ساختار معنایی منطق گزاره‌ها.

منظور از ساختار معنایی یک زبان صوری مانند Ls، مطالعه و بررسی روابط معین بین فرمول‌ها (اشیاء زبانی) و اشیاء غیر زبانی است. برای این منظور باید به بررسی مفاهیم مهم معناشناختی یعنی تعبیر، صدق‌پذیری و مدل بپردازیم.

تعبیر Ls را با علامت I نشان می‌دهیم و منظور، نسبت دادن ارزش صدق (T) یا کذب (F) به هر جمله Ls است. (منطق گزاره‌ها، ۲ ارزشی است.)
این نسبت دادن توسط تابع تعبیر یا تابع ارزش‌دهی صورت می‌گیرد که آن را با V نمایش می‌دهیم.

صدق‌پذیری. اگر تابع ارزش‌دهی V در تعبیر I به فرمول φ از Ls ارزش T نسبت دهد، می‌گوییم: «در تعبیر I به φ ارزش T می‌دهد»، یا «تعبیر I، φ را صدق‌پذیر می‌کند».
این عبارات با علامت $\models_I \varphi$ نشان می‌دهیم. اگر I، φ را صدق‌پذیر نکند، آن را با $\not\models_I \varphi$ نمایش می‌دهیم.

قواعد معناشناسی Ls.

فرض کنید φ و ψ دو فرمول در Ls باشند. قواعد معناشناسی Ls به صورت زیر است:

RS_1: $\models_I \varphi \iff \varphi = T$.

RS_2: $\models_I \sim\varphi \iff \not\models_I \varphi$.

RS_3: $\models_I (\varphi\wedge\psi) \iff$ هم $\models_I \varphi$ و هم $\models_I \psi$.

RS_4: $\models_I (\varphi\vee\psi) \iff$ $\models_I \varphi$ یا $\models_I \psi$.

RS_5: $\models_I (\varphi\Rightarrow\psi) \iff$ $\not\models_I \varphi$ یا $\models \psi$.

RS_6: $\models_I (\varphi\equiv\psi) \iff$ یا ($\models_I \varphi$ و $\models_I \psi$) و یا ($\not\models_I \varphi$ و $\not\models_I \psi$).

جدول ارزش.

φ	ψ	$\sim\varphi$	$\varphi\wedge\psi$	$\varphi\vee\psi$	$\varphi\rightarrow\psi$	$\varphi\equiv\psi$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1
			$\times$	$+$	$\leq$	$=$

تمرین ص ۳۵ کتاب.

مثال: جدول ارزش گزاره های مرکب زیر را رسم کنید.

۱) $\sim P \equiv (P \to P)$

P	$\sim P$	$P \to P$	$\sim P \equiv (P \to P)$
۱	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱

۲) $(P \equiv Q) \to ((P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q))$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \equiv Q$	$P \wedge Q$	$\sim P \wedge \sim Q$	$(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$(P \equiv Q) \to ((P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge (\sim Q)))$
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱

$(P$	$\equiv$	$Q)$	$\longrightarrow$	$((P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$(\sim P$	$\wedge$	$\sim Q))$
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱

راستگو: فرمولی است که ستون آخر جدول ارزش آن فقط ۱ باشد. $\models P$

متناقض: فرمولی متناقض یا ناسازگار است که ستون آخر جدول ارزش آن فقط ۰ باشد.

هم ارزی: دو یا چند فرمول نسبت به هم «هم ارز» یا «معادل» نامیده می‌شوند هرگاه هر تعابیری که در فرمول اول صدق پذیر است، فرمول های دیگر را نیز صدق پذیر کند.

- برای تشخیص هم ارزی کافیست فرمول ها را با $\equiv$ ترکیب کرده و بررسی کنیم که جدول ارزش فرمول جدید یک راستگو هست یا نه.

تمرین ص ۵۶

تابع ارزش: ارزش هر فرمول از L را می‌توان از روی ارزش جمله‌های اتمی آن بدست آورد.
بنابراین هر فرمول منطق گزاره‌ها، یک «تابع ارزش» نامیده می‌شود.

به عنوان مثال $f(P,Q)=P\vee Q$ ، $g(P,Q)=P\wedge Q$ ، $h(P,Q)=P\to Q$ و ...

اگر یک فرمول اتمی مانند P در اختیار باشد (n=1) آنگاه می‌توان ۴ تابع ارزش ساخت که به بی‌نهایت فرمول مانند $P\to P$ ، $P\vee P$ ، $P\equiv(P\wedge P)$ ، .... نسبت داده می‌شود.

- بنابراین ۴ تابع ارزش بصورت زیر می‌توان به یک فرمول φ که فقط شامل یک جمله اتمی باشد بصورت زیر نسبت داد.

φ	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

اگر فرمول شامل دو گزاره اتمی P، Q باشد (n=2) آنگاه $(2)^{2^2}$ یعنی ۱۶ حالت می‌توان برای تابع ارزش در نظر گرفت.

اگر فرمول شامل n گزاره اتمی باشد $(2)^{2^n}$ تابع ارزش می‌توان برای آن در نظر گرفت.

مدل (الگو) L:

اگر فرمول φ با تعبیر I صدق‌پذیر شود ($\models_I \varphi$) در آن صورت تعبیر I را **مدلی** برای φ می‌نامند. اگر مجموعه Σ از فرمول‌های L مفروض باشند، در تعبیر I ممکن است بعضی از فرمول‌های Σ صادق و برخی دیگر کاذب باشند. اگر تعبیر I همه فرمول‌های مجموعه Σ را صدق‌پذیر کند، به تعبیر I، «مدل Σ» گفته می‌شود.

تعبیر I مدل S_A نامیده می‌شود اگر اصول موضوعه و قضایای S_A در تعبیر مذکور صادق باشند.

تعبیر I مدل برای S_T نامیده می‌شود اگر قضایای سیستم S_T در آن تعبیر صادق باشند.

اعتبار معنایی و نتیجه معنایی: مجموعه φ از فرمول‌های L را در نتیجه معنایی مجموعه Σ از فرمول‌های L می‌نامند $\Longleftarrow$ هر تعبیری که فرمول‌های Σ را صدق‌پذیر می‌کند فرمول φ را نیز صدق‌پذیر کند.
به این صورت نمایش می‌دهیم $\Sigma\models\varphi$

از آنجا که Σ می‌تواند مقدمات یک استدلال باشد، به استدلال فوق «دارای اعتبار معنایی» می‌گویند.

استدلال معتبر استدلالی است که، در کلیه حالاتی که مقدمات آن صادق باشند، نتیجه نیز صادق باشد.

- اعتبار یک استدلال را می‌توان از جدول ارزش نشان داد.

مثال. اعتبار استدلال مقابل را از طریق جدول ارزش نشان دهید.

$$P \to Q$$
$$R \to Q$$
$$\therefore (P \vee R) \to Q$$

P	Q	R	$P \to Q$	$R \to Q$	$P \vee R$	$(P \vee R) \to Q$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1

برای اینکار هم مقدمات و نتیجه استدلال را وارد جدول ارزش می‌کنیم. سطرهایی که هم مقدمات صادق هستند مشخص می‌کنیم. درصورتی که در همه آن خطوط، نتیجه هم صادق باشد، استدلال معتبر است.

تمرین ص ۶۰

با استفاده از قواعد استنتاج می‌توان درستی یک استدلال را نشان داد ولی نمی‌توان نادرستی آن را نشان داد. ولی با استفاده از جدول ارزش و در روش مبنایی می‌توان این کار را کرد. کافیست حداقل یک تعبیر پیدا کنیم که در آن مقدمات صادق و نتیجه کاذب باشد.

مثال. نشان دهید استدلال مقابل   است.

$$P \to Q$$
$$R \to S$$
$$P \vee S$$
$$\therefore Q \vee R$$

در تعبیر $(S=1, R=0, Q=0, P=0)$، مقدمات صادق و نتیجه کاذب است.

تمرینات ص ۶۲

فرانظریه منطق گزاره ها.

فرانظریه، مطالعه بعضی از ویژگی های یک سیستم است. یافته های فرانظریه، فراقضیه نامیده می شود.

مهمترین فراقضیه های منطق عبارتند از ۱- فراقضیه همعیاری (صحت) ۲- فراقضیه سازگاری ۳- فراقضیه تمامیت ۴- فراقضیه تصمیم پذیری.

استقراء ضعیف. نشان می دهیم عنصر ابتدایی دارای صفت φ است. در گام دوم با فرض درست بودن φ_n و با استفاده از مرحله قبل نشان می دهیم φ_{n+1} نتیجه می شود. در این صورت صفت φ برای همه اعضای مجموعه اعداد مورد نظر درست است.

$$\begin{array}{ll} \varphi_0 & \text{گام بنیادی} \\ \varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1} & \text{گام استقراء} \\ \hline (\forall n): \varphi_n \quad n \geq 0 & \text{نتیجه استقراء} \end{array}$$

صحت استقراء ضعیف را می توان با به کارگیری پی در پی قاعده (→ح) به صورت زیر نشان داد.

$$n=0 \quad \frac{\begin{array}{c}\varphi_0 \\ \varphi_0 \Rightarrow \varphi_1\end{array}}{\therefore \varphi_1} \quad \Big/ \quad n=1 \quad \frac{\begin{array}{c}\varphi_1 \\ \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2\end{array}}{\therefore \varphi_2} \quad \Big/ \quad \cdots \quad \Big/ \quad \frac{\begin{array}{c}\varphi_m \\ \varphi_m \Rightarrow \varphi_{m+1}\end{array}}{\therefore \varphi_{m+1}} \quad \Big/ \quad \cdots$$

استقراء قوی. در اینجا نشان می دهیم اگر همه اعضای گروه متناظر با اعداد طبیعی قبل از $n+1$، صفت φ را داشته باشند آنگاه $n+1$ نیز این صفت را دارد. $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \Rightarrow \varphi_{n+1})$ گام اول دقیقاً مانند حالت قبل است.

$$n=0 \quad \frac{\begin{array}{c}\varphi_0 \\ \varphi_0 \Rightarrow \varphi_1\end{array}}{\therefore \varphi_1} \quad \Big/ \quad n=1 \quad \frac{\begin{array}{c}\varphi_0, \varphi_1 \\ (\varphi_0, \varphi_1) \Rightarrow \varphi_2\end{array}}{\therefore \varphi_2} \quad \Big/ \quad \cdots \quad \Big/ \quad n \quad \frac{\begin{array}{c}\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \\ (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \Rightarrow \varphi_{n+1}\end{array}}{\therefore \varphi_{n+1}}$$

فراقضیه سهنجاری (صحت) : هر استدلال درست، یک استدلال معتبر است.
(soundness meta theorem)

یعنی $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$.

به طور خاص، هر قضیه یک راستگو است یعنی $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$.

syntax		semantics
$\vdash$ درست	$\Rightarrow$	$\models$ راستگو - توتولوژی
استدلال درست	$\Rightarrow$	استدلال معتبر
sound argument	$\Rightarrow$	valid argument
برهان درستی	$\Rightarrow$	نشان دادن اعتبار

برای اثبات فراقضیه سهنجاری از استقراء قوی (استقراء ریاضی) استفاده می‌شود.

فراقضیه سازگاری | consistency metatheorem

یک سیستم صوری استنتاجی سازگار است که در فرمول φ و $\neg\varphi$ را نتوان باهم به عنوان یک قضیه در آن سیستم اثبات کرد. یعنی یک سیستم صوری سازگار است که $\varphi \wedge \neg\varphi$ قضیه‌ای از آن سیستم نباشد.
یعنی $\nvdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$.

برهان. با توجه به فراقضیه صحت، اگر $\varphi \wedge \neg\varphi$ یک قضیه باشد، راستگو هست یعنی

$$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \Rightarrow \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$$

فرمول $\varphi \wedge \neg\varphi$ در هیچ تعبیری صادق نیست (جدول ارزش آن هرگز ۱ نمی‌شود.) بنابراین $\nvDash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ بنابراین نتیجه می‌شود $\nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

□

فراقضیه تمامیت (completeness metatheorem) گودل ۱۹۲۹

$\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$

هر استدلال معتبر یک استدلال درست است.

فراقضیه تمامیت گودل، عکس فراقضیه صحت است.
این سین هم را نشان‌ها، نقیض هستند.

فراقضیه تصمیم‌پذیری. منطق گزاره‌ها تصمیم‌پذیر است.

تصمیم‌پذیری سیستم S به این معنی است که یک روش کارآمد با ویژگی‌های زیر وجود داشته باشد.

۱- دستورالعمل‌های مکانیکی دقیق اما متناهی داشته باشد.

۲- این دستورالعمل‌ها کاملاً مکانیکی باشد.

۳- کاربرد این دستورالعمل‌ها نتایج قطعی و نه تقریبی بدست دهد.

۴- با اعمال این دستورالعمل‌ها بر روی یک فرمول انتخابی مثل φ بتوان بعد از مراحل متناهی مشخص کرد که آیا فرمول مزبور یک قضیه از سیستم S هست یا نه.

با استفاده از فراقضیه صحت و تمامیت، می‌توان فراقضیه تصمیم‌پذیری را ثابت کرد.

$$\Sigma \vdash \varphi \;\underset{\text{تمامیت}}{\overset{\text{صحت}}{\rightleftarrows}}\; \Sigma \models \varphi$$

قضیه اول ناتمامیت گودل (۱۹۳۱): در برخی از نظام های صوری سازگار، گزاره‌ای هست که با آنکه صادق (معتبر) است ولی قابل اثبات نیست. به بیان دیگر، جمله‌ای چون G وجود دارد که اثبات ناپذیر بودن خودش را بیان می‌کند.

اثبات گودل بر اساس پارادوکس دروغگو است. جمله گودل: این ادعا اثباتی ندارد.
یا من اثبات ناپذیرم.

پارادوکس دروغگو: این جمله نادرست است.

گودل اثبات کرد که در هر سیستم صوری با اصول موضوعه که سازگار و به اندازه کافی قوی باشد، نمی‌توان "من اثبات ناپذیرم" را اثبات کرد و نه نقیض آن را. [1].
بنابراین سازگاری F در F اثبات پذیر نیست. (قضیه دوم ناتمامیت گودل).
در واقع هیلبرت در سال ۱۹۰۰ در کنفرانس بین المللی ریاضیات ۲۳ مسأله سرنوشت ساز ریاضیات در قرن بیستم را اعلام کرد که مسأله دوم آن «سازگاری اصول موضوعه حساب» است.
بنابراین نمی‌توان ریاضی را به طور کامل صوری سازی کرد. حتی اگر مسائل غیر قابل اثبات در سیستم صوری را به عنوان یک اصل مستقل اضافه کنیم باز هم مسائل غیرقابل اثبات یا رد کردن باقی می‌ماند. در واقع نمی‌توان ماشینی ساخت که هر قضیه‌های ریاضی را الزاماً اثبات یا رد کند.

قضیه دوم ناتمامیت گودل: هیچ سیستمی نادرستی سازگاری خود را ثابت کند.

[1]. کامران قیوم زاده، قضیه ناتمامیت گودل و فلسفه ذهن، منطق پژوهشی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی، سال اول، شماره دوم، پاییز و زمستان ۱۳۸۹، ص [illegible]