۱

روش های منطق جدید.
- روش اصل موضوعی
- روش استنتاج طبیعی
- روش نموداری

۱- روش اصل موضوعی. این روش در اصل به کارهای ارسطو در منطق سنتی و به کارهای اقلیدس در هندسه بر می گردد. این روش، یک علم را بر پایه تعداد محدودی اصول موضوعه و قواعد استنتاج پی ریزی می کند.

مثال. افراد با چشم سبز رنگ، راشگلو هستند.
(برای اصول موضوعه)

مثال: اصول اقلیدس در هندسه

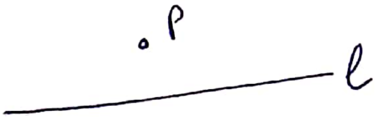
۱- از هر دو نقطه متمایز، یک و فقط یک خط می گذرد.

۲- هر پاره خط AB را می توان به اندازه پاره خط BE که با پاره خط CD قابل انطباق است ادامه داد.

۳- به ازای هر نقطه و هر پاره خط دلخواه، دایره ای به مرکز آن نقطه و شعاع مذکور وجود دارد.

۴- همه زوایای قائمه برابرند.

۵- (اصل توازی) به ازای هر خط و هر نقطه غیرواقع بر آن یک و تنها یک خط به موازات خط مذکور وجود دارد که از نقطه مورد نظر می گذرد.



معادل های دیگری از اصل توازی موجود است.

مثال برای قواعد استنتاج.

هر انسان فانی است.
سقراط انسان است.

سقراط فانی است.

مثال. عوزی‌ها وقتی هوا ابری باشد غشن هستند.
هم‌اکنون هوا ابری است و این چیز یک عوزی است.

پس این چیز غشن است.

درستی منطقی این استنتاج‌ها، مرهون شکل آن‌ها و مستقل از محتوای آن‌هاست. بنابراین برای بررسی یا ساختن ساختار منطقی، به مطالعه زبان نیاز داریم.

اولین سیستم اصل موضوعی منطق جدید در سال ۱۸۷۹ در کتاب "مفهوم‌نگاری" فرگه (Frege) معرفی شد. پس از آن توسط راسل، هیلبرت، زرملو... طراحی گردید شد.
(با پارادوکس راسل)

مثال. علی دوست رضا است.

منطق ارسطویی: علی | دوست رضا | است.
موضوع | مفهوم | رابط

منطق فرگه: علی | دوست | رضا | است.
موضوع | موضوع
دوست است
محمول

بنابراین فرگه روابط دوگانه و به همین ترتیب چندگانه را ایجاد کرد.

- این سیستم منطق (روش اصل موضوعی) با وجود اینکه بسیار محکم و با ارزش است ولی در کاربرد و آموزش دشوار است.

هر سیستم صوری مانند S را که با این روش بیان شده باشد «سیستم اصل موضوعی S» نامیده می‌شود.

۲- روش استنتاج طبیعی. گرهارت گنتزن (Gentzen) منطق‌دان آمریکایی و یاکوفسکی منطق‌دان لهستانی در سال ۱۹۳۴ مستقل از هم، این روش را به عنوان جایگزین شیوه اصل موضوعی ارائه دادند. هدف گنتزن این بود که تا حد ممکن منطق را به شیوه تفکر طبیعی انسان‌ها نزدیک کند. در این شیوه، منطق فقط بر پایه تعداد محدودی از قواعد استنتاج پی‌ریزی می‌شود. یادگیری این قواعد ساده و با طبیعت ذهن هماهنگی و سازگاری دارد.

هر سیستم مانند S را که با این روش ساخته شده باشد، «سیستم استنتاج طبیعی S» می‌نامیم.

۳- روش نموداری. این روش «روش معنایی» و «روش درختی» نیز مشهور است و در اواسط قرن بیستم توسط ریموند اسمولیان و ... پی‌ریزی شد و برای دانشمندان علوم کامپیوتر بسیار با ارزش است.

هر سیستم مانند S را که با این روش ساخته شود، «سیستم نموداری S» می‌نامیم.

اصطلاحات محوری در منطق جدید.

۱- زبان طبیعی و زبان صوری. زبان طبیعی، زبانی است که با آن سخن می‌گوییم. زبان صوری یک زبان علمی است. زبان صوری L دارای عناصر زیر است:

- فهرستی از نمادهای L با نام «واژگان».
- مجموعه‌ای معین از «قواعد ساخت» برای ترکیب نمادهای L به منظور بدست آوردن «فرمول‌ها».
- مجموعه‌ای معین به نام «تعاریف» برای معرفی نمادهای جدید بر مبنای نمادهای اولیه L.

زبان صوری منطق گزاره‌ها با زL و زبان صوری منطق محمولات با مL نمایش داده می‌شود.

۲- سیستم صوری. شامل زبان صوری L و دستگاه استنتاجی D است.

دستگاه استنتاجی D شامل دو بخش است:

- مجموعه‌ای معین از فرمول‌های L به نام «اصول موضوعه».
- مجموعه‌ای از «قواعد استنتاج» یا «قواعد انتقال» یا «قواعد اشتقاق» برای استخراج برخی از فرمول‌ها از فرمول‌های دیگر.

۳- ساختار نحوی (جمله‌شناسی یا syntax)
ساختار معنایی (معناشناسی یا semantic)

- در زبان‌شناسی، syntax بر رشته‌ای از قواعد، اصول و فرایندها که ساختار جمله‌ها را در زبان مشخص می‌کند دلالت دارد.

مثال: هوا آفتابی است. (چینش واژه‌ها براساس دستور زبان فارسی)

هوا است آفتابی. (چینش واژه‌ها براساس گرامر انگلیسی)

ساختار نحوی یک زبان صوری مانند L، مطالعه واژگان و روابط صوری بین فرمول‌های L و تفکیک آنها از دیگر عبارات L بدون توجه به معنای آنهاست.

- در ساختار معنایی L (semantic) مطالعه و بررسی روابط معین بین اشیاء زبانی و غیرزبانی و معنای هر یک از آنها می‌پردازد. مثال: هوا آفتابی است.

در معناشناسی مسائلی مانند "تعبیر"، "مدل" و "صدق پذیری" مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴- زبان موضوعی و فرازبان:

آن زبانی که مورد مطالعه است، "زبان موضوعی" و آن زبانی که مطالعه در آن صورت می‌گیرد، "فرازبان" نامیده می‌شود.

۵- منطق گزاره‌ها و منطق محمولات:

به دو استدلال زیر توجه کنید.

۱) اگر هر الف ب است، هر ج د است.
هر الف ب است.
―――――――
هر ج د است.

۲) هر الف ب است.
هر ب ج است.
―――――――
هر الف ج است.

در (۱)، درستی استدلال به اجزاء داخلی جملات وابسته نیست و عنصر اساسی مورد مطالعه در این استدلال‌ها جملات هستند نه اجزای آنها. (منطق گزاره‌ها یا جمله‌ها)

در (۲)، درستی استدلال به اجزای داخلی جملات اول و دوم وابسته است و جملات دارای سور، موضوع و محمول هستند. (منطق محمولات)

استنتاج طبیعی منطق گزاره‌ها (S_N). (گنتزن - ۱۹۳۴)

S_N
- L_{S_N}
  - V واژه‌ها
  - FR قواعد ساخت (formation rules)
  - Def تعاریف $= \phi$
- D deduction
  - A اصول (axioms) $= \phi$
  - R قواعد استنتاج (rules)
    - • قواعد اصلی
    - • قواعد فرعی

L_{S_N} یا زبان صوری S_N.

۱- واژه‌ها
- • گزاره‌نماها   P, Q, R, ...
- • ادات منطقی $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- • نشانه‌های نقطه‌گذاری   (,)

ادات منطقی $\sim$ ، $\wedge$ ، $\vee$ ، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ به ترتیب زیر خوانده می‌شوند:

$\sim$ ناقض - چنین نیست که

$\wedge$ عاطف - و

$\vee$ فاصل - یا

$\rightarrow$ شرط - اگر، آنگاه

$\leftrightarrow$ دوشرطی - اگر و تنها اگر

ممکن است $\rightarrow$ را با $\supset$ و $\leftrightarrow$ را با $\equiv$ نمایش دهیم.

۲- قواعد ساخت S_N. هر عضو از عناصر واژگان S_N یا زنجیره‌ای از آنها اصطلاحاً "یک عبارت" نامیده می‌شود. با استفاده از قواعد زیر می‌توان گفت که آیا یک عبارت S_N، یک فرمول در S_N هم هست یا نه.

FR1: هر گزاره‌نما یک فرمول است.

FR2. اگر φ یک فرمول باشد، $\sim\varphi$ نیز یک فرمول است.

FR3. اگر φ و ψ فرمول باشند، عبارات $(\varphi\wedge\psi)$ ، $(\varphi\vee\psi)$ ، $(\varphi\rightarrow\psi)$ و $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ نیز فرمول‌اند.

مثال:

$P, \sim P, \sim\sim\sim P, (P\rightarrow\sim Q), \ldots$

- به هر یک از P، Q، R، ... یک فرمول اتمی و به ترکیب آنها فرمول مولکولی یا گزاره مرکب می‌گویند.

- اگر فرمول $P\rightarrow Q$ را داشته باشیم، به فرمول‌های زیر، "نمونه جانشین" فرمول مزبور می‌گوییم:

$P\rightarrow P \qquad \sim Q\rightarrow\sim Q \qquad (R\rightarrow S)\rightarrow(P\vee Q)$

۳- تعاریف S_n تهی هستند.

تمرین های صفحه ۱۳ و ۱۴ کتاب.

دستگاه استنتاجی S_n: اصول موضوع S_n تهی است و قواعد استنتاج آن به دو دسته اصلی و فرعی تقسیم می‌شوند.

قواعد اصلی شامل قواعد "حذف" و "معرفی" برای $\sim$، $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ است. بنابراین ۱۰ قاعده حاصل می‌شود که به **قواعد اصلی استنتاج** معروفند. این ۱۰ قاعده در جدول صفحه بعد قرار دارند.

- برای آشنایی با نحوه عملکرد این قواعد، به تعاریف «استدلال» و «برهان» نیاز داریم.

۱- استدلال: اگر $\Sigma = \varphi_1 \dots \varphi_n$ مجموعه‌ای از فرمول های L_s و φ یک فرمول از L_s باشد، هر یک از دو فرم زیر یک «فرم استدلال» است.

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \quad \therefore \varphi \end{array} \qquad \text{و} \qquad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$$

به φ_1 تا φ_n **مقدمات** و به φ **نتیجه** می‌گوییم. این دو صورت را به شکل زیر هم می‌توان نوشت.

$$\begin{array}{l} \Sigma \\ \quad \therefore \varphi \end{array} \qquad \text{و} \qquad \Sigma \vdash \varphi$$

اگر در یک فرم استدلال، به جای φ، ψ فرمول اتمی یا مرکب قرار دهیم صورت حاصل، یک **استدلال** نامیده می‌شود.

مثال: با داشتن فرم استدلال $\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \quad \therefore Q \end{array}$ ، نمونه جانشین های زیر حاصل می‌شوند که استدلال هستند.

$$\begin{array}{l} P \rightarrow P \\ P \\ \quad \therefore P \end{array} \qquad \text{یا} \qquad \begin{array}{l} (P \wedge Q) \rightarrow R \\ P \wedge Q \\ \quad \therefore R \end{array} \qquad \dots$$

هر استدلال می‌تواند نمونه جانشین چند استدلال دیگر باشد.

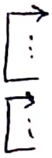
برهان در S_N. اگر Σ مجموعه‌ای از فرمول‌های L_1 به‌عنوان مقدمات باشد، هر **برهان** یا استنتاج در S_N، رشته‌ای متناهی از فرمول‌های L_1 در سطرهای متوالی شماره‌گذاری شده است به طوری که هر سطر از این رشته:

- یا یک مقدمه یا عضوی از Σ باشد.
- یا فرمولی است که از فرمول‌های سطر قبل با استفاده از قواعد استنتاج حاصل شده باشد.
- یا فرمولی است مفروض برای استفاده در قواعد استنتاجی که دارای فرض کمکی «ف» هستند.

برای هر سطر باید توضیحی نوشته شود. در نوشتن برهان ۲ نکته زیر مهم است.

۱- در مراحل یک برهان درصورتی که یک فرض بسته شود، در ادامه برهان نمی‌توان از عناصر درون حوزه بسته به صورت مستقل استفاده کرد.

۲- فقط ساختارهای زیر برای بستن یک فرض صحیح است.



ساختار زیر درست نیست.

درستی استدلال در S_N. یک استدلال با فرم کلی $\Sigma \therefore \varphi$ درصورتی «درست» نامیده می‌شود که برهانی در S_N وجود داشته باشد به طوری که φ آخرین عضو رشته باشد. چنین برهانی «**برهان φ از Σ در S_N**» نامیده می‌شود و به صورت مقابل قابل نمایش است. $\Sigma \vdash_{S_N} \varphi$

و به صورت زیر قابل بیان است:

φ از Σ در S_N اثبات‌پذیر است

φ نتیجه نحوی (صوری) Σ در S_N است.

جدول ۱ قواعد اصلی S_N را معرفی می‌کند.

جدول ۱ قواعد اصلی S_N

قواعد حذف (ح)	قواعد معرفی (م)
(ح ~): $\sim\sim\phi$ $\therefore \phi$	(م ~): ف $\to \phi$ $\vdots$ $\psi \wedge \sim\psi$ $\therefore \sim\phi$
(ح ∧): $\phi \wedge \psi$ $\therefore \phi$ ، $\therefore \psi$	(م ∧): ϕ ψ $\therefore \phi \wedge \psi$ ، $\therefore \psi \wedge \phi$
(ح ∨): $\phi \vee \psi$ ف $\to \phi$ $\vdots$ θ ف $\to \psi$ $\vdots$ θ $\therefore \theta$	(م ∨): ϕ $\therefore \phi \vee \psi$ ، $\therefore \psi \vee \phi$
(ح ⊃): $\phi \supset \psi$ ϕ $\therefore \psi$	(م ⊃): ف $\to \phi$ $\vdots$ ψ $\therefore \phi \supset \psi$
(ح ≡): $\phi \equiv \psi$ ϕ $\therefore \psi$ و $\phi \equiv \psi$ ψ $\therefore \phi$	(م ≡): ف $\to \phi$ $\vdots$ ψ ف $\to \psi$ $\vdots$ ϕ $\therefore \phi \equiv \psi$, $\therefore \psi \equiv \phi$

حل . برای استدلال‌های زیر برهان بیاورید .

①

Q

$P \equiv R$

$Q \rightarrow \sim\sim R$

$\therefore P \vee S$

برهان

۱. Q	مقدمه
۲. $P \equiv R$	مقدمه
۳. $Q \rightarrow \sim\sim R$	مقدمه
۴. $\sim\sim R$	۱و۳ (ح→)
۵. R	۴ (ح~)
۶. P	۵و۲ (ح≡)
۷. $P \vee S$	۶ (م∨)

---

②

$P \rightarrow Q$

R

$\therefore (\sim Q \rightarrow \sim P) \wedge R$

برهان

۱. $P \rightarrow Q$	مقدمه
۲. R	مقدمه
۳. $\sim Q$	فرض
۴. P	فرض
۵. Q	۴و۱ (ح→)
۶. $Q \wedge \sim Q$	۳و۵ (م∧)
۷. $\sim P$	۶تا۴ (م~)
۸. $\sim Q \rightarrow \sim P$	۷تا۳ (م→)
۹. $(\sim Q \rightarrow \sim P) \wedge R$	۲و۸ (م∧)

---

③

P

$\sim\sim Q$

$\therefore (P \wedge Q) \vee \sim Q$

برهان

۱. P	مقدمه
۲. $\sim\sim Q$	مقدمه
۳. Q	۲ (ح~)
۴. $P \wedge Q$	۳و۱ (م∧)
۵. $(P \wedge Q) \vee \sim Q$	۵ (م∨)

۹/ ④ $P \to Q$

$\therefore \sim Q \to \sim P$

۱.	$P \to Q$	مقدمه
۲.	$\sim Q$	ف
۳.	P	ف
۴.	Q	۱، ۳ (ح →)
۵.	$Q \wedge \sim Q$	۲، ۴ (م ∧)
۶.	$\sim P$	۳ تا ۵ (م ~)
۷.	$\sim Q \to \sim P$	۲ تا ۶ (م →)

---

⑤ $[(P \vee \sim Q) \vee R] \to [S \to (T \equiv U)]$

$(P \vee \sim Q) \to [(U \equiv V) \to W]$

$P \to [(T \equiv U) \to (U \equiv V)]$

P

$\therefore S \to W$

اثبات:

۱.	$[(P \vee \sim Q) \vee R] \to [S \to (T \equiv U)]$	مقدمه
۲.	$(P \vee \sim Q) \to [(U \equiv V) \to W]$	مقدمه
۳.	$P \to [(T \equiv U) \to (U \equiv V)]$	مقدمه
۴.	P	مقدمه
۵.	S	ف
۶.	$P \vee \sim Q$	۴ (م ∨)
۷.	$(P \vee \sim Q) \vee R$	۶ (م ∨)
۸.	$S \to (T \equiv U)$	۱، ۷ (ح →)
۹.	$T \equiv U$	۵، ۸ (ح →)
۱۰.	$(U \equiv V) \to W$	۲، ۶ (ح →)
۱۱.	$(T \equiv U) \to (U \equiv V)$	۳، ۴ (ح →)
۱۲.	$U \equiv V$	۹، ۱۱ (ح →)
۱۳.	W	۱۰، ۱۲ (ح →)
۱۴.	$S \to W$	(۵ تا ۱۳) (م →)

---

⑥ $P \to (Q \wedge \sim R)$

$(Q \vee R) \to S$

P

$\therefore S$

اثبات

۱.	$P \to (Q \wedge \sim R)$	مقدمه
۲.	$(Q \vee R) \to S$	مقدمه
۳.	P	مقدمه
۴.	$Q \wedge \sim R$	۱، ۳ (ح →)
۵.	Q	۴ (ح ∧)
۶.	$Q \vee R$	۵ (م ∨)
۷.	S	۲، ۶ (ح →)

⑦ $P \vee Q$

$P \to R$

$Q \to [S \to (T \to R)]$

$\therefore S \to (T \to R)$

برهان

۱. $P \vee Q$	مقدمه
۲. $P \to R$	مقدمه
۳. $Q \to [S \to (T \to R)]$	مقدمه
۴. S	ف
۵. T	ف
۶. P	ف
۷. R	(ح→) ۲، ۶
۸. Q	ف
۹. $S \to (T \to R)$	(ح→) ۳، ۸
۱۰. $T \to R$	(ح→) ۴، ۹
۱۱. R	(ح→) ۵، ۱۰
۱۲. R	(ح∨) ۱، ۶، ۷؛ ۸تا۱۱
۱۳. $T \to R$	(م→) ۵تا۱۲
۱۴. $S \to (T \to R)$	(م→) ۴تا۱۳

⑧ $(P \to \sim Q) \to R$

$\sim P \vee \sim Q$

$\therefore R$

برهان

۱. $(P \to \sim Q) \to R$	مقدمه
۲. $\sim P \vee \sim Q$	مقدمه
۳. $\sim P$	ف
۴. P	ف
۵. Q	ف
۶. $P \wedge \sim P$	(م∧) ۳، ۴
۷. $\sim Q$	(م~) ۵، ۶
۸. $P \to \sim Q$	(م→) ۴تا۷
۹. $\sim Q$	ف
۱۰. P	ف
۱۱. $P \wedge \sim Q$	(م∧) ۹، ۱۰
۱۲. $\sim Q$	(ح∧) ۱۱
۱۳. $P \to \sim Q$	(م→) ۱۰تا۱۲
۱۴. $P \to \sim Q$	(ح∨) ۲، ۳تا۸، ۹تا۱۳
۱۵. R	(ح→) ۱، ۱۴

⑨ $P \to Q$

$R \to S$

$T \to U$

$\therefore P \to P$

برهان

۱. P	فرض
۲. $P \to Q$	مقدمه
۳. $P \wedge (P \to Q)$	(م∧) ۱، ۲
۴. P	(ح∧) ۳
$P \to P$	(م→) ۱تا۴

استفاده از همه مقدمات ضروری نیست.

۲ـ۲ـ۱ قواعد فرعی استنتاج در S_N

این قواعد ، قواعدی هستند که خود براساس قواعد اصلی قابل اثباتند. قواعد مزبور در واقع برخی از استدلالهای درست در S_N هستند که نظر به کاربرد وسیعی که در منطق دارند به عنوان قاعده مورد استفاده قرار می‌گیرند. جدول ۲ مهمترین قواعد فرعی منطق گزاره‌ها را که نقش مهمی در سهولت بخشیدن به محاسبات منطقی ایفا می‌کنند به همراه اسامی و علایم اختصاری آنان معرفی می‌کند.

جدول ۲ قواعد فرعی S_N

ذوالوجهین مثبت (ذ.م)	$\begin{array}{l} (\phi \supset \psi) \wedge (\theta \supset \Delta) \\ \phi \vee \theta \\ \hline \therefore \psi \vee \Delta \end{array}$	رفع تالی (ر.ت)	$\begin{array}{l} \phi \supset \psi \\ \sim \psi \\ \hline \therefore \sim \phi \end{array}$
ذوالوجهین منفی (ذ.ن)	$\begin{array}{l} (\phi \supset \psi) \wedge (\theta \supset \Delta) \\ \sim \psi \vee \sim \Delta \\ \hline \therefore \sim \phi \vee \sim \theta \end{array}$	قیاس انفصالی (ق.ا)	$\begin{array}{l} \phi \vee \psi \\ \sim \phi \\ \hline \therefore \psi \end{array}$
نقض مضاعف (ن.م)	$\begin{array}{l} \phi \\ \hline \therefore \sim \sim \phi \end{array}$	قیاس شرطی (ق.ش)	$\begin{array}{l} \phi \supset \psi \\ \psi \supset \theta \\ \hline \therefore \phi \supset \theta \end{array}$
عکس (عک)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \supset \psi \\ \hline \therefore \sim \psi \supset \sim \phi \end{array}$	استلزام (اس)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \supset \psi \\ \hline \therefore \sim \phi \vee \psi \end{array}$
جذب (جذ)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \supset \psi \\ \hline \therefore \phi \supset (\phi \wedge \psi) \end{array}$	صدور (صد)	$\begin{array}{l} \therefore (\phi \wedge \psi) \supset \theta \\ \hline \therefore \phi \supset (\psi \supset \theta) \end{array}$
تکرار (تک)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \vee \phi \\ \hline \therefore \phi \end{array} \quad \begin{array}{l} \therefore \phi \wedge \phi \\ \hline \therefore \phi \end{array}$	تعادل (تع)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \equiv \psi \\ \hline \therefore (\phi \wedge \psi) \vee (\sim \phi \wedge \sim \psi) \end{array}$
جابه‌جایی (جا)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \wedge \psi \\ \hline \therefore \psi \wedge \phi \end{array}$ $\begin{array}{l} \therefore \phi \vee \psi \\ \hline \therefore \psi \vee \phi \end{array}$	دمورگان (دم)	$\begin{array}{l} \therefore \sim (\phi \wedge \psi) \\ \hline \therefore \sim \phi \vee \sim \psi \end{array}$ $\begin{array}{l} \therefore \sim (\phi \vee \psi) \\ \hline \therefore \sim \phi \wedge \sim \psi \end{array}$
پخش‌پذیری (پخ)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \wedge (\psi \vee \theta) \\ \hline \therefore (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta) \end{array}$ $\begin{array}{l} \therefore \phi \vee (\psi \wedge \theta) \\ \hline \therefore (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta) \end{array}$	شرکت‌پذیری (شر)	$\begin{array}{l} \therefore \phi \vee (\psi \vee \theta) \\ \hline \therefore (\phi \vee \psi) \vee \theta \end{array}$ $\begin{array}{l} \therefore \phi \wedge (\psi \wedge \theta) \\ \hline \therefore (\phi \wedge \psi) \wedge \theta \end{array}$

تمرین ۱۷ ص ۳۲

(۱۳) ۱۴

$(P \vee Q) \to (R \wedge S)$

$\sim P \to (T \to \sim T)$

$\sim R$

$\therefore \sim T$

برهان

۱.	$(P \vee Q) \to (R \wedge S)$	مقدمه
۲)	$\sim P \to (T \to \sim T)$	مقدمه
۳)	$\sim R$	مقدمه
۴.	P	ف
۵.	$P \vee Q$	۴ (∨م)
۶.	$R \wedge S$	۵، ۱ (→ح)
۷.	R	۶ (∧ح)
۸.	$R \wedge \sim R$	۷، ۳ (∧م)
۹.	$\sim P$	۸ـ۴ (∼م)
۱۰.	$T \to \sim T$	۹، ۲ (→ح)
۱۱.	T	ف
۱۲.	$\sim T$	۱۱، ۱۰ (→ح)
۱۳.	$T \wedge \sim T$	۱۲، ۱۱ (∧م)
۱۴.	$\sim T$	

تمرین ۳ ص ۳۳

(۱۴) استدلال

$R \vee V \to E \wedge H$

$E \to M$

$\sim M$

$\therefore \sim R$

برهان

۱.	$R \vee V \to E \wedge H$	مقدمه
۲.	$E \to M$	مقدمه
۳.	$\sim M$	مقدمه
۴.	$\sim E$	۳، ۲ (→ح)
۵.	$\sim E \vee \sim H$	۴ (∨م)
۶.	$\sim (E \wedge H)$	۵ (دم)
۷.	$\sim (R \vee V)$	۶، ۱ (رت)
۸.	$\sim R \wedge \sim V$	۷ (دم)
۹.	$\sim R$	(∧ح)

R: اگر سوقصد به رئیس جمهور اطلاع رسیده باشد.

V: اگر سوقصد به وزیر اطلاع رسیده باشد.

E: اعلامیه صادر می‌شود.

H: هیات دولت تشکیل می‌گردد.

M: رادیو به اطلاع مردم می‌رساند.

Scanned by CamScanner

قضیه در S_N. اگر Σ مجموعه‌ای از فرمول‌های L_S و φ نیز فرمولی از L_S باشد، $\Sigma \vdash_{S_N} \varphi$ نشان دهنده‌ی یک «استدلال درست در S_N» است و می‌گوییم: «φ نتیجه‌ی نحوی Σ در S_N است».

قضیه. فرمول φ قضیه‌ای در S_N است $\Longleftrightarrow$ φ بدون هیچ مقدمه‌ای و تنها با استفاده از قواعد استنتاج ثابت شود. به عبارت دیگر باید $\vdash_{S_N} \varphi$

اگر استدلال درستی در S_N مانند $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \vdash_{S_N} \psi$ مفروض باشد، «قضیه‌ی متناظر» با آن به صورت $\vdash_{S_N} \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots \to (\varphi_n \to \psi))$ است، چون این قضیه را می‌توان به فرم زیر اثبات کرد.

برهان.

1. φ_1 ف

2. φ_2 ف

$\vdots$

n. φ_n ف

$\vdots$

m. ψ

m+1. $\varphi_n \to \psi$ (m تا n) (→ م)

$\vdots$

m+n-1. $\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi))$ (m+n-2 تا 2) (→ م)

m+n. $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi)))$ (m+n-1 تا 1) (→ م)

قضیه‌ی استنتاج. اگر Σ مجموعه‌ای از فرمول‌ها و φ و ψ دو فرمول باشند، در این صورت اگر $\Sigma, \varphi \vdash \psi$، آنگاه $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$. در حالت خاص اگر $\varphi \vdash \psi$، آنگاه $\vdash (\varphi \to \psi)$.

قاعده‌ی معرفی قضیه. یک قضیه یا نمونه جانشینی از آن را می‌توان در هر سطری از برهان وارد کرد. معرفی قضیه را با (م. ق) نمایش می‌دهیم.

تمرین‌های ص ۴۶ و ص ۴۷

مثال. قضیه $\vdash (P\wedge Q)\to P$ را در نظر گرفته و برهان استدلال زیر را بنویسید.

استدلال $Q\to R$

$\therefore (Q\wedge R)\equiv Q$

برهان

مقدمه	۱. $Q\to R$
ف	۲. Q
(ح→) ۱ و ۲	۳. R
(م∧) ۲ و ۳	۴. $Q\wedge R$
(م→) ۲ تا ۴	۵. $Q\to(Q\wedge R)$
م. ق	۶. $(Q\wedge R)\to Q$
ف	۷. $Q\wedge R$
(ح→) ۶ و ۷	۸. Q
ف	۹. Q
(ح→) ۵ و ۹	۱۰. $Q\wedge R$
(م≡) ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰	۱۱. $(Q\wedge R)\equiv Q$

مثال. قضایای زیر را ثابت کنید.

الف) $\vdash_{SN} \sim(P\wedge\sim P)$ قانون تناقض

ب) $\vdash_{SN} P\vee\sim P$ قانون طرد شق ثالث

برهان

ف	۱. $P\wedge\sim P$
(ح∧) ۱	۲. P
(ح∧) ۱	۳. $\sim P$
(م∧) ۲ و ۳	۴. $P\wedge\sim P$
(م~) ۱ تا ۴	۵. $\sim(P\wedge\sim P)$

برهان

ف	۱. $\sim(P\vee\sim P)$
ف	۲. P
(م∨) ۲	۳. $P\vee\sim P$
(م∧) ۱ و ۳	۴. $(P\vee\sim P)\wedge(\sim(P\vee\sim P))$
(م~) ۲ تا ۴	۵. $\sim P$
(م∨) ۵	۶. $P\vee\sim P$
(م∧) ۱ و ۶	۷. $(P\vee\sim P)\wedge\sim(P\vee\sim P)$
(م~) ۱ تا ۷	۸. $\sim\sim(P\vee\sim P)$
(ح~) ۸	۹. $P\vee\sim P$

سیستم اصل موضوعی S_A

اولین سیستم اصل موضوعی منطق گزاره‌ها در سال ۱۸۷۹ توسط فرگه در کتاب "مفهوم‌نگاری" طراحی شد. در این قسمت از سیستم اصل موضوعی فرگه ـ هیلبرت استفاده می‌کنیم، در سال ۱۹۳۴ توسط هیلبرت و برنیز اصلاح شد.

- S_A
  - L_{S_A}
    - V واژگان
      - گزاره‌نماها $P, Q, \ldots$
      - ادات منطقی $\sim , \rightarrow$
      - نشانه‌های نقطه‌گذاری (,)
    - FR
      - FR1
      - FR2
      - FR3
    - Def تعاریف
      - $D_1 : (\varphi \wedge \psi) := \sim(\varphi \rightarrow \sim\psi)$
      - $D_2 : (\varphi \vee \psi) := (\sim\varphi \rightarrow \psi)$
      - $D_3 : (\varphi \equiv \psi) := \sim\big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \sim(\psi \rightarrow \varphi)\big)$
  - D
    - A اصول موضوعه
      - $A_1 : \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
      - $A_2 : (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \longrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$
      - $A_3 : (\sim\varphi \rightarrow \sim\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
    - R قواعد استنتاج: وضع مقدم

$$\begin{array}{l} \varphi \longrightarrow \psi \\ \varphi \\ \hline \therefore \psi \end{array} \qquad (و.م)$$

FR1 : هر گزاره‌نما یک فرمول است.

FR2 : اگر φ یک فرمول است آن‌گاه، $\sim\varphi$ یک فرمول است.

FR3 : اگر φ و ψ دو فرمول باشند، $\varphi \rightarrow \psi$ نیز یک فرمول است.

برهان در S_A: رشته‌ای متناهی از فرمول‌های L_S یک برهان در S_A است اگر هر رشته:

- یا یک اصل موضوعه باشد.
- یا یک مقدمه باشد.
- یا از تعریف فرمول‌های قبلی به دست آمده باشد.
- یا از فرمول‌های قبلی و قاعده وضع مقدم به دست آمده باشد.

- اگر φ آخرین عضو رشته فرمول باشد، این برهان را "برهان φ از Σ در S_A" می‌نامیم و می‌نویسیم $\Sigma \vdash_{S_A} \varphi$.

قضیه در S_A: فرمول φ از L_S یک قضیه در S_A نامیده می‌شود اگر تنها از اصول موضوعه در S_A قابل استنتاج باشد یعنی $\vdash_{S_A} \varphi$.

مثال - قضیه های زیر را در S_A اثبات کنید.

الف) $\vdash_{S_A} P\to P$

برهان
۱) $P\to((P\to P)\to P)$ (A_1)
۲) $(P\to((P\to P)\to P))\to((P\to(P\to P))\to(P\to P))$ (A_2)
۳) $(P\to(P\to P))\to(P\to P)$ (و.م) ۱ و ۲
۴) $P\to(P\to P)$ A_1
۵) $P\to P$ (و.م) ۳ و ۴

ب) $\vdash_{S_A} \sim P\to(P\to Q)$

برهان
۱) $((\sim Q\to\sim P)\to(P\to Q))\to(\sim P\to((\sim Q\to\sim P)\to(P\to Q)))$ A_1
۲) $(\sim Q\to\sim P)\to(P\to Q)$ A_3
۳) $\sim P\to((\sim Q\to\sim P)\to(P\to Q))$ (و.م) ۱ و ۲
۴) $(\sim P\to((\sim Q\to\sim P)\to(P\to Q)))\to((\sim P\to(\sim Q\to\sim P))\to(\sim P\to(P\to Q)))$ A_2
۵) $(\sim P\to(\sim Q\to\sim P))\to(\sim P\to(P\to Q))$ (و.م) ۳ و ۴
۶) $\sim P\to(\sim Q\to\sim P)$ A_1
۷) $\sim P\to(P\to Q)$ (و.م) ۵ و ۶

سیستم نموداری منطق گزاره‌ها. (S_T)

این سیستم اولین بار در ۱۹۵۵ در آثار یاکو هینتیکا و اورت بت دیده شد. در اینجا از روش هاجز (۱۹۷۷) استفاده می‌کنیم.

زبان S_T همانند زبان S_N است.

دستگاه استنتاجی S_T. همانند S_N، مجموعه اصل موضوعه تهی است ولی قواعد استنتاج آن **قواعد اشتقاق** نامیده می‌شوند و در جدول صفحه بعد ارائه می‌شود.

درستی استدلال در S_T. فرض کنید استدلال A داده شده باشد. مقدمات و نقیض نتیجه را در خطوط متوالی می‌نویسیم. با استفاده از قواعد اشتقاق، شاخه‌های لازم را رسم می‌کنیم. اگر در هر مسیر یا گذر، به تناقض رسیدیم، شاخه را با علامت ___ در زیر آن می‌بندیم. اگر همه شاخه‌ها بسته شد، استدلال درست است.

قضیه در S_T. فرمول φ را در صورتی که با قواعد اشتقاق و بدون هیچ فرض و مقدمه‌ای اثبات شود، «قضیه در S_T» نامیده می‌شود. کافیست ~φ را درنظر گرفته و با کشیدن نمودار نشان دهیم هر مسیر آن بسته است.

حتی اگر یک مسیر باز بماند، استدلال درست نیست.

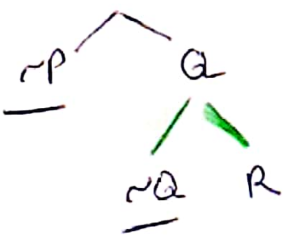
مثال. درستی استدلال‌های زیر را در S_T بررسی کنید.

✓ $P \to Q$

✓ $Q \to R$

R $\quad \therefore \sim P$

$\sim\sim P$



استدلال نادرست.

از ویژگیهای سیستم S_T نموداری بودن قواعد استنتاج آن است که به علت همین خصوصیت به قواعد مزبور « قواعد اشتقاق » گفته می‌شود.

جدول ۳ قواعد اشتقاق S_T

(DR۲): $\sim(\phi\wedge\psi)$ $\sim\phi \quad \sim\psi$	(DR۱): $\phi\wedge\psi$ ϕ ψ
(DR۴): $\sim(\phi\vee\psi)$ $\sim\phi$ $\sim\psi$	(DR۳): $\phi\vee\psi$ $\phi \quad \psi$
(DR۶): $\sim(\phi\supset\psi)$ ϕ $\sim\psi$	(DR۵): $\phi\supset\psi$ $\sim\phi \quad \psi$
(DR۸): $\sim(\phi\equiv\psi)$ $\phi \quad \psi$ $\sim\psi \quad \sim\phi$	(DR۷): $\phi\equiv\psi$ $\phi \quad \sim\phi$ $\psi \quad \sim\psi$
———	(DR۹): $\sim\sim\phi$ ϕ

درستی استدلال در S_T. اگر استدلال (۱) مفروض باشد.

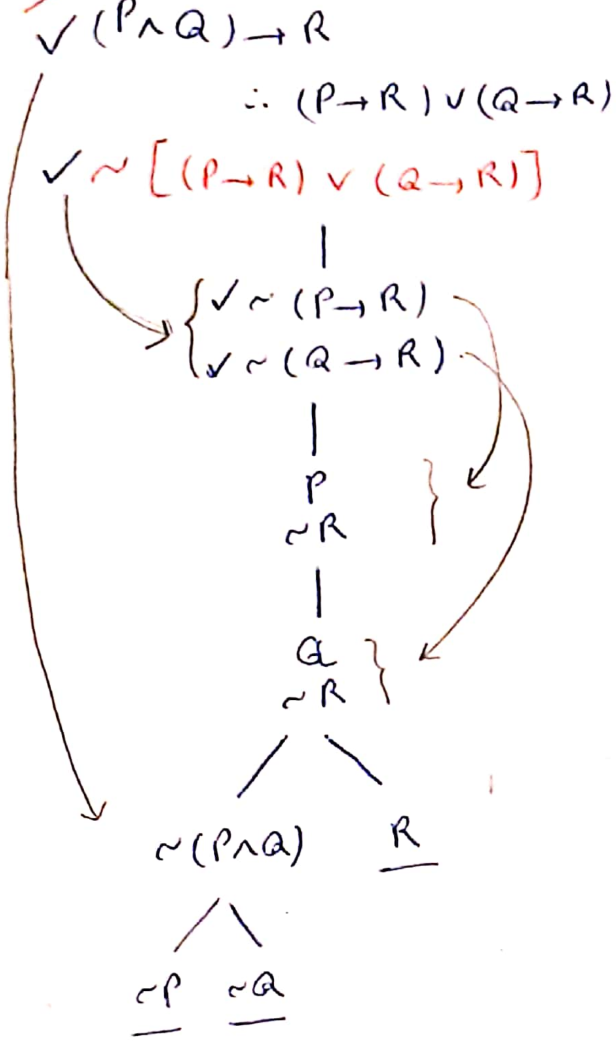
(۱): $P\supset Q$

$Q\supset R$

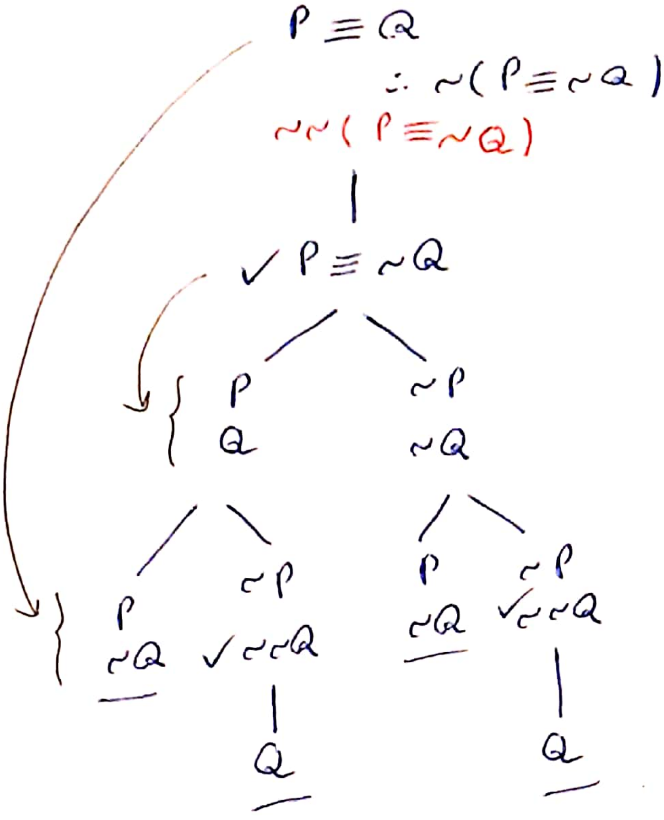
R

$\therefore\sim P$

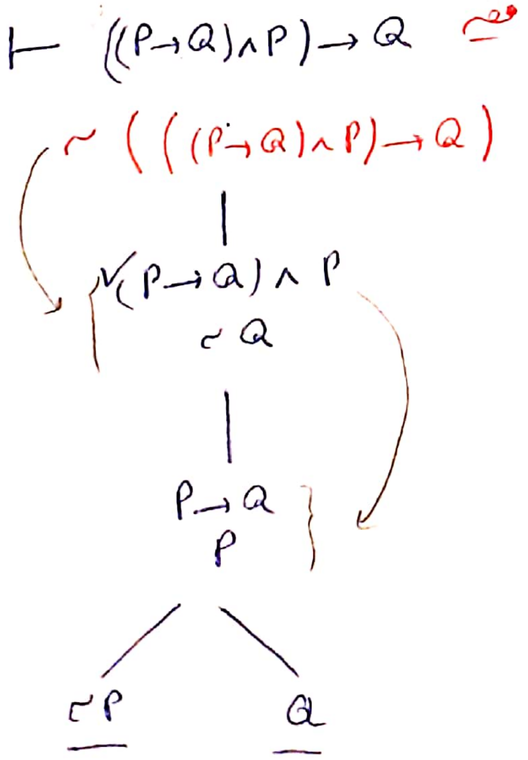
۱۷



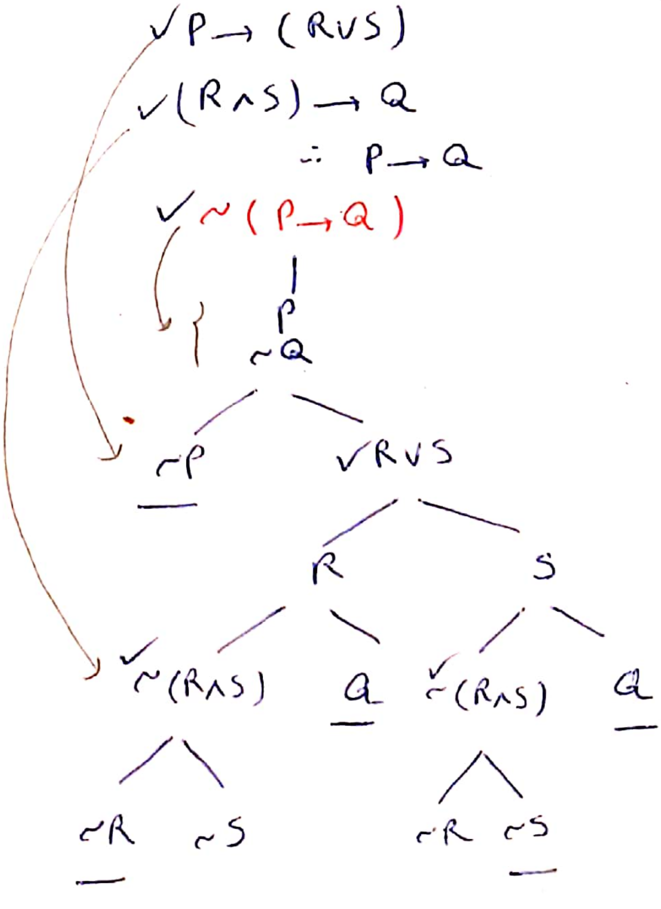
استدلال درست.



استدلال درست.



قضیه درست است.



استدلال نادرست است.

تمرین های ص ٤٥ و ص ٤٦