j ، G'_A ، 1 ، $2, \dots$ را تعیین کنید.

۱۹. ارزش‌های G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 را برای ردیفهای ۱ تا ۸ پیدا کنید.

۲۰. ارزش‌های تابعهای بول مسئله‌های ۱۵ و ۱۹ بالا را باهم مقایسه کنید.

۳. تابع بول و دریچه‌های منطقی

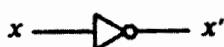
با ورودی مناسب، مدارهای رقیع الکترونیکی (یا مدارهای منطقی) به مسیرهای عملیات منطقی تبدیل می‌شوند. با توجه به اینکه هر سیگنال معرف یک متغیر دوتایی است (و هر متغیر دوتایی معرف یک سیگنال است) که حامل یک «بیت»^۱ آگاهی است، می‌توان با گذراندن سیگنالهای دو دویی از میان ترکیبهای گوناگون مدارهای منطقی، هر گونه آگاهی لازم برای محاسبه یا کنترل را روی آنها پیاده کرد. مدارهای منطقی (یا دریچه‌ها) که عملیات منطقی (\cdot) ، یا $(+)$ ، و (\neg) را انجام می‌دهند، با نمادها شان در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. این دریچه‌ها بلوکهای سخت افزاری هستند که اگر شرط‌های منطقی ورودی برقرار باشند، سیگنال خروجی ۱-منطقی یا ۰-منطقی ایجاد می‌کنند. دریچه \neg آگاهی اوقات دادونگر خوانده می‌شود زیرا سیگنال دو دویی را از ۱ به ۰ (و از ۰ به ۱) تبدیل می‌کند.



(الف) دریچه ۰ با دو و سه ورودی



(ب) دریچه ۱ با دو و سه ورودی



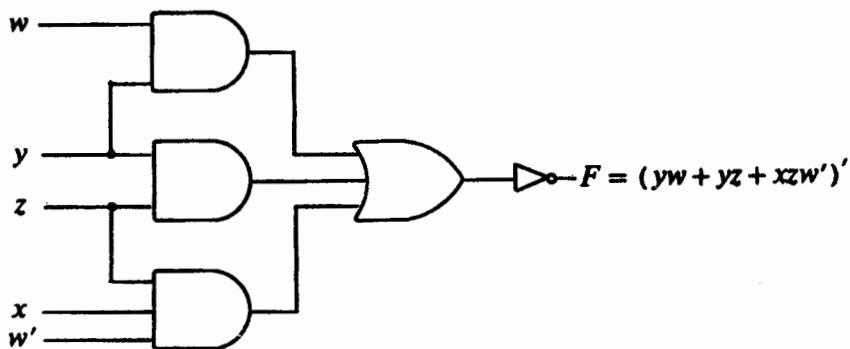
(c) دارونگر (دریچه ۰)

شکل ۱

۱. یک بیت، در زبان کامپیوتری، یک رقم دو دویی است.

چون تابعهای بول بر حسب $+ (ba)$, (w) و $r (fe)$ بیان می‌شوند، هر تابع بول را می‌توان با استفاده از دریچه‌های منطقی که در شکل ۱ معرفی شده‌اند، به وسیله یک نمودار مدار الکترونیکی یا مدار منطقی نشان داد (مثال ۶ را بینید). تبدیل تابع بول به مدار منطقی را پیاده‌سازی می‌نامیم.

مثال ۶. تابع بول $F = (yw + yz + xzw')$ را می‌توان با نمودار مدار منطقی زیر پیاده کرد.

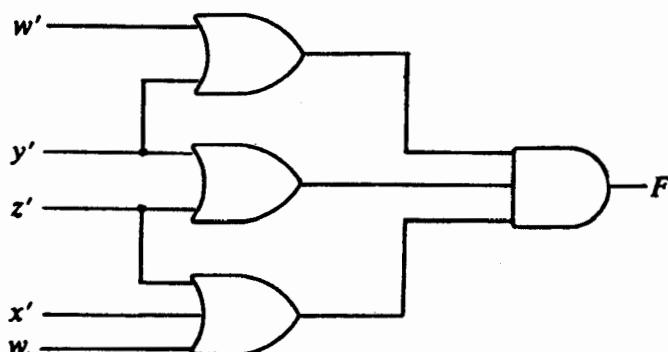


شکل ۲

مثال ۷. بنابر قانون دمورغن، تابع بول مثال قبلی را می‌توان به صورت

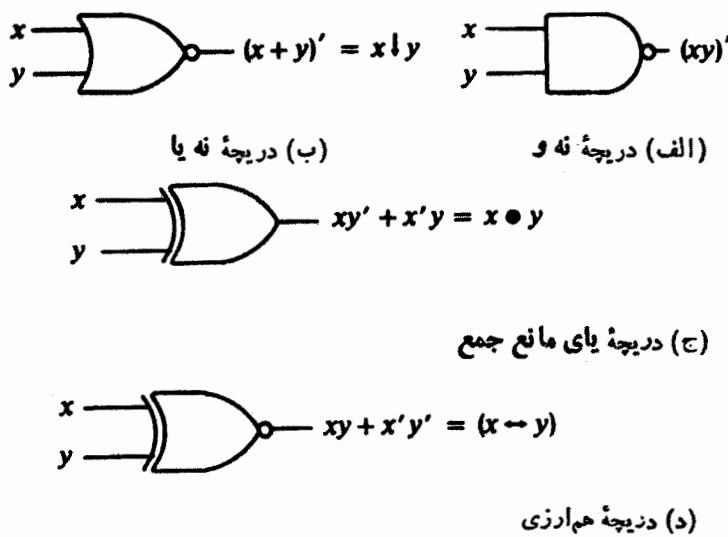
$$F = (y' + w')(y' + z')(x' + z' + w)$$

بیان کرد. پس F به صورت زیر تیز پیاده می‌شود.



شکل ۳

چون تابعهای بول مثال ۶ و ۷ یک جدول ارزش دارند، مدارهای منطقی شکل ۲ و ۳ برای یک هدف به کار می‌روند. اما از نظر اقتصادی و کارآئی، مدار شکل ۳ بر مدار شکل ۲ برتری دارد، زیرا در آن یک درجه منطقی کمتر به کار می‌رود. یک راه کم کردن هزینه ابزارها و افزایش کارآئی آن است که انواع بیشتری از دریچه‌های منطقی مفید ایجاد کیم. دریچه‌های منطقی نه و، نه یا، یا مانع جمع، و هم ارزی در زیر به همین منظور ساخته شده‌اند.



شکل ۲

اگرچه هر چهار عمل (=دریچه) جدید جا به جایی هستند، اما باید توجه کرد که نه و و نه یا شرکت‌پذیر نیستند، در حالی که یا مانع جمع و هم ارزی شرکت‌پذیرند.

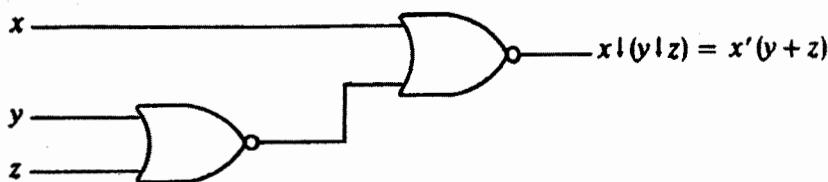
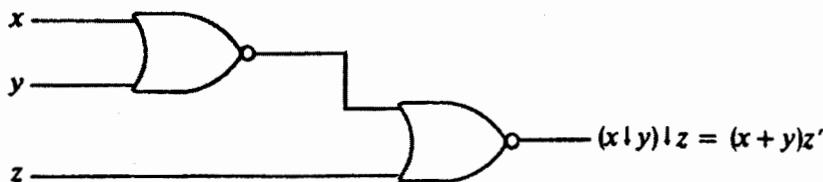
مثال ۸. پیاده‌سازی $z \downarrow (y \downarrow x)$ و $(z \downarrow y) \downarrow x$ به وسیله دریچه‌های نه یا در شکل ۵ داده شده‌اند. نشان دهید که $z \downarrow (y \downarrow x)$ و $(z \downarrow y) \downarrow x$ یکی نیستند.

حل: برای یک مجموعه ورودیها، مثلاً $0 = y = z = x = 1$ ، خروجی مدار بالای و خروجی مدار پایینی ۱ است. بنابراین دریچه نه یا شرکت‌پذیر نیست.

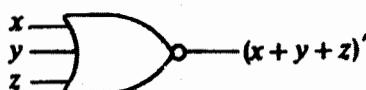
بر عهده خواننده است که به عنوان تمرین نشان دهد عمل نه و نیز شرکت‌پذیر نیست. بنابراین دریچه‌های نه یا و نه و را برای ورودیها بیشتر از دو، باید تعریف کرد.

با تعداد مدارهای زیر این دریچه‌ها برای سه ورودی تعریف می‌شوند، و به آسانی می‌توان آن را به تعداد متناهی از ورودیها تعیین داد.

تابع بول و دریچه‌های منطقی ۱۰۹



شکل ۵



شکل ۶

تمرین ۳.۴

۱. جدول ارزش تابعهای زیر را بیاورد:

$$(الف) F = (xy)'$$

$$(ب) F = x \downarrow y = (x + y)'$$

$$(ج) F = x \oplus y = xy' + x'y$$

$$(د) F = x \leftrightarrow y = xy + x'y'$$

۲. با استفاده از دریچه‌های نه و ، تابعهای $(y)(x)(y)(z)$ و $((xy)'(z))$ را پیاده‌کنید و نشان دهید که نه و شرکت‌پذیر نیست.

۳. ثابت کنید که هم ارزی $(y \leftrightarrow x)$ شرکت‌پذیر است.

۴. ثابت کنید که یا مانع جمع شرکت‌پذیر است.

در هر یک از مسئله‌های ۵ تا ۱۲، تابعهای بول داده شده را با استفاده از دریچه‌های منطقی پیاده‌کنید.

$$(x + y' + z')(y + z' + w')(x' + y' + z')(x' + y + z) \cdot ۵$$

$$(xy' + x'y)(zw + z'w') \cdot ۶$$

$$x+z+yw+y'w' \quad .7$$

$$x+zw+z'w' \quad .8$$

$$x+y'z+yz'w+zw'+y'w' \quad .9$$

$$x'zw'+y'z'w' \quad .10$$

$$x+y'w'+yz'+z'w' \quad .11$$

$$x+yz'+yw'+y'z+zw' \quad .12$$

۴. کاربرد در مدارهای کامپیوکر رقمه‌ی

کامپیوکرها رقمه‌ی، علاوه بر کارهای دیگر، تمام انسواع عملهای حساب را انجام می‌دهند. اساسی‌ترین عمل حساب، جمع دو رقم دوتایی است که از $0 + 0 = 0 + 1 = 1$ ، $0 + 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 10$ تشکیل یافته است. مجموع هر یک از سه عمل اول، عددی یک رقمی است، درحالی که مجموع عمل چهارم دو رقمی است. بیت مرتبه بالاتر این مجموع رقم نقلی نامیده می‌شود. در جمع دو عدد چند رقمی، رقم نقلی باید به رقم مرتبه بالاتر بعدی اضافه شود. مدار رقمه‌ی که عملش جمع کردن دو بیت است نیم‌فروزنگر نامیده می‌شود، و مداری که عملش جمع کردن سه بیت است (دو بیت و رقم نقلی قبلی)، تمام‌فروزنگر نام دارد.

بدیهی است که نیم‌فروزنگر نیاز به دو ورودی دو دویی (که با x و y نشان داده می‌شوند) و دو خروجی دو دویی که با C (برای جمع) و S (برای رقم نقلی) نشان داده می‌شوند، نیاز دارد. جدول ارزشی که عمل نیم‌فروزنگر را مشخص می‌کند می‌توان به صورت زیر نشان داد.

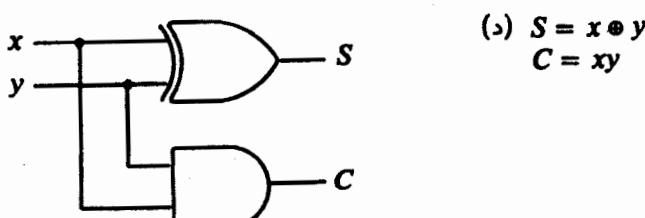
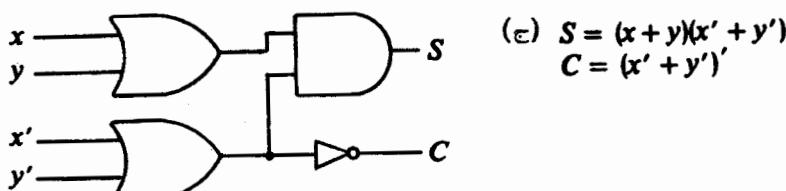
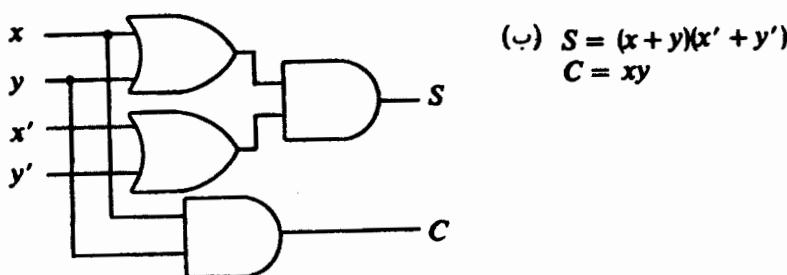
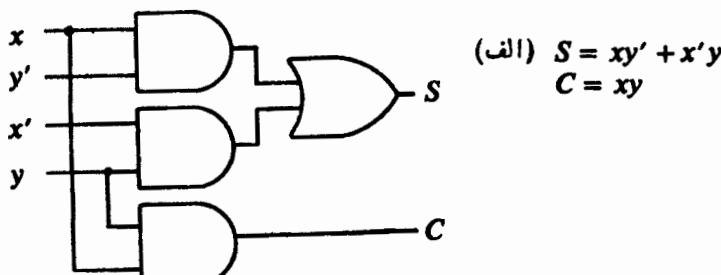
جدول ۴

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

مثلاً، ردیف چهارم جدول ارزش به معنای $1 + 1 = 10$ است. به راحتی می‌توان توابع بول جدول ۴ را بدست آورد

$$S = x'y + xy', \quad C = xy$$

شکل ۷ راههای گوناگون پیاده‌سازی دوتابع بول S و C را نشان می‌دهد.
 پیاده‌سازی نیم-فرونگر در شکل ۷ نشان می‌دهد که حتی برای عمل ساده‌ای نظری
 نیم-فرونگر طرحهای مختلفی وجود دارد. این مسئله‌ای برای طراح کامپیوتر است که طرحی
 بریزد که کمترین تعداد مدار را داشته باشد.
 در یک تمام-فرونگر، دو متغیرهای ورودی (که با x و y مشخص می‌شوند)



شکل ۷

دو بیتی را که باید باهم جمع شوند، نشان می‌دهد. متغیر سوم (که با z مشخص می‌شود) رقم نقلی مرتبه پایینتر قبلی را نشان می‌دهد. دو خروجی، همانند حالت نیم-فزونگر، که با C و S نشان داده می‌شود به ترتیب جمع و رقم نقلی هستند. اکنون می‌توانیم جدول ارزش‌تام-فزونگر را بنویسیم.

جدول ۵

x	y	z	C	S
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱

از جدول ارزش بالا، تابعهای بول برای تمام-فزونگر مستقیماً به صورت زیر بدست می‌آیند (رجوع کنید به مسئله ۲۵، تمرین ۳۰۱):

$$S = xyz + xy'z' + x'yz' + x'y'z$$

$$C = xyz + xyz' + xy'z + x'y'z$$

خلاصه کردن لفظها در S و C به صورتهای

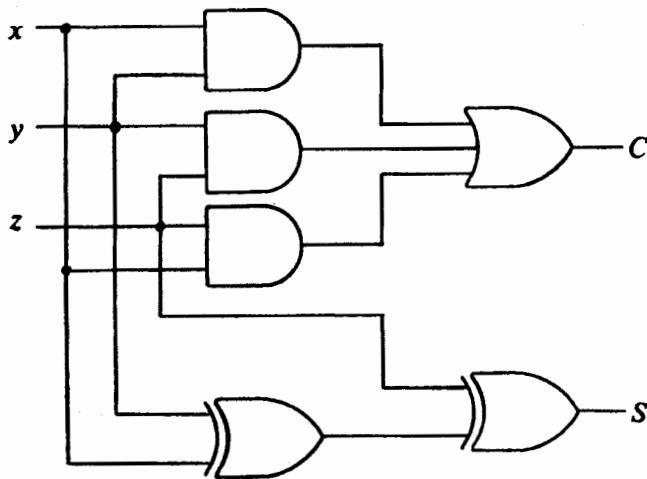
$$S = (x \oplus y) \oplus z, C = xy + xz + yz$$

به عهده خواهد شد. این دوتابع مستقیماً در شکل ۸ پیاده شده‌اند. شش دریچه منطقی در این پیاده‌سازی به کار رفته‌اند.

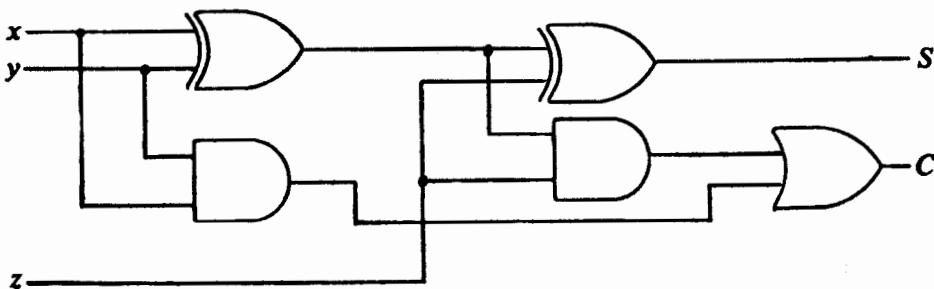
بار دیگر این طراح است که باید تعداد دریچه‌های منطقی را با حفظ کارآیی آن کاهش دهد. طراح خوب می‌تواند C را به صورت زیر بنویسد:

$$C = xy + (xy' + x'y)z$$

این عبارت همراه با $S = (x \oplus y) \oplus z$ مدار نمودار شکل ۹ را بدست می‌دهد.



شکل ۸



شکل ۹

توجه کنید که تمام-فروزنگر شکل ۹، ترکیب دو نیم-فروزنگر شکل ۷ (د) با یک درجه
یا است. بدین جهت، می‌توان یک تمام-فروزنگر را به عنوان دو نیم-فروزنگر در نظر گرفت.

تمرین ۴.۴

۱. ثابت کنید تابعهای بول شکل ۷ همارزند، یعنی جدول ارزش آنها یکی است.

$$(الف) \quad S = xy' + x'y$$

$$(ب) \quad S = (x+y)(x'+y')$$

$$(ج) \quad S = x \oplus y$$

۲. نشان دهید که $C = xy + x'y' = (x + y')(x' + y)$ در شکل ۷ (الف) و $C = xz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' = (x + y)(x + z')$ در شکل ۷ (ج) داردی یک جدول ارزش هستند.

۳. نشان دهید که در یک تمام-فرونگر داریم،

$$S = xyz + xy'z' + x'yz' + x'y'z = (x \oplus y) \oplus z$$

۴. نشان دهید که

$$\begin{aligned} C &= xyz + xyz' + xy'z + x'yz \\ &= xy + xz + yz \\ &= xy + (xy' + x'y)z \end{aligned}$$

۵. عمل نیم-تفاضلگر در جدول ارزش زیر

x	y	B	D
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

داده شده است، که در آن D تفاضل، $y - x$ ، را نشان می‌دهد و B رقم قرضی از بیت مرتبه بالاتر بعدی را مشخص می‌کند.

(الف) یک دسته تابع بول برای B و D باید.

(ب) در صورت امکان، تابعهای بولی را که در (الف) پیدا کرده‌اید، ساده کنید.

۶. در مسئله ۵ بالا، نمودار مدارهای (الف) و (ب) را رسم کنید.

۷. عمل تمام-تفاضلگر با جدول ارزش زیر داده شده است:

x	y	z	B	D
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

کاربرد در مدارهای کامپیووتر رقمی ۱۱۵

که در آن x, y, B, D همان‌هایی هستند که در نیم-تفاضلگر آمده‌اند، و z رقم قرضی قبلی است.

(الف) یک دسته تابع بول برای B و D باید.

(ب) تابعهای بول را که در (الف) به دست آورده‌اید، ساده کنید.

۸. نمودارهای مداری ۷ (الف) و ۷ (ب) را درسم کنید.

۹. تمام-تفاضلگری را طراحی کنید که دو نیم-تفاضلگر را با یک دریچه یا ترکیب می‌کند.

۵

مجموعه‌های شمارای نامتناهی و ناشمارا

برای بحث در خواص مجموعه‌های نامتناهی و متناهی از تعریف دذکر نموده مجموعه‌های نامتناهی استفاده شده است. یکی از مطالب اثبات شده این است که مجموعه‌های شمارای نامتناهی در بین مجموعه‌های نامتناهی از نظر «اندازه» کوچکترین هستند. دیگریها و مثالهایی از مجموعه‌های شمارای نامتناهی و مجموعه‌های ناشمارا آورده شده است.

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در بخش ۱، فصل ۲، به مناسبتی اشاره کردیم که مجموعه متناهی مجموعه‌ای است که فقط شامل تعدادی متناهی عنصر باشد؛ اما این مفهوم را می‌توان با یک تعریف دقیق‌تر ریاضی بیان کرده ما تعریفی را (تعریف ۱) که دذکر نموده است ترجیح می‌دهیم. در بخش ۱، فصل ۲، تأکید شد که N ، مجموعه تمام اعداد طبیعی، یک مجموعه نامتناهی است. گیریم $\{2, 4, 6, \dots\} = N_1$ مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج است. همان‌گونه که خواننده در مسئله ۸، تمرین ۶.۳، نشان داده است، یک تناظر یک به یک بین مجموعه N و زیرمجموعه سره آن، N_1 وجود دارد.

به عبارت دیگر،

یک جزء به بزرگی کل است.^۱

این ویژگی عجیب مجموعه نامتناهی بسیاری از ریاضیدانان، از جمله گنورگ کانتور را نگران ساخت. ریچارد ددکیند (۱۸۳۱–۱۹۱۶) این ویژگی را برای تعریف مجموعه نامتناهی به کار برد. تعریف زیر را ددکیند در ۱۸۸۸ عرضه کرد.

تعریف ۱. مجموعه X نامتناهی است اگر زیرمجموعه‌ای سره مانند \mathbb{Y} داشته باشد به طوری که یک تناظر یک به یک بین X و \mathbb{Y} وجود داشته باشد. مجموعه متناهی است اگر نامتناهی نباشد.

به عبارت دیگر، مجموعه X نامتناهی است اگر و تنها اگر یک تابع یک به یک $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که $\{f(a) \mid a \in X\}$ زیرمجموعه سره \mathbb{N} باشد. از این‌رو، مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} یک مجموعه نامتناهی است.

مثال ۱. مجموعه نهی \emptyset و مجموعه‌های تک عنصری^۲ متناهی هستند.

حل. (الف) چون مجموعه نهی زیرمجموعه سره ندارد، نمی‌تواند نامتناهی باشد. لذا، مجموعه نهی متناهی است. (ب) مجموعه تک عنصری دلخواه $\{a\}$ را در نظر می‌گیریم. چون تنها زیرمجموعه سره $\{a\}$ مجموعه نهی است و هیچ تناظر یک به یکی بین $\{a\}$ و \emptyset نیست، $\{a\}$ متناهی است.

قضیه ۱.

(الف) هر ابرمجموعه یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.

(ب) هر زیرمجموعه یک مجموعه متناهی، متناهی است.

۱. یک اختلاف آشکار با اصل موضوع اقلیدس (Euclid's Axiom): «کل بزرگتر از هر جزء خودش است» (۳۲۵ سال قبل از میلاد).

۲. ریچارد ددکیند (Richard Dedekind) یکی از بزرگترین ریاضیدانان، در ۶ اکتبر ۱۸۳۱، در برمنشویک آلمان به دنیا آمد. در اول به فیزیک و شیمی علاقه داشت؛ ریاضیات را فقط خادم علوم تصور می‌کرد. اما عمر این طرز فکر کوتاه بود؛ در سن ۱۷ سالگی از فیزیک و شیمی به ریاضیات، که منطقش را رضایت‌بخش یافت، روی آورد. در سن نوزده سالگی برای مطالعه ریاضیات وارد دانشگاه گوتینگن شد، و سه سال بعد به دریافت درجهٔ دکتری فیز نظر گاووس نایل شد. از جمله کارهای اساسی او در ریاضیات «برش ددکیند» مشهور است، که در مطالعه اعداد اصم مفهومی مهم است، و خواننده در درس آنالیز حقیقی احتمالاً فرست مطالعه آن را خواهد داشت.

۳. یک مجموعه تک عنصری مجموعه‌ای است که فقط از یک عنصر تشکیل شده است.

یوهان. (الف) مجموعه X را نامتناهی و Y را یک ابرمجموعه X می‌گیریم، یعنی $X \subseteq Y$. آنگاه بنابر تعریف ۱ یک تابع یک به یک $f: X \rightarrow Y$ وجود دارد به طوری که $f(X) \neq Y$. تابع $g: Y \rightarrow Y$ را با

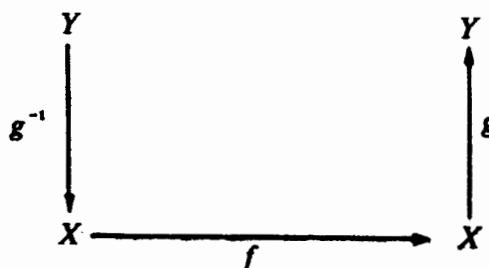
$$g(y) = \begin{cases} f(y) & y \in X \\ y & y \in Y - X \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بررسی یک به یک بودن تابع $Y \rightarrow Y$: g و نیز اینکه $Y \neq g(Y)$ را به خواندن و اگذار می‌کنیم. اکنون از تعریف ۱ نتیجه می‌شود که Y نامتناهی است.

(ب) مجموعه Y را متناهی و X را یک زیرمجموعه Y می‌گیریم؛ یعنی $X \subseteq Y$. برای اینکه نشان دهیم X متناهی است، خلاف آن را فرض می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم X نامتناهی است. اما در این صورت بنابر (الف)، مجموعه Y باید نامتناهی باشد. این یک تناقض است. بنابر این مجموعه X متناهی است.

قضیه ۲. گیریم $Y \rightarrow X$: g یک تاظر یک بدیک است. اگر مجموعه X نامتناهی باشد، Y نیز نامتناهی است.

یوهان. چون X نامتناهی است، بنابر تعریف ۱ یک تابع یک به یک $f: X \rightarrow X$ وجود دارد به طوری که $f(X) \neq X$. چون $Y \rightarrow X$: g یک تاظر یک بدیک است، $Y \rightarrow X$: g^{-1} نیز یک تاظر یک بدیک است (قضیه ۱۴، فصل ۳). اکنون به تعمیم داریم یک به یک زیر توجه می‌کنیم:



در نتیجه، $Y \rightarrow Y$: $h = g \circ f \circ g^{-1}$ که ترکیبی از توابع یک به یک است، یک تابع یک به یک است [مسئله ۷، تمرین ۷.۰۳]. بالاخره داریم

$$\begin{aligned} h(Y) &= (g \circ f \circ g^{-1})(Y) = (g \circ f)(g^{-1}(Y)) \\ &= (g \circ f)(X) = g(f(X)) \end{aligned}$$

و $f(X) \neq X$ ، زیرا $g(f(X)) \neq Y$. پس، $h(Y)$ یک زیرمجموعه سره Y است و از این رو Y نامتناهی است.

نتیجه، گیریم $Y \rightarrow X : g$ یک تابع یک به یک است. اگر مجموعه X متناهی باشد، Y نیز متناهی است.

برهان. بعده خواننده واگذار می‌شود.

قضیة ۳. مجموعه‌های متناهی X و $x_0 \in X$ مفروض‌اند. آنگاه $X - \{x_0\}$ نیز نامتناهی است.

برهان. بنابر تعریف ۱، یک تابع یک به یک $X \rightarrow X : f$ وجود دارد به‌طوری که $f(X) \subset X$. باید دو حالت در نظر بگیریم، (۱)، $x_0 \in f(X)$ یا (۲)، $x_0 \notin f(X)$. در هر حالت باید تابع یک به یک مانند $g : X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ بسازیم به‌طوری که $g(X - \{x_0\}) \neq X - \{x_0\}$.

حالت ۱. $x_0 \in f(X)$

یک عنصر x_1 در X وجود دارد به‌طوری که $f(x_1) = x_0$. اکنون تابع

$$g : X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$$

را با

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \neq x_1 \\ x_1 & \text{اگر } x = x_1 \in X - \{x_0\} \end{cases}$$

که در آن x_1 یک عنصر ثابت اختیاری مجموعه نامتناهی $X - f(X)$ است، تعریف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که $g : X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ یک تابع یک به یک است و

$$g(X - \{x_0\}) = f(X - \{x_0, x_1\}) \cup \{x_1\} \neq X - \{x_0\}$$

از این‌رو $X - \{x_0\}$ در این حالت نامتناهی است.

حالت ۲. $x_0 \in X - f(X)$

یک تابع $\{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\} : g(x) = f(x)$ یا $X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\} : g(x) = f(x)$ برای هر $x \in X - \{x_0\}$ تعریف می‌کنیم. چون $X \rightarrow X - \{x_0\} : f$ یک تابع یک به یک است، $g : X - \{x_0\} \rightarrow X - \{x_0\}$ نیز یک تابع یک به یک است. بالاخره،

$$g(X - \{x_0\}) = f(X) - \{f(x_0)\} \neq X - \{x_0\}$$

پس، در هر حالت، $X - \{x_0\}$ نامتناهی است.

از این‌بعد، مجموعه تمام اعداد طبیعی از ۱ تا $k \in \mathbb{N}$ را با \mathbb{N}_k نمایش می‌دهیم؛ یعنی $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$. به عنوان یک کاربرد قضیه ۳، در مثال زیر نشان می‌دهیم که هر \mathbb{N}_k یک مجموعه متناهی است.

مثال ۴. برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، مجموعه \mathbb{N}_k متناهی است.

برهان. این حکم را با اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. بنا بر مثال ۱، برای $k=1$ حکم راست است. حال فرض کنید که برای عدد طبیعی k ، مجموعه \mathbb{N}_k متناهی است. مجموعه $\{k+1\} \cup \{k+2, k+3, \dots\} = \mathbb{N}_{k+1}$ را در نظر بگیرید. اگر \mathbb{N}_{k+1} نامتناهی باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۳، $\mathbb{N}_{k+1} = \mathbb{N}_k \cup \{k+1, k+2, \dots\}$ نیز یک مجموعه نامتناهی است، که فرض استقرا را نقض می‌کند. بنا بر این اگر \mathbb{N}_{k+1} متناهی باشد، \mathbb{N}_{k+1} نیز متناهی است. پس، بنا بر اصل استقرای ریاضی، مجموعه \mathbb{N}_k برای هر $k \in \mathbb{N}$ متناهی است. در واقع، رابطه زندگی بین یک مجموعه متناهی ناتهی و یک مجموعه \mathbb{N} وجود دارد.

قضیه ۴. مجموعه X متناهی است اگر و تنها اگر $\emptyset = X$ یا $X = \{x\}$ باشد. در تناظر یک به یک باشد.

برهان. اگر X یا نهی باشد یا با یک \mathbb{N}_k در تناظر یک به یک باشد؛ آنگاه بنا بر نتیجه قضیه ۲ و مثالهای ۱ و ۲، مجموعه X متناهی است.

برای اثبات عکس آن، عکس نقیض آن را (که با آن هم ارز است)، ثابت می‌کنیم: اگر $\emptyset \neq X$ و X با هیچ یک از \mathbb{N}_k ‌ها در تناظر یک به یک نباشد، آنگاه X نامتناهی است. اگر x_1 از X یک عنصر x_1 انتخاب می‌کنیم، $\{x_1\} - X$ نهی نیست؛ زیرا در غیر این صورت $\{x_1\} = X$ و در تناظر یک به یک با \mathbb{N}_k می‌شود که با فرض تناقض دارد. برای $\{x_1\} - X$ عملی مشابه انجام می‌دهیم، یعنی یک عنصر آن مانند x_2 را انتخاب می‌کنیم. با ادامه این روش، فرض کنید که عناصر x_1, x_2, \dots, x_k را از X انتخاب کرده‌ایم. آنگاه $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} - X$ نهی نیست؛ زیرا در غیر این صورت $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = X$ در تناظر یک به یک با \mathbb{N}_k می‌شود، که با فرض مربوط به $X - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ در تناقض است. بنا بر این همیشه می‌توانیم یک عنصر x_{k+1} از $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} - X$ انتخاب کنیم. آنگاه بنا بر استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، یک زیرمجموعه سره X مانند $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ وجود دارد. مجموعه \mathbb{N}_k ‌های منتخب برای هر عدد طبیعی n را با \mathbb{Y} نشان می‌دهیم. آنگاه تابع $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ که با $x_k \mapsto x_n = f(x_k)$ تعریف می‌شود، بین \mathbb{X} و \mathbb{Y} زیرمجموعه سره \mathbb{Y} ، یک تناظر یک به یک برقرار می‌کند. لذا، بنا بر تعریف ۱، \mathbb{Y} نامتناهی است و، بنا بر قضیه ۱، \mathbb{X} نامتناهی است.

۱. در اینجا نویسته‌گان به طور ضمنی از «اصل انتخاب» که اصلی مهم است و در فصل ۶ به بحث آن خواهیم پرداخت، استفاده کرده‌اند. صورتی از اصل انتخاب را در اینجا می‌آوریم؛ فرض می‌کنیم \mathbb{P} یک مجموعه غیر نهی از زیرمجموعه‌های غیر نهی یک مجموعه مفروض X است. آنگاه یک مجموعه $R \subseteq X$ وجود دارد به قسمی که برای هر $C \in \mathbb{P}$ یک $C \cap R \neq \emptyset$ مجموعه تک عضوی است. این اصل در سراسر کتاب بدون اینکه صریحاً ذکر شود، به کار خواهد رفت.

توجه خواهند را به این نکته جلب می‌کنیم که با توجه به قضیه ۴ می‌توانیم تعریف دیگری برای مجموعه‌های متناهی و نامتناهی بیاوریم. می‌توانیم بگوییم که مجموعه متناهی است اگر و تنها اگر یا تهی باشد یا یک در تابعیت یک به یک باشد، و نامتناهی است اگر و تنها اگر متناهی نباشد. با این تعریف جدید، تعریف ۱ به عنوان یک قضیه ثابت می‌شود. به هر حال، استفاده از این تعریف ساده‌تر نیست و به اندازه تعریف اول کار می‌برد.

تمرین ۱۰۵

۱. برهان قضیه ۱ را کامل کنید.
۲. گیریم $X \rightarrow Y : g$ یک تابعیت یک به یک است. ثابت کنید که اگر X متناهی باشد، آنگاه Y متناهی است.
۳. ثابت کنید که مجموعه‌های \mathbb{Z} ، \mathbb{Q} ، و \mathbb{R} نامتناهی هستند.
۴. ثابت کنید که اگر A یک مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه $A \times A$ نیز نامتناهی است.
۵. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، آنگاه $A \cup B$ یک مجموعه نامتناهی است.
۶. ثابت کنید که اجتماعی متناهی از مجموعه‌های متناهی، متناهی است.
۷. فرض کنید $A \cup B$ ، اجتماع دو مجموعه A و B ، نامتناهی است. ثابت کنید که حداقل یکی از دو مجموعه A و B نامتناهی است.
۸. تعیین زیر از قضیه ۳ را ثابت کنید: اگر \exists یک زیرمجموعه متناهی از مجموعه نامتناهی X باشد، آنگاه $X - Y$ نامتناهی است.
۹. ثابت کنید که اگر مجموعه A به قسمی باشد که هر ابرمجموعه سره A نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.
۱۰. ثابت کنید که اگر یک مجموعه B به قسمی باشد که هر زیرمجموعه سره B متناهی باشد، آنگاه B متناهی است.
۱۱. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ ، و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یک $j \in \mathbb{N}$ ، A_j نامتناهی است.
۱۲. ثابت کنید که اگر مجموعه A به قسمی باشد که $A \times A$ نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.
۱۳. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \times B$ نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است یا B .
۱۴. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ ، و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ نامتناهی باشد، آنگاه برای یک $j, i \in \mathbb{N}$ ، A_i نامتناهی است.
۱۵. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \oplus B$ نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است یا B .
۱۶. نشان دهید که مجموعه $\{ \dots, 25, 24, 9, 16, 1, 4 \}$ نامتناهی است.
۱۷. ثابت کنید که مجموعه توانی یک مجموعه متناهی، متناهی است.

۳. همتوانی مجموعه‌ها

تعداد عناصری دو مجموعه متناهی X و Y برابر است اگر و تنها اگر یک تناظر یک به یک $f: X \rightarrow Y$ بین X و Y وجود داشته باشد. هر چند که عبارت «تساوی تعداد عناصرها» را برای حالتی که مجموعه‌های X و Y نامتناهی هستند، به کار نمی‌بریم، به نظری رسید طبیعی باشد فکر کنیم دو مجموعه (نامتناهی) که در تناظر یک به یک هستند، دارای یک اندازه هستند. ما این ادراک را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

تعریف ۰۲. دو مجموعه X و Y را همتوان می‌گویند و نماد \sim $X \sim Y$ را برای آن به کار می‌برند، هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک $f: X \rightarrow Y$ وجود داشته باشد.

بدیهی است که هر مجموعه همتوان خودش است. چون وارون تناظر یک به یک نیز یک تناظر یک به یک است (قضیه ۱۴، فصل ۳)، $Y \sim X \sim Y$ اگر و تنها اگر $X \sim Y$. فرماد می‌گذاریم که نماد \sim $X \sim Y$ بدهی معنی است که « $f: X \rightarrow Y$ یک تناظر یک به یک است و در نتیجه $Y \sim X$ ». با این نماد قراردادی، قسمت اول حکم مسئله ۱۲ تمرین ۷۰.۳ را می‌توان چنین بیان کرد: اگر $Y \sim f: X \sim Z$ و $Y \sim g: Z \sim R$ باشند، آنگاه $f \circ g: X \sim R$ است. با این ترتیب قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۰۵. گیریم φ یک مجموعه مجموعه‌ها است و φ رابطه‌ای روی φ است که با $X \varphi Y$ اگر و تنها اگر X و Y عضوهای φ باشند و $Y \sim X$ ، تعریف شده است. آنگاه φ یک رابطه همارزی روی φ است.

در مثال زیر، نمادهای (۱) و (۲) فاصله‌های باز اعداد حقیقی هستند، نه جفت‌های مرتبی از اعداد صحیح.

مثال ۳.

$$(الف) (1, 1) \sim (-1, 1) \quad (۱, ۰) \sim (0, 1)$$

$$(ب) R \sim (-1, 1) \quad (0, 1) \sim R$$

حل: (الف) تابع $f(x) = 2x - 1$ که با $f(x) = 2x - 1$ داده شده است، یک تناظر یک به یک است. از این‌رو $(1, 1) \sim (-1, 1)$.

(ب) تابع مثلثاتی $R \rightarrow \mathbb{R}$: $g(x) = \tan(\pi x/2)$ که با $g(x) = \tan(\pi x/2)$ داده شده است، یک تناظر یک به یک است؛ پس $R \sim (-1, 1)$. لازم است خواهش این مطلب را با رسم نمودار $y = \tan(\pi x/2)$ بررسی کنند. با تحقیق در درستی دونکته زیر برهانی دقیق بددست می‌آید:

$(1) R \rightarrow \mathbb{R} : g$ پیوسته، و از طرف بالا و پایین بی‌کران است.
 $(2) \text{از } 0 > \sec^2(\pi x/2) = (\pi/2)^2 \geq 1 \text{ نتیجه می‌شود که } g \text{ اکیداً صعودی است.}$

چون «رابطه» هموتوانی سه، منسدي است، از $(1, 1) \sim (-1, 1)$ و $(1, -1) \sim R$ نتیجه می‌شود $R \sim R$.

قضیه ۶. مجموعه‌های X, Y, Z ، و W با شرط $X \cap Z = \emptyset = Y \cap W$ و $Z \sim W$ مفروض‌اند. آنگاه $(Y \cup W) \sim (X \cup Z)$.

برهان. چون $Y \rightarrow W$ و $f: X \rightarrow Y$ توابعی با شرط $X \cap Z = \emptyset$ هستند، $f \cup g: X \cup Z \rightarrow Y \cup W$ یک تابع است. برخوانده است که ثابت کند تابع اخیر یک تنازنی یک به یک است.

قضیه ۷. گیریم X, Y, Z ، و W مجموعه‌هایی با شرط $Y \sim W$ و $X \sim Z$ هستند، آنگاه $X \times Z \sim Y \times W$.

برهان. گیریم $f: X \sim Y$ و $g: Z \sim W$. تابع $f \times g: X \times Z \rightarrow Y \times W$ را برای هر $(x, z) \in X \times Z$ با $((f(x), g(z)) = (f(x), g(x), z))$ تعریف می‌کیم. از خواصی خواهیم تحقیق کرد که تابع اخیر یک تنازنی یک به یک است.

اگر مجموعه‌های نامتناهی $\{1, 2, \dots, k\} = N_k$ بزرگ می‌شود در نظر بگیریم و توجه کنیم که مجموعه‌های نامتناهی Z, Q ، و R فوق مجموعه‌های N هستند (مسئله ۳، تمرین ۱۰.۵ را بینید)، روشن می‌شود که «کوچکترین» مجموعه نامتناهی، مجموعه اعداد طبیعی N ، یا هر مجموعه هموتوان با N است. بهزادی در بخش ۴، خواهیم دید که همه مجموعه‌های نامتناهی با N هموتوان نیستند.

تعريف ۳. مجموعه X شمارای نامتناهی گفته می‌شود هرگاه $N \sim X$. مجموعه شمارای مجموعه‌ای است که یا نامتناهی باشد یا شمارای نامتناهی.

گیریم X یک مجموعه شمارای نامتناهی است. آنگاه یک تنازنی یک به یک $X \sim N$ وجود دارد. اگر بنویسیم

$$f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots, f(k) = x_k, \dots$$

آنگاه X را می‌توان با ناماد $\{\dots, x_k, x_2, x_3, \dots, x_1\}$ نیز نشان داد. منظور از نقاط بین x_k و x_1 بعد از x_k این است که نشان دهنده عناصر به ترتیب شماره‌های اندیس مرتب شده‌اند. اکنون بجاست توضیحی درباره اصطلاح «شمارای» داده شود. برای یک مجموعه نامتناهی، از نظر تئوری شمردن عناصر مجموعه امکان دارد و بنابراین اصطلاح مناسب است. اگرچه واقعاً شمردن تمام عنصرهای یک مجموعه شمارای $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ امکان

۱. اگر دقت رعایت شود «سه» رابطه نیست، زیرا حوزه تعریف آن یک مجموعه نیست (به قضیه ۱۵ فصل ۲ نگاه کنید). اما می‌توانیم آن را یک رابطه بنامیم اگر فرض کنیم سه روی یک مجموعه مفروض φ از مجموعه‌ها تعریف شده‌است (قضیه ۵).

ندارد، اما بدهرحال X در یک تناظر یک به یک با اعداد طبیعی یا اعداد شمارش* است. قضیه ۸. هر زیرمجموعه نامتناهی از یک مجموعه شماری نامتناهی، شماری نامتناهی است.

برهان. گیریم Y یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه شماری نامتناهی $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = X$ است. فرض کنیم، $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in Y$ کوچکترین اندیسی باشد که $y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in Y - \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. فرض کنید $x_{n_k} \in Y - \{x_1, x_2, \dots, x_{n_{k-1}}\}$ را تعریف کرده‌ایم، آنگاه $\forall k \in \mathbb{N}$ را کوچکترین اندیسی می‌گیریم که $y_1, y_2, \dots, y_{n_k} \in Y - \{x_1, x_2, \dots, x_{n_{k-1}}\}$. چون $y_1, y_2, \dots, y_{n_k} \in Y - \{x_1, x_2, \dots, x_{n_{k-1}}\} \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{N}$ برای هر $N \in \mathbb{N}$ $\exists f: N \rightarrow Y$ به صورت $f(k) = x_{n_k}$ برای هر $k \in N$ درست کرده‌ایم. بنابراین، Y شماری نامتناهی است.

برهان کوتاه‌تر دیگری که کمتر شهودی است، در مسئله ۱۰ در آخرهmin بخش برای قضیه ۸ عنوان شده است. نتیجه زیر به آسانی از تعریف ۳ و قضیه ۸ بدست می‌آید.

نتیجه. هر زیرمجموعه یک مجموعه شمارا، شمار است.

در بخش بعدی چند مثال و چند ویژگی مجموعه‌های شماری نامتناهی آورده شده است.

تمرین ۲۰۵

۱. برهان قضیه ۶ را کامل کنید.
۲. برهان قضیه ۷ را کامل کنید.
۳. ثابت کنید که اگر X و Y دو مجموعه باشند، آنگاه $X \sim Y \times X \sim Y \times X$.
۴. ثابت کنید که اگر $(X - Y) \sim (X - Y)$ ، آنگاه $X \sim Y$.
۵. این تعیین قضیه ۶ را ثابت کنید: گیریم $\{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ و $\{Y_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ دو خانواده مجموعه‌های مجزا هستند و برای هر $\gamma \in \Gamma$ $X_\gamma \sim Y_\gamma$. آنگاه $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \sim \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$.
۶. ثابت کنید که اگر X یک مجموعه شماری نامتناهی، و Y یک زیرمجموعه متناهی X باشد، آنگاه $Y - X$ شماری نامتناهی است. [با مسئله ۸، تمرین ۱۰۵ مقابله کنید].
۷. ثابت کنید که اگر X یک مجموعه شماری نامتناهی و Y یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه $X \cup Y$ شماری نامتناهی است.
۸. ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج \mathbb{N} و مجموعه تمام اعداد طبیعی فرد \mathbb{N} شماری نامتناهی هستند**.

* چون اشیاء را با اعداد طبیعی می‌شماریم، مؤلف برای توجیه بیشتر اصطلاح «شمار» اعداد طبیعی را، اعداد شمارش نهیز گفته است. س.م.

** حرف اول even به معنای زوج و odd حرف اول به معنای فرد است. س.م.

چند مثال و ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی ۱۲۵

۹. گیریم A یک مجموعه غیر تهی، و \mathbb{N}^A مجموعه تمام تابع از مجموعه A به مجموعه $\{\mathbb{N}, \mathbb{N}\}$ است. ثابت کنید که $\mathbb{N}^A \sim \mathcal{P}(A)$.

۱۰. گیریم X یک مجموعه شمارای نامتناهی و Y یک زیر مجموعه نامتناهی X باشد. فرض کنیم که $N \sim X$ ، $g: Y \rightarrow N$ باشد.

$$h(y) = \{1, 2, 3, \dots, g(y)\} \cap g(Y)$$

تعداد عناصرهای $(h(y))$ تعريف شده است. ثابت کنید که h یک تابع یک به یک است و بنابراین Y شمارای نامتناهی است.

۱۱. گیریم $a < b$ ، $[a, b]$ یک فاصله بسته است. ثابت کنید که تابع $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ که با $f(x) = a + (b-a)x$ برای هر x واقع در $[0, 1]$ تعریف می‌شود، هموانی $[0, 1] \sim [a, b]$ را برقرار می‌کند. بنابراین، برای هر عدد حقیقی c و d به قسمی که $[a, b] \sim [c, d]$ داریم $c < d \sim a < b$.

۱۲. گیریم اعداد حقیقی a, b, c, d ، و به قسمی هستند که $b < a < d < c$. ثابت کنید

$$(الف) [0, 1] \sim [0, 1]$$

$$(ب) [a, b] \sim (c, d)$$

$$(ج) (c, d) \sim (a, b)$$

۱۳. با فرضهای مسئله ۱۲، ثابت کنید

$$(الف) (0, 1) \sim [0, 1]$$

$$(ب) [a, b] \sim (c, d)$$

$$(ج) [a, b] \sim (c, d)$$

۳. چند مثال و ویژگی مجموعه‌های شمارای نامتناهی

مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج \mathbb{N}_0 و مجموعه تمام اعداد طبیعی فرد \mathbb{N}_1 ، شمارای نامتناهی هستند (مسئله ۸، تمرین ۲۰۵). چون اجتماع این دو مجموعه شمارای نامتناهی یعنی $\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_1 (= \mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است، قضیه بعدی قابل پیش‌بینی است.

قضیه ۹. اجتماع دو مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

برهان. گیریم A و B دو مجموعه شمارای نامتناهی باشند. نشان خواهیم داد که $A \cup B$ در هر دو حالت زیر، شمارای نامتناهی است:

حالت ۱. $A \cap B = \emptyset$

چون $A \sim \mathbb{N}_0$ و $B \sim \mathbb{N}_1$ ، داریم $A \sim \mathbb{N}_0$ و $B \sim \mathbb{N}_1$. درنتیجه

بنابر قضیه ۶ داریم $(A \cup B) \sim (\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_1) = \mathbb{N}$. که نشان می‌دهد $A \cup B$ شمارای نامتناهی است.

حالت ۲. $A \cap B \neq \emptyset$.

می‌نویسیم $C \subseteq B - A$. آنگاه $C = B - A$ و $A \cup C = A \cup B$ و $A \cap C = \emptyset$ ؛ مجموعه $A \cup C$ یا متناهی است یا شمارای نامتناهی [نتیجه قضیه ۸]. اگر C متناهی باشد، بنابر مسئله ۷ تمرین ۲۰.۵، $A \cup C$ شمارای نامتناهی است، درحالی که اگر C شمارای نامتناهی باشد، $A \cup C$ بنابر حالت ۱ بالا شمارای نامتناهی است. پس مجموعه $A \cup B$ شمارای نامتناهی است.

نتیجه. گیریم A_1, A_2, \dots مجموعه‌های شمارای نامتناهی هستند. آنگاه $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

برهان. به عنوان تمرین به خواسته واگذار می‌شود.

از خواسته می‌خواهیم که مثال بعدی را خود برسی کند.

مثال ۴. مجموعه تمام اعداد صحیح \mathbb{Z} شمارای نامتناهی است.

قضیه ۱۰. مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است.

برهان. تابع $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را که با

$$f(j, k) = 2^{j+1} + k \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

داده شده است، درنظر بگیرید. این تابع یک به یک است، بنابراین

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$$

چون $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نامتناهی است، $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ نیز نامتناهی است. بنابر قضیه ۸، $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است و از این‌رو مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نیز شمارای نامتناهی است.

نتیجه. برای هر $k \in \mathbb{N}$ گیریم A_k یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد که برای تمام $j \neq k$ ، درشرط $A_j \cap A_k = \emptyset$ صدق می‌کند، آنگاه $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.^۱

برهان. برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، تابع $f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{k\}$ را با $f_k(j) = (j, k)$ برای هر $j \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. بدینهی است که هر $f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{k\}$ یک تناظر یک به یک است. یعنی، $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$. چون برای هر $A_k \sim \mathbb{N}$ و $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$ ، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $A_k \sim \mathbb{N} \times \{k\}$. حال از مسئله ۷ تمرین ۲۰.۵ نتیجه می‌شود که $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\}$ اسا مجموعه $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ برای مجموعه شمارای نامتناهی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است. بنابراین، $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ شمارای نامتناهی است.

مثال ۵. مجموعه تمام اعداد گویا، شمارای نامتناهی است.

۱. این نتیجه بدون فرض « $A_j \cap A_k = \emptyset$ برای هر $k \neq j$ » نیز صحیح است. مسئله ۷ را ببینید.

برهان. هر عدد گویا را با p/q که در آن $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}$ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p و q یک است، به صورتی بکتاب نمایش می‌دهیم. گیریم \mathbf{Q}_+ مجموعه تمام اعداد مثبت p/q است، و $\{-p/q | p/q \in \mathbf{Q}_+\} = \{-p/q | p/q \in \mathbf{Q}_+\} \cup \{0\}$. آنگاه $\mathbf{Q}_- = \{-p/q | p/q \in \mathbf{Q}_+\}$ بدلیهی است که $\mathbf{Q}_- \sim \mathbf{Q}_+$. از این‌رو، برای اینکه نشان دهیم \mathbf{Q} شمارای نامتناهی است، کافی است نشان دهیم که \mathbf{Q}_+ شمارای نامتناهی است. برای این‌منظور، تابع $f : \mathbf{Q}_+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را که با $(p, q) = f(p/q)$ داده شده است، در نظر می‌گیریم. چون این تابع یک به یک است، داریم $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = f(\mathbf{Q}_+) \sim \mathbf{Q}_+$. چون \mathbf{Q}_+ یک فوق مجموعه \mathbb{N} است، نامتناهی است، $f(\mathbf{Q}_+)$ یک زیرمجموعه نامتناهی مجموعه شمارای نامتناهی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است. از این‌رو، $f(\mathbf{Q}_+)$ شمارای نامتناهی است و درنتیجه \mathbf{Q}_+ شمارای نامتناهی است. اکنون اثبات کامل است.

قضیه بعدی حاکی از این است که در واقع، مجموعه‌های شمارای نامتناهی از لحاظی در بین مجموعه‌های نامتناهی دارای کوچکترین «اندازه» هستند.

قضیه ۱۱. هر مجموعه نامتناهی شامل یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی است.

برهان. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی است. چون $\emptyset \neq X$ ، می‌توانیم یک عنصر از مجموعه X انتخاب کنیم و آن را x_1 بنامیم. حال عنصری از $\{x_1\} - X$ را x_2 کنیم. این می‌نمایم. همچنین، x_2 را عنصری از مجموعه غیرتنهی $\{x_1, x_2\} - X$ انتخاب می‌کنیم. این عمل را ادامه می‌دهیم، یعنی پس از اینکه x_1, x_2, \dots, x_k را بدین طریق مشخص کردیم، x_{k+1} را عنصری از $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} - X$ انتخاب می‌کنیم. x_{k+1} برای هر $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد، زیرا X نامتناهی است و درنتیجه مطمئن هستیم که برای هر $k \in \mathbb{N}$ $x_{k+1} \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\} - X$ تنهی نیست. مجموعه $\{x_{k+1} \in \mathbb{N} | k \in \mathbb{N}\}$ یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی X است، و بنابراین اثبات کامل است.

تمرین ۳۰۵

۱. حکم مثال ۴ را ثابت کنید: مجموعه تمام اعداد صحیح \mathbb{Z} شمارای نامتناهی است.
۲. نتیجه قضیه ۹ را ثابت کنید.
۳. ثابت کنید که اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های شمارا، شماراست.
۴. ثابت کنید که اگر A و B مجموعه‌های شمارای نامتناهی باشند، آنگاه $A \times B$ نیز شمارای نامتناهی است، بخصوص $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ، $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی هستند.
۵. یک تابع یک به یک $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ پیدا کنید و برهان دیگری برای مثال ۵ بیاورید.
۶. ثابت کنید که مجموعه تمام دایره‌های واقع در صفحه ذکاری که شاعهاشان اعداد گویا و مختصات مرکزهاشان اعداد گویا هستند، شمارای نامتناهی است.

* یعنی اگر $p'/q' = p/q$ و $p' \in \mathbb{Z}$ ، $q' \in \mathbb{N}$ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p' و q' یک باشد، آنگاه $p = p'q$ و $q = q'p$.

۷. ثابت کنید که اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، B_k یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد، آنگاه $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ شمارای نامتناهی است.
۸. ثابت کنید که اگر X یک مجموعه شمار، و $Y \rightarrow X$ یک سورژکسیون باشد، آنگاه Y شمار است.
۹. ثابت کنید که هر مجموعه شمارای نامتناهی X یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی مانند Y دارد به طوری که $Y - X$ شمارای نامتناهی است.
۱۰. ثابت کنید که مجموعه تمام چندجمله‌ایهای

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

- با ضرایب صحیح شمارای نامتناهی است. [راهنمایی: نتیجه قضیه ۱۵ را به کار بردید.]
۱۱. عدد جبری، بنا بر تعریف، هر دیشة حقیقی معادله $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ با ضرایب صحیح است. ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد جبری شمارای نامتناهی استه.
۱۲. ثابت کنید که مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

۴. مجموعه‌های ناشمارا

تمام مجموعه‌های نامتناهی ای که تاکنون دیده‌ایم، شمارا بوده‌اند. این مطلب معکن است خواننده را به این فکر بیاندازد که شاید تمام مجموعه‌های نامتناهی، شمارا هستند. عموماً فکر می‌کنند که گثورگ کاتور، هنگامی که نظریه مجموعه‌ها را تدوین می‌کرد، نخست سعی کرد ثابت کند که هر مجموعه نامتناهی، شمار است. وقتی اثبات کرد که مجموعه ناشمارا وجود دارد، نتیجه برایش غیرمنتظره بود.

قضیه ۱۲. فاصله یکه باز $(1, 0)$ اعداد حقیقی، یک مجموعه ناشمار است.

برهان. نخست هر عدد x ، $1 < x < 0$ را با سط اعشاری آن به صورت $x_0 x_1 x_2 \dots$ که در آن به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ، نشان می‌دهیم. مثلاً، $0.533\dots = \frac{1}{3} = 0.100\dots$. برای اینکه وقتی سط اعشاری عددی، مانند $0.25 = \frac{1}{4}$ ، محدود است، نمایش یکتاوی از اعشار نامتناهی داشته باشیم، قرار می‌گذاریم که از رقم آخر یکی کم کرده و رقمهای بعدی را بتوییم، بنا بر این می‌توییم $0.24999\dots = \frac{1}{4}$ ، نه $0.25000\dots$. با این قرارداد، دو عدد در فاصله $(1, 0)$ مساوی هستند اگر و تنها اگر رقمهای متاظر سط اعشاری آنها یکی باشند. از این‌رو، اگر دو عدد $x_0 x_1 x_2 \dots$ و $y_0 y_1 y_2 \dots$ در یک رقم اعشاری، مثلاً در بامیں، متفاوت باشند: $y_i \neq x_i$ ، آنگاه $y \neq x$. در برهان ما این یکی از نکته‌های اصلی است.

حال فرض کنید که مجموعه $(1, 0)$ شمارای نامتناهی است. آنگاه یک تناظر یک به یک

(۱) $f \sim N(5, 1)$ وجود دارد. از این رو می‌توانیم تمام عناصر $\{1, 5, 9\}$ را به صورت زیر مرتب کنیم:

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \circ \circ a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\
 f(2) &= \circ \circ a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\
 f(3) &= \circ \circ a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\
 &\vdots \\
 f(k) &= \circ \circ a_{k1} a_{k2} a_{k3} \dots
 \end{aligned}$$

نتیجه، مجموعه تمام اعداد حقیقی \mathbb{R} ، ناشمار است.

پوهان. در مثال ۳ (ب) ثابت کردیم که $(1, 0, 0) \sim R$. حال چون $(1, 0)$ ناشمار است، R که همتوان آن است، نیز ناشمار است (مسئله ۱ را بینید).

مثال ۶: مجموعه تمام اعداد گنگ، ناشمار است.

پوھان. درمثال ۵، نشان داده ایم که مجموعه تمام اعداد گویای Q شمارای نامتاهی است. مجموعه تمام اعداد گنگ، بنابر تعریف، $R - Q$ است. به آسانی می‌توان دید که $R - Q$ یک مجموعه نامتاهی است. برای اینکه نشان دهیم $R - Q$ ناشماراست، خلاف آن را فرض می‌کنیم، یعنی $R - Q$ دا شمارای نامتاهی می‌گیریم. آنگاه نتیجه می‌شود که $R = R \cup Q = R - Q \cup Q$ شمارای نامتاهی است (قضیه ۹). اما این، نتیجه قضیه ۱۲ را نقض می‌کند. سه، مجموعه تمام اعداد گنگ، $R - Q$ ، ناشماراست.

دوقذکاد. (۱) روشی که در بر هان قضیه ۱۲، به کار رفته است، روش قطری کانتور نامیده می شود؛ زیرا از ابتکارهای کانتور است و در جدول ارقام^(۴)، ارقام عدد

$z = z_1 z_2 z_3 \dots$ که کلید برهان است براساس ارقام قطر اصلی $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots$ تشکیل شده‌اند. گرچه ممکن است درک ارزش این برهان برای دانشجویان مبتدی آسان نباشد، نیوگ کانتور با این برهان آشکار می‌شود.

(۲) وجود مجموعه‌های ناشمارا نشان می‌دهد که مجموعه‌های نامتناهی از رده‌های تشکیل شده‌اند. در فصل بعد خواهیم دید که در حقیقت مجموعه‌های نامتناهی «رده‌های همتوانی» فراوان دارند.

تمرین ۴۰۵

۱. گیریم A و B دو مجموعه همتوان هستند. ثابت کنید که اگر A ناشمارا باشد، B نیز ناشماراست.
۲. ثابت کنید که هر فوق مجموعه یک مجموعه ناشمارا، ناشمار است.
۳. با استفاده از نتیجه مسئله ۲ بالا، برهان دیگری برای نتیجه قضیه ۱۲ بیاورید.
۴. ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد گنگ بین ۰ و ۱ ناشمار است.
۵. عدد متعالی، بنابر تعریف، یک عدد حقیقی غیرجبری است (مسئله ۱۱، تمرین ۳۰۵ را بینید). ثابت کنید که مجموعه تمام اعداد متعالی ناشمار است.
۶. گیریم $\{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = S'$. ثابت کنید $\mathbb{R} \sim S'$ و از این رو ناشمار است.
۷. ثابت کنید که مجموعه A ناشمار است اگر و تنها اگر $A \times A$ ناشمارا باشد.
۸. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \times B$ ناشمارا باشد، آنگاه یا A یا B ناشمار است.
۹. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ ناشمارا باشد، آنگاه یک $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به قسمی که A_j ناشمار است.
۱۰. ثابت کنید که اگر $k \in \mathbb{N}$ و مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_k به قسمی باشند که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ ناشمارا باشد، آنگاه یک $j \in \mathbb{N}_k$ وجود دارد به قسمی که A_j ناشمار است.
۱۱. ثابت کنید که اگر مجموعه‌های A و B به قسمی باشند که $A \oplus B$ ناشمارا باشد، آنگاه یا A یا B ناشمار است. آیا عکس آن درست است؟

۶

اعداد اصلی و حساب اعداد اصلی

مفهوم اعداد اصلی را معرفی می‌کنیم. دیگریهای مشابه و تفاوت بین اعداد اصلی متناهی و قرامتناهی را ضمن شناسانی حساب اعداد اصلی - جمع، خرب، و توان‌سازی - عرضه می‌کنیم. فصل ۱ با تصریحات دوباره فرض پیوستار (تعیین یافته) که جنبه تایخی دارد خاتمه می‌دهیم.

۱. مفهوم اعداد اصلی

مفهوم عدد از قدیم به طور طبیعی وارد زندگی ما شده است. ما می‌توانستیم مثلاً، تشابه بین سه سیب و سه پرتقال، و تفاوت بین دو انگشت و چهار انگشت را درک کنیم. گرچه مفهومی از عدد داشتیم، اکثر آن را تعریفی دقیق از عدد نداشتیم. مثلاً می‌دانستیم که، $5 = 2 + 3 = 4 < 3 < 4 \times 6$ وغیره. این موجب می‌شود معتقد شویم که احتیاجی نیست که واقعاً بدانیم عدد چیست؛ چیزی که باید بدانیم تساوی و ترتیب بین اعداد است و بدانیم چگونه با اعداد محاسبه کنیم - درست مثل شترنج بازها که علاقه‌مند نیستند بدانند که اسب در بازی شترنج چیست بلکه باید با حرکتهای آن آشنا باشند. بنابراین در اینجا

عدد اصلی را تعریف نمی‌کیم، بلکه آن را به عنوان یک مفهوم اولیه برای «اندازه» مجموعه‌ها معرفی می‌کیم. مهمترین قاعده‌های راهنمای این مفهوم جدید عبارت اند از:

الف-۱. هر مجموعه A با یک عدد اصلی مربوط است که با $\text{card } A$ نایاب داده می‌شود.

الف-۲. $\text{card } A = 0$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$.

الف-۳. اگر A یک مجموعه متاهمی غیرتی باشد؛ یعنی، برای یک $k \in \mathbb{N}$

$$\text{card } A = k \quad A \sim \{1, 2, \dots, k\}$$

الف-۴. برای هر دو مجموعه A و B ، $\text{card } A = \text{card } B$ اگر و تنها اگر $A \sim B$.
 قاعده‌های الف-۲ و الف-۳ اعداد اصلی مجموعه‌های متاهمی را تعریف می‌کنند.
 عدد اصلی یک مجموعه متاهمی تعداد عضوهای آن مجموعه است. در نظریه مجموعه‌ها با روش اصل موضوعی، الف-۱ و الف-۴ را معمولاً یک اصل موضوع می‌گیرند، به نام اصل موضوع اعداد اصلی. ممکن است پذیرفتن قاعده‌های الف-۱ و الف-۴ برای خواننده مبتدی مشکل باشد، زیرا این قاعده‌ها وقتی A نامتاهی است، چیز زیادی درباره $\text{card } A$ نمی‌گوید. این اشکال در ضمن ادامه بحث به تدریج بر طرف خواهد شد. درست شیوه به این است که دانشجو تنها پس از اینکه حدود نیمی از درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌خواند موضوع درس را می‌فهمد. در این مرحله اجمالاً می‌توانیم بگوییم که عدد اصلی یک مجموعه، ویژگی مشترکی است بین مجموعه و تمام مجموعه‌های همتوان خود.

تمرین ۱۰۶

۱. نشان دهید که اعداد طبیعی، اعداد اصلی هستند.
۲. سه عدد اصلی یا باید که عدد طبیعی نباشد.
۳. نشان دهید که $\text{card } \mathbb{N} = \text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
۴. فرض کنیم A یک مجموعه باشد و x عضور A نباشد. ثابت کنید که اگر $\text{card } (A \cup \{x\}) = \text{card } A$ آیا عکس مسئله ۴ درست است؟
۵. ثابت کنید که اگر $\text{card } A = \text{card } B = \text{card } N$ ، آنگاه $\text{card } (A \cup B) = \text{card } B$
۶. فرض کنیم $N^1 = N$ و برای هر $N^{n+1} = N^n \times N$ ، $n \in \mathbb{N}$. ثابت کنید

-
۱. شاید لازم باشد خواننده بداند که اعداد اصلی را می‌توان «اعداد ترتیبی آغازی» تعریف کرد. صفحه ۱۸۱ را ببینید.
 ۲. چهار حرف اول **cardinal number** به معنایی عدد اصلی است. *

$$\begin{aligned} \text{(الف) برای هر } k \in \mathbb{N}, \text{ card } \mathbb{N}^k &= \text{card } \mathbb{N}, \\ \text{(ب) } \text{card } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k &= \text{card } \mathbb{N} \end{aligned}$$

۲. مرتب کردن اعداد اصلی- قضیه شرودر- برنشتاین

عدد اصلی یک مجموعه متاهمی را عدد اصلی متاهمی، و عدد اصلی یک مجموعه نامتناهی را عدد اصلی تراهمتاهمی (یا ترانسفینی) می‌نامیم. قاعده‌های الف. ۲. والـ ۳. از بخش قبل نشان می‌دهند که اعداد اصلی متاهمی دقیقاً اعداد صحیح نامتفی هستند. از این‌رو، اعداد اصلی متاهمی دارای ترتیب طبیعی ذاتی $\dots < k < k+1 < \dots < 2 < 1 < 0$ هستند. درمورد دو عدد اصلی تراهمتاهمی، قاعدة الف. ۲. مشخص می‌کند چه وقت این دو عدد مساوی هستند و چه وقت نیستند. این برای ما کافی نیست؛ وقتی آنها نامساوی‌اند می‌خواهیم بتوانیم بگوییم کدام یک «کوچکتر» از دیگری است.

تعریف ۱. دو مجموعه A و B مفروض‌اند. می‌گوییم $\text{card } A$ کوچکتر از $\text{card } B$ یا مساوی با آن است، $\text{card } A \leq \text{card } B$ ، هرگاه مجموعه A با یک زیرمجموعه B همتوان باشد. اگر $\text{card } A \neq \text{card } B$ و $\text{card } A \leq \text{card } B$ ، آنگاه می‌نویسیم $\text{card } A < \text{card } B$.

اگرچه این تعریف را برای مرتب کردن اعداد اصلی تراهمتاهمی آورده‌ایم، اما درمورد اعداد اصلی متاهمی هم می‌توان آن را به کار برد، و از این راه هم بهمان ترتیب طبیعی سنتی، که در بالا ذکر شد، می‌رسیم.

مثال ۱. $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$

برهان. چون \mathbb{N} یک زیرمجموعه \mathbb{R} است، \mathbb{N} همتوان با یک زیرمجموعه \mathbb{R} است، یعنی $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ، اما در بخش ۴، فصل ۵ دیدیم که مجموعه نامتناهی \mathbb{R} ، ناشمار است. بنابراین \mathbb{R} با هیچ یک از زیرمجموعه‌های \mathbb{N} همتوان نیست. پس بنابر تعریف ۱، $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$

تا کنون برای ما روشی نیست که وقتی مجموعه A همتوان با یک زیرمجموعه B است و مجموعه B نیز همتوان با یک زیرمجموعه A است، چگونه دو عدد $\text{card } B$ و $\text{card } A$ را باهم مقایسه کنیم. گنورگ کانتور حدس زد که در این حالت $\text{card } B \geq \text{card } A$ باید با $\text{card } B$ مساوی باشد. بعد در دهه ۱۸۹۰ برنشتاین^{*} در سمینار کانتور، و شرودر^{**} برپایه یک حساب منطقی، مستقل از یکدیگر، این حدس کانتور را ثابت کردند. این نتیجه مشهور امروزه عموماً به نام قضیه شرودر- برنشتاین معروف است.

قضیه ۱۰ (قضیه شرودر-برنشتاین) اگر دو مجموعه A و B به قسمی باشند که A با یک زیرمجموعه B همتوان باشد و B نیز با یک زیرمجموعه A همتوان باشد، آنگاه A و B همتوان هستند.

ما نخست حالت خاصی از قضیه ۱ را ثابت می‌کنیم و از آن به آسانی قضیه ۱ را نتیجه می‌گیریم.

لهم، اگر B یک زیرمجموعه A باشد و اگر یک انژکسیون $f: A \rightarrow B$ وجود داشته باشد، آنگاه یک بیژکسیون $h: A \sim B$ وجود دارد.

برهان. اگر B خود A باشد، تابع همانی روی A یک h است. پس B دا یک زیرمجموعه سره A می‌گیریم. فرض می‌کنیم C مجموعه $(A-B) \cup f^n(A-B)$ باشد، که در آن \circ تابع همانی روی A است و به ازای هر عدد صحیح مثبت k و هر $x \in A$ ، $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$. تابع $h(z) = f(f^{k-1}(z))$ را به ازای هر z در A ، به طریق زیر تعریف کنید:

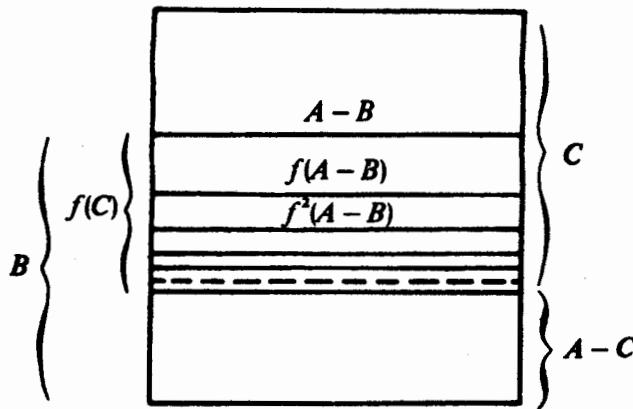
$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in C \\ z & z \in A - C \end{cases}$$

توجه کنید که $A - B$ زیرمجموعه C است، و اگر n و m دو عدد صحیح تامنفی متایز باشند، مثلًا $m < n$ ، آنگاه $f^n(A-B) \subset f^m(A-B)$ و $f^n(A-B) \cap f^m(A-B) = \emptyset$ دو مجموعه مجزا هستند. زیرا، اگر x و x' در $A - B$ وجود داشته باشند به طوری که $f^n(x) = f^n(x')$ که یک تناقض است. بالاخره، بنا بر تعریف آنگاه داریم $h(z) = z \in B \cap (A - B)$ و تذکار اخیر، داریم h

$$\begin{aligned} h(A) &= (A - C) \cup f(C) \\ &= \left[A - \bigcup_{n \geq 0} f^n(A - B) \right] \cup f \left(\bigcup_{n \geq 0} f^n(A - B) \right) \\ &= \left[A - \bigcup_{n \geq 0} f^n(A - B) \right] \cup \left[\bigcup_{n \geq 1} f^n(A - B) \right] \\ &= A - (A - B) \\ &= B \end{aligned}$$

از آنچه گفته شد و از اینکه f انژکتیو است، نتیجه می‌شود که $h: A \rightarrow B$ یک بیژکسیون است. پس برهان لم کامل است.

نکته اصلی برهان بالا در شکل گویای زیر نمایانده شده است. در این شکل مجموعه A تمام مستطیل است.



شکل ۱۷

برهان (قضیه ۱). گیریم A_0 و B_0 به ترتیب زیرمجموعه‌های A و B هستند به قسمی که $B \sim A_0$ و $A \sim B_0$ ، و فرض کنیم $f_0 : A \sim B_0$ و $f_0 : B \sim A_0$. $f : A \rightarrow A_0$ را با $f(x) = g_0(f_0(x))$ تعریف می‌کیم، که یک اینزکسیون است. پس بنابر لم بالا یک اینزکسیون $h : A \sim A_0$ وجود دارد. در نتیجه $g^{-1} \circ h : A \sim B$ که ترکیب دو اینزکسیون $h : A \sim A_0$ و $g^{-1} : A_0 \sim B$ است، یک اینزکسیون است.^۱

نتیجه. اگر A و B دو مجموعه باشند به قسمی که $\text{card } A \leq \text{card } B$ و $\text{card } A = \text{card } B$ ، آنگاه $\text{card } B \leq \text{card } A$

تاکنون اطلاعات اندکی درباره اعداد اصلی ترا متاهی داریم، زیرا فقط با دو عدد اصلی ترا متاهی، $\text{card } \mathbb{R}$ و $\text{card } \mathbb{N}$ آشنا شده‌ایم. طبیعی است بخواهیم بدانیم که آیا اعداد اصلی ترا متاهی دیگری وجود دارند؟ پاسخ این سوال در بخش بعدی آمده است در حقیقت تعداد نامحدودی عدد اصلی ترا متاهی وجود دارد.

سؤال مهم دیگر این است: اگر m و n دو عدد اصلی متاهی متمایز باشند آنگاه $m < n$ یا $n < m$ ؛ آیا این مطلب برای اعداد اصلی ترا متاهی نیز درست است؟ پاسخ مثبت است. و چون برهان آن به یکی از نتیجه‌های فصل بعدی بستگی دارد، این پاسخ در قضیه ۴ فصل بعد آمده است.

۱. این برهان و لم قبلی از مقاله:

R. H. Cox "A proof of the Schröder-Bernstein Theorem" American Mathematical Monthly, 75, No. 5 (1968), 508.

اقتباس شده است.

تمرین ۲۰۶

۱. گیریم n یک عدد اصلی متناهی است. ثابت کنید که $\cdot n < \text{card } N$
۲. گیریم a یک عدد اصلی تر متناهی است. ثابت کنید که $\text{card } N \leq a$. از این رو $\text{card } N$ کوچکترین عدد اصلی تر متناهی است.
۳. دو مجموعه A و B مفروض آند. ثابت کنید که $\text{card } A \leq \text{card } B$ اگر و تنها اگر یک اثر کسیون $B \rightarrow A$ وجود داشته باشد.
۴. سه مجموعه A ، B ، و C مفروض آند. ثابت کنید که
 - (الف) $\text{card } A \leq \text{card } C$ ، $\text{card } B \leq \text{card } C$ و $\text{card } A \leq \text{card } B$
 - (ب) اگر $\text{card } A < \text{card } C$ ، $\text{card } B < \text{card } C$ و $\text{card } A < \text{card } B$
۵. سه مجموعه A ، B ، و C مفروض آند. ثابت کنید که
 - (الف) اگر $\text{card } A < \text{card } C$ ، $\text{card } B < \text{card } C$ و $\text{card } A \leq \text{card } B$
 - (ب) اگر $\text{card } A < \text{card } C$ ، $\text{card } B \leq \text{card } C$ و $\text{card } A < \text{card } B$
۶. ثابت کنید که اگر A و B دو مجموعه باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $\text{card } A \leq \text{card } B$.
۷. ثابت کنید که اگر مجموعه های A ، B ، و C به طوری باشند که $A \sim C$ و $A \subseteq B \subseteq C$ و $A \sim B$. آنگاه $A \sim C$.
۸. نشان دهید که $\text{card } N < \text{card } R$.
۹. گیریم A یک مجموعه است و x عنصر A نیست. ثابت کنید که اگر $\text{card } A < \text{card } (A \cup \{x\})$ آنگاه A متناهی است.

۳. عدد اصلی یک مجموعه توانی- قضیه کانتور

گیریم X یک مجموعه است. یاد آوری می شود که مجموعه توانی X ، یعنی $\mathcal{P}(X)$ ، مجموعه تمام زیرمجموعه های X است (بخش ۲، فصل ۲). گثورگ کانتور خود ثابت کرد که $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$. اهمیت این قضیه در آن است که شیوه ای برای درست کردن یک دنباله بینهایت از اعداد اصلی (ترامتناهی) جدید به دست می دهد. مثلاً، داریم

$$\text{card } R < \text{card } \mathcal{P}(R) < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{P}(R)) < \dots$$

قضیه ۲. (قضیه کانتور). اگر X یک مجموعه باشد، آنگاه $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$

برهان. اگر $X = \emptyset$ ، آنگاه $\text{card } (\emptyset) = 0 < 1 = \text{card } \mathcal{P}(\emptyset)$. پس باقی می ماند که حالت $X \neq \emptyset$ ثابت شود. در این حالت تابع $(\mathcal{P}(X), g: X \rightarrow \mathcal{P}(X))$ که با $(x) \in \mathcal{P}(X)$ برای هر $x \in X$ ، تعریف می شود اثر کتیو است. بنابراین، مجموعه X با زیرمجموعه $\{x \mid x \in X\}$ از $\mathcal{P}(X)$ همتوان است، یا به عبارت دیگر، $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$. پس، برای اینکه نشان داده شود که $\text{card } X \leq \text{card } \mathcal{P}(X)$

کافی است نشان داده شود که X با $\mathcal{P}(X)$ همتوان نیست.

خلاف آن را فرض کنید، یعنی فرض کنید یک بیز کسیون $f: X \sim \mathcal{P}(X)$ وجود دارد؛ می خواهیم ثابت کنیم که با این فرض به یک تناقض می رسیم. مجموعه $S = \{x \in X | x \notin f(x)\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه عبارت است از تمام عنصرهای X که در نگاره های تحت f خودشان نیستند. چون $S \in \mathcal{P}(X)$ و فرض کردیم $e \in S$ ، یک عنصر X و وجود دارد به قسمی که $e \in S = f(e) = S$. اکنون یا $e \notin S$.

حالت ۱. $e \in S$.

از تعریف S نتیجه می شود که $e \notin f(e)$ ؛ که غیرممکن است زیرا $e \in S = f(e)$.

حالت ۲. $e \notin S$.

چون $f(e) = S$ ، داریم $e \notin f(e)$. در نتیجه، بنا بر تعریف S ، $e \in S$ و از این رو $e \in f(e)$. این نیز غیرممکن است.

پس در هر دو حالت به تناقض رسیدیم و بر همان قضیه کانتور کامل است.

بسیار طبیعی است که همراه با قضیه کانتور این سوال مطرح شود: آیا عددی اصلی، مانند \mathbb{Z} ، وجود دارد به قسمی که

$$\text{card } \mathbb{N} < x < \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

این سوال، که مسئله پیوستادی نامیده می شود، فکر کانتور و دیگر ریاضیدانان را مدت زیادی به خود مشغول کرد. در بخش ۸ درباره این مسئله گفتگو خواهیم کرد.

تمرین ۳.۶

۱. نشان دهید که بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد.
۲. گیریم A و B مجموعه هستند. ثابت کنید که اگر $A \sim B$ آنگاه

$$\text{card } \mathcal{P}(A) = \text{card } \mathcal{P}(B)$$

۳. گیریم A یک مجموعه شمارای نامتناهی است. ثابت کنید $\mathcal{P}(A)$ ، مجموعه توانی A ناشمار است.
۴. ثابت کنید که مجموعه تمام زیرمجموعه های نامتناهی \mathbb{N} ناشمار است. [راهنمایی: مسئله ۱۲، تمرین ۳.۵ را به کار ببرید]
۵. با استفاده از قضیه کانتور (قضیه ۲) ثابت کنید که مجموعه تمام مجموعه ها وجود ندارد.

۴. جمع اعداد اصلی

با حساب اعداد اصلی متناهی آشنا هستیم. مثلاً، اگر k و l دو عدد اصلی متناهی باشند، مجموع $k+l$ و حاصلضرب $k \cdot l$ همان معنی معمولی خود را دارند. اکنون تلاش می کنیم این حساب را تعیین دهیم تا شامل اعداد اصلی ترا متنه‌ی نیز بشود؛ یعنی حسابی بسازیم که در تمام اعداد اصلی، متناهی یا ترا متنه‌ی، به کار رود، و بدگونه‌ای باشد که معانی و ویژگیهای حساب سنتی اعداد اصلی متناهی محفوظ بماند.

تعریف ۲. گیریم a و b اعداد اصلی اصلی هستند. مجموع اصلی a و b ، که با $a+b$ نشان داده می شود، عدد اصلی $\text{card}(A \cup B)$ است که در آن A و B مجموعه‌های مجزا و به گونه‌ای هستند که $\text{card } A = a$ و $\text{card } B = b$.

برای اینکه نشان داده شود که تعریف ۲ خوش تعریف است^{*}، خواننده باید نخست بداند که برای هر دو عدد اصلی a و b (نه لزوماً متمایز)، بنا بر قاعدة الف-۱ بخش ۱، مجموعه‌هایی مانند X و Y وجود دارند به طوری که $\text{card } Y = b$ و $\text{card } X = a$ و $\text{card } X = a = X \times \{0\}$ و ممکن است مجموعه‌های X و Y مجزا نباشند. در این صورت می نویسیم: $\{1\} \times \{1\} = A \sim B = Y \times X$ ؛ آنگاه $A \cap B = \emptyset$ ، $B \sim Y$ ، $A \sim X$ ، $A \cap B = \emptyset$. پس $(A \cup B) \sim (A' \cup B')$ و $a+b = \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A' \cup B')$. اما $a+b = \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A' \cup B')$ و $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A' \cup B')$ و عددي یکنast، زیرا اگر مجموعه‌های مجزا دیگری مانند A' و B' وجود داشته باشد که $A' \sim A$ و $B' \sim B$ ، آنگاه بنا بر قضیه ۶ فصل ۴، داریم $(A' \cup B') \sim (A \cup B)$ یا به عبارت دیگر، $\text{card}(A' \cup B') = \text{card}(A \cup B)$ پس قضیه زیر را ثابت کردۀ ایم:

قضیه ۳. اعداد اصلی a و b مفروض‌اند. آنگاه
 (الف) مجموعه‌های مجزا A و B وجود دارند به‌قsmی که $\text{card } A = a$ و $\text{card } B = b$

(ب) اگر مجموعه‌های A ، B ، A' ، B' به‌قsmی باشند که $A' \cap B' = \emptyset$ ، $A \cap B = \emptyset$ و $\text{card } A' = \text{card } A$ و $\text{card } B' = \text{card } B$
 $\text{card } (A' \cup B') = \text{card } (A \cup B)$

مثالهای زیر نشان می‌دهند که تعریف ۲ در مورد اعداد اصلی متناهی، با مجموع معمولی دو عدد طبیعی مطابقت دارد.

مثال ۲. مجموع اصلی دو عدد اصلی ۳ و ۴ را باید.

* مقصود از «خوش تعریف است»، این است که $a+b$ بدون ابهام تعریف می‌شود. خوش تعریفی در اینجا مطرح است، زیرا اولاً واضح نیست که دو مجموعه A و B که در شایط تعریف ۲ صدق کنند وجود دارند و ثانیاً روش نیست که $a+b$ به انتخاب A و B بستگی ندارد.

جمع اعداد اصلی ۱۳۹

حل: چون $\{5, 6, 7\} = 3$ ، $\text{card } N_4 = 4$ ، $N_7 = N_4 \cup \{5, 6, 7\}$
و مجموعه‌های N_4 و $\{5, 6, 7\}$ مجزا هستند، داریم

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= \text{card}(N_4 \cup \{5, 6, 7\}) \\ &= \text{card } N_7 = 7 \end{aligned}$$

که با مجموع معمولی دو عدد صحیح مطابقت دارد.
چون اجتماع مجموعه‌ها جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است، ویژگی‌های مربوطه زیر را درباره جمع اصلی داریم.

قضیه ۴. گیریم x, y, z اعداد اصلی دلخواه هستند. آنگاه

$$(الف) x + y = y + x \quad (\text{جابه‌جایی})$$

$$(ب) (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{شرکت‌پذیری})$$

به پیروی از گثورگ کانتور، نماد \aleph_0 (بخوانید الف-صفه؛ \aleph_0 او لین حرف الفبا عربی است) برای نشان دادن عدد اصلی یک مجموعه شمارای نامتناهی و c برای عدد اصلی پیوستار به کار می‌رسد؛ پیوستار یعنی مجموعه اعداد حقیقی. بعبارت دیگر $\text{card } N = \aleph_0$ و $\text{card } \mathbb{R} = c$.

مثال ۳. مجموع اصلی $\aleph_0 + \aleph_0$ را بیاورد.

حل: گیریم N_e و N_o به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه اعداد طبیعی فرد هستند. آنگاه $\aleph_0 + \aleph_0$ زیرمجموعه‌های شمارای نامتناهی و مجزای مجموعه N هستند، و اجتماع آنها N است. درنتیجه، بنابر تعریف ۲،

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= \text{card } N_e + \text{card } N_o \\ &= \text{card}(N_e \cup N_o) \\ &= \text{card } N \\ &= \aleph_0. \end{aligned}$$

نتیجه مثال ۳ یک ویژگی اختصاصی اعداد اصلی ترا متناهی است؛ زیرا در اعداد اصلی متناهی $n + m = n$ تنها به ازای $m = n$ راست است. توصیه مسی شود خواننده به عنوان تمرین ثابت کند که $c + c = c$.

مثال ۴. مجموع اصلی $c + \aleph_0$ را بیاورد.

حل: در مثال ۳، بخش ۲، فصل ۵ دیدیم که فاصله باز $(1, 0)$ و مجموعه اعداد

حقیقی \mathbf{R} همتوان هستند. از این‌رو $\text{card}(\mathbb{N}, 1) = \text{card} \mathbf{R} = c$. می‌نویسیم $\mathcal{S} = \mathbb{N} \cup \{1\}$. آنگاه چون \mathbb{N} و $(\mathbb{N}, 1)$ مجزا هستند، $\text{card} \mathcal{S} = \aleph_0 + c$. از طرف دیگر، چون $S \sim S \subset (\mathbb{N}, 1)$ و $R \sim R \subset (\mathbb{N}, 1)$ ، بنابر قسمیه شرودر-برنشتاين (قضیه ۱)، $\aleph_0 + c = c$. بنابراین $S \sim R$.

تمرین ۴.۶

۱. ثابت کنید که برای هر عدد اصلی x ، $x + 0 = x$.
۲. گیریم x و y اعدادی اصلی هستند. ثابت کنید که $x + y = y + x$.
۳. گیریم x, y, z اعدادی اصلی هستند. ثابت کنید که $(x + y) + z = x + (y + z)$.
۴. گیریم n عدد اصلی متناهی دلخواهی است. ثابت کنید $n + \aleph_0 = \aleph_0$ (الف).
۵. ثابت کنید که $c + c = c$.
۶. گیریم x, y, z اعدادی اصلی هستند
(الف) ثابت کنید که اگر $y \leqslant x$ آنگاه $x + z \leqslant y + z$
(ب) با یک مثال نشان دهید که اگر در قسمت (الف) به جای « \leqslant » نماد « $<$ » گذاشته شود، حکم الف درست نیست.
۷. گیریم x, y, z اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که اگر $x = y$ آنگاه $x + z = y + z$.
۸. با یک مثال تقویض نشان دهید که عکس مسئله ۷ بالا درست نیست.
۹. ثابت کنید که برای هر مجموعه A و B ، $\text{card } A + \text{card } B = \text{card } (A \cup B) + \text{card } (A \cap B)$

۱۰. ثابت کنید که اگر a یک عدد اصلی ترا متناهی باشد، آنگاه $a + 1 = a$. [راهنمایی: از قسمیه شرودر-برنشتاين استفاده کنید.]
۱۱. ثابت کنید که اگر n یک عدد اصلی متناهی، و a یک عدد اصلی ترا متناهی باشد، آنگاه $a + n = a$.
۱۲. عکس مسئله ۱۱ بالا را ثابت کنید.

۵. ضرب اعداد اصلی

اکنون ضرب اعداد اصلی را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که نتیجه در مورد اعداد اصلی متناهی، با ضرب معمولی اعداد صحیح نامنفی مطابقت داشته باشد.

$S \sim S \subset R \sim R \sim (\mathbb{N}, 1) \subset S$ به ترتیب خلاصه $S \sim R$ هستند... .

تعریف ۳. برای هر دو عدد اصلی a و b ، حاصل ضرب اصلی ab ، عدد اصلی حاصل ضرب $card A \times card B = b$ تعریف شده است، که در آن $card A = a$ و $card B = b$.

برای اینکه بیانیم تعریف ۳ مستقل از انتخاب مجموعه‌های A و B است، مجموعه‌های X و Y را به قسمی می‌گیریم که $X \sim A$ و $Y \sim B$. آنگاه بنابر قضیه ۷ فصل ۵ $\text{card}(A \times B) = \text{card}(X \times Y)$ و از این رو $A \times B \sim X \times Y$ است که با این تعریف، هنگامی که a و b اعداد اصلی متناهی هستند، جواب درست بدست می‌آید. چون همگی باضرب اعداد صحیح نامفی آشنا هستیم، توجه ما به حاصلضرب اعداد اصلی ترا متوجهی و حاصلضرب یک عدد اصلی متناهی در یک عدد اصلی ترا متوجهی است. نخست به چند نتیجه ساده تعریف ۳ می‌پردازیم.

قضية ۵. گیریم x, y , و z اعداد اصلی دلخواه باشند. آنگاه
 (الف) $xy = yx$ (جا به جایی).

(ب) $(xy)z = x(yz)$ (شرکت‌پذیری).

$$x(y+z) = xy + xz \quad (\text{ج})$$

برهان. به عنوان ثمرین ارخوانده حواسته شده است.

مثال ۵. گیریم x یک عدد اصلی دلخواه است. مقادیر زیر را به دست آورید.

الف(x)

•x (ب)

• X. X. (c)

حل: گیریم مجموعه A به قسمی است که $\text{card } A = x$
 (الف) چون حاصلضرب دکارتی $A \times \{1\}$ با مجموعه A همتوان است، داریم

$$\cdot 1x = x$$

(ب) $x = \emptyset \times A = \emptyset$ ، داریم

(ج) چون $N \times N \sim N$ (قضیة ١٥، فصل ٥)، داریم $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 = N$

مثال ۶. ثابت کنید $c\mathbb{C} = c$ ، که در آن

برهان. چون مجموعه \mathbb{R} و فاصله یکه باز $(1, 0)$ از اعداد حقیقی، یک عدد اصلی دارند، برای اثبات $c \leqslant cc$ ، کافی است نشان داده شود که یک اثر کسیون از حاصلضرب دکارتی $(1, 0) \times (1, 0)$ به فاصله $(1, 0)$ وجود دارد. برای این منظور هر $x \in (1, 0)$ را با بسط اعشاری ناعتناهی اش نشان می‌دهیم. مثلاً، عدد $1/2$ را با $0.4999\ldots$ نشان می‌دهیم و نه با 0.5 . به این ترتیب هر عدد در $(1, 0)$ یک بسط یکتا دارد. اکنون به عهده خواننده است تحقیق کند که ثابت $(1, 0) \rightarrow (0, 1) \times (1, 0)$: f که با

$$f(0x_1y_1x_2y_2\cdots) = 0x_1y_1x_2y_2\cdots$$

تعریف می‌شود، انژکتیو است. پس برهان $c \leqslant cc$ کامل است. اثبات $cc \geqslant c$ به خواننده واگذار می‌شود.

تمرین ۵.۶

۱. قضیه ۵ را ثابت کنید.
 ۲. گیریم اعداد اصلی x, y, z به قسمی هستند که $y \leqslant x$. ثابت کنید که $yz \leqslant xz$.
 ۳. گزاره زیر را ثابت یا رد کنید: اگر اعداد اصلی x, y, z به قسمی باشند که $y < z$ و $0 \neq x, y, z$ آنگاه $yz < xz$.
 ۴. گیریم n یک عدد اصلی متاهی است. ثابت کنید که اگر $0 \neq n, n \neq x$.
 ۵. گیریم $x \neq y$ اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که
 - (الف) اگر $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$.
 - (ب) اگر $xy = 1$ آنگاه $x = 1$ و $y = 1$.
 ۶. نشان دهید که تابع $(0, 1) \rightarrow (0, 1) \times (0, 1)$: f که در برهان مثال ۶ با
- $$f(0x_1y_1x_2y_2\cdots) = 0x_1y_1x_2y_2\cdots$$
- تعریف شده است، سورژکتیو نیست.
۷. ثابت کنید که اگر x یک عدد اصلی و n یک عدد اصلی متاهی باشد، آنگاه $nx = x + x + \dots + x$.
 ۸. گیریم x, y, z اعداد اصلی هستند. ثابت کنید که اگر $y = xz$ آنگاه $y = x$.
 ۹. با آوردن مثال نقض ثابت کنید که عکس مسئله ۸، مسئله قبل، درست نیست.

۶. توان اعداد اصلی

گیریم a و b اعداد اصلی متاهی یا ترا متاهی هستند. برای اینکه b^a (بخوانید: توان a به b) را به صورتی جامع تعریف کنیم، نخست حالت متاهی $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ و به طور کلی $n^m = nn \cdots n$ (m بار) را بررسی می‌کنیم. می‌توانستیم این مفهوم را به کمک «حاصل ضرب بهای دکارتی تعمیم بافته» به حالت ترا متاهی تعمیم دهیم، اما روشی وجود دارد که در آن به حاصل ضرب بهای دکارتی تعمیم بساقه نیازی نیست. گیریم A یک مجموعه m عنصری و B یک مجموعه n عنصری باشد چند تابع از A به B وجود دارد (به مسئله ۱۱، تمرین ۳ رجوع کنید)? چون برای هر عنصر A ، می‌توان n نگاره انتخاب کرد و این انتخاب نگاره را می‌توان برای هر یک از m عنصر A ، مستقل از انتخاب نگاره‌ها برای دیگر عنصرهای A انجام داد، به جواب $n^n = nn \cdots n = n^m$ می‌رسیم. این مفهوم به صورت زیر تعمیم می‌باشد.

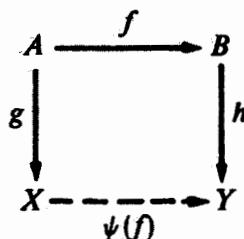
تعریف ۴. گیریم a و b دو عدد اصلی با شرط $a \neq b$ هستند. گیریم A و B مجموعه‌هایی هستند با اعداد اصلی $a = \text{card } A$ و $b = \text{card } B$. مجموعه تمام توابع از A به B را با B^A نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم $b^a = \text{card } B^A$

برای اینکه بتوانیم تعریف ۴ را پذیریم، لازم است تحقیق کنیم که تعریف ۴ مستقل از مجموعه‌های انتخاب شده A و B است. قضیه زیر این نیاز را برآورده می‌کند.

قضیه ۶. گیریم مجموعه‌های A ، B ، X ، Y به‌گونه‌ای باشند که $A \sim X$ ، $B \sim Y$ ، $A \sim X$ ، $B \sim Y$ آنگاه $Y^X \sim B^A$.

برهان. گیریم $X \sim A$ و $Y \sim B$: $h: A \sim X$ و $g: B \sim Y$: بیژکسیون هستند، آنگاه تابع $\psi: B^A \rightarrow Y^X$

را با $\psi(f) = h \circ f \circ g^{-1}$ ، که در آن برای هر $f \in B^A$ ، $\psi(f): X \rightarrow Y$ ، که در آن برای هر $x \in X$ ، $\psi(f)(x) = h(f(g(x)))$ تعریف می‌کنیم.



به خواننده واکذار می‌کنیم ثابت کنید که تابع $Y^X \rightarrow B^A$: ψ بیژکتیو است.

مثال ۷. گیریم A یک مجموعه است. اعداد اصلی $\text{card } \mathcal{P}(A)$ ، $\text{card } A^{\text{card } A}$ را باهم مقایسه کنید.

حل. گیریم $\{0, 1\} = B = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \neq \emptyset\}$. بهتر زیرمجموعه A مانند D ، تابع مشخصه $\chi_D: A \rightarrow B$ ، تابع مشخصه $X_D: A \rightarrow \mathbb{N}$ ، فصل ۳ تعریف شد، نظریه می‌کنیم. تابع از $\mathcal{P}(A)$ به B^A که D را به χ_D فرستد، بیژکتیو است (ثابت کنید). بنابراین مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و B^A یک عدد اصلی دارند؛ یعنی $\text{card } \mathcal{P}(A) = \text{card } B^A = 2^{\text{card } A}$.

قضیه ۷. گیریم a ، x ، y اعداد اصلی هستند. آنگاه $Y^X \sim A^{\text{card } A}$

برهان. گیریم مجموعه‌های A ، X ، Y به‌گونه‌ای هستند که $\text{card } A = a$ ، $\text{card } X = x$ و $\text{card } Y = y$ ، $\text{card } X \cap Y = \emptyset$. آنگاه بنا بر تعریف ۲، $\text{card } (X \cup Y) = x + y$ و $A^{X \cup Y} = A^X \times A^Y$ همتوان هستند. برای این منظور بهره جفت تابع $(f, g): A^X \times A^Y \rightarrow A^{X \cup Y}$ را انتخاب کنیم [قضیه ۸ فصل ۳ را بینید]. به عهده خواننده

است تحقیق کند که این تناظر یک همتوانی بین مجموعه‌های $A^X \times A^Y$ و $A^{X \cup Y}$ برقرار می‌کند. از این‌رو، $a^x a^y = a^{x+y}$.

قضیه ۸. گیریم x, y, z اعداد اصلی هستند. آنگاه $(z^y)^x = z^{yx}$.

برهان. گیریم X, Y, Z ، و مجموعه‌های باشد که اعداد اصلی آنها به ترتیب x, y, z هستند. مطابق با تعریف ۴، قضیه ثابت می‌شود اگر نشان دهیم $Z^{Y \times X} \sim (Z^Y)^X$. قبل از نشان دادن این همتوانی، نخست به یک نماد قراردادی نیازمندیم: برای هر تابع مفروض $f: Y \times X \rightarrow Z$ و هر عنصر مفروض $a \in X$ ، یک تابع $e_f(a) = f(a)$ وجود دارد که به ازای هر تابع $b \in Y$ با $f(b, a) = b^a$ تعریف می‌شود. به خوانده واگذار می‌کنیم نشان دهد که اگر تابع $e_f(a) = f(a)$ به ازای هر $a \in X$ تعریف شود، آنگاه تابع $e_f \in Z^{Y \times X}$ تابع $f \in Z^{Y \times X}$ را نظیر می‌کند، یک بیزکسیون است.

یادآوری می‌شود که A -تصویر $p_A: A \times B \rightarrow A$ تابعی است که به جفت مرتب $(a, b) \in A \times B$ را نظیر می‌کند و B -تصویر $p_B: A \times B \rightarrow B$ نیز به طبق مشابه تعریف می‌شود [به مسئله ۸، تمرین ۵۰۳ نگاه کنید].

قضیه ۹. گیریم a, b, x اعداد اصلی هستند آنگاه $(ab)^x = a^x b^x$.

برهان. گیریم اعداد اصلی مجموعه‌های A, B, X به ترتیب a, b, x هستند. تابع $(A \times B)^X \rightarrow A^X \times B^X$: لکه هر $f: X \rightarrow A \times B$ را با تابع $(p_A \circ f, p_B \circ f)$ در $A^X \times B^X$ نظیر می‌کند، بیزکسیو است (ثابت کنید). از این‌رو بنا بر تعریف ۴، $(ab)^x = a^x b^x$.

یادآوری می‌شود که اعداد اصلی مجموعه‌های \mathbb{N} و \mathbb{R} را به ترتیب با نمادهای \aleph_0 و c نشان می‌دهند و $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ (مثال ۵، فصل ۵ را بیینید) و $\mathbb{R} \sim \mathbb{C}$ (مثال ۳، فصل ۵ را بیینید). پس \aleph_0 عدد اصلی \mathbb{Q} و c عدد اصلی فاصله $(0, 1)$ است.

قضیه ۱۰. $\aleph_0 = c = 2^{\aleph_0}$

برهان. برای اثبات این قضیه نخست نشان می‌دهیم که $2^{\aleph_0} \leq c$ و سپس به اثبات $c \leq 2^{\aleph_0}$ می‌پردازیم. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ را که با

$$f(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\} \quad a \in \mathbb{R}$$

تعریف شده است در نظر بگیرید. این تابع از کتیو است: اگر $b < a$ دو عدد حقیقی متمايز باشند، آنگاه یک عدد گویای r وجود دارد به گونه‌ای که $a < r < b$. آنگاه $r \in f(b)$ ولی $(r \notin f(a)) \neq (a < r < b)$ از کتیو است. حال از نتایج مسئله ۳، تمرین ۶، و مثال ۷،

۱. زیرا اعداد گویا یک زیرمجموعه متناکم اعداد حقیقی هستند.

به دست می آید که

$$c \leq \text{card } \varphi(\mathbf{Q}) = 2^{\aleph_0}$$

برای اثبات نامساوی در جهت دیگر، فرض کنید $\mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}^N \rightarrow \psi$ تابعی باشد که با

$$\psi(f) = 0, f(1)f(2)f(3)\dots$$

که در آن $f \in \{0, 1\}^N$ ، تعریف شده است. توجه کنید که (f) یک عدد اعشاری (متاگل) از صفرها و یکها است. اگر $f, g \in \{0, 1\}^N$ و $f \neq g$ ، آنگاه $\psi(g) \neq \psi(f)$ ، زیرا رشته‌های اعشاری (f) و (g) متمایز هستند. بنابراین $\mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}^N \rightarrow \psi$ انژکتیو است، و بنابراین $c \leq 2^{\aleph_0}$.

نتیجه. $\aleph_0 < c$.

برهان. بنابر قضیه کانتور (قضیه ۲) و نتیجه مثال ۷ داریم

$$\aleph_0 < \text{card } \varphi(\mathbf{N}) = 2^{\text{card } \mathbf{N}} = 2^{\aleph_0} = c$$

تمرین ۶.۶

۱. ثابت کنید که در برهان قضیه ۶، تابع $Y^X \rightarrow B^A \rightarrow \psi$ بیژکتیو است.

۲. گیریم a یک عدد اصلی اختیاری است. ثابت کنید که $1 = a^1 = a^0 = 1^0$ ، و $a^0 = a^1$ اگر $a \neq 0$.

۳. نشان دهید که برای هر عدد اصلی a ، $a^2 > a$.

۴. گیریم اعداد اصلی a, b, x, y و به گونه‌ای هستند که $b \leq a$ و $x \leq y$. ثابت کنید که $a^x \leq b^y$.

۵. ثابت کنید که برای هر عدد متناهی $n \geq 2$ ، $n^{\aleph_0} = c = \aleph_0^{\aleph_0}$.

۶. ثابت کنید که برای هر عدد متناهی $n \geq 1$ ، $c^{\aleph_0} = c = c^n$.

۷. گیریم C مجموعه تمام اعداد مختلف است. ثابت کنید که $\text{card } C = c$.

۸. ثابت کنید که $c = c^{\aleph_0}$.

۹. ثابت کنید که تابع از $\varphi(A)$ به $\{0, 1\}^A$ که هر D در $\varphi(A)$ را به χ_D می برد، بیژکتیو است.

۱۰. مجموعه A دومجموعه مجزای X و Y مفروض اند. ثابت کنید که تابع از $A^X \times A^Y$

به $A^{X \cup Y}$ که هر (f, g) در $A^X \times A^Y$ را به $f \cup g$ در $A^{X \cup Y}$ می برد، بیژکتیو است.

۱۱. ثابت کنید که در برهان قضیه ۸، تابع $Z^Y \rightarrow (Z^Y)^X \rightarrow Z^{Y \times X} \rightarrow \psi$ بیژکتیو است.

۱۲. ثابت کنید که در برهان قضیه ۹، تابع $(A \times B)^X \rightarrow A^X \times B^X \rightarrow \psi$ بیژکتیو است.

* چون $g \neq f$ حداقل یک $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f(n) \neq g(n)$ که نتیجه می دهد

$(\psi(g)) \neq (f)$. منظور از جمله بالاهمین است، ناینکه الزاماً $(1), f(2), f(3), \dots$ به ترتیب از

$(1), g(2), g(3), \dots$ متمایز هستند. -۴-

۷. چندمثال دیگر از حساب اعداد اصلی

در مثال ۶، مستقیماً ثابت کردیم که $cc = c$. حال با استفاده از قضیه ۱۰، که حکم می‌کند $c = 2^{\aleph_0}$ ، یک برهان کوتاهتر ارائه می‌دهیم.

مثال ۸. با استفاده از قضیه ۱۰ ثابت کنید که $cc = c$ [مثال ۶ را بینید].
برهان. از قضیه ۷ و ۱۰ و مثال ۳، $x_0 + x_0 = x_0$ ، نتیجه می‌شود که

$$cc = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

مثال ۹. عدد اصلی $\{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ مجموعه تمام توابع \mathbb{R} به \mathbb{R} ، را با عدد اصلی \mathbb{R} ، یعنی c ، مقایسه کنید.

حل: داریم

$$\begin{aligned} \text{تعريف ۴} \quad \text{card } \{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} &= c \\ \text{قضیه ۱۰} \quad &= (2^{\aleph_0})^c \\ \text{قضیه ۸} \quad &= 2^{\aleph_0 \cdot c} \\ \text{مسئله ۸، تمرین ۶.۶} \quad &= 2^c \\ \text{مثال ۷، قضیه ۲} \quad &> c \end{aligned}$$

بنابراین، $\text{card } \{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} > \text{card } \mathbb{R}$

مثال ۱۰. گیریم (\mathbb{Q}, \mathbb{R}) و $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعه‌های تمام تابع حقیقی پیوسته با حوزه \mathbb{R} و با حوزه \mathbb{Q} هستند. گیریم $K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعه تمام تابع حقیقی ثابت با حوزه \mathbb{R} است. ثابت کنید که

$$\text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \text{card } C(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) = \text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = c$$

برهان. به هر تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابع $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ که با $f|_{\mathbb{Q}}(x) = f(x)$ برای هر $x \in \mathbb{Q}$ تعریف می‌شود، نظیر می‌شود. تابع $f|_{\mathbb{Q}}$ تحدید نامیده می‌شود. از این‌رو، تابع طبیعی $\psi : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$

۱. اگر معلم مایل باشد، می‌تواند برهان را حذف کند.

* هر تابع از (\mathbb{R}, \mathbb{R}) به (\mathbb{Q}, \mathbb{R}) به هر عنصر $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ یک عنصر $C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ را نظیر می‌کند؛
۲. ساده‌ترین تابع از $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ به $C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ است و طبیعی است. که $f|_{\mathbb{Q}}$ را نظیر f بگیریم،
از این‌رو مؤلف ψ را تابع طبیعی می‌نامد. -.

چند مثال دیگر از حساب اعداد اصلی ۱۴۷

وجود دارد که هر تابع $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ را به $f|_{\mathbb{Q}}$ ، تحدید f روی \mathbb{Q} ، نظریه می‌کند.
بديهی است که تحدید تابع پيوسته، پيوسته است، بنابراین $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$: $\psi: \psi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ يك تابع خوش تعریف است.

از اینکه اعداد گویا در اعداد حقیقی متراکم است؛ نتیجه می‌شود که برای هر عدد حقیقی x يك دنباله اعداد گویا، مانند $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ وجود دارد به قسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

در نتیجه، اگر دو تابع پيوسته $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اين ويزگي را داشته باشند که برای هر آنگاهه برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = g(x)$ ، $x' \in \mathbb{Q}$ ، $f(x') = g(x')$. به عبارت دیگر، تابع $\psi: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ داريم

$$\text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$$

$$\leq \text{card } \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$$

$$= c^{\aleph_0}$$

$$= (\aleph_0)^{\aleph_0}$$

$$=\aleph^{(\aleph_0 \cdot \aleph_0)}$$

$$=\aleph^{\aleph_0}$$

$$=c$$

حال، $K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ، مجموعه تمام توابع حقیقی ثابت باحوزه \mathbb{R} ، را در نظر بگیرید.
چون برای هر عدد حقیقی a ، يك تابع ثابت $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ داریم $f_a(\mathbb{R}) = \{a\}$ که با $\{a\}$ تعریف می‌شود، وجود دارد، داریم

$$\text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = c$$

چون هر تابع ثابت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پيوسته است، داریم $K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
بنابراین

$$c = \text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

که اگر با نامساوی آخر که در پاراگراف قبلی به دست آمد ترکیب شود، نتیجه می‌دهد

$$c = \text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } C(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \leq c$$

* برای اینکه تعریف $f|_{\mathbb{Q}}$ با معنی باشد، یا به عبارت دیگر $f|_{\mathbb{Q}}$ خوش تعریف باشد، لازم است که $f|_{\mathbb{Q}} \in C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ ، یعنی $f|_{\mathbb{Q}}$ پيوسته باشد...م.

به این ترتیب برهان اینکه $\text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \text{card } C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ مساوی با ۱ هستند، کامل است.

از مثال ۱۵ نتیجه می‌شود که تابعهای ثابت به «زیادی» تابعهای پیوسته هستند. این یک نشانه دیگر از ویژگیهای جالب مجموعه‌های نامتناهی است.

مثال ۱۶. عدد اصلی $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ، مجموعه تمام تابعهای حقیقی مشتقپذیر از یک متغیر حقیقی را بیابید.

حل: چون هر تابع ثابت، مشتقپذیر است و هر تابع مشتقپذیر پیوسته است، داریم

$$K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

بنابراین، داریم

$$c = \text{card } K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \text{card } C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = c$$

بنابراین، $\text{card } D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = c$

تمرین ۷.۶

۱. نشان دهید که در فضای n -بعدی (n عامل ضرب) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ «همان اندازه» نقطه است که در فاصله باز یکه $(1, 0, \dots, 0)$.

۲. فضای هیلبرت کلاسیک از تمام دنباله‌های نامتناهی اعداد حقیقی $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ، به نام نقطه، که در آن سری $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ همگرا است، تشکیل شده است. نشان دهید که تعداد نقاط فضای هیلبرت کلاسیک «به اندازه» نقطه‌های خط حقیقی \mathbb{R} است.

۳. مجموعه تمام دنباله‌های نامتناهی اعداد حقیقی $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ، که نقاطهای فضای \mathbb{R}^∞ نامیده می‌شوند، مفروض است. یک نقطه مشبکه‌ای در \mathbb{R}^∞ ، نقطه $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ است که در آن تمام x_i ها عدد صحیح هستند. نشان دهید که تعداد نقاط فضای \mathbb{R}^∞ «به اندازه» تعداد تمام نقاط مشبکه‌ای در \mathbb{R}^∞ است.

۴. نشان دهید که تعداد توابع یک متغیره حقیقی که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند «به اندازه» تعداد تمام توابع حقیقی n متغیره حقیقی است؛ یک عدد طبیعی است.

۵. گیریم عدد اصلی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، مجموعه تمام توابع یک متغیره با $n \in \mathbb{N}$ نشان داده شده است. نشان دهید که برای هر $f \in \mathbb{R}^n$

$$f^n = f^{\infty} = f^c = f.$$

۸. فرضیه پیوستار و تعمیم آن

چون هر مجموعه نامتناهی شامل یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی است (قضیه ۱۱، فصل ۵)،

عدد اصلی \aleph_0 کوچکترین عدد اصلی ترا متناهی است. در حدود سال ۱۸۸۵ کانتور سؤال مهمی که به مسئله پیوستاد مشهور است، مطرح کرد: آیا عددی اصلی بین \aleph_0 و \mathbb{C} وجود دارد؟ بدزبان مجموعه‌ها، آیا هیچ زیرمجموعه نامتناهی ناشمارای \mathbb{R} وجود دارد که عدد اصلی اش از عدد اصلی \mathbb{R} کوچکتر باشد؟ کوشش کانتور و بسیاری دیگر از ریاضیدانان بر جسته آن زمان در حل این مسئله به نتیجه نرسید. چون در هیچ راهی برای پیدا کردن آن وجود به چنین مجموعه‌ای برنخورده بودند و به نظر می‌رسید راهی برای پیدا کردن آن وجود ندارد، کانتور و دیگران معتقد شدند که جواب مسئله پیوستار باید منفی باشد. این اعتقاد به عنوان فرضیه پیوستاد مشهور شده است.

فرضیه پیوستار. عدد اصلی مانند α که در $\mathbb{C} = \langle x \rangle$ صدق کند، وجود ندارد.

پرسشی که در زیر می‌آید بسیار به مسئله پیوستار نزدیک است و معمولاً آن را مسئله پیوستاد تعمیم یافته می‌نامند: آیا عددی اصلی وجود دارد که بین دو عدد اصلی ترا متناهی α و β واقع باشد؟ به این سؤال نیز جواب داده نشده است. این اعتقاد که چنین عددی اصلی وجود ندارد فرضیه پیوستاد تعمیم یافته نامیده می‌شود.

فرضیه پیوستار تعمیم یافته. عدد اصلی ترا متناهی α هرچه باشد، عددی اصلی مانند β وجود ندارد به گونه‌ای که $\beta < \langle x \rangle < \alpha$.

دیری پایید که در سال ۱۹۰۵، در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس، ریاضیدان بزرگ آلمانی داوید هیلبرت (David Hilbert, 1862–1943) فهرستی از ۴۳ مسئله مهم ریاضی حل نشده را عرضه کرد، که او لین آنها مسئله پیوستار بود. هیچ پیشرفتی در حل این مسئله حاصل نشد تا اینکه در سال ۱۹۳۸ کورت گودل (Kurt Gödel, 1906–1978) منطق‌دان بر جسته قرن، ثابت

۱. ریاضیدان بر جسته همه ادوار، داوید هیلبرت (David Hilbert, 1862–1943)، استاد ریاضیات دانشگاه گوتینگن آلمان (۱۹۴۳–۱۸۶۲) بود. او بر تمام دنیای ریاضیات جدید، از جبر قرن نوزدهم تا منطق جدید و فیزیک ریاضی، تأثیرگذاشت. فضای مشهور هیلبرت از جمله کارهای تحقیقاتی فراوان اوت. هیلبرت براین عقیده بود که تمام ایده‌های ریاضی به طور هماهنگ با یکدیگر سازگارند.

۲. کورت گودل (Kurt Gödel, 1906–1978) از استئتوی مطالعات عالی پرینستون در نیوجرسی، در چکوسلواکی متولد شد. نخست در ۲۵ سالگی شهرت جهانی یافت. محققان بر جسته‌ای چون برتراندراسل (Alfred Tarski, 1970–1872) و آلفرد نورث وايتهد (Bertrand Russell, 1947–1861) به نظرشان رسیده بود که راهنمایی مطلق برای درستی یا نادرستی گزاره‌های معین ریاضی وجود دارد. گودل با اثبات اینکه آنچه راسل و وايتهد جستجو می‌کنند وجود ندارد، جهان را تکان داد. از جمله کارهای عمده دیگر او اثبات تمامیت منطق تسویر و اثبات سازگار بودن فرض پیوستار تعمیم یافته و اصل انتخاب است.

کرد که اگر فرض پیوستار تعمیم یافته به اصول موضوع رایج نظریه مجموعه‌ها افزوده شود، آنگاه هر تناقضی که امکان داشته باشد به وسیله این دستگاه اصول موضوعی بدست آید، ممکن است به صورت تناقضی بیان شود که از اصول موضوع قبلي (بدون اینکه فرض پیوستار تعمیم یافته به آنها اضافه شده باشد) نتیجه می‌شود.^۱ به عبارت دیگر، فرض پیوستار تعمیم یافته نسبت به اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها سازگار است.

بالاخره، در ۱۹۶۳، ریاضیدان جوان پل کوهن^{*} () از دانشگاه استانفورد کشف مهمی کرد. او نشان داد که فرض پیوستار تعمیم یافته به وسیله اصول موضوع متقارنی نظریه مجموعه‌ها اثبات شدنی نیست. بنابراین، وضع فرض پیوستار تعمیم یافته در نظریه مجموعه‌ها، همانند اصل موضوع توازی اقلیدس (اصل پنجم) در هندسه است، می‌توانیم آنها را پذیریم یا رد کنیم و در هر حالت یک تئوری سازگار ریاضی بدست آوریم.

۱. کتاب زیر را ببینید

K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940, 66 pp. Rev. ed., 1951, 74 pp.

* Paul J. Cohen

۷

اصل انتخاب و برخی از صور تهای هم‌ارز آن

اصل انتخاب و سه اصل هم‌ارز دیگر آن که کاربردهای فراوانی دارند، اصل ماسکیمال هادسدورف^{*}، لمندون^{**} و اصل خوشتیبی تصورملو^{***} – (ا) معرفی کرده‌ایم. دلیل دو دلنجیرهای از استنتاجها ثابت کردۀ ایم که اصل انتخاب و این سه اصل (یا پیش‌نمایش آنها) از هستند. اصل استقراری قرامت‌ناهی همراه با شرحی از چگونگی کاربرد این استقرار در برهانهای دیاضی (ا) آوردۀ ایم. با یک مبحث کوتاه تاریخی در باude اصل انتخاب، فصل را به پایان برموده‌ایم.

۱. مقدمه

فرض کنید که شما وارد یک مغازه میوه فروشی شده‌اید که تعدادی سبد (غیرتنهی) میوه دارد. اگر از شما بخواهند که از هر سبد یک میوه (و فقط یکی) انتخاب کنید، برای شما کار مشکلی نیست. اما سوال مشابه زیر، که در نگاه اول ممکن است بدیهی به نظر برسد، در حقیقت بیچیله است:

* Hausdorff maximality principle ** Zorn's lemma
*** well-ordering principle of Zermelo

یک مجموعه غیرتنهی S که عناصرش مجموعه‌های غیرتنهی مجزای S هستند داده شده است، آیا مجموعه‌ای مانند R وجود دارد که عنصرها یش تشکیل شده باشند از یک x از S ؟

مشکل اصلی وقتی پیش می‌آید که \in نامتناهی باشد. کوشش‌های ارنسٹ تسرملو (۱۸۷۱–۱۹۵۳)، و دیگران در اوایل قرن بیستم برای پاسخ به این سوال به نتیجه نرسید. تسرملو احساس کرد که این سوال احتمالاً حل شدنی نیست و تنها راه رهایی از مشکل، مسلم دانست اصل موضوعی است که از آن زمان به اصل انتخاب معروف شده است. این اصل را به صورت کلی اش بحسب تابعها، بیان می‌کنیم:

اصل انتخاب. برای هر مجموعه غیرتنهی S که عنصرها یش مجموعه‌های غیرتنهی هستند، یک تابع $A \in \mathcal{U} \rightarrow S$ به نام تابع انتخاب وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $\in A$ ، $f(A) \in A$

استفاده از اصل انتخاب اکنون برای اثبات بسیاری از نتایج مهم در شاخه‌های گوناگون ریاضیات ضروری است. در حقیقت، در اثبات قضیه ۱۱ فصل ۵، اصل انتخاب به صورتی پنهانی به کار رفته است.

پس از آن ریاضیدانان چند اصل دیگر کشف کردند که اغلب می‌توان آنها را به جای اصل انتخاب به کار برد. این اصول: اگرچه به ظاهر هیچ شباختی به اصل انتخاب ندارند، اما به زودی اثبات شد که با اصل انتخاب هم‌ارز هستند. برای درک بعضی از این اصول و ارتباط آنها با اصل انتخاب، به چند تعریف نیازمندیم:

تعریف ۱. رابطه \leqslant روی مجموعه I ، رابطه ترتیبی جزئی گفته می‌شود اگر و تنها اگر رابطه \leqslant روی I انکاسی و منعدی و پساد مقادن (یعنی اگر $a \leqslant b$ و $a \neq b \Rightarrow a \leqslant c \leqslant b$) آنگاه $(a = b)$ باشد. یک مجموعه جزوأ موقب، جفت (\leqslant, I) است که در آن I یک مجموعه و \leqslant یک رابطه ترتیبی جزوأ روی I است.

تعریف ۲. رابطه ترتیبی کلی \leqslant روی مجموعه I یک رابطه ترتیبی جزوأ است به گونه‌ای که برای هر دو عنصر a و b در I ، یا $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$ یا $a = b$. یک مجموعه کلاً موقب یک جفت (\leqslant, I) است که در آن I یک مجموعه و \leqslant یک رابطه ترتیبی کلی است.

هنگامی که از روی متن، رابطه ترتیبی جزوأ (کلی) \leqslant روی I روشن باشد و سوتفاهم امکان نداشته باشد، می‌توانیم به طور خلاصه بگوییم که I یک مجموعه جزوأ (کلاً) مرتب است. رابطه‌های ترتیب کلی و مجموعه‌های کلاً مرتب، رابطه‌های ترتیبی خطی و مجموعه‌های موقب خطی نیز نامیده می‌شوند. از تعریفها کاملاً هویداست که یک مجموعه کلاً مرتب، یک مجموعه جزوأ مرتب است، در حالی که یک مجموعه جزوأ مرتب الزاماً یک مجموعه کلاً مرتب نیست (مثال ۲، در ذیر را بینید). گیریم B زیرمجموعه‌ای از مجموعه جزوأ مرتب (A, \leqslant) باشد و $B \cap (B \times B) = \emptyset$ باشد. آنگاه

\leqslant_B یک مجموعه جزئی مرتب است؛ ممکن است که \leqslant_B یک رابطه کلاسی مرتب روی B باشد، در این حالت B «زیرمجموعه کلاسی مرتب مجموعه جزئی مرتب \leqslant_A » گفته می‌شود. زیرمجموعه کلاسی مرتب یک مجموعه جزئی مرتب را «زنگیر نیز» می‌نامند.

جمله « \leqslant_A یک مجموعه جزئی کلاسی» مرتب است را می‌توانیم با جمله هم ارز «زیر بیان کنیم: مجموعه A با رابطه \leqslant جزئی کلاسی مرتب شده است. به‌حال بهجای $a \leqslant b$ می‌توانیم بنویسیم $b \geqslant a$ و بهجای $a \leqslant b$ دو $a \neq b$ می‌توانیم بنویسیم $a < b$ یا $b > a$.

مثال ۱. گیریم X یک مجموعه غیر تهی است. (X, φ) مجموعه توانی X ، با رابطه شامل \subseteq روی $\varphi(X)$ جزئی مرتب است.

مثال ۲. گیریم $'\leqslant'$ رابطه‌ای است که روی \mathbb{R}^2 با $(a_1, a_2)' \leqslant (b_1, b_2)$ اگر و تنها اگر $a_1 \leqslant b_1$ و $a_2 \leqslant b_2$ تعریف شده باشد. خواننده باید تحقیق کند که رابطه $'\leqslant'$ یک رابطه ترتیبی جزئی روی \mathbb{R}^2 است. چون نه $(1, 2)' \leqslant (2, 1)$ برقرار است و نه $(1, 2)' \leqslant (1, 2)$ ، رابطه $'\leqslant$ یک رابطه کلاسی مرتب روی \mathbb{R}^2 نیست.

مثال ۳. در مثال ۲، قطر $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ در صفحه \mathbb{R}^2 ، یک زنگیر است.

تمرین ۱۰۷

۱. گیریم φ یک افزار مجموعه غیر تهی X است. ثابت کنید که یک مجموعه $R \subseteq X$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $C \cap R, C \in \varphi$ از یک و فقط یک عنصر تشکیل شده است؛ مجموعه R مجموعه نماینده‌های φ نامیده می‌شود.
۲. گیریم $f : A \rightarrow B$ یک سورژکسیون است، ثابت کنید که یک زیرمجموعه A مانند C وجود دارد به‌گونه‌ای که C همتوان B است و از این‌رو $\text{card } A \geq \text{card } B$.
۳. گزاره مثال ۱ را ثابت کنید.
۴. نشان دهید که

(الف) رابطه همانی $=$ روی مجموعه، یک رابطه ترتیبی جزئی است.

(ب) رابطه معمولی \neq روی مجموعه اعداد حقیقی، یک رابطه ترتیبی کلی است.

۵. گیریم F مجموعه تمام توابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است و فرض کنیم

$$\mathcal{R} = \{(f, g) \in F \times F \mid f(x) \leqslant g(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

ثابت کنید (F, \mathcal{R}) یک مجموعه جزئی مرتب است.

۶. ثابت کنید که مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} همراه با رابطه « x, y را بخش می‌کند» یک مجموعه جزئی مرتب است.

۷. گیریم $(\mathbb{R}^+, \leqslant')$ مجموعه جزئی مرتب مثال ۲، و m یک عدد حقیقی نامنی است. ثابت کنید که زیرمجموعه $(\mathbb{R}^+, \leqslant')$ که با $\{x, mx \mid x \in \mathbb{R}\}$ مشخص می‌شود، یک زنگیر است.

۸. گیریم $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتنهی است، یعنی، هر $A_\gamma \neq \emptyset$. آنگاه $P_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ ، حاصل‌ضرب دکاتی تعیین‌یافته خانواده $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ است، بنابر تعریف، مجموعه تمام‌توابع $f : \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ است که در آن برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، $f(\gamma) \in A_\gamma$. ثابت کنید که اگر $\Gamma \neq \emptyset$ ، آنگاه $P_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ تنهی نیست.
۹. نماد مسئله ۸ را به کار برد و ثابت کنید که اگر Γ متناهی، $\{\Gamma, 2, \dots, n\} = \Gamma$ باشد، آنگاه یک تناظر یک به یک بین $P_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ و مجموعه $\{\text{گانه‌های زیر وجود دارد: } x_i \in A_i \mid i \in \Gamma\}$ برای هر $x_1, x_2, \dots, x_n\}$ است و $\text{Dom } R = A$ و B مجموعه‌های غیرتنهی، R یک رابطه از A به B است و $\text{Dom } R = A$ است و ثابت کنید که یک تابع $f : A \rightarrow B$ وجود دارد به قسمی که $f \subseteq R$.
۱۰. ثابت کنید که تابع $f : A \rightarrow B$ سودگر است اگر و تنها اگر یک تابع $g : B \rightarrow A$ باشد به قسمی که $g \circ f = I_B$ ، که در آن I_B تابع همانی روی B است.
- [رجوع کنید به قضیه ۱۶ فصل ۳]

۲. اصل ماکسیمال هاو‌سدورف

در جبر نوین و توبولوژی، اغلب مناسبتر است از اصل هاو‌سدورف که با اصل انتخاب هم‌ارز است، استفاده کنیم. برای درک این اصل، به‌چند تعریف جدید نیاز داریم.

- تعریف ۳. گیریم (\leqslant, A) یک مجموعه جزئی مرتب است.
- (الف) عنصر $a \in A$ را کران بالای B ، یک زیرمجموعه A ، می‌گویند اگر و فقط اگر برای هر $b \in B$ ، $b \leqslant a$.
- (ب) u ، کران بالای B ، کوچکترین کران بالای B است اگر و تنها اگر برای هر کران بالای B مانند u ، $u \leqslant u$.
- (ج) عنصر $e \in A$ را ماکسیمال می‌گویند اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$ ، از $a \leqslant e$ نتیجه شود که $e = a$.

تعریف ۳ را که نظیر تعریف ۳ است، جداگانه بیان می‌کنیم.

- تعریف ۳. گیریم (\leqslant, A) یک مجموعه جزئی مرتب است.
- (الف) عنصر $v \in A$ کران پایین B ، یک زیرمجموعه A است اگر و تنها اگر برای هر $b \in B$ ، $b \leqslant v$.
- (ب) v کران پایین B ، بزرگترین کران پایین B است اگر و تنها اگر برای هر a ، $a \geqslant v$.
- (ج) عنصر $e' \in A$ مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$ از $a \leqslant e'$ نتیجه شود $e' = a$.

مثال ۴. گیریم X یک مجموعه غیرتنهی و B یک زیرمجموعه مجموعه جزئی مرتب

است [مثال ۱ را بینید]. آنگاه کوچکترین کران بالای $B \subseteq \mathcal{B}$ ، $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ است.

قضیه زیر نقش مهمی در اثبات هم ارزی اصل انتخاب با اصلهای دیگر ایفا می‌کند. اثبات این قضیه خسته کننده است و شاید هم یأس آور باشد؛ لذا نویسنده گان کتاب پیشنهاد می‌کنند در بار اول که مبتدیان کتاب را می‌خوانند، این قضیه را بدون برahan پذیرند.

قضیه ۱. گیریم مجموعه جزئی مرتب غیرتنهی (\leqslant_A) چنان است که هر زیرمجموعه کلاً مرتب A یک کوچکترین کران بالا در A دارد. اگر $f: A \rightarrow A$ به قسمی باشد که برای هر $p \in A$ ، $f(p) \geqslant p$ وجود دارد به قسمی که $f(p) = p$.

برahan. گیریم a یک عنصر اختیاری A است که در طول برahan ثابت خواهد ماند.

B زیرمجموعه A پذیرفتی گفته می‌شود اگر و تنها اگر دارای سرویزگی زیر باشد.

(یک) $a \in B$

(دو) $f(B) \subseteq B$

(سه) کوچکترین کران بالای هر زیرمجموعه کلاً مرتب و غیرتنهی B ، متعلق به A است.

گیریم B مجموعه تمام زیرمجموعه‌های پذیرفتی A باشد. آنگاه چون مجموعه A

پذیرفتی است، $\emptyset \neq B \subseteq A$. اشتراک مجموعه‌های پذیرفتی، پذیرفتی است؛ از این‌رو مجموعه

جزئی مرتب (B, \subseteq) یک عنصر مینیمال یکتا، $B = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ ، دارد. چون مجموعه

$\{x \in A | x \geqslant a\}$ آشکارا پذیرفتی است، داریم $B \subseteq \{x \in A | x \geqslant a\}$

(چهار) برای هر $x \in B$ ، $x \geqslant a$

$C = \{x \in B | y \in B \wedge y < x \Rightarrow f(y) \leqslant x\}$ بگیرید. ثابت

می‌کنیم که

(پنج) $x \in C \wedge z \in B \Rightarrow z \geqslant f(x)$ نتیجه می‌دهد یا $x \leqslant z$ یا

$x \in C \Rightarrow f(x) \geqslant x$ را ثابت اختیار کنید، و بنویسید $\{f(x) \leqslant x\} \subseteq B$.

آنگاه شرط (چهار) نشان می‌دهد که D در (یک) صدق می‌کند. مجموعه D در (دو) نیز

صدق می‌کند؛ زیرا اگر $(z \geqslant f(x)) \wedge (z \geqslant f(y))$ باشد، آنگاه $f(z) \geqslant f(x) \geqslant f(y)$ و اگر $z = x$ ، $z = y$ باشد، آنگاه چون $f(z) = f(x) = f(y)$ ؛ و اگر $x < y$ باشد، آنگاه چون $f(x) \leqslant f(y)$ داریم $x \leqslant y$. مجموعه D

همچنین در (سه) صدق می‌کند؛ اگر E زیرمجموعه غیرتنهی و کلاً مرتب D و u کوچکترین

کران بالای E باشد، آنگاه یا برای هر $y \in E$ ، $y \leqslant u$ و در نتیجه $x \leqslant u$ ، یا برای یک

$x \in E$ ، $x \geqslant f(x)$ و در نتیجه $x \geqslant f(x) \geqslant u$. بنابراین D پذیرفتی است، پس $D = B$ ،

و با این ترتیب (پنج) ثابت می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم که C پذیرفتی است. مجموعه C در (یک) صدق می‌کند، زیرا

$x \in C$ و در $y \in B$ عنصر کوچکتر از x وجود ندارد. نشان دهیم که C در (دو) صدق می‌کند،

ثابت می‌کنیم که اگر $x \in C$ ، $y \in B$ و $y < f(x)$ باشد، آنگاه $f(y) \leqslant f(x)$. بنابر (پنج)،

داریم $y \leqslant f(x)$ یا $y \leqslant x$ ؛ بنابراین اگر $y < f(x)$ باشد، آنگاه $y \leqslant x$ و چون $x \in C$ ،

$x < y$ نتیجه می دهد ($f(x) \leq f(y)$). اگر $y = x$ آنگاه $f(y) = f(x)$. برای اینکه ثابت کنیم C در (\leq) صدق می کند، w را کوچکترین کران بالای مجموعه غیر تهی و کلاً مرتب $C \subseteq G$ می گیریم. برای بررسی اینکه $w \in C$ ، فرض کنید $y \in B$ و $w < y$. بنابر (بنج) می دانیم که هر $x \in G$ این ویژگی را دارد که $x \leq y$ باشد $w \geq y$ نتیجه می شود، و این با طرز انتخاب y تناقض دارد. پس يك $x \in G$ وجود دارد به قسمی که $x \leq y$. اگر $x < y$ آنگاه بنابر تعریف $C = \{x \leq w\}$. اگر $y = x$ ، آنگاه چون $w < y$ ، يك $z \in G$ وجود دارد به قسمی که $z < y$. از این رو، بنابر تعریف $C = \{w \leq y\}$. پس $w \leq y$ و در نتیجه $w \in C$. حال چون مجموعه B يك زیرمجموعه پذیرفتی C است، الزاماً داریم $C = B$. در نتیجه بنابر (بنج)، B کلاً مرتب است. کوچکترین کران بالای B را p می نامیم؛ آنگاه $p \in B$. $f(p) \leq p$ ، پس $p \leq f(p) \leq p$

حال می توانیم اصل ماکسیمال هاو سدورف را با استفاده از اصل انتخاب ثابت کنیم.

قضیه ۲. (اصل ماکسیمال هاو سدورف). فرض می کنیم \mathcal{G} ، مجموعه تمام زیر مجموعه های کلاً مرتب يك مجموعه جزئی مرتب (\leq) باشمول \subseteq ، جزئی مرتب شده است. آنگاه $\subseteq(\mathcal{G})$ عنصر ماکسیمال دارد.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که \mathcal{G} عنصر ماکسیمال ندارد. آنگاه بهر $T \in \mathcal{G}$ يك مجموعه غیر تهی

$$T^o = \{S \in \mathcal{G} | S \supset T\}$$

نظیر می شود. بنابر اصل انتخاب، يك تابع φ با حوزه $\{T^o | T \in \mathcal{G}\}$ وجود دارد که در $T^o \in T^o$ g صدق می کند. در نتیجه، برای هر $T \in \mathcal{G}$ يك تابع $\varphi \rightarrow \varphi$ که با $\varphi(T) = g(T^o)$ تعریف می شود وجود دارد. با استفاده از مثال ۴، می بینیم که $T \in \mathcal{G}$ همراه با تابع φ در فرض قضیه ۱ صدق می کند. اما برای هر $T \in \mathcal{G}$ ، $\varphi(T) \subset T$ ، که يك تناقض است. پس قضیه ثابت شده است.

تمرين ۷۰۷

۱. گیریم B زیر مجموعه ای از مجموعه جزئی مرتب (\leq) است. ثابت کنید که کوچکترین کران بالای (بزرگترین کران پایین) B در صورت وجود، یکاست.
۲. مثالی بیاورید اذ زیر مجموعه کراندار مجموعه جزئی مرتب که نه کوچکترین کران بالا داشته باشد نه بزرگترین کران پایین.
۳. گیریم $X = \{a, b, c\}$ ، فرض کنیم مجموعه توانی (X^{Φ}) با رابطه شامل \subseteq جزئی مرتب شده است. تمام کرانهای بالا، تمام کرانهای پایین، کوچکترین کران بالا و بزرگترین

کران پایین مجموعه $\{a, b\}, \{c, a\}$ را باید.

۴. حکم مثال ۴ را ثابت کنید.
۵. در مسئله ۳، عناصر ماکسیمال و مینیمال $(X)^\varphi$ را باید.
۶. عناصر ماکسیمال و مینیمال مجموعه جزئی مرتب $(X)^\varphi$ در مثال ۴ را باید.
۷. مثالی از مجموعه جزئی مرتب بیاورید که بیش از یک عنصر ماکسیمال و نیز بیش از یک عنصر مینیمال داشته باشد.
۸. ثابت کنید که اگر مجموعه کلاس مرتب عنصر ماکسیمال (مینیمال) داشته باشد، آنگاه تنها یک عنصر ماکسیمال (مینیمال) دارد.
۹. مثالی از مجموعه کلاس مرتب بیاورید که نه عنصر ماکسیمال داشته باشد نه عنصر مینیمال.
۱۰. گیریم (\subseteq, \mathcal{G}) نمادی است که در قضیه ۲ آمده است و \mathcal{G} یک زیرمجموعه کلاس مرتب \mathcal{G} است. ثابت کنید که $\{\text{برای هر } \mathcal{G} \subseteq S, S \in \mathcal{G} | T \supseteq S\}$ کوچکترین کران بالای \mathcal{G} است.
۱۱. مطلب زیر را ثابت کنید. گیریم (\leqslant, A) یک مجموعه جزئی مرتب غیرنهی است به قسمی که هر زیرمجموعه کلاس مرتب A بزرگترین کران پایین دارد. اگر $f: A \rightarrow A$ به گونه‌ای باشد که برای هر $a, a \in A$, آنگاه $f(a) \leqslant a$ و وجود دارد به قسمی که $f(q) = q$ [راهنمایی: از قضیه ۱ استفاده کنید].
۱۲. گیریم (\leqslant, A) یک مجموعه جزئی مرتب و B یک زیرمجموعه کلاس مرتب A است. ثابت کنید که A یک زیرمجموعه کلاس مرتب ماکسیمال، مانند C ، دارد به قسمی که $B \subseteq C$. [راهنمایی: قضیه ۲ را به کار ببرید].
۱۳. گیریم (\leqslant, A) یک مجموعه جزئی مرتب است. B ، زیرمجموعه A ، پادزنجیرگفته می‌شود اگر و تنها اگر برای هر دو عنصر متمایز x و y در B , $x \leqslant y$ و $y \leqslant x$ هیچ یک برقرار نباشد. ثابت کنید که هر پادزنجیر، زیرمجموعه پادزنجیری است که نسبت به رابطه شمول \subseteq ، ماکسیمال است [راهنمایی: قضیه ۲ را به کار ببرید].

۳. لم تسورن

شاید یکی از صور تهای هم ارز اصل موضوع انتخاب که بیش از دیگر صور تها به کار می‌رود، لم تسورن باشد که اولین بار در سال ۱۹۱۴ عنوان شد. اصطلاح لم تسورن که معمولاً به کار می‌برند کم و بیش گمراه کننده است، شاید مناسبت برآورد باشد به گوییم «اصل تسورن».

در قضیه ۲، در واقع ثابت کردۀ ایم که اصل ماکسیمال هاوسدورف از اصل انتخاب نتیجه می‌شود. در برخان قضیه بعدی، نشان خواهیم داد که لم تسورن از اصل ماکسیمال هاوسدورف نتیجه می‌شود.

قضیه ۳. (لم تسورن). گیریم (\leqslant, A) مجموعه جزئی مرتبی است که در آن هر زیرمجموعه کلاس مرتب کران بالا دارد. آنگاه A عنصر ماکسیمال دارد.

برهان. بنابر اصل ماکسیمال هاو سدورف، (\leqslant, A) یک زیرمجموعه کلا^{*} مرتب B دارد که نسبت به رابطه شمول \subseteq ماکسیمال است. گیریم \forall یک کران بالای B است؛ $x \in A$ بنا بر فرض وجود دارد. ثابت خواهیم کرد که \forall عنصر ماکسیمال A است. اگر عنصر $x \in A$ چنان باشد که $\forall x \geqslant x$ ، آنگاه $\{x\} \cup B$ یک زیرمجموعه کلا^{*} مرتب (\leqslant, A) است و شامل زیرمجموعه کلا^{*} مرتب ماکسیمال B است. در نتیجه باید داشته باشیم $\{x\} \cup B = B$ ، پس $\forall x$. این ثابت می کند که \forall عنصر ماکسیمال (\leqslant, A) است.

قضیه ۳، یک نمونه از قضیه وجودی (در مقابل ساختی) است؛ صرفاً وجود عنصر ماکسیمال را در مجموعه ای جزئیاً مرتب بیان می دارد. برهان قضیه ۳ هیچ گونه روش سازنده ای برای پیدا کردن عنصر ماکسیمال به دست نمی دهد. این نکته درباره قضیه ۲ تمام نتیجه هایی که در این فصل خواهد آمد، صادق است.

بعد از این یکی از موارد استعمال لم تصور، قضیه زیر را اثبات می کنیم، در آخر بخش ۲ از فصل ۶ وعده داده بودیم برهان آن را بیاوریم.

قضیه ۴. گیریم A و B مجموعه های غیر تهی هستند. آنگاه یا یک انژکسیون از A به B وجود دارد یا یک انژکسیون از B به A .

برهان. $\exists f: A_\alpha \rightarrow B$ مجموعه تمام جننهای $f(A_\alpha) = A_\beta$ را، که در آن f یک زیرمجموعه A است و $A_\alpha \subseteq A_\beta$ یک انژکسیون است، درنظر می گیریم. رابطه \leqslant را روی \mathcal{C} چنین تعریف می کنیم:

$$A_\alpha \subseteq A_\beta \wedge f_\alpha \subseteq f_\beta \Leftrightarrow (A_\alpha, f_\alpha) \leqslant (A_\beta, f_\beta)$$

این رابطه آشکارا یک رابطه ترتیب جزئی است. برای استفاده از لم تصور، باید مطمئن باشیم که هر زیرمجموعه کلا^{*} مرتب \mathcal{C} ، مانند $\{(A_\gamma, f_\gamma) | \gamma \in \Gamma\} = \{(A_\gamma, f_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ کران بالا دارد. طبیعی است کسانی بالای \mathcal{C} را جفت $(A_\gamma, f_\gamma) \cup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \cup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$ بگیریم. بنامید $A_\gamma \cup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = A_\delta$ و $f_\gamma \cup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma = f_\delta$. برای اثبات اینکه $f_\delta(x) = f_\gamma(x)$ تعریف شود، اگر $x \in A_\gamma$ و $\gamma \in \Gamma$. برای اثبات اینکه $f_\delta: A_\delta \rightarrow B$ خوشنویس است، فرض کنیم که x به زیرمجموعه دیگری مانند A_θ و f_θ متعلق است. آنگاه $f_\delta(x) = f_\theta(x)$ و $(A_\delta, f_\delta) \leqslant (A_\theta, f_\theta)$. و در هر دو حالت داریم $(A_\delta, f_\delta) \leqslant (A_\gamma, f_\gamma)$ یا $(A_\gamma, f_\gamma) \leqslant (A_\delta, f_\delta)$. بنابراین B یک تابع خوشنویس است. اکنون نشان می دهیم که $f_\delta: A_\delta \rightarrow B$ انژکتیو است. فرض کنید که برای یک x و یک y در A_δ ، $f_\delta(x) = f_\delta(y)$. $f_\delta(x) = f_\delta(y)$ در \mathcal{C} وجود دارند به قسمی که $x \in A_\gamma$ و $y \in A_\theta$. همانند قبل، یا $(A_\delta, f_\delta) \leqslant (A_\gamma, f_\gamma)$ یا $(A_\delta, f_\delta) \leqslant (A_\theta, f_\theta)$ می توانیم فرض کنیم که نامساوی اول درست است؛ آنگاه نتیجه می شود که $f_\delta(x) = f_\delta(y)$ و $f_\delta(x) = f_\theta(x)$ و $f_\theta(x) = f_\gamma(x)$. این ثابت می کند که $f_\delta: A_\delta \rightarrow B$ انژکتیو است. پس، برای هر $\gamma, \theta \in \Gamma$ $(A_\delta, f_\delta) \geqslant (A_\gamma, f_\gamma)$ و $(A_\delta, f_\delta) \geqslant (A_\theta, f_\theta)$ در نتیجه $(A_\delta, f_\delta) \geqslant (A_\gamma, f_\gamma)$ در فرض لم

ت سورن صدق می کند. پس $\exists \tilde{f}$ یک عنصر ماکسیمال دارد که ما آن را با (\tilde{f}, \tilde{A}) نشان می دهیم. حال دو حالت پیش می آید:

حالت ۱. $\tilde{A} = A$

در این حالت $B \rightarrow A \rightarrow B : \tilde{f}$ انزوکسیون است و قضیه ثابت شده است.

حالت ۲. $\tilde{A} \neq A$

گیریم $\exists x_0 \in A - \tilde{A}$. در این حالت، نشان می دهیم که $\tilde{A} \rightarrow B \rightarrow B : \tilde{f}$ بیژکتیو است. زیرا درغیر این صورت، یک عنصر $(\tilde{A} - \tilde{f})(\tilde{A})$ وجود دارد. تابع $B \rightarrow B : \tilde{f}$ که با $y = f(x_0)$ و $f(x_0) = \tilde{f}(x)$ برای هر $x \in \tilde{A}$ تعریف می شود، آشکارا یک انزوکسیون است. بنابراین $(\tilde{f}, \tilde{A} \cup \{x_0\}, \tilde{f}) > (\tilde{A}, \tilde{f})$ ، که ماکسیمال بودن (\tilde{A}, \tilde{f}) را نقض می کند. این ثابت می کند که $B \rightarrow \tilde{A} : \tilde{f}$ بیژکتیو است و درنتیجه، \tilde{f}^{-1} یک انزوکسیون از B روی \tilde{A} ، زیرمجموعه A است. اکنون اثبات کامل است.

یک نتیجه مستقیم قضیه ۴ در زیر آمده است.

نتیجه. اگر A و B دو مجموعه باشند. آنگاه با $\text{card } A \leq \text{card } B$ با $\text{card } B \leq \text{card } A$

بنابراین اگر m و n دو عدد اصلی متایز باشند، یا $m < n$ یا $n < m$

کهورین ۳۰۷

۱. گیریم (\leq, A) یک مجموعه جزئی مرتب است که در آن هر زیرمجموعه کلاً مرتب پلک کران پایین دارد. نشان دهید A عنصر مینیمال دارد.

۲. ثابت کنید که از لم ت سورن، اصل ماکسیمال هاوسدورف نتیجه می شود.

۳. برای دانشجویانی که جبر خطی خوانده اند: ثابت کنید که هر حلقه با عنصریکه، یک ایدال ماکسیمال سره دارد.

۴. برای دانشجویانی که جبر خطی خوانده اند: ثابت کنید که هر فضای برداری یک پایه دارد.
۵. نتیجه قضیه ۲ را ثابت کنید.

۶. یک مجموعه جزئی مرتب (\leq, A) ، مشبک گفته می شود اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه دو عنصری $\{y, x\}$ کوچکترین کران بالا (یکتا)، که با $y \leq x$ نشان داده می شود، و نیز بزرگترین کران پایین (یکتا)، که با $y \geq x$ نشان داده می شود، داشته باشد. ثابت کنید که مشبکهای، که در آن هر زنجیر یک کران بالا دارد، عنصر ماکسیمال یکتا دارد.

۷. گیریم (\leq, A) یک مجموعه جزئی مرتب است که در آن هر زیرمجموعه کلاً مرتب یک کران بالا دارد و فرض کنیم $a \in A$. آنگاه A یک عنصر ماکسیمال \neq دارد به قسمی

که $a \geq a$.

۸. گیریم B یک مجموعه است. می‌گوییم \subseteq ، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های B دارای مشخصه متناهی است، هرگاه $A \in \subseteq$ اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه متناهی A متعلق به \subseteq باشد. ثابت کنید که اگر \subseteq مشخصه متناهی داشته باشد، آنگاه (\subseteq, \subseteq) عنصر ماکسیمال دارد.

۹. گیریم A یک مجموعه دلخواه با بیش از یک عنصر است. ثابت کنید که یک بیژکسیون $f : A \rightarrow A$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in A$ ، $x \neq f(x)$.

۴. اصل خوشترتیبی

اکنون لم تصورن را برای اثبات یک اصل حیرت‌انگیز در نظریه مجموعه‌ها، یعنی اصل خوشترتیبی ارنست تسرملو (۱۸۷۱–۱۹۵۳)، به کار می‌بریم.

تعريف ۴. یک مجموعه کاملاً مرتب (\leqslant_A) خوشترتیب گفته می‌شود اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه غیر تهی A مانند B شامل عنصر مینیمال (یکتا) باشد؛ یعنی، اگر یک عنصر $b \in B$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in B$ ، $x \leqslant_A b$. b را کوچکترین عنصر B می‌نامند. اگر (\leqslant_A) یک مجموعه خوشترتیب باشد آنگاه رابطه \leqslant را «ابطه خوشترتیبی» می‌گویند.

مثال ۵. (الف) مجموعه اعداد طبیعی تحت رابطه «کوچکتر یا مساوی» خوشترتیب است.
(ب) مجموعه اعداد گویا تحت رابطه معمولی «کوچکتر یا مساوی» خوشترتیب نیست.

مجموعه A را خوشترتیب می‌گویند هرگاه یک رابطه خوشترتیبی روی A وجود داشته باشد.

قضیة ۵. (اصل خوشترتیبی). هر مجموعه خوشترتیب شدنی است.

پرهان. گیریم H مجموعه دلخواه مفروض است که باید خوشترتیب شود. A^* مجموعه تمام مجموعه‌های خوشترتیب (\leqslant_H) را، که در آن $\subseteq H$ ، در نظر بگیرید.

A^* را از راه زیر جزئی مرتباً کنیم: می‌نویسیم $(\leqslant_H)^*$ (\leqslant_H^*) اگر و تنها اگر

(یک) $A_0 \subseteq A_1$

(دو) $x, y \in A_0$ و $x, y \leqslant_H^*$ نتیجه دهد $y \leqslant_H^*$

و

(سه) $x \in A_1 - A_0$ نتیجه دهد که برای تمام $y \in A_0$ ، $x, y \leqslant_H^*$.

خواننده باید بررسی کند که این رابطه \leqslant^* واقعاً یک رابطه ترتیبی جزئی A است. برای به کار بردن لم تصورن، نشان می‌دهیم که هر زیرمجموعه کلاً مرتب (\leqslant^*) مانند \mathcal{A} ، کران بالا دارد. طبیعی است این کران بالا را $(\leqslant^*)_{A \in \mathcal{A}}$ بگیریم، که در آن

۱. برای ساده بودن عالمتگذاری، از این به بعد نماد $A \in \mathcal{B}$ به معنی $(\leqslant^*) \in \mathcal{B}$ خواهد بود.

$y' \leqslant x$ اگر و تنها اگر x و y متعلق به یک $A \in \mathcal{B}$ باشند به قسمی که $(A, \leqslant) \in \mathcal{B}$ و $y \leqslant x$. بدینه است که اگر (A, \leqslant) متعلق به A^* باشد، $(A, \leqslant) \subseteq A^*$ یک کران بالای \mathcal{B} خواهد بود. ثابت خواهیم کرد که $(A, \leqslant) \subseteq A^*$ خوشتیب است و بنابراین متعلق به A^* است. تحقیق در اینکه $(A, \leqslant) \subseteq A^*$ یک رابطه کلاً مرتب روی $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ است ساده است و آن را به عهده خواننده می‌گذاریم. گیریم S یک زیرمجموعه غیرتیبی $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ است. آنگاه $(A, \leqslant) \in \mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $A \subseteq S$ را قطع می‌کند. چون $(A, \leqslant) \in \mathcal{B}$ خوشتیب است، $S \cap A$ شامل کوچکترین عنصر یکتاست که آن را $x \in S \cap A$ نامیم. از این نتیجه می‌شود که برای هر $y \in S$ ، $y \leqslant x$. $(A, \leqslant) \in \mathcal{B}$ وجود دارد به گونه‌ای که $(A, \leqslant) \subseteq (A, \leqslant)$ و $y \in A$ ، $y \leqslant x$ ؛ پس $y \leqslant x$ و از این رو $y \leqslant x$. پس x کوچکترین عنصر S تحت \leqslant است، بنابراین $(A, \leqslant) \subseteq A^*$ خوشتیب است.

بنابر لم تسودن، (A^*, \leqslant^*) یک عنصر ماکسیمال است. ثابت می‌کنیم که $A_1 = H$ و از این رو $(A, \leqslant) \subseteq (A^*, \leqslant^*)$ خوشتیب است. زیرا، اگر $A_1 \neq A$ ، آنگاه یک x_1 در $H - A_1$ انتخاب کنید و $x_1 \leqslant^* x_1$ را به $\{x_1\} \cup A_1$ از راه تعریف $x_1 \leqslant^* x_1$ برای هر $x \in A$ تعمیم دهید، آنگاه مجموعه (A, \leqslant) تحت \leqslant^* اکیداً از (A^*, \leqslant^*) بزرگتر است و این ماکسیمال بودن (A, \leqslant) را نقض می‌کند. برهان اصل خوشتیبی اکنون کامل است.

اصل خوشتیبی یک نمونه بر جسته دیگر از قضیه غیرسازنده است. برهان قضیه ۵ به هیچ وجه راه «خوشتیب کردن» عناصر H را نشان نمی‌دهد؛ بلکه تنها حکم می‌کند که یک رابطه خوشتیب وجود دارد. در حقیقت، حتی نمی‌دانیم چگونه اعداد حقیقی را می‌توان خوشتیب کرد.

ما تاکنون تسلیل منطقی زیر را نشان داده‌ایم: اصل انتخاب \Leftarrow اصل ماکسیمال هاوسدورف \Leftarrow لم تسودن \Leftarrow اصل خوشتیبی.
برای تکمیل برهان هم ارزی این چهار اصل، کافی است نشان دهیم که از اصل خوشتیبی، اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

قضیه ۶. از اصل خوشتیبی، اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

برهان. گیریم \mathcal{S} یک مجموعه غیرتیبی است که عناصرش مجموعه‌های غیرتیبی هستند. بنابر اصل خوشتیبی، یک رابطه کلاً مرتب \leqslant وجود دارد به گونه‌ای که $(A, \leqslant) \subseteq \mathcal{S}$ خوشتیب است. در نتیجه، هر مجموعه $A \in \mathcal{S}$ شامل کوچکترین عنصر است. اکنون برای هر $A \in \mathcal{S}$ ، مقدار $A \rightarrow \mathcal{S} : f$ ، یعنی $f(A) \subseteq \mathcal{S}$ را کوچکترین عنصر A می‌گیریم. این تابع خوشتیب است و یک تابع انتخاب است. این اصل انتخاب را ثابت می‌کند.*

* به عبارت دیگر، اصل خوشتیبی \Leftarrow اصل انتخاب... .

به این ترتیب همارزی اصل انتخاب، اصل ماقسیمال هاوستورف، لم‌سورن، و اصل خوشترتیب را ثابت کرده‌ایم. در باقیمانده این کتاب اصل انتخاب (و سه اصل همارز دیگر آن) را خواهیم پذیرفت و از آن استفاده خواهیم کرد.

تمرين ۴.۷

۱. نشان دهید که مجموعه اعداد حقیقی تحت رابطه «کوچکتر یا مساوی» معمول در اعداد حقیقی، خوشترتیب نیست.
۲. بدون استفاده از قضیه ۵، مستقیماً ثابت کنید که مجموعه اعداد گویا را می‌توان خوشترتیب کرد.
۳. ثابت کنید که هر زیرمجموعه یک مجموعه خوشترتیب، تحت رابطه القایی، خوشترتیب است.
۴. فرض کنید (\leqslant_A) یک مجموعه جزو مرتب است به‌قسمی که هر زیرمجموعه غیرتنهی B شامل یک کران پایین است؛ یعنی، $b \in B$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $x \in B$ $x \leqslant b$. ثابت کنید که مجموعه جزو مرتب (\leqslant_A) کلاً مرتب و درنتیجه خوشترتیب است.
۵. ثابت کنید که رابطه تعریف شده \leqslant^* در برهان قضیه ۵، یک رابطه ترتیبی جزئی روی A^* است.
۶. ثابت کنید که رابطه تعریف شده \leqslant' در برهان قضیه ۵، یک رابطه کلاً مرتب روی $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ است.
۷. فرض کنید (\leqslant_A) یک مجموعه کلاً مرتب است. دنباله عناصر a_1, a_2, a_3, \dots در A اکیداً نزولی گفته می‌شود اگر $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$. ثابت کنید که مجموعه کلاً مرتب، خوشترتیب است اگر و تنها اگر مجموعه کلاً مرتب، شامل هیچ دنباله اکیداً نزولی نامتناهی نباشد.

۵. اصل استقرای تراامتناهی

برای اینکه اصل استقرای تراامتناهی ساده بیان شود و همچنین برای مطالعه اعداد ترتیبی در فصل بعدی، مفهوم قطعه را معرفی می‌کنیم.

تعريف ۵. گیریم (\leqslant_A) یک مجموعه کلاً مرتب است. یک قطعه از A (یا قطعه A) یک زیرمجموعه S از A است به‌گونه‌ای که اگر $x \in A, y \in S$ و $x \leqslant y$ آنگاه $x \in S$. یک قطعه سره A ، قطعه‌ای است که زیرمجموعه سره A است.

مثال ۶. گیریم (\leqslant_A) یک مجموعه خوشترتیب، و x یک عنصر اختیاری A است. آنگاه مجموعه تهی، مجموعه A ، و مجموعه $\{a \in A | a < x\}$ قطعه‌های A هستند.

قضیه ۷. گیریم (\leqslant, A) یک مجموعه خوشترتیب است. آنگاه

(الف) هر اجتماع یا اشتراک قطعه‌های A و تمام قطعه‌های یک قطعه A ، نیز قطعه‌های A هستند.

(ب) هر قطعه A ، بجز خود A ، باشد، یک عنصر $x \in A$ وجود دارد به قسمی که

$$A_x = \{a \in A \mid a < x\} = A_x$$

برهان. (الف) گیریم \mathcal{S} یک خانواده از قطعه‌های A است، و $S_{x \in A} \subseteq \mathcal{S}$. اگر

$x \in A$ و $y \leqslant x$ ، آنگاه چون y به یک قطعه $S \in \mathcal{S}$ از A تعلق دارد، داریم $x \in S$ ولذا

$\bigcup_{x \in A} S \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{S}}$ یک قطعه A است. به طریق مشابه، اشتراک خانواده \mathcal{S} از قطعه‌های A ، یک قطعه A است. (مسئله ۳ را بینید).

گیریم S یک قطعه A و T یک قطعه S است. فرض کنیم $x \in A$, $y \in T$, $x, y \leqslant x$ ؛

باید نشان دهیم که $x \in T$. نخست، چون y به قطعه S تعلق دارد، داریم $x \in S$ ؛ آنگاه از

$x \in S$, $y \in S$ و فرض اینکه T یک قطعه S است، داریم $x \in T$. این نشان می‌دهد که T یک قطعه از A است.

(ب) گیریم S یک قطعه از A است به گونه‌ای که $S \neq A$. آنگاه مجموعه غیرتنهای

$A - S$ یک کوچکترین عنصر مانند x دارد. بعنوان یک تمرین ساده، تحقیق اینکه $S = A_x$ به خواندن و اگذار می‌شود.

قضیه زیر مقدمه‌ای بر اصل استقرای تراامتناهی است.

قضیه ۸. گیریم (\leqslant, A) یک مجموعه خوشترتیب، و \mathcal{S} یک مجموعه قطعه‌های A است

به قسمی که

(۱) هر اجتماع عضوهای \mathcal{S} به \mathcal{S} متعلق است،

(۲) اگر $A_x \in \mathcal{S}$, آنگاه $A_x \cup \{x\} \in \mathcal{S}$.

در این صورت \mathcal{S} شامل تمام قطعه‌های A است.

برهان. فرض کنید که یک عنصر $x \in A$ وجود دارد به قسمی که قطعه $A_x \notin \mathcal{S}$. چون

(\leqslant, A) خوشترتیب است، زیرمجموعه غیرتنهای $\{x \in A \mid A_x \notin \mathcal{S}\}$ کوچکترین

عنصری مانند a دارد. چون $A_a \notin \mathcal{S}$, $a \in B$. اگر $y < a$ و $y \in A$ و $y \neq a$ و از

این رو $y \in A_y$, $A_y \in \mathcal{S}$. بنابر فرض (۱)، $A_y \cup \{y\} \in \mathcal{S}$. بنابر قضیه ۷، یک عنصر $b \in A$ وجود دارد به گونه‌ای که $b < a$, $A_b = A_y \cup \{y\}$. درنتیجه $b < a$ (مسئله ۹ را بینید). حال با استفاده از فرض (۲) و قضیه ۷، داریم

$$A_b \cup \{b\} = A_c \in \mathcal{S} \quad c \in A$$

از این رو داریم $c < a < b$. درنتیجه

$$b \in A_c \subseteq \bigcup_{y < a} A_y = A_b$$

که $\notin A$ را نقض می کند. بنابراین برای هر $x \in A$ ، $A_x \in \mathcal{S}$. اگر $A \in \mathcal{S}$ باشد، آنگاه ثابت می کنیم که $\cup_{x \in A} A_x \in \mathcal{S}$ است. فرض کنید که $\cup_{x \in A} A_x \neq A$ ؛ آنگاه یک عنصر $d \in A$ وجود دارد به قسمی که $d \in \cup_{x \in A} A_x = A_d$. بنابراین $d \in \cup_{x \in A} A_x$ است. از این نتیجه می شود که برای هر $x \leq d$ ، $x \in A$ است. از این رو $\cup_{d \in A} \{d\} \in \mathcal{S}$ است. اثبات کامل است.

تذکر. در قضیه ۸، فرض (۱) نتیجه می دهد $\emptyset \in \mathcal{S}$. زیرا « $\emptyset \in \mathcal{S}$ » را می توان از فرض (۱)، یعنی از «هر اجتماع عضوهایی متعلق به \mathcal{S} است» بدست آورد؛ از «اجتماع تهی» عضوهای \mathcal{S} نتیجه مطلوب بدست می آید (قضیه ۷ (الف)، فصل ۲ را بینید). پس \mathcal{S} غیرتهی است.

قضیه ۹. (اصل استقرای ترا متناهی). گیریم (\leq, A) یک مجموعه خوشتیب است. برای هر $x \in A$ ، گیریم $p(x)$ گزاره ای درباره x است. اگر برای هر $x \in A$ ، فرض $p(y)$ برای هر $x < y$ راست است «نتیجه دهد که $p(x)$ راست است»، آنگاه $p(x)$ برای هر $x \in A$ راست است.

برهان. فرض کنید که x وجود دارد به قسمی که $p(x)$ دروغ است. آنگاه $\{p(x)\}$ دروغ است | $B = \{x \in A | p(x)$ دروغ است}. یک زیرمجموعه غیرتهی A است، و از این رو کوچکترین عنصری مانند x دارد. چون $x \in B$ ، $x \in A$ دروغ است. اگر $y < x$ و $y \in A$ باشد، آنگاه $y \neq x$ و $p(y)$ راست است. پس $p(y)$ برای هر $x < y$ راست است. بنابراین $p(x)$ راست است و این با $p(x)$ دروغ است، تناقض دارد. درنتیجه، $p(x)$ برای هر $x \in A$ راست است.

قضیه بعدی یک مثال نمونه است برای دیدن اینکه چگونه استقرای ترا متناهی در احکام ریاضی به کار می رود. این قضیه در مبحث اعداد توتیی در فصل ۸ به کار خواهد رفته. نخست به تعریف زیر نیاز داریم.

گیریم (\leq, A) و (\leq', B) مجموعه های خوشتیب هستند. تابع $f: A \rightarrow B$ صدودی گفته می شود اگر و تنها اگر از $a \leq a'$ در (\leq, A) داشته باشیم $f(a) \leq' f(a')$ نتیجه شود (« $f(a) \leq' f(a')$ در (\leq', B) »)، اکیداً صدودی گفته می شود اگر و تنها اگر از $a < a'$ در (\leq, A) داشته باشیم $f(a) < f(a')$ در (\leq', B) .

قضیه ۱۰. گیریم (\leq, A) و (\leq', B) مجموعه های خوشتیب هستند. اگر $f: A \rightarrow B$ صدودی باشد، $f(A)$ یک قطعه از B است، و اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ اکیداً صدودی باشد، آنگاه برای هر $x \in A$ ، $f(x) \leq' g(x)$.

برهان. برای استفاده از استقراری ترا متناهی، برای هر $x \in A$ ، $p(x) \leq f(x)$ را گزاره می‌گیریم. برای اینکه نشان دهیم فرض قضیه ۹ برقرار است، برخلاف حکم، فرض می‌کنیم که يك عنصر $a \in A$ وجود دارد به قسمی که $p(x) \leq f(x)$ برای هر $x < a$ راست است، اما $p(a) > f(a)$ دروغ است. یعنی، برای هر $x < a$ ، $f(x) \leq g(x)$ و $f(x) < f(a)$. چون g اکیداً صعودی و f صعودی است، برای هر $x < a$ و هر $y \geq a$

$$f(x) \leq g(x) < g(a) < f(a) \leq f(y)$$

از این نتیجه می‌شود که $f(A) \neq g(A)$ و $g(a) < f(a)$ در $f(A) \subset g(A)$ ، که قطعه بودن $f(A)$ را نقض می‌کند. بنابراین برای هر $x \in A$ ، اگر برای هر $y < x$ ، $f(y) \leq g(y)$ آنگاه $f(x) \leq g(x)$. بنابراین اصل استقراری ترا متناهی، برای هر $x \in A$

تمرين ۵.۷

۱. گیریم N مجموعه تمام اعداد طبیعی است، و برای هر $k \in N$ ، گیریم $N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$. تمام قطعه‌های (N, \leq) را بیابید که در آن \leq همان رابطه معمولی «کوچکتر یا مساوی» اعداد طبیعی است.

۲. گزاره مثال ۶ را ثابت کنید.

۳. گیریم (A, \leq) يك مجموعه خوشت تیب است. ثابت کنید.

(الف) اشتراک يك خانواده دلخواه از قطعه‌های A ، يك قطعه A است.

(ب) برای هر $x \in A$ ، $\bigcup_{y \in A_x} \{y\}$ يك قطعه A است.

۴. برهان قضیه ۷ (ب) را کامل کنید.

۵. يك برهان مستقیم برای قضیه ۹ بیاورید [راهنمایی: از قضیه ۸ استفاده کنید].

۶. گیریم (A, \leq) و (B, \leq) مجموعه‌های خوشت تیب هستند، و نیز گیریم $f: A \rightarrow B$ تابعی صعودی است به قسمی که $f(A)$ يك قطعه B است. ثابت کنید که f هر قطعه A را به يك قطعه B می‌برد.

۷. ثابت کنید که در يك مجموعه خوشت تیب هر زیرمجموعه که از طرف بالا کراندار است، کوچکترین کران بالای (یکتا) دارد.

۸. گیریم (A, \leq) خوشت تیب است. ثابت کنید که برای هر $x \in A$ ، x کوچکترین کران بالای قطعه A_x از A است.

۹. ثابت کنید که در برهان قضیه ۸، $a < b$. [راهنمایی: حالتهای (یک) $a = b$ و (دو) $a < b$ را در نظر بگیرید.]

۶. نکات تاریخی

شاید دانستن تاریخچه کوتاهی از اصل موضوع انتخاب مفید باشد؛ این اصل از خیلی جهات

شیوه اصل موضوع توازنی افیلیس و فرض پیوستار است (بخش ۸ فصل ۶ را بینید). در اوایل دهه ۱۸۸۰، گئورگ کانتور تلویح استدلالهای در برهان بعضی قضایا به کار یerde بود، که اساساً همارز با اصل انتخاب بودند؛اما او توجه نداشت که یک اصل موضوع قوی جدیدی به کار می برد. در ۱۹۵۴، ارنست ترملو^{*} (۱۸۷۱-۱۹۵۳) بعد از مطالعاتی دقیق، اصل انتخاب را صریحاً عنوان کرد و از آن در اثبات قضیه خوشتیبی استفاده کرد (که ماه آنسرا اصل خوشتیبی گفته ایم). چون برای خوشتیب کردن حتی مجموعه آشنای اعداد حقیقی هیچ راهی پیدا نشده است، علیرغم حکم قضیه خوشتیبی، تا مدت حداقل شش سال بعد از ظهور این قضیه، مقالات انتقادی زیادی درباره برهان ترملو نوشته شد. اکثر اصل انتخاب را رد کردند. با این حال اکثر منتقدین باید می پذیرفتند که اگر اصل موضوع انتخاب را قبول می کردند، نمی توانستند اشتباهی در برهان ترملو برای قضیه خوشتیبی بیان بند. بنابراین، انتقاد از قضیه خوشتیبی به انتقاد از اصل انتخاب منجر می شد. به نظر می رسید که فقط دو راه وجود دارد:

(الف) اصل را براین بگذاریم که تنها نتیجه های ساخته شدنی را پذیریم و نتیجه های وجودی محض را نپذیریم، آنگاه روشهای و عرصه های ریاضیات آنقدر محدود می شوند که،

خارج از حساب، تنها زمینه های بسیار کوچکی را می توان بررسی کرد.

(ب) نتیجه های ساخته شدنی و وجودی محض، از جمله اصل موضوع انتخاب، را پذیریم و در نتیجه، به حل مسائل بیشتر و توسعه دادن ریاضیات پردازیم. برای اینکه بتوان مشخص کرد که پیروی از کدام روش عاقلانه است، باید قبل^{**} به دو سوال مشکل زیر توجه شود:

(۱) آیا اصل انتخاب از اصول موضوع موجود مستقل است، یا به وسیله دیگر اصول موضوع موجود ریاضی ثابت می شود؟

(۲) آیا اصل انتخاب با دیگر اصول کلاسیک ریاضی سازگار است یا ممکن است افزودن اصل انتخاب به دیگر اصول موضوع کلاسیک ریاضی، موجب به وجود آمدن تناقض شود؟

همان طور که در فرض پیوستار پیش آمد، بسیاری از ریاضیدانان برای رسیدن به جوابهای این دو سوال کوشش فراوان کردند. چندین سال بعد، در ۱۹۳۸، کورت گودل (۱۹۰۶-) با اثبات اینکه افزودن اصل موضوع انتخاب به دیگر اصول موضوع موجود ریاضی تناقضی ایجاد نمی کند، به سوال دوم جواب داد. کشف گودل، به جامعه ریاضی و بخصوص به استفاده کنندگان از اصل موضوع انتخاب، آسايش خاطر و اطمینان

* Ernst Zermelo

1.K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940, 66 pp. Rev. ed., 1951.

74 pp.

نکات تاریخی ۱۶۷

فیادی داد. اما تحقیق برای پاسخ به سؤال اول همچنان ادامه یافت. بالاخره، در ۱۹۶۳، پل کوهن کاملاً به سؤال جواب داد. او ثابت کرد که اصل موضوع انتخاب در حقیقت از دیگر اصول موضوع موجود، مستقل است. به عبارت دیگر، اصل موضوع انتخاب را نمی‌توان به عنوان یک قضیه با استفاده از اصول موضوع کلاسیک ریاضی ثابت کرد. امروزه اصل موضوع انتخاب را به عنوان یک اصل جدید اکثرآ پذیرفته‌اند، و لزوم آن برای آنالیز حقيقی جدید، نظریه اعداد اصلی و ترتیبی ترا متوجهی، جبر جدید و عرصهٔ وسیعی از توبولوژی روشن شده‌است.



اعداد ترتیبی و حساب ترتیبی

مفهوم اعداد ترتیبی (۱) معنی کرده و شگفتیهای حساب ترتیبی (۱) در مطالعه جمع و ضرب ترتیبی ذکر کرده‌ایم. عدد اصلی (ا) از نو به صورت عدد ترتیبی آغازی بوده، عدد اصلی (ب) پارادکس بوده و خودتی (ا) شرح داده‌ایم.

۱. مفهوم اعداد ترتیبی

به طور ساده می‌توان گفت که در محاسبات متناهی، اعداد اصلی همان اعداد «شمارشی» (۱، ۲، ۳، ...) و «اعداد ترتیبی» همان اعداد «مرتبه‌ای»: اوپین، دومین، سومین، ... هستند. تمایز بین اعداد اصلی متناهی و اعداد ترتیبی متناهی آنقدر ناچیز است که اعداد طبیعی را می‌توان در هر دو مورد به کار برد. اما مفهوم «عدد ترتیبی نامتناهی» حقیقتاً چیست؟ همچنانکه عدد اصلی ترا متناهی از مجموعه نامتناهی ناشی می‌شود، عدد ترتیبی نامتناهی (= ترا متناهی) از مجموعه خوشتیب نامتناهی به وجود می‌آید. تعریف زیر در مجموعه‌های خوشتیب به تعریف رابطه همتوانی در مجموعه‌ها شبیه است.

تعریف ۱. می‌گوییم دو مجموعه خوشتیب (\leqslant) و (\leqslant') هم‌ریخت ترتیبی هستند اگر يك دوسویی مانند $B \rightarrow A : f$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $a_2 \leqslant a_1$ داشته باشیم ($f(a_1) \leqslant f(a_2)$). تابع f را يك هم‌ریختی ترتیبی می‌نامیم.

ازاین تعریف نتیجه می‌شود که اگر $A \rightarrow B$: f یک هم‌یختی ترتیبی باشد، وارون آن، یعنی $B \rightarrow A$: f^{-1} یک هم‌یختی ترتیبی است و به علاوه اگر $C \rightarrow B$: g نیز یک هم‌یختی ترتیبی باشد، ترکیب f و g یعنی $A \rightarrow C$: gf نیز یک هم‌یختی ترتیبی است. اگر دومجموعه (\leqslant) و (\approx') هم‌یخت ترتیبی باشند، می‌نویسیم $(\leqslant')(A, \leqslant) \approx (B, \approx')$ (را بطرور ساده $B \approx A$). «رابطه» هم‌یخت ترتیبی \approx ، همانند رابطه همتوانی سه، انعکاسی، متفاوت و متعال است.^۱

در حالت کلی، اعداد ترتیبی، متناهی یا تامتاهمی، را یک مفهوم اولیه می‌گیریم که قاعده‌های زیر در آن صادر اند:

ت-۱. به هر مجموعه خوشتیب $(\leqslant)(A, \leqslant)$ یک عدد ترتیبی، که آن را با $\text{ord}(A, \leqslant)$ نشان می‌دهیم، نسبت داده می‌شود، و اگر α یک عدد ترتیبی باشد، یک مجموعه خوشتیب $(\leqslant)(A, \leqslant)$ وجود دارد به قسمی که $\text{ord}(A, \leqslant) = \alpha$.

ت-۲. فرض کید $(\leqslant)(A, \leqslant)$ و $(\approx')(B, \approx')$ دو مجموعه خوشتیب هستند. مجموعه خوشتیب متناهی که تعداد عضوها يشان مساوی باشند هم‌یخت ترتیبی هستند، نمادهای مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم:

ت-۳. $\text{ord}(A, \leqslant) = 0$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$.

ت-۴. اگر مجموعه خوشتیب $(\leqslant)(A, \leqslant)$ به قسمی باشد که برای عدد طبیعی k داشته باشیم $\{1, 2, \dots, A\} \sim \{1, 2, \dots, k\}$ ، آنگاه $\text{ord}(A, \leqslant) = k$.

عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} ، با رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی، را معمولاً با حرف یونانی امگا، ω ، نشان می‌دهند؛ یعنی $\{\omega = \text{ord}(1, 2, 3, \dots)\}$. هر مجموعه مفروض فقط یک عدد اصلی دارد، در صورتی که یک مجموعه ممکن است تحت خوشتیبهای متفاوت، عددی ای ترتیبی متمایز داشته باشد. مثلاً، مجموعه اعداد طبیعی را می‌توان به صورت

$$(\mathbb{N}, \leqslant) = \{1, 2, 3, \dots\}$$

و یا به صورت

$$(\mathbb{N}, \approx') = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$$

خوشتیب کرد. بررسی اینکه این دومجموعه خوشتیب هم‌یخت ترتیبی نیستند را به خواندن م محل می‌کنیم. در نتیجه، $\text{ord}(\mathbb{N}, \approx') \neq \omega$.

۱. در اینجا \approx به معنای رابطه‌ای روی یک مجموعه از مجموعه‌های خوشتیب است (قضیه ۵ فصل ۵).

۲. در این فصل، ازاین به بعد قرار می‌گذاریم اعضای مجموعه را به ترتیبی بنویسیم که ترتیب در مجموعه را نشان دهد. بنابراین $\{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه خوشتیب \mathbb{N} را با ترتیب معمولی و $\{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ مجموعه \mathbb{N} را با ترتیب دیگر نشان می‌دهد.

تعریف ۱۰۸

۱. فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی همتوان هستند. همچنین فرض کنید (\leqslant, A) و (\leqslant', B) خوشتیب هستند. ثابت کنید که $(\leqslant, A) \leqslant' (B, \leqslant')$ همربخت ترتیبی هستند.
۲. فرض کنید (\leqslant, A) یک مجموعه کلا^{*} مرتب و اجتماعی از دو مجموعه B و C است. همچنین فرض کنید دو مجموعه B و C با رابطه‌های انتانی از رابطه ترتیبی A ، یعنی \leqslant ، خوشتیب هستند. ثابت کنید (\leqslant, A) خوشتیب است.
۳. روی مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} دو رابطه خوشتیبی به صورتهای زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\mathbb{N}, \leqslant) = \{1, 2, 3, \dots\}$$

و

$$(\mathbb{N}, \leqslant') = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$$

ثابت کنید (\leqslant, \mathbb{N}) و (\leqslant', \mathbb{N}) همربخت ترتیبی نیستند.

۴. در مسئله ۳^۱ بالا، نشان دهید که (\leqslant', \mathbb{N}) خوشتیب است.

۲. تقریب اعداد قویی

اصل ت-۲، از بخش قبل، به ما می‌گوید چه موقع دو عدد ترتیبی مساوی‌اند و چه موقع نامساوی. اگر دو عدد ترتیبی نامساوی باشند، می‌خواهیم بتوانیم بگوییم یکی «کوچکتر» از دیگری است. تعریف زیر همین منظور را برآورده می‌کند.

تعریف ۲. گیریم α و β دو عدد ترتیبی، و مجموعه‌های خوشتیب (\leqslant, A) و (\leqslant', B) به قسمی هستند که $\text{ord}(B, \leqslant') = \beta$ و $\text{ord}(A, \leqslant) = \alpha$. گیریم α کوچکتر از β یا مساوی با آن است اگر وتها اگر (\leqslant, A) با یک قطعه از (\leqslant', B) همربخت ترتیبی باشد. این رابطه را با \leqslant و \geqslant نشان می‌دهیم. اگر $\beta \leqslant \alpha$ و $\alpha \neq \beta$ ، می‌نویسیم $\beta > \alpha$ و یا $\alpha < \beta$.

بذریعی است که تعریف ۲ به انتخاب مجموعه‌های خوشتیب (\leqslant, A) و (\leqslant', B) بستگی ندارد. همچنین واضح است که رابطه \leqslant انتها و متعدی است. در قضیه ۲ ثابت می‌کنیم که این رابطه، پساد متقاضی نیز هست. پس \leqslant ، یک «رابطه» ترتیبی جزئی است. هدف نهایی ما این است که ثابت کنیم \leqslant یک «رابطه» کلا^{*} مرتب است^۱.

۱. دقیقاً بگوییم، \leqslant یک رابطه نیست زیرا که «حوزه» آن یک مجموعه نیست (قضیه ۱۳ را ببینید). معهذا، ما آنرا یک رابطه می‌گیریم که در هر مجموعه مفروض از اعداد ترتیبی تعریف شده است (قضیه ۵ فصل ۵).

قضیه ۱. تنها هم‌ریختی ترتیبی مجموعه خوشرتیب (A, \leq) روی یک قطعه‌ای از (A, \leq) نگاشت همانی از A روی A است.

برهان. بدوش برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنید I_A قطعه‌ای از A است و هم‌ریختی $f: A \rightarrow A$ وجود دارد. آنگاه $f(a) < a$ و درنتیجه مجموعه $\{x \in A | f(x) < x\} = B$ تهی نیست. کوچکترین عضو B را b می‌گیریم. آنگاه $f(f(b)) < f(b)$ ، و چون هم‌ریختی ترتیبی، اکیداً صعودی است داریم $f(b) < b$. این ثابت می‌کند که $f(b)$ که از b کوچکتر است، در B است، و این یک تناقض است، زیرا b کوچکترین عضو B است. اذاین تناقض نتیجه می‌گیریم که یک مجموعه خوشرتیب نمی‌تواند با یک قطعه سره خودش هم‌ریخت ترتیبی باشد. اکنون برای اینکه برهان قضیه را کامل کنیم باید ثابت کنیم که نگاشت همانی $I_A: A \rightarrow A$ تنها هم‌ریختی ترتیبی از A روی A است.

گیریم $g: A \rightarrow A$ یک هم‌ریختی ترتیبی باشد. آنگاه چون دو هم‌ریختی ترتیبی g و I_A ، هم‌ریختی همانی، اکیداً صعودی هستند، دوبار از قضیه ۱۵ فصل ۷ استفاده کرده می‌گوییم: برای هر $x \in A$ داریم $I_A(x) \leq g(x) \leq I_A(x)$ و بنابراین $g = I_A$.

قضیه ۲. اگر دو عدد ترتیبی α و β به قسمی باشند که $\beta \leq \alpha$ و $\alpha \leq \beta$ ، آنگاه $\alpha = \beta$.

برهان. گیریم دو مجموعه خوشرتیب (A, \leq) و (B, \leq') به قسمی هستند که $\alpha = \text{ord}(A, \leq)$ و $\beta = \text{ord}(B, \leq')$. با برفرض $\beta < \alpha$ ، یعنی دو هم‌ریختی ترتیبی

$$f: A \rightarrow D \quad \text{و} \quad g: B \rightarrow C$$

وجود دارند که در آنها D قطعه‌ای از B و C قطعه‌ای از A است. درنتیجه تابع $h: A \rightarrow C$ باضابطه $h(x) = g(f(x))$ بازای هر $x \in A$ یک هم‌ریختی ترتیبی از A روی یک قطعه از C ، مانند E ، می‌باشد. اما بنا بر قضیه ۱ و قضیه ۷ از فصل ۷، باید داشته باشیم $E = A$. درنتیجه $C = A$ و هم‌ریختی ترتیبی $g: B \rightarrow A$ نشان می‌دهد که $\alpha = \beta$.

تا اینجا ثابت کردہ‌ایم که رابطه \Rightarrow برای اعداد ترتیبی، یک رابطه ترتیبی جزوی است. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که \Rightarrow ، یک رابطه "کلاً" مرتب است.

قضیه ۳. برای هر دو عدد ترتیبی α و β ، یا $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \leq \alpha$.

برهان. گیریم (A, \leq) و (B, \leq') دو مجموعه خوشرتیب هستند به قسمی که $\text{ord}(B, \leq') = \beta$ و $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$. ثابت می‌کنیم که یا A با یک قطعه از B هم‌ریخت ترتیبی است یا B با یک قطعه از A هم‌ریخت ترتیبی است. یک عضو $a \in A$ را

پذیرفتنی گوییم هر گاه قطعه A_i از A با یک قطعه B_j از B ($b \in B$) هم ریخت ترتیبی باشد. گیریم M مجموعه تمام عضوهای پذیرفته A است. از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که برای هر عضو پذیرفته a ، یک عضو پکنای $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $A_i \approx B_j$ (مسئله ۸ را بینید). در نتیجه یک نگاشت خوشنویف $f: M \rightarrow B$ که با $f(a) = b$ باشد، اگر $A_i \approx B_j$ تعریف می‌شود، وجود دارد. دوباره از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که تابع f ، یک به یک است. با خواندن این بردسی کند که $f: M \rightarrow B$ اکیداً صعودی است و $f(M) = N$ است. قطعه‌ای از B است.

حال فرض کنیم که نه A با یک قطعه از B هم ریخت ترتیبی است و نه B با قطعه‌ای از A . پس مجموعه‌های $M - A$ و $N - B$ نیستند؛ گیریم p و q به ترتیب کوچکترین عضوهای $M - A$ و $N - B$ هستند. آنگاه باید داشته باشیم $A_i \approx M \approx N = B_j$. بنابراین p پذیرفته است. با این تناقض برهان قضیه ۳ کامل است.

قضیه زیر نتیجه ساده دیگری از قضیه ۱ است.

قضیه ۴. گیریم (A, \leq) و (B, \leq') دو مجموعه خوشترتیب هستند. آنگاه $\text{ord}(A, \leq) < \text{ord}(B, \leq')$ اگر و تنها اگر A با یک قطعه سره B هم ریخت ترتیبی باشد.

برهان. به عنوان تمرین به خواندن و اگذار می‌شود.

اکنون نتیجه‌هایی را که در این بخش به دست آوردهیم، در قضیه سه حالتی زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۵. گیریم α و β دو عدد ترتیبی هستند. آنگاه تنها یکی از رابطه‌های ذیل برقرار است:

$$\alpha < \beta \quad (\text{الف})$$

$$\alpha = \beta \quad (\text{ب})$$

$$\alpha > \beta \quad (\text{ج})$$

تمرین ۲۰۸

۱. نشان دهید $\{ \dots, 1, 2, 3, \dots, 4, 5, \dots \} > \text{ord}\{1, 2, 3, \dots, 4, 5, \dots\}$ (مسئله ۱۰۸ را بینید).
۲. حکم زیر را، که در برهان قضیه ۳ عنوان شده است، ثابت کنید: برای هر عضو پذیرفته a ، یک عضو پکنای $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $A_i \approx B_j$.
۳. نشان دهید که در برهان قضیه ۳، M ، مجموعه عضوهای پذیرفته، یک قطعه A است.

جمع اعداد تقریبی ۱۷۳

۴. ثابت کنید که تابع $f: M \rightarrow B$ که با $f(a) = b$ ، اگر $A \approx B$ تعریف شده و در برهان قضیه ۳ عنوان شده است، يك به يك و اکیداً صعودی است و نیز ثابت کنید که $f(M)$ يك قطمه B است.

۵. قضیه ۴ را ثابت کنید.

۶. گیریم k يك عدد طبیعی باشد. ثابت کنید

$$(الف) \text{ord}\{k, k+1, k+2, \dots\} = \omega$$

$$(ب) \text{ord}\{k, k+1, k+2, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots, k-1\} > \omega$$

۷. کوچکترین عدد ترتیبی نامتناهی چیست؟

۸. با توجه به برهان قضیه ۳ نشان دهید که برای هر عضو پذیرفتی a ، يك عضو بکتای $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $b \approx A$.

۳. جمع اعداد تقریبی

برای هر دو مجموعه خوشترتیب مجزای (\leq^*, A) و (\leq^*, B) رابطه کلاً مرتب \leq^* را روی $A \cup B$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

(۱) اگر $a \in A$ و $b \in B$ هردو در A (یا در B) باشند، می نویسیم $a \leq^* b$ اگر و تنها اگر $a \leq b$.

(۲) اگر $a \in A$ و $b \in B$ ، قرار می گذاریم که $a \leq^* b$.

بسادگی دیده می شود که $(\leq^*, A \cup B)$ یک مجموعه خوشترتیب است (مسئله ۲

تمرین ۱۰.۸ را ببینید). طبیعی است برای «مجموعه» $(\leq^*, A \cup B)$ را انتخاب کنیم. در حالتی که A و B مجزا نباشند، به يك عمل کوچک

جنی احتیاج است: حاصلضربهای دکارتی $A \times \{a\}$ ، $B \times \{b\}$ را تشکیل دهید و در

$A \times \{a\}$ رابطه خوشترتیب \leq را با $\{a, b\}$ ، $\{a\} \leq \{b\}$ اگر و تنها اگر در A ، $a \leq b$

تعریف کنید. همچنین، $\{c\} \leq \{d\}$ را با $\{c, d\}$ ، $\{c\} \leq \{d\}$ اگر و تنها

اگر $c \leq d$ تعریف کنید. بدینهی است که $(A, \leq^*) \approx (B, \leq^*)$ اگر و تنها $A \times \{a\} \approx B \times \{b\}$ و $A \times \{a\} \approx C \times \{c\}$ مجزا هستند. بنابراین اگر A

و B مجزا نباشند، می توانیم مجموعه های مجزای (A, \leq^*) و (B, \leq^*) را به جای (A, \leq^*) و (B, \leq^*) به کار ببریم.

تعریف ۳. گیریم α و β اعداد ترتیبی هستند. مجموع تقریبی $\alpha + \beta$ ، که با $\alpha + \beta$ نشان داده می شود، عدد ترتیبی $\text{ord}(A \cup B, \leq^*)$ است، که در آن (A, \leq^*) و (B, \leq^*)

۱. باید نذکر داد که در $(A \cup B, \leq^*)$ هر عنصر $a \in A$ از $b \in B$ کوچکتر است،

و در $(B \cup A, \leq^*)$ هر عنصر $b \in B$ از هر عنصر $a \in A$ کوچکتر است. بنابراین،

۲. باید متمایز به حساب آیند.

مجموعه‌های خوشترتیب مجزا، و به قسمی هستند که $\text{ord}(A, \leqslant) = \alpha$ و $\text{ord}(B, \leqslant') = \beta$.

در مسئله ۱ از خواننده خواسته شده نشان دهد که تعریف مجموع ترتیبی، $\alpha + \beta$ از انتخاب مجموعه‌های خوشترتیب A و B مستقل است.

اگر α و β دو عدد ترتیبی متناهی باشند، مجموع ترتیبی $\alpha + \beta$ با مجموع معمولی دو عدد صحیح نامنفی سازگار است. اما، برای اعداد ترتیبی ترا متاهی، ممکن است ویژگی‌های مجموع ترتیبی با حالت متناهی خیلی متفاوت باشد: مثلاً $\alpha + \beta$ ممکن است با $\beta + \alpha$ برابر نباشد (مثال ۲ ذیر را بینید).

مثال ۱. مجموع ترتیبی $\omega + \omega$ دو عدد ترتیبی متناهی ω و ω را پیدا کند.

$$\begin{aligned} \text{حل: چون } \{\dots, 4, 6, 7, 8\} &= \text{ord}\{\omega, 1, 2, 3, 4\}, \text{ داریم} \\ \omega + \omega &= \text{ord}\{\omega, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 8\} = \omega \end{aligned}$$

مثال ۲. گیریم k یک عدد ترتیبی متناهی ناصلر است. نشان دهید که $\omega + \omega = \omega$ و $\omega + k \neq \omega$. از این رو، مجموع ترتیبی در حالت کلی جایه‌جایی نیست.

پوهان. چون $\text{ord}\{k, k+1, \dots\} = \omega$ و $k = \text{ord}\{\omega, 1, \dots, k-1\}$ داریم

$$\omega + \omega = \text{ord}\{\omega, 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots\} = \omega$$

و

$$\omega + k = \text{ord}\{k, k+1, \dots, \omega, 1, 2, \dots, k-1\} > \omega$$

از این رو، $\omega + k \neq \omega$ (مسئله ۶ (ب)، تمرین ۲۰.۸ را بینید).

قضیة ۶. گیریم α, β ، و γ اعداد ترتیبی هستند. آنگاه

$$(الف) (\gamma + \beta) + \alpha = \alpha + (\beta + \gamma) \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad (\text{قانون شرکت‌پذیری})$$

$$(ب) \gamma < \beta \quad \text{نتیجه می‌دهد که} \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma$$

$$(ج) \alpha + \beta = \alpha + \gamma \quad \text{نتیجه می‌دهد} \quad \beta = \gamma \quad (\text{حذف چپ}).$$

پوهان. (الف) را خودتان ثابت کنید.

(ب) فرض کنید $(A, \leqslant), (B, \leqslant')$ و (C, \leqslant'') مجموعه‌های خوشترتیب هستند

به قسمی که $\text{ord}(C, \leqslant'') = \gamma$ ، $\text{ord}(B, \leqslant') = \beta$ ، $\text{ord}(A, \leqslant) = \alpha$ و $C \in C$ از C با یک قطعه سره C باشد. $A \cap C = \emptyset$ و $A \cap B = \emptyset$. چون $\gamma < \beta$ ، بنابر قضیه ۴، $B \rightarrow C \rightarrow A$ باشد. با این همرباخت ترتیبی است؛ فرض کنید $B \rightarrow C \rightarrow A$. این همرباختی ترتیبی است، فرض کنید $\text{ord}(A \cup C, \leqslant) = \alpha + \gamma$. لجتماعهای مجزای $A \cup C$ با رابطه خوشترتیب \leqslant که در اول این بخش

تعریف شد، مرتب شده است. آنگاه، تحت این رابطه‌های خوشترتیبی، تابع

$$f: A \cup B \rightarrow A \cup C$$

که با

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \in A \\ g(x) & \text{اگر } x \in B \end{cases}$$

تعریف شده است، یک هم‌ریختی ترتیبی از $A \cup B$ روی قطعه سره $A \cup C$ از $A \cup C$ است. پس، بنابر قضیه ۴، $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

(ج) فرض کنید برخلاف حکم اعداد ترتیبی α, β و γ وجود دارند به قسمی که $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ و $\beta \neq \gamma$. بنابر قضیه ۵، می‌توانیم فرض کنیم که $\gamma < \beta$ (برای حالت $\beta < \gamma$ به طریق مشابه عمل می‌کنیم). درنتیجه، بنابر قسمت (ب)، داریم $\gamma < \alpha + \beta < \alpha + \gamma$. که یک تناقض است.

از زش دارد مذکور شویم که اگرچه مجموع ترتیبی حذفی چپ است، حذفی راست نیست. یعنی از $\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \alpha + \beta = \gamma + \alpha$ از اما $\beta + \alpha = \alpha + \beta$ نتیجه نمی‌شود (مسئله ۴ را بینید). همچنین، در مقایسه با قضیه ۶ (ب)، از $\gamma < \beta + \alpha$ نتیجه نمی‌شود (مسئله‌های ۵ و ۶ را بینید).

تمرین ۳۰۸

۱. گیریم $(A_1, \leqslant_1), (B_1, \leqslant_1), (A_2, \leqslant_2)$ و (B_2, \leqslant_2) مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $B_1 \approx B_2$, $A_1 \approx A_2$ و $A_2 \cap B_2 = \emptyset$. ثابت کنید $(A_1 \cup B_1, \leqslant_1) \approx (A_2 \cup B_2, \leqslant_2)$.
۲. نشان دهید که برای هر عدد ترتیبی $\alpha = 0 + \alpha$.
۳. ثابت کنید که مجموع ترتیبی شرکت‌ذیر است: برای هر سه عدد ترتیبی α, β و γ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
۴. با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که مجموع ترتیبی حذفی راست نیست: اعداد ترتیبی α, β و γ وجود دارند به قسمی که $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ اما $\beta \neq \gamma$.
۵. قضیه تغییر یافته ۶ (ب) زیر را ثابت کنید: اگر α, β و γ اعداد ترتیبی باشند به قسمی که $\gamma < \beta$ ، آنگاه $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$ (مسئله ۶ در زیر را بینید).
۶. نشان دهید که در مسئله ۵ از $\gamma < \beta$ از اما $\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ نتیجه نمی‌شود (قضیه ۶ (ب) را بینید).
۷. ثابت کنید که $\beta < \alpha$ اگر و تنها اگر $\beta \leqslant_1 \alpha + 1$.
۸. وارون قضیه ۶ (ب) را ثابت کنید: اگر $\gamma < \alpha + \beta$ اگر $\gamma < \alpha$ آنگاه $\beta < \alpha$.
۹. گیریم اعداد ترتیبی α و γ به قسمی هستند که $\gamma \leqslant_1 \alpha$. ثابت کنید که یک β ی یکتا وجود

- دارد به قسمی که $\gamma = \alpha + \beta$. [این β را می‌توان با $\gamma - \alpha$ نمایش داد].
۱۰. ثابت کنید که برای هر عدد ترتیبی، $\alpha + 1 > \alpha$.
۱۱. آیا عددی ترتیبی وجود دارد که از هر عدد ترتیبی دیگر بزرگتر باشد؟

۴. ضرب اعداد ترتیبی

در حساب اعداد اصلی، حاصلضرب دو عدد ترتیبی A و B ، $\text{card}(A \times B)$ ، $\text{card } B$ و $\text{card } A$ تعريف شده است. برای تعریف «حاصلضرب» اعداد ترتیبی (\leq') و (\leq)، $\text{ord}(B, \leq')$ و $\text{ord}(A, \leq)$ نخست باید تصمیم بگیریم که چه رابطه خوشترتیب روی حاصلضرب دکارتی $A \times B$ تعريف کنیم. طبیعی است که رابطه «الباءی» را که در زیر تعریف می‌کنیم، بر دیگر رابطه‌های ترتیبی ترجیح دهیم.

تعريف ۴. گیریم $(\leq)(A, \leq)$ و $(\leq')(B, \leq')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند. آنگاه روی رابطه المباءی \leq باین صورت تعریف می‌شود: (الف) اگر $a < x$ و $b < y$ ، آنگاه برای هر b و y در B ، $a < x$ و $y < b$ ، آنگاه $(a, b) \leq'(x, y)$. اگر $x = y$ و $a = b$ ، آنگاه $(a, b) \leq^*(x, y)$.

قضیة ۷. گیریم $(\leq)(A, \leq)$ و $(\leq')(B, \leq')$ مجموعه‌های خوشترتیب هستند. آنگاه رابطه المباءی \leq روی $A \times B$ یک رابطه خوشترتیب است.

یوهان آشکار است که \leq یک رابطه کلاً مرتب روی $A \times B$ است. برای اینکه نشان دهیم که این رابطه کلاً مرتب، خوشترتیب است، S را یک زیرمجموعه غیرتنهی دلخواهی از $A \times B$ فرض می‌کنیم. ثابت خواهیم کرد که S کوچکترین عنصر دارد. نخست توجه می‌کنیم که مجموعه

$$p_A(S) = \{x \in A \mid (x, y) \in S, y \in B\}$$

یک زیرمجموعه غیرتنهی از مجموعه خوشترتیب A است و بنابراین یک کوچکترین عنصر، مانند a دارد. حال مجموعه

$$\{y \in B \mid (a, y) \in S\}$$

را در نظر بگیرید که یک زیرمجموعه غیرتنهی از مجموعه خوشترتیب B است و از این رو یک کوچکترین عنصر مانند b دارد. حال کاملاً واضح است که عنصر (a, b) در S ، کوچکترین عنصر S است. بنابراین، $(\leq')(A \times B, \leq')$ یک مجموعه خوشترتیب است.

قضیة ۸. گیریم (\leq_1, \leq'_1) ، (A_1, \leq_1) ، (B_1, \leq'_1) و (\leq'_2, \leq_2) مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $(A_1, \leq_1) \approx (B_1, \leq'_1)$ و $(A_2, \leq_2) \approx (B_2, \leq'_2)$. آنگاه

$$(A_1 \times B_1, \leq^*) \approx (A_2 \times B_2, \leq^*)$$

برهان. گیریم $f: A_1 \rightarrow A_2$ و $g: B_1 \rightarrow B_2$ هم ریختیهای ترتیبی هستند. به عنوان تمرین بخواننده واگذار می کنیم که نشان دهد تابع

$$f \times g: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$$

که با $((f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)) \in A_2 \times B_2)$ برای هر $(x, y) \in A_1 \times B_1$ تعریف شده است، یک هم ریختی ترتیبی است.

با کملک قضیه های ۷ و ۸ می توانیم حاصل ضرب دو عدد ترتیبی را تعریف کنیم.

تعریف ۵. برای هر دو عدد ترتیبی α و β ، حاصل ضرب ترتیبی $\beta\alpha$ را با

$$\beta\alpha = \text{ord}(A \times B, \leq^*)$$

تعریف می کنیم، (A, \leq) و (B, \leq') مجموعه های خوشنویسی هستند به قسمی که $\text{ord}(B, \leq') = \beta$ ، $\text{ord}(A, \leq) = \alpha$ است.

توجه کنید که مطابق با تعریف ۵، $\text{ord}(A \times B, \leq^*) = \alpha\beta$ است نه $\beta\alpha$. حاصل ضرب ترتیبی جای جای نیست.

مثال ۳. حاصل ضرب بهای ترتیبی ω_2 و ω_2 را باهم مقایسه کنید.

حل: گیریم $\{B, \leq'\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. بنابراین $\text{ord}(B, \leq') = \omega_2$ گیریم $\{A, \leq\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$. بنابراین $\text{ord}(A, \leq) = \omega_1$ است، در این صورت $f: A \times B \rightarrow A$ از طرف دیگر تابع شده است، که با

$$f(j, k) = \begin{cases} \omega_j - 1 & \text{اگر } k = 0 \\ \omega_j & \text{اگر } k = 1 \end{cases}$$

تعریف شده است، یک هم ریختی ترتیبی است، پس $\omega_2 = \omega_2$. اکنون، گیریم $\text{ord}(B \times A, \leq^*) = \omega_2 + \omega_1 = \omega_2$. بررسی $\text{ord}(B \times A, \leq^*) = \omega_2$ را به خواننده واگذار می کنیم. بنابراین $\omega_2 \neq \omega_2$.

قضیه ۶. گیریم α ، β ، و γ اعداد ترتیبی هستند. آنگاه

$$(الف) (\beta\alpha)\gamma = \gamma(\beta\alpha) \quad (\text{قانون شرکتپذیری})$$

$$(ب) \gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta \quad (\text{قانون پخشپذیری چپ})$$

برهان. با خواننده است.

قضیه ۱۰. گیریم α, β, γ اعداد ترتیبی هستند به قسمی که $\gamma > 0$. آنگاه

$$(الف) \beta < \alpha \Rightarrow \gamma\beta < \gamma\alpha$$

$$(ب) \gamma\alpha = \gamma\beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad (\text{حذف چپ}).$$

برهان. (الف) گیریم (A, \leq') و (C, \leq'') مجموعه‌های خوشترتیب هستند به قسمی که $\text{ord}(C, \leq'') = \gamma$, $\text{ord}(B, \leq') = \beta$, $\text{ord}(A, \leq') = \alpha$. اگر $\beta < \alpha$, آنگاه یک عضور $p \in B$ وجود دارد به قسمی که $A \approx B_p$. گیریم $q \in C$ است و $B \times C$ و $A \times C$ با رابطه القابی مرتب شده‌اند. نتیجه می‌شود که $B \times C$ که با رابطه ترتیبی القابی از $A \times C$ مرتب شده، هم‌یخت است، و همچنین نتیجه می‌شود که $B \times C$ قطعاً

$$(B \times C)_{(p, q)} = \{(x, y) \in B \times C \mid (x, y) <'^*(p, q)\}$$

از $B \times C$ است. این ثابت می‌کند که $\gamma\beta < \gamma\alpha$.

(ب) برخلاف حکم فرض کنید که اعداد ترتیبی α, β, γ وجود دارند به قسمی که $\gamma\alpha = \gamma\beta$ و $\alpha \neq \beta$. فرض می‌کنیم که $\alpha < \beta$ (حالت $\beta < \alpha$ به طرق مشابه عمل می‌شود). آنگاه، بنا بر قسمت (الف) این قضیه، داریم $\gamma\beta > \gamma\alpha$ ، که با $\gamma\alpha = \gamma\beta$ تناقض دارد.

باید توجه شود که اگرچه ضرب ترتیبی از چپ پخشپذیر و از چپ حذفی است، نه از راست پخشپذیر است و نه از راست حذفی (مسئله‌های ۴ و ۹ را بینید).

تمرين ۴۰۸

۱. برهان قضیه ۸ را کامل کنید.
۲. نشان دهید که

$$(الف) \text{ برای هر عدد ترتیبی } \alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \dots \text{ و } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$$

$$(ب) \text{ برای } \alpha\beta = 0, \text{ اگر و تنها اگر } \alpha = 0 \text{ یا } \beta = 0.$$

۳. درستی حکمهای ذیر را تحقیق کنید.

$$(الف) \omega_2 = \omega_1 + \omega_2$$

$$(ب) \text{ برای هر عدد ترتیبی متناهی } \omega, k \neq 0 \Rightarrow k\omega = \omega$$

۴. با یک مثال نقیض نشان دهید که ضرب ترتیبی پخش‌ذیر (است نیست) یعنی

$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

الزاماً درست نیست.

۵. ثابت کنید که ضرب ترتیبی پخش‌ذیر چپ است، یعنی، برای تمام اعداد ترتیبی α, β, γ داریم $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$.

۶. ثابت کنید که ضرب ترتیبی شرکت‌ذیر است: برای تمام اعداد ترتیبی α, β, γ داریم $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$.

۷. قضیه زیرین، نظریه قضیه ۱۰ (الف)، را ثابت کنید: اگر α, β و γ به قسمی باشند که $\beta < \alpha < \gamma$ و $\alpha < \beta$ ، آنگاه $\beta\gamma < \alpha\gamma$. (مسئله ۸، در ذیر را بینید).

۸. در مسئله ۷ بالا نشان دهید که از $\beta < \alpha < \gamma$ داریم $\beta\gamma < \alpha\gamma$. نتیجه‌نمی‌شود (قضیه ۱۰ (الف) را بینید).

۹. با یک مثال نقیض نشان دهید که ضرب ترتیبی حذفی راست نیست: اعداد ترتیبی α, β, γ وجود دارند به قسمی که $\gamma\beta = \beta\gamma$ ، اما $\alpha \neq \beta$.

۱۰. وارون قضیه ۱۰ (الف) را که در ذیر می‌آید ثابت کنید: اگر α, β و γ اعداد ترتیبی باشند به قسمی که $\gamma\beta < \gamma\alpha$ و $\beta < \alpha$ آنگاه $\beta < \alpha$.

۵. نتیجه

ممکن است طبیعی به نظر رسد که بعد از ضرب، توان اعداد ترتیبی را تعریف کنیم. اما، ما آن را برای کتابهای سطح بالاتر می‌گذاریم و در عرض، از تو ترتیب اعداد ترتیبی را بررسی کرده، و سپس یکبار دیگر اعداد اصلی را، اما این بار از دیدگاه نظریه اعداد ترتیبی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۱. گیریم α یک عدد ترتیبی اختیاری است. آنگاه مجموعه تمام اعداد ترتیبی β به قسمی که $\alpha < \beta$ ، یک مجموعه خوشتراحت است که عدد ترتیبی آن α است.

برهان. گیریم (A, \leqslant) مجموعه خوشتراحت باشد که عدد ترتیبی آن α است. برای هر عدد ترتیبی β ، با شرط $\alpha < \beta$ و هر مجموعه خوشتراحت (B, \leqslant') با شرط $\text{ord}(B, \leqslant') = \beta$ ، با یک قطعه سرة $b \in A$ ، $b \in B$ ، از A هم ریخت ترتیبی است. از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که عنصر $b \in A$ با عدد ترتیبی β مشخص می‌شود و یکتاست. در نتیجه تابع خوشتراحت ذیر

$$f: \{\beta\} \rightarrow A$$

که با $f(\beta) = b$ اگر β یک عدد ترتیبی $\alpha < \beta$ است، تعریف می‌شود، وجود دارد.

خواهند می‌تواند به آسانی نشان دهد که تابع f یک هم‌ریختی ترتیبی است. بنابراین، مجموعه $\{\beta|\beta < \alpha\}$ خوشتیب است و

$$\text{ord}\{\beta|\beta < \alpha\} = \alpha$$

با توجه به قضیه ۱۱، می‌توان عدد ترتیبی α را با مجموعه $\{\beta|\beta < \alpha\}$ یکی در نظر گرفت و به این ترتیب هر عدد ترتیبی را یک مجموعه خوشتیب (از اعداد ترتیبی) دانست. مثلاً

$$0 \equiv \emptyset$$

$$\omega + 2 \equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\}$$

$$1 \equiv \{0\}$$

.

$$2 \equiv \{0, 1\}$$

.

$$3 \equiv \{0, 1, 2\}$$

.

.

$$\omega_2 \equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots\}$$

.

$$\omega_2 + 1 \equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega_2\}$$

.

$$\omega \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$$

.

$$\omega + 1 \equiv \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$$

.

قضیه ۱۲. هر مجموعه از اعداد ترتیبی خوشتیب است.

برهان. برخلاف حکم فرض کنید که یک مجموعه A از اعداد ترتیبی وجود دارد که خوشتیب نیست. بنابراین یک زیرمجموعه A' مانند B وجود دارد که کوچکترین عنصر ندارد. درنتیجه، مجموعه B شامل یک دنباله نامتناهی اکیداً نزولی از اعداد ترتیبی $\dots > \alpha_2 > \alpha_1$ است. این دنباله در $\{\beta|\beta < \alpha\}$ واقع است، و بنابراین، مجموعه $\{\beta|\beta < \alpha\}$ خوشتیب نیست، و این قضیه ۱۱ را نقض می‌کند. با این تناقض اثبات قضیه کامل است.

عدد ترتیبی را به صورت مجموعه در نظر بگیریم، مثلاً "فرض کنیم \mathcal{A} مجموعه تمام اعداد ترتیبی α همتوان مجموعه N است (توجه کنید که هر α یک مجموعه و N مجموعه اعداد طبیعی است). این مجموعه اعداد زیر را شامل است:

$$\omega, \omega + 1, \dots, \omega_2, \omega_2 + 1, \dots, \omega_3, \omega_3, \dots, \omega_4, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{(\omega)}, \dots, \omega^\omega, \dots$$

بنابر قضیه ۱۲، مجموعه \mathcal{A} خوشتیب است، و بنابراین کوچکترین عدد ترتیبی یکای

همتوان N وجود دارد. این عدد را عدد ترتیبی آغازی مجموعه N می‌نامند (به‌آسانی دلیله می‌شود که ω عدد ترتیبی آغازی N است). به‌طور کلی، بنا بر اصل خوشترتیبی و قضیه ۱۲، هر مجموعه X یک عدد ترتیبی آغازی (یکتا) دارد. عددهای ترتیبی آغازی در اصل موضوعهای الف-۱ تا الف-۴ اعداد اصلی صدق می‌کنند (بخش ۱ فصل ۶ را ببینید). این راه دیگری برای تعریف اعداد اصلی به‌وجود می‌آورد. در واقع بعضی از توپولوژی‌گان نخست اعداد ترتیبی را مطறح می‌کنند و سپس عدد اصلی مجموعه‌را عدد ترتیبی آغازی آن مجموعه تعریف می‌کنند. از نظر منطقی بهتر است اعداد اصلی را به صورت اعداد ترتیبی آغازی تعریف کنیم، اما از نظر آموزشی و عملی، ترجیح دادیم اعداد اصلی را پیش از اعداد ترتیبی مطرح کنیم.

در قضیه ۱۲، دقت کردیم که از عبارت «مجموعه اعداد ترتیبی» اجتناب کنیم. همانند پارادوکس راسل، فرض وجود این مجموعه به تناقض می‌انجامد، این تناقض به‌پارادوکس بورالی-فورتی^{*} مشهور است.

قضیه ۱۳. مجموعه تمام اعداد ترتیبی وجود ندارد.

برهان. برخلاف حکم، فرض کنیم که S ، مجموعه تمام اعداد ترتیبی وجود دارد، بنابر قضیه ۱۲، S خوشترتیب است. عدد ترتیبی s ، که آن را σ می‌نامیم، باید یک عضو S باشد. از قضیه‌های ۱۱ و ۴ نتیجه می‌شود که:

$$\sigma = \text{ord} \{ \beta \in S \mid \beta < \sigma \} = \text{ord } S, \quad \text{and} \quad \sigma < \text{ord } S = \sigma$$

که یک تناقض است.

برهان دیگر. گیریم S و σ مانند بالا تعریف شده‌اند. آنگاه σ بزرگترین عدد ترتیبی است که با رابطه $1 + \sigma < \sigma$ تناقض دارد (مسئله ۱۵، تمرین ۳۰۸ را ببینید).

تمرین ۵۰۸

۱. ثابت کنید که تابع $A \rightarrow \{\beta \mid \beta < \alpha\}$: $f(\beta) = b$ ، که در برهان قضیه ۱۱ آمده است (و به قسمی است که $f(\beta) = b$ ، هرگاه برای یک مجموعه خوشترتیب (B, \leq') ، $\text{ord}(B, \leq') = A$ و $\beta = \text{ord}(B, \leq')$ یک هم‌ریختی ترتیبی است).

۲. ثابت کنید که ω ، عدد ترتیبی آغازی N است.

۳. نشان دهید که هر مجموعه یک عدد ترتیبی آغازی یکتا دارد.

۴. گیریم X و Y مجموعه هستند. ثابت کنید $Y \sim X$ اگر و تنها اگر عدد ترتیبی آغازی X و Y یکی باشند.

۵. گیریم X و Y مجموعه هستند. ثابت کنید $\text{card } X < \text{card } Y$ اگر و تنها اگر عدد ترتیبی آغازی X کوچکتر از عدد ترتیبی آغازی Y باشد.

* Burali-Forti paradox

ضمیمه ۴

اصول موضوع پثانو برای اعداد طبیعی

برای ساختن دستگاه اعداد صحیح، دستگاه اعداد گویا، دستگاه کلاسهای همنهشتی به پیمانه یک عدد صحیح، و غیره از دستگاه اعداد طبیعی ... ۳، ۲، ۱، شروع می‌کنیم. واقعاً اعداد طبیعی چه هستند؟ جوزبه پثانو^{*} (۱۸۵۸-۱۹۳۲) با پنج اصل موضوع، که اصول موضوع پثانو برای اعداد طبیعی نامیده می‌شوند، به این سؤال پاسخ داد.^۱

اصول موضوع پثانو برای اعداد طبیعی. مجموعه‌ای مانند N که در اصلهای موضوع زیر صدق کند وجود دارد؛ عناصرهای N را اعداد طبیعی می‌نامند.

۱. یک عنصر ویژه در N وجود دارد که با ۱ تماش داده می‌شود.

۲. برای هر عنصر $n \in N$ ، یک عنصر بیکنای n^+ ، به نام تالی n ، در N وجود دارد.

۳. برای هر $n \in N$ ، $n^+ \neq n$.

۴. اگر $n^+ = m^+$ و $n \in N$ ، $m \in N$ آنگاه $n = m$.

۵. اگر P زیرمجموعه‌ای از N باشد به قسمی که $1 \in P$ ، و از $n \in P$ نتیجه شود $P = N$ ، آنگاه $n^+ \in P$.

مناسبتر است که به جای n^+ ، تالی n ، بنویسیم $n+1$ ، و می‌نویسیم $1+1=2$ ، $2+1=3$ ، $3+1=4$ ، ...

اصل موضوع ۵، اساس استقرای دیاضی است. جمع اعداد طبیعی به صورت استقرایی با

* Giuseppe Peano

۱. نگاه کنید به :

Peano, *Arithmetices Principia*, Bocca, Turin, 1889.

اصول موضوع پنجم برای اعداد طبیعی ۱۸۳

$$1+y = y^+ \quad (1)$$

$$x^++y = (x+y)^+ \quad (2)$$

تعریف می شود. با به کار بردن (۱)، (۲) و استقراری ریاضی، ویژگیهای اساسی جمع اعداد طبیعی که در زیر می آیند، ثابت می شوند:

$$x+(y+z) = (x+y)+z \quad (3)$$

$$x+y = y+x \quad (4)$$

$$x+z = y+z \quad (5)$$

فقط (۳) را ثابت خواهیم کرد و (۴) و (۵) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.

برهان (۳). گیریم y و z دو عضو دلخواه \mathbb{N} هستند که در طول این برهان ثابت می مانند. برای اثبات (۳) با استقراری ریاضی، نخست نشان می دهیم که

$$1+(y+z) = (1+y)+z$$

برهان این قسمت مرحله به مرحله در زیر آمده است:

$$\text{بنابر (۱)} \quad 1+(y+z) = (y+z)^+$$

$$\text{بنابر (۲)} \quad = y^+ + z$$

$$\text{بنابر (۱)} \quad = (1+y) + z$$

پس، قانون شرکت‌پذیری (۳) برای $x=1$ معتبر است و نخستین شرط استقراری ریاضی ثابت شد. هدف بعدی ما آنست نشان دهیم که از فرض

$$k+(y+z) = (k+y)+z \quad (\text{فرض استقرار})$$

رابطه زیر نتیجه می شود

$$k^++(y+z) = (k^++y)+z.$$

داریم

$$\text{بنابر (۲)} \quad k^++(y+z) = [k+(y+z)]^+$$

$$\text{بنابر فرض استقرار} \quad = [(k+y)+z]^+$$

$$\text{بنابر (۲)} \quad = (k+y)^+ + z$$

$$\text{بنابر (۲)} \quad = (k^++y)+z$$

که مطلوب ماست. برهان (۳) اکنون با استقراری ریاضی کامل است.

ضرب اعداد طبیعی به صورت استقراری با:

$$1 \cdot y = y \quad (6)$$

$$x^+ y = xy + y \quad (7)$$

تعریف می‌شود. ویژگیهای اساسی ضرب که در زیر می‌آیند از (۶) و (۷) با روش استقراری ریاضی نتیجه می‌شوند:

$$x(yz) = (xy)z \quad (\text{قانون شرکت‌ذیری}) \quad (8)$$

$$xy = yx \quad (\text{قانون جابه‌جایی}) \quad (9)$$

$$x = y \quad xz = yz \quad (\text{قانون حذف}) \quad (10)$$

$$x(y+z) = xy + xz \quad (\text{قانون پخش‌ذیری}) \quad (11)$$

ویژگیهای (۸)، (۹) و (۱۰) در ضرب به ترتیب به ویژگیهای (۳)، (۴) و (۵) در جمع شاہت دارند. برهانهای (۸)، (۹) و (۱۰) همانند برهانهای (۳)، (۴) و (۵) هستند و لذا آوردند این برهانها هم به خواسته و اگذار می‌شود. قانون پخش‌ذیری را ثابت می‌کنیم.

برهان (۱۱). فرض می‌کنیم y و z دو عضو دلخواه \mathbb{N} و در طول این برهان ثابت هستند. با استقراری ریاضی روی x ، (۱۱) را ثابت می‌کنیم. در حالت $x = 1$ ، بنابر (۶)، بدینهی است که

$$1(y+z) = 1y + 1z$$

پس، نخستین قسمت استقراری ریاضی ثابت شد. برای کامل کردن اثبات، فرض می‌کنیم که

$$k(y+z) = ky + kz$$

برای یک $k \in \mathbb{N}$ راست است. آنگاه

$$\text{بنابر (۷)} \quad k^+(y+z) = k(y+z) + (y+z)$$

$$\text{بنابر فرض استقرار} \quad = (ky + kz) + (y+z)$$

$$\text{بنابر (۳)} \quad = ky + [kz + (y+z)]$$

$$\text{بنابر (۳)} \quad = ky + [(kz + y) + z]$$

$$\text{بنابر (۴)} \quad = ky + [(y+kz) + z]$$

اصول موضوع پثانو برای اعداد طبیعی ۱۸۵

$$\begin{aligned}
 \text{بنابر (۳)} &= ky + [y + (kz + z)] \\
 \text{بنابر (۳)} &= (ky + y) + (kz + z) \\
 \text{بنابر (۲)} &= k^+y + k^+z
 \end{aligned}$$

پس، بنابر استقرای ریاضی، (۱۱) راست است.

مفهوم ترتیب در N را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$(۱۲) \quad y > x \text{ اگر و تنها اگر } z \in N \text{ وجود داشته باشد به قسمی که}$$

از این تعریف ترتیب، نتیجه می‌شود که

$$(۱۲) \quad y > x \text{ و } z > y \text{ نتیجه می‌دهد } z > x \text{ (قانون تعلق)}$$

و

(۱۲) برای هر x, y در N ، یکی و فقط یکی از حکم‌های زیر درست است:

$$x = y, \quad x > y, \quad x < y \quad (\text{قانون سه‌گانگی})$$

در حقیقت، تمام ویژگی‌های شناخته شده اعداد طبیعی از اصول موضوع پثانو مشتق می‌شوند. این ضمیمه را با قضیه زیر که نشان می‌دهد دستگاه اعداد طبیعی یکنائب، به پایان می‌رسانیم.

قضیه. گیریم N و N' دو مجموعه هستند که در اصول موضوع ۱ تا ۵ پثانو صدق می‌کنند. آنگاه یک تأثیر یک به یک (به نام همریختی) $f: N \rightarrow N'$ وجود دارد به قسمی که $f(1) = 1'$ و $f(n+1) = f(n) + 1'$ در اینجا $1'$ عنصر ویژه N' است که در ۱ - ۵ صدق می‌کند.

پاسخ مسائل برگزیده

تمرین ۱۰

۱. هست ۲. هست ۳. نیست ۴. هست ۵. نیست ۶. نیست ۷. نیست
 ۸. نیست ۹. هست ۱۰. هست ۱۱. $2^2, 16, 8, 20$ ۱۲.

p	q	r		۱۰
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

تمرین ۱۱

۱۳. بله ۱۴. بله ۱۵. بله ۱۶. $\neg p \wedge \neg q$ ۱۷. بله ۱۸. بله ۱۹. بله ۲۰. بله ۲۱. $\sim p \wedge \sim q$

تمرین ۱۲

۲۲. نه این تابع مشتق دارد نه من احمد هستم.

پاسخ مسائل برگزیده ۱۸۷

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \sim p_3 \vee \dots \vee \sim p_n \quad .\text{ا}(الف)$$

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3 \wedge \dots \wedge \sim p_n \quad .\text{ب}$$

$$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \cdot ۱۹ \quad p \wedge q \wedge r \cdot ۱۸ \quad .\text{بله} \quad ۱۴$$

تمرين ۴.۱

۳. از جدول ارزش:

p	\wedge	$\sim q$	\rightarrow	c	\leftrightarrow	p	\rightarrow	q
T	F	F	T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T	F
مرحله ۱								
۱	۳	۲	۴	۱	۵	۱	۲	۱

نتیجه می‌گیریم که $c \rightarrow p \wedge \sim q$ و $p \rightarrow q$ هم ارز هستند.

تمرين ۵.۱

$$\text{تعريف } \rightarrow \quad p \wedge (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim(p \wedge \sim q) \quad .\text{ا}$$

$$\text{دمورگن، نفی مضاعف} \quad \equiv p \wedge (\sim p \vee q)$$

$$\text{پخشندیری} \quad \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$$

$$p \wedge \sim p \equiv c \quad \equiv c \vee (p \wedge q)$$

$$\text{جابه‌جایی، قضیه ۷ (ب)} \quad \equiv p \wedge q$$

$$\text{اختصار} \quad \Rightarrow q$$

$$\text{تعريف } \rightarrow \quad (p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow \sim[(p \wedge \sim q) \wedge \sim c] \quad .\text{ب}$$

$$\text{دمورگن، نفی مضاعف} \quad \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \vee c$$

$$\text{قضیه ۷ (ب)} \quad \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$

$$\text{تعريف } \rightarrow \quad \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge \sim r \wedge \sim q \Leftrightarrow [(p \vee q \vee r) \wedge \sim r] \wedge \sim q \quad .\cdot ۴$$

مثال ۶ $\Rightarrow (p \vee q) \wedge \sim q$

مثال ۶ $\Rightarrow p$

تعريف $c \Leftrightarrow p \wedge \sim p \quad .\cdot ۵$

اختصار $\Rightarrow p$

$$\rightarrow \text{تعريف} \rightarrow (p \vee q \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim [(p \vee q) \wedge \sim q] \quad .\cdot ۷$$

دمورگن، نفی مضاعف $\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee q$

دمورگن، جابهجاوی $\Leftrightarrow q \vee (\sim p \wedge \sim q)$

پخشندیری $\Leftrightarrow (q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$

$q \vee \sim q \equiv t$ $\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge t$

قضیه ۷ (الف) $\Leftrightarrow \sim p \vee q$

دمورگن، نفی مضاعف $\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

تعريف $\rightarrow \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$$\wedge \text{ مسئله } (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \quad .\cdot ۹$$

جابهجاوی $\Leftrightarrow (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q)$

پخشندیری $\Leftrightarrow r \vee (\sim p \wedge \sim q)$

دمورگن، جابهجاوی $\Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee r$

مسئله $\Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

$$\wedge \text{ مسئله } (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \quad .\cdot ۱۱$$

پخشندیری $\Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim q)$

$q \wedge \sim q \equiv c$ $\Leftrightarrow \sim p \vee c$

قضیه ۷ (ب) $\Leftrightarrow \sim p$

$$\wedge \text{ مسئله } (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) \quad .\cdot ۱۲$$

شرکتپذیری، جابهجاوی $\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r)$

پاسخ مسائل برگزیده ۱۸۹

خودتوانی	$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r)$	
مسئله ۸	$\Leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$	
	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \rightarrow q)$.۱۶
تعریف ۴، دمورگن	$\Leftrightarrow [\sim p \vee (q \rightarrow r)] \wedge (\sim p \vee q)$	
پخشپذیری	$\Leftrightarrow \sim p \vee [(q \rightarrow r) \wedge q]$	
قیاس استثنایی، مسئله ۵، تمرین ۱۰۱	$\Rightarrow \sim p \vee r$	
	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s)$.۲۰
$\sim q \vee \sim s \equiv q \rightarrow \sim s$	$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow \sim s)$	
جا به جایی، شرکت‌پذیری	$\Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim s)] \wedge (r \rightarrow s)$	
تعدی، عکس نقیض	$\Rightarrow (p \rightarrow \sim s) \wedge (\sim s \rightarrow \sim r)$	
تعدی	$\Rightarrow p \rightarrow \sim r$	
تعریف ۴، دمورگن	$\Leftrightarrow \sim p \vee \sim r$	

تمرین ۶.۱

۶. با گذاشتن (x) $\sim P(x)$ به جای $q(x)$ در $(\forall x)(q(x)) \equiv (\exists x)(\sim q(x))$ داریم

$$\sim [(\forall x)(\sim p(x))] \equiv (\exists x)(p(x))$$

با نفی هر دو طرف هم ارزی بالا و تعبیض طرف چپ و راست، نتیجه می‌گیریم:

$$\sim [(\exists x)(p(x))] \equiv (\forall x)(\sim p(x))$$

تمرین ۷.۱

۵. (الف) برهان مستقیم:

$$A \vee (B \wedge C) .۱$$

$$B \rightarrow D .۲$$

$$C \rightarrow E .۳$$

$$D \wedge E \rightarrow F .۴$$

$$\sim A / \therefore F .۵$$

١، ٥، رفع مؤلفه	$B \wedge C . ٤$
٢، ٣، قياس ذوالوجهين موجب	$B \wedge C \rightarrow D \wedge E . ٧$
٤، ٦، قياس استثنائي	$D \wedge E . ٨$
٤، ٨، قياس استثنائي	$F . ٩$
(ب) برهان غيرمستقيم:	
برهان خلف	$\sim F . ٦$
٤، ٦، قياس دفع	$\sim(D \wedge E) . ٧$
١، ٥، رفع مؤلفه	$B \wedge C . ٨$
٢، ٣، قياس ذوالوجهين موجب	$B \wedge C \rightarrow D \wedge E . ٩$
٨، ٩، قياس استثنائي	$D \wedge E . ١٠$
٧، ١٠، عطف	$(D \wedge E) \wedge \sim(D \wedge E) . 11$
(الف) برهان مستقيم:	
٤، ٣، قياس دفع	$B \vee (C \rightarrow E) . ١$
١، ٥، رفع مؤلفه	$B \rightarrow D . ٢$
٣، ٤، قياس استثنائي	$\sim D \rightarrow (E \rightarrow A) . ٣$
٧، ٦، تدعي	$\sim D / : C \rightarrow A . ٤$
٤، ٢، قياس دفع	$\sim B . ٥$
١، ٥، رفع مؤلفه	$C \rightarrow E . ٦$
٣، ٤، قياس استثنائي	$E \rightarrow A . ٧$
٦، ٧، تدعي	$C \rightarrow A . ٨$
(ب) برهان غيرمستقيم:	
برهان خلف	$\sim(C \rightarrow A) . ٥$
٤، تعریف ٤، نفي مضاعف	$C \wedge \sim A . ٦$
٦، اختصار	$\sim A . ٧$

پاسخ مسائل برگزیده ۱۹۱

۳، ۴، قیاس استثنایی	$E \rightarrow A . ۸$
۷، ۸، قیاس دفع	$\sim E . ۹$
۲، ۴، قیاس دفع	$\sim B . ۱۰$
۱۰، ۱۱، رفع مؤلفه	$C \rightarrow E . ۱۱$
۶، اختصار	$C . ۱۲$
۱۱، ۱۲، قیاس استثنایی	$E . ۱۳$
۹، ۱۳، عطف	$E \wedge \sim E . ۱۴$

۱۰. (الف) برهان مستقیم:

$A \wedge B \rightarrow C . ۱$
$(A \rightarrow C) \rightarrow D . ۲$
$\sim B \vee E / \therefore B \rightarrow D \wedge E . ۳$
$B \rightarrow (A \rightarrow C) . ۴$
$B \rightarrow D . ۵$
$B \rightarrow E . ۶$
$B \wedge B \rightarrow D \wedge E . ۷$
$B \rightarrow D \wedge E . ۸$

.۱۱

$P \wedge C \rightarrow R . ۱$
$R \rightarrow G . ۲$
$H \rightarrow \sim I . ۳$
$H . ۴$
$\sim G \vee I / \therefore \sim (P \wedge C) . ۵$
$\sim I . ۶$
$\sim G . ۷$

$$\sim R \cdot 1$$

$$\sim (P \wedge C) \cdot 9$$

• ۱۳

$$W \vee H \rightarrow L \wedge S \cdot 1$$

$$\sim S / \therefore \sim H \cdot 2$$

$$\sim S \vee \sim L \cdot 3$$

$$\sim (L \wedge S) \cdot 4$$

$$\sim (W \vee H) \cdot 5$$

$$\sim W \wedge \sim H \cdot 6$$

$$\sim H \cdot 7$$

• ۱۴

$$E \wedge S \rightarrow G \cdot 1$$

$$G \rightarrow H \cdot 2$$

$$\sim H / \therefore \sim E \vee \sim S \cdot 3$$

$$\sim G \cdot 4$$

$$\sim (E \wedge S) \cdot 5$$

$$\sim E \vee \sim S \cdot 6$$

• ۱۵

$$P \rightarrow \sim B \cdot 1$$

$$F \rightarrow T \cdot 2$$

$$O \rightarrow \sim S \cdot 3$$

$$\sim B \rightarrow F \cdot 4$$

$$G \rightarrow P \cdot 5$$

$$\sim S \rightarrow \sim T / \therefore O \rightarrow \sim G \cdot 6$$

$$O \rightarrow \sim T \quad .7$$

$$G \rightarrow \sim B \quad .8$$

$$G \rightarrow F \quad .9$$

$$G \rightarrow T \quad .10$$

$$\sim T \rightarrow \sim G \quad .11$$

$$O \rightarrow \sim G \quad .12$$

تمرین ۸.۱

۱. این قضیه را با استقراری ریاضی روی n ثابت می‌کنیم. قضیه به سادگی برای $n=1$ دلیل می‌شود. فرض استقرار آنست که k عدد صحیحی است که برای تمام r های $0 \leq r \leq k$

$$C(k, r) = \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

حال $C(k+1, r)$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف ۷ و فرض استقرار داریم

$$C(k+1, r) = C(k, r) + C(k, r-1)$$

$$= \frac{k!}{r!(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!}$$

$$= \frac{k!(k-r+1)}{r!(k-r)!(k-r+1)} + \frac{k!r}{r(r-1)!(k-r+1)!}$$

$$= \frac{k!(k+1)}{r!(k-r+1)!}$$

$$= \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!}$$

که نشان می‌دهد قضیه برای $k+1$ درست است اگر برای k درست باشد. اکنون برهان بنابر اصل استقراری ریاضی کامل است.

۲. قضیه ۸ می‌تواند برای این مسئله به کار رود. اگر استقراری ریاضی به کار می‌رود، نخست لم زیر را با استقراری ریاضی ثابت کنید.

لم. اگر n عدد صحیح نامنفی و r یا کمتر از صفر یا بزرگتر از n باشد، آنگاه $C(n, r) = 0$.

تمرین ۱۰۲

$$D \subseteq A \subseteq B \subseteq C \quad .\quad .\quad .\quad .$$

۵. فرض کنید $\emptyset \subseteq A$ ، آنگاه برای هر عنصر x ، $(x \in A) \rightarrow (x \in \emptyset)$ یک گزاره راست است. چون $x \in \emptyset$ دروغ است، برای اینکه گزاره شرطی $(x \in A) \rightarrow (x \in \emptyset)$ راست باشد، باید $x \in A$ برای تمام عناصرهای x دروغ باشد. پس، باید داشته باشیم $A = \emptyset$.

۶. (الف) درستی عبارت زیر را بررسی می‌کیم:

$$(A \subseteq B) \begin{cases} ۱. (x \in A) \rightarrow (x \in B) & \text{برای هر عنصر } x \\ ۲. (y \in B) \wedge (y \notin A) & \text{برای بعضی از عناصرهای } y \end{cases} \quad (\text{فرض})$$

$$(B \subseteq C) \quad ۳. (x \in B) \rightarrow (x \in C) \quad \text{برای هر عنصر } x$$

$$(\text{نتیجه}) \quad / \therefore A \subseteq C$$

$$4. (x \in A) \rightarrow (x \in C) \quad \text{برای هر عنصر } x$$

$$5. y \in B \quad 2, \text{ اختصار}$$

$$6. y \notin A \quad 2, \text{ اختصار}$$

$$7. y \in C \quad 3, 5, \text{ قیاس استثنایی}$$

$$8. (y \in C) \wedge (y \notin A) \quad \text{برای بعضی عناصر } y$$

$$9. A \subseteq C \quad 1, 4, \text{ تعریف } \subseteq$$

- | | | |
|---------------|----------|----------|
| ۸. (الف) دروغ | (ب) دروغ | (ج) دروغ |
| (د) دروغ | (ه) دروغ | (و) راست |

- | | | |
|---------------|----------|----------|
| ۹. (الف) دروغ | (ب) دروغ | (ج) راست |
| (د) راست | (ه) راست | (و) راست |

- | | | | |
|----------------|----------|----------|----------|
| ۱۰. (الف) دروغ | (ب) راست | (ج) دروغ | (د) راست |
|----------------|----------|----------|----------|

۱۱. باید این را با استقرای ریاضی روی n ثابت کنیم. چون

$$C(1, r) = \begin{cases} 1 & r = 0, 1 \\ 0 & r \neq 0, 1 \end{cases}$$

پس مطلب برای $n = 1$ درست است. فرض کنید که یک مجموعه با k عنصر داده شده، آنگاه برای هر عدد صحیح r ، دقیقاً $C(k, r)$ زیرمجموعه با r عنصر وجود دارد (فرض استقرای). حال مجموعه دلخواه $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ را با $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ عضوی از زیرمجموعه‌های r عضوری دارد نظر بگیرید. زیرمجموعه‌های r عضوری A ، از $A - \{a_{k+1}\}$ و زیرمجموعه‌های $1 - r$ عضوری $A - \{a_{k+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ که به آنها a_{k+1} افزوده شود تشکیل شده‌اند. بنابراین، بنا بر استقرای ریاضی و تعریف ۷ از فصل اول، دقیقاً $C(k+1, r) = C(k, r) + C(k, r-1)$ زیرمجموعه A با r عنصر وجود دارد. اذاین‌رو، اثبات بنابر اصل استقرای ریاضی کامل است.

تمرين ۲۰۲

۰.۵ $\{x, \{y, z\}\}, \{\{y, z\}\}, \{x\}$

۰.۶ خیر، $\varphi(\emptyset) = \{\emptyset\}$ یک عنصر دارد.

۰.۷ دو عنصر.

- ۱۰ در نظر داشته باشید که یک مجموعه $X \in \varphi(A : B)$ اگر و تنها اگر یک مجموعه $Y \in \varphi(A - B)$ وجود داشته باشد به قسمی که $X = B \cup Y$.
 (الف) بنابراین، تعداد عضورهای $\varphi(A : B)$ همانند تعداد عضورهای مجموعه توانی $\varphi(A - B)$ است، یعنی 2^{n-m} .
 (ب) اگر $B = \emptyset$ ، آنگاه $\varphi(A : B) = \varphi(A)$ ، که $2^{n-m} = 2^n = 2^0 = 1$ عنصر دارد.

تمرين ۳۰۲

- ۰.۱ بدینهی است که $A \cup B \subseteq B$. برای کامل کردن برهان، باقی می‌ماند که نشان داده شود $: A \cup B \subseteq B$

$$\text{تعريف }\cup \quad x \in A \cup B \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$$

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow (x \in B) \vee (x \in B)$$

$$\text{خودتوانی} \quad \equiv x \in B$$

از این‌رو $A \cup B = B$ و درنتیجه $A \cup B \subseteq B$.

(الف)

$$(A \subseteq C) \quad ۱. (x \in A) \rightarrow (x \in C)$$

$$(فرض/B \subseteq C) \quad ۲. (x \in B) \rightarrow (x \in C) / \therefore A \cup B \subseteq C$$

$$۳. (x \in A) \vee (x \in B) \rightarrow (x \in C) \vee (x \in C) \quad \text{قياس ذو الوجهين موجب}$$

$$۴. (x \in A) \vee (x \in B) \rightarrow (x \in C) \quad ۳، \text{ خودتوانی}$$

$$۵. (x \in A \cup B) \rightarrow (x \in C) \quad ۴، \text{ تعریف } \cup$$

$$۶. A \cup B \subseteq C \quad \text{تعریف } \subseteq$$

$$C \subseteq (A \cap B) \cup C \quad (۱) .۷$$

$$(فرض) \quad = A \cap (B \cup C)$$

$$\subseteq A$$

$$۷. \bar{C} \subseteq A \cdot \bar{C} \subseteq A \quad (\text{گیریم})$$

$$۸. (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad \text{بخشیدیری، جابه‌جایی}$$

$$۹. A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C \quad \text{مسئله ۱}$$

۱۰. چون $C \subseteq A$ ، پس بنابر مسئله ۱۰ داریم $A \cup B \subseteq C \cup B$. چون $B \subseteq D$ ، دوباره بنابر مسئله ۱۰ داریم $C \cup B = B \cup C \subseteq D \cup C = C \cup D$. اذاین دو،

تمرین ۴.۲

$$۱. A - (B \cap A) = A \cap (B \cap A)' \quad \text{مثال ۵}$$

$$\text{قضیه دمورگن} \quad = A \cap (B' \cup A')$$

$$\text{بخشیدیری} \quad = (A \cap B') \cup (A \cap A')$$

$$\text{قضیه ۵ (ج)} \quad = (A \cap B') \cup \emptyset$$

$$\text{مثال ۵، قضیه ۴ (الف)} \quad = A - B$$

۱۱. گیریم $B \subseteq A'$. برای هر عنصر x ، اگر $x \in B$ آنگاه $x \in A'$. یعنی $x \notin A$ اگر $.A \cap B = \emptyset$. پس برای هر $x \in B$ ، $x \notin A \cap B$. بنابراین $x \in A - B$

پاسخ مسائل برگزیده ۱۹۷

به وارون، اگر آنگاه $A \cap B = \emptyset$ را نتیجه می‌دهد. یعنی،
 $B \subseteq A'$ راست است. پس $(x \in B) \rightarrow (x \in A')$

.۶. (۱) اگر $B \subseteq (A - B) \cup B = A$ ، آنگاه $(A - B) \cup B = A$ راست است. (۲) اگر $B \subseteq A$ ، آنگاه $B \subseteq A - B$

$$\begin{array}{ll} \text{مثال ۵} & (A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B \\ \text{جا به جایی} & = B \cup (A \cap B') \\ \text{پخشندیری} & = (B \cup A) \cap (B \cup B') \\ (\text{فرض}) & = A \cap (B \cup B') \end{array}$$

تمرین ۴۰۲

$$\begin{array}{ll} \text{قضیه ۵ (ج)} & = A \cap U \\ A \subseteq U & = A \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{مثال ۵} & (A - C) \cup (B - C) = (A \cap C') \cup (B \cap C') \\ \text{جا به جایی} & = (C' \cap A) \cup (C' \cap B) \\ \text{پخشندیری} & = C' \cap (A \cup B) \\ \text{جا به جایی، مثال ۵} & = (A \cup B) - C \end{array}$$

$$C = A \cup B \quad \text{فرض} \quad C - B = (A \cup B) - B \quad .۴۰$$

$$\begin{array}{ll} \text{مثال ۵} & = (A \cup B) \cap B' \\ \text{جا به جایی، پخشندیری} & = (A \cap B') \cup (B \cap B') \\ \text{مثال ۵، قضیه ۵ (ج)} & = (A - B) \cup \emptyset \\ A \cap B = \emptyset & = A \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (A \cup B) - (A \cap B) & .۴۱ \\ \text{مثال ۵} & = (A \cup B) \cap (A \cap B)' \\ \text{قضیه دمورگن} & = (A \cup B) \cap (A' \cup B') \\ \text{پخشندیری} & = [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{جابه جایی،} & = [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \\
 & \text{پخش‌پذیری} \\
 (\text{ج}) \quad & \text{قضیة ۵} & = [\emptyset \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \emptyset] \\
 \text{مثال ۵} & & = (B - A) \cup (A - B) \\
 & \text{جابه جایی} & = (A - B) \cup (B - A)
 \end{aligned}$$

۲۲. بنا بر مثال ۵، داریم

$$B \oplus C = (B - C) \cup (C - B) = (B \cap C') \cup (C \cap B')$$

فقط قسمت (ج) را باید ثابت کنیم، اثبات بقیه ساده است. بنا بر تعریف \oplus و قوانین
 دموکریتیک، داریم

$$\begin{aligned}
 A \oplus (B \oplus C) &= A \oplus [(B \cap C') \cup (C \cap B')] \\
 &= \{A \cap [(B \cap C') \cup (C \cap B')]'\} \cup \{A' \cap [(B \cap C') \cup (C \cap B')]\} \\
 &= [A \cap (B \cap C')' \cap (C \cap B')'] \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A' \cap B' \cap C] \\
 &= [A \cap (B' \cup C) \cap (B \cup C')] \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A' \cap B' \cap C] \\
 &= [A \cap B' \cap C'] \cup [A \cap B \cap C] \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A' \cap B' \cap C] \\
 &= [A \cap B' \cap C'] \cup [A' \cap B \cap C'] \cup [A \cap B \cap C] \cup [A' \cap B' \cap C] \\
 &= \{(A \cap B') \cup (A' \cap B)\} \cap C' \} \cup \{(A \cap B) \cup (A' \cap B')\} \cap C\} \\
 &= [(A \oplus B) \cap C'] \cup [(A' \cup B) \cap (A \cup B') \cap C] \\
 &= [(A \oplus B) \cap C'] \cup \{[(A \cap B') \cup (A' \cap B')]'\} \cap C\} \\
 &= [(A \oplus B) \cap C'] \cup [(A \oplus B)' \cap C] \\
 &= (A \oplus B) \oplus C
 \end{aligned}$$

تمرین ۶۰۲

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| ۰.۱ (ج) $[0, 1/11]$ | ۰.۲ (ب) $[0, 1]$ | ۰.۳ (الف) $(-1, 1)$ |
| (ب) $\{0\}$ | (ب) $\{0\}$ | (الف) $(1, -1)$ |
| $\{x \in \mathbb{R} x \leq 0\}$ | $\{x \in \mathbb{R} x > 1\}$ | ۰.۴ (الف) $[1, \infty)$ |
| R (د) | $\{x \in \mathbb{R} x \geq 1\}$ | (ج) |

(الف)

$$\begin{aligned}
 \text{قضیه ۹} \quad (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^m B_j) &= \bigcup_{j=1}^m (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap B_j \\
 \text{جا به جایی} \quad &= \bigcup_{j=1}^m \left[B_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right] \\
 \text{قضیه ۹} \quad &= \bigcup_{j=1}^m \left[\bigcup_{i=1}^n (B_j \cap A_i) \right]
 \end{aligned}$$

تمرین ۱۳

$$A = B \quad B = \emptyset \quad \text{با} \quad A = \emptyset \quad .\quad .\quad .$$

$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D) \quad .\quad .\quad .$$

$$\begin{aligned}
 \cap \text{ تعریف} \quad &\equiv [(x, y) \in A \times C] \wedge [(x, y) \in B \times D] \\
 \times \text{ تعریف} \quad &\equiv [(x \in A) \wedge (y \in C)] \wedge [(x \in B) \wedge (y \in D)] \\
 \text{شرکت‌نیزی، جا به جایی} \quad &\equiv [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(y \in C) \wedge (y \in D)] \\
 \cap \text{ تعریف} \quad &\equiv (x \in A \cap B) \wedge (y \in C \cap D) \\
 \times \text{ تعریف} \quad &\equiv (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)
 \end{aligned}$$

$$\therefore (A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

(۱) اگر $\{a, b\} = \{c, d\}$ و $\{a\} = \{c\}$ ، $b = d$ و $a = c$. درنتیجه $\{a, b\} = \{c, d\} \wedge \{a\} = \{c\}$ با $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ فرض کنید. اگر $\{a, b\} = \{c, d\}$ ، آنگاه جفت مرتب $(a, b) = (c, d)$ همان مجموعه نک عضوی $\{a\}$ است. چون $(a, b) = (c, d)$ داریم $a = b = c = d$ و $\{c\} = \{d\} = \{a\}$. درنتیجه $\{c, d\} = \{a\}$ اگر آنگاه هردو جفت (a, b) و (c, d) شامل فقط یک مجموعه نک عضوی، بهترتیب $\{a\}$ و $\{c\}$ هستند. از این رو $a = c$. همچنین مجموعه های $\{a\}$ و $\{c\}$ فقط شامل یک «مجموعه دو عضوی»، بهترتیب $\{a, b\}$ و $\{c, d\}$ هستند، بنابراین $\{a, b\} = \{c, d\}$ زیرا اگر $b = d$ و $a = c$ آنگاه چون $\{a, b\} = \{c, d\}$ ، پس باید داشته باشیم $a = b$ ، که تناقض است.

تمرین ۴.۳

۳. (الف) برای بعضی A $y \in \text{Im}(\mathcal{R}) \equiv (x, y) \in \mathcal{R}$ $x \in A$ تعریف نگاره

تعریف \mathcal{R}^{-1} $\equiv (y, x) \in \mathcal{R}^{-1}$ $x \in A$ برای بعضی

تعریف حوزه $\equiv y \in \text{Dom}(\mathcal{R}^{-1})$

۱۵. راهنمایی: مسئله ۷ (ب) را به کار برد.

تمرین ۴.۴

۴. برای بعضی φ $(x, y) \in X/\varphi \equiv x \in A \wedge y \in A$ $A \in \varphi$ تعریف

تعریف \times $\equiv (x, y) \in A \times A$ $A \in \varphi$ برای بعضی

تعریف \cup $\equiv (x, y) \in \bigcup_{A \in \varphi} A \times A$

$(x, y) \in X/(X/\varepsilon)$ ۱۱

مسئله ۴ $\equiv (x, y) \in A \times A$ $A \in X/\varepsilon$ برای بعضی

X/ε تعریف $\equiv (x, y) \in (c/\varepsilon) \times (c/\varepsilon)$ $c \in X$ برای بعضی

قضیة ۳ (ب) $\equiv (x, y) \in \varepsilon$

تمرین ۴.۵

۵. (الف) $R(j)$ $[-1, 1]$ (ب) $[5, +\infty)$ ۱۱

$n^m, 2^3, 0.11$

$n, 2.12$

۱۴. گیریم $A = \text{Dom}(g)$ و B زیرمجموعه‌ای از Y که شامل $\text{Im}(g)$ است، باشد.
نشان دهید $B \rightarrow A : g$ تابع است.

۱۵. گیریم $f(x, y) \in f$. چون f انعکاسی است، $(x, x) \in f$ ، بنابراین باید داشته باشیم $y = x$ زیرا f تابع است. یعنی برای تمام $x \in X$ $f(x) = x$ ، یا $I_X : X \rightarrow X$ تابع همانی است.

۱۶. برای تمام x ‌های در $[0, 1]$: $f(x) = 1 - x$

۱۷. گیریم x عضوی از X باشد. چون $(x, f(x)) \in g \subseteq f$ پس، $f = g$. بنابراین $f(x) = g(x), \forall x \in X$ یعنی،

تمرین ۵.۳

$$\text{تعريف ۹ (الف)} \quad x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \quad \text{۰.۴ (الف)}$$

$$\text{تعريف ۹ (ب)} \quad \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(f(A))$$

(ب) به قسمی که $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ ، $y = f(x)$ چون $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ داریم $x \in f^{-1}(B)$ ، $y = f(x) \in B$

$$\begin{aligned} x \in p_X(\mathcal{R}) &\Leftrightarrow x = p_X(x, y) \quad (x, y) \in \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Dom}(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } p_Y(\mathcal{R}) = \text{Im}(\mathcal{R}) \text{ و } p_X(\mathcal{R}) = \text{Dom}(\mathcal{R})$$

$$y \in f(A \cap f^{-1}(B)) \quad \text{۰.۹ (الف)}$$

$$\text{تعريف ۹ (الف)} \quad \equiv [y = f(x) \quad x \in A \cap f^{-1}(B)]$$

$$\cap \quad \equiv [y = f(x) \quad x \in A \text{ و } x \in f^{-1}(B)]$$

$$\text{تعريف ۹} \quad \equiv y \in f(A) \text{ و } y \in B$$

$$\cap \quad \equiv y \in f(A) \cap B$$

$$\cdot f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$$

(ب) با جایگذاری X به جای A در قسمت (الف)، داریم

$$f(X \cap f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$$

$$\text{چون } f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$$

$$f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$$

تمرین ۶.۳

۰.۷- تصویر $X \times Y \rightarrow p_X: X \times Y \rightarrow$ انزکتیو است، هرگاه Y مجموعه تک عضوی باشد.

۱۲. (الف) عبارت $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ همیشه درست است. [به مسئله ۴ (الف)، تمرین ۵.۳ نگاه کنید]. بنابراین، اکنون کافی است نشان داده شود $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$: برای هر $x \in f^{-1}(f(A))$ ، داریم $x \in f^{-1}(f(A))$. در نتیجه، برای بعضی $x' \in A$ ، $x = f(x')$. چون f از کتیو است، باید داشته باشیم $x = x'$; پس $x \in A$ و در نتیجه $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

۱۶. برای اینکه نشان دهیم f متفاوت است، نشان می‌دهیم که از $x = f(y)$ ، $y = f(x)$ نتیجه می‌شود. گیریم $y = f(x)$. آنگاه

$$x = f(f(x)) = f(y)$$

۱۸. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۱۳، برای $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ و $\Gamma = \{1, 2\}$ ، داریم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

برای اثبات وارون آن، فرض کنیم برای تمام زیرمجموعه‌های A و B از X داشته باشیم $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. برای عنصرهای داخلواه a و b از X و $A \cap B = \emptyset$ ، $B = \{b\}$ و $A = \{a\}$ ، قرار دهیم $a \neq b$ و بنابراین

$$\{f(a)\} \cap \{f(b)\} = f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

پس $f(a) \neq f(b)$ و بنابراین f یک به‌یک است.

۱۹. فرض کنیم برای تمام زیرمجموعه‌های X ، مانند A و B ، $A \cap B = \emptyset$ و $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$ ، قرار می‌دهیم $a \neq b$ و $A - B \neq \emptyset$ ؛ و از این رو

$$\{f(a)\} - \{f(b)\} = f(A) - f(B) = f(A - B) \neq \emptyset$$

بنابراین $f(a) \neq f(b)$ و در نتیجه f یک به‌یک است.

۲۰. بله.

تمرین ۷.۳

۶. برای اینکه نشان دهیم f از کتیو است، گیریم برای هر x و x' در X ، $f(x) = f(x')$. آنگاه با به کار بردن $g \circ f = I_X$ ، داریم

$$x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'$$

بنابراین، f از کتیو است. برای اینکه نشان دهیم f سورژکتیو است، $I_Y = f \circ h$ را به کار می‌بریم:

$$f(X) \supseteq f(h(Y)) = I_Y(Y) = Y \quad h(Y) \subseteq X$$

بنابراین، $f(X) = Y$ و f سورژکتیو است. پس، f بیژکتیو است. حال مشاهده کنید که با به کار بردن مسائل ۴ و ۵، داریم

$$g = g \circ I_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = I_X \circ f^{-1} = f^{-1}$$

و

$$h = I_X \circ h = (f^{-1} \circ f) \circ h = f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ I_Y = f^{-1}$$

۱۴) $g \circ f : X \rightarrow Z$ انزکتیو است: گیریم برای بعضی x و x' در X ، $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ ، چون g انزکتیو است، و $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x'))$ ، داریم $f(x) = f(x')$. حال انزکتیو بودن f نتیجه می‌دهد که $x = x'$. این ثابت می‌کند که $g \circ f$ انزکتیو است.

۱۵) برای اینکه نشان دهیم $f \circ g$ پوشاند، مشاهده می‌کنیم که

$$g \circ f(X) = g(f(X))$$

$$\text{پوشاند } f = g(Y)$$

$$\text{پوشاند } g = Z$$

بنابراین $g \circ f$ پوشاند.

۱۶) اگر $f : X \rightarrow Z$ یک دوسویی است. زیرا

$$\text{قضیه ۱۵} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$

$$\text{مسئله ۵، قضیه ۱۵} \quad = (g \circ I_Y) \circ g^{-1}$$

$$\text{مسئله ۴} \quad = g \circ g^{-1}$$

$$\text{مسئله ۵} \quad = I_Z$$

و

$$\text{قضیه ۱۵} \quad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$$

$$\text{مسئله ۵، قضیه ۱۵} \quad = f^{-1} \circ (I_Y \circ f)$$

$$\text{مسئله ۴} \quad = f^{-1} \circ f$$

$$\text{مسئله ۵} \quad = I_X$$

پس بنابر نتایج مسئله ۶، داریم

$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

ثمرین ۱۰۴

۴. اگر جبر بولی دقیقاً سه عضو $0, 1, a$ داشت، آنگاه سه امکان زیر برای a' وجود داشت:

$$a = (a')' = 0' = 1 \quad (\text{یک})$$

$$a = (a')' = 1' = 0 \quad (\text{دو})$$

$$a = a \cdot a = a \cdot a' = 0 \quad (\text{سه})$$

که هر سه حالت به تناقض می‌انجامد.

۵. اگر $a' = a$ ، آنگاه

$$1 = a + a' = a + a = a = a \cdot a = a \cdot a' = 0$$

که تعریف ۱ (د) را نقض می‌کند.

$$a + (a \cdot b) = (a \cdot 1) + (a \cdot b) \quad (\text{الف})$$

$$= a \cdot (1 + b)$$

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

۶. اگر $a + b = 0$ ، آنگاه بنابر مسئله ۹ (ب)

بنابر قضیه ۵

$$a = a \cdot (a + b) = a \cdot 0 = 0$$

به روش مشابه، $b = 0$

۷. (الف) \Leftrightarrow (ب) \Leftrightarrow (ج) \Leftrightarrow (د) \Leftrightarrow (ه)

بنابر قضیه ۵

$$a' + b = a' + (a + b) = (a' + a) + b = 1 + b = 1 \quad :(\text{ه}) \Leftrightarrow (\text{ب})$$

$$= 0 + (a \cdot b) = a \cdot b$$

$$a \cdot b' = (a \cdot b) \cdot b' = a \cdot (b \cdot b') = a \cdot 0 = 0 \quad :(\text{د}) \Leftrightarrow (\text{ج})$$

$$b = b + 0 = b + (a \cdot b') = (b + a) \cdot (b + b') \quad :(\text{ه}) \Leftrightarrow (\text{د})$$

$$= (b + a) \cdot 1 = b + a = a + b$$

تمرین ۴۰۴

$$\begin{aligned} x'yz + x'yz' + xy'z + xy'z' &= x'y(z+z') + xy'(z+z') \quad .۷ \\ &= x'y \cdot ۱ + xy' \cdot ۱ \\ &= x'y + xy' \end{aligned}$$

$$xy + zw + x + (x+z'+w)' = (x+xy) + zw + x'zw \cdot ۱ \quad .۸$$

بنابر قانونهای دمورگن

$$\text{بنابر قانون جذب} \quad = x + zw(1+x') \quad .۹$$

$$\text{بنابر قضیه ۵} \quad = x + zw \quad .۱۰$$

$$f(x, y, z) = xx' + yy' + zz' \quad .۱۱$$

تمرین ۴۰۵

$$\begin{aligned} (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z &= (x \leftrightarrow y)z + (x \leftrightarrow y)'z' \quad .۱۲ \\ &= (xy + x'y')z + (xy + x'y')'z' \\ &= (xy + x'y')z + (x' + y')(x + y)z' \\ &= xyz + x'y'z + x'yz' + xy'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) &= x(y \leftrightarrow z) + x'(y \leftrightarrow z)' \\ &= x(yz + y'z') + x'(yz + y'z')' \\ &= x(yz + y'z') + x'(y' + z')(y + z) \\ &= xyz + x'y'z' + x'y'z + x'yz' \end{aligned}$$

$$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) \quad \text{از این دو} \quad .۱۳$$

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (yz' + y'z) \quad .۱۴ \\ &= x(yz' + y'z)' + x'(yz' + y'z) \\ &= x(yz')'(y'z)' + x'yz' + x'y'z \\ &= x(y' + z)(y + z') + x'yz' + x'y'z \\ &= xy'z' + xyz + x'yz' + x'y'z \\ &= (xy' + x'y)z' + (xy + x'y')z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x \oplus y)z' + (x' + y)(x + y')z \\
 &= (x \oplus y)z' + (xy' + x'y)'z \\
 &= (x \oplus y)z' + (x \oplus y)'z = (x \oplus y) \oplus z
 \end{aligned}$$

تمرين ۴۰۴

۳. اين درجريان برهان مسئله ۴، تمرين ۳۰۴ اثبات شده است.

$$C = xyz + xyz' + xy'z + x'y'z \quad .4$$

بنابر قسميه ۳

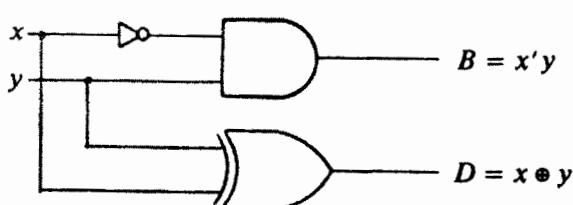
$$\begin{aligned}
 &= xyz + xyz + xyz + xyz' + xy'z + x'y'z \\
 &= (xyz + xyz') + (xyz + xy'z) + (xyz + x'y'z) \\
 &= xy(z + z') + xz(y + y') + yz(x + x') \\
 &= xy \cdot 1 + xz \cdot 1 + 1 \cdot yz \\
 &= xy + xz + yz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= xyz + xyz' + xy'z + x'y'z \\
 &= xy(z + z') + (xy' + x'y)z \\
 &= xy + (xy' + x'y)z
 \end{aligned}$$

$$D = (x' + y')(x + y) \quad , \quad B = x'y \quad (الف)$$

$$D = x'y + xy' = x \oplus y \quad , \quad B = x'y \quad (ب)$$

(ب). ۶



$$B = x'y'z + x'yz' + x'yz + xyz \quad (الف) .7$$

$$D = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$$

توجه کنید که تابع D با تابع S مسئله ۳ یکی است.

$$B = x'(y'z + yz') + (x' + x)yz \quad (\text{ب})$$

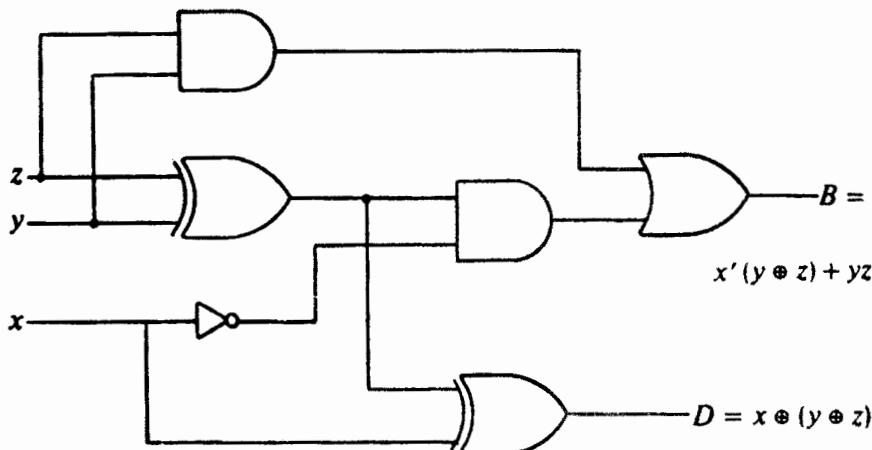
$$= x'(y \oplus z) + yz$$

$$D = ۳ \text{ مسئله } S$$

$$= (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

بنابر مسئله ۴، تمرین ۳۰۴

.۹



تمرین ۱۰۵

۱. برخلاف حکم، فرض کنید Y نامتناهی باشد. چون $X \rightarrow Y \rightarrow g^{-1}$ یک تنازنی به یک است، پس بنابر قضیه ۲، مجموعه X باید نامتناهی باشد، که یک تناقض است. بنابراین، Y متناهی است.

۲. گیریم $f: A \rightarrow A$ یک انژکسیون باشد به قسمی که $f(A) \neq A$. آنگاه تابع $g: A \times A \rightarrow A \times A$ که با $(f(x), f(y)) = g(x, y)$ تعریف شده است، یک به یک است، و $g(A \times A) \neq A \times A$. ازاین‌رو، $A \times A$ نامتناهی است.

۳. اگر $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ نامتناهی باشد، آنگاه بنابر مسئله ۱۱، $A - B$ نامتناهی است. فرض کنیم $A - B$ نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه A ، که یک فوق مجموعه مجموعه نامتناهی $A - B$ است، نامتناهی می‌شود. عکس این مطلب درست نیست، زیرا اگر $A = B$ یک مجموعه نامتناهی باشد آنگاه \emptyset متناهی است.

تمرین ۲۰۵

۴. گیریم $f: X - Y \sim Y - X$. آنگاه تابع $g: X \rightarrow Y$ را که با

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X - Y \\ x & x \in X \cap Y \end{cases}$$

تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. چون

$$Y - X = Y - (X \cap Y) \quad X - Y = X - (X \cap Y)$$

پس تابع $g: X \rightarrow Y$ دوسویی است. از این‌رو $X \sim Y$.۵. گیریم برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، $f_\gamma: X_\gamma \sim Y_\gamma$. تابع $f: \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$ را با

$$f(x) = f_\gamma(x) \quad x \in X_\gamma$$

تعریف کنید. آنگاه چون $\{X_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ و $\{Y_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌های مجموعه‌های مجزا هستند، f یک تابع دوسویی خواهد تعریف است.۶. تابع $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ که هر زیرمجموعه B از A را به تابع مشخصه B ، $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ می‌برد آشکارا یک دوسویی است.۷. (۱) نخست ثابت می‌کنیم که h یک به یک است: گیریم $y \in Y$ و x به قسمی باشد که $h(x) = h(y)$ ، یعنی

$$\{1, 2, \dots, g(x)\} \cap g(Y) = \{1, 2, \dots, g(y)\} \cap g(Y) \quad (*)$$

نشان خواهیم داد که $(y) = g(x) = g(y)$ و درنتیجه $y = x$. زیرا اگر چنین نباشد بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $(y) < g(x) < g(y)$ ، آنگاه تعداد عناصر مجموعه سمت چپ $(*)$ حداقل یکی از تعداد عناصر مجموعه سمت راست $(*)$ کمتر است؛ زیرا اگر $(y) < g(x) < g(y)$ ، مجموعه سمت چپ یک زیرمجموعه سمت راست است، و عنصر $(y) \in g$ در مجموعه سمت راست است اما در مجموعه سمت چپ نیست. این تناقض نشان می‌دهد که $(y) = g(x) = g(y)$ و از این‌رو $y = x$.

(۲) حال نشان می‌دهیم که h برشا است: زیرا اگر چنین نباشد، آنگاه یک $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که $(Y) \neq h(n_0)$. بدون از دست دادن کلیت، گیریم n_0 کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت باشد. آنگاه یک $y \in Y$ وجود دارد به قسمی که $h(y) = n_0$ (بدراحتی می‌توان نشان داد که $1 \neq n_0$) گیریم

$$y_1 = \min \{g(z) | g(z) > g(y), z \in Y\}$$

نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} h(y_1) &= \{1, 2, \dots, g(y_1)\} \cap g(Y) \\ &= (n_1 - 1) + 1 = n_1 \end{aligned} \quad (**) \quad \text{تعداد عناصر } (Y) \text{ می‌شود.}$$

ذیرا

$$\{1, 2, \dots, g(y_1)\} \cap g(Y) = [\{1, 2, \dots, g(y_1)\} \cap g(Y)] \cup \{g(y_1)\}$$

نتیجه $(**)$ فرض قبلی $h(Y) \neq n_1$ را نقض می‌کند. بنابراین h پوشان است.

تمرین ۳۰۵

۱. گیریم $f: A \sim N$ و $g: B \sim N$ آنگاه تابع $h: A \times B \rightarrow N \times N$ که با $h(x, y) = (f(x), g(y))$ تعریف می‌شود، یک دوسریست. از این‌رو، $A \times B \sim N \times N$ شمارای نامتناهی است. درنتیجه، بنابر قضیه ۱۰، $A \times B \sim N \times N$ شمارای نامتناهی است.

۲. هر عدد گویا را به صورت یکتای p/q ، $p \in Z$ ، $q \in N$ ، که در آن p/q و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p و q یک است، نشان‌خواهیم داد. آنگاه تابع $f: Q \rightarrow Z \times N$ که با $f(p/q) = (p, q)$ تعریف می‌شود، یک انژکسیون است. بدینهی است که $Z \times \{1\} \subseteq f(Q) \subseteq N \times N$. پس بنابر قضیه ۸، $f(Q)$ شمارای نامتناهی و در نتیجه Q شمارای نامتناهی است.

۳. گیریم \mathcal{C} مجموعه‌ تمام دایره‌هایی در صفحه دکارتی باشد که شعاع و هر دو مختصه مرکز آنها گویا باشند. تابع $f: \mathcal{C} \rightarrow Q \times Q \times Q$ که با $f(c) = (x, y, z)$ داشته باشد، که با x, y, z شعاع آن است، درنظر بگیرید. تعریف می‌شود و $f(x, y)$ مرکز دایره \mathcal{C} است. واضح است که f یک انژکسیون است. بنابر مثال ۵، $Q \sim N$ و درنتیجه بنابر قضیه ۱۰، $Q \times Q \times Q \sim N \times N \times N \sim N \times N \sim N$ شمارای از مجموعه نامتناهی نامتناهی شمارای $Q \times Q \times Q$ است، پس بنابر قضیه ۸، $f(\mathcal{C})$ شمارای نامتناهی است. از این‌رو، \mathcal{C} شمارای نامتناهی است.

۴. گیریم $A_1 = B_1$ و برای هر $k \in N$ ، $A_k = B_{k+1} - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$. آنگاه $\{A_k | k \in N\}$ یک خانواده شمارای نامتناهی از مجموعه‌های شمارای مجزا است. به علاوه، $A_1 = B_1 = \bigcup_{k \in N} B_k$ و $A_k = \bigcup_{l \in N} B_k$ شمارای نامتناهی است. با استفاده از نتیجه قضیه ۱۰، $A_k = \bigcup_{l \in N} B_k$ نیز شمارای نامتناهی است.

۵. برای هر $k \in N$ ، گیریم A_k مجموعه تمام چندجمله‌ایهای

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

با ضرایب صحیح و $0 \neq a_k$ باشد. آنگاه هر A_k شمارای نامتناهی است، و بنابر نتیجه قضیه ۱۵ $\bigcup_{k \in N} A_k$ شمارای نامتناهی است.

۱۲. گیریسم A یک مجموعه شمارای نامتناهی، و برای هر A_k ، $k \in N$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی A ، با دقیقاً k عنصر، باشد. آنگاه برای هر $k \in N$

$$A_k \sim N \times N \times \dots \times N \quad (k \text{ بار})$$

$$\sim N \times N \times \dots \times N \quad (1-k \text{ بار})$$

$$\sim N$$

بنابر نتیجه قضیه ۱۵، مجموعه $\bigcup_{k \in N} A_k$ ، که شامل تمام زیرمجموعه‌های متناهی و غیرنهی A است، شمارای نامتناهی است.

تمرین ۴.۵

۴. به بران خلفت، فرض کنید که مجموعه تمام اعداد ناگو یا بین ۰ و ۱ شمارای نامتناهی است. چون مجموعه تمام اعداد گویای بین ۰ و ۱ شمارای نامتناهی است، اجتماع این دو مجموعه، که مجموعه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را تشکیل می‌دهد، باید شمارای نامتناهی باشد. این قضیه ۱۲ را نقض می‌کند. بنابراین، مجموعه تمام اعداد ناگویا بین ۰ و ۱ ناشمار است.

$$4. \quad S^1 \sim [0, 2\pi] \sim R$$

۱۱. $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ ناشمار است، پس بنابر مسئله ۱۰ $A - B = B - A$ ناشمار است. فرض کنید $A - B$ ناشمار باشد، پس A به عنوان یک فوق مجموعه آن ناشمار است. عکس این مطلب درست نیست.

تمرین ۱.۶

$$1.6. \quad \circ = \text{card } \emptyset, \text{ card } N, \text{ card } R$$

۵. بل.

تمرین ۴.۶

۶. گیریم a یک عدد اصلی تر از مجموعه A مجموعه‌ای باشد که $\text{card } A = a$. آنگاه A یک مجموعه نامتناهی است، که با توجه به قضیه ۱۱ فصل ۵، شامل یک زیرمجموعه $\text{card } N \leq a$ است. یعنی $N \sim B \subseteq A$ ، که نشان می‌دهد

۷. مجموعه‌های B و C را در نظر بگیرید. چون $C \sim A \subseteq B$ و $B \sim B \subseteq C$ ، پس بنابر قضیه شرودر-برنشتاین $C \sim B$ و $A \sim C$. از $C \sim B$ و $A \sim C$ نتیجه می‌شود که $A \sim B$.

تمرین ۳.۶

۲. گیریم B . تابع $f : A \rightarrow B$ ، تابع $f^* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ را، که با $f^*(A) = f(A)$ برای تمام $X \in \mathcal{P}(A)$ تعریف شود، برقرار می‌کند. چون f دوسویی است، پس f^* نیز هست. بنابراین، $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

۳. به برهان خلف فرض کنید که یک مجموعه شمارای نامتناهی A وجود دارد که مجموعه توانی آن، $\mathcal{P}(A)$ شمارای نامتناهی است. آنگاه $\text{card } A = \text{card } \mathcal{P}(A)$ ، که با قضیه کانتور (قضیه ۲) متناقض است.

۵. اگر یک مجموعه \mathcal{U} شامل تمام مجموعه‌ها وجود می‌داشت، آنگاه باید نابرابر $\text{card } \mathcal{U} > A$ برای هر مجموعه A درست باشد. اما مطابق با قضیه کانتور، $\text{card } \mathcal{U} < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{U})$ که با نابرابر قبلی در تناقض است. بنابراین مجموعه تمام مجموعه‌ها وجود ندارد.

تمرین ۴.۶

۵. چون $(0, 1) \sim (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{R} \sim (0, 1) \cup (1, 2) \subseteq (0, 1)$ ، پس بنابر قضیه شرودر-برنشتاین داریم $\mathbb{R} \sim (0, 1) \cup (1, 2)$ ، که نشان می‌دهد $c + c = c$.

۸. مثال نقیض: $\text{card } \mathbb{N} = 3 + \text{card } \mathbb{N}$ ، اما $3 \neq 2$.

تمرین ۵.۶

۳. مثال نقیض: گیریم $x = z = \aleph_0$ ، $y = 1$. آنگاه $y < x$ ، اما $xz = yz = \aleph_0$. آنگاه $y < z$ ، اما $z = \aleph_0$. (مثال ۵ (ج)).

۹. مثال نقیض: $\text{card } \mathbb{N} = 1 \cdot \text{card } \mathbb{N}$ ، اما $1 \neq 2$.

تمرین ۶.۶

۵. برای هر $n \geq 2$ ، بنابر قضایای ۸ و ۱۰ عبارت $\aleph_0^{n^{\aleph_0}} = \aleph_0^{\aleph_0^n} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0$ داریم
 $c = 2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$
 $\therefore 2^{\aleph_0} = c = \aleph_0^{\aleph_0}$ پس

۸. بنابر مثال ۶ داریم $c \leqslant c^c = c \cdot c \leqslant c^c$. از این رو $c \leqslant c^c$.

تمرین ۷.۶

۹. گیریم H نمایانگر فضای هیلبرت کلاسیک باشد. آنگاه بنابر قضایای ۸ و ۱۰ داریم

$$c \leqslant \text{card } H \leqslant c^{k_0} = (2^{k_0})^{k_0} = 2^{k_0 \cdot k_0} = 2^{k_0} = c$$

از این رو $\text{card } H = c = \text{card } R$

۱۰. مجموعه نقاط مشبکه‌ای R^{k_0} بنابر مسئله ۵ تمرین ۶.۴ دارای عدد اصلی c^{k_0} است، و $\text{card } R^{k_0} = c^{k_0} = c$ در مسئله ۲ بالا نشان داده شده است.

۱۱. عدد اصلی مجموعه تمام توابع با یک متغیر حقیقی که فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کند، 2^c است، و عدد اصلی مجموعه تمام توابع حقیقی با n متغیر حقیقی، c^n است، اما چون $c^c = c$ و $c^c = c^{k_0}$ ، داریم

$$c^{k_0} = c^c = (2^{k_0})^c = 2^{k_0 \cdot c} = 2^c$$

۱۲. از نتیجه مسئله ۴ بالا، داریم $f^c = f$ اگر و تنها اگر f ملاحظه می‌کنید که

$$f \leqslant f^c \leqslant f^{k_0} \leqslant f^c = (2^c)^c = 2^{c^c} = 2^c = f$$

تمرین ۱.۷

۱۳. می‌توانیم فرض کنیم که $B \neq \emptyset$ (زیرا اگر $B = \emptyset$ آنگاه $C = \emptyset$). مجموعه

$$\{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$$

یک افزار A تشکیل می‌دهد. بنابر اصل انتخاب، مجموعه $\{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$ یک مجموعه C از نمایشگرها دارد به قسمی که $C \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ برای هر $y \in B$ یک مجموعه تک عضوی است. بنابراین تحدید f به $f : C \rightarrow B$ ، $C : C \rightarrow B$ ، بیژکتیو است. از این رو $\text{card } A \geqslant \text{card } C = \text{card } B$

۱۴. گیریم $A_\gamma : \gamma \in \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$: g بنابر اصل انتخاب، یک تابع انتخاب باشد. آنگاه یک تابع $f : \Gamma \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ به صورت $f(\gamma) = g(A_\gamma) \in A_\gamma$ برای تمام $\gamma \in \Gamma$ وجود دارد. از این رو اگر $\Gamma \neq \emptyset$ آنگاه $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$.

تمرین ۲.۷

۱۵. گیریم \mathcal{G} مجموعه تمام زیرمجموعه‌های کلاً مرتب A باشد که شامل B هستند. \mathcal{G}

می تواند با رابطه مشمولیت، \subseteq ، مرتب شود. آنگاه برهانی همانند برهان قضیه ۲ در اینجا نتیجه می دهد که \mathcal{G} یک عضو ماکسیمال C ، $C \subseteq B \subseteq C$ دارد.

تمرین ۴.۷

۲. گیریم (A, \leqslant) یک مجموعه جزئی مرتب باشد، و مجموعه \mathcal{G} ، از تمام زیرمجموعه های کلی مرتب (A, \leqslant) بهویله \subseteq مرتب شده باشد. برای به کار بردن لم تصور درباره (\mathcal{G}, \subseteq) ، گیریم \mathcal{G} یک زنجیر در (\mathcal{G}, \subseteq) باشد، و $K = \bigcup_{C \in \mathcal{G}} C$. نشان خواهیم داد که $K \in \mathcal{G}$ و از این رو شامل یک کران بالا، برای \mathcal{G} خواهد بود. در واقع، اگر $x, y \in K$ ، آنگاه برای بعضی $D \in \mathcal{G}$ و $E \in \mathcal{G}$ $x \in D$ و $y \in E$. اما \mathcal{G} یک زنجیر در (\mathcal{G}, \subseteq) است؛ بنابراین $y \in D \subseteq E$ باشد. فرض کنید که $E \subseteq D$ ؛ آنگاه D کلی مرتب است، پس $y \leqslant x$ باشد. از این رو K زیرمجموعه کلی مرتب (A, \leqslant) است، پس $\mathcal{G} \subseteq K$. حال بنابر لم تصور (\mathcal{G}, \subseteq) یک عضو ماکسیمال دارد.

۳. گیریم R یک حلقه با عنصر یکتا ۱ باشد، و گیریم \mathcal{G} مجموعه تمام ایدال های سره R با \subseteq جزئی مرتب شده باشد. گیریم \mathcal{G} یک زنجیر در (\subseteq, A) باشد. آنگاه یک ایدال سره R است زیرا $I_1 \neq I_2 \in \mathcal{G}$ ، پس $I_1 \subseteq I_2$ یک کران بالای \mathcal{G} است. بنابر لم تصور، (A, \subseteq) یک عضو ماکسیمال دارد.

۴. گیریم V یک فضای برداری باشد، و \mathcal{G} ، مجموعه تمام زیرمجموعه های مستقل خطی بردارها در V ، با \subseteq جزئی مرتب شده باشد. گیریم \mathcal{G} یک زنجیر در (\subseteq, A) باشد؛ آنگاه آشکارا مستقل خطی است و از این رو $K = \bigcup_{C \in \mathcal{G}} C$ یک کران بالای \mathcal{G} است. بنابر لم تصور، (A, \subseteq) یک عضو ماکسیمال دارد (که یک پایه V را تشکیل می دهد).

۵. گیریم \mathcal{F} با \subseteq جزئی مرتب شده باشد، و گیریم \mathcal{G} یک زنجیر در (\subseteq, \mathcal{F}) باشد. نشان خواهیم داد که \mathcal{G} یک کران بالا دارد. کافی بد طبیعی برای این کران بالا $K = \bigcup_{C \in \mathcal{G}} C$ است. گیریم $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک زیرمجموعه متناهی K باشد. $x_i \in C_i$ ، برای بعضی $C_i \in \mathcal{G}$ ، $i = 1, \dots, n$. اما چون \mathcal{G} یک زنجیر است، وجود دارد به قسمی که برای تمام n $C_i \subseteq C_j$ ، $i = 1, 2, \dots, n$. از این رو $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq C_j$ و در نتیجه $C_j \in \mathcal{F}$. بنابراین \mathcal{G} از این رو یک کران بالای \mathcal{F} است. بنابر لم تصور، (\mathcal{F}, \subseteq) یک عضو ماکسیمال دارد.

تمرین ۴.۸

۶. چون مجموعه \mathbf{Q} شمارای نامتناهی است، یک بیؤکسیون $\mathbf{N} \sim \mathbf{Q}$: f وجود دارد. رابطه \leqslant را روی \mathbf{Q} به صورت، $p \leqslant q$ اگر و تنها اگر در $f(p) \leqslant f(q)$ ، برای هر

p و q در \mathbf{Q} تحت ترتیب طبیعی اهداد طبیعی خوشتیپ می‌کنیم. چون (\mathbf{N}, \leqslant) خوشتیپ است، پس (\mathbf{Q}, \leqslant) نیز است.

۷. اگر (A, \leqslant) خوشتیپ باشد، آن‌ها را دنباله‌ای کیاً نزولی باشد، زیرا این یک زیرمجموعه بدون کوچکترین عنصر نیست. بسا ورون، فرض کنید که مجموعه کلاً مرتب (A, \leqslant) خوشتیپ نیست. آنگاه زیرمجموعه‌ای از A وجود دارد که کوچکترین عنصر ندارد. $a_1 \in B$ را انتخاب کیم. چون a_1 کوچکترین عنصر B نیست، می‌توانیم $a_2 \in B$ را چنان انتخاب کنیم که $a_2 > a_1$. بعدها را $a_3 \in B$ را می‌توانیم چنان انتخاب کنیم که $a_3 > a_2$. بسا ادامه این وضیعه یافته دنباله‌ای نامتناهی داریم $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

تمرین ۴۰۸

۰.۷

تمرین ۴۰۸

۴. گیریم $\beta \neq \gamma$ اما $\beta + \alpha = \omega = \gamma + \alpha$. $\beta = 1$ و $\gamma = 0$ می‌توانیم

۶. همان مثال مسئله ۴ بالا را به کار بریم. $\beta = 0$ و $\gamma = 1$ اما $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ اما $\beta = 0$ و $\gamma = 1$.

تمرین ۴۰۸

۴. گیریم $(\beta + \gamma)\alpha = \gamma\omega = \omega$. آنگاه $\beta = \gamma = 1$ و $\alpha = \omega$ اما

$$\beta\alpha + \gamma\alpha = \omega + \omega = \omega 2$$

بنابراین $(\beta + \gamma)\alpha \neq \beta\alpha + \gamma\alpha$

۸. گیریم $1 = \beta = 2$ و $\alpha = \gamma = \omega$. آنگاه $\beta\gamma = \omega \omega = \omega^2$

$$\alpha\gamma = \omega\omega = \omega^2 = \beta\gamma$$

تمرین ۵۰۸

۳. گیریم X یک مجموعه باشد. زیرا اصلی خوشتیپی، مجموعه X می‌تواند خوشتیپ باشد. گیریم $\{\leqslant\}$ روی X یک رابطه خوشتیپ است. $S = \text{ord}(X, \leqslant)$ بنا بر قضیه ۱۲، \leqslant خوشتیپ است. این رابطه کوچکترین عنصر منحصر به فرد، عدد ترتیبی آغازی X دارد.

فهرست نمادها

\sim	نیزه
\wedge	و
\vee	با
\rightarrow	اگر ... آنگاه
\leftrightarrow	اگر و تنها اگر، اگر و فقط اگر
$\equiv (\Leftrightarrow)$	هم ارز است با
\Rightarrow	نتیجه می دهد
\forall	برای هر ای اینها برای هر
\exists	و یکی دارد، برای بعضی
\therefore	نتیجه
$a \in A$	a عضو A است
$a \notin A$	a عضو A نیست
$\{x, y, \dots, z\}$	مجموعه متناهی از عناصر x, y, \dots, z
$\{x p(x)\}$	مجموعه تمام x هایی که $p(x)$ راست است.
\mathbb{N}	مجموعه تمام اعداد طبیعی
\mathbb{Z}	مجموعه تمام اعداد صحیح
\mathbb{Q}	مجموعه تمام اعداد کوپیا
\mathbb{R}	مجموعه تمام اعداد حقیقی
\mathbb{R}_+	مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت
$A \subseteq B$	A زیر مجموعه B است.

زیر مجموعه B نیست.	$A \not\subseteq B$
زیر مجموعه سره B است.	$A \subset B$
اپر مجموعه B است.	$A \supseteq B$
مجموعه تهی	\emptyset
اشتراك مجموعه های A و B	$A \cap B$
اجتماع مجموعه های A و B	$A \cup B$
مجموعه تواني A (مجموعه تمام زير مجموعه های A)	$\Phi(A)$
اشتراك مجموعه های C_γ ، که در آن $\gamma \in \Gamma$	$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$
اجتماع مجموعه های C_γ ، که در آن $\gamma \in \Gamma$	$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$
اشتراك مجموعه های C_n, \dots, C_2, C_1	$\bigcap_{k=1}^n C_k$
اجتماع مجموعه های C_n, \dots, C_2, C_1	$\bigcup_{k=1}^n C_k$
اشتراك مجموعه های A متعلق به خانواده \mathcal{F}	$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$
اجتماع مجموعه های A متعلق به خانواده \mathcal{F}	$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$
جفت مرتب عناصر b و a	(a, b)
حاصل ضرب دکارتی A و B	$A \times B$
حوزه رابطه \mathcal{R}	$\text{Dom}(\mathcal{R})$
نگاره \mathcal{R}	$\text{Im}(\mathcal{R})$
وارون رابطه \mathcal{R}	\mathcal{R}^{-1}
رابطه همانی روی X	Δ_X
رابطه همارزی	\mathcal{E}
رده همارزی که با x و y مشخص می شود	x/\mathcal{E}
مجموعه رده های همارزی x/y که در آن $x \in X$	X/\mathcal{E}
افراز مجموعه	Φ
رابطه همارزی القابی روی X با افراز Φ	X/Φ
تابع f از X به Y	$f: X \rightarrow Y$
تابع همانی روی X	$I_X: X \rightarrow X$
تابع مشخصه $A \subseteq X$ ، A	$\chi_A: X \rightarrow \{1, 0\}$
تابع $f: X \rightarrow Y$ یک تناظر یک به یک است.	$f: X \sim Y$
مجموعه تمام توابع از A به $\{1, 0\}$	2^A
مجموعه تمام توابع از A به B	B^A

عدد اصلی مجموعه A	$\text{card } A$
عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی	\aleph_0
عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی	c
عدد اصلی مجموعه تمام توابع از \mathbb{R} به \mathbb{R}	\mathfrak{f}
قطعه $\{a \in A \mid a < x\}$ از مجموعه خوشترتیب (A, \leq)	A_x
مجموعه‌های خوشترتیب (A, \leq) و (B, \leq') هم‌ریخت	$(A, \leq) \approx (B, \leq')$
ترتیبی هستند	
عدد ترتیبی (A, \leq)	$\text{ord}(A, \leq)$
عدد ترتیبی (\mathbb{N}, \leq)	ω

مراجع برگزیده

برای کسانی که می خواهند مطالعه بیشتری در نظریه مجموعه ها داشته باشند، کتابهای زیر را توصیه می کنیم:

۱. کتابهای تاریخی و فلسفی

- Benaceraf, Paul, and Hilary Putnam, eds. *Philosophy of Mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.
- Van Heijenoort, Jean, ed. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.
- Wilder, Raymond L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

۲. کتابهای مربوط به منطق

- Copi, Irving M. *Symbolic Logic*. 3rd ed. The Macmillan Company, 1976.
- Kleene, Stephen C. *Mathematical Logic*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

۳. کتابهای مربوط به نظریه مجموعه ها

- Fraenkel, Abraham A. *Set Theory and Logic*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.
- Halmos, Paul R. *Naïve Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.
- Hayden, Seymour, and John F. Kennison. *Zermelo-Fraenkel Set Theory*.

مراجع برگزیده ۲۱۹

- Charles E. Merrill Publishing Company, Columbus, Ohio, 1968.
- Monk, J. Donald. *Introduction to Set Theory*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1969.
- Pinter, Charles C. *Set Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1971.
- Suppes, Patrick. *Axiomatic Set Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.

۴. کتابهای مربوط به جبر بول و کاربردهای آن

- Boole, G. *An Introduction of the Law of Thought*. Dover Publications, Inc., New York, 1954.
- Mano, M. Morris. *Digital Logic and Computer Design*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1979.

واژه‌نامه انگلیسی-فارسی

absorption laws	قوانين جذب
admissible subset	زیرمجموعه پذیرفتی
aleph-null	الف- صفر
antichain	پاد زنجیر
antisymmetric relation	رابطه پادمنتقارن
associative laws	قوانين شرکت‌پذیری
axiom	اصل موضوع
– of cardinality	اصل موضوع اعداد اصلی
– of choice	اصل موضوع انتخاب
– of power sets	اصل موضوع مجموعه‌های توانی
– of specification	اصل موضوع تصریح
biconditional connective	رابط دوشرطی
biconditional statement	گزارة دوشرطی
binary variable	متغیر دوتایی
cardinal sum	مجموع اصلی
cardinal number	عدد اصلی
cardinal product	حاصلضرب اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی
characteristic function	تابع مشخصه
choice function	تابع انتخاب
complementation	متضادگیری

واژه‌نامه انگلیسی-فارسی ۲۲۱

conditional connective	رابطه شرطی
conditional statement	گزاره شرطی
congruence relation	رابطه همنهشتی
conjunction	عاطف، ترکیب عطفی
connective	رابط
constructive dilemmas	قياس ذو الوجهین موجب
contrapositive law	قانون عکس نقیض
countable set	مجموعه شمارا
counter example	مثال نقیض
deductive method	روش قیاسی
deductive reasoning	استدلال قیاسی
denumerable set	مجموعه شمارای نامتناهی
destructive dilemmas	قياس ذو الوجهین منفی
diagonal relation	رابطه قطری
disjunction	ترکیب فصلی
disjunctive syllogism	قانون دفع مؤلفه
distributive laws	قوانين پخش‌پذیری
domain of discourse	حوزه سخن
double negation	نفی مضاعف
equipotence	همتوانی
equivalence relation	راابطه همارزی
equivalence class	رده همارزی
exclusive disjunction	یا مانع جمیع
existential quantifier	سور وجودی
exportation law	قانون تفکیک دومقدم
finite cardinal number	عدد اصلی متناهی
finite character	مشخصه متناهی
formal proof of validity	برهان درستی
full adder	تام-فرونگر
full-subtractor	تام-تفاضلگر
gate	دریچه

generalized continuum hypothesis	فرض پیوستار تعمیم‌یافته
half-adder	نیم-افونگر
half-subtractor	نیم-تفاضلگر
Hausdorff maximality principle	اصل ماکسیمال هاوسدورف
identity function	تابع همانی
image	نگاره
implementation	پیاده‌سازی
implication	استلزم
inclusion function	تابع شامل
inclusive disjunction	یای شامل
induction hypothesis	فرض استقرا
inverse function	تابع وارون
inverse image	نگاره وارون
inverter	وارونگر
lattice point	نقطه شبکه‌ای
law	قانون
laws of idempotence	قانونهای خودتوانی
lexicographic ordering	ترتیب الفبایی
linearly ordered set	مجموعه مرتب خطی
linear order	ترتیب خطی
literal	لفظ
logically equivalent	هم ارز منطقی
logic circuit	مدار منطقی
logic gate	دریچه منطقی
mathematical induction	استقرا ریاضی
modus ponens	قياس استثنایی
modus tollens	قياس دفع
negation	نفی، نفی
nondenumerable set	مجموعه ناشمارا

order isomorphism	هر بینتی ترتیبی
ordinal number	عدد ترتیبی
ordinal sum	مجموع ترتیبی
partial order relation	رابطه ترتیب جزئی
partition	افراز
partially ordered set	مجموعه جزئی مرتب
preimage	پیشگاره
premises	مقدمات
propositional predicate	گزاره‌نما
quantification rules	قواعد تسویر
quantified statement	گزاره مسور
quantifier	سور
– negation	نیقیض سور
rules of inference	قاعده‌های استنتاج
set	مجموعه
– builder notation	نماد مجموعه‌ساز
simplification laws	قوانین اختصار
simplified truth table	جدول ارزش اختصاری
specification of sets	تصویح مجموعه‌ها
strictly decreasing function	تابع اکیداً نزولی
strictly increasing function	تابع اکیداً صعودی
successor	تالی
superset	ابرمجموعه
symmetric difference	تفاضل متقابل
tautology	راسنگو
total order relation	رابطه کلاً مرتب
totally ordered set	مجموعه کلاً مرتب
transcendental number	عدد متعالی
transfinite cardinal number	عدد اصلی تراماتاهی
transfinite induction	استقرای تراماتاهی

universal quantifier	سور عمومی
universal set	مجموعه جهانی
universe of discourse	عالم سخن
well-ordered set	مجموعه خوشترتیب
well-ordering principle	اصل خوشترتیبی

واژه‌نامه فارسی-انگلیسی

superset	ابر مجموعه
deductive reasoning	استدلال قیاسی
transfinite induction	استقرای تراومناھی
mathematical induction	استقرای ریاضی
implication	استلزم
well-ordering principle	اصل خوشتر تبیی
Hausdorff maximality principle	اصل ماکسیمال هاوسدورف
axiom	اصل موضوع
axiom of cardinality	— اعداد اصلی
axiom of choice	— انتخاب
axiom of specification	— تصریح
axiom of power sets	— مجموعه‌های توانی
partition	افراز
aleph-null	الف - صفر
formal proof of validity	برهان درستی
antichain	پاد زنجیر
implementation	پیاده‌سازی
preimage	پیشنهگاره
function	تابع
strictly increasing function	— اکیداً صعودی
strictly decreasing function	— اکیداً نزولی

choice function	انتخاب
inclusion function	شمول
characteristic function	مشخصه
inverse function	وارون
identity function	همانی
successor	تالی
lexicographic ordering	ترتیب الفبا
linear order	ترتیب خطی
disjunction	ترکیب عطفی \leftrightarrow عاطف
specification of sets	تصریح مجموعه‌ها
symmetric difference	تفاضل متقارن
full-subtractor	تمام-تفاضلگر
full-adder	تمام-افزونگر
truth table	جدول ارزش
simplified truth table	اختصاری
cardinal product	حاصلضرب اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی
domain of discourse	حوزه سخن
gate	دریچه
logic gate	دریچه منطقی
connective	رابط
biconditional connective	- دوشرطی
conditional connective	- شرطی
relation	رابطه
antisymmetric relation	- پادمتقارن
partial order relation	- ترتیب جزئی
diagonal relation	- قطری
total order relation	- کلاً مرتب
equivalence relation	- همازی
congruence relation	- همنهشتی

tautology	راستگو
equivalence class	رده هم ارزی
deductive method	روش قیاسی
admissible subset	زیر مجموعه پذیر قتنی
quantifier	سور
universal quantifier	- عمومی
existential quantifier	- وجودی
conjunction	عطف
universe of discourse	مه : ترکیب عطفی
cardinal number	عالیم سخن
transfinite cardinal number	عدد اصلی
finite cardinal number	- ترانهای
ordinal number	- متناهی
transcendental number	عدد ترتیبی
	عدد متعالی
hypothesis	فرض
induction hypothesis	- استقرا
generalized continuum hypothesis	- پیوستار تعمیم یافته
rules of inference	قاعده های استنتاج
law	قانون
transitive law	- متعدی
exportation law	- تفکیک دو مقدم
disjunctive syllogism	- دفع مؤلفه
contrapositive law	- عکس نقیض
laws of idempotence	- های خود توانی
quantification rules	قواعد تسویر
simplification laws	قوانين اختصار
distributive laws	قوانين پخش پذیری
absorption laws	قوانين جذب

associative laws	قوانين شرکت‌پذیری
modus ponens	قياس استثنایی
modus tollens	قياس دفع
destructive dilemmas	قياس ذوالوجهین منفی
constructive dilemmas	قياس ذوالوجهین موجب
biconditional statement	گزاره دوشرطی
conditional statement	گزاره شرطی
quantified statement	گزاره مسور
propositional predicate	گزاره‌نما
literal	لفظ
binary variable	متغیر دوتایی
complementation	متتمگیری
counter example	مثال نقيض
cardinal sum	مجموع اصلی
ordinal sum	مجموع ترتیبی
set	مجموعه
partially ordered set	- جزئی مرتب
universal set	- جهانی
well-ordered set	- خوشترتیب
countable set	- شمارا
denumerable set	- شمارای نامتناهی
totally ordered set	- کلای مرتب
linearly ordered set	- مرتب خطی
nondenumerable set	- ناشمارا
logic circuit	مدار منطقی
finite character	مشخصه متناهی
premises	قدمات
double negation	نفي ← نقيض
lattice point	نفي مضاعف
negation	نقطة مشبكه‌ای نقيض

واژه نامه فارسی- انگلیسی ۲۲۹

quantifier negation	نمایش سوز
image	نگاره
inverse image	نگاره وارون
set builder notation	نماد مجموعه‌ساز
half-subtractor	نیم-تفاضلگر
half-adder	نیم-فروزنگر
inverter	وارونگر
logically equivalent	هم ارز منطقی
equipotence	همتوانی
order isomorphism	هم ریختی ترتیبی
inclusive disjunction	یا شمول
exclusive disjunction	یا مانع جمع

فهرست راهنما

- ماکسیمال هاوسدورف	۱۵۶	ابر مجموعه	۳۸
- مجموعه تهی	۶۳	ابر مجموعه سره	۳۸
- مجموعه های توانی	۶۲، ۴۲	ارزش راستی گزاره	۳
اصول موضوع		استدلال درست	۳
اعداد اصلی	۱۳۲	استدلال قیاسی	۲۱
پثانو	۱۸۲	استدلال نادرست	۳
اعداد		استقرار	
- اصلی	۱۳۱	فرض -	۳۲
- ترتیبی	۱۶۹، ۱۶۸	ی ترامتاهی	۱۶۴
- جبری	۱۲۸	ی ریاضی	۳۲
- حقیقی	۴۱	استلزم	۱۷
- حقیقی مثبت	۴۱	اصل ← اصل موضوع	
- صحیح	۴۱	اصل موضوع	
- طبیعی	۴۱	اجتماع	۶۳
- گویا	۴۱	استقراری ترامتاهی	۱۶۴
- متعالی	۱۳۰	استقراری ریاضی	۱۸۲، ۳۲
- موهومی	۴۴	اعداد اصلی	۱۳۲
اعداد اصلی	۱۳۱	انتخاب	۱۵۲، ۱۲۵
اصول موضوع -	۱۳۲	تسورن (لم)	۱۵۷
- ترامتاهی	۱۳۳، ۱۳۱	تصریح	۶۲، ۴۱
توان -	۱۴۲	تعمیم	۶۳
جمع -	۱۳۸	توازی اقلیدس	۱۶۶
ضرب -	۱۴۰	جفت سازی	۶۳
قواعد -	۱۳۲	خوشت تیبی تسلیم	۱۶۵

- بورالی-فورتی ۱۳۳
 پارادوکس - ۱۶۸، ۱۸۱
 بول، ج. ۹۷
 تابع - ۱۰۲
 جبر - ۹۷
 بیت ۱۵۶
- پثانو، ج. ۱۸۵، ۱۸۲
 پاد زنجر ۱۵۷
 پارادوکس
 - بورالی-فورتی ۱۶۸، ۱۸۱
 - راسل ۴۱، ۳۷
 پخشیده‌یری
 - اجتماع نسبت به اشتراک ۴۵
 - اشتراک نسبت به اجتماع ۴۵
 - حاصلضرب دکارتی نسبت به اشتراک ۶۶
 - حاصلضرب دکارتی نسبت به متمم‌گیری ۶۶
 - ضرب نسبت به جمع (اعداد اصلی) ۱۴۱
 - ضرب نسبت به جمع (اعداد طبیعی) ۱۸۴
 - و نسبت به یا ۱۶
 - یا نسبت به و ۱۶
 پخشیده‌یری تعمیم یافته
 - اجتماع نسبت به اشتراک ۵۹
 - اشتراک نسبت به اجتماع ۵۹
 پیاده‌سازی ۱۰۷
 پیوستار ۱۳۹
- تابع ۷۷
 - اکیداً صعودی ۱۶۴
 - انتخاب ۱۵۲
- متنهای ۱۳۱، ۱۳۳
 مقایسه - ۱۳۳
 اعداد ترتیبی ۱۶۹، ۱۶۸
 - آغازی ۱۸۱
 - ترامتنهای ۱۶۸
 ترتیب - ۱۷۰
 جمع - ۱۷۳
 ضرب - ۱۷۶
 قواعد - ۱۶۹
 - متنهای ۱۶۸
 - نامتنهای ۱۶۸
 اعداد طبیعی ۴۱
 اصول موضوع پثانودر - ۱۸۲
 ترتیب - ۱۸۵
 جمع - ۱۸۲
 ضرب - ۱۸۴
 عدد ترتیبی مجموعه - ۱۶۹
 افزار ۷۳
 اقليدس ۱۱۷
 اکیداً صعودی ۱۶۴
 اکیداً نزولی ۱۶۲
 امکان منطقی ۶
 انژکسیون ۸۸
- برد تابع ۷۸
 برنشتاين ۱۳۳
 برهان ۱۳
 - خلف ۲۹
 - درستی ۲۶
 - درستی صوری ۲۸
 - غیرمستقیم ۲۹
 - مستقیم ۲۹
 بزرگترین کران پایین ۱۵۲
 بلوک سخت‌افزار ۱۵۶

- اثربخشی - ۱۶۸
- ترکیب
- توابع ۹۳
- دوشرطی ۱۱
- شرطی ۹
- عطفی ۵
- فصلی ۹
- تسوین ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۹، ۱۵۷
- لم - ۱۵۷
- تصویر مجموعه‌ها ۴۰
- تعریف استقرایی ۳۳
- تعلق ۳۸
- عدم - ۳۸
- تعیین
- فرضیه (مسئله) پیوستار ۱۴۹
- قانون پخشیدیری اجتماع نسبت به اشتراک ۵۹
- قانون پخشیدیری اشتراک نسبت به اجتماع ۵۹
- قانون دورگن (گزاره‌ها) ۳۵
- قانون دورگن (مجموعه‌ها) ۵۸
- تفاضل مقارن ۵۱
- تمام-تفاضلگر ۱۱۴
- تمام-فزونگر ۱۱۵
- تمامیت منطق تصویر ۱۴۹
- تناظر یک به یک ۸۹
- تناقض ۱۹
- توان عدد ۳۳
- جا به جایی
- اجتماع و اشتراک ۴۵
- جمع و ضرب اعداد اصلی ۱۴۱
- جمع و ضرب اعداد طبیعی ۱۸۴، ۱۸۳
- جا یگشت ۹۲
- اثربخشی ۸۸
- برد - ۷۸
- بول ۱۰۲
- بول اساسی ۱۰۴
- بیژکتیو ۸۹
- پوششی ۸۸
- تحدید - ۱۴۶
- ترکیب ۹۳
- تصویر ۸۷
- ثابت ۸۱
- جزء صحیح ۷۸
- دوسویی ۸۹
- سورژکتیو ۸۸
- شمولی ۸۳
- صعودی ۱۶۴
- مشخصه ۸۰
- وارون ۹۱
- همانی ۸۰
- یک به یک ۸۸
- تالی ۱۸۲
- تحدید تابع ۱۴۶
- تحدید رابطه ۷۲
- ترتیب
- اعداد ترتیبی ۱۷۰
- اعداد طبیعی ۱۸۵
- جزیی ۱۵۲
- خطی ۱۵۲
- کلی ۱۵۲
- ترتیبی
- اعداد - ۱۶۹، ۱۶۸
- جمع - ۱۷۳
- حساب - ۱۶۸
- ضرب - ۱۷۷، ۱۷۶
- همریخت - ۱۶۸

رابطه	۴، ۳	جبر بول	۹۷
— دوشرطی	۱۱، ۴	جدول ارزش	
— شرطی	۹، ۴	— تابع بول	۱۰۲
— نفی	۵، ۴	— ترکیب دو شرطی	۱۱
— و	۹، ۵، ۴	— ترکیب شرطی	۱۰
— یا	۹، ۴	— ترکیب عطفی	۵
رابطه	۶۸	— ترکیب فصلی	۹
— الفبایی	۱۷۶	— گزاره	۵
— انکاسی	۷۰	— نفی گزاره	۵
— پادمتقارن	۱۵۲	جفت مرتب	۶۴
تحدید	۷۲	جمع	
— ترتیب در اعداد طبیعی	۱۸۵	— اعداد اصلی	۱۳۸
— ترتیبی جزئی	۱۰۲، ۱۵۲	— اعداد ترتیبی	۱۷۳
— ترتیبی خطی	۱۵۲	— اعداد طبیعی	۱۸۲
— ترتیبی کلی	۱۵۲	— درجبر بول	۹۸
حوزه	۶۹	جمله خبری	۳
— قطری	۷۰	— دروغ	۳
— متعدی	۷۰	— راست	۳
— متقارن	۷۰	حالت منطقی	۶
— وارون	۹۰، ۶۹	حکم درست	۴۶
— هم ارزی	۷۰	حوزه رابطه	۶۹
— همانی	۷۰	حوزه سخن	۲۳
— همنهشتی	۷۰	خانواده مجموعه ها	۵۵
راسل، ب.	۱۴۹، ۶۱، ۶۲، ۶۳	خانواده مجموعه های اندیسدار	۵۵
پارادوکس	۶۱، ۴۸، ۳۷	خوشنویسی	
مجموعه	۶۱	— رابطه	۱۶۰
و ده هم ارزی	۷۳	مجموعه	۱۶۰
رقم نقلی	۱۱۰	خوشنویسی	
روش قطری	۱۲۹	اصل	۱۶۰
روش قیاسی	۲۱	دد کیند، ر.و.	۱۱۷
زبان صوری	۱۰	دریچه منطقی	۱۰۶
زنجبیر	۱۵۳		
پاد	۱۵۷		

زیرمجموعه ۳۸	۱۵۴	- دکارتی تعمیم یافته ۱۴۲، ۱۴۲
- پذیرفتی ۱۵۵	۳۴	ضریب نوچمله‌ای
- سره ۳۸		
- کلا" مرتب ۱۵۳		
ساده کردن یک گزاره مرکب ۷		
سورژکسیون ۸۸		
سور عمومی ۲۳		
سور وجودی ۲۴		
سینکتال ۱۰۶		
شرط کافی ۱۲		
شرط لازم ۱۲		
شرکتپذیری ۴۵		
- اشتراک ۴۵		
- ترکیب توابع ۹۴		
- جمع و ضرب اعداد اصلی ۱۴۱		
- جمع و ضرب اعداد ترتیبی ۱۷۸، ۱۷۹		
- جمع و ضرب اعداد طبیعی ۱۸۴، ۱۸۳		
- و ۱۶		
- یا ۱۶		
شروع ۱۳۳		
صعودی		
تابع - ۱۶۴		
تابع اکیدا - ۱۶۴		
ضرب		
- اعداد اصلی ۱۴۱		
- اعداد ترتیبی ۱۷۷، ۱۷۶		
- اعداد طبیعی ۱۸۴		
- درجبر بول ۹۸		
- دکارتی ۶۵	۶۵	تفکیک دو مقدم ۲۲
قاعدۀ تقیض سور ۲۴		
قاعدۀ‌های استنتاج ۲۱		
قانون		
- اختصار ۱۳		
- برهان خلف ۱۸		
- پخشپذیری ← پخشپذیری		
- پخشپذیری تعمیم یافته ← پخشپذیری		
تعمیم یافته		
- تعلی ۱۶		

- جا به جایی ← جا به جایی ۱۸
- جذب ۱۳
- جمع ۱۸۴، ۱۸۳
- حذف ۴۵، ۱۴
- خودتوانی ۱۰۰، ۴۱، ۱۵
- دمورگن تعیین یافته ۳۵، ۲۵
- دمورگن تعیین یافته ۵۸
- رفع مؤلفه ۱۳
- شرکتپذیری ← شرکتپذیری
- عطف ۲۸
- عکس نقیض ۱۴
- قیاس استثنای ۱۸
- قیاس دفع ۱۸
- قیاس ذوالوجهین منفی ۱۷
- قیاس ذوالوجهین موجب ۱۷
- نفی مضاعف ۱۴
- قضیه ۱۳
- اصل انتخاب ۱۶۱
- اصل خوشترتیبی تسلیم ۱۶۰
- اصل ماکسیمال هاووسدورف ۱۵۶
- تسون (لم) ۱۵۷
- دمورگن ۴۹، ۱۵
- دمورگن تعیین یافته ۵۸
- دوچمدهای ۳۴
- ساختنی ۱۶۶، ۱۵۸
- کانتور ۱۳۶
- وجودی ۱۶۶، ۱۵۸
- قطعه ۱۶۲
- سرمه ۱۶۲
- قیاسی
- استدلال - ۲۱
- روش - ۲۱
- کانتور، گنورگ ۱۳۷، ۱۱۷، ۶۲، ۶۱، ۱۳۶، ۱۳۹، ۱۳۳، ۱۲۹
- ماکسیمال
- لهمتسون ۱۵۷
- لطف ۱۰۳
- لهمتسون ۱۵۷
- عنصر - ۱۵۴
- گزاره ۳
- ازش راستی - ۳
- دروغ ۳
- دو شرطی ۱۱
- راست ۳
- راستگو ۱۳
- ساده ۴
- شرطی ۹
- مرکب ۴
- مسور ۲۴
- نفی - ۵
- نقیض - ۵
- نمایش - ۴
- گزاره‌نما ۲۲
- گودل، ل. ۱۴۹، ۱۶۶
- کران بالا ۱۵۴
- کوچکترین - ۱۵۴
- ی مجموعه ۱۵۴
- کران پایین ۱۵۴
- بزرگترین - ۱۵۴
- مجموعه ۱۵۴
- کوچکترین عنصر ۱۶۰
- کوچکترین کران بالا ۱۵۴
- کوهن، پ. ۱۵۰

- متدلی
رابطه - ۷۵
- متغیر دو تابی ۱۰۲
- متناهی
عدد ترتیبی - ۱۶۸
- مجموعه - ۱۱۷، ۱۱۶، ۱۳۸
- مجموعه ۳۷
- ابر - ۳۸
- اجتماع چند - ۵۶
- اجتماع دو - ۴۴
- اشتراک چند - ۵۷
- اشتراک دو - ۴۴
- تصربیح - ۴۰
- تک عنصری ۱۱۷
- تمام توابع از A به B ۱۴۳
- تمام مجموعه ها ۶۱، ۴۸
- توانی ۴۲، ۴۲
- تهی ۳۸
- جزوی مرتب ۱۵۲
- جهانی ۶۱، ۴۸
- خوشترتیب ۱۶۰
- راسل ۶۱
- شمارا ۱۲۳
- شمارای نامتناهی ۱۲۳
- کلاس مرتب ۱۵۲
- متناهی ۱۱۷، ۱۱۶، ۳۸
- مرتب خطی ۱۵۲
- ناشمارا ۱۲۸
- نامتناهی ۱۱۷، ۱۱۶، ۳۸
- نایش - ۳۸
- مجموعه های مجزا ۴۴
- مجموعه های همتوانی ۱۲۲
- مدار الکتریکی ۱۰۷، ۱۰۶، ۹۷
- مدار رقی ۱۰۷، ۱۰۴، ۹۷
- مدار منطقی ۱۰۶
- مرتب خطی
- مجموعه - ۱۵۲
- مسئله پیوستار ۱۳۷
- تعیین یافته ۱۴۹
- مشبکه ۱۵۹
- مفروضات ۲۶
- مقایسه اعداد اصلی ۱۳۳
- مقالات ۲۶
- مؤلفه ۶
- مینیمال
- عنصر - ۱۵۴
- مینیمم کردن تابع بول ۱۰۳
- نامتناهی
- عدد ترتیبی - ۱۶۸
- نتیجه ۲۶
- نزویلی
- اکیدا - ۱۲۶
- نظریه اصل موضوعی مجموعه ها ۳۷، ۳۷
- نهی گزاره ۵
- نقطه مشبکه ای ۱۲۸
- نقیض سازی سور ۲۲
- نقیض گزاره ۵
- نگاره ۶۹
- نماد مجموعه ساز ۴۱
- نمایش مجموعه ۳۸
- نمودار و ن ۵۲
- نیم-تفاضلگر ۱۱۴
- نیم-فرونگر ۱۱۵
- وارونگر ۱۰۶
- واینده، آ. ۶۱، ۱۴۹

عنصر -	۹۸	هالموس، پل	۶۲
همتوانی مجموعه‌ها	۱۴۲	هاوسدورف	۱۵۱، ۱۵۴، ۱۵۶، ۱۵۷
همریخت ترتیبی	۱۶۸		۱۵۸
همریختی ترتیبی	۱۶۸	هم ارز منطقی	۹
هیلبرت، د.	۱۴۸، ۱۴۹	هم ارزی	
یا شمول	۸	- دو تابع بول	۱۰۸
یا مانع جمع	۸، ۱۰۸	- دو گرارد	۱۴، ۹
یک به یک		رابطه -	۷۰
تابع -	۸۸	همانی	
تناظر -	۸۹	تابع -	۸۰
		رابطه -	۷۰

مرکز نشر دانشگاه
www.iup.ir



ISBN: 978-964-01-0462-0

9 789640 104620