حل تمرین

مبانی منطق جدید

عامر آمیخته

به نام حضرت دوست؛

که هرچه داریم از اوست.

حل تمرین
مبانی منطق جدید

حلقه منطق

حل تمرین

مبانی منطق جدید

عامر آمیخته
دانشگاه تربیت مدرس
amer.amikhteh@modares.ac.ir

صفحه‌ی محصول:
logiccircle.ir/?p=22763

۳۱ خرداد ۱۴۰۲
نسخه ۱۵

فهرست مطالب

فهرست تمرین‌ها ت

فهرست جداول ج

پیش‌گفتار ۱

اول ساختار نحوی منطق گزاره‌ها ۲

۱ سیستم استنتاج طبیعی منطق گزاره‌ها (S_N) ۴

۱.۱ زبان صوری S_N ۴

۲.۱ دستگاه استنتاجی S_N ۶

۲ سیستم اصل موضوعی (S_A) و سیستم نموداری (S_T) منطق گزاره‌ها ۶۰

۱.۲ سیستم نموداری منطق گزاره‌ها (S) ۶۰

دوم ساختار معنایی و فرانظریه منطق گزاره‌ها ۶۶

۳ ساختار معنایی منطق گزاره‌ها ۶۸

۱.۳ قواعد معناشناسی L_S ۶۸

۲.۳ جدول ارزش گزاره‌های مرکب ۶۹

۳.۳ راستگو، متناقض، ممکن‌الصدق ۶۹

۴.۳ توابع ارزش ۷۴

۵.۳ اعتبار معنایی و نتیجه معنایی ۷۵

۶.۳ نشان دادن عدم اعتبار ۷۷

۴ فرانظریه منطق گزاره‌ها ۸۱

۱.۴ فراقضیه بهنجاری (صحت) ۸۱

۲.۴ فراقضیه تمامیت ۸۲

سوم ساختار نحوی منطق محمولات ۸۷

۵ سیستم استنتاج طبیعی منطق محمولات (P_N) ۸۹
۱.۵ زبان صوری P_N . . . ۸۹
۲.۵ ترجمه از زبان طبیعی به زبان صوری منطق محمولات . . . ۹۰
۳.۵ دستگاه استنتاجی P_N . . . ۱۰۶
۴.۵ قضیه در P_N . . . ۱۴۹
۵.۵ قاعده معرفی قضیه در P_N . . . ۱۵۲
۶.۵ P_N و اینهمانی . . . ۱۵۳

۶ سیستم اصل موضوعی (P_A) و سیستم نموداری (P_T) منطق محمولات ۱۶۹
۱.۶ سیستم نموداری منطق محمولات (P_T) . . . ۱۶۹

چهارم ساختار معنایی و فرانظریه منطق محمولات ۱۸۸

۷ ساختار معنایی منطق محمولات ۱۹۰
۱.۷ تعبیر $\mathbf{L_P}$ . . . ۱۹۰
۲.۷ صدق در یک تعبیر . . . ۱۹۰
۳.۷ قواعد معناشناسی $\mathbf{L_P}$ . . . ۱۹۱
۴.۷ اعتبار معنایی و نتیجه معنایی در L_P . . . ۱۹۴
۵.۷ نشان دادن عدم اعتبار استدلال‌ها در منطق محمولات . . . ۱۹۵
۶.۷ معناشناسی منطق محمولات و اینهمانی . . . ۲۰۸

۸ فرانظریه منطق محمولات ۲۰۹
۱.۸ فراقضیه بهنجاری (صحت) . . . ۲۰۹
۲.۸ فراقضیه تمامیت . . . ۲۱۰

فهرست تمرین‌ها

۱.۱ تمرین صفحه ۱۳: ترجمه ۴
۲.۱ تمرین صفحه ۱۴: قواعد ساخت ۵
۳.۱ تمرین صفحه ۲۱: نمونه جانشین ۶
۴.۱ تمرین صفحه ۲۱: توجیه ۷
۵.۱ تمرین صفحه ۲۴: اثبات ۱۲
۶.۱ تمرین صفحه ۲۹: توجیه ۲۹
۷.۱ تمرین صفحه ۳۱: اثبات ۳۴
۸.۱ تمرین صفحه ۳۳: ترجمه و اثبات ۴۷
۹.۱ تمرین صفحه ۳۳: ترجمه و اثبات ۵۰
۱۰.۱ تمرین صفحه ۳۶: اثبات ۵۳
۱.۲ تمرین صفحه ۴۵: اثبات ۶۰
۲.۲ تمرین صفحه ۴۶: اثبات ۶۴
۱.۳ تمرین صفحه ۵۳: ارزش نامتعین ۶۸
۲.۳ تمرین صفحه ۵۶: راستگو، متناقض، ممکن الصدق ۶۹
۳.۳ تمرین صفحه ۵۶: هم‌ارزی ۷۲
۴.۳ تمرین صفحه ۵۸: توابع ارزش ۷۴
۵.۳ تمرین صفحه ۶۰: اعتبار و عدم اعتبار ۷۵
۶.۳ تمرین صفحه ۶۲: مثال نقض ۷۷
۱.۴ تمرین صفحه ۷۱: فراقضیه صحت ۸۱
۲.۴ تمرین صفحه ۷۴: فراقضیه تمامیت ۸۲
۳.۴ تمرین صفحه ۷۵: فراقضیه تمامیت ۸۲
۴.۴ تمرین صفحه ۷۵: فراقضیه تمامیت ۸۳
۵.۴ تمرین صفحه ۷۵: فراقضیه تمامیت ۸۴
۱.۵ تمرین صفحه ۸۳: قواعد ساخت ۸۹
۲.۵ تمرین صفحه ۸۸: ترجمه ۹۱
۳.۵ تمرین صفحه ۸۸: ترجمه ۹۳
۴.۵ تمرین صفحه ۸۹: ترجمه ۹۴
۵.۵ تمرین صفحه ۸۹: ترجمه ۹۵
۶.۵ تمرین صفحه ۹۲: ترجمه ۹۸
۷.۵ تمرین صفحه ۹۴: ترجمه ۱۰۱
۸.۵ تمرین صفحه ۹۶: ترجمه ۱۰۵
۹.۵ تمرین صفحه ۱۰۱: نمونه جانشین ۱۰۶

۱۰.۵ تمرین صفحه ۱۰۲: نمونه جانشین ۱۰۷
۱۱.۵ تمرین صفحه ۱۰۲: توجیه ۱۰۸
۱۲.۵ تمرین صفحه ۱۰۷: اثبات ۱۱۳
۱۳.۵ تمرین صفحه ۱۰۸: اثبات ۱۱۹
۱۴.۵ تمرین صفحه ۱۰۹: اثبات ۱۲۶
۱۵.۵ تمرین صفحه ۱۱۰: ترجمه و اثبات ۱۴۱
۱۶.۵ تمرین صفحه ۱۱۲: اثبات ۱۴۹
۱۷.۵ تمرین صفحه ۱۱۵: نمونه جانشین ۱۵۲
۱۸.۵ تمرین صفحه ۱۱۸: ترجمه ۱۵۳
۱۹.۵ تمرین صفحه ۱۲۱: اثبات ۱۵۴
۲۰.۵ تمرین صفحه ۱۲۱: اثبات ۱۵۵
۲۱.۵ تمرین صفحه ۱۲۱: ترجمه و اثبات ۱۶۳
۱.۶ تمرین صفحه ۱۳۲: اثبات ۱۷۰
۲.۶ تمرین صفحه ۱۳۳: اثبات ۱۷۹
۱.۷ تمرین صفحه ۱۳۹: صدق در مدل ۱۹۱
۲.۷ تمرین صفحه ۱۳۹: صدق در مدل ۱۹۳
۳.۷ تمرین صفحه ۱۴۰: صدق در مدل ۱۹۴
۴.۷ تمرین صفحه ۱۴۵: مثال نقض ۱۹۵
۵.۷ تمرین صفحه ۱۴۸: مثال نقض ۲۰۵
۱.۸ تمرین صفحه ۱۵۴: فراقضیه صحت ۲۰۹
۲.۸ تمرین صفحه ۱۵۸: فراقضیه تمامیت ۲۱۱
۳.۸ تمرین صفحه ۱۵۹: فراقضیه تمامیت ۲۱۲
۴.۸ تمرین صفحه ۱۶۷: فراقضیه تمامیت ۲۱۲

فهرست جداول

۱.۱ راهنمای تمرین ۵.۱ . . . . . ۱۴

۱.۲ αـ قواعد ۶۰
۲.۲ βـ قواعد ۶۱

۱.۵ لغتنامه‌ی تمرین ۵.۵ . . . . . ۹۶
۲.۵ لغتنامه‌ی تمرین ۶.۵ . . . . . ۱۰۰
۳.۵ لغتنامه‌ی تمرین ۷.۵ . . . . . ۱۰۳
۴.۵ لغتنامه‌ی تمرین ۱۵.۵ . . . . . ۱۴۲
۵.۵ لغتنامه‌ی تمرین ۲۱.۵ . . . . . ۱۶۳

۱.۶ γـ قواعد ۱۶۹
۲.۶ δـ قواعد ۱۶۹
۳.۶ αـ قواعد ۱۷۹

پیش‌گفتار

کتاب حاضر **حل تمرین** کتاب **«مبانی منطق جدید»** از انتشارات سمت نوشته‌ی استاد عزیزم، دکتر لطف الله نبوی است. نسخه‌ای که من از آن استفاده می‌کنم چاپ یازدهم در تابستان ۱۳۹۶ است.

۱. این کتاب تنها به صورت الکترونیکی در وبسایت حلقه منطق انتشار یافته است.

۲. در صورتی که این کتاب را به طور مستقیم از وبسایت حلقه منطق خریداری نکرده‌اید لطفاً کتاب را از طریق logiccircle.ir/?p=22763 خریداری کنید.

   (آ) در فرآیند خرید می‌توانید کد تخفیف ۴۰ درصدی CGY7HN2Q را وارد کنید.

   (ب) شما با این کار علاوه بر اینکه از مولف حمایت و او را تشویق می‌کنید تا در آینده کارهای بهتری ارائه دهد، از آپدیت‌های (نگارش‌های) بعدی کتاب نیز می‌توانید بهره‌مند شوید.

۳. با توجه به تجربیات جدیدتر، نسخه‌های جدیدتر و بهتر نیز ارائه خواهد شد.

۴. تعداد ستاره‌های بزرگ قرمز در ابتدای تمرین و ستاره‌های کوچک در داخل تمرین به ترتیب به معنای درجه اهمیت و سختی هستند.

۵. آپدیت در کانال حلقه منطق در تلگرام اطلاع رسانی می‌شود.

۶. لطفاً دوستانی که با مورادی روبرو می‌شوند که به نظرشان اشتباه است یا پیشنهادی برای بهتر شدن کتاب دارند، ترجیحاً از طریق تلگرام با آیدی @Amer_Amikhteh یا از طریق ایمیل amer.amikhteh@modares.ac.ir مرا از آن آگاه کنند.

عامر آمیخته
تابستان ۱۴۰۰

بخش اول

ساختار نحوی منطق گزاره‌ها

فصل ۱

سیستم استنتاج طبیعی منطق گزاره‌ها (S_N)

۱.۱ زبان صوری S_N

تمرین ۱.۱: ترجمه صفحه ۱۳

اگر دو گزاره «باران می‌بارد» و «برف می‌بارد» به ترتیب با «R» و «S» نشان داده شود، جملات زیر را از زبان طبیعی به زبان صوری منطق گزاره‌ها ترجمه کنید.

۱. یا باران می‌بارد یا برف نمی‌بارد.

۲. برف می‌بارد ولی باران نمی‌بارد.

۳. باران و برف باهم نمی‌بارند.

۴. چنین نیست که اگر باران ببارد برف نیز ببارد.

۵. اگر و تنها اگر باران ببارد برف نمی‌بارد.

۶. نه باران می‌بارد و نه برف.

* ۷. تنها اگر باران ببارد برف نمی‌بارد.

* ۸. برف نمی‌بارد، مگر اینکه باران ببارد.

۹. اگر باران نمی‌بارد، چنین نیست که هم برف و هم باران ببارد.

۱۰. یا هم باران و هم برف می‌بارد یا نه باران و نه برف.

پاسخ تمرین ۱.۱

۱. $R \vee {\sim} S$
۲. $S \wedge {\sim} R$
۳. ${\sim}(S \wedge R)$
۴. ${\sim}(R \supset S)$
۵. $R \equiv {\sim} S$
۶. ${\sim} S \wedge {\sim} R$
۷. ${\sim} S \supset R$
۸. $S \supset R$ یا ${\sim} S \vee R$
۹. ${\sim} R \supset {\sim}(S \wedge R)$
۱۰. $(R \wedge S) \vee ({\sim} R \wedge {\sim} S)$

تمرین ۲.۱: قواعد ساخت صفحه ۱۴

کدام یک از این عبارات فرمولند. دلایل خود را بیان کنید.

۱. $(P \vee Q \vee R)$

۲. $((P \vee {\sim}(Q)) \equiv R)$

۳. $((P \supset Q) \supset ((R \supset P) \supset (R \supset Q)))$

۴. $(P \wedge (P \equiv Q)) \supset R \wedge Q)$

۵. $((P \vee Q) \supset ((P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset R)))$

پاسخ تمرین ۲.۱

در تعریف فرمول‌ها با هر تقریری که باشد، اساس کار این است که ابهامی وجود نداشته باشد.

۱. این مورد طبق تعریف یک فرمول نیست. بلکه عبارت‌های $((P \vee Q) \vee R)$ و $(P \vee (Q \vee R))$ فرمول هستند. البته از آنجا که ادات $\vee$ شرکت‌پذیر است، این دو فرمول معادل هستند. برای همین در بعضی تقریرهای دیگر این مورد را فرمول در نظر می‌گیرند. اما توجه کنید که در آن صورت در قسمت قواعد ساخت حتماً باید درباره‌ی این قرارداد توضیح داده شود.

۲. فرمول نیست. مشکل عبارت ${\sim}(Q)$ است.

۳. فرمول است. دلیل:

(آ) P، Q و R فرمول هستند. (FR_1)

(ب) $(P \supset Q)$، $(R \supset P)$ و $(R \supset Q)$ فرمول هستند. (FR_3)

(ج) $((R \supset P) \supset (R \supset Q))$ و در نتیجه کل عبارت فرمول هستند. (FR_3)

۴. فرمول نیست. تعداد پرانتزهای راست و چپ یکسان نیست.

۵. فرمول است. (دلیل به عهده خواننده)

۲.۱ دستگاه استنتاجی S_N

تمرین ۳.۱: نمونه جانشین صفحه ۲۱

معین کنید هر کدام از استدلال‌های گروه دوم، نمونه جانشین کدام یک از استدلال‌های گروه اول هستند.

گروه اول (اصل)

آ) $P \supset Q \vdash \sim Q \supset \sim P$

ب) $P \vee Q, P \vdash \sim Q$

ج) $P \vdash P \supset Q$

د) $P \vdash P \vee Q$

ه) $P \supset (Q \supset R), P \supset Q \vdash P \supset R$

و) $P \wedge Q \vdash P$

ز) $P \vdash Q \supset P$

ح) $P \supset (Q \wedge R) \vdash \sim(Q \wedge R) \supset \sim P$

ط) $P \vee (Q \wedge \sim P), P \vdash \sim(Q \wedge \sim P)$

ی) $Q \vdash Q \supset P$

گروه دوم (نمونه جانشین)

۱. $P \vdash P \vee (Q \equiv R)$

۲. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S) \vdash P \supset Q$

۳. $(P \vee R) \supset (Q \wedge R) \vdash \sim(Q \wedge R) \supset \sim(P \vee R)$

۴. $P \supset (Q \supset R), R \supset \sim P \vdash R \supset \sim Q$

۵. $P \supset Q \vdash Q \supset (P \supset Q)$

۶. $P \vee (Q \wedge \sim R), P \vdash \sim(Q \wedge \sim R)$

۷. $P \supset Q \vdash (P \supset Q) \supset (P \supset Q)$

۸. $P \supset (Q \supset R), P \supset Q \vdash (P \supset R) \supset R$

۹. $P \supset (P \supset Q), P \supset P \vdash P \supset Q$

۱۰. $P \equiv Q \vdash (P \equiv Q) \vee (R \wedge S)$

پاسخ تمرین ۳.۱

۱. د) ۲. و) ۳. آ) و ح)
۴. هیچکدام ۵. ز) ۶. ب)
۷. ج)، ز) و ی) ۸. هیچکدام ۹. ه)
۱۰. د)

تمرین ۴.۱: توجیه صفحه ۲۱

استدلال‌های زیر و براهین آن‌ها مفروض است، توجیه مناسب هریک از سطرهای براهین مزبور را بنویسید.

(۱)

۱- P
۲- $\sim\sim Q$
$\therefore (P \wedge Q) \vee \sim Q$
۳- Q
۴- $P \wedge Q$
۵- $(P \wedge Q) \vee \sim Q$

(۲)

۱- $P \equiv Q$
۲- R
۳- $(R \vee S) \supset (T \wedge U)$
۴- $U \supset Q$
$\therefore P$
۵- $R \vee S$
۶- $T \wedge U$
۷- U
۸- Q
۹- P

(۳)

۱- $P \supset (Q \wedge {\sim}R)$

۲- $(Q \vee R) \supset S$

۳- P

$\therefore S$

۴- $Q \wedge {\sim}R$

۵- Q

۶- $Q \vee \vee R$

۷- S

(۴)

۱- $P \supset Q$

$\therefore {\sim}Q \supset {\sim}P$

۲- ${\sim}Q$

۳- P

۴- Q

۵- $Q \wedge {\sim}Q$

۶- ${\sim}P$

۷- ${\sim}Q \supset {\sim}P$

(۵)

۱- $P \vee Q$

۲- $P \supset R$

۳- $Q \supset [S \supset (T \supset R)]$

$\therefore S \supset (T \supset R)$

۴- S

۵- T

۶- P

۷- R

۸- Q

۹- $S \supset (T \supset R)$

۱۰- $T \supset R$

۱۱- R

۱۲- R

۱۳- $T \supset R$

۱۴- $S \supset (T \supset R)$

(۶)

۱- $P \supset [Q \supset (R \supset S)]$
$\therefore Q \supset [P \supset (R \supset S)]$
۲- Q
۳- P
۴- R
۵- $Q \supset (R \supset S)$
۶- $R \supset S$
۷- S
۸- $R \supset S$
۹- $P \supset (R \supset S)$
۱۰- $Q \supset [P \supset (R \supset S)]$

(۷)

۱- $P \supset (R \supset S)$
۲- $\sim Q \supset \sim S$
$\therefore (P \supset R) \supset (P \supset Q)$
۳- $P \supset R$
۴- P
۵- $\sim Q$
۶- $\sim S$
۷- R
۸- $R \supset S$
۹- S
۱۰- $S \wedge \sim S$
۱۱- $\sim\sim Q$
۱۲- Q
۱۳- $P \supset Q$
۱۴- $(P \supset R) \supset (P \supset Q)$

۱- $(P \supset \sim Q) \supset R$
۲- $\sim P \vee \sim Q$
$\therefore R$ (۸)
۳- $\sim P$
۴- P
۵- Q
۶- $P \wedge \sim P$
۷- $\sim Q$
۸- $P \supset \sim Q$
۹- $\sim Q$
۱۰- P
۱۱- $P \wedge \sim Q$
۱۲- $\sim Q$
۱۳- $P \supset \sim Q$
۱۴- $P \supset \sim Q$
۱۵- R

۱- P
$\therefore (P \supset Q) \supset (P \equiv Q)$ (۹)
۲- $P \supset Q$
۳- P
۴- Q
۵- Q
۶- $P \wedge Q$
۷- P
۸- $P \equiv Q$
۹- $(P \supset Q) \supset (P \equiv Q)$

۱– $\sim(P \supset Q)$
۲– $(P \supset Q) \vee (R \equiv S)$
$\therefore R \equiv S$ (۱۰)
۳– $P \supset Q$
۴– $\sim(R \equiv S)$
۵– $(P \supset Q) \wedge \sim(P \supset Q)$
۶– $\sim\sim(R \equiv S)$
۷– $R \equiv S$
۸– $R \equiv S$
۹– $(R \equiv S) \wedge \sim(P \supset Q)$
۱۰– $R \equiv S$
۱۱– $R \equiv S$

پاسخ تمرین ۴.۱

۱. ۱– مقدمه ۲– مقدمه ۳– ۲، (ح$\sim$) ۴– ۱،۳، (م$\wedge$) ۵– ۴، (م$\vee$)

۲. ۱– مقدمه ۲– مقدمه ۳– مقدمه ۴– مقدمه ۵– ۲، (م$\vee$)
۶– ۳،۵، (ح$\supset$) ۷– ۶، (ح$\wedge$) ۸– ۴،۷، (ح$\supset$)
۹– ۱،۸، (ح$\equiv$)

۳. ۱– مقدمه ۲– مقدمه ۳– مقدمه ۴– ۱،۳، (ح$\supset$)
۵– ۴، (ح$\wedge$) ۶– ۵، (م$\vee$) ۷– ۲،۶، (ح$\supset$)

۴. ۱– مقدمه ۲– ف ۳– ف ۴– ۱،۳، (ح$\supset$)
۵– ۲،۴، (م$\wedge$) ۶– ۳–۵، (م$\sim$) ۷– ۲–۶، (م$\supset$)

۵. ۱– مقدمه ۲– مقدمه ۳– مقدمه ۴– ف ۵– ف
۶– ف ۷– ۲،۶، (ح$\supset$) ۸– ف ۹– ۳،۸، (ح$\supset$)
۱۰– ۴،۹، (ح$\supset$) ۱۱– ۵،۱۰، (ح$\supset$) ۱۲– ۱،۶–۷،۸–
۱۱، (ح$\vee$) ۱۳– ۵–۱۲، (م$\supset$) ۱۴– ۴–۱۳، (م$\supset$)

۶. ۱– مقدمه ۲– ف ۳– ف ۴– ف ۵– ۱،۳، (ح$\supset$)
۶– ۲،۵، (ح$\supset$) ۷– ۴،۶، (ح$\supset$) ۸– ۴–۷، (م$\supset$)
۹– ۳–۸، (م$\supset$) ۱۰– ۲–۹، (م$\supset$)

۷. ۱– مقدمه ۲– مقدمه ۳– ف ۴– ف ۵– ف
۶– ۲،۵، (ح$\supset$) ۷– ۳،۴، (ح$\supset$) ۸– ۱،۴، (ح$\supset$)

۹- ۷،۸، (ح$\supset$)　　۱۰- ۶،۹، (م$\wedge$)　　۱۱- ۵-۱۰، (م$\sim$)
۱۲- ۱۱، (ح$\sim$)　　۱۳- ۴-۱۲، (م$\supset$)　　۱۴- ۳-۱۳، (م$\supset$)

۸. ۱- مقدمه　　۲- مقدمه　　۳- ف　　۴- ف　　۵- ف
۶- ۳،۴، (م$\wedge$)　۷- ۵-۶، (م$\sim$)　　۸- ۴-۷، (م$\supset$)
۹- ف　　۱۰- ف　　۱۱- ۹،۱۰، (م$\wedge$)　　۱۲- ۱۱، (ح$\wedge$)
۱۳- ۱۰-۱۲، (م$\supset$)　　۱۴- ۲،۳-۸،۹-۱۳، (ح$\vee$)　۱۵- ۱،۱۴، (ح$\supset$)

۹. ۱- مقدمه　　۲- ف　　۳- ف　　۴- ۲،۳، (ح$\supset$)
۵- ف　　۶- ۱،۵، (م$\wedge$)　۷- ۶، (ح$\wedge$)　　۸- ۳-۴،۵-۷ (م$\equiv$)
۹- ۲-۸، (م$\supset$)

۱۰. ۱- مقدمه　　۲- مقدمه　　۳- ف　　۴- ف　　۵- ۱،۳، (م$\wedge$)
۶- ۴-۵، (م$\sim$)　　۷- ۶، (ح$\sim$)　　۸- ف　　۹- ۱،۸، (م$\wedge$)
۱۰- ۹، (ح$\wedge$)　۱۱- ۲،۳-۷،۸-۱۰، (ح$\vee$)

★★★ **تمرین ۱.۵: اثبات** — **صفحه ۲۴**

استدلال‌های زیر را ثابت کنید.

۱. جابه‌جایی: $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

۲. شرکت‌پذیری: $P \wedge (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \wedge R$

* ۳. تکرار: $P \vdash P \wedge P$

۴. قیاس شرطی: $P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R$

۵. نقض مضاعف: $P \vdash \sim\sim P$

۶. رفع تالی: $P \supset Q, \sim Q \vdash \sim P$

۷. تعادل: $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P) \vdash P \equiv Q$

۸. تعادل: $P \equiv Q \vdash (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$

۹. جابه‌جایی: $P \vee Q \vdash Q \vee P$

۱۰. صدور: $(P \wedge Q) \supset R \vdash P \supset (Q \supset R)$

۱۱. صدور: $P \supset (Q \supset R) \vdash (P \wedge Q) \supset R$

۱۲. عکس: $P \supset Q \vdash \sim Q \supset \sim P$

۱۳. عکس: $\sim Q \supset \sim P \vdash P \supset Q$

* ۱۴. قیاس انفصالی: $P \vee Q, \sim P \vdash Q$

۱۵. ذوالوجهین مثبت: $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), P \vee R \vdash Q \vee S$

۱۶. پخش‌پذیری: $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

۱۷. پخش‌پذیری: $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$

۱۸. پخش‌پذیری: $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

۱۹. پخش‌پذیری: $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R)$

* ۲۰. استلزام: $P \supset Q \vdash \sim P \vee Q$

* ۲۱. استلزام: $\sim P \vee Q \vdash P \supset Q$

* ۲۲. دمورگان: $\sim(P \wedge Q) \vdash \sim P \vee \sim Q$

۲۳. دمورگان: $\sim P \vee \sim Q \vdash \sim(P \wedge Q)$

۲۴. دمورگان: $\sim(P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$

* ۲۵. دمورگان: $\sim P \wedge \sim Q \vdash \sim(P \vee Q)$

۲۶. شرکت‌پذیری: $P \vee (Q \vee R) \vdash (P \vee Q) \vee R$

۲۷. شرکت‌پذیری: $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$

۲۸. ذوالوجهین منفی: $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), \sim Q \vee \sim S \vdash \sim P \vee \sim R$

* ۲۹. تعادل: $P \equiv Q \vdash (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

۳۰. تعادل: $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q) \vdash P \equiv Q$

پاسخ تمرین ۱.۵

روش (الگوریتم) اثبات با قواعد اصلی

به طور خلاصه در اثبات هر استدلال، اول از خود می‌پرسیم «چه می‌خواهیم؟»، سپس از خود می‌پرسیم «چه داریم؟». در هر مرحله به ترتیب گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

جدول ۱.۱: راهنمای تمرین ۵.۱

	N	م$\wedge$	ح$\wedge$	م$\vee$	ح$\vee$	م$\sim$	ح$\sim$	م$\supset$	ح$\supset$	م$\equiv$	ح$\equiv$
۱	4	✓	✓								
۲	7	✓	✓								
۳	3	✓									
۴	6							✓	✓		
۵	4	✓				✓					
۶	6	✓				✓			✓		
۷	8		✓						✓	✓	
۸	8	✓						✓			✓
۹	6			✓	✓						
۱۰	7	✓						✓	✓		
۱۱	7		✓					✓	✓		
۱۲	7	✓				✓		✓	✓		
۱۳	8	✓				✓	✓	✓	✓		
۱۴	11	✓	✓		✓	✓	✓				
۱۵	11		✓	✓	✓				✓		
۱۶	10	✓	✓	✓	✓						
۱۷	12	✓	✓	✓	✓						
۱۸	12	✓	✓	✓	✓						
۱۹	13	✓	✓	✓	✓						
۲۰	11	✓		✓		✓	✓		✓		
۲۱	12	✓	✓		✓	✓	✓	✓			
۲۲	14	✓		✓		✓	✓				
۲۳	13	✓	✓		✓	✓					
۲۴	10	✓		✓		✓					
۲۵	14	✓	✓		✓	✓	✓				
۲۶	12			✓	✓						
۲۷	12			✓	✓						
۲۸	17	✓	✓	✓	✓	✓			✓		
۲۹	17	✓		✓		✓	✓	✓			✓
۳۰	22	✓	✓		✓	✓	✓			✓	

۱. **تعیین هدف:** پیدا می‌کنیم که چه می‌خواهیم. یعنی هدف را آنچه که قرار است اثبات کنیم قرار می‌دهیم و توجه‌ی اصلی را بر روی آن می‌گذاریم. هدف اصلی همان نتیجه‌ی استدلال است. اما احتمالاً هدف‌های فرعی هم خواهیم داشت. هدف‌های فرعی، هدف‌های قبل از هدف اصلی هستند که برای رسیدن به هدف اصلی مورد نیاز است. مثلاً در اثبات استدلال $P, Q \vdash P \wedge (Q \vee R)$ هدف اصلی اثبات فرمول $P \wedge (Q \vee R)$ و اهداف فرعی اثبات فرمول‌های P و $Q \vee R$ است. چرا که برای بدست آوردن فرمول عطفی نیاز داریم مولفه‌های آن را داشته باشیم.

۲. **طرح رسیدن به هدف (استراتژی):** فرض کنید هدف اثبات فرمول A است. اگر A

- یک جمله‌نشانه بود؛

  (آ) به گام بعدی می‌رویم.

  (ب) اگر همه‌ی گام‌های بعدی انجام شدند و به عبارت دیگر قابل انجام نیستند، مجبوریم از «برهان خلف» استفاده کنیم. به این صورت که $\sim A$ را فرض کنید و هدف را پیدا کردن دو فرمول مثل B و $\sim B$ قرار دهید. در نتیجه با توجه با قاعده‌های معرفی نقض، حذف نقض و معرفی عطف A اثبات می‌شود.
  نکته: استفاده از برهان خلف در موراد کمی الزامی است. پس تا نیاز نبود از آن استفاده نکنید. وگرنه معمولاً مراحل اثبات طولانی‌تر و سخت‌تر خواهد شد.

- فرمول $B \supset C$ بود؛ با توجه به قاعده‌ی معرفی شرط، B را فرض کنید و هدف را اثبات C قرار دهید.

- فرمول $B \wedge C$ بود؛ با توجه به قاعده‌ی معرفی عطف، هدف را اثبات کردن فرمول‌های B و C قرار دهید.

- فرمول $B \equiv C$ بود؛ با توجه به قاعده‌ی معرفی دوشرطی یک بار B را فرض کنید و هدف را اثبات C قرار دهید. و یک بار نیز برعکس عمل کنید.

- فرمول $B \vee C$ بود؛

  (آ) اگر یکی از فرمول‌های B و C در سطرهای قبل عیناً (به عنوان یک فرمول و نه بخشی از فرمول) وجود داشت. تنها با قاعده‌ی معرفی فصل، A اثبات می‌شود.

  (ب) اگر یک فرمول فصلی دیگر مانند $B' \vee C'$ در سطرهای قبلی بود. با توجه به قاعده‌ی حذف فصل، یک بار B' را فرض کنید و هدف را اثبات A قرار دهید. و یک بار نیز C' را فرض کنید و هدف را اثبات A قرار دهید.

  (ج) در غیر این صورت مجبوریم از برهان خلف استفاده کنیم.

۳. **اجرای طرح (تاکتیک):** در این گام باید امکانات خود را برای رسیدن به هدف بسنجیم.

بنابراین تازه به سطرهای قبل (از جمله مقدمات) نگاه می‌کنیم تا ببینیم که چگونه از آن‌ها به بهترین شکل استفاده کنیم. برای این کار از قواعد حذف استفاده می‌کنیم.

۱- $P \wedge Q$	مقدمه
$\therefore Q \wedge P$	(۱)
۲- P	۱، (ح$\wedge$)
۳- Q	۱، (ح$\wedge$)
۴- $Q \wedge P$	۳،۲، (م$\wedge$)

۱- $P \wedge (Q \wedge R)$	مقدمه
$\therefore (P \wedge Q) \wedge R$	(۲)
۲- P	۱، (ح$\wedge$)
۳- $Q \wedge R$	۱، (ح$\wedge$)
۴- Q	۳، (ح$\wedge$)
۵- $P \wedge Q$	۴،۲، (م$\wedge$)
۶- R	۳، (ح$\wedge$)
۷- $(P \wedge Q) \wedge R$	۶،۵، (م$\wedge$)

۱- P	مقدمه
$\therefore P \wedge P$	(۳)
۲- P	مقدمه
۳- $P \wedge P$	۲،۱، (م$\wedge$)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
۲- $Q \supset R$	مقدمه
$\therefore P \supset R$	(۴)
۳- P	ف
۴- Q	۳،۱، (ح$\supset$)
۵- R	۴،۲، (ح$\supset$)
۶- $P \supset R$	۳-۵، (م$\supset$)

۱- P	مقدمه
$\therefore\ {\sim}{\sim}P$	(۵)
۲- ${\sim}P$	ف
۳- $P \wedge {\sim}P$	۱، ۲، (م$\wedge$)
۴- ${\sim}{\sim}P$	۲-۳، (م${\sim}$)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
۲- ${\sim}Q$	مقدمه
$\therefore\ {\sim}P$	(۶)
۳- P	ف
۴- Q	۱،۳، (ح$\supset$)
۵- $Q \wedge {\sim}Q$	۲،۴، (م$\wedge$)
۶- ${\sim}P$	۳-۵، (م${\sim}$)

۱- $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	مقدمه
$\therefore\ P \equiv Q$	(۷)
۲- P	ف
۳- $P \supset Q$	۱، (ح$\wedge$)
۴- Q	۲،۳، (ح$\supset$)
۵- Q	ف
۶- $Q \supset P$	۱، (ح$\wedge$)
۷- P	۵،۶، (ح$\supset$)
۸- $P \equiv Q$	۲-۴،۵-۷ (م$\equiv$)

۱- $P \equiv Q$	مقدمه
$\therefore (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	(۸)
۲- P	ف
۳- Q	۱،۲، (ح≡)
۴- $P \supset Q$	۲-۳، (م⊃)
۵- Q	ف
۶- P	۱،۵، (ح≡)
۷- $Q \supset P$	۵-۶، (م⊃)
۸- $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	۴،۷، (م∧)

۱- $P \vee Q$	مقدمه
$\therefore Q \vee P$	(۹)
۲- P	ف
۳- $Q \vee P$	۲، (م∨)
۴- Q	ف
۵- $Q \vee P$	۴، (م∨)
۶- $Q \vee P$	۱،۲-۳،۴-۵، (ح∨)

۱- $(P \wedge Q) \supset R$	ف
$\therefore P \supset (Q \supset R)$	(۱۰)
۲- P	ف
۳- Q	ف
۴- $P \wedge Q$	۲،۳، (م∧)
۵- R	۱،۴، (ح⊃)
۶- $Q \supset R$	۳-۵، (م⊃)
۷- $P \supset (Q \supset R)$	۲-۶، (م⊃)

۱- $P \supset (Q \supset R)$	مقدمه
$\therefore (P \wedge Q) \supset R$	(۱۱)
۲- $P \wedge Q$	ف
۳- P	۲، (ح$\wedge$)
۴- $Q \supset R$	۱،۳، (ح$\supset$)
۵- Q	۲، (ح$\wedge$)
۶- R	۴،۵، (ح$\supset$)
۷- $(P \wedge Q) \supset R$	۲-۶، (م$\supset$)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
$\therefore \sim Q \supset \sim P$	(۱۲)
۲- $\sim Q$	ف
۳- P	ف
۴- Q	۱،۳، (ح$\supset$)
۵- $Q \wedge \sim Q$	۲،۴، (م$\wedge$)
۶- $\sim P$	۳-۵، (م$\sim$)
۷- $\sim Q \supset \sim P$	۲-۶، (م$\supset$)

۱- $\sim Q \supset \sim P$	مقدمه
$\therefore P \supset Q$	(۱۳)
۲- P	ف
۳- $\sim Q$	ف
۴- $\sim P$	۱،۳، (ح$\supset$)
۵- $P \wedge \sim P$	۲،۴، (م$\wedge$)
۶- $\sim\sim Q$	۳-۵، (م$\sim$)
۷- Q	۶، (ح$\sim$)
۸- $P \supset Q$	۲-۷، (م$\supset$)

۱- $P \vee Q$	مقدمه
۲- $\sim P$	مقدمه
$\therefore Q$	(۱۴)
۳- P	ف
۴- $\sim Q$	ف
۵- $P \wedge \sim P$	۲،۳، (م$\wedge$)
۶- $\sim\sim Q$	۴-۵، (م$\sim$)
۷- Q	۶، (ح$\sim$)
۸- Q	ف
۹- $Q \wedge \sim P$	۲،۸، (م$\wedge$)
۱۰- Q	۹، (ح$\wedge$)
۱۱- Q	۱،۳-۷،۸-۹، (ح$\vee$)

۱- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
۲- $P \vee R$	مقدمه
$\therefore Q \vee S$	(۱۵)
۳- P	ف
۴- $P \supset Q$	۱، (ح$\wedge$)
۵- Q	۳،۴، (ح$\supset$)
۶- $Q \vee S$	۵، (م$\vee$)
۷- R	ف
۸- $R \supset S$	۱، (ح$\wedge$)
۹- S	۷،۸، (ح$\supset$)
۱۰- $Q \vee S$	۹، (م$\vee$)
۱۱- $Q \vee S$	۲،۳-۶،۷-۱۰، (ح$\vee$)

۱- $P \wedge (Q \vee R)$	مقدمه
$\therefore (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	(۱۶)
۲- P	۱، (ح∧)
۳- $Q \vee R$	۱، (ح∧)
۴- Q	ف
۵- $P \wedge Q$	۴،۲، (م∧)
۶- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	۵، (م∨)
۷- R	ف
۸- $P \wedge R$	۷،۲، (م∧)
۹- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	۸، (م∨)
۱۰- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	۹-۷،۶-۴،۳، (ح∨)

۱- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	مقدمه
$\therefore P \wedge (Q \vee R)$	(۱۷)
۲- $P \wedge Q$	ف
۳- P	۲، (ح∧)
۴- Q	۲، (ح∧)
۵- $Q \vee R$	۴، (م∨)
۶- $P \wedge (Q \vee R)$	۵،۳، (م∧)
۷- $P \wedge R$	ف
۸- P	۷، (ح∧)
۹- R	۷، (ح∧)
۱۰- $Q \vee R$	۹، (م∨)
۱۱- $P \wedge (Q \vee R)$	۱۰،۸، (م∧)
۱۲- $P \wedge (Q \vee R)$	۱۱-۷،۶-۲،۱، (ح∨)

۱- $P \vee (Q \wedge R)$	مقدمه
$\therefore (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	(۱۸)
۲- P	ف
۳- $P \vee Q$	۲، (م$\vee$)
۴- $P \vee R$	۲، (م$\vee$)
۵- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	۲،۳، (م$\wedge$)
۶- $Q \wedge R$	ف
۷- Q	۶، (ح$\wedge$)
۸- R	۶، (ح$\wedge$)
۹- $P \vee Q$	۷، (م$\vee$)
۱۰- $P \vee R$	۸، (م$\vee$)
۱۱- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	۹،۱۰، (م$\wedge$)
۱۲- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	۱، ۲-۵، ۶-۱۱، (ح$\vee$)

۱- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	مقدمه
$\therefore P \vee (Q \wedge R)$	(۱۹)
۲- $P \vee Q$	۱، (ح$\wedge$)
۳- $P \vee R$	۱، (ح$\wedge$)
۴- P	ف
۵- $P \vee (Q \wedge R)$	۴، (م$\vee$)
۶- Q	ف
۷- P	ف
۸- $P \vee (Q \wedge R)$	۷، (م$\vee$)
۹- R	ف
۱۰- $Q \wedge R$	۶،۹، (م$\wedge$)
۱۱- $P \vee (Q \wedge R)$	۱۰، (م$\vee$)
۱۲- $P \vee (Q \wedge R)$	۳، ۷-۸، ۹-۱۱، (ح$\vee$)
۱۳- $P \vee (Q \wedge R)$	۲، ۴-۵، ۶-۱۲، (ح$\vee$)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
$\therefore \sim P \vee Q$	(۲۰)
۲- $\sim(\sim P \vee Q)$	ف
۳- P	ف
۴- Q	۱،۳، (ح$\supset$)
۵- $\sim P \vee Q$	۴، (م$\vee$)
۶- $(\sim P \vee Q) \wedge \sim(\sim P \vee Q)$	۲،۵، (م$\wedge$)
۷- $\sim P$	۳-۷، (م$\sim$)
۸- $\sim P \vee Q$	۷، (م$\vee$)
۹- $(\sim P \vee Q) \wedge \sim(\sim P \vee Q)$	۲،۸، (م$\wedge$)
۱۰- $\sim\sim(\sim P \vee Q)$	۲-۹، (م$\sim$)
۱۱- $\sim P \vee Q$	۱۰، (ح$\sim$)

۱- $\sim P \vee Q$	مقدمه
$\therefore P \supset Q$	(۲۱)
۲- P	ف
۳- $\sim P$	ف
۴- $\sim Q$	ف
۵- $P \wedge \sim P$	۲،۳، (م$\wedge$)
۶- $\sim\sim Q$	۴-۵، (م$\sim$)
۷- Q	۶، (ح$\sim$)
۸- Q	ف
۹- $P \wedge Q$	۲،۸، (م$\wedge$)
۱۰- Q	۹، (ح$\wedge$)
۱۱- Q	۱،۳-۷،۸-۱۰، (ح$\vee$)
۱۲- $P \supset Q$	۲-۱۱، (م$\supset$)

۱- $\sim(P \wedge Q)$	مقدمه
$\therefore \sim P \vee \sim Q$	(۲۲)
۲- $\sim(\sim P \vee \sim Q)$	ف
۳- P	ف
۴- Q	ف
۵- $P \wedge Q$	۳،۴، (م∧)
۶- $(P \wedge Q) \wedge \sim(P \wedge Q)$	۱،۵، (م∧)
۷- $\sim Q$	۴-۶، (م∼)
۸- $\sim P \vee \sim Q$	۷، (م∨)
۹- $(\sim P \vee \sim Q) \wedge \sim(\sim P \vee \sim Q)$	۲،۸، (م∧)
۱۰- $\sim P$	۳-۹، (م∼)
۱۱- $\sim P \vee \sim Q$	۱۰، (م∨)
۱۲- $(\sim P \vee \sim Q) \wedge \sim(\sim P \vee \sim Q)$	۲،۱۱، (م∧)
۱۳- $\sim\sim(\sim P \vee \sim Q)$	۲-۱۲، (م∼)
۱۴- $\sim P \vee \sim Q$	۱۳، (ح∼)

۱- $\sim P \vee \sim Q$	مقدمه
$\therefore \sim(P \wedge Q)$	(۲۳)
۲- $P \wedge Q$	ف
۳- P	۲، (ح∧)
۴- Q	۲، (ح∧)
۵- $\sim P$	ف
۶- $P \wedge \sim P$	۳،۵، (م∧)
۷- $\sim Q$	ف
۸- P	ف
۹- $Q \wedge \sim Q$	۴،۷، (م∧)
۱۰- $\sim P$	۸-۹، (م∼)
۱۱- $P \wedge \sim P$	۳،۱۰، (م∧)
۱۲- $P \wedge \sim P$	۱،۵-۶،۷-۱۱، (ح∨)
۱۳- $\sim(P \wedge Q)$	۲-۱۲، (م∼)

۱- $\sim(P \vee Q)$	مقدمه
$\therefore \sim P \wedge \sim Q$	(۲۴)
۲- P	ف
۳- $P \vee Q$	۲، (م$\vee$)
۴- $(P \vee Q) \wedge \sim(P \vee Q)$	۳،۱، (م$\wedge$)
۵- $\sim P$	۴-۲، (م$\sim$)
۶- Q	ف
۷- $P \vee Q$	۶، (م$\vee$)
۸- $(P \vee Q) \wedge \sim(P \vee Q)$	۷،۱، (م$\wedge$)
۹- $\sim Q$	۸-۶، (م$\sim$)
۱۰- $\sim P \wedge \sim Q$	۹،۵، (م$\wedge$)

۱- $\sim P \wedge \sim Q$	مقدمه
$\therefore \sim(P \vee Q)$	(۲۵)
۲- $\sim P$	۱، (ح$\wedge$)
۳- $\sim Q$	۱، (ح$\wedge$)
۴- $P \vee Q$	ف
۵- P	ف
۶- $P \wedge \sim P$	۵،۲، (م$\wedge$)
۷- Q	ف
۸- $\sim P$	ف
۹- $Q \wedge \sim Q$	۷،۳، (م$\wedge$)
۱۰- $\sim\sim P$	۹-۸، (م$\sim$)
۱۱- P	۱۰، (ح$\sim$)
۱۲- $P \wedge \sim P$	۱۱،۲، (م$\wedge$)
۱۳- $P \wedge \sim P$	۱۲-۷،۶-۵،۴، (ح$\vee$)
۱۴- $\sim(P \vee Q)$	۱۳-۴، (م$\sim$)

۱- $P \vee (Q \vee R)$	مقدمه
$\therefore (P \vee Q) \vee R$	(۲۶)
۲- P	ف
۳- $P \vee Q$	۲، (م۷)
۴- $(P \vee Q) \vee R$	۳، (م۷)
۵- $Q \vee R$	ف
۶- Q	ف
۷- $P \vee Q$	۶، (م۷)
۸- $(P \vee Q) \vee R$	۷، (م۷)
۹- R	ف
۱۰- $(P \vee Q) \vee R$	۹، (م۷)
۱۱- $(P \vee Q) \vee R$	۵،۶-۸،۹-۱۰، (ح۷)
۱۲- $(P \vee Q) \vee R$	۱،۲-۴،۵-۱۱، (ح۷)

۱- $(P \vee Q) \vee R$	مقدمه
$\therefore P \vee (Q \vee R)$	(۲۷)
۲- $P \vee Q$	ف
۳- P	ف
۴- $P \vee (Q \vee R)$	۳، (م۷)
۵- Q	ف
۶- $Q \vee R$	۵، (م۷)
۷- $P \vee (Q \vee R)$	۶، (م۷)
۸- $P \vee (Q \vee R)$	۲،۳-۴،۵-۷، (ح۷)
۹- R	ف
۱۰- $Q \vee R$	۹، (م۷)
۱۱- $P \vee (Q \vee R)$	۱۰، (م۷)
۱۲- $P \vee (Q \vee R)$	۱،۲-۸،۹-۱۱، (ح۷)

۱- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
۲- $\sim Q \vee \sim S$	مقدمه
$\therefore \sim P \vee \sim R$	(۲۸)
۳- $P \supset Q$	۱، (ح$\wedge$)
۴- $R \supset S$	۱، (ح$\wedge$)
۵- $\sim Q$	ف
۶- P	ف
۷- Q	۶،۳، (ح$\supset$)
۸- $Q \wedge \sim Q$	۷،۵، (م$\wedge$)
۹- $\sim P$	۸-۶، (م$\sim$)
۱۰- $\sim P \vee \sim R$	۹، (م$\vee$)
۱۱- $\sim S$	ف
۱۲- R	ف
۱۳- S	۱۲،۴، (ح$\supset$)
۱۴- $S \wedge \sim S$	۱۳،۱۱، (م$\wedge$)
۱۵- $\sim R$	۱۴-۱۲، (م$\sim$)
۱۶- $\sim P \vee \sim R$	۱۵، (م$\vee$)
۱۷- $\sim P \vee \sim R$	۲،۵-۱۰،۱۱-۱۶، (ح$\vee$)

۱- $P \equiv Q$	مقدمه
$\therefore (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	(۲۹)
۲- $\sim[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)]$	ف
۳- P	ف
۴- Q	۱،۲، (ح≡)
۵- $P \wedge Q$	۳-۴، (م⊃)
۶- $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	۵، (م∨)
۷- $[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)] \wedge \sim[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)]$	۲،۶، (م∧)
۸- $\sim P$	۳-۷، (م∼)
۹- Q	ف
۱۰- P	۱،۹، (ح≡)
۱۱- $P \wedge \sim P$	۸،۱۰، (م∧)
۱۲- $\sim Q$	۹-۱۱، (م∼)
۱۳- $\sim P \wedge \sim Q$	۸،۱۲، (م∧)
۱۴- $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	۱۳، (م∨)
۱۵- $[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)] \wedge \sim[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)]$	۲،۱۴، (م∧)
۱۶- $\sim\sim[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)]$	۲-۱۵، (م∼)
۱۷- $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	۱۶، (ح∼)

۱- $(P \wedge Q) \vee ({\sim}P \wedge {\sim}Q)$	مقدمه
$\therefore P \equiv Q$	(۳۰)
۲- P	ف
۳- $P \wedge Q$	ف
۴- Q	۳، (ح$\wedge$)
۵- ${\sim}P \wedge {\sim}Q$	ف
۶- ${\sim}Q$	ف
۷- ${\sim}P$	۵، (ح$\wedge$)
۸- $P \wedge {\sim}P$	۲،۷، (م$\wedge$)
۹- ${\sim}{\sim}Q$	۶-۸، (م$\sim$)
۱۰- Q	۹، (ح$\sim$)
۱۱- Q	۱،۳-۴،۵-۱۰، (ح$\vee$)
۱۲- Q	ف
۱۳- $P \wedge Q$	ف
۱۴- P	۱۳، (ح$\wedge$)
۱۵- ${\sim}P \wedge {\sim}Q$	ف
۱۶- ${\sim}P$	ف
۱۷- ${\sim}Q$	۱۵، (ح$\wedge$)
۱۸- $Q \wedge {\sim}Q$	۱۲،۱۷، (م$\wedge$)
۱۹- ${\sim}{\sim}P$	۱۶-۱۸، (م$\sim$)
۲۰- P	۱۹، (ح$\sim$)
۲۱- P	۱،۱۳-۱۴،۱۵-۲۰، (ح$\vee$)
۲۲- $P \equiv Q$	۲-۱۱،۱۲-۲۱ (م$\equiv$)

تمرین ۱.۶: توجیه صفحه ۲۹

استدلال‌های زیر و براهین آن‌ها مفروضند. توجیه هر یک از سطرهای براهین مزبور را بنویسید.

۱- $(P \wedge Q) \supset [P \supset (R \wedge S)]$
۲- $(P \wedge Q) \wedge T$
$\therefore R \vee S$ (۱)
۳- $P \wedge Q$
۴- $P \supset (R \wedge S)$
۵- P
۶- $R \wedge S$
۷- R
۸- $R \vee S$

۱- $(P \vee Q) \supset (R \wedge S)$
۲- $\sim R$
$\therefore \sim Q$ (۲)
۳- $\sim R \vee \sim S$
۴- $\sim (R \wedge S)$
۵- $\sim (P \vee Q)$
۶- $\sim P \wedge \sim Q$
۷- $\sim Q$

۱- P
$\therefore Q \supset P$ (۳)
۲- $P \vee \sim Q$
۳- $\sim Q \vee P$
۴- $Q \supset P$

۱- $P \supset (Q \supset R)$
۲- $R \supset \sim R$
۳- $(S \supset P) \wedge (T \supset Q)$
$\therefore S \supset \sim T$ (۴)
۴- $(P \wedge Q) \supset R$
۵- $\sim R \vee \sim R$
۶- $\sim R$
۷- $\sim (P \wedge Q)$
۸- $\sim P \vee \sim Q$
۹- $\sim S \vee \sim T$
۱۰- $S \supset \sim T$

۱- $P \supset (Q \supset R)$
۲- $P \supset (S \supset T)$
۳- $P \wedge (Q \vee S)$
۴- $\sim R$
$\therefore T$ (۵)
۵- $(P \wedge Q) \supset R$
۶- $(P \wedge S) \supset T$
۷- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge S)$
۸- $[(P \wedge Q) \supset R] \wedge [(P \wedge S) \supset T]$
۹- $R \vee T$
۱۰- T

۱- $P \wedge (Q \vee R)$
۲- $(P \wedge R) \supset \sim(S \vee T)$
۳- $(\sim S \vee \sim T) \supset \sim(P \wedge Q)$
$\therefore S \equiv T$ (۶)
۴- $(P \wedge R) \supset (\sim S \wedge \sim T)$
۵- $\sim(S \wedge T) \supset \sim(P \wedge Q)$
۶- $(P \wedge Q) \supset (S \wedge T)$
۷- $[(P \wedge Q) \supset (S \wedge T)] \wedge [(P \wedge R) \supset (\sim S \wedge \sim T)]$
۸- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
۹- $(S \wedge T) \vee (\sim S \wedge \sim T)$
۱۰- $S \equiv T$

۱- $P \supset Q$
۲- $P \supset R$
$\therefore P \supset (Q \wedge R)$ (۷)
۳- $(P \supset Q) \wedge (P \supset R)$
۴- $(\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R)$
۵- $P \supset (Q \wedge R)$

۱- $P \supset Q$
۲- $P \vee (\sim\sim R \wedge \sim\sim Q)$
۳- $S \supset \sim R$
۴- $\sim(P \wedge Q)$
$\therefore \sim S \vee \sim Q$ (۸)
۵- $P \supset (P \wedge Q)$
۶- $\sim P$
۷- $\sim\sim R \wedge \sim\sim Q$
۸- $\sim\sim R$
۹- $\sim S$
۱۰- $\sim S \vee \sim Q$

۱- $P \vee (\sim Q \vee P)$
۲- $Q \vee (\sim P \vee Q)$
$\therefore (P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$ (۹)
۳- $(\sim Q \vee P) \vee P$
۴- $\sim Q \vee (P \vee P)$
۵- $\sim Q \vee P$
۶- $Q \supset P$
۷- $(\sim P \vee Q) \vee Q$
۸- $\sim P \vee (Q \vee Q)$
۹- $\sim P \vee Q$
۱۰- $P \supset Q$
۱۱- $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$

۱- $(P \vee Q) \vee (R \wedge S)$
۲- $(\sim P \wedge S) \wedge \sim(\sim P \wedge Q)$
$\therefore \sim P \wedge R$ (۱۰)
۳- $\sim P \wedge [S \wedge \sim(\sim P \wedge Q)]$
۴- $\sim P$
۵- $P \vee [Q \vee (R \wedge S)]$
۶- $Q \vee (R \wedge S)$
۷- $(Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$
۸- $Q \vee R$
۹- $\sim P \wedge (Q \vee R)$
۱۰- $(\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge R)$
۱۱- $\sim(\sim P \wedge Q) \wedge (\sim P \wedge S)$
۱۲- $\sim(\sim P \wedge Q)$
۱۳- $\sim P \wedge R$

پاسخ تمرین ۶.۱

۱. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- ۲، (ح∧) ۴- ۱،۳، (ح⊃)
۵- ۳، (ح∧) ۶- ۴،۵، (ح⊃) ۷- ۶، (ح∧) ۸- ۷، (م∨)

۲. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- ۲، (م∨) ۴- ۳، (دم) ۵- ۱،۴، (ر.ت)

۶- ۵، (دم) ۷- ۷، (ح∧)

۳. ۱- مقدمه ۲- ۱، (م∨) ۳- ۲، (جا) ۴- ۳، (اس)

۴. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- مقدمه ۴- ۱، (صد) ۵- ۲، (اس)
۶- ۵، (تک) ۷- ۴،۶، (ر.ت) ۸- ۷، (دم) ۹- ۳،۸، (ذ.ن)
۱۰- ۹، (اس)

۵. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- مقدمه ۴- مقدمه ۵- ۱، (صد)
۶- ۲، (صد) ۷- ۳، (پخ) ۸- ۵،۶، (م∧) ۹- ۷،۸، (ذ.م) ۱۰- ۴،۹، (ق.ا)

۶. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- مقدمه ۴- مقدمه ۵- ۲، (دم)
۶- ۳، (دم) ۷- ۵، (عک) ۸- ۴،۶، (م∧) ۹- ۷،۸، (ذ.م) ۱۰- ۹، (تع)

۷. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- ۱،۲، (م∧) ۴- ۳، (اس) ۵- ۴، (پخ)
۶- ۵، (اس)

۸. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- مقدمه ۴- مقدمه ۵- ۱، (جذ)
۶- ۴،۵، (ر.ت) ۷- ۲،۶، (ق.ا) ۸- ۷، (ح∧) ۹- ۳،۸، (ر.ت)
۱۰- ۹، (م∨)

۹. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- ۱، (جا) ۴- ۳، (شر) ۵- ۴، (تک)
۶- ۵، (اس) ۷- ۲، (جا) ۸- ۷، (شر) ۹- ۸، (تک) ۱۰- ۹، (اس)
۱۱- ۶،۱۰، (م∧)

۱۰. ۱- مقدمه ۲- مقدمه ۳- ۲، (شر) ۴- ۳، (ح∧) ۵- ۱، (شر)
۶- ۴،۵، (ق.ا) ۷- ۶، (پخ) ۸- ۸، (ح∧) ۹- ۴،۸، (م∧) ۱۰- ۹، (پخ)
۱۱- ۲، (جا) ۱۲- ۲، (ح∧) ۱۳- ۱۰،۱۲، (ق.ا)

تمرین ۱.۷: اثبات صفحه ۳۱

استدلال‌های زیر را ثابت کنید.

۱. $P \supset (Q \supset {\sim}R) \vdash P \supset (R \supset Q)$

۲. $P \supset {\sim}(Q \supset R), (S \wedge Q) \supset R, S \vdash {\sim}P$

۳. $S \supset T, S \vee T \vdash T$

۴. $P \supset Q, R \supset Q \vdash (P \vee R) \supset Q$

۵. $[(P \wedge Q) \supset R] \wedge [{\sim}S \supset (Q \wedge {\sim}R)] \vdash P \supset S$

۶. $P \supset (Q \supset R), Q \supset (R \supset S) \vdash P \supset (Q \supset S)$

۷. $\sim P \vee [(Q \supset R) \wedge (S \supset R)], P \wedge (Q \vee S) \vdash R$

۸. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), T \supset (P \vee R) \vdash T \supset (Q \vee S)$

۹. $P \vee (Q \wedge R), P \supset R \vdash R$

۱۰. $(P \vee Q) \supset (R \supset S), (\sim S \vee T) \supset (P \wedge R) \vdash S$

۱۱. $P \supset Q, Q \supset [(R \supset \sim\sim R) \supset S] \vdash P \supset S$

۱۲. $(P \vee Q) \supset R, S \supset (T \wedge U) \vdash (P \supset R) \wedge (S \supset T)$

۱۳. $P \vee (R \wedge S), (P \supset T) \wedge (T \supset S) \vdash S$

۱۴. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S) \vdash (P \wedge R) \supset (Q \wedge S)$

۱۵. $P \supset Q, (P \wedge Q) \supset R, \sim(P \wedge R) \vdash \sim P$

۱۶. $P \supset R \vdash (R \wedge P) \equiv P$

۱۷. $(P \vee Q) \supset (R \wedge S), \sim P \supset (T \supset \sim T), \sim R \vdash \sim T$

۱۸. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), (Q \vee S) \supset T, \sim T \vdash \sim(P \vee R)$

۱۹. $(P \vee Q) \supset (R \wedge S), (R \vee T) \supset (\sim U \wedge W), (U \vee V) \supset (P \wedge Z) \vdash \sim U$

۲۰. $P \vee (Q \supset R), [Q \supset (Q \wedge R)] \supset (S \vee T), (S \supset P) \wedge (T \supset U) \vdash P \vee U$

۲۱. $(P \supset \sim Q) \wedge (R \supset S), (\sim Q \supset T) \wedge (S \supset \sim U), (T \supset \sim V) \wedge (\sim U \supset W), P \wedge R \vdash \sim V \wedge W$

۲۲. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), (Q \vee S) \supset \{[T \supset (T \vee U)] \supset (P \wedge R)\} \vdash P \equiv R$

۲۳. $[P \supset \sim(\sim Q \wedge \sim R)] \wedge [S \supset \sim(Q \vee R)], (\sim T \supset P) \wedge (\sim U \supset S), (T \supset Q) \wedge (U \supset R) \vdash Q \equiv R$

۲۴. $(P \vee Q) \supset (R \supset S), [R \supset (R \wedge S)] \supset T, T \supset [(\sim U \vee \sim\sim U) \supset (P \wedge U)] \vdash P \equiv T$

۲۵. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), P \vee R, (P \supset \sim S) \wedge (R \supset \sim Q), (Q \wedge \sim S) \supset T, S \supset (Q \vee U) \vdash T \vee U$

پاسخ تمرین ۱.۷

برای استدلال‌های این تمرین برهان‌های متنوعی وجود دارد. من آن برهان با طول کمتر را ترجیح دادم. در زیر طول برهانی که پیدا کردم را آوردم. تلاش کنید برهان‌های با طول کمتر ارائه دهید.

(۱) ۷	(۲) ۷	(۳) ۸	(۴) ۷	(۵) ۹
(۶) ۷	(۷) ۸	(۸) ۶	(۹) ۷	(۱۰) ۱۲
(۱۱) ۱۰	(۱۲) ۱۱	(۱۳) ۱۰	(۱۴) ۱۰	(۱۵) ۷
(۱۶) ۷	(۱۷) ۱۲	(۱۸) ۸	(۱۹) ۱۵	(۲۰) ۱۰
(۲۱) ۱۳	(۲۲) ۱۴	(۲۳) ۱۴	(۲۴) ۱۷	(۲۵) ۱۹

۱- $P \supset (Q \wedge {\sim}R)$	مقدمه
$\therefore P \supset (R \supset Q)$	(۱)
۲- P	ف
۳- $Q \wedge {\sim}R$	۱، ۲، (ح⊃)
۴- Q	۳، (ح∧)
۵- ${\sim}R \vee Q$	۴، (م∨)
۶- $R \supset Q$	۵، (اس)
۷- $P \supset (R \supset Q)$	۲-۶، (م⊃)

۱- $P \supset {\sim}(Q \supset R)$	مقدمه
۲- $(S \wedge Q) \supset R$	مقدمه
۳- S	مقدمه
$\therefore {\sim}P$	(۲)
۴- $S \supset (Q \supset R)$	۲، (صد)
۵- $Q \supset R$	۳، ۴، (ح⊃)
۶- ${\sim}{\sim}(Q \supset R)$	۵، (ن.م)
۷- ${\sim}P$	۱، ۶، (ر.ت)

۱- $S \supset T$	مقدمه
۲- $S \vee T$	مقدمه
$\therefore T$	(۳)
۳- S	ف
۴- T	۳،۱، (ح$\supset$)
۵- T	ف
۶- $T \wedge T$	۵، (تک)
۷- T	۶، (تک)
۸- T	۲،۳-۴،۵-۷، (ح$\vee$)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
۲- $R \supset Q$	مقدمه
$\therefore (P \vee R) \supset Q$	(۴)
۳- $P \vee R$	ف
۴- $(P \supset Q) \wedge (R \supset Q)$	۲،۱، (م$\wedge$)
۵- $Q \vee Q$	۴،۳، (ذ.م)
۶- Q	۵، (تک)
۷- $(P \vee R) \supset Q$	۳-۶، (م$\supset$)

۱- $[(P \wedge Q) \supset R] \wedge [{\sim}S \supset (Q \wedge {\sim}R)]$	مقدمه
$\therefore P \supset S$	(۵)
۲- $(P \wedge Q) \supset R$	۱، (ح$\wedge$)
۳- $P \supset (Q \supset R)$	۲، (صد)
۴- ${\sim}S \supset (Q \wedge {\sim}R)$	۱، (ح$\wedge$)
۵- ${\sim}S \supset ({\sim}{\sim}Q \wedge {\sim}R)$	۴، (ن.م)
۶- ${\sim}S \supset {\sim}({\sim}Q \vee R)$	۵، (دم)
۷- $({\sim}Q \vee R) \supset S$	۶، (عک)
۸- $(Q \supset R) \supset S$	۷، (اس)
۹- $P \supset S$	۸،۳، (ق.ش)

۱- $P \supset (Q \supset R)$	مقدمه
۲- $Q \supset (R \supset S)$	مقدمه
$\therefore P \supset (Q \supset S)$	(۶)
۳- $P \supset [Q \supset (Q \wedge R)]$	۱، (جذ)
۴- $(P \wedge Q) \supset (Q \wedge R)$	۳، (صد)
۵- $(Q \wedge R) \supset S$	۲، (صد)
۶- $(P \wedge Q) \supset S$	۵،۴، (ق.ش)
۷- $P \supset (Q \supset S)$	۶، (صد)

۱- $\sim P \vee [(Q \supset R) \wedge (S \supset R)]$	مقدمه
۲- $P \wedge (Q \vee S)$	مقدمه
$\therefore R$	(۷)
۳- P	۲، (ح$\wedge$)
۴- $\sim\sim P$	۳، (ن.م)
۵- $(Q \supset R) \wedge (S \supset (S \supset R))$	۴،۱، (ق.ا)
۶- $Q \vee S$	۲، (ح$\wedge$)
۷- $R \vee R$	۶،۵، (ذ.م)
۸- R	۷، (تک)

۱- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
۲- $T \supset (P \vee R)$	مقدمه
$\therefore T \supset (Q \vee S)$	(۸)
۳- T	ف
۴- $P \vee R$	۳،۲، (ح$\supset$)
۵- $Q \vee S$	۴،۱، (ذ.م)
۶- $T \supset (Q \vee S)$	۳-۵، (م$\supset$)

۱- $P \vee (Q \wedge R)$	مقدمه
۲- $P \supset R$	مقدمه
$\therefore R$	(۹)
۳- P	ف
۴- R	۳،۲، (ح$\supset$)
۵- $Q \wedge R$	ف
۶- R	۵، (ح$\wedge$)
۷- R	۳،۱-۴،۵-۶، (ح$\vee$)

۱- $(P \vee Q) \supset (R \supset S)$	مقدمه
۲- $(\sim S \vee T) \supset (P \wedge R)$	مقدمه
$\therefore S$	(۱۰)
۳- $[(P \vee Q) \wedge R] \supset S$	۱، (صد)
۴- $\sim S$	ف
۵- $\sim S \vee T$	۴، (م$\vee$)
۶- $P \wedge R$	۵،۲، (ح$\supset$)
۷- $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	۶، (م$\vee$)
۸- $(P \vee Q) \wedge R$	۷، (پخ)
۹- S	۸،۳، (ح$\supset$)
۱۰- $S \wedge \sim S$	۹،۴، (م$\wedge$)
۱۱- $\sim\sim S$	۴-۱۰، (م$\sim$)
۱۲- S	۱۱، (ح$\sim$)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
۲- $Q \supset [(R \supset \sim\sim R) \supset S]$	مقدمه
$\therefore P \supset S$	(۱۱)
۳- R	ف
۴- $\sim\sim R$	۳، (ن.م)
۵- $R \supset \sim\sim R$	۳-۴، (م$\supset$)
۶- P	ف
۷- Q	۱،۶، (ح$\supset$)
۸- $(R \supset \sim\sim R) \supset S$	۲،۷، (ح$\supset$)
۹- S	۵،۸، (ح$\supset$)
۱۰- $P \supset S$	۵-۹، (م$\supset$)

۱- $(P \vee Q) \supset R$	مقدمه
۲- $S \supset (T \wedge U)$	مقدمه
$\therefore (P \supset R) \wedge (S \supset T)$	(۱۲)
۳- P	ف
۴- $P \vee Q$	۳، (م$\vee$)
۵- R	۱،۴، (ح$\supset$)
۶- $P \supset R$	۳-۵، (م$\supset$)
۷- S	ف
۸- $T \wedge U$	۲،۷، (ح$\supset$)
۹- T	۸، (ح$\wedge$)
۱۰- $S \supset T$	۷-۸، (م$\supset$)
۱۱- $(P \supset R) \wedge (S \supset T)$	۶،۱۰، (م$\wedge$)

۱- $P \vee (R \wedge S)$	مقدمه
۲- $(P \supset T) \wedge (T \supset S)$	مقدمه
$\therefore S$	(۱۳)
۳- P	ف
۴- $P \supset T$	۲، (ح$\wedge$)
۵- T	۳،۴، (ح$\supset$)
۶- $T \supset S$	۲، (ح$\wedge$)
۷- S	۵،۶، (ح$\supset$)
۸- $R \wedge S$	ف
۹- S	۸، (ح$\wedge$)
۱۰- S	۱،۳-۷،۸-۹، (ح$\vee$)

۱- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
$\therefore (P \wedge R) \supset (Q \wedge S)$	(۱۴)
۲- $P \wedge R$	ف
۳- P	۲، (ح$\wedge$)
۴- $P \supset Q$	۱، (ح$\wedge$)
۵- Q	۳،۴، (ح$\supset$)
۶- R	۲، (ح$\wedge$)
۷- $R \supset S$	۱، (ح$\wedge$)
۸- S	۶،۷، (ح$\supset$)
۹- $Q \wedge S$	۵،۹، (م$\wedge$)
۱۰- $(P \wedge R) \supset (Q \wedge S)$	۲-۹، (م$\supset$)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
۲- $(P \wedge Q) \supset R$	مقدمه
۳- $\sim(P \wedge R)$	مقدمه
$\therefore \sim P$	(۱۵)
۴- $P \supset (P \wedge Q)$	۱، (جذ)
۵- $P \supset R$	۲،۴، (ق.ش)
۶- $P \supset (P \wedge R)$	۵، (جذ)
۷- $\sim P$	۳،۶، (ر.ت)

۱- $P \supset R$	مقدمه
$\therefore (R \wedge P) \equiv P$	(۱۶)
۲- $R \wedge P$	ف
۳- P	۲، (ح$\wedge$)
۴- P	ف
۵- R	۴،۱، (ح$\supset$)
۶- $R \wedge P$	۵،۴، (م$\wedge$)
۷- $(R \wedge P) \equiv P$	۲-۳،۴-۶ (م$\equiv$)

۱- $(P \vee Q) \supset (R \wedge S)$	مقدمه
۲- $\sim P \supset (T \supset \sim T)$	مقدمه
۳- $\sim R$	مقدمه
$\therefore \sim T$	(۱۷)
۴- P	ف
۵- $P \vee Q$	۴، (م$\vee$)
۶- $R \wedge S$	۵،۱، (ح$\supset$)
۷- R	۶، (ح$\wedge$)
۸- $R \wedge \sim R$	۷،۳، (م$\wedge$)
۹- $\sim P$	۴-۸، (م$\sim$)
۱۰- $T \supset \sim T$	۹،۲، (ح$\supset$)
۱۱- $\sim T \vee \sim T$	۱۰، (اس)
۱۲- $\sim T$	۱۱، (تک)

۱- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
۲- $(Q \vee S) \supset T$	مقدمه
۳- $\sim T$	مقدمه
$\therefore \sim (P \vee R)$	(۱۸)
۴- $P \vee R$	ف
۵- $Q \vee S$	۴،۱، (ذ.م)
۶- T	۵،۲، (ح$\supset$)
۷- $T \wedge \sim T$	۶،۳، (م$\wedge$)
۸- $\sim (P \vee R)$	۴-۷، (م$\sim$)

۱- $(P \vee Q) \supset (R \wedge S)$	مقدمه
۲- $(R \vee T) \supset ({\sim}U \wedge W)$	مقدمه
۳- $(U \vee V) \supset (P \wedge Z)$	مقدمه
$\therefore {\sim}U$	(۱۹)
۴- U	ف
۵- $U \vee V$	۴، (م∨)
۶- $P \wedge Z$	۳،۵، (ح⊃)
۷- P	۶، (ح∧)
۸- $P \vee Q$	۷، (م∨)
۹- $R \wedge S$	۱،۸، (ح⊃)
۱۰- R	۹، (ح∧)
۱۱- $R \vee T$	۱۰، (م∨)
۱۲- ${\sim}U \wedge W$	۲،۱۱، (ح⊃)
۱۳- ${\sim}U$	۱۲، (ح∧)
۱۴- $U \wedge {\sim}U$	۴،۱۳، (م∧)
۱۵- ${\sim}U$	۴-۱۴، (م~)

۱- $P \vee (Q \supset R)$	مقدمه
۲- $[Q \supset (Q \wedge R)] \supset (S \vee T)$	مقدمه
۳- $(S \supset P) \wedge (T \supset U)$	مقدمه
$\therefore P \vee U$	(۲۰)
۴- P	ف
۵- $P \vee U$	۴، (م∨)
۶- $Q \supset R$	ف
۷- $(Q \supset R) \supset (S \vee T)$	۲، (جذ)
۸- $S \vee T$	۶،۷، (ح⊃)
۹- $P \vee U$	۳،۸، (ذ.م)
۱۰- $P \vee U$	۱،۴-۵،۶-۹، (ح∨)

۱- $(P \supset \sim Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
۲- $(\sim Q \supset T) \wedge (S \supset \sim U)$	مقدمه
۳- $(T \supset \sim V) \wedge (\sim U \supset W)$	مقدمه
۴- $P \wedge R$	مقدمه
$\therefore \sim V \wedge W$	(۲۱)
۵- $\sim\sim V \vee \sim W$	ف
۶- $\sim T \vee \sim\sim U$	۳،۵، (ذ.ن)
۷- $\sim\sim Q \vee \sim S$	۲،۶، (ذ.ن)
۸- $\sim P \vee \sim R$	۱،۷، (ذ.ن)
۹- $\sim(P \wedge R)$	۸، (دم)
۱۰- $(P \wedge R) \wedge \sim(P \wedge R)$	۴،۹، (م$\wedge$)
۱۱- $\sim(\sim\sim V \vee \sim W)$	۵-۱۰، (م$\sim$)
۱۲- $\sim\sim\sim V \wedge \sim\sim W$	۱۱، (دم)
۱۳- $\sim V \wedge W$	۱۲، (ن.م)

۱- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
۲- $(Q \vee S) \supset \{[T \supset (T \vee U)] \supset (P \wedge R)\}$	مقدمه
$\therefore P \equiv R$	(۲۲)
۳- T	ف
۴- $T \vee U$	۳، (م$\vee$)
۵- $T \supset (T \vee U)$	۳-۴، (م$\supset$)
۶- $P \vee R$	ف
۷- $Q \vee S$	۱،۶، (ذ.م)
۸- $[T \supset (T \vee U)] \supset (P \wedge R)$	۲،۷، (ح$\supset$)
۹- $P \wedge R$	۵،۸، (ح$\supset$)
۱۰- $(P \vee R) \supset (P \wedge R)$	۶-۹، (م$\supset$)
۱۱- $\sim(P \vee R) \vee (P \wedge R)$	۱۰، (اس)
۱۲- $(\sim P \wedge \sim R) \vee (P \wedge R)$	۱۱، (دم)
۱۳- $(P \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim R)$	۱۲، (جا)
۱۴- $P \equiv R$	۱۳، (تع)

۱- $[P \supset \sim(\sim Q \wedge \sim R)] \wedge [S \supset \sim(Q \vee R)]$	مقدمه
۲- $(\sim T \supset P) \wedge (\sim U \supset S)$	مقدمه
۳- $(T \supset Q) \wedge (U \supset R)$	مقدمه
$\therefore Q \equiv R$	(۲۳)
۴- $\sim Q \vee \sim R$	ف
۵- $\sim T \vee \sim U$	۴،۳، (ذ.ن)
۶- $P \vee S$	۵،۳، (ذ.م)
۷- $(\sim Q \wedge \sim R) \vee \sim(Q \vee R)$	۶،۱، (ذ.م)
۸- $\sim(Q \vee R) \vee \sim(Q \vee R)$	۷، (دم)
۹- $\sim(Q \vee R)$	۸، (تک)
۱۰- $(\sim Q \vee \sim R) \supset \sim(Q \vee R)$	۹-۴، (م$\supset$)
۱۱- $\sim(\sim Q \vee \sim R) \vee \sim(Q \vee R)$	۱۰، (اس)
۱۲- $(\sim\sim Q \wedge \sim\sim R) \vee (\sim Q \wedge \sim R)$	۱۱، (دم)
۱۳- $(Q \wedge R) \vee (\sim Q \wedge \sim R)$	۱۲، (ن.م)
۱۴- $Q \equiv R$	۱۳، (تع)

مقدمه	۱- $(P \vee Q) \supset (R \supset S)$
مقدمه	۲- $[R \supset (R \wedge S)] \supset T$
مقدمه	۳- $T \supset [(\sim U \vee \sim\sim U) \supset (P \wedge U)]$
(۲۴)	$\therefore P \equiv T$
ف	۴- $\sim(\sim U \vee \sim\sim U)$
۴، (دم)	۵- $\sim\sim U \wedge \sim\sim U$
۴-۵، (م~)	۶- $\sim\sim(\sim U \vee \sim\sim U)$
۶، (ح~)	۷- $\sim U \vee \sim\sim U$
۲، (جذ)	۸- $(R \supset S) \supset T$
ف	۹- P
۹، (م∨)	۱۰- $P \vee Q$
۱۰،۱ (ح⊃)	۱۱- $R \supset S$
۱۱،۸ (ح⊃)	۱۲- T
ف	۱۳- T
۱۳،۳ (ح⊃)	۱۴- $(\sim U \vee \sim\sim U) \supset (P \wedge U)$
۱۴،۷ (ح⊃)	۱۵- $P \wedge U$
۱۵، (ح∧)	۱۶- P
۹-۱۲،۱۳-۱۶ (م≡)	۱۷- $P \equiv T$

۱- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	مقدمه
۲- $P \vee R$	مقدمه
۳- $(P \supset \sim S) \wedge (R \supset \sim Q)$	مقدمه
۴- $(Q \wedge \sim S) \supset T$	مقدمه
۵- $S \supset (Q \vee U)$	مقدمه
$\therefore T \vee U$	(۲۵)
۶- $Q \vee S$	۲،۱، (ذ.م)
۷- $\sim S \vee \sim Q$	۳،۲، (ذ.م)
۸- $\sim S$	ف
۹- $S \vee Q$	۶، (جا)
۱۰- Q	۹،۸، (ق.ا)
۱۱- $Q \wedge \sim S$	۱۰،۸، (م$\wedge$)
۱۲- T	۱۱،۴، (ح$\supset$)
۱۳- $T \vee U$	۱۲، (م$\vee$)
۱۴- $\sim Q$	ف
۱۵- S	۱۴،۶، (ق.ا)
۱۶- $Q \vee U$	۱۵،۵، (ح$\supset$)
۱۷- U	۱۶،۱۴، (ق.ا)
۱۸- $T \vee U$	۱۷، (م$\vee$)
۱۹- $T \vee U$	۸،۷–۱۳،۱۴–۱۸، (ح$\vee$)

تمرین ۸.۱: ترجمه و اثبات — صفحه ۳۳

استدلال‌های زیر را اولاً به زبان منطق گزاره‌ها نمادگذاری کنید و ثانیاً آن‌ها را با قواعد استنتاج اثبات کنید.

۱. اگر پلیس قاتل را به زودی دستگیر نکند مردم ناراضی می‌شوند. اگر مردم ناراضی شوند رئیس پلیس استعفا می‌دهد. رئیس پلیس استعفا نمی‌دهد، پس پلیس قاتل را به زودی دستگیر می‌کند.

۲. اگر تقاضا ثابت بماند و قیمت‌ها تنزل کند، میزان معاملات زیاد می‌شود. اگر تنزل قیمت‌ها افزایش میزان معاملات را موجب شود؛ آنگاه می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت. تقاضا ثابت می‌ماند، پس می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت.

۳. اگر به موقع به رئیس جمهور یا وزیر دفاع اطلاع رسیده باشد اعلامیه صادر شده و جلسه هیأت دولت تشکیل گردیده است. اگر اعلامیه صادر شده باشد، رادیو آن را به

اطلاع مردم رسانده است. رادیو اعلامیه را به اطلاع مردم نرسانده است، پس به موقع به رئیس جمهور اطلاع نرسیده است.

۴. اگر امضای پیکاسو در پای این پرده نقاشی ساختگی نباشد، پرده قیمتی است. چنین نیست که یا امضای پیکاسو در پای این پرده ساختگی است یا شیفتگان پرده‌های نفیس دنبال آن نیستند. اگر این پرده کار پیکاسو نباشد، شیفتگان پرده‌های نفیس دنبال آن نیستند. پس این پرده قیمتی است و کار پیکاسو است.

۵. یا سازمان بیمه تقاضای شرکت مهتاب را رد نکرده یا شرکت مهتاب غیرمعتبر بوده و کالا غیراستاندارد است. اگر شرکت مهتاب وجهی را که مورد تقاضای بیمه است، نداشته و کالا غیراستاندارد باشد، پیشنهاد شرکت مهتاب قابل اعتنا نیست. پس اگر شرکت مهتاب وجه مورد تقاضای بیمه را نداشته و سازمان بیمه تقاضای شرکت مهتاب را رد کرده باشد، پیشنهاد شرکت مهتاب قابل اعتنا نیست.

پاسخ تمرین ۸.۱

۱- $\sim P \supset Q$	مقدمه
۲- $Q \supset R$	مقدمه
۳- $\sim R$	مقدمه
$\therefore P$	(۱)
۴- $\sim Q$	۲،۳، (ر.ت)
۵- $\sim\sim P$	۱،۴، (ر.ت)
۶- P	۵، (ح$\sim$)

۱- $(P \wedge Q) \supset R$	مقدمه
۲- $(Q \supset R) \supset S$	مقدمه
۳- P	مقدمه
$\therefore S$	(۲)
۴- $P \supset (Q \supset R)$	۱، (صد)
۵- $Q \supset R$	۳،۴، (ح$\supset$)
۶- S	۲،۵، (ح$\supset$)

مقدمه	۱- $(P \vee Q) \supset (R \wedge S)$
مقدمه	۲- $R \supset T$
مقدمه	۳- $\sim T$
(۳)	$\therefore \sim P$
۲،۲، (ر.ت)	۴- $\sim R$
۴، (م∨)	۵- $\sim R \vee \sim S$
۵، (دم)	۶- $\sim (R \wedge S)$
۶،۱، (ر.ت)	۷- $\sim (P \vee Q)$
۷، (دم)	۸- $\sim P \wedge \sim Q$
۸، (ح∧)	۹- $\sim P$

مقدمه	۱- $\sim P \supset Q$
مقدمه	۲- $\sim (P \vee \sim R)$
مقدمه	۳- $\sim S \supset \sim R$
(۴)	$\therefore Q \wedge S$
۲، (دم)	۴- $\sim P \wedge \sim\sim R$
۴، (ح∧)	۵- $\sim P$
۴، (ح∧)	۶- $\sim\sim R$
۵،۱، (ح⊃)	۷- Q
۶،۳، (ر.ت)	۸- $\sim\sim S$
۸، (ح∼)	۹- S
۹،۷، (م∧)	۱۰- $Q \wedge S$

۱- $\sim P \vee (Q \wedge R)$	مقدمه
۲- $(S \wedge R) \supset T$	مقدمه
$\therefore (S \wedge P) \supset T$	(۵)
۳- $(\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R)$	۱، (پخ)
۴- $\sim P \vee R$	۳، (ح∧)
۵- $P \supset R$	۴، (اس)
۶- $(R \wedge S) \supset T$	۲، (جا)
۷- $R \supset (S \supset T)$	۶، (صد)
۸- $P \supset (S \supset T)$	۵،۷، (ق.ش)
۹- $(P \wedge S) \supset T$	۸، (صد)
۱۰- $(S \wedge P) \supset T$	۹، (جا)

تمرین ۹.۱: ترجمه و اثبات — صفحه ۳۳

استدلال‌های زیر را پس از نمادگذاری اثبات کنید. (مثال‌های فلسفی و ریاضی)

۱. احکام اخلاقی یا بیانگر ادعاهای صادقند یا بیانگر احساساتند. اگر احکام اخلاقی بیانگر ادعاهای صادق باشند، در آن صورت مفهوم «باید» یا مفهومی ناشی از تجربه حسی است یا مفهوم عینی غیرتجربی است. مفهوم «باید» مفهومی ناشی از تجربه حسی نیست. مفهوم «باید» مفهوم عینی غیرتجربی نیست، پس احکام اخلاقی اگرچه بیانگر ادعاهای صادق نیستند، بیانگر احساساتند.

۲. اگر و فقط اگر وجود به تنهایی اصیل باشد، ملاک تشخیص، وجود خاص اشیاست و قول به اصلین نیز صحیح نیست. بنابراین، اگر وجود به تنهایی اصیل باشد در آن صورت اگر حرکت جوهری برقرار باشد، آنگاه ملاک تشخیص، وجود خاص اشیاست.

۳. واقعیتی مستقل از ذهن موجود است. اگر واقعیتی مستقل از ذهن موجود باشد، این واقعیت منشاء انتزاع دو مفهوم وجود و ماهیت است. اگر این واقعیت منشاء انتزاع دو مفهوم وجود و ماهیت باشد در آن صورت اگر هیچکدام از وجود و ماهیت اصیل نباشد، واقعیتی مستقل از ذهن موجود نیست. اگر ماهیت اصیل باشد، ماهیات مصداق واحد خارجی ندارند و حمل مصداقی (حمل شایع) معتبر نیست. حمل مصداقی معتبر است. بنابراین وجود اصیل است و ماهیت اعتباری است (اصیل نیست).

۴. اگر عدد x کوچکتر از y و عدد y کوچکتر از z باشد، x کوچکتر از z است. اگر عدد x مساوی y و عدد y کوچکتر از z باشد، x کوچکتر از z است. عدد x کوچکتر یا مساوی y است. عدد y کوچکتر از z است. بنابراین عدد x کوچکتر از عدد z است.

۵. در مثلث ABC، اگر ضلع a و b باهم مساوی باشند، زوایای A و B نیز مساویند. اگر ضلع a کوچکتر از b باشد، زاویه A کوچکتر از B است. اگر زاویه A کوچکتر یا مساوی زاویه B باشد، زاویه B کوچکتر از زاویه A نیست. اگر ضلع b کوچکتر از ضلع a نباشد، آنگاه یا ضلع a و b باهم مساویند یا ضلع a کوچکتر از ضلع b است. پس اگر زاویه B کوچکتر از زاویه A باشد، ضلع b کوچکتر از ضلع a خواهد بود.

پاسخ تمرین ۱.۹

۱- $P \vee Q$	مقدمه
۲- $P \supset (R \vee S)$	مقدمه
۳- $\sim R$	مقدمه
۴- $\sim S$	مقدمه
$\therefore \sim P \wedge Q$	(۱)
۵- $\sim R \wedge \sim S$	۴،۳، (م$\wedge$)
۶- $\sim(R \vee S)$	۵، (دم)
۷- $\sim P$	۶،۲، (ر.ت)
۸- Q	۷،۱، (ق.ا)
۹- $\sim P \wedge Q$	۸،۷، (م$\wedge$)

۱- $P \equiv (Q \wedge \sim R)$	مقدمه
$\therefore P \supset (S \supset Q)$	(۲)
۲- P	ف
۳- S	ف
۴- $Q \wedge \sim R$	۲،۱، (ح$\equiv$)
۵- Q	۴، (ح$\wedge$)
۶- $S \supset Q$	۳-۵، (م$\supset$)
۷- $P \supset (S \supset Q)$	۲-۶، (م$\supset$)

۱- P	مقدمه
۲- $P \supset Q$	مقدمه
۳- $Q \supset [(\sim R \wedge \sim S) \supset \sim P]$	مقدمه
۴- $S \supset (\sim T \wedge \sim U)$	مقدمه
۵- U	مقدمه
$\therefore R \wedge \sim S$	(۳)
۶- Q	۱،۲، (ح$\supset$)
۷- $(\sim R \wedge \sim S) \supset \sim P$	۳،۶، (ح$\supset$)
۸- $\sim\sim P$	۱، (ن.م)
۹- $\sim(\sim R \wedge \sim S)$	۷،۸، (ر.ت)
۱۰- $\sim\sim R \vee \sim\sim S$	۹، (دم)
۱۱- $T \vee U$	۵، (م$\vee$)
۱۲- $\sim\sim(T \vee U)$	۱۱، (ن.م)
۱۳- $\sim(\sim T \wedge \sim U)$	۱۲، (دم)
۱۴- $\sim S$	۴،۱۳، (ر.ت)
۱۵- $R \vee S$	۱۰، (ن.م)
۱۶- $S \vee R$	۱۰، (جا)
۱۷- R	۱۴،۱۶، (ق.ا)
۱۸- $R \wedge \sim S$	۱۴،۱۷، (م$\wedge$)

۱- $(P \wedge Q) \supset R$	مقدمه
۲- $(S \wedge Q) \supset R$	مقدمه
۳- $P \vee S$	مقدمه
۴- Q	مقدمه
$\therefore R$	(۴)
۵- $(P \vee S) \wedge Q$	۳،۴، (م$\wedge$)
۶- $(P \wedge Q) \vee (S \wedge Q)$	۵، (پخ)
۷- $[(P \wedge Q) \supset R] \wedge [(S \wedge Q) \supset R]$	۱،۲، (م$\wedge$)
۸- $R \vee R$	۶،۷، (ذ.م)
۹- R	۸، (تک)

۱- $P \supset Q$	مقدمه
۲- $R \supset S$	مقدمه
۳- $(S \vee Q) \supset \sim T$	مقدمه
۴- $\sim U \supset (P \vee R)$	مقدمه
$\therefore T \supset U$	(۵)
۵- $\sim U$	ف
۶- $P \vee R$	۵،۴، (ح⊃)
۷- $(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$	۲،۱، (م∧)
۸- $Q \vee S$	۷،۶، (ذ.م)
۹- $S \vee Q$	۸، (جا)
۱۰- $\sim T$	۹،۳، (ح⊃)
۱۱- $\sim U \supset \sim T$	۵-۱۰، (م⊃)
۱۲- $T \supset U$	۱۱، (عک)

تمرین ۱۰.۱: اثبات صفحه ۳۶

قضیه‌های زیر را اثبات کنید.

۱. قانون همانی: (I): $\vdash P \supset P$

۲. $\vdash P \vee (P \supset Q)$

۳. از تناقض: (EFQ): $\vdash (P \wedge \sim P) \supset Q$

۴. $\vdash \sim P \vee (Q \supset P)$

۵. پارادوکس فصلی: (PRL)(Dum): $\vdash (P \supset Q) \vee (Q \supset P)$

۶. $\vdash (P \supset Q) \vee (Q \supset R)$

۷. $\vdash (P \supset Q) \vee (\sim P \supset R)$

۸. $\vdash P \equiv [P \vee (P \wedge Q)]$

۹. $\vdash P \equiv [P \wedge (P \vee Q)]$

۱۰. $\vdash \sim[(P \supset \sim P) \wedge (\sim P \supset P)]$

* ۱۱. اصل پیرس: (P): $\vdash [(P \supset Q) \supset P] \supset P$

۱۲. $\vdash (P \supset Q) \supset [(P \wedge R) \supset (Q \wedge R)]$

۱۳. $\vdash (P \supset Q) \supset [(R \vee P) \supset (Q \vee R)]$

۱۴. $\vdash (P \supset Q) \supset [\sim(Q \wedge R) \supset \sim(R \wedge P)]$

۱۵. $\vdash [(P \vee Q) \supset R] \supset \{[(R \vee S) \supset T] \supset (P \supset T)\}$

پاسخ تمرین ۱۰.۱

(۱)	$\therefore P \supset P$
ف	۱- P
۱، (تک)	۲- $P \wedge P$
۲، (تک)	۳- P
۱-۳، (م⊃)	۴- $P \supset P$

(۲)	$\therefore P \vee (P \supset Q)$
ف	۱- $\sim[P \vee (P \supset Q)]$
۱، (اس)	۲- $\sim[P \vee (\sim P \vee Q)]$
۲، (دم)	۳- $\sim P \wedge (\sim\sim P \wedge \sim Q)$
۳، (شر)	۴- $(\sim P \wedge \sim\sim P) \wedge \sim Q$
۴، (ح∧)	۵- $\sim P \wedge \sim\sim P$
۱-۵، (م∼)	۶- $\sim\sim[P \vee (P \supset Q)]$
۶، (ح∼)	۷- $P \vee (P \supset Q)$

(۳)	$\therefore (P \wedge \sim P) \supset Q$
ف	۱- $P \wedge \sim P$
ف	۲- $\sim Q$
۱، ۲، (م∧)	۳- $(P \wedge \sim P) \wedge \sim Q$
۳، (ح∧)	۴- $P \wedge \sim P$
۲-۴، (م∼)	۵- $\sim\sim Q$
۵، (ح∼)	۶- Q
۱-۶، (م⊃)	۷- $(P \wedge \sim P) \supset Q$

(۴)	$\therefore \sim P \vee (Q \supset P)$
ف	۱- $\sim[\sim P \vee (Q \supset P)]$
۱، (اس)	۲- $\sim[\sim P \vee (\sim Q \vee P)]$
۲، (دم)	۳- $\sim\sim P \wedge (\sim\sim Q \wedge \sim P)$
۳، (ح$\wedge$)	۴- $\sim\sim P$
۳، (ح$\wedge$)	۵- $\sim\sim Q \wedge \sim P$
۵، (ح$\wedge$)	۶- $\sim P$
۶،۴، (م$\wedge$)	۷- $\sim P \wedge \sim\sim P$
۱–۷، (م$\sim$)	۸- $\sim\sim[P \vee (P \supset Q)]$
۸، (ح$\sim$)	۹- $P \vee (P \supset Q)$

(۵)	$\therefore (P \supset Q) \vee (Q \supset P)$
ف	۱- $\sim[(P \supset Q) \vee (Q \supset P)]$
۱، (اس)	۲- $\sim[(\sim P \vee Q) \vee (\sim Q \vee P)]$
۲، (دم)	۳- $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge (\sim\sim Q \wedge \sim P)$
۳، (شر)	۴- $[(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim\sim Q] \wedge \sim P$
۴، (ح$\wedge$)	۵- $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim\sim Q$
۵، (شر)	۶- $\sim\sim P \wedge (\sim Q \wedge \sim\sim Q)$
۶، (ح$\wedge$)	۷- $\sim Q \wedge \sim\sim Q$
۱–۷، (م$\sim$)	۸- $\sim\sim[(P \supset Q) \vee (P \supset Q)]$
۸، (ح$\sim$)	۹- $(P \supset Q) \vee (P \supset Q)$

(۶)	$\therefore (P \supset Q) \vee (Q \supset R)$
ف	۱- $\sim[(P \supset Q) \vee (Q \supset R)]$
۱، (اس)	۲- $\sim[(\sim P \vee Q) \vee (\sim Q \vee R)]$
۲، (دم)	۳- $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge (\sim\sim Q \wedge \sim R)$
۳، (شر)	۴- $[(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim\sim Q] \wedge \sim R$
۴، (ح$\wedge$)	۵- $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim\sim Q$
۵، (شر)	۶- $\sim\sim P \wedge (\sim Q \wedge \sim\sim Q)$
۶، (ح$\wedge$)	۷- $\sim Q \wedge \sim\sim Q$
۱–۷، (م$\sim$)	۸- $\sim\sim[(P \supset Q) \vee (P \supset R)]$
۸، (ح$\sim$)	۹- $(P \supset Q) \vee (P \supset R)$

(۷)	$\therefore (P \supset Q) \vee (\sim P \supset R)$
ف	۱- $\sim[(P \supset Q) \vee (\sim P \supset R)]$
۱، (اس)	۲- $\sim[(\sim P \vee Q) \vee (\sim\sim P \vee R)]$
۲، (دم)	۳- $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge (\sim\sim\sim P \wedge \sim R)$
۳، (شر)	۴- $[(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim\sim\sim P] \wedge \sim R$
۴، (ح$\wedge$)	۵- $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim\sim\sim P$
۵، (جا)	۶- $(\sim Q \wedge \sim\sim P) \wedge \sim\sim\sim P$
۶، (شر)	۷- $\sim Q \wedge (\sim\sim P \wedge \sim\sim\sim P)$
۶، (ح$\wedge$)	۸- $\sim\sim P \wedge \sim\sim\sim P$
۱-۸، (م$\sim$)	۹- $\sim\sim[(P \supset Q) \vee (\sim P \supset R)]$
۹، (ح$\sim$)	۱۰- $(P \supset Q) \vee (\sim P \supset R)$

(۸)	$\therefore P \equiv [P \vee (P \wedge Q)]$
ف	۱- P
۱، (م$\vee$)	۲- $P \vee (P \wedge Q)$
ف	۳- $P \vee (P \wedge Q)$
۴، (پخ)	۴- $(P \vee P) \wedge (P \vee Q)$
۴، (ح$\wedge$)	۵- $P \vee P$
۵، (تک)	۶- P
۱-۲،۳-۶ (م$\equiv$)	۷- $P \equiv [P \vee (P \wedge Q)]$

(۹)	$\therefore P \equiv [P \wedge (P \vee Q)]$
ف	۱- P
۱، (م$\vee$)	۲- $P \vee Q$
۱،۲، (م$\wedge$)	۳- $P \wedge (P \vee Q)$
ف	۴- $P \wedge (P \vee Q)$
۴، (ح$\wedge$)	۵- P
۱-۳،۴-۵ (م$\equiv$)	۶- $P \equiv [P \wedge (P \vee Q)]$

(۱۰) $\therefore \sim[(P \supset \sim P) \wedge (\sim P \supset P)]$

۱- $(P \supset \sim P) \wedge (\sim P \supset P)$	ف
۲- $(\sim P \vee \sim P) \wedge (\sim\sim P \vee P)$	۱، (اس)
۳- $(\sim P \vee \sim P) \wedge (\sim\sim P \vee \sim\sim P)$	۲، (ن.م)
۴- $\sim P \wedge \sim\sim P$	۳، (تک)
۵- $\sim[(P \supset \sim P) \wedge (\sim P \supset P)]$	۱-۴، (م~)

(۱۱) $\therefore [(P \supset Q) \supset P] \supset P$

۱- $(P \supset Q) \supset P$	ف
۲- $\sim(\sim P \vee Q) \vee P$	۱، (اس)
۳- $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \vee P$	۲، (دم)
۴- $(P \wedge \sim Q) \vee P$	۳، (ن.م)
۵- $(P \vee P) \wedge (\sim Q \vee P)$	۴، (پخ)
۶- $P \vee P$	۵، (ح$\wedge$)
۷- P	۶، (تک)
۸- $[(P \supset Q) \supset P] \supset P$	۱-۷، (م$\supset$)

(۱۲) $\therefore (P \supset Q) \supset [(P \wedge R) \supset (Q \wedge R)]$

۱- $P \supset Q$	ف
۲- $P \wedge R$	ف
۳- P	۲، (ح$\wedge$)
۴- R	۲، (ح$\wedge$)
۵- Q	۱،۳، (ح$\supset$)
۶- $Q \wedge R$	۴،۵، (م$\wedge$)
۷- $(P \wedge R) \supset (Q \wedge R)$	۲-۶، (م$\supset$)
۸- $(P \supset Q) \supset [(P \wedge R) \supset (Q \wedge R)]$	۱-۷، (م$\supset$)

(۱۳)	$\therefore (P \supset Q) \supset [(P \vee R) \supset (Q \vee R)]$
ف	۱- $P \supset Q$
ف	۲- $P \vee R$
ف	۳- P
۱،۳، (ح$\supset$)	۴- Q
۴، (م$\vee$)	۵- $Q \vee R$
ف	۶- R
۶، (م$\vee$)	۷- $Q \vee R$
۲،۳-۵،۶-۷، (ح$\vee$)	۸- $Q \vee R$
۲-۸، (م$\supset$)	۹- $(P \vee R) \supset (Q \vee R)$
۱-۹، (م$\supset$)	۱۰- $(P \supset Q) \supset [(P \vee R) \supset (Q \vee R)]$

(۱۴)	$\therefore (P \supset Q) \supset [\sim(Q \wedge R) \supset \sim(R \wedge P)]$
ف	۱- $P \supset Q$
ف	۲- $R \wedge P$
۲، (ح$\wedge$)	۳- P
۲، (ح$\wedge$)	۴- R
۱،۳، (ح$\supset$)	۵- Q
۴،۵، (م$\wedge$)	۶- $Q \wedge R$
۲-۶، (م$\supset$)	۷- $(R \wedge P) \supset (Q \wedge R)$
۷، (عک)	۸- $\sim(Q \wedge R) \supset \sim(R \wedge P)$
۱-۸، (م$\supset$)	۹- $(P \supset Q) \supset [\sim(Q \wedge R) \supset \sim(R \wedge P)]$

$\therefore [(P \vee Q) \supset R] \supset \{[(R \vee S) \supset T] \supset (P \supset T)\}$	(۱۵)
۱- $(P \vee Q) \supset R$	ف
۲- $(R \vee S) \supset T$	ف
۳- P	ف
۴- $P \vee Q$	۳، (م∨)
۵- R	۱،۴، (ح⊃)
۶- $R \vee S$	۵، (م∨)
۷- T	۲،۶، (ح⊃)
۸- $P \supset T$	۳-۷، (م⊃)
۹- $[(R \vee S) \supset T] \supset (P \supset T)$	۲-۸، (م⊃)
۱۰- $[(P \vee Q) \supset R] \supset \{[(R \vee S) \supset T] \supset (P \supset T)\}$	۱-۹، (م⊃)

فصل ۲

سیستم اصل موضوعی (S_A) و سیستم نموداری (S_T) منطق گزاره‌ها

۱.۲ سیستم نموداری منطق گزاره‌ها (S)

جدول ۱.۲: αــ قواعد

$(\sim)$: $\sim\sim\varphi$ $\mid$ φ	$(\wedge)$: $\varphi \wedge \psi$ $\mid$ φ ψ	$(\sim\vee)$: $\sim(\varphi \vee \psi)$ $\mid$ $\sim\varphi$ $\sim\psi$	$(\sim\supset)$: $\sim(\varphi \supset \psi)$ $\mid$ φ $\sim\psi$

نکته ۱.۲

۱. همیشه αــ قواعد را قبل از βــ قواعد بکار ببرید. یعنی تا می‌توانید شاخه‌های کمتری تولید کنید.

۲. تلاش کنید برهان‌های کوتاه‌تری پیدا کنید.

(آ) در بسیاری از موارد شما نیازی به استفاده از قاعده‌ی $(\sim)$ ندارید.

(ب) به عنوان مثال در قواعدی مانند $(\wedge)$ نیاز نیست که حتماً از هر دو نتیجه استفاده کنید.

جدول ۲.۲: βـ قواعد

$(\vee)$: $\varphi \vee \psi$ $\varphi \qquad \psi$	$(\sim\wedge)$: $\sim(\varphi \wedge \psi)$ $\sim\varphi \qquad \sim\psi$	$(\supset)$: $\varphi \supset \psi$ $\sim\varphi \qquad \psi$
$(\equiv)$: $\varphi \equiv \psi$ $\varphi \qquad \sim\varphi$ $\psi \qquad \sim\psi$	$(\sim\equiv)$: $\sim(\varphi \equiv \psi)$ $\varphi \qquad \sim\varphi$ $\sim\psi \qquad \psi$	

تمرین ۱.۲: اثبات **صفحه ۴۵**

درستی یا نادرستی استدلال‌های زیر را با روش نموداری اثبات کنید.

1. $(P \wedge Q) \supset S \vdash P \supset (Q \supset S)$
2. $(Q \wedge R) \supset P, \sim Q, \sim R \vdash \sim P$
3. $\sim(P \wedge Q), R \equiv P \vdash \sim R$
4. $(P \supset Q) \supset (R \supset S), \sim Q \vee \sim S \vdash P \vee \sim R$
5. $P \supset (R \vee S), (R \wedge S) \supset Q \vdash P \supset Q$

پاسخ تمرین ۱.۲

برای اثبات نادرستی، پیدا کردن یک گذر باز کافی است. اما ما به دلیل راهنما بودن این کتاب، تمام گذرهای باز را رسم کرده‌ایم و سطرهای توجیه را نیز آورده‌ایم.

$$(1) \qquad (P \wedge Q) \supset S \vdash_{S_T} P \supset (Q \supset S)$$

$$
\begin{array}{lcl}
1. & (P \wedge Q) \supset S \checkmark & \text{premiss} \\
2. & \sim(P \supset (Q \supset S)) \checkmark & \text{negated conclusion} \\
3. & P & 2,\ (\sim\supset) \\
4. & \sim(Q \supset S) \checkmark & 2,\ (\sim\supset) \\
5. & Q & 4,\ (\sim\supset) \\
6. & \sim S & 4,\ (\sim\supset) \\
7. & \sim(P \wedge Q) \checkmark \qquad S & 1,\ (\supset) \\
8. & \sim P \quad \sim Q \qquad \underset{6}{\otimes} & 7,\ (\sim\wedge) \\
 & \underset{3}{\otimes} \quad\ \ \underset{5}{\otimes} &
\end{array}
$$

$$(2) \qquad (Q \wedge R) \supset P, \sim Q, \sim R \nvdash_{S_T} \sim P$$

$$
\begin{array}{lcl}
1. & (Q \wedge R) \supset P \checkmark & \text{premiss} \\
2. & \sim Q & \text{premiss} \\
3. & \sim R & \text{premiss} \\
4. & \sim\sim P \checkmark & \text{negated conclusion} \\
5. & P & 4,\ (\sim) \\
6. & \sim(Q \wedge R) \checkmark \qquad P & 1,\ (\supset) \\
7. & \sim Q \quad \sim R & 6,\ (\sim\wedge)
\end{array}
$$

$$(3) \qquad \sim(P \wedge Q), R \equiv P \nvdash_{S_T} \sim R$$

1.	$\sim(P \wedge Q)$ ✓				premiss
2.	$R \equiv P$ ✓				premiss
3.	$\sim\sim R$ ✓				negated conclusion
4.	R				3, $(\sim)$
5.	$\sim P$		$\sim Q$		1, $(\sim\wedge)$
6.	R	$\sim R$	R	$\sim R$	2, $(\equiv)$
7.	P	$\sim P$	P	$\sim P$	2, $(\equiv)$
	$\otimes_5$	$\otimes_4$		$\otimes_4$	

(4) $(P \supset Q) \supset (R \supset S), \sim Q \vee \sim S \nvdash_{S_T} P \vee \sim R$

1.	$(P \supset Q) \supset (R \supset S)$ ✓							premiss
2.	$\sim Q \vee \sim S$ ✓							premiss
3.	$\sim(P \vee \sim R)$ ✓							negated conclusion
4.	$\sim P$							3, $(\sim\vee)$
5.	$\sim\sim R$ ✓							3, $(\sim\vee)$
6.	R							5, $(\sim)$
7.	$\sim(P \supset Q)$ ✓				$R \supset S$ ✓			1, $(\supset)$
8.	P	$\sim Q$		$\sim R$		S		7, $(\sim\supset)$; 7, $(\supset)$
9.	$\otimes_4$	$\sim Q$	$\sim S$	$\sim Q$	$\sim S$	$\sim Q$	$\sim S$	2, $(\vee)$
							$\otimes_8$	

(5) $P \supset (R \vee S), (R \wedge S) \supset Q \nvdash_{S_T} P \supset Q$

1.	$P \supset (R \vee S)$ ✓	premiss
2.	$(R \wedge S) \supset Q$ ✓	premiss
3.	$\sim(P \supset Q)$ ✓	negated conclusion
4.	P	3, $(\sim \supset)$
5.	$\sim Q$	3, $(\sim \supset)$
6.	$\sim P$ $\quad$ $R \vee S$ ✓	1, $(\supset)$
7.	$\otimes_4$ $\quad$ $\sim(R \wedge S)$ ✓ $\quad$ Q	2, $(\supset)$
8.	R $\quad$ S $\quad$ $\otimes_5$	6, $(\vee)$
9.	$\sim R$ $\quad$ $\sim S$ $\quad$ $\sim R$ $\quad$ $\sim S$	7, $(\sim\wedge)$
	$\otimes_8$ $\quad\quad\quad\quad$ $\otimes_8$	

تمرین ۲.۲: اثبات صفحه ۴۶

قضیه‌های زیر را به روش نموداری اثبات کنید.

1. $\vdash [P \supset (Q \wedge R)] \supset (P \supset R)$
2. $\vdash [(P \supset Q) \wedge \sim Q] \supset \sim P$
3. $\vdash ([(P \supset Q) \wedge (R \supset S)] \wedge (P \vee R)) \supset (Q \vee S)$

پاسخ تمرین ۲.۲

1.	$\sim\Big((P \supset (Q \wedge R)) \supset (P \supset R)\Big)$ ✓	negated conclusion
2.	$P \supset (Q \wedge R)$ ✓	1, $(\sim\supset)$
3.	$\sim(P \supset R)$ ✓	1, $(\sim\supset)$
4.	P	3, $(\sim\supset)$
5.	$\sim R$	3, $(\sim\supset)$
6.	$\sim P \qquad Q \wedge R$ ✓	2, $(\supset)$
7.	$\underset{4}{\otimes} \qquad R$	6, $(\wedge)$
	$\qquad\qquad \underset{5}{\otimes}$	

1.	$\sim\Big(((P \supset Q) \wedge \sim Q) \supset \sim P\Big)$ ✓	negated conclusion
2.	$(P \supset Q) \wedge \sim Q$ ✓	1, $(\sim\supset)$
3.	$\sim\sim P$	1, $(\sim\supset)$
4.	$P \supset Q$ ✓	2, $(\wedge)$
5.	$\sim Q$	2, $(\wedge)$
6.	$\sim P \qquad Q$	4, $(\supset)$
	$\underset{3}{\otimes} \qquad \underset{5}{\otimes}$	

1.	$\sim\Big(\big(((P \supset Q) \wedge (R \supset S)) \wedge (P \vee R)\big) \supset (Q \vee S)\Big)$ ✓	$\sim\vdash$
2.	$((P \supset Q) \wedge (R \supset S)) \wedge (P \vee R)$ ✓	1, $(\sim\supset)$
3.	$\sim(Q \vee S)$ ✓	1, $(\sim\supset)$
4.	$(P \supset Q) \wedge (R \supset S)$ ✓	2, $(\wedge)$
5.	$P \vee R$ ✓	2, $(\wedge)$
6.	$P \supset Q$ ✓	4, $(\wedge)$
7.	$R \supset S$ ✓	4, $(\wedge)$
8.	$\sim Q$	3, $(\sim\vee)$
9.	$\sim S$	3, $(\sim\vee)$
10.	$\sim P \qquad Q$	6, $(\supset)$
11.	$\sim R \qquad S \qquad \underset{8}{\otimes}$	7, $(\supset)$
12.	$P \qquad R \qquad \underset{9}{\otimes}$	5, $(\vee)$
	$\underset{10}{\otimes} \qquad \underset{11}{\otimes}$	

بخش دوم

ساختار معنایی و فرانظریه منطق گزاره‌ها

فصل ۳

ساختار معنایی منطق گزاره‌ها

۱.۳ قواعد معناشناسی L_S

تمرین ۱.۳: ارزش نامتعین — صفحه ۵۳

اگر R گزاره صادق و S گزاره کاذب باشد، اما ارزش P و Q نامشخص باشد، ارزش هریک از گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

1. $(P \wedge Q) \wedge (\sim R \vee S)$
2. $(Q \supset R) \supset (R \supset S)$
3. $(\sim P \vee Q) \vee (P \vee \sim Q)$
4. $[P \vee (Q \vee S)] \wedge \sim[(P \vee Q) \vee S]$
5. $(P \supset Q) \supset ([P \supset (Q \supset R)] \supset (P \supset R))$
6. $[P \vee (Q \wedge R)] \wedge \sim[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$
7. $(P \supset Q) \supset ([P \supset (Q \supset S)] \supset (P \supset S))$
8. $[P \wedge (Q \vee S)] \vee \sim[(P \wedge Q) \vee (P \wedge S)]$
9. $(R \supset P) \supset ([R \supset (P \supset Q)] \supset (R \supset Q))$
10. $(P \supset S) \supset ([P \supset (S \supset Q)] \supset (P \supset Q))$

پاسخ تمرین ۱.۳

$$I(R) = 1 \qquad I(S) = 0$$

1. $V_I((P \wedge Q) \wedge (\sim R \vee S)) = (? \wedge ?) \wedge (\sim 1 \vee 0) = ? \wedge (0 \vee 0) = ? \wedge 0 = 0$
2. $V_I((Q \supset R) \supset (R \supset S)) = (? \supset 1) \supset (1 \supset 0) = 1 \supset 0 = 0$

3. $V_I((\sim P \vee Q) \vee (P \vee \sim Q)) =$
$\begin{cases} (\sim 1 \vee ?\,) \vee (1 \vee \sim ?\,) = (0 \vee ?\,) \vee 1 = 1 \\ (\sim 0 \vee ?\,) \vee (0 \vee \sim ?\,) = (1 \vee ?\,) \vee (0 \vee ?\,) = 1 \vee ? = 1 \end{cases} = 1$

4. $V_I([P \vee (Q \vee S)] \wedge \sim[(P \vee Q) \vee S]) = [x \vee (y \vee 0)] \wedge \sim[(x \vee y) \vee 0] =$
$(x \vee y) \wedge \sim(x \vee y) = \begin{cases} 1 \wedge \sim 1 = 1 \wedge 0 = 0 \\ 0 \wedge \sim 0 = 0 \wedge 1 = 0 \end{cases} = 0$

5. $V_I((P \supset Q) \supset ([P \supset (Q \supset R)] \supset (P \supset R))) = (? \supset ?\,) \supset ([? \supset (? \supset 1)] \supset (? \supset 1)) = ? \supset (? \supset 1) = ? \supset 1 = 1$

6. $V_I([P \vee (Q \wedge R)] \wedge \sim[(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]) = [x \vee (y \wedge 1)] \wedge \sim[(x \vee y) \wedge (x \vee 1)] = (x \vee y) \wedge \sim[(x \vee y) \wedge 1] = (x \vee y) \wedge \sim(x \vee y) = 0$

7. $V_I((P \supset Q) \supset ([P \supset (Q \supset S)] \supset (P \supset S))) = (x \supset y) \supset ([x \supset (y \supset 0)] \supset (x \supset 0)) = (x \supset y) \supset [(x \supset \sim y) \supset \sim x] =$
$\begin{cases} (1 \supset y) \supset [(1 \supset \sim y) \supset \sim 1] = y \supset (\sim y \supset 0) = y \supset y = 1 \\ (0 \supset y) \supset [(0 \supset \sim y) \supset \sim 0] = 1 \supset (1 \supset 1) = 1 \supset 1 = 1 \end{cases} = 1$

8. $V_I([P \wedge (Q \vee S)] \vee \sim[(P \wedge Q) \vee (P \wedge S)]) = [x \wedge (y \vee 0)] \vee \sim[(x \wedge y) \vee (x \wedge 0)] = (x \wedge y) \vee \sim[(x \wedge y) \vee 0] = (x \wedge y) \vee \sim(x \wedge y) = 1$

9. $V_I((R \supset P) \supset ([R \supset (P \supset Q)] \supset (R \supset Q))) = (1 \supset x) \supset ([1 \supset (x \supset y)] \supset (1 \supset y)) = x \supset [(x \supset y) \supset y] =$
$\begin{cases} 1 \supset [(1 \supset y) \supset y] = y \supset y = 1 \\ 0 \supset [(0 \supset y) \supset y] = 1 \end{cases} = 1$

10. $V_I((P \supset S) \supset ([P \supset (S \supset Q)] \supset (P \supset Q))) = (x \supset 0) \supset ([x \supset (0 \supset y)] \supset (x \supset y)) = \sim x \supset [(x \supset 1) \supset (x \supset y)] = \sim x \supset [1 \supset (x \supset y)] = \sim x \supset (x \supset y) = \begin{cases} \sim 1 \supset (1 \supset y) = 0 \supset (x \supset y) = 1 \\ \sim 0 \supset (0 \supset y) = 1 \supset 1 = 1 \end{cases} = 1$

۲.۳ جدول ارزش گزاره‌های مرکب

۳.۳ راستگو، متناقض، ممکن‌الصدق

تمرین ۲.۳ : راستگو، متناقض، ممکن الصدق **صفحه ۵۶**

با استفاده از جدول ارزش تعیین کنید کدام یک از فرمول‌های زیر راستگو، کدام متناقض و کدام ممکن‌الصدق است.

1. $P \supset {\sim}P$
2. $(P \supset {\sim}P) \wedge ({\sim}P \supset P)$
3. $P \supset (P \supset P)$
4. $(P \supset P) \supset P$
5. $P \supset (P \wedge P)$
6. $(P \wedge Q) \supset P$
7. $({\sim}P \wedge Q) \wedge (Q \supset P)$
8. $[(P \supset Q) \supset Q] \supset Q$
9. $[(P \supset Q) \supset P] \supset P$
10. $(P \supset Q) \supset [{\sim}(Q \wedge R) \supset {\sim}(R \wedge P)]$

پاسخ تمرین ۲.۳

یک روش دیگر برای تعیین نوع فرمول استفاده از روش ساده کردن به روش نحوی است. ازین جهت در ادامه، فرمول ساده شده که همارز فرمول مورد نظر هست را نیز خواهم آورد.

و در روش تماماً نحوی، راستگوها اثبات‌پذیرند، متناقض‌ها، نقیضشان اثبات‌پذیر است (فرض آن به تناقض منجر می‌شود) و ممکن‌الصدق‌ها نه خودشان و نه نقیضشان اثبات‌پذیر نیستند.

۱. ممکن‌الصدق $P \supset {\sim}P$

$$\dashv\vdash {\sim}P \vee {\sim}P \dashv\vdash {\sim}P$$

۲. متناقض $(P \supset {\sim}P) \wedge ({\sim}P \supset P)$

$$\dashv\vdash ({\sim}P \vee {\sim}P) \wedge ({\sim\sim}P \vee P) \dashv\vdash ({\sim}P \vee {\sim}P) \wedge (P \vee P) \dashv\vdash {\sim}P \wedge P$$

۳. راستگو $P \supset (P \supset P)$

$$\dashv\vdash {\sim}P \vee ({\sim}P \vee P) \dashv\vdash ({\sim}P \vee {\sim}P) \vee P \dashv\vdash {\sim}P \vee P$$

۴. ممکن‌الصدق $(P \supset P) \supset P$

$$\dashv\vdash \sim(\sim P \vee P) \vee P \dashv\vdash (\sim\sim P \wedge \sim P) \vee P \dashv\vdash P$$

۵. راستگو $P \supset (P \wedge P)$

$$\dashv\vdash \sim P \vee (P \wedge P) \dashv\vdash \sim P \vee P$$

۶. ممکن‌الصدق $(P \wedge Q) \supset P$

$$\begin{aligned}&\dashv\vdash \sim(P \wedge Q) \vee P \dashv\vdash (\sim P \vee \sim Q) \vee P \dashv\vdash \sim P \vee (\sim Q \vee P)\\ &\dashv\vdash \sim P \vee (P \vee \sim Q) \dashv\vdash (\sim P \vee P) \vee \sim Q \dashv\vdash \sim Q\end{aligned}$$

۷. متناقض $(\sim P \wedge Q) \wedge (Q \supset P)$

$$\begin{aligned}&\dashv\vdash (\sim P \wedge Q) \wedge (\sim Q \vee P) \dashv\vdash (\sim P \wedge Q) \wedge (P \vee \sim Q)\\ &\dashv\vdash (\sim P \wedge \sim\sim Q) \wedge \sim\sim(P \vee \sim Q)\\ &\dashv\vdash (\sim P \wedge \sim\sim Q) \wedge \sim(\sim P \wedge \sim\sim Q)\end{aligned}$$

۱- $(\sim P \wedge Q) \wedge (Q \supset P)$	مقدمه
$\therefore P \wedge \sim P$	
۲- $\sim P \wedge Q$	۱، (ح∧)
۳- $Q \supset P$	۱، (ح∧)
۴- $\sim P$	۲، (ح∧)
۵- Q	۲، (ح∧)
۶- P	۳،۵، (ح⊃)
۷- $P \wedge \sim P$	۴،۶، (م∧)

۸. ممکن‌الصدق $[(P \supset Q) \supset Q] \supset Q$

$$\begin{aligned}
&\dashv\vdash \sim[\sim(\sim P \vee Q) \vee Q] \vee Q \dashv\vdash [\sim\sim(\sim P \vee Q) \wedge \sim Q] \vee Q\\
&\dashv\vdash [(\sim P \vee Q) \wedge \sim Q] \vee Q \dashv\vdash [(\sim P \vee Q) \vee Q] \wedge (\sim Q \vee Q)\\
&\dashv\vdash (\sim P \vee Q) \vee Q \dashv\vdash \sim P \vee Q
\end{aligned}$$

P	Q	$P \supset Q$	$(P \supset Q) \supset Q$	$[(P \supset Q) \supset Q] \supset Q$	$P \supset Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1

۹. راستگو $[(P \supset Q) \supset P] \supset P$

$$\begin{aligned}
&\dashv\vdash \sim[\sim(\sim P \vee Q) \vee P] \vee P \dashv\vdash [\sim\sim(\sim P \vee Q) \wedge \sim P] \vee P\\
&\dashv\vdash [(\sim P \vee Q) \wedge \sim P] \vee P \dashv\vdash [(\sim P \vee Q) \vee P] \wedge (\sim P \vee P)\\
&\dashv\vdash (\sim P \vee Q) \vee P \dashv\vdash (\sim P \vee P) \vee Q \dashv\vdash \sim P \vee P
\end{aligned}$$

۱۰. راستگو $(P \supset Q) \supset [\sim(Q \wedge R) \supset \sim(R \wedge P)]$

$$\begin{aligned}
&\dashv\vdash \sim(\sim P \vee Q) \vee [\sim\sim(Q \wedge R) \vee \sim(R \wedge P)]\\
&\dashv\vdash (P \wedge \sim Q) \vee [(Q \wedge R) \vee (\sim R \vee \sim P)]\\
&\dashv\vdash (P \wedge \sim Q) \vee [(Q \vee \sim R) \wedge (R \vee \sim R)] \vee \sim P\\
&\dashv\vdash (P \wedge \sim Q) \vee (Q \vee \sim R) \vee \sim P\\
&\dashv\vdash [(P \vee \sim P) \wedge (\sim Q \vee \sim P)] \vee (Q \vee \sim R)\\
&\dashv\vdash (\sim Q \vee \sim P) \vee (Q \vee \sim R) \dashv\vdash \sim Q \vee Q
\end{aligned}$$

تمرین ۳.۳: هم‌ارزی ★★

صفحه ۵۶

با استفاده از جدول ارزش تعیین کنید بین کدام یک از فرمول‌های زیر هم‌ارزی برقرار است.

1. P
2. $\sim P \vee Q$
3. $\sim P \supset (P \wedge Q)$
4. $P \equiv Q$
5. $P \wedge (Q \supset P)$
6. $P \supset Q$
7. $P \equiv (Q \equiv P)$
8. $\sim(P \wedge \sim Q)$

9. $P \wedge (P \supset Q)$ 10. $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$

قرارداد ۱.۳ *از این به بعد برای سادگی در نوشتار با توجه به ویژگی‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری عطف و فصل، پرانتزهای داخلی این فرمول‌ها را حذف می‌کنیم.*
برای بیان دقیق‌تر می‌توان تعریف بازگشتی زیر را به زبان صوری اضافه کرد:

$$\varphi_1 \star \cdots \star \varphi_n \overset{\text{df}}{=} (\varphi_1 \star \varphi_2) \star \cdots \star \varphi_n; \qquad \star \in \{\wedge, \vee\}$$

پاسخ تمرین ۳.۳

برای پیدا کردن فرمول‌های هم‌ارز این تمرین ۳ روش وجود دارد:

۱. روش استاندارد: ابتدا جدول ارزش همه‌ی فرمول‌ها را در یک جدول رسم می‌کنیم و سپس فرمول‌هایی که در همه‌ی سطرها باهم هم‌ارزش هستند را به عنوان فرمول‌های هم‌ارز باهم معرفی می‌کنیم.

۲. روش نحوی ساده کردن: فرمول‌ها را با قواعد استنتاج به سلیقه‌ی خود ساده کنید. به عنوان مثال می‌توانید همه‌ی فرمول‌ها را به فرم زیر تبدیل کنید:

$$(\varphi_{11} \vee \cdots \vee \varphi_{1n}) \wedge \cdots \wedge (\varphi_{m1} \vee \cdots \vee \varphi_{mn})$$

به طوری که هر کدام از φ_{ij}ها یا یک جمله‌نشانه هستند یا نقیض یک جمله نشانه.

یا اینکه فرمول‌ها را به فرمول‌هایی با ادات‌ها و اتم‌های کمتر (پیچیدگی کمتر) ساده کنید.

۳. روش حذف کردن: جمله نشانه‌ای که بیشترین استفاده در فرمول‌ها دارد را با دادن ارزش به دو فرمول تبدیل می‌کنیم. اگر به ساده کردن بیشتر نیاز داشتیم، فرآیند را تکرار می‌کنیم.

روش سوم حداقل در این تمرین و بسیاری موارد دیگر از همه ساده‌تر و سریع‌تر است. ازین جهت از روش سوم استفاده می‌کنیم:

$I(P)$	P	$\sim P \vee Q$	$\sim P \supset (P \wedge Q)$	$P \equiv Q$	$P \wedge (Q \supset P)$	$P \supset Q$
1	$\top$	Q	$\top$	Q	$\top$	Q
0	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\sim Q$	$\bot$	$\top$

$I(P)$	$P \equiv (Q \equiv P)$	$\sim(P \wedge \sim Q)$	$P \wedge (P \supset Q)$	$(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$
1	Q	Q	Q	Q
0	Q	$\top$	$\bot$	$\sim Q$

بنابراین هم‌ارزی فرمول‌های مزبور به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \{1,3,5\}, \{2,6,8\}, \{4,10\}, \{7\}, \{9\} \rangle$$

از طرفی دیگر برای هر گروه می‌توان فرمول‌های ساده‌ی زیر را به عنوان نماینده معرفی کرد:

$$\langle P, P \supset Q, P \equiv Q, Q, P \wedge Q \rangle$$

۴.۳ توابع ارزش

تمرین ۴.۳: توابع ارزش صفحه ۵۸

با توجه به جدول زیر که جدول توابع ارزش دارای دو جمله‌نشانه است، برای هر کدام از توابع $f_1, \cdots, f_{16}$ یک فرمول بسازید.

φ	ψ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

پاسخ تمرین ۴.۳

پیدا کردن کردن فرمول‌های متناسب با توابع ارزش را اصطلاحاً نمادگذاری می‌نامند. به عنوان مثال می‌خواهیم تابع ارزش f_4 را نمادگذاری کنیم. به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱. دقیقاً سطرهایی که تابع مورد نظر صادق است را در نظر می‌گیریم. یعنی:

$$f_4(1,1) = 1, \qquad f_4(1,0) = 1$$

۲. برای هر ضابطه یک فرمول معرفی می‌کنیم. به این صورت که

(آ) برای مولفه‌ی اول جمله نشانه P و برای مولفه دوم جمله نشانه Q را قرار می‌دهیم.

(ب) برای مولفه‌هایی که ارزش 1 دارند خود جمله‌نشانه و برای مولفه‌هایی که ارزش 0 دارند، نقیض آن جمله نشانه را قرار می‌دهیم.

(ج) جمله‌نشانه‌ها و نقیض جمله نشانه‌های بدست آمده را باهم عطف کنیم.

بنابراین فرمول‌های $P \wedge Q$ و $P \wedge {\sim}Q$ را خواهیم داشت.

۳. فرمول‌های بدست آمده را باهم فصل می‌کنیم.
پس فرمول متناظر با f_4 فرمول $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$ است.

۴. در نهایت در صورت تمایل می‌توانیم فرمول را ساده نیز کنیم. پس فرمول ساده شده‌ی تابع f_4 فرمول P است.

حالا نمادگذاری‌های اولیه و ساده شده‌ی این ۱۶ تابع را خواهم آورد:

f_1	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$\top$
f_2	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$	$P \vee Q$
f_3	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$Q \supset P$
f_4	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$	P
f_5	$(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$P \supset Q$
f_6	$(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q)$	Q
f_7	$(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$P \equiv Q$
f_8	$P \wedge Q$	$P \wedge Q$
f_9	$(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$\sim(P \wedge Q)$
f_{10}	$(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$	$\sim(P \equiv Q)$
f_{11}	$(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$\sim Q$
f_{12}	$P \wedge \sim Q$	$\sim(P \supset Q)$
f_{13}	$(\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$\sim P$
f_{14}	$\sim P \wedge Q$	$\sim(Q \supset P)$
f_{15}	$\sim P \wedge \sim Q$	$\sim(P \vee Q)$
f_{16}		$\perp$

۵.۳ اعتبار معنایی و نتیجه معنایی

تمرین ۵.۳: اعتبار و عدم اعتبار صفحه ۶۰

با استفاده از جدول ارزش، اعتبار یا عدم اعتبار استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

1. $P \supset Q, Q \supset P \vdash P \vee Q$
2. $P \supset Q, P \vee Q \vdash Q$
3. $P \supset (Q \supset R), P \supset Q \vdash P \supset R$
4. $(P \supset Q) \wedge (P \supset R), P \vdash Q \vee R$
5. $P \supset (Q \wedge R) \vdash \sim(Q \wedge R) \supset P$

6. $(P \vee Q) \supset (P \wedge Q), P \wedge Q \vdash P \vee Q$

7. $P \supset (Q \vee R), P \supset \sim Q \vdash P \vee R$

8. $(P \vee Q) \supset (P \wedge Q), \sim(P \vee Q) \vdash \sim(P \wedge Q)$

9. $P \vee (Q \wedge \sim P), P \vdash \sim(Q \wedge \sim P)$

10. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), \sim S \vee \sim Q \vdash \sim R \vee \sim P$

پاسخ تمرین ۵.۳

روش استاندارد حل این تمرین به این صورت است که ابتدا جدول‌های ارزش همه‌ی فرمول‌های استدلال مورد نظر را در یک جدول رسم می‌کنیم، سپس جدول را بررسی می‌کنیم. اگر در همه‌ی سطرهایی که همه‌ی مقدمات ارزش 1 داشتند نتیجه هم ارزش 1 را داشت (یعنی نتیجه صدق مقدمات را حفظ کرد) استدلال مورد نظر را معتبر و در غیراینصورت نامعتبر اعلام می‌کنیم.

اما اگر بر روی سیستم استنتاج طبیعی مسلط هستید می‌توانید از روش سریع‌تر نحوی هم استفاده کنید. به این صورت که اگر توانستید استدلال را اثبات کنید، آن را معتبر و در غیراینصورت آن را نامعتبر اعلام می‌کنید.

۱. استدلال‌های معتبر: 2,3,4,6,8,9,10

۲. استدلال‌های نامعتبر: 1,5,7

برای نمونه جدول‌های ارزش موردهای ۱، ۲ و ۵ را رسم می‌کنیم.

P	Q	$P \supset Q$	$Q \supset P$	$P \vee Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	0

P	Q	$P \supset Q$	$P \vee Q$	Q
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \supset (Q \wedge R)$	$\sim(Q \wedge R)$	$\sim(Q \wedge R) \supset P$
1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0

۶.۳ نشان دادن عدم اعتبار

تمرین ۶.۳: مثال نقض صفحه ۶۲

عدم اعتبار استدلال‌های زیر را با روش اسناد ارزش‌ها و با ارائه حداقل یک تعبیر نشان دهید.

1. $P \supset (Q \supset R), Q, \sim R \nvDash P$
2. $P \supset (Q \vee R), R \supset (S \wedge T), \sim S \nvDash P \supset T$
3. $P \supset (Q \supset R), Q \supset (\sim R \supset S), (R \vee S) \supset T \nvDash P \supset T$
4. $(P \vee Q) \supset R, R \supset (Q \vee S), P \supset (\sim T \supset Q), (T \supset P) \supset \sim S \nvDash Q \equiv R$
5. $P \equiv Q, Q \equiv (R \wedge S), R \equiv (P \vee T), P \vee T \nvDash P \wedge T$
6. $P \equiv (Q \supset R), Q \equiv (\sim P \wedge \sim R), R \equiv (P \vee \sim Q), Q \nvDash P \vee R$

*7. $(P \supset Q) \wedge (R \supset S), P \vee R, (Q \vee S) \supset (T \wedge U), T \supset (U \supset V), V \supset (P \supset W) \nvDash W$

8. $P \vee (Q \wedge R), (P \vee Q) \supset (S \equiv \sim T), (S \supset \sim T) \supset (T \wedge \sim U), (U \supset V) \wedge (V \supset T), (Q \supset R) \supset V \nvDash V$
9. $P \equiv (Q \equiv \sim R), Q \supset (\sim R \vee \sim S), [R \supset (Q \vee \sim T)] \wedge (P \supset Q), [U \supset (S \wedge T)] \wedge (T \supset \sim V), [(Q \wedge R) \supset \sim U] \wedge [U \supset (Q \vee R)], (Q \vee V) \wedge \sim V \nvDash \sim U \wedge \sim V$
10. $P \equiv (Q \vee R), Q \equiv (S \supset R), R \equiv (S \equiv \sim T), S \equiv (T \supset U), T \equiv (U \equiv S), U \vee \sim P \nvDash P \equiv U$

پاسخ تمرین ۶.۳

با توجه به توضیحات صفحه ۶۱ کتاب، هر کدام از موارد این تمرین را به عنوان یک دستگاه معادلات در ریاضیات در نظر بگیرید. نکته‌ی اصلی این است که ابتدا سراغ معادلاتی خواهیم رفت که مجهول و حالات کمتری داشته باشند. به عنوان مثال

۱. معادله‌ی زیر یک مجهولی با یک حالت (جواب) است:

$$V_I(\sim P) = 1, \qquad I(P) \in \{0\}$$

۲. معادله‌ی زیر یک معادله‌ی دو مجهولی با یک حالت است:

$$V_I(P \vee Q) = 0, \qquad \langle I(P), I(Q)\rangle \in \{\langle 0, 0\rangle\}$$

۳. معادله‌ی زیر دو مجهولی با سه حالت است:

$$V_I(P \vee Q) = 1, \qquad \langle I(P), I(Q)\rangle \in \{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$$

و بنابراین تا می‌توانیم شاخه‌ها و حالت‌های کمتری تولید می‌کنیم.
من به عنوان نمونه مورد جالب ۷ را انتخاب کردم و روند حل مسئله را توضیح خواهم داد. در ادامه فرض من این است که می‌خواهیم همه‌ی تعبیرهای عدم اعتبار استدلال مورد نظر را پیدا کنیم.

۱. به W در نتیجه ارزش 0 اسناد می‌دهیم.

۲. با توجه به ارزش W مقدمات را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\langle P \supset Q, R \supset S, P \vee R, Q \supset (T \wedge U), S \supset (T \wedge U), (T \wedge U) \supset V, V \supset \sim P\rangle$$

۳. حالا می‌بینیم که هیچ معادله‌ای با یک جواب (حالت) یا دو جواب (حالت) نداریم. پس به سراغ معادلات با سه جواب (حالت) می‌رویم. پس گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\langle P \supset Q, R \supset S, P \vee R, V \supset \sim P\rangle$$

۴. حالا جمله نشانه‌ای که بیشترین تکرار را در این معادلات دو مجهولی دارد را انتخاب کرده و دو حالت آن را بررسی می‌کنیم. بنابراین یک بار مسئله را وقتی که $I(P) = 1$ باشد حل کرده و بار دیگر وقتی که $I(P) = 0$ باشد.

(آ) $I(P) = 1$

۵. مرحله ۲. را با توجه به ارزش P به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\langle Q, R \supset S, Q \supset (T \wedge U), S \supset (T \wedge U), (T \wedge U) \supset V, \sim V \rangle$$

۶. پس: $I(Q) = 1, I(V) = 0$

۷. مجدداً ساده می‌کنیم:

$$\langle R \supset S, T \wedge U, S \supset (T \wedge U), \sim(T \wedge U) \rangle$$

۸. می‌بینیم که به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین P نباید صادق باشد.
البته اگر در مرحله ۲. دقت بیشتر می‌کردیم متوجه می‌شدیم که P باید کاذب باشد. چرا که استدلال زیر را داریم:

$$P \supset Q, Q \supset (T \wedge U), (T \wedge U) \supset V, V \supset \sim P \vdash \sim P$$

اما از آنجا که شاید دیدن چنین موارد کمی زمانبر باشد، خواننده می‌تواند همین روش حلی که در حال گفتنش هستیم را دنبال کند و اگر شاخه‌ای به بن بست (تناقض) رسید، آن شاخه را نادیده بگیرد.

(ب) $I(P) = 0$

۵. مرحله ۲. را با توجه به ارزش P به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\langle R \supset S, R, Q \supset (T \wedge U), S \supset (T \wedge U), (T \wedge U) \supset V \rangle$$

۶. پس: $I(R) = 1$

۷. مجدداً ساده می کنیم:

$$\langle S, Q \supset (T \wedge U), S \supset (T \wedge U), (T \wedge U) \supset V \rangle$$

۸. پس: $I(S) = 1$

۹. مجدداً ساده می‌کنیم:

$$\langle Q \supset (T \wedge U), T \wedge U, (T \wedge U) \supset V \rangle$$

۱۰. پس: $I(T) = I(U) = 1$

۱۱. مجدداً ساده می‌کنیم:

$$\langle V \rangle$$

۱۲. پس $I(V) = 1$ و ارزش Q دلخواه است.

بنابراین پاسخ مورد ۷ ارزش‌های زیر است:

P	Q	R	S	T	U	V	W
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0

نکته‌ای که می‌توان در فرآیند حل مورد ۷ اضافه کرد این است که از آنجا که در مرحله ۲. گزاره‌های T و U در همه جا به صورت عطفی آمده‌اند، می‌توان آن را یک گزاره مثل A در نظر گرفت و در نتیجه مرحله ۲. را با فرض $T \wedge U = A$ به صورت زیر ساده کرد و فرآیند را با سرعت بیشتری ادامه داد:

$$\langle P \supset Q, R \supset S, P \vee R, Q \supset A, S \supset A, A \supset V, V \supset {\sim}P \rangle$$

اما پاسخ نهایی همه‌ی موارد:

	P	Q	R	S	T	U	V	W
1.	0	1	0					
2.	1	1	0	0	0			
3.	1	0	0	0	0			
4.	0	0	1	1	1			
5.	1	1	1	1	0			
	0	0	1	0	1			
6.	0	1	0					
7.	0	1	1	1	1	1	1	0
	0	0	1	1	1	1	1	0
8.	1	1	0	0	1	0	0	
9.	1	1	0	1	1	1	0	
10.	0	0	0	1	1	1		

فصل ۴

فرانظریه منطق گزاره‌ها

۱.۴ فراقضیه بهنجاری (صحت)

$$\Sigma \vdash_{S_N} \varphi \implies \Sigma \vDash_{S_N} \varphi$$

تمرین ۱.۴: فراقضیه صحت — صفحه ۷۱

اثبات کنید که اگر در سطر $n+1$ ام یک برهان از قواعد «ح $\wedge$»، «م $\wedge$»، «ح $\equiv$» و «م $\equiv$» استفاده شود، استدلال‌های متناظر سطر مزبور معتبرند.

پاسخ تمرین ۱.۴

(ح $\wedge$) در قاعده معرفی عطف فرمول $\varphi \wedge \psi$ سطری از برهان n سطری مبتنی بر مجموعه فرمول‌های Γ است و در سطر $n+1$ ام، فرمول φ یا فرمول ψ مبتنی بر Γ بدست می‌آید. بنابراین یک $m \leq n$ وجود دارد به طوری که:

سطر ابتداء	شماره سطر	سطر برهان	استدلال متناظر
Γ	m	$\varphi \wedge \psi$	$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$
Γ	$n+1$	φ	$\Gamma \vdash \varphi$
Γ	$n+1$	ψ	$\Gamma \vdash \psi$

طبق فرض استقراء استدلال متناظر با سطر m معتبر است. یعنی: $\Gamma \vDash_{S_N} \varphi \wedge \psi$.
بنابراین هر تعبیری که همه‌ی اعضای Γ را صدق‌پذیر کند، خود $\varphi \wedge \psi$ را نیز صدق

پذیر می‌کند. یعنی:

$$\forall I: \quad \forall \chi \in \Gamma \vDash_I \chi \Longrightarrow \vDash_I \varphi \wedge \psi$$

فرض کنید که تابع تعبیر I تمام اعضای Γ را صدق‌پذیر می‌کند. یعنی: $\forall \chi \in \Gamma \vDash_I \chi$. پس I فرمول $\varphi \wedge \psi$ را نیز صدق‌پذیر می‌کند. یعنی: $\vDash_I \varphi \wedge \psi$. پس طبق تعبیر عطف I فرمول‌های φ و ψ را نیز صدق‌پذیر می‌کند. یعنی: $\vDash_I \varphi$. بنابراین استدلال متناظر با سطر $n+1$ ام معتبر است. یعنی:

$$\forall I: \quad \forall \chi \in \Gamma \vDash_I \chi \Longrightarrow \vDash_I \varphi$$
$$\forall I: \quad \forall \chi \in \Gamma \vDash_I \chi \Longrightarrow \vDash_I \psi$$

۲.۴ فراقضیه تمامیت

$$\Sigma \vDash_{\mathrm{S_N}} \varphi \implies \Sigma \vdash_{\mathrm{S_N}} \varphi$$

تمرین ۲.۴: فراقضیه تمامیت صفحه ۷۴

لم کالمر را برای $\varphi = \psi \wedge \theta$ در حالتی که «ψ کاذب و θ صادق» و «ψ و θ هر دو کاذب» باشد اثبات کنید.

پاسخ تمرین ۲.۴

در هر دو حالت φ کاذب خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \sim\psi$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \sim\psi \vee \sim\theta \qquad (\text{م} \vee)$$
$$V_i, \cdots, V_j \vdash \sim(\psi \wedge \theta) \qquad (\text{دم})$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\varphi$

تمرین ۳.۴: فراقضیه تمامیت صفحه ۷۵

لم کالمر را برای $\varphi = \psi \vee \theta$ و در بقیه حالات (ب، ج و د) اثبات کنید.

پاسخ تمرین ۳.۴

ب) در حالتی که ψ صادق و θ کاذب باشد، φ صادق خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \psi$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \psi \vee \theta \qquad (\text{م} \vee)$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \varphi$

ج) در حالتی که ψ کاذب و θ صادق باشد، φ صادق خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_k, \cdots, V_l \vdash \theta$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_k, \cdots, V_l \vdash \psi \vee \theta \qquad (\text{م} \vee)$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \varphi$

د) در حالتی که ψ کاذب و θ کاذب باشد، φ کاذب خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \sim\psi$$
$$V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\theta$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\psi \wedge \sim\theta \qquad (\text{م} \wedge)$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim(\psi \vee \theta) \qquad (\text{دم})$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\varphi$

تمرین ۴.۴: فراقضیه تمامیت **صفحه ۷۵**

لم کالمر را برای $\varphi = \psi \supset \theta$ و در بقیه حالات اثبات کنید.

پاسخ تمرین ۴.۴

آ) در حالتی که ψ صادق و θ صادق باشد، φ صادق خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_k, \cdots, V_l \vdash \theta$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\psi \vee \theta \qquad (\text{م} \vee)$$
$$V_k, \cdots, V_l \vdash \psi \supset \theta \qquad (\text{اس})$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \varphi$

ب) در حالتی که ψ صادق و θ کاذب باشد، φ کاذب خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \psi$$
$$V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\theta$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \psi \wedge \sim\theta \qquad (\text{م} \wedge)$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\sim\psi \wedge \sim\theta \qquad (\text{ن.م})$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim(\sim\psi \vee \theta) \qquad (\text{دم})$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim(\psi \supset \theta) \qquad (\text{اس})$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\varphi$

ج) در حالتی که ψ کاذب و θ صادق باشد، همان فرآیند آ) را خواهیم داشت.

د) در حالتی که ψ کاذب و θ کاذب باشد، φ صادق خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \sim\psi$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \sim\psi \vee \theta \qquad (\text{م} \vee)$$
$$V_i, \cdots, V_j \vdash \psi \supset \theta \qquad (\text{اس})$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \varphi$

تمرین ۵.۴: فراقضیه تمامیت صفحه ۷۵

لم کالمر را برای $\theta \equiv \psi = \varphi$ و در بقیه حالات اثبات کنید.

پاسخ تمرین ۵.۴

آ) در حالتی که ψ صادق و θ صادق باشد، φ صادق خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \psi$$
$$V_k, \cdots, V_l \vdash \theta$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \psi \wedge \theta \quad (\text{م} \wedge)$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash (\psi \wedge \theta) \vee (\sim\psi \wedge \sim\theta) \quad (\text{م} \vee)$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \psi \equiv \theta \quad (\text{تع})$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \varphi$

ب) در حالتی که ψ صادق و θ کاذب باشد، φ کاذب خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \psi$$
$$V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\theta$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\psi \vee \sim\theta \quad (\text{م} \vee)$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \psi \vee \theta \quad (\text{م} \vee)$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash (\sim\psi \vee \sim\theta) \wedge (\psi \vee \theta) \quad (\text{م} \wedge)$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash (\sim\psi \vee \sim\theta) \wedge (\sim\sim\psi \vee \sim\sim\theta) \quad (\text{ن.م})$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim(\psi \wedge \theta) \wedge \sim(\sim\psi \wedge \sim\theta) \quad (\text{دم})$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim[(\psi \wedge \theta) \vee (\sim\psi \wedge \sim\theta)] \quad (\text{دم})$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim(\psi \equiv \theta) \quad (\text{تع})$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\varphi$

ج) در حالتی که ψ کاذب و θ صادق باشد، همان فرآیند ب) را خواهیم داشت، تنها با این تفاوت که جای ψ و θ را تغییر دهید.

د) در حالتی که ψ کاذب و θ کاذب باشد، φ صادق خواهد بود و با توجه به فرض استقراء داریم:

$$V_i, \cdots, V_j \vdash \sim\psi$$
$$V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\theta$$

و با کاربرد قواعد استنتاج داریم:

$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \sim\psi \wedge \sim\theta \qquad \text{(م ۸)}$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash (\psi \wedge \theta) \vee (\sim\psi \wedge \sim\theta) \qquad \text{(م ۷)}$$
$$V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \psi \equiv \theta \qquad \text{(تع)}$$

و در نتیجه: $V_i, \cdots, V_j, V_k, \cdots, V_l \vdash \varphi$

بخش سوم

ساختار نحوی منطق محمولات

فصل ۵

سیستم استنتاج طبیعی منطق محمولات (P_N)

۱.۵ زبان صوری P_N

تمرین ۱.۵: قواعد ساخت — صفحه ۸۳

در عبارات زیر اولاً فرمول‌ها را از غیر فرمول‌ها تفکیک کنید (با ذکر دلیل) و ثانیاً در فرمول‌ها، گزاره‌ها (جمله‌ها) را از توابع گزاره‌ای (توابع جمله‌ای) متمایز سازید:

1. $(\forall x)Lzx$
2. $(Fy) \wedge (Gx)$
3. $Fx \wedge Ga$
4. $(\exists x Fx \wedge Gx)$
5. $(\forall y)(Fy)$
6. $(\exists x)(\forall y)Fx$
7. $(\exists x)(\forall x)(Fx \supset {\sim}Gx)$
8. $(\exists x)Px \equiv (\exists x)Gx$
9. $(\exists G)[(\forall x)Gx \supset (\forall y)Fy]$
10. $(\forall x)(\forall y)[Axy \equiv (\exists z)(Gy \supset Fxyz)]$

پاسخ تمرین ۱.۵

۱. فرمول است. طبق (FR_4)، Lzx یک فرمول است. طبق (FR_5)، $(\forall x)Lzx$ یک فرمول است.

فردنمای z در فرمول $(\forall x)Lzx$ یک متغیر آزاد است. پس این فرمول یک تابع گزاره‌ای است.

۲. فرمول نیست. چرا که فرمول‌های اتمی نباید داخل پرانتز باشند.

۳. طبق (FR_4) و (FR_3) یک فرمول است.

فردنمای x در فرمول مزبور یک متغیر آزاد است. پس این فرمول نیز یک گزاره نیست.

۴. فرمول نیست. $\exists x$ باید داخل پرانتز قرار می‌گرفت. توجه کنید که:

(آ) پرانتزهای خارجی دلبخواهی است. هم می‌تواند باشند و هم نباشند. گرچه طبق قرارداد و برای سادگی توصیه می‌شود که پرانتزهای خارجی (اولین و آخرین پرانتز فرمول) حذف شوند.

(ب) در بعضی تقریرهای متداول دیگر برای سادگی عبارت‌های $\forall x$ و $\exists x$ را داخل پرانتز قرار نمی‌دهند. به عنوان مثال به جای $(\forall x)Fx$ می‌نویسند $\forall xFx$.

۵. فرمول نیست. چرا که فرمول اتمی Fy داخل پرانتز قرار گرفته است.

۶. فرمول نیست. چون فرمول Fx که دامنه‌ی سور $(\forall y)$ است، شامل موردی (مورد آزادی) از متغیر y نیست. به عبارتی سور تهی مجاز نیست.

توجه کنید که در بعضی از تقریرهای غیرمتداول سور تهی مجاز است. البته در آن صورت دستگاه استنتاجی نیاز به یک اصلاح کوچک دارد که موضوع بحث ما نیست.

۷. فرمول نیست. مشکل چینش $(\forall x)(\exists x)$ است. فرمول $(\forall x)(\forall x)(Fx \supset {\sim}Gx)$ شامل سوری برحسب x است.

به عبارتی سورهای متوالی نباید با یک متغیر نوشته شوند. بالخص زمانی که یکی کلی و دیگری جزئی باشد. چرا که عبارت را کاملاً مبهم می‌کند.

۸. فرمول نیست. چرا که Px فرمول نیست. جمله نشانه‌ها محمول‌های صفر موضعی محسوب می‌شوند.

۹. فرمول نیست. مشکل عبارت $(\exists G)$ است. در منطق مرتبه اول که موضوع بحث است، سورها فقط بر روی متغیرهای فردی (محمول‌های متغیر درجه صفر) می‌نشینند. به علاوه فقط فردنماهای متغیر (مثل x) داریم و نه محمول‌های متغیر (مثل X). اساساً سور برای ثابت‌ها بی‌معنا نیز هست.

۱۰. یک گزاره است. طبق (FR_4) عبارت‌های Axy، Gy و $Fxyz$ فرمول هستند. پس عبارت مزبور به ترتیب با (FR_3)، (FR_5)، (FR_3)، (FR_5) و (FR_5) یک فرمول است. به علاوه همه‌ی متغیرها پایبند هستند.

۲.۵ ترجمه از زبان طبیعی به زبان صوری منطق محمولات

گرچه تمرین‌های اول ساده‌تر هستند اما از آنجا که گام‌های آغازین برای درک ترجمه در زبان منطق محمولات هستند، آن‌ها را بسیار جدی بگیرید و حتماً قدم به قدم جلو بروید.
در ترجمه منطق محمولات تا قبل از اینکه بر روی بحث مسلط شوید و مهارت کافی را پیدا

کنید، به ترتیب مراحل زیر را طی کنید:

قدم اول عبارت مورد نظر را چندین بار با دقت خوانده و در مورد معنای آن تامل کنید. تلاش کنید که بفهمید عبارت دقیقاً چه چیزی قرار است بگوید. درک عبارت قدم اساسی است.

قدم دوم تلاش کنید بخش گزاره‌ای عبارت را تشخیص دهید. یعنی ابتدا عبارت را در زبان منطق گزاره‌ها ترجمه کنید. توجه به تمایز بین «گزاره» و «تابع گزاره‌ای» بسیار کمک کننده است.

قدم سوم پس از اینکه جمله‌ها را تشخیص دادید، هر جمله را به صورت مجزا در زبان محمولات ترجمه کنید.

قدم چهارم در نهایت پس از ترجمه، فرمول را بخوانید و ببینید که آیا درست ترجمه کردید یا خیر. توجه کنید که معمولاً ترجمه از «زبان صوری» به «زبان طبیعی» ساده‌تر است. [۲]

نکته ۱.۵ (درباره‌ی ابهام ذاتی زبان طبیعی) *توجه کنید که زبان طبیعی پر از ابهام و پیچیدگی‌های فراوان است. ظاهر جمله اهمیت ندارد. آنچه مهم است معنای جمله است. به عنوان مثال گاهی چیزی معنای «هر چیز» و گاهی معنای «بعضی چیزها» را می‌دهد و قاعده‌ی کلی وجود ندارد.*
در واقع در حالت سخت گیرانه، جمله‌ها در زبان طبیعی معمولاً یک گزاره منحصر به فرد را متعین نمی‌کنند. بسیار اهمیت دارد که گوینده‌ی سخن قصد بیان چه گزاره‌ای را از جمله‌ی بیان شده دارد. بنابراین جایی که به گوینده‌ی سخن دسترسی نداریم بسیار متداول و کاملاً طبیعی است که در تفسیر جملات اختلاف ایجاد می‌شود و در بسیاری موارد نظر نهایی وجود ندارد. میزان این اختلاف بسته به ساختار و محتوای جمله متفاوت است.

قرارداد ۱.۵ *اسامی خاص و محمول‌ها را به ترتیبی که در عبارت مورد نظر ظاهر می‌شوند، نمادگذاری می‌کنیم. به عنوان مثال جمله‌ی «افلاطون فیلسوف است و ابن سینا منطق‌دان است» را با $Aa \wedge Bb$ نشان می‌دهیم.*

هدف تمرین‌های این قسمت مشخص است. هدف کسب مهارت در ترجمه‌ی منطق محمولات بدون اینهمانی است. برای کسب این مهارت، مراحل زیر طی می‌شوند:

مرحله‌ی اول گزاره‌های شخصی

مرحله‌ی دوم محمول‌های یک موضعی - گزاره‌های اتمی و نقیض اتمی

مرحله‌ی سوم محمول‌های یک موضعی - گزاره‌های مولکولی

مرحله‌ی چهارم محمول‌های چندموضعی

مرحله‌ی پنجم سورهای مقید

[۲] به طور کلی، ترجمه از زبان غیرمادری به زبان مادری ساده‌تر است.

تمرین ۲.۵: ترجمه **صفحه ۸۸**

گزاره‌های شخصی زیر را به زبان منطق محمولات ترجمه کنید.

۱. سقراط و ارسطو و افلاطون فیلسوفند.

۲. شهر قم بین تهران و اصفهان است.

۳. اگر عدد دو کوچکتر از ده و عدد ده کوچکتر از پانزده باشد، عدد دو کوچکتر از پانزده خواهد بود.

۴. اگر علی به پاریس برود و از پاریس دیدن کند، برج ایفل را خواهد دید.

۵. اگر حسن بلندتر از حسین و حسین بلندتر از محسن باشد، حسن بلندتر از محسن خواهد بود.

۶. اگر بنفش بودن این گل موجب زیبایی آن باشد، زیبایی آن موجب خوشبو بودن آن نخواهد بود.

۷. اگر خواجه نصیر طوسی منطقی و ریاضیدان یا ابن سینا منطقی و فیلسوف باشد، کانت فیلسوف یا فیزیکدان و دکارت ریاضیدان خواهد بود.

۸. تنها اگر عدد دو دوازده بر شش قابل قسمت باشد بر دو و سه نیز قابل قسمت خواهد بود.

۹. اگر ناصر خانه خود را به من بفروشد از او قدردانی می‌کنم، و مغازه خود را به او خواهم فروخت.

* ۱۰. فقط و فقط وقتی کتاب گلستان را به حسن می‌دهم که وی کتاب بوستان را به من بدهد، مگر اینکه کتاب گلستان را از من خریداری کند.

پاسخ تمرین ۲.۵

در این تمرین تمایز اسم خاص و اسم عام و همچنین ساختار داخلی جمله‌های بدون سور را درک می‌کنید. در **مرحله‌ی اول** که اثری از سورها نیست در واقع دقیقاً همان روش ترجمه در زبان منطق گزاره‌ها را اتخاذ کنید.

1. $(Aa \wedge Ab) \wedge Ac$
2. $Aabc$
3. $(Aab \wedge Abc) \supset Aac$
4. $(Aab \wedge Bab) \supset Bac$
5. $(Aab \wedge Abc) \supset Aac$
6. $(Aa \supset Ba) \supset {\sim}(Ba \supset Ca)$
7. $[(Aa \wedge Ba) \vee (Ab \wedge Cb)] \supset [(Cc \vee Dc) \wedge Bc]$

8. $(Aab \wedge Aac) \supset Aad$

9. $Aaab \supset (Bba \wedge Cbba)$

10. $Aabc \equiv (Acda \vee Bcba)$

تمرین ۳.۵: ترجمه ★★ **صفحه ۸۸**

گزاره‌های زیر را با استفاده از محمول‌های یک موضعی به زبان منطق محمولات ترجمه کنید:

۱. مارها همگی سمی نیستند.

۲. تنها مدیران منشی دارند.

* ۳. برخی داروها خطرناکند فقط اگر زیاد مصرف شوند.

* ۴. هیچ کتابی مفید نیست مگر اینکه محققانه نوشته شود.

۵. تنها میوه‌ها و سبزی‌ها هم ویتامین‌دار و هم خوشمزه‌اند.

۶. هر گردی گردو نیست.

۷. آن را که خبر شد خبری باز نیامد.

۸. مگسی را که تو پرواز دهی شاهین است.

۹. کار هر بز نیست خرمن کوفتن.

۱۰. پرتو نیکان نگیرد هر که بنیادش بد است.

پاسخ تمرین ۳.۵

در **مرحله‌ی دوم** ساده‌ترین جمله‌های شامل سور بررسی می‌شوند. مراحل بعدی در واقع فقط ساختارهای پیچیده‌تر را مورد توجه قرار می‌دهند. بنابراین بسیار اهمیت دارد که این مثال‌های ساده کاملاً درک شوند. من برای درک بهتر مطلب، ابتدا فرم استاندارد (منطقی) جمله را بیان می‌کنم. توجه کنید که اصل مطلب برمی‌گردد به اینکه شما بتوانید فرم استاندارد عبارت‌ها را دریابید.

۱. اینطور نیست که هر ماری سمی باشد. $\sim(\forall x)(Ax \supset Bx)$

۲. هر منشی‌داری مدیر است. $(\forall x)(Bx \supset Ax)$

۳. برخی داروها اگر زیاد مصرف شوند، خطرناکند. $(\exists x)[Ax \wedge (Cx \supset Bx)]$

۴. هر کتابی یا مفید نیست یا محققانه نوشته شده است.

هر کتاب مفیدی، محققانه نوشته شده است. $(\forall x)[(Ax \wedge Bx) \supset Cx]$

۵. هر ویتامین‌دار خوشمزه‌ای، میوه یا سبزی است. $(\forall x)[(Cx \wedge Dx) \supset (Ax \vee Bx)]$

۶. این گونه جمله‌ها را به دو صورت زیر می‌توان تحلیل کرد.

(آ) اینطور نیست که هر گردی گردو باشد. $\sim(\forall x)(Ax \supset Bx)$

(ب) بعضی گردها گردو نیستند. $(\exists x)(Ax \wedge \sim Bx)$

صورت اول ترجیح دارد و معقول‌تر است. ما نیز این صورت اول را در نظر می‌گیریم. البته توجه کنید که هر دو ترجمه معادل هستند.[۵]

۷. هیچ خبرداری، خبر نمی‌دهد. $(\forall x)(Ax \supset \sim Bx)$

۸. هر مگسی که تو پرواز می‌دهی، شاهین است. $(\forall x)[(Ax \wedge Bx) \supset Cx]$

۹. اینطور نیست که هر بز کارش خرمن کوفتن باشد. $\sim(\forall x)(Ax \supset Bx)$

۱۰. هیچ کسی که بنیادش بد باشد، پرتوی نیکان را نمی‌گیرد. $(\forall x)[(Bx \wedge Cx) \supset \sim Ax]$

تمرین ۴.۵: ترجمه — صفحه ۸۹

عبارات زیر را با استفاده از سه تابع گزاره‌ای زیر به زبان منطق محمولات ترجمه کنید:

- x اسب است. $Ax =$
- x نجیب است. $Bx =$
- x خوب تربیت شده است. $Cx =$

۱. بعضی اسب‌ها نجیب هستند و خوب تربیت شده‌اند.

۲. بعضی اسب‌ها نجیبند اگر خوب تربیت شوند.

۳. هر اسبی نجیب است که خوب تربیت شده باشد.

۴. بعضی اسب‌ها نجیبند فقط اگر خوب تربیت شوند.

۵. هر اسبی که نجیب است، خوب تربیت شده است.

۶. هر اسبی خوب تربیت شده است اگر نجیب است.

[۵] اما نه الزاماً در همه‌ی منطق‌ها. به عنوان مثال در منطق شهودی.

۷. اسب‌های نجیب خوب تربیت شده‌اند.

* ۸. فقط اسب‌های خوب تربیت شده، نجیبند.

۹. تنها اسب‌های نجیب خوب تربیت شده‌اند.

۱۰. اگر هر اسبی خوب تربیت شده باشد نجیب است.

پاسخ تمرین ۴.۵

1. $(\exists x)[Ax \wedge (Bx \wedge Cx)]$	2. $(\exists x)[Ax \wedge (Cx \supset Bx)]$
3. $(\forall x)[(Ax \wedge Cx) \supset Bx]$	4. $(\exists x)[Ax \wedge (Bx \supset Cx)]$
5. $(\forall x)[Ax \supset (Bx \supset Cx)]$	6. $(\forall x)[Ax \supset (Bx \supset Cx)]$
7. $(\forall x)[(Ax \wedge Bx) \supset Cx]$	8. $(\forall x)[(Ax \wedge Bx) \supset Cx]$
9. $(\forall x)[Ax \supset (Cx \supset Bx)]$	10. $(\forall x)[Ax \supset (Cx \supset Bx)]$

مورد (۵) به دو صورت می‌تواند فهمیده شود:

۱. هر اسب نجیب، خوب تربیت شده است. $(\forall x)[(Ax \wedge Cx) \supset Bx]$

۲. هر اسبی اگر نجیب باشد، خوب تربیت شده است. $(\forall x)[Ax \supset (Cx \supset Bx)]$

هر دو ترجمه درست هستند. توجه کنید که با توجه به قاعده‌ی صدور معادلند. به نظر می‌رسد که ترجمه‌ی اول ترجیح داشته باشد.
مورد (۳) نیز هم می‌تواند «هر اسبی که خوب تربیت شده باشد، نجیب است.» و هم می‌تواند «هر اسبی اگر خوب تربیت شده باشد، نجیب است.» تفسیر شود.
مورد (۸) می‌تواند بسته به فهمی که از جمله داریم، یک مورد اخلافی محسوب شود. در کتاب به صورت زیر فهمیده شده است:
هر نجیبی، اسب خوب تربیت شده است. $(\forall x)[Bx \supset (Ax \wedge Cx)]$
نظر من این است که از آنجا که جمله در واقع دارد در مورد ویژگی‌های اسب صحبت می‌کند تفسیر قبلی ترجیح دارد.[۶]

تمرین ۵.۵: ترجمه ★★★ صفحه ۸۹

عبارات زیر را با استفاده از توابع گزاره‌ای جدول ۱.۵ به زبان منطق محمولات ترجمه کنید:

[۶] اینجا در واقع یکی از مواردی است که اهمیت قصد گوینده را نشان می‌دهد. شاید اگر این مورد به صورت گفتاری بیان می‌شد با توجه به لحن گوینده راحت‌تر می‌توانستیم تشخیص دهیم که موضوع جمله «نجیب» است یا «اسب نجیب».

جدول ۱.۵: لغتنامه‌ی تمرین ۵.۵

x لیمو است.	=	Dx	x زرد است.	=	Ex	x رسیده است.	=	Fx
x مخترع است.	=	Gx	x خوشبخت است.	=	Hx	x مهندس است.	=	Ix
x شغل است.	=	Jx	x آینده دارد.	=	Kx	x کارمند است.	=	Lx
x کم‌کار است.	=	Mx	x موفق خواهد بود.	=	Nx			

۱. اگر تمامی لیموها زرد باشند، آنگاه بعضی لیموها رسیده‌اند.

۲. اگر تمامی لیموها زرد باشند، رسیده‌اند.

۳. تمامی لیموهای رسیده اگر زرد باشند، بعضی چیزهای زرد رسیده‌اند.

** ۴. اگر تمامی لیموها زرد باشند، آنگاه اگر هر لیموی زردی رسیده باشد، آن‌ها رسیده‌اند.

۵. اگر هر مخترعی خوشبخت باشد و تنها مهندسان مخترع باشند، آنگاه اگر مخترعی وجود داشته باشد، بعضی مهندسان خوشبختند.

* ۶. اگر مخترعی وجود داشته باشد و تنها مهندسان مخترع باشند، وی مهندس است.

۷. اگر تمامی مخترعان مهندس باشند، آنگاه اگر تمامی مهندسان خوشبخت باشند، آن‌ها خوشبختند.

۸. اگر هر شغلی آینده‌ای داشته باشد و هیچ کارمندی کم‌کار نباشد، بعضی کارمندان موفق خواهند بود.

۹. اگر تمامی کارمندان کم‌کار باشند و بعضی شغل‌ها آینده‌ای نداشته باشد، بعضی کارمندان موفق نخواهند بود.

۱۰. اگر تمامی کارمندان کم‌کار باشند، آنگاه اگر بعضی شغل‌ها آینده‌ای نداشته باشد، آن‌ها موفق نخواهند بود.

پاسخ تمرین ۵.۵

در **مرحله‌ی سوم** در سطح منطق حملی یعنی منطق محمولات یک موضعی، عبارت‌های پیچیده بررسی می‌شوند. این تمرین یک مقدمه (پیشنیاز) خوب برای ورود به مبحث ترجمه در منطق محمولات چند موضعی است.

به طور کلی در این تمرین دو مسئله وجود دارد:

موقعیت اگر در بعضی موارد لفظ «اگر» در مکان استاندارد خود قرار ندارد و باید جابه‌جا شود.

به مکان جدیدی که «اگر» را منتقل می‌کنیم، دقت کنید.

مرجع ضمیر گاهی پیدا کردن مرجع ضمیر در جمله کار ساده‌ای نیست. اما تنها پس از پیدا کردن مرجع ضمیر می‌توانید موقعیت ادات گزاره‌ای و سورها را تشخیصی دهید.

در ادامه من هر گزاره‌ی اتمی را در داخل یک box قرار می‌دهم.

۱. اگر تمامی لیموها زرد باشند، آنگاه بعضی لیموها رسیده‌اند.

$$(\forall x)(Dx \supset Ex) \supset (\exists x)(Dx \wedge Fx)$$

۲. تمامی لیموها اگر زرد باشند رسیده‌اند.

$$(\forall x)[Dx \supset (Ex \supset Fx)]$$

۳. اگر تمامی لیموهای رسیده زرد باشند، بعضی چیزهای زرد رسیده‌اند.

$$(\forall x)[(Dx \wedge Fx) \supset Ex] \supset (\exists x)(Ex \wedge Fx)$$

۴. تمامی لیموها اگر زرد باشند، آنگاه اگر هر لیموی زردی رسیده باشد، آنها رسیده‌اند.

$$(\forall x)\Big(Dx \supset [Ex \supset ((\forall y)[(Dy \wedge Ey) \supset Fy] \supset Fx)]\Big)$$

۵. اگر هر مخترعی خوشبخت باشد و هر مخترعی مهندس باشد، آنگاه اگر مخترعی وجود داشته باشد، بعضی مهندسان خوشبختند.

$$[(\forall x)(Gx \supset Hx) \wedge (\forall x)(Gx \supset Ix)] \supset [(\exists x)Gx \supset (\exists x)(Ix \wedge Hx)]$$

۶. هر مخترعی اگر وجود داشته باشد و هر مخترع مهندس باشد، مهندس است.

$$(\forall x)([Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset Iy)] \supset Ix)$$

۷. تمامی مخترعان اگر مهندس باشند، آنگاه اگر تمامی مهندسان خوشبخت باشند، آن مخترعان خوشبختند.

$$(\forall x)[Gx \supset (Ix \supset [(\forall y)(Iy \supset Hy) \supset Hx])]$$

۸. اگر $\boxed{\text{هر شغلی آینده‌ای داشته باشد}}$ و $\boxed{\text{هیچ کارمندی کم‌کار نباشد،}}$ $\boxed{\text{بعضی کارمندان موفق خواهند بود.}}$

$$[(\forall x)(Jx \supset Kx) \wedge (\forall x)(Lx \supset \sim My)] \supset (\exists x)(Lx \wedge Nx)$$

۹. اگر $\boxed{\text{تمامی کارمندان کم‌کار باشند}}$ و $\boxed{\text{بعضی شغل‌ها آینده‌ای نداشته باشد،}}$ $\boxed{\text{بعضی کارمندان موفق نخواهند بود.}}$

$$[(\forall x)(Lx \supset Mx) \wedge (\exists x)(Jx \wedge \sim Kx)] \supset (\exists x)(Lx \wedge \sim Nx)$$

۱۰. تمامی کارمندان اگر کم‌کار باشند، آنگاه اگر بعضی شغل‌ها آینده‌ای نداشته باشد، آن‌ها موفق نخواهند بود.

$$(\forall x)[Lx \supset (Mx \supset [(\exists y)(Jy \wedge \sim Ky) \supset \sim Nx])]$$

تمرین ۶.۵: ترجمه صفحه ۹۲

با استفاده از جدول ۲.۵ هر یک از فرمول‌های زیر را از زبان صوری به زبان طبیعی ترجمه کنید:

1. $(\forall x)[(Ax \wedge Axx) \supset Aax]$
2. $(\forall x)\{Bx \supset (\forall x)[(By \wedge Bxy) \supset Cxy]\}$
3. $(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(Cy \supset Dxy)]$
4. $(\forall x)[Ax \supset (\exists y)(Cy \wedge Dxy)]$
5. $\sim(\forall x)[Ax \supset (\forall y)(Cy \supset Dxy)]$
6. $(\exists x)[Cx \wedge (\forall y)(Ay \supset Dyx)]$
7. $(\exists x)(\exists y)[Ax \wedge (Cy \wedge \sim Dxy)]$
8. $(\forall x)[Dx \supset \sim(\exists y)(Ey \wedge Exy)]$
9. $(\forall x)[Ax \supset (\forall y)(Fxy \supset Aayx)]$
10. $(\forall x)[Fx \supset (\forall y)(Gy \supset Gxy)]$
11. $(\forall x)\{[(Hx \vee Ix) \wedge Jx] \supset (\forall y)[(Ay \wedge Ky) \supset Hxy]\}$

12. $(\forall x)\{[Ax \wedge \sim(\exists y)(Ay \wedge Iyx)]Lx\}$

13. $(\forall x)\{Ax \supset [(\forall y)(\forall z)(Az \supset Bxyz) \supset (\exists y)(Ay \wedge Jxy)]\}$

14. $(\forall x)\{[Ax \wedge (\exists y)(My \wedge Ny \wedge Kxy)] \supset (Ox \supset A'x)\}$

15. $(\forall x)(\forall y)[(Ax \wedge Ay \wedge Dy \wedge Lyx) \supset (\forall z)(Az \wedge Mzx \wedge \sim Dz \wedge Hyz)]$

16. $(\forall x)[(B'x \wedge C') \supset (\forall y)(B'y \wedge C'y \wedge Nyx)]$

17. $(\forall x)(\forall y)[(B'x \wedge B'y \wedge Oxy) \supset (\exists z)(B'z \wedge Czxy)]$

18. $(\forall x)(\forall y)[(D'x \wedge D'y \wedge Oxy) \supset (\exists z)(D'z \wedge Czxy)]$

19. $(\forall x)[D'x \supset (\exists y)(\exists z)(D'y \wedge D'z \wedge Oyz \wedge Cxyz)]$

*20. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(D'x \wedge D'y \wedge B' \wedge Dzxy) \supset (\exists x')(\exists y')(\exists z')(D'x' \wedge D'y' \wedge B'z'Dz'x'y' \wedge Nz'z)]$

پاسخ تمرین ۶.۵

در **مرحله‌ی چهارم** ابتدا ترجمه از زبان صوری به زبان طبیعی که ساده‌تر است، انجام می‌شود. در ترجمه به زبان طبیعی تلاش کنید که عبارت شما کمترین ابهام را داشته باشد و تا حدی که ساختار زبان فارسی اجازه می‌دهد و متداول است، عبارت را ساده‌تر بیان کنید.

۱. هر کسی که به خود کمک کند، خدا به او کمک می‌کند.

۲. هر دیوانه هر دیوانه‌ای را ببیند از او خوشش می‌آید.

دیوانه چو دیوانه ببیند خوشش آید.

۳. بعضی انسان‌ها را همیشه می‌توان فریب داد.

۴. هر کسی را گاهی اوقات می‌توان فریب داد.

۵. همه‌ی انسان‌ها را همیشه نمی‌توان فریب داد.

۶. گاهی هر کسی را می‌توان فریب داد.

۷. گاهی بعضی انسان‌ها را نمی‌توان فریب داد.

۸. هیچ دانایی در شهری غریبه نیست.

۹. هر کسی هر چیزی که لایقش باشد، خدا به او می‌دهد.

جدول ۲.۵: لغتنامه‌ی تمرین ۶.۵

a	$=$	خدا			
Ax	$=$	x انسان است.	Axy	$=$	x به y کمک می‌کند.
Bx	$=$	x دیوانه است.	Bxy	$=$	x، y را می‌بیند.
Cx	$=$	x زمان است.	Cxy	$=$	x از y خوشش می‌آید.
Dx	$=$	x داناست.	Dxy	$=$	x را در y می‌توان فریب داد.
Ex	$=$	x شهر است.	Exy	$=$	x در y غریب است.
Fx	$=$	x آهنرباست	Fxy	$=$	x لایق y است.
Gx	$=$	x آهن است.	Gxy	$=$	x، y را می‌کشد.
Hx	$=$	x گاو است.	Hxy	$=$	x از y بهتر است.
Ix	$=$	x خر است.	Ixy	$=$	x به y حسادت می‌کند.
Jx	$=$	x باربر است.	Jxy	$=$	x، y را از خود ناراضی می‌کند.
Kx	$=$	x مردم آزار است.	Kxy	$=$	x در y منزل دارد.
Lx	$=$	x بی‌هنر است.	Lxy	$=$	x دشمن y است.
Mx	$=$	x خانه است.	Mxy	$=$	x دوست y است.
Nx	$=$	x شیشه‌ای است.	Nxy	$=$	x از y بزرگتر است.
Ox	$=$	x سنگ اندازست.	Oxy	$=$	x از y متمایز است.
$A'x$	$=$	x متضرر است.	$Axyz$	$=$	x، y را به z می‌دهد.
$B'x$	$=$	x عدد است.	$Bxyz$	$=$	x، y را به z وعده می‌دهد.
$C'x$	$=$	x اول است.	$Cxyz$	$=$	x بین y و z است.
$D'x$	$=$	x نقطه است.	$Dxyz$	$=$	x فاصله بین y و z است.

۱۰. هر آهنربایی هر آهنی را می‌کشد.

۱۱. هر گاو و خر باربری از هر انسان مردم آزاری بهتر است.

گاوان و خران باربردار به زآدمیان مردم آزار

۱۲. هر کسی که به کسی حسادت نمی‌کند، بی‌هنر است.

۱۳. هر کسی اگر به همه چیز را به هر کسی وعده دهد، بعضی انسان‌ها را می‌آزارد.

۱۴. هر کسی که در خانه‌ای شیشه‌ای منزل دارد، اگر سنگ اندازد، متضرر می‌شود.

۱۵. هر دشمن دانای هر انسانی بهتر از هر دوست نادان هر انسانی است.

دشمن دانا به از نادان دوست

۱۶. برای هر عدد اولی، یک عدد اول بزرگتری وجود دارد. [۸]

۱۷. بین هر دو عدد متمایز عددی وجود دارد.

۱۸. بین هر دو نقطه‌ی متمایزی نقطه‌ای وجود دارد.

۱۹. هر دو نقطه‌ای بین دو نقطه‌ی متمایز قرار دارد.

۲۰. برای هر فاصله‌ی بین هر دو نقطه‌ای، فاصله‌ای بزرگتر از آن وجود دارد که بین دو نقطه‌ای قرار دارد.

تمرین ۷.۵: ترجمه ★ ★ صفحه ۹۴

با توجه به توابع گزاره‌ای جدول ۳.۵، هر یک از عبارات زیر را به زبان منطق محمولات ترجمه کنید:

۱. هر دانشجویی که بزرگتر از حسن باشد از حسین نیز بزرگتر است.

۲. هر کسی از کسی متنفر است..

۳. افراد لال هیچ سخنی نمی‌گویند.

[۸] در منطق کلاسیک در اصطلاح شناسی تخصصی، «$\exists$» سور جزئی و نه سور وجودی نام دارد. معادل تقریبی سور جزئی در زبان طبیعی لفظ «بعضی» اما برای سور وجودی لفظ «وجود دارد که» است. به عبارتی وجودی که در منطق کلاسیک قابل بیان است، یک وجود انتزاعی است و نه یک وجود عینی. به همین دلیل اکیداً توصیه می‌شود جایی که موضوع موارد عینی است از لفظ بعضی استفاده کنید. اما در ریاضیات که همه‌ی امور انتزاعی هستند به راحتی می‌توانید از لفظ وجود نیز استفاده کنید.

۴. هرکس که در هر کاری موفق باشد مورد حسد همه واقع می‌شود.

۵. به ازای هر دو عدد متمایز از یکدیگر عددی هست که بین آن دو قرار می‌گیرد.

۶. هیچ‌کس همه انسان‌ها را دوست ندارد.

۷. بعضی‌ها هیچ‌کس را دوست ندارند.

۸. اگر کسی هیچ کس را دوست نداشته باشد، خود را نیز دوست ندارد.

۹. هر کسی همه انسان‌ها را دوست داشته باشد، همه او را دوست دارند.

* ۱۰. هر کس کسی را دوست دارد که هر کسی او را دوست ندارد.

۱۱. هر کس کالایی از مغازه‌ای می‌خرد.

۱۲. مغازه‌ای هست که هر کس کالایی از آن را می‌خرد.

* ۱۳. بعضی اشخاص همه کالاها را از یک مغازه می‌خرند.

۱۴. هیچ کس از همه مغازه‌ها تمامی کالاها را نمی‌خرد.

۱۵. هیچ کس تمامی کالاها را از یک مغازه نمی‌خرد.

۱۶. تمامی دانشجویان در هر امتحانی بعضی مسائل را حل می‌کنند.

۱۷. تنها دانشجویان هر مسأله‌ای را در بعضی امتحانات حل می‌کنند.

۱۸. دانشجویی که تمامی مسائل بعضی از امتحانات را حل کند وجود ندارد.

۱۹. هر کسی که مسأله‌ای را در امتحانی حل کند، دانشجو است.

۲۰. دانشجویانی که تمامی مسائل را در بعضی امتحانات حل می‌کنند، تمامی مسائل را در تمامی امتحانات حل می‌کنند.

پاسخ تمرین ۷.۵

گرچه این تمرین پیچیده‌ترین جملات را مورد بررسی قرار داده است، اما اگر تمرین‌های قبل به خوبی درک شده باشند، این تمرین بسیار ساده خواهد بود. قلق کار این است که ترجمه را مرحله به مرحله به صورتی که خواهم آورد، انجام دهید. در این صورت اگر این مطلب رعایت شود، این تمرین حرف تازه‌ای ندارد.

۱. [x از حسین بزرگتر است.$\supset$ (x بزرگتر از حسن است. $\wedge$ $(\forall x)[(Dx$

$$(\forall x)[(Dx \wedge Mxa) \supset Mxb]$$

جدول ۳.۵: لغتنامه‌ی تمرین ۷.۵

x دانشجو است.	=	Dx	x بزرگتر از y است.	=	Mxy
x انسان است.	=	Ax	x از y متنفر است.	=	Mxy
x لال است.	=	Lx	x سخن است.	=	Cx
x، y را می‌گوید.	=	Gxy	x کار است.	=	Kx
x در y موفق است.	=	Mxy	x به y حسد می‌ورزد.	=	Hxy
x عدد است.	=	Ax	x از y متمایز است.	=	Mxy
x بین y و z است.	=	$Bxyz$	x، y را دوست دارد.	=	Dxy
x کالا است.	=	Cx	x مغازه است.	=	Mx
x، y را از z می‌خرد.	=	$Kxyz$	x امتحان است.	=	Ex
x مسأله‌ای از y است.	=	Mxy	x، y را حل می‌کند.	=	Hxy

۲. $(\forall x)[Ax \supset$ x از کسی متنفر است.$]$

$(\forall x)[Ax \supset (\exists y)(Ay \wedge Mxy)]$

۳. $(\forall x)[(Ax \wedge Lx) \supset$ x هیچ سخنی نمی‌گوید.$]$

$(\forall x)[(Ax \wedge Lx) \supset (\forall y)(Cx \supset \sim Gxy)]$

۴. $(\forall x)[(Ax \wedge$ x در هر کاری موفق است.$) \supset$ x مورد حسد همه واقع می‌شود.$]$

$(\forall x)([Ax \wedge (\forall y)(Ky \supset Mxy)] \supset (\forall y)(Ay \supset Hyx))$

۵. $(\forall x)(\forall y)[(Ax \wedge Ay \wedge Mxy) \supset$ عددی هست که بین x و y قرار دارد.$]$

$(\forall x)(\forall y)[(Ax \wedge Ay \wedge Mxy) \supset (\exists z)(Az \wedge Bzxy)]$

۶. $(\forall x)[Ax \supset$ x همه‌ی انسان‌ها را دوست ندارد.$]$

$(\forall x)[Ax \supset \sim (\forall y)(Ay \supset Dxy)]$

۷. $(\exists x)(Ax \wedge$ x هیچ کس را دوست ندارد.$)$

$(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(Ay \supset \sim Dxy)]$

۸. $(\forall x)[Ax \supset ($ x هیچ کس را دوست ندارد. $\supset$ x خود را دوست ندارد.$)]$

$(\forall x)(Ax \supset [(\forall y)(Ay \supset \sim Dxy) \supset \sim Dxx])$

۹. $(\forall x)[Ax \supset ($ x همه‌ی انسان‌ها را دوست دارد. $\supset$ همه x را دوست دارند. $)]$
$(\forall x)(Ax \supset [(\forall y)(Ay \supset Dxy) \supset (\forall y)(Ay \supset Dyx)])$

۱۰. $(\forall x)(Ax \supset$ x کسی را دوست دارد که هر کسی او را دوست ندارد. $)$
$(\forall x)[Ax \supset (\exists y)(Ay \wedge$ x، y را دوست دارد و هر کسی y را دوست ندارد. $)]$
$(\forall x)(Ax \supset (\exists y)[Ay \wedge Dxy \wedge \sim(\forall z)(Az \supset Dzy)])$

۱۱. $(\forall x)(Ax \supset$ x کالایی از مغازه‌ای می‌خرد. $)$
$(\forall x)[Ax \supset (\exists y)(\exists z)(Cy \wedge Mz \wedge Kxyz)]$

۱۲. $(\exists x)(Mx \wedge$ هر کس کالایی از x می‌خرد. $)$
$(\exists x)[Mx \wedge (\forall y)(Ay \supset$ y کالایی از x می‌خرد. $)]$
$(\exists x)(Mx \wedge (\forall y)[Ay \supset (\exists z)(Cz \wedge Kyzx)])$

۱۳. $(\exists x)(Ax \wedge$ x همه‌ی کالاها را از یک مغازه می‌خرد. $)$
$(\exists x)[Ax \wedge (\exists y)(My \wedge$ x همه‌ی کالاها را از y می‌خرد. $)]$
$(\exists x)(Ax \wedge (\exists y)[My \wedge (\forall z)(Cz \supset Kxzy)])$

۱۴. $(\forall x)(Ax \supset$ x از همه‌ی مغازه‌ها تمامی کالاها را نمی‌خرد. $)$
$(\forall x)[Ax \supset \sim(\forall y)(My \supset$ x از y تمامی کالاها را می‌خرد. $)]$
$(\forall x)(Ax \supset \sim(\forall y)[My \supset (\forall z)(Cz \supset Kxzy)])$

۱۵. $(\forall x)(Ax \supset$ x تمامی کالاها را از یک مغازه نمی‌خرد. $)$
$(\forall x)[Ax \supset \sim(\exists y)(My \wedge$ x تمامی کالاها را از y می‌خرد. $)]$
$(\forall x)(Ax \supset \sim(\exists y)[My \wedge (\forall z)(Cz \supset Kxzy)])$

۱۶. $(\forall x)(Dx \supset$ x در هر امتحانی بعضی مسائل را حل می‌کند. $)$
$(\forall x)[Dx \supset (\forall y)(Ey \supset$ x در y بعضی مسائل را حل می‌کند. $)]$
$(\forall x)(Dx \supset (\forall y)[Ey \supset (\exists z)(Mzy \wedge Hxz)])$

۱۷. $(\forall x)($ x هر مسئله‌ای را در بعضی امتحانات حل می‌کند. $\supset Dx)$
$(\forall x)[(\exists y)(Ey \wedge$ x هر مسئله‌ای را در y حل می‌کند. $) \supset Dx]$
$(\forall x)((\exists y)[Ey \wedge (\forall z)(Mzy \supset Hxz)] \supset Dx)$

۱۸. $\sim(\exists x)(Dx\wedge$ (x تمامی مسائل بعضی از امتحانات را حل می‌کند.)$)$
$\sim(\exists x)[Dx\wedge(\exists y)(Ey \wedge$ (x تمامی مسائل y را حل می‌کند.)$)]$
$\sim(\exists x)(Dx\wedge(\exists y)[Ey \wedge (\forall z)(Mzy \supset Hxz)])$

۱۹. $(\forall x)[(Ax \wedge$ (x مسئله‌ای را در امتحانی حل می‌کند.)$) \supset Dx]$
$(\forall x)([Ax \wedge (\exists y)(Ey \wedge$ (x مسئله‌ای را در y حل می‌کند.)$)] \supset Dx)$
$(\forall x)[(Ax \wedge (\exists y)[Ey \wedge (\exists z)(Mzy \wedge Hxz)]) \supset Dx]$

۲۰. $(\forall x)[(Dx \wedge \varphi(x)) \supset \psi(x)]$

(آ) $\varphi(x) =$ x تمامی مسائل را در بعضی امتحانات حل می‌کند.
$(\exists y)(Ey\wedge$ (x تمامی مسائل را در y حل می‌کند.)$)$
$(\exists y)[Ey\wedge(\forall z)(Mzy \supset Hxz)]$

(ب) $\psi(x) =$ x تمامی مسائل را در تمامی امتحانات حل می‌کند.
$(\forall y)(Ey \supset$ (x تمامی مسائل را در y حل می‌کند.)$)$
$(\forall y)[Ey \supset(\forall z)(Mzy \supset Hxz)]$

تمرین ۸.۵: ترجمه — صفحه ۹۶

عبارات تمرین ۷.۵ را با سور مقید و ذکر عالم سخن به زبان منطق محمولات ترجمه کنید.

پاسخ تمرین ۸.۵

در **مرحله‌ی پنجم** به ساده کردن فرمول‌ها، جایی که موضوع بحث فقط اشیای خاصی هستند، می‌پردازد. مثلاً در علم حساب همه‌ی اشیاء عدد هستند، پس نیازی نداریم هر دفعه محمول «x عدد است.» ذکر شود.

۱. عالم سخن: دانشجوها — $(\forall x)(Mxa \supset Mxb)$

۲. عالم سخن: انسان‌ها — $(\forall x)(\exists y)Mxy$

۳. عالم سخن: انسان‌های لال و سخن‌ها — همان فرمول

۴. عالم سخن: انسان‌ها و کارها — همان فرمول

۵. عالم سخن: اعداد — $(\forall x)(\forall y)(Mxy \supset (\exists z)Bzxy)$

۶. عالم سخن: انسان‌ها — $(\forall x)\sim(\forall y)Dxy$

۷. عالم سخن: انسان‌ها $(\exists x)(\forall y){\sim}Dxy$

۸. عالم سخن: انسان‌ها $(\forall x)[(\forall y){\sim}Dxy \supset {\sim}Dxx]$

۹. عالم سخن: انسان‌ها $(\forall x)[(\forall y)Dxy \supset (\forall y)Dyx]$

۱۰. عالم سخن: انسان‌ها $(\forall x)(\exists y)(Dxy \wedge {\sim}(\forall z)Dzy)]$

- عالم سخن در موارد ۱۱ تا ۱۵: انسان‌ها، کالاها و مغازه‌ها — همان فرمول
- عالم سخن در موارد ۱۶ تا ۱۸ و ۲۰: دانشجویان، امتحان‌ها و مسئله‌ها — همان فرمول

۱۹. عالم سخن: انسان‌ها، امتحان‌ها و مسئله‌ها — همان فرمول

۳.۵ دستگاه استنتاجی P_N

تمرین ۹.۵: نمونه جانشین — صفحه ۱۰۱

برای هر کدام از فرمول‌های φ_α در گروه اول، در صورتی که α مساوی x باشد، نمونه درستی از φ_β در گروه دوم بیابید.

- گروه اول (اصل) $\varphi_\alpha = \varphi_x$

۱. $Fx \vee Gx$

۲. $Fx \vee Gy$

۳. $Fx \supset (\exists y)Gy$

۴. $(\forall y)(Fx \supset Gy)$

۵. $Fx \equiv (\exists y)(Gx \vee Hy)$

۶. $(\forall x)Fx \supset (\exists y)(Gx \wedge Hy)$

۷. $Ix \supset Ixy$

- گروه دوم (نمونه درست) φ_β

آ) $Fa \vee Gy$

ب) $(\forall y)(Fy \supset Gy)$

ج) $Fa \wedge Gx$

د) $Fb \vee Gb$

ه) $Fx \supset (\exists y)Gy$

و) $Fy \vee Gy$

ز) $(\forall y)(Fa \supset Gy)$

ح) $Fy \supset (\exists y)Gy$

ط) $(\forall y)(Fz \supset Gy)$

ی) $Fy \equiv (\exists y)(Gy \wedge Hy)$

ک) $(\forall x)Fx \supset (\exists y)(Gz \wedge Hy)$

ل) $Fa \equiv (\exists y)(Gc \vee Hy)$

م) $(\forall x)(Fx \supset Gy)$ ن) $Iy \supset Iyy$

س) $Ia \supset Iab$

پاسخ تمرین ۹.۵

برای چک کردن سریع‌تر نمونه درست‌ها، ابتدا ساختار گزاره‌ای توجه کنید.

۱. د)، و) ۲. آ)، و) ۳. ه)، ح) ۴. ز)، ط)

۵. هیچ‌کدام ۶. ک) ۷. ن)

تمرین ۱۰.۵: نمونه جانشین صفحه ۱۰۲

در صورتی که $\beta = y$ باشد، تعیین کنید هر کدام از فرمول‌های φ_β در گروه دوم، نمونه درست کدام یک از فرمول‌های φ_α در گروه اول است.

- گروه اول (اصل) φ_α

آ) Fa ب) Fx

ج) Fy د) $Fx \wedge Gx$

ه) $Fx \wedge Gz$ و) $Fx \vee (\exists x)(Gx \supset Hx)$

ز) $Fx \vee (\exists y)(Gc \wedge Hy)$ ح) $Fx \supset (\exists y)(Gy \wedge Hx)$

ط) $Fz \vee (\exists x)(Gx \supset Hz)$ ی) $Fx \supset (\exists y)(Gy \wedge Hy)$

ک) $Fz \vee (\exists x)(Gx \supset Hy)$ ل) $Fx \supset (\exists y)(Gy \wedge Hz)$

م) $Fy \vee (\exists x)(Gx \supset Hy)$ ن) $(\forall x)Fzxz$

س) $(\forall x)Fyxz$

- گروه دوم (نمونه درست) $\varphi_\beta = \varphi_y$

۱. Fy ۲. $Fx \wedge Gy$

۳. $Fy \wedge Gy$ ۴. $Fy \vee (\exists x)(Gx \supset Hy)$

۵. $Fy \vee (\exists y)(Gc \wedge Hy)$ ۶. $Fy \supset (\exists y)(Gy \wedge Hy)$

۷. $(\forall x)Fyxz$

پاسخ تمرین ۱۰.۵

۱. ب)، ج)	۲. ه)	۳. د)	۴. ط)، ک)، م)
۵. ز)	۶. ی)	۷. ن)، س)	

★★ **تمرین ۱۱.۵: توجیه** — صفحه ۱۰۲

خطاها و اشتباهاتی را که در براهین زیر واقع شده بیابید و علت خطا را توضیح دهید.

۱- $(\forall x)(\exists y)(Fx \equiv Gy)$	مقدمه
$\therefore (\exists y)(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	(۱)
۲- $(\exists y)(Fx \equiv Gy)$	۱، (ح∀)
۳- $Fx \equiv Gy$	ف
۴- $(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	۳، (م∀)
۵- $(\exists y)(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	۴، (م∃)
۶- $(\exists y)(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	۲، ۳-۵، (ح∃)

۱- $(\forall x)(\exists y)(Fx \supset Gy)$	مقدمه
$\therefore (\exists y)(\forall x)(Fx \supset Gy)$	(۲)
۲- $(\exists y)(Fx \supset Gy)$	۱، (ح∀)
۳- $Fx \supset Gx$	ف
۴- $(\forall x)(Fx \supset Gx)$	۳، (م∀)
۵- $(\exists y)(\forall x)(Fx \supset Gy)$	۴، (م∃)
۶- $(\exists y)(\forall x)(Fx \supset Gy)$	۲، ۳-۵، (ح∃)

۱- $(\forall x)(\exists y)(Fx \equiv Gy)$	مقدمه
$\therefore (\exists y)(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	(۱)
۲- $(\exists y)(Fx \equiv Gy)$	۱، (ح∀)
۳- $Fx \equiv Gy$	ف
۴- $(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	۳، (م∀)
۵- $(\exists y)(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	۴، (م∃)
۶- $(\exists y)(\forall x)(Fx \equiv Gy)$	۲، ۳-۵، (ح∃)

۱- $(\forall y)(\exists x)(Fx \vee Gy)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(\forall y)(Fx \vee Gy)$	(۳)
۲- $(\exists x)(Fx \vee Gy)$	۱، (ح$\forall$)
۳- $Fx \vee Gx$	ف
۴- $(\forall y)(Fx \vee Gy)$	۳، (م$\forall$)
۵- $(\exists x)(\forall y)(Fx \vee Gy)$	۴، (م$\exists$)
۶- $(\exists x)(\forall y)(Fx \vee Gy)$	۲،۳-۵، (ح$\exists$)

۱- $(\exists x)(\forall y)[(Fx \wedge Gx) \supset Hy]$	مقدمه
$\therefore (\exists x)[(Fx \wedge Gx) \supset Hx]$	(۴)
۲- $(\forall y)[(Fz \wedge Gz) \supset Hy]$	ف
۳- $(Fz \wedge Gz) \supset Hy$	۲، (ح$\forall$)
۴- $(\exists x)[(Fx \wedge Gz) \supset Hy]$	۳، (م$\exists$)
۵- $(\forall y)(\exists x)[(Fx \wedge Gy) \supset Hy]$	۴، (م$\forall$)
۶- $(\forall y)(\exists x)[(Fx \wedge Gy) \supset Hy]$	۱،۲-۵، (ح$\exists$)
۷- $(\exists x)(\forall y)[(Fx \wedge Gx) \supset Hy]$	۶، (ح$\forall$)

۱- $(\exists x)Fx$	مقدمه
۲- $(\exists x)Gx$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Fx \wedge Gx)$	(۵)
۳- Fy	ف
۴- Gy	ف
۵- $Fy \wedge Gy$	۴،۳، (م$\wedge$)
۶- $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$	۵، (م$\exists$)
۷- $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$	۲،۴-۶، (ح$\exists$)
۸- $(\exists x)(Fx \wedge Gx)$	۱،۳-۷، (ح$\exists$)

۱–	$(\exists x)(\exists y)[(Fx \vee Gy) \wedge Hy]$	مقدمه
	$\therefore (\forall x)(\forall y)(Fy \vee Gx)$	(۶)
۲–	$(\exists y)[(Fx \vee Gy) \wedge Hy]$	ف
۳–	$(Fx \vee Gx) \wedge Hx$	ف
۴–	$Fx \vee Gx$	۳، (ح$\wedge$)
۵–	$Fx \vee Gx$	۲،۳–۴، (ح$\exists$)
۶–	$Fx \vee Gx$	۱،۲–۵، (ح$\exists$)
۷–	$(\forall y)(Fy \vee Gx)$	۶، (م$\forall$)
۸–	$(\forall x)(\forall y)(Fy \vee Gx)$	۷، (م$\forall$)

۱–	$(\exists x)(Fx \wedge Gx)$	مقدمه
۲–	$(\exists x)(\sim Fx \wedge Gx)$	مقدمه
	$\therefore (\exists x)(Fx \wedge \sim Fx)$	(۷)
۳–	$Fx \wedge Gy$	ف
۴–	Fx	۳، (ح$\wedge$)
۵–	Fx	۱،۳–۴، (ح$\exists$)
۶–	$\sim Fx \wedge Gx$	ف
۷–	$\sim Fx$	۶، (ح$\wedge$)
۸–	$\sim Fx$	۲،۶–۷، (ح$\exists$)
۹–	$Fx \wedge \sim Fx$	۵،۸، (م$\wedge$)
۱۰–	$(\exists x)(Fx \wedge \sim Fx)$	۹، (م$\exists$)

۱- $(\forall x)[(Fx \supset Gx) \wedge \sim Ga]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)\sim Fx$	(۸)
۲- $(\forall x)[(Fx \supset Gx) \wedge \sim Gy]$	ف
۳- $(Fz \supset Gz) \wedge \sim Gy$	۲، (ح$\forall$)
۴- $(\forall y)[(Fy \supset Gy) \wedge \sim Gy]$	۳، (م$\forall$)
۵- $(Fz \supset Gz) \wedge \sim Gz$	۴، (ح$\forall$)
۶- $Fz \supset Gz$	۵، (ح$\wedge$)
۷- $\sim Gz$	۵، (ح$\wedge$)
۸- $\sim Fz$	۶،۷، (ر.ت)
۹- $(\forall x)\sim Fx$	۸، (م$\forall$)
۱۰- $(\forall x)[(Fx \supset Gx) \wedge \sim Gy] \supset (\forall x)\sim Fx$	۲-۹، (م$\supset$)
۱۱- $(\forall z)((\forall x)[(Fx \supset Gx) \wedge \sim Gz] \supset (\forall x)\sim Fx)$	۱۰، (م$\forall$)
۱۲- $(\forall x)[(Fx \supset Gx) \wedge \sim Ga] \supset (\forall x)\sim Fx$	۱۱، (ح$\forall$)
۱۳- $(\forall x)\sim Fx$	۱،۱۲، (ح$\supset$)

۱- $(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(By \supset Cxy)]$	مقدمه
$\therefore (\exists y)By \supset (\exists x)Cxx$	(۹)
۲- Bx	ف
۳- $Ax \wedge (\forall y)(By \supset Cxy)$	ف
۴- $(\forall y)(By \supset Cxy)$	۳، (ح$\wedge$)
۵- $Bx \supset Cxx$	۴، (ح$\forall$)
۶- Cxx	۲،۵، (ح$\supset$)
۷- Cxx	۱،۳-۶، (ح$\exists$)
۸- $(\exists x)Cxx$	۷، (م$\exists$)
۹- $Bx \supset (\exists x)Cxx$	۲-۸، (م$\supset$)
۱۰- $(\exists y)By \supset (\exists x)Cxx$	۹، (م$\exists$)

۱- $(\forall x)(\forall y)(Axy \supset \sim By)$	مقدمه
۲- $(\forall x)(\forall y)(\sim Cx \supset Axy)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[(\exists y)By \supset Cx]$	(۱۰)
۳- Bz	ف
۴- $(\forall y)(Axz \supset \sim By)$	۱، (ح$\forall$)
۵- $Axz \supset \sim Bz$	۴، (ح$\forall$)
۶- $\sim Axz$	۵،۳، (ر.ت)
۷- $(\forall y)(\sim Cx \supset Axy)$	۲، (ح$\forall$)
۸- $\sim Cx \supset Axz$	۷، (ح$\forall$)
۹- Cx	۸،۶، (ر.ت)
۱۰- $Bz \supset Cx$	۳-۹، (م$\supset$)
۱۱- $(\exists y)By \supset Cx$	۱۰، (م$\exists$)
۱۲- $(\forall x)[(\exists y)By \supset Cx]$	۱۱، (م$\forall$)

پاسخ تمرین ۱۱.۵

تا قبل از اینکه مسلط شوید، برای اینکه اشتباه نکنید می‌توانید برای هر مورد ابتدا بر روی چک‌نویس مصداق φ_α، α، φ_β و β را بنویسید. سپس شرایط را از صفحه ۹۷ چک کنید.

۱. سطر ۴: x در سطر ۳ آزاد است. (شرط ۲ معرفی کلی)

۲. سطر ۴: x در سطر ۳ آزاد است. (شرط ۲ معرفی کلی)
سطر ۵: x در سطر ۴ آزاد نیست. (شرط عمومی)
سطر ۶: x در سطر ۲ آزاد است. (شرط ۳ حذف جزئی)

۳. سطر ۴: y جانشین همه‌ی موارد x در سطر ۳ نشده است. (شرط عمومی)
سطر ۴: x در سطر ۳ آزاد است. (شرط ۲ معرفی کلی)
سطر ۴: x در دامنه‌ی سور آزاد است. (شرط ۳ معرفی کلی)
سطر ۶: x جانشین y در فرمول Gy در سطر ۲ شده است. (شرط عمومی)

۴. سطر ۵: هم z در فرمول Gz در سطر ۴ جانشین تمام موارد y نشده است و هم y در فرمول Hy در سطر ۴ جانشین تمام موارد y نشده است. (شرط عمومی)
سطر ۶: x در سطر ۳ جانشین y در فرمول Gy در سطر ۲ شده است. (شرط عمومی)
سطر ۷: x در سطر ۷ آزاد نیست. (شرط عمومی)

۵. سطر ۷: y در سطر ۳ آزاد است. (شرط ۳ حذف جزئی)

۶. سطر ۵: x در سطر ۴ آزاد است. (شرط ۲ حذف جزئی)
سطر ۵: x در سطر ۲ آزاد است. (شرط ۳ حذف جزئی)
سطر ۶: x در سطر ۵ آزاد است. (شرط ۲ حذف جزئی)
سطر ۷: x در سطر ۷ آزاد است. (شرط ۳ معرفی کلی)

۷. سطر ۵: سطر ۳ نمونه درست دامنه‌ی سور سطر ۱ نیست. (شرط عمومی)
سطر ۸: x در سطر ۷ آزاد است. (شرط ۲ حذف جزئی)
سطر ۸: x در سطر ۵ آزاد است. (شرط ۳ حذف جزئی)

۸. سطر ۴: سطر ۳ نمونه درست دامنه‌ی سور نیست. (شرط عمومی)

۹. سطر ۷: x در سطرهای ۲ و ۶ آزاد است. (شرط ۲ و ۳ حذف جزئی)
سطر ۱۰: قاعده معرفی جزئی در بخشی از فرمول به کار رفته است.

۱۰. سطر ۴: نمونه درست دامنه‌ی سور سطر ۱ نیست. (شرط عمومی)
سطر ۶: قاعده‌ی گزاره‌ای به کار رفته، قاعده رفع تالی نیست. بر روی سطر ۳ به کار بردن قاعده‌ی نقض مضاعف جا افتاده است.[۱۴]
سطر ۹: قاعده‌ی گزاره‌ای به کار رفته، قاعده رفع تالی نیست. بر روی سطر ۳ به کار بردن قاعده‌ی حذف نقض جا افتاده است.[۱۵]
سطر ۱۱: قاعده معرفی جزئی در بخشی از فرمول به کار رفته است.

تمرین ۱۲.۵: اثبات — صفحه ۱۰۷

استدلال‌های زیر را بدون استفاده از قواعد فرعی P_N اثبات کنید.

1. $(\forall x)(Ax \supset Bx), \sim Bd \vdash \sim Ad$
2. $(\forall x)(Cx \supset Dx), (\forall x)(Ex \supset \sim Dx) \vdash (\forall x)(Ex \supset \sim Cx)$
3. $(\forall x)(Fx \supset \sim Gx), (\exists x)(Hx \wedge Gx) \vdash (\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$
4. $*$ $(\forall x)(Ax \supset Bx), (\exists x)(Ax \wedge \sim Bx) \vdash (\forall x)(Bx \supset Ax)$
5. $(\forall x)(Kx \supset Lx), (\forall x)[(Kx \wedge Lx) \supset Mx] \vdash (\forall x)(Kx \supset Mx)$
6. $(\forall x)(Ax \supset Cx), (\forall x)(Bx \supset Cx) \vdash (\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset Cx]$

[۱۴] البته استنتاج درست است.
[۱۵] البته استنتاج درست است.

7. $(\forall x)(Ax \supset Bx), (\exists x)(Ax \vee Bx) \vdash (\exists x)Bx$

8. $(\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Hx)], (\forall x)[Hx \supset (Nx \wedge Mx)] \vdash (\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Nx)]$

9. $(\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset (Cx \wedge Dx)], (\forall x)[(Cx \vee Dx) \supset (Ax \wedge Bx)] \vdash (\forall x)(Ax \equiv Cx)$

10. $(\forall x)[(Bx \supset Cx) \wedge (Dx \supset Ex)], (\forall x)[(Cx \vee Ex) \supset ([Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx))] \vdash (\forall x)(Bx \equiv Dx)$

پاسخ تمرین ۱۲.۵

در اثبات به نکات زیر توجه کنید:

- تا جایی که می‌توانید متغیرها را تغییر ندهید.
- استفاده از قاعده حذف کلی را نسبت به بقیه‌ی قواعد اصلی سورها تا می‌توانید به تعویق بندازید.

۱- $(\forall x)(Ax \supset Bx)$	مقدمه
۲- $\sim Bd$	مقدمه
$\therefore \sim Ad$	(۱)
۳- $Ad \supset Bd$	۱، (ح$\forall$)
۴- $\sim Ad$	۲،۳، (ر.ت)

۱- $(\forall x)(Cx \supset Dx)$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Ex \supset \sim Dx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(Ex \supset \sim Cx)$	(۲)
۳- $Cx \supset Dx$	۱، (ح$\forall$)
۴- $Ex \supset \sim Dx$	۲، (ح$\forall$)
۵- $\sim Dx \supset \sim Cx$	۳، (عک)
۶- $Ex \supset \sim Cx$	۴،۵، (ق.ش)
۷- $(\forall x)(Ex \supset \sim Cx)$	۶، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)(Fx \supset \sim Gx)$	مقدمه
۲- $(\exists x)(Hx \wedge Gx)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$	(۳)
۳- $Hx \wedge Gx$	ف
۴- $Fx \supset \sim Gx$	۱، (ح$\forall$)
۵- Hx	۳، (ح$\wedge$)
۶- Gx	۳، (ح$\wedge$)
۷- $\sim\sim Gx$	۶، (ن.م)
۸- $\sim Fx$	۷،۴، (ر.ت)
۹- $Hx \wedge \sim Fx$	۸،۵، (م$\wedge$)
۱۰- $(\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$	۹، (م$\exists$)
۱۱- $(\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$	۲،۳-۱۰، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)(Ax \supset Bx)$	مقدمه
۲- $(\exists x)(Ax \wedge \sim Bx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(Bx \supset Ax)$	(۴)
۳- $Ax \wedge \sim Bx$	ف
۴- $\sim(\forall x)(Bx \supset Ax)$	ف
۵- $Ax \supset Bx$	۱، (ح$\forall$)
۶- Ax	۳، (ح$\wedge$)
۷- $\sim Bx$	۳، (ح$\wedge$)
۸- Bx	۶،۵، (ح$\supset$)
۹- $Bx \wedge \sim Bx$	۸،۷، (م$\wedge$)
۱۰- $\sim\sim(\forall x)(Bx \supset Ax)$	۴-۹، (م$\sim$)
۱۱- $(\forall x)(Bx \supset Ax)$	۱۱، (ح$\sim$)
۱۲- $(\forall x)(Bx \supset Ax)$	۲،۳-۱۱، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)(Kx \supset Lx)$	مقدمه
۲- $(\forall x)[(Kx \wedge Lx) \supset Mx]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(Kx \supset Mx)$	(۵)
۳- $Kx \supset Lx$	۱، (ح$\forall$)
۴- $(Kx \wedge Lx) \supset Mx$	۲، (ح$\forall$)
۵- $Kx \supset (Kx \wedge Lx)$	۳، (جذ)
۶- $Kx \supset Mx$	۵،۴، (ق.ش)
۷- $(\forall x)(Kx \supset Mx)$	۶، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)(Ax \supset Cx)$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Bx \supset Cx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset Cx]$	(۶)
۳- $Ax \supset Cx$	۱، (ح$\forall$)
۴- $Bx \supset Cx$	۲، (ح$\forall$)
۵- $Ax \vee Bx$	ف
۶- $(Ax \supset Cx) \wedge (Bx \supset Cx)$	۴،۳، (م$\wedge$)
۷- $Cx \vee Cx$	۶،۵، (ذ.م)
۸- Cx	۷، (تک)
۹- $(Ax \vee Bx) \supset Cx$	۵-۸، (م$\supset$)
۱۰- $(\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset Cx]$	۹، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)(Ax \supset Bx)$	مقدمه
۲- $(\exists x)(Ax \vee Bx)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)Bx$	(۷)
۳- $Ax \vee Bx$	ف
۴- $Ax \supset Bx$	۱، (ح$\forall$)
۵- Ax	ف
۶- Bx	۴،۵، (ح$\supset$)
۷- Bx	ف
۸- $Bx \wedge Bx$	۷، (تک)
۹- Bx	۸، (تک)
۱۰- Bx	۳،۵-۶،۷-۹، (ح$\vee$)
۱۱- $(\exists x)Bx$	۱۰، (م$\exists$)
۱۲- $(\exists x)Bx$	۲،۳-۱۱، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Hx)]$	مقدمه
۲- $(\forall x)[Hx \supset (Nx \wedge Mx)]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Nx)]$	(۸)
۳- $Ox \supset (Ex \supset Hx)$	۱، (ح$\forall$)
۴- $Hx \supset (Nx \wedge Mx)$	۲، (ح$\forall$)
۵- Hx	ف
۶- $Nx \wedge Mx$	۴،۵، (ح$\supset$)
۷- Nx	۶، (ح$\wedge$)
۸- $Hx \supset Nx$	۵-۷، (م$\supset$)
۹- $(Ox \wedge Ex) \supset Hx$	۳، (صد)
۱۰- $(Ox \wedge Ex) \supset Nx$	۸،۹، (ق.ش)
۱۱- $Ox \supset (Ex \supset Nx)$	۱۰، (صد)
۱۲- $(\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Nx)]$	۱۱، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset (Cx \wedge Dx)]$	مقدمه
۲- $(\forall x)[(Cx \vee Dx) \supset (Ax \wedge Bx)]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(Ax \equiv Cx)$	(۹)
۳- $(Ax \vee Bx) \supset (Cx \wedge Dx)$	۱، (ح$\forall$)
۴- $(Cx \vee Dx) \supset (Ax \wedge Bx)$	۲، (ح$\forall$)
۵- Ax	ف
۶- $Ax \vee Bx$	۵، (م$\vee$)
۷- $Cx \wedge Dx$	۳،۶، (ح$\supset$)
۸- Cx	۷، (ح$\wedge$)
۹- Cx	ف
۱۰- $Cx \vee Dx$	۹، (م$\vee$)
۱۱- $Ax \wedge Bx$	۴،۱۰، (ح$\supset$)
۱۲- Ax	۱۱، (ح$\wedge$)
۱۳- $Ax \equiv Cx$	۵-۸،۹-۱۲ (م$\equiv$)
۱۴- $(\forall x)(Ax \equiv Cx)$	۱۳، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)[(Bx \supset Cx) \wedge (Dx \supset Ex)]$	مقدمه
۲- $(\forall x)[(Cx \vee Ex) \supset ([Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx))]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(Bx \equiv Dx)$	(۱۰)
۳- $(Bx \supset Cx) \wedge (Dx \supset Ex)$	۱، (ح$\forall$)
۴- $(Cx \vee Ex) \supset ([Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx))$	۲، (ح$\forall$)
۵- $Bx \vee Dx$	ف
۶- $Cx \vee Ex$	۳،۵، (ذ.م)
۷- $[Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx)$	۴،۶، (ح$\supset$)
۸- Fx	ف
۹- $\sim Gx \vee Fx$	۸، (م$\vee$)
۱۰- $Gx \supset Fx$	۹، (اس)
۱۱- $Fx \supset (Gx \supset Fx)$	۸-۱۰، (م$\supset$)
۱۲- $Bx \wedge Dx$	۷،۱۱، (ح$\supset$)
۱۳- $(Bx \vee Dx) \supset (Bx \wedge Dx)$	۵-۱۲، (م$\supset$)
۱۴- $\sim(Bx \vee Dx) \vee (Bx \wedge Dx)$	۱۳، (اس)
۱۵- $(Bx \wedge Dx) \vee \sim(Bx \vee Dx)$	۱۴، (جا)
۱۶- $(Bx \wedge Dx) \vee (\sim Bx \wedge \sim Dx)$	۱۵، (دم)
۱۷- $Bx \equiv Dx$	۱۶، (تع)
۱۸- $(\forall x)(Bx \equiv Dx)$	۱۷، (م$\forall$)

تمرین ۱۳.۵: اثبات ★★ صفحه ۱۰۸

استدلال‌های زیر (قواعد فرعی P_N) را بر مبنای قواعد اصلی P_N اثبات کنید.

** ۱. نقض سور: $\sim(\forall x)Fx \vdash (\exists x)\sim Fx$

* ۲. نقض سور: $(\exists y)\sim(Fy \vee Gy) \vdash \sim(\forall y)(Fy \vee Gy)$

** ۳. نقض سور: $\sim(\forall x)\sim[Fx \equiv (\exists y)Gy] \vdash (\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$

* ۴. نقض سور: $(\exists x)(\forall y)Fxy \vdash \sim(\forall x)\sim(\forall y)Fxy$

۵. نقض سور: $\sim(\exists x)(Gx \supset Fx) \vdash (\forall x)\sim(Gx \supset Fx)$

* ۶. نقض سور: $(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy) \vdash \sim(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$

۷. جابه‌جایی سور: $(\forall x)(\forall y)Fxy \vdash (\forall y)(\forall x)Fxy$

۸. جابه‌جایی سور: $(\exists x)(\exists y)(Fx \equiv Gy) \vdash (\exists y)(\exists x)(Fx \equiv Gy)$

۹. پخش سور: $(\forall x)(Fx \wedge Gx) \vdash (\forall x)Fx \wedge Gx$

۱۰. پخش سور: $(\forall x)(Fx \equiv Gx) \wedge (\forall x)(Ax \vee Bx)$
$\vdash (\forall x)[(Fx \equiv Gx) \wedge (Ax \vee Bx)]$

۱۱. پخش سور: $(\exists x)(Fx \vee Gx) \vdash (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$

۱۲. پخش سور: $(\exists x)(\exists y)Fxy \vee (\exists x)(\forall y)Gxy \vdash (\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$

پاسخ تمرین ۱۳.۵

مقدمه	۱- $\sim(\forall x)Fx$
(۱)	$\therefore (\exists x)\sim Fx$
ف	۲- $\sim(\exists x)\sim Fx$
ف	۳- $\sim Fx$
۳، (∃م)	۴- $(\exists x)\sim Fx$
۲،۴، (∧م)	۵- $(\exists x)\sim Fx \wedge \sim(\exists x)\sim Fx$
۳-۵، (~م)	۶- $\sim\sim Fx$
۶، (~ح)	۷- Fx
۷، (∀م)	۸- $(\forall x)Fx$
۱،۸، (∧م)	۹- $(\forall x)Fx \wedge \sim(\forall x)Fx$
۲-۹، (~م)	۱۰- $\sim\sim(\exists x)\sim Fx$
۱۰، (~ح)	۱۱- $(\exists x)\sim Fx$

در مورد (۲) توجه کنید که راه حل زیر اشتباه است:

۱- $(\exists y){\sim}(Fy \vee Gy)$	مقدمه
$\therefore\ {\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	(۲)
۲- $(\forall y)(Fy \vee Gy)$	ف
۳- ${\sim}(Fy \vee Gy)$	ف
۴- $Fy \vee Gy$	۲، (ح$\forall$)
۵- $(Fy \vee Gy) \wedge {\sim}(Fy \vee Gy)$	۳،۴، (م$\wedge$)
۶- $(Fy \vee Gy) \wedge {\sim}(Fy \vee Gy)$	۱، ۳-۵، (ح$\exists$) خطا
۷- ${\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	۲-۶، (م$\sim$)

چرا که در سطر ۵، متغیر y آزاد است. اگر ما در زبان ادات صفر موضعی (گزاره‌ی ثابت) $\perp$ که نماینده‌ی تناقض‌ها است را به همراه قواعد معرفی و حذف $\perp$ داشتیم، در سطر ۶ به مشکل برنمی‌خوردیم. اما در تقریر کتاب ما باید از تناقض در سطر ۵ به تناقضی برسیم که متغیر y در آن آزاد نباشد.

روش اول

۱- $(\exists y){\sim}(Fy \vee Gy)$	مقدمه
$\therefore\ {\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	(۲)
۲- $(\forall y)(Fy \vee Gy)$	ف
۳- ${\sim}(Fy \vee Gy)$	ف
۴- $Fy \vee Gy$	۲، (ح$\forall$)
۵- ${\sim}(P \wedge {\sim}P)$	ف
۶- $(Fy \vee Gy) \wedge {\sim}(Fy \vee Gy)$	۳،۴، (م$\wedge$)
۷- ${\sim}{\sim}(P \wedge {\sim}P)$	۵-۶، (م$\sim$)
۸- $P \wedge {\sim}P$	۷، (ح$\sim$)
۹- $P \wedge {\sim}P$	۱، ۳-۸، (ح$\exists$)
۱۰- ${\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	۲-۹، (م$\sim$)

روش دوم

۱- $(\exists y){\sim}(Fy \vee Gy)$	مقدمه
$\therefore {\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	(۲)
۲- $(\forall y)(Fy \vee Gy)$	ف
۳- ${\sim}(Fy \vee Gy)$	ف
۴- $(\forall y)(Fy \vee Gy)$	ف
۵- $Fy \vee Gy$	۴، (ح$\forall$)
۶- $(Fy \vee Gy) \wedge {\sim}(Fy \vee Gy)$	۵،۳، (م$\wedge$)
۷- ${\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	۴-۶، (م${\sim}$)
۸- $(\forall y)(Fy \vee Gy) \wedge (\forall y)(Fy \vee Gy)$	۲،۷، (م$\wedge$)
۹- $(\forall y)(Fy \vee Gy) \wedge {\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	۱،۳-۸، (ح$\exists$)
۱۰- ${\sim}(\forall y)(Fy \vee Gy)$	۲-۹، (م${\sim}$)

مطلبی که گفته شد مشابهاً برای موارد (۴) و (۶) نیز برقرار است. توصیه می‌شود از روش اول استفاده شود که کلی‌تر است.

۱- ${\sim}(\forall x){\sim}[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	مقدمه
$\therefore (\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	(۳)
۲- ${\sim}(\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	ف
۳- $Fx \equiv (\exists y)Gy$	ف
۴- $(\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	۳، (م$\exists$)
۵- $(\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy] \wedge {\sim}(\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	۲،۴، (م$\wedge$)
۶- ${\sim}[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	۳-۵، (م${\sim}$)
۷- $(\forall x){\sim}[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	۶، (م$\forall$)
۸- $(\forall x)[Fx \equiv (\exists y)Gy] \wedge {\sim}(\forall x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	۱،۷، (م$\wedge$)
۹- ${\sim}{\sim}(\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	۲-۸، (م${\sim}$)
۱۰- $(\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	۹، (ح${\sim}$)

۱- $(\exists x)(\forall y)Fxy$	مقدمه
$\therefore\ \sim(\forall x)\sim(\forall y)Fxy$	(۴)
۲- $(\forall x)\sim(\forall y)Fxy$	ف
۳- $(\forall y)Fxy$	ف
۴- $\sim(\forall y)Fxy$	۲، (ح$\forall$)
۵- $\sim(P\wedge\sim P)$	ف
۶- $(\forall y)Fxy\wedge\sim(\forall y)Fxy$	۴،۳، (م$\wedge$)
۷- $\sim\sim(P\wedge\sim P)$	۶-۵، (م$\sim$)
۸- $P\wedge\sim P$	۷، (ح$\sim$)
۹- $P\wedge\sim P$	۸-۳،۱، (ح$\exists$)
۱۰- $\sim(\forall x)\sim(\forall y)Fxy$	۹-۲، (م$\sim$)

۱- $\sim(\exists x)(Gx\supset Fx)$	مقدمه
$\therefore\ (\forall x)\sim(Gx\supset Fx)$	(۵)
۲- $Gx\supset Fx$	ف
۳- $(\exists x)(Gx\supset Fx)$	۲، (م$\exists$)
۴- $(\exists x)(Gx\supset Fx)\wedge\sim(\exists x)(Gx\supset Fx)$	۳،۱، (م$\wedge$)
۵- $\sim(Gx\supset Fx)$	۴-۲، (م$\sim$)
۶- $(\forall x)\sim(Gx\supset Fx)$	۵، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)\sim(\exists y)(Fx\vee Gy)$	مقدمه
$\therefore\ \sim(\exists x)(\exists y)(Fx\vee Gy)$	(۶)
۲- $(\exists x)(\exists y)(Fx\vee Gy)$	ف
۳- $(\exists y)(Fx\vee Gy)$	ف
۴- $\sim(\exists y)(Fx\vee Gy)$	۱، (ح$\forall$)
۵- $\sim(P\wedge\sim P)$	ف
۶- $(\exists y)(Fx\vee Gy)\wedge\sim(\exists y)(Fx\vee Gy)$	۴،۳، (م$\wedge$)
۷- $\sim\sim(P\wedge\sim P)$	۶-۵، (م$\sim$)
۸- $P\wedge\sim P$	۷، (ح$\sim$)
۹- $P\wedge\sim P$	۸-۳،۲، (ح$\exists$)
۱۰- $\sim(\exists x)(\exists y)(Fx\vee Gy)$	۹-۲، (م$\sim$)

۱- $(\forall x)(\forall y)Fxy$	مقدمه
$\therefore (\forall y)(\forall x)Fxy$	(۷)
۲- $(\forall y)Fxy$	۱، (ح∀)
۳- Fxy	۲، (ح∀)
۴- $(\forall y)Fxy$	۳، (م∀)
۵- $(\forall y)(\forall x)Fxy$	۴، (م∀)

۱- $(\exists x)(\exists y)(Fx \equiv Gy)$	مقدمه
$\therefore (\exists y)(\exists x)(Fx \equiv Gy)$	(۸)
۲- $(\exists y)(Fx \equiv Gy)$	ف
۳- $Fx \equiv Gy$	ف
۴- $(\exists x)(Fx \equiv Gy)$	۳، (م∃)
۵- $(\exists y)(\exists x)(Fx \equiv Gy)$	۴، (م∃)
۶- $(\exists y)(\exists x)(Fx \equiv Gy)$	۲، ۳-۵، (ح∃)
۷- $(\exists y)(\exists x)(Fx \equiv Gy)$	۱، ۲-۶، (ح∃)

۱- $(\forall x)(Fx \wedge Gx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx$	(۹)
۲- $Fx \wedge Gx$	۱، (ح∀)
۳- Fx	۲، (ح∧)
۴- Gx	۲، (ح∧)
۵- $(\forall x)Fx$	۳، (م∀)
۶- $(\forall x)Gx$	۴، (م∀)
۷- $(\forall x)Fx \wedge (\forall x)Gx$	۵، ۶، (م∧)

۱- $(\forall x)(Fx \equiv Gx) \wedge (\forall x)(Ax \vee Bx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[(Fx \equiv Gx) \wedge (Ax \vee Bx)]$	(۱۰)
۲- $(\forall x)(Fx \equiv Gx)$	۱، (ح$\wedge$)
۳- $(\forall x)(Ax \vee Bx)$	۱، (ح$\wedge$)
۴- $Fx \equiv Gx$	۲، (ح$\forall$)
۵- $Ax \vee Bx$	۳، (ح$\forall$)
۶- $(Fx \equiv Gx) \wedge (Ax \vee Bx)$	۴،۵، (م$\wedge$)
۷- $(\forall x)[(Fx \equiv Gx) \wedge (Ax \vee Bx)]$	۶، (م$\forall$)

۱- $(\exists x)(Fx \vee Gx)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	(۱۱)
۲- $Fx \vee Gx$	ف
۳- Fx	ف
۴- $(\exists x)Fx$	۳، (م$\exists$)
۵- $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	۴، (م$\vee$)
۶- Gx	ف
۷- $(\exists x)Gx$	۶، (م$\exists$)
۸- $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	۷، (م$\vee$)
۹- $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	۲،۳-۵،۶-۸، (ح$\vee$)
۱۰- $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	۱،۲-۹، (ح$\exists$)

۱ـ	$(\exists x)(\exists y)Fxy \vee (\exists x)(\forall y)Gxy$	مقدمه
	$\therefore\ (\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$	(۱۲)
۲ـ	$(\exists x)(\exists y)Fxy$	ف
۳ـ	$(\exists y)Fxy$	ف
۴ـ	$(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy$	۳، (م$\vee$)
۵ـ	$(\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$	۴، (م$\exists$)
۶ـ	$(\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$	۲، ۳-۵، (ح$\exists$)
۷ـ	$(\exists x)(\forall y)Gxy$	ف
۸ـ	$(\forall y)Gxy$	ف
۹ـ	$(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy$	۸، (م$\vee$)
۱۰ـ	$(\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$	۹، (م$\exists$)
۱۱ـ	$(\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$	۷، ۸-۱۰، (ح$\exists$)
۱۲ـ	$(\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$	۱، ۲-۶، ۷-۱۱، (ح$\vee$)

تمرین ۱۴.۵: اثبات ★★★ صفحه ۱۰۹

با استفاده از قواعد اصلی و فرعی استنتاج، استدلال‌های زیر را اثبات کنید.

1. $(\forall x)(Nx \supset Ox) \vdash (\forall x)(Mx \supset [(\forall y)(My \supset Ny) \supset Ox])$

∗∗2. $(\forall x)(\exists y)(Ex \vee Fy) \vdash (\forall x)Ex \vee (\exists y)Fy$

3. $(\exists x)Ax \supset (\forall y)(By \supset Cy), (\exists x)Dx \supset (\exists y)By \vdash (\exists x)(Ax \wedge Dx) \supset (\exists y)Cy$

4. $(\exists x)Hx \vee (\exists y)Ky, (\forall x)(Hx \supset Kx) \vdash (\exists y)Ky$

5. $(\forall x)(Ix \supset \sim Gx) \vdash (\forall x)(Gx \supset Ix) \supset (\forall y)(Gy \supset Hy)$

6. $(\forall x)(Bx \supset [(\forall y)(Ay \supset By) \supset Cx]), (\forall x)(Cx \supset [(\forall y)(Ay \supset Dy) \supset Ex]) \vdash (\forall y)[Ay \supset (By \wedge Dy)] \supset (\forall x)(Bx \supset Ex)$

7. $(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(By \supset Cy)], (\forall x)(Ax \supset [(\exists y)(Dy \wedge Cy) \supset Ex]) \vdash (\exists y)(Dy \wedge By) \supset (\exists x)Ex$

∗8. $(\forall x)(Ax \supset [(\exists y)By \supset Cx]), (\forall x)(Cx \supset [(\exists y)Dy \supset Ex]) \vdash (\exists x)(Bx \wedge Fx) \supset [(\forall y)(Fy \supset Dy) \supset (\forall z)(Az \supset Ez)]$

∗∗9. $(\forall x)(\exists y)(Gx \wedge Hy) \vdash (\forall x)Gx \wedge (\exists y)Hy$

*** 10. $(\forall x)(\exists y)(Kx \wedge Ly) \vdash (\exists y)(\forall x)(Kx \wedge Ly)$

11. $(\exists x)(\forall y)[(\exists z)Ayz \supset Ayx], (\forall y)(\exists z)Ayz \vdash (\exists x)(\forall y)Ayx$

12. $(\forall x)(Cax \supset Dxb), (\exists x)Dxb \supset (\exists y)Dby \vdash (\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$

* 13. $(\forall x)[(\exists y)Byx \supset (\forall z)Bxz] \vdash (\forall y)(\forall z)(Byz \supset Bzy)$

14. $(\exists x)[Hx \wedge (\forall y)(Iy \supset Nxy)] \vdash (\forall x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \wedge Nyy)$

15. $(\forall x)[Ex \supset (\forall y)(Fy \supset Gxy)], (\exists x)[Ex \wedge (\exists y){\sim}Gxy] \vdash (\exists x){\sim}Fx$

16. $(\forall x)[Mx \supset (\forall y)(Ny \supset Oxy)], (\forall x)[Bx \supset (\forall y)(Oxy \supset Cy)] \vdash (\exists x)(Mx \wedge Bx) \supset (\forall y)(Ny \supset Cy)$

* 17. $(\forall x)(Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx]), (\forall x)[(\exists z)Lzx \supset Lxx], {\sim}(\exists x)Lxx \vdash (\forall x)[Kx \supset (\forall y){\sim}Lxy]$

* 18. $(\forall x)[(Bx \wedge {\sim}Ox) \supset (\exists y)(Exy \wedge Hy)], (\exists x)[Nx \wedge Bx \wedge (\forall y)(Exy \supset Ny)], (\forall x)(Nx \supset {\sim}Ox) \vdash (\exists x)(Nx \wedge Hx)$

** 19. $(\forall x)(Ax \supset Bx), (\forall x)[(Cx \wedge Bx) \supset Dx], (\forall x)(\exists y)(Cy \wedge Eyx), (\forall x)(\forall y)[(Eyx \wedge Dy) \supset Dx] \vdash (\forall x)[(\forall y)(Eyx \supset Ay) \supset Dx]$

** 20. $(\forall x)[(Bx \wedge (\exists y)[Cy \wedge Dyx \wedge (\exists z)(Ez \wedge Fxz)]) \supset (\exists x')Gxx'x], (\forall x)(\forall y)(Hxy \supset Dyx), (\forall x)(\forall y)(Fxy \supset Fyx), (\forall x)(Ix \supset Ex) \vdash (\forall x)[Bx \supset ([(\exists y)(Cy \wedge Hxy) \wedge (\exists z)(Iz \wedge Fzx)] \supset (\exists y')(\exists x')Gxx'y')]$

پاسخ تمرین ۱۴.۵

۱-	$(\forall x)(Nx \supset Ox)$	مقدمه
	$\therefore\ (\forall x)(Mx \supset [(\forall y)(My \supset Ny) \supset Ox])$	(۱)
۲-	Mx	ف
۳-	$(\forall y)(My \supset Ny)$	ف
۴-	$Nx \supset Ox$	۱، (ح$\forall$)
۵-	$Mx \supset Nx$	۳، (ح$\forall$)
۶-	Nx	۲،۵، (ح$\supset$)
۷-	Ox	۴،۶، (ح$\supset$)
۸-	$(\forall y)(My \supset Ny) \supset Ox$	۳-۷، (م$\supset$)
۹-	$Mx \supset [(\forall y)(My \supset Ny) \supset Ox]$	۲-۸، (م$\supset$)
۱۰-	$(\forall x)(Mx \supset [(\forall y)(My \supset Ny) \supset Ox])$	۹، (م$\forall$)

۱-	$(\forall x)(\exists y)(Ex \vee Fy)$	مقدمه
	$\therefore\ (\forall x)Ex \vee (\exists y)Fy$	(۲)
۲-	$\sim(\forall x)Ex$	ف
۳-	$(\exists x)\sim Ex$	۲، (ن.س)
۴-	$\sim Ex$	ف
۵-	$(\exists y)(Ex \vee Fy)$	۱، (ح$\forall$)
۶-	$Ex \vee Fy$	ف
۷-	Fy	۴،۶، (ق.ا)
۸-	$(\exists y)Fy$	۷، (م$\exists$)
۹-	$(\exists y)Fy$	۵،۶-۸، (ح$\exists$)
۱۰-	$(\exists y)Fy$	۳،۴-۹، (ح$\exists$)
۱۱-	$\sim(\forall x)Ex \supset (\exists y)Fy$	۲-۱۰، (م$\supset$)
۱۲-	$\sim\sim(\forall x)Ex \vee (\exists y)Fy$	۱۱، (اس)
۱۳-	$(\forall x)Ex \vee (\exists y)Fy$	۱۲، (ن.م)

۱- $(\exists x)Ax \supset (\forall y)(By \supset Cy)$	مقدمه
۲- $(\exists x)Dx \supset (\exists y)By$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Ax \wedge Dx) \supset (\exists y)Cy$	(۳)
۳- $(\exists x)(Ax \wedge Dx)$	ف
۴- $Ax \wedge Dx$	ف
۵- Ax	۴، (ح∧)
۶- Dx	۴، (ح∧)
۷- $(\exists x)Ax$	۵، (م∃)
۸- $(\forall y)(By \supset Cy)$	۱،۷، (ح⊃)
۹- $(\exists x)Dx$	۶، (م∃)
۱۰- $(\exists y)By$	۲،۹، (ح⊃)
۱۱- By	ف
۱۲- $By \supset Cy$	۸، (ح∀)
۱۳- Cy	۱۱،۱۲، (ح⊃)
۱۴- $(\exists y)Cy$	۱۳، (م∃)
۱۵- $(\exists y)Cy$	۱۰،۱۱-۱۴، (ح∃)
۱۶- $(\exists y)Cy$	۳،۴-۱۵، (ح∃)
۱۷- $(\exists x)(Ax \wedge Dx) \supset (\exists y)Cy$	۳-۱۶، (م⊃)

۱- $(\exists x)Hx \vee (\exists y)Ky$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Hx \supset Kx)$	مقدمه
$\therefore (\exists y)Ky$	(۴)
۳- $(\exists x)Hx$	ف
۴- Hx	ف
۵- $Hx \supset Kx$	۲، (ح∀)
۶- Kx	۴،۵، (ح⊃)
۷- $(\exists y)Ky$	۶، (م∃)
۸- $(\exists y)Ky$	۳،۴-۷، (ح∃)
۹- $(\exists y)Ky$	ف
۱۰- $(\exists y)Ky \wedge (\exists y)Ky$	۹، (تک)
۱۱- $(\exists y)Ky$	۱۰، (ح∧)
۱۲- $(\exists y)Ky$	۱،۳-۸،۹-۱۱، (ح∨)

۱- $(\forall x)(Ix \supset {\sim}Gx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(Gx \supset Ix) \supset (\forall y)(Gy \supset Hy)$	(۵)
۲- $(\forall x)(Gx \supset Ix)$	ف
۳- $Gx \supset Ix$	۲، (ح$\forall$)
۴- $Ix \supset {\sim}Gx$	۱، (ح$\forall$)
۵- $Gx \supset {\sim}Gx$	۳،۴، (ق.ش)
۶- ${\sim}Gx \vee {\sim}Gx$	۵، (اس)
۷- ${\sim}Gx$	۶، (تک)
۸- ${\sim}Gx \vee Hx$	۷، (م$\vee$)
۹- $Gx \supset Hx$	۸، (اس)
۱۰- $(\forall y)(Gy \supset Hy)$	۹، (م$\forall$)
۱۱- $(\forall x)(Gx \supset Ix) \supset (\forall y)(Gy \supset Hy)$	۲-۱۰، (م$\supset$)

۱- $(\forall x)(Bx \supset [(\forall y)(Ay \supset By) \supset Cx])$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Cx \supset [(\forall y)(Ay \supset Dy) \supset Ex])$	مقدمه
$\therefore (\forall y)[Ay \supset (By \wedge Dy)] \supset (\forall x)(Bx \supset Ex)$	(۶)
۳- $(\forall y)[Ay \supset (By \wedge Dy)]$	ف
۴- Bx	ف
۵- $Bx \supset [(\forall y)(Ay \supset By) \supset Cx]$	۱، (ح$\forall$)
۶- $(\forall y)(Ay \supset By) \supset Cx$	۴،۵، (ح$\supset$)
۷- $Cx \supset [(\forall y)(Ay \supset Dy) \supset Ex]$	۲، (ح$\forall$)
۸- $(\forall y)(Ay \supset By) \supset [(\forall y)(Ay \supset Dy) \supset Ex]$	۶،۷، (ق.ش)
۹- $[(\forall y)(Ay \supset By) \wedge (\forall y)(Ay \supset Dy)] \supset Ex$	۸، (صد)
۱۰- $(\forall y)[(Ay \supset By) \wedge (Ay \supset Dy)] \supset Ex$	۹، (پ.س)
۱۱- $(\forall y)[({\sim}Ay \vee By) \wedge ({\sim}Ay \vee Dy)] \supset Ex$	۱۰، (اس)
۱۲- $(\forall y)[{\sim}Ay \vee (By \wedge Dy)] \supset Ex$	۱۱، (پخ)
۱۳- $(\forall y)[Ay \supset (By \wedge Dy)] \supset Ex$	۱۲، (اس)
۱۴- Ex	۳،۱۳، (ح$\supset$)
۱۵- $Bx \supset Ex$	۴-۱۴، (م$\supset$)
۱۶- $(\forall x)(Bx \supset Ex)$	۱۵، (م$\forall$)
۱۷- $(\forall y)[Ay \supset (By \wedge Dy)] \supset (\forall x)(Bx \supset Ex)$	۳-۱۶، (م$\supset$)

۱- $(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(By \supset Cy)]$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Ax \supset [(\exists y)(Dy \wedge Cy) \supset Ex])$	مقدمه
$\therefore (\exists y)(Dy \wedge By) \supset (\exists x)Ex$	(۷)
۳- $(\exists y)(Dy \wedge By)$	ف
۴- $Dy \wedge By$	ف
۵- $Ax \wedge (\forall y)(By \supset Cy)$	ف
۶- $Ax \supset [(\exists y)(Dy \wedge Cy) \supset Ex]$	۲، (ح$\forall$)
۷- Ax	۵، (ح$\wedge$)
۸- $(\exists y)(Dy \wedge Cy) \supset Ex$	۶،۷، (ح$\supset$)
۹- Dy	۴، (ح$\wedge$)
۱۰- By	۴، (ح$\wedge$)
۱۱- $(\forall y)(By \supset Cy)$	۵، (ح$\wedge$)
۱۲- $By \supset Cy$	۱۱، (ح$\forall$)
۱۳- Cy	۱۰،۱۲، (ح$\supset$)
۱۴- $Dy \wedge Cy$	۹،۱۳، (م$\wedge$)
۱۵- $(\exists y)(Dy \wedge Cy)$	۱۴، (م$\exists$)
۱۶- Ex	۸،۱۵، (ح$\supset$)
۱۷- $(\exists x)Ex$	۱۶، (م$\exists$)
۱۸- $(\exists x)Ex$	۱،۵–۱۷، (ح$\exists$)
۱۹- $(\exists x)Ex$	۳،۴–۱۸، (ح$\exists$)
۲۰- $(\exists y)(Dy \wedge By) \supset (\exists x)Ex$	۳–۱۹، (م$\supset$)

۱- $(\forall x)(Ax \supset [(\exists y)By \supset Cx])$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Cx \supset [(\exists y)Dy \supset Ex])$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Bx \wedge Fx) \supset [(\forall y)(Fy \supset Dy) \supset (\forall z)(Az \supset Ez)]$	(۸)
۳- $(\exists x)(Bx \wedge Fx)$	ف
۴- $(\forall y)(Fy \supset Dy)$	ف
۵- Az	ف
۶- $Bx \wedge Fx$	ف
۷- $Az \supset [(\exists y)By \supset Cz]$	۱، (ح$\forall$)
۸- $(\exists y)By \supset Cz$	۵،۷، (ح$\supset$)
۹- Bx	۶، (ح$\wedge$)
۱۰- $(\exists y)By$	۹، (م$\exists$)
۱۱- Cz	۸،۱۰، (ح$\supset$)
۱۲- $Cz \supset [(\exists y)Dy \supset Ez]$	۲، (ح$\forall$)
۱۳- $(\exists y)Dy \supset Ez$	۱۱،۱۲، (ح$\supset$)
۱۴- Fx	۶، (ح$\wedge$)
۱۵- $Fx \supset Dx$	۴، (ح$\forall$)
۱۶- Dx	۱۴،۱۵، (ح$\supset$)
۱۷- $(\exists y)Dy$	۱۶، (م$\exists$)
۱۸- Ez	۱۳،۱۷، (ح$\supset$)
۱۹- Ez	۳،۶-۱۸، (ح$\exists$)
۲۰- $Az \supset Ez$	۵-۱۹، (م$\supset$)
۲۱- $(\forall z)(Az \supset Ez)$	۲۰، (م$\forall$)
۲۲- $(\forall y)(Fy \supset Dy) \supset (\forall z)(Az \supset Ez)$	۴-۲۱، (م$\supset$)
۲۳- $(\exists x)(Bx \wedge Fx) \supset [(\forall y)(Fy \supset Dy) \supset (\forall z)(Az \supset Ez)]$	۳-۲۲، (م$\supset$)

۱- $(\forall x)(\exists y)(Gx \wedge Hy)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)Gx \wedge (\exists y)Hy$	(۹)
۲- $(\exists y)(Gx \wedge Hy)$	۱، (ح$\forall$)
۳- $Gx \wedge Hy$	ف
۴- Gx	۳، (ح$\wedge$)
۵- Hy	۳، (ح$\wedge$)
۶- $(\exists y)Hy$	۵، (م$\exists$)
۷- $(\exists y)Hy \wedge Gx$	۴،۶، (م$\wedge$)
۸- $(\exists y)Hy \wedge Gx$	۲،۳-۷، (ح$\exists$)
۹- $(\exists y)Hy$	۸، (ح$\wedge$)
۱۰- Gx	۸، (ح$\wedge$)
۱۱- $(\forall x)Gx$	۱۰، (م$\forall$)
۱۲- $(\exists y)(Gy \wedge Hy)$	۹،۱۱، (م$\wedge$)

۱- $(\forall x)(\exists y)(Kx \wedge Ly)$	مقدمه
$\therefore (\exists y)(\forall x)(Kx \wedge Ly)$	(۱۰)
۲- $(\exists y)(Kx \wedge Ly)$	۱، (ح$\forall$)
۳- $Kx \wedge Ly$	ف
۴- Kx	۳، (ح$\wedge$)
۵- Ly	۳، (ح$\wedge$)
۶- $(\exists y)Ly$	۵، (م$\exists$)
۷- $Kx \wedge (\exists y)Ly$	۴،۶، (م$\wedge$)
۸- $Kx \wedge (\exists y)Ly$	۲،۳-۷، (ح$\exists$)
۹- Kx	۸، (ح$\wedge$)
۱۰- $(\exists y)Ly$	۸، (ح$\wedge$)
۱۱- Ly	ف
۱۲- $Kx \wedge Ly$	۹،۱۱، (م$\wedge$)
۱۳- $(\forall x)(Kx \wedge Ly)$	۱۲، (م$\forall$)
۱۴- $(\exists y)(\forall x)(Kx \wedge Ly)$	۱۳، (م$\exists$)
۱۵- $(\exists y)(\forall x)(Kx \wedge Ly)$	۱۰،۱۱-۱۴، (ح$\exists$)

۱- $(\exists x)(\forall y)[(\exists z)Ayz \supset Ayx]$	مقدمه
۲- $(\forall y)(\exists z)Ayz$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(\forall y)Ayx$	(۱۱)
۳- $(\forall y)[(\exists z)Ayz \supset Ayx]$	ف
۴- $(\exists z)Ayz \supset Ayx$	۳، (ح$\forall$)
۵- $(\exists z)Ayz$	۲، (ح$\forall$)
۶- Ayx	۴،۵، (ح$\supset$)
۷- $(\forall y)Ayx$	۶، (م$\forall$)
۸- $(\exists x)(\forall y)Ayx$	۷، (م$\exists$)
۹- $(\exists x)(\forall y)Ayx$	۱،۳-۸، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)(Cax \supset Dxb)$	مقدمه
۲- $(\exists x)Dxb \supset (\exists y)Dby$	مقدمه
$\therefore (\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$	(۱۲)
۳- $(\exists x)Cax$	ف
۴- Cax	ف
۵- $Cax \supset Dxb$	۱، (ح$\forall$)
۶- Dxb	۴،۵، (ح$\supset$)
۷- $(\exists x)Dxb$	۶، (م$\exists$)
۸- $(\exists y)Dby$	۲،۷، (ح$\supset$)
۹- $(\exists y)Dby$	۳،۴-۸، (ح$\exists$)
۱۰- $(\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$	۳-۹، (م$\supset$)

۱- $(\forall x)[(\exists y)Byx \supset (\forall z)Bxz]$	مقدمه
$\therefore (\forall y)(\forall z)(Byz \supset Bzy)$	(۱۳)
۲- Byx	ف
۳- $(\exists y)Byx$	۲، (م$\exists$)
۴- $(\exists y)Byx \supset (\forall z)Bxz$	۱، (ح$\forall$)
۵- $(\forall z)Bxz$	۴،۳، (ح$\supset$)
۶- Bxy	۵، (ح$\forall$)
۷- $Byx \supset Bxy$	۲-۶، (م$\supset$)
۸- $(\forall z)(Byz \supset Bzy)$	۷، (م$\forall$)
۹- $(\forall y)(\forall z)(Byz \supset Bzy)$	۸، (م$\forall$)

۱- $(\exists x)[Hx \wedge (\forall y)(Iy \supset Nxy)]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \wedge Nyy)$	(۱۴)
۲- $(\forall x)(Hx \supset Ix)$	ف
۳- $Hx \wedge (\forall y)(Iy \supset Nxy)$	ف
۴- $Hx \supset Ix$	۲، (ح$\forall$)
۵- Hx	۳، (ح$\wedge$)
۶- Ix	۵،۴، (ح$\supset$)
۷- $(\forall y)(Iy \supset Nxy)$	۳، (ح$\wedge$)
۸- $Ix \supset Nxx$	۷، (ح$\forall$)
۹- Nxx	۸،۶، (ح$\supset$)
۱۰- $Ix \wedge Nxx$	۹،۶، (م$\wedge$)
۱۱- $(\exists y)(Iy \wedge Nyy)$	۱۰، (م$\exists$)
۱۲- $(\exists y)(Iy \wedge Nyy)$	۳،۱-۱۱، (ح$\exists$)
۱۳- $(\forall x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \wedge Nyy)$	۲-۱۲، (م$\supset$)

۱-	$(\forall x)[Ex \supset (\forall y)(Fy \supset Gxy)]$	مقدمه
۲-	$(\exists x)[Ex \wedge (\exists y){\sim}Gxy]$	مقدمه
	$\therefore (\exists x){\sim}Fx$	(۱۵)
۳-	$Ex \wedge (\exists y){\sim}Gxy$	ف
۴-	Ex	۳، (ح$\wedge$)
۵-	$Ex \supset (\forall y)(Fy \supset Gxy)$	۱، (ح$\forall$)
۶-	$(\forall y)(Fy \supset Gxy)$	۵،۴، (ح$\supset$)
۷-	$(\exists y){\sim}Gxy$	۳، (ح$\wedge$)
۸-	${\sim}Gxy$	ف
۹-	$Fy \supset Gxy$	۶، (ح$\forall$)
۱۰-	${\sim}Fy$	۹،۸، (ر.ت)
۱۱-	$(\exists x){\sim}Fx$	۱۰، (م$\exists$)
۱۲-	$(\exists x){\sim}Fx$	۷،۸-۱۱، (ح$\exists$)
۱۳-	$(\exists x){\sim}Fx$	۲،۳-۱۲، (ح$\exists$)

۱-	$(\forall x)[Mx \supset (\forall y)(Ny \supset Oxy)]$	مقدمه
۲-	$(\forall x)[Bx \supset (\forall y)(Oxy \supset Cy)]$	مقدمه
	$\therefore (\exists x)(Mx \wedge Bx) \supset (\forall y)(Ny \supset Cy)$	(۱۶)
۳-	$(\exists x)(Mx \wedge Bx)$	ف
۴-	$Mx \wedge Bx$	ف
۵-	Mx	۴، (ح$\wedge$)
۶-	Bx	۴، (ح$\wedge$)
۷-	$Mx \supset (\forall y)(Ny \supset Oxy)$	۱، (ح$\forall$)
۸-	$Bx \supset (\forall y)(Oxy \supset Cy)$	۲، (ح$\forall$)
۹-	$(\forall y)(Ny \supset Oxy)$	۷،۵، (ح$\supset$)
۱۰-	$(\forall y)(Oxy \supset Cy)$	۸،۶، (ح$\supset$)
۱۱-	$Ny \supset Oxy$	۹، (ح$\forall$)
۱۲-	$Oxy \supset Cy$	۱۰، (ح$\forall$)
۱۳-	$Ny \supset Cy$	۱۲،۱۱، (ق.ش)
۱۴-	$Ny \supset Cy$	۳،۴-۱۳، (ح$\exists$)
۱۵-	$(\forall y)(Ny \supset Cy)$	۱۴، (م$\forall$)
۱۶-	$(\exists x)(Mx \wedge Bx) \supset (\forall y)(Ny \supset Cy)$	۳-۱۵، (م$\supset$)

۱- $(\forall x)(Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx])$	مقدمه
۲- $(\forall x)[(\exists z)Lzx \supset Lxx]$	مقدمه
۳- $\sim(\exists x)Lxx$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[Kx \supset (\forall y)\sim Lxy]$	(۱۷)
۴- Kx	ف
۵- $Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx]$	۱، (ح$\forall$)
۶- $(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx$	۵،۴، (ح$\supset$)
۷- $(\exists z)Lzx \supset Lxx$	۲، (ح$\forall$)
۸- $(\exists y)Lxy \supset Lxx$	۷،۶، (ق.ش)
۹- $(\forall x)\sim Lxx$	۳، (ن.س)
۱۰- $\sim Lxx$	۹، (ح$\forall$)
۱۱- $\sim(\exists y)Lxy$	۱۰،۸، (ر.ت)
۱۲- $(\forall y)\sim Lxy$	۱۱، (ن.س)
۱۳- $Kx \supset (\forall y)\sim Lxy$	۱۲-۴، (م$\supset$)
۱۴- $(\forall x)[Kx \supset (\forall y)\sim Lxy]$	۱۳، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)[(Bx \wedge {\sim}Ox) \supset (\exists y)(Exy \wedge Hy)]$	مقدمه
۲- $(\exists x)[Nx \wedge Bx \wedge (\forall y)(Exy \supset Ny)]$	مقدمه
۳- $(\forall x)(Nx \supset {\sim}Ox)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Nx \wedge Hx)$	(۱۸)
۴- $Nx \wedge Bx \wedge (\forall y)(Exy \supset Ny)$	ف
۵- $Nx \wedge Bx$	۴، (ح$\wedge$)
۶- Nx	۵، (ح$\wedge$)
۷- $Nx \supset {\sim}Ox$	۳، (ح$\forall$)
۸- ${\sim}Ox$	۶،۷، (ح$\supset$)
۹- Bx	۵، (ح$\wedge$)
۱۰- $Bx \wedge {\sim}Ox$	۸،۹، (م$\wedge$)
۱۱- $(Bx \wedge {\sim}Ox) \supset (\exists y)(Exy \wedge Hy)$	۱، (ح$\forall$)
۱۲- $(\exists y)(Exy \wedge Hy)$	۱۰،۱۱، (ح$\supset$)
۱۳- $Exy \wedge Hy$	ف
۱۴- Exy	۱۳، (ح$\wedge$)
۱۵- $(\forall y)(Exy \supset Ny)$	۴، (ح$\wedge$)
۱۶- $Exy \supset Ny$	۱۵، (ح$\forall$)
۱۷- Ny	۱۴،۱۶، (ح$\supset$)
۱۸- Hy	۱۳، (ح$\wedge$)
۱۹- $Ny \wedge Hy$	۱۷،۱۸، (م$\wedge$)
۲۰- $(\exists x)(Nx \wedge Hx)$	۱۹، (م$\exists$)
۲۱- $(\exists x)(Nx \wedge Hx)$	۱۲،۱۳-۲۰، (ح$\exists$)
۲۲- $(\exists x)(Nx \wedge Hx)$	۲،۴-۲۱، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)(Ax \supset Bx)$	مقدمه
۲- $(\forall x)[(Cx \wedge Bx) \supset Dx]$	مقدمه
۳- $(\forall x)(\exists y)(Cy \wedge Eyx)$	مقدمه
۴- $(\forall x)(\forall y)[(Eyx \wedge Dy) \supset Dx]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[(\forall y)(Eyx \supset Ay) \supset Dx]$	(۱۹)
۵- $(\forall y)(Eyx \supset Ay)$	ف
۶- $(\exists y)(Cy \wedge Eyx)$	۳، (ح$\forall$)
۷- $Cy \wedge Eyx$	ف
۸- Eyx	۷، (ح$\wedge$)
۹- $Eyx \supset Ay$	۵، (ح$\forall$)
۱۰- Ay	۸،۹، (ح$\supset$)
۱۱- $Ay \supset By$	۱، (ح$\forall$)
۱۲- By	۱۰،۱۱، (ح$\supset$)
۱۳- Cy	۷، (ح$\wedge$)
۱۴- $Cy \wedge By$	۱۲،۱۳، (م$\wedge$)
۱۵- $(Cy \wedge By) \supset Dy$	۲، (ح$\forall$)
۱۶- Dy	۱۴،۱۵، (ح$\supset$)
۱۷- $Eyx \wedge Dy$	۸،۱۶، (م$\wedge$)
۱۸- $(Eyx \wedge Dy) \supset Dx$	۴، (ح$\forall$)
۱۹- Dx	۱۷،۱۸، (ح$\supset$)
۲۰- Dx	۶،۷–۱۹، (ح$\exists$)
۲۱- $(\forall y)(Eyx \supset Ay) \supset Dx$	۵–۲۰، (م$\supset$)
۲۲- $(\forall x)[(\forall y)(Eyx \supset Ay) \supset Dx]$	۲۱، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)[(Bx \wedge (\exists y)[Cy \wedge Dyx \wedge (\exists z)(Ez \wedge Fxz)]) \supset (\exists x')Gxx'x]$ مقدمه
۲- $(\forall x)(\forall y)(Hxy \supset Dyx)$ مقدمه
۳- $(\forall x)(\forall y)(Fxy \supset Fyx)$ مقدمه
۴- $(\forall x)(Ix \supset Ex)$ مقدمه
$\therefore (\forall x)[Bx \supset ([(\exists y)(Cy \wedge Hxy) \wedge (\exists z)(Iz \wedge Fzx)] \supset (\exists y')(\exists x')Gxx'y')]$ (۲۰)
۵- Bx ف
۶- $(\exists y)(Cy \wedge Hxy) \wedge (\exists z)(Iz \wedge Fzx)$ ف
۷- $(\exists y)(Cy \wedge Hxy)$ ۶، (ح$\wedge$)
۸- $Cy \wedge Hxy$ ف
۹- $Hxy \supset Dyx$ ۲، (ح$\forall$)
۱۰- Hxy ۸، (ح$\wedge$)
۱۱- Dyx ۹، ۱۰، (ح$\supset$)
۱۲- Cy ۸، (ح$\wedge$)
۱۳- $Cy \wedge Dyx$ ۱۱، ۱۲، (م$\wedge$)
۱۴- $(\exists z)(Iz \wedge Fzx)$ ۶، (ح$\wedge$)
۱۵- $Iz \wedge Fzx$ ف
۱۶- Iz ۱۵، (ح$\wedge$)
۱۷- $Iz \supset Ez$ ۴، (ح$\forall$)
۱۸- Ez ۱۶، ۱۷، (ح$\supset$)
۱۹- Fzx ۱۵، (ح$\wedge$)
۲۰- $Fzx \supset Fxz$ ۳، (ح$\forall$)
۲۱- Fxz ۱۹، ۲۰، (ح$\supset$)
۲۲- $Ez \wedge Fxz$ ۱۸، ۲۱، (م$\wedge$)
۲۳- $(\exists z)(Ez \wedge Fxz)$ ۲۲، (م$\exists$)
۲۴- $(\exists z)(Ez \wedge Fxz)$ ۱۴، ۱۵-۲۳، (ح$\exists$)
۲۵- $(Cy \wedge Dyx) \wedge (\exists z)(Ez \wedge Fxz)$ ۱۳، ۲۴، (م$\wedge$)
۲۶- $(\exists y)[(Cy \wedge Dyx) \wedge (\exists z)(Ez \wedge Fxz)]$ ۲۵، (م$\exists$)
۲۷- $(\exists y)[(Cy \wedge Dyx) \wedge (\exists z)(Ez \wedge Fxz)]$ ۷، ۸-۲۶، (ح$\exists$)
۲۸- $Bx \wedge (\exists y)[(Cy \wedge Dyx) \wedge (\exists z)(Ez \wedge Fxz)]$ ۵، ۲۷، (م$\wedge$)
۲۹- $(Bx \wedge (\exists y)[Cy \wedge Dyx \wedge (\exists z)(Ez \wedge Fxz)]) \supset (\exists x')Gxx'x$ ۱، (ح$\forall$)
۳۰- $(\exists x')Gxx'x$ ۲۸، ۲۹، (ح$\supset$)
۳۱- $(\exists y')(\exists x')Gxx'y'$ ۳۰، (م$\exists$)
۳۲- $[(\exists y)(Cy \wedge Hxy) \wedge (\exists z)(Iz \wedge Fzx)] \supset (\exists y')(\exists x')Gxx'y'$ ۶-۳۱، (م$\supset$)
۳۳- $Bx \supset ([(\exists y)(Cy \wedge Hxy) \wedge (\exists z)(Iz \wedge Fzx)] \supset (\exists y')(\exists x')Gxx'y')$ ۵-۳۲، (م$\supset$)
۳۴- $(\forall x)[Bx \supset ([(\exists y)(Cy \wedge Hxy) \wedge (\exists z)(Iz \wedge Fzx)] \supset (\exists y')(\exists x')Gxx'y')]$ ۳۳، (م$\forall$)

تمرین ۱۵.۵: ترجمه و اثبات صفحه ۱۱۰

با توجه به توابع گزاره‌ای جدول ۴.۵، اولاً استدلال‌های زیر را به زبان صوری منطق محمولات ترجمه کنید، ثانیاً درستی هر یک از آن‌ها را اثبات کنید.

۱. بعضی اشکال، سه‌ضلعی نیستند. هر مثلثی سه‌ضلعی است. پس بعضی اشکال مثلث نیستند.

۲. هر سیاره‌ای جسم کروی است. بعضی سیارات منیر نیستند. پس بعضی اجسام کروی منیر نیستند.

۳. هیچ ایرانی چینی نیست. هر اصفهانی ایرانی است. بعضی آسیایی‌ها چینی هستند. پس بعضی غیراصفهانی‌ها آسیایی هستند.

۴. مارهای کبرا و مارهای زنگی در صورتی که عصبانی باشند یا بترسند نیش می‌زنند. پس مار کبرا اگر بترسد نیش می‌زند.

* ۵. هر مثلثی شکل است. پس هر کس مثلثی بکشد، شکلی کشیده است.

* ۶. طوطی پرنده است. پس هر کسی که تمامی پرندگان را دوست داشته باشد، طوطی را نیز دوست دارد.

** ۷. پدران و مادران بچه‌ها را دوست دارند. رضا پدری است که حسن را دوست ندارد. مریم مادر است. هیچ مادری سارا دوست ندارد. پس هیچ‌کدام از حسن و سارا بچه‌ها نیستند.

** ۸. هر کسی که به خود اعتماد نکند هیچ‌کس به وی اعتماد نمی‌کند. هیچ‌کس کسی را که مورد اعتمادش نباشد استخدام نمی‌کند. پس کسی که به هیچ‌کس اعتماد نکند، هیچ‌کس او را استخدام نمی‌کند.

** ۹. هر که حتی یک اسلحه بی‌پروانه به فردی بفروشد مجرم است. هر تفنگی که دست امیر باشد، احمد یا حسن به او فروخته است. پس اگر تفنگ موجود در دست امیر اسلحه بی‌پروانه باشد، آنگاه اگر احمد هیچ چیزی را به امیر نفروخته باشد، حسن مجرم است.

* ۱۰. اسب حیوان است. پس سر اسب سر حیوان است.

پاسخ تمرین ۱۵.۵

جدول ۴.۵: لغتنامه‌ی تمرین ۱۵.۵

x شکل است.	=	Ax	x سه‌ضلعی است.	=	Bx
x مثلث است.	=	Cx	x سیاره است.	=	Dx
x جسم است.	=	Ex	x کروی است.	=	Fx
x منیر است.	=	Gx	x ایرانی است.	=	Hx
x چینی است.	=	Ix	x اصفهانی است.	=	Jx
x آسیایی است.	=	Kx	x مار کبرا است.	=	Lx
x مار زنگی است.	=	Mx	x عصبانی است.	=	Nx
x می‌ترسد.	=	Dx	x نیش می‌زند.	=	Ax
x مثلث است.	=	Bx	x شکل است.	=	Cx
x انسان است.	=	Dx	x، y را می‌کشد.	=	Exy
x طوطی است.	=	Fx	x پرنده است.	=	Gx
x انسان است.	=	Hx	x، y را دوست دارد.	=	Ixy
x پدر است.	=	Jx	x مادر است.	=	Kx
x بچه است.	=	Lx	x، y را دوست دارد.	=	Mxy
رضا	=	a	حسن	=	b
مریم	=	c	سارا	=	d
x انسان است.	=	Nx	x به y اعتماد می‌کند.	=	Oxy
x، y را استدخدام می‌کند.	=	Axy	x اسلحه است.	=	Bx
x پروانه است.	=	Cx	x مجرم است.	=	Dx
x تفنگ است.	=	Ex	x دارای y است.	=	Fxy
x، y را به z فروخته است.	=	$Gxyz$	امیر	=	a
احمد	=	b	حسن	=	c
x اسب است.	=	Ax	x حیوان است.	=	Hx
x سر y است.	=	Bx			

۱- $(\exists x)(Ax \wedge {\sim}Bx)$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Cx \supset Bx)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Ax \wedge {\sim}Cx)$	(۱)
۳- $Ax \wedge {\sim}Bx$	ف
۴- Ax	۲، (ح$\wedge$)
۵- ${\sim}Bx$	۲، (ح$\wedge$)
۶- $Cx \supset Bx$	۲، (ح$\forall$)
۷- ${\sim}Cx$	۵، ۶، (ر.ت)
۸- $Ax \wedge {\sim}Cx$	۴، ۷، (م$\wedge$)
۹- $(\exists x)(Ax \wedge {\sim}Cx)$	۸، (م$\exists$)
۱۰- $(\exists x)(Ax \wedge {\sim}Cx)$	۱، ۳-۹، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)[Dx \supset (Ex \wedge Fx)]$	مقدمه
۲- $(\exists x)(Dx \wedge {\sim}Gx)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Ex \wedge Fx \wedge {\sim}Gx)$	(۲)
۳- $Dx \wedge {\sim}Gx$	ف
۴- Dx	۳، (ح$\wedge$)
۵- ${\sim}Gx$	۳، (ح$\wedge$)
۶- $Dx \supset (Ex \wedge Fx)$	۱، (ح$\forall$)
۷- $Ex \wedge Fx$	۴، ۶، (ح$\supset$)
۸- $Ex \wedge Fx \wedge {\sim}Gx$	۵، ۷، (م$\wedge$)
۹- $(\exists x)(Ex \wedge Fx \wedge {\sim}Gx)$	۸، (م$\exists$)
۱۰- $(\exists x)(Ex \wedge Fx \wedge {\sim}Gx)$	۲، ۳-۹، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)(Hx \supset {\sim}Ix)$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Jx \supset Hx)$	مقدمه
۳- $(\exists x)(Kx \wedge Ix)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)({\sim}Jx \wedge Kx)$	(۳)
۴- $Kx \wedge Ix$	ف
۵- $Hx \supset {\sim}Ix$	۱، (ح$\forall$)
۶- $Jx \supset Hx$	۲، (ح$\forall$)
۷- $Jx \supset {\sim}Ix$	۶،۵، (ق.ش)
۸- Ix	۴، (ح$\wedge$)
۹- Kx	۴، (ح$\wedge$)
۱۰- ${\sim}{\sim}Ix$	۸، (ن.م)
۱۱- ${\sim}Jx$	۱۰،۷، (ر.ت)
۱۲- ${\sim}Jx \wedge Kx$	۱۱،۹، (م$\wedge$)
۱۳- $(\exists x)({\sim}Jx \wedge Kx)$	۱۲، (م$\exists$)
۱۴- $(\exists x)({\sim}Jx \wedge Kx)$	۴،۳-۱۳، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)((Lx \vee Mx) \supset [(Nx \vee Dx) \supset Ax])$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[Lx \supset (Dx \supset Ax)]$	(۴)
۲- Lx	ف
۳- Dx	ف
۴- $(Lx \vee Mx) \supset [(Nx \vee Dx) \supset Ax]$	۱، (ح$\forall$)
۵- $Lx \vee Mx$	۲، (م$\vee$)
۶- $(Nx \vee Dx) \supset Ax$	۵،۴، (ح$\supset$)
۷- $Nx \vee Dx$	۳، (م$\vee$)
۸- Ax	۷،۶، (ح$\supset$)
۹- $Dx \supset Ax$	۳-۸، (م$\supset$)
۱۰- $Lx \supset (Dx \supset Ax)$	۲-۹، (م$\supset$)
۱۱- $(\forall x)[Lx \supset (Dx \supset Ax)]$	۱۰، (م$\forall$)

۱-	$(\forall x)(Bx \supset Cx)$	مقدمه
	$\therefore (\forall x)(Dx \supset [(\exists y)(By \wedge Exy) \supset (\exists y)(Cy \wedge Exy)])$	(۵)
۲-	$Dx \wedge (\exists y)(By \wedge Exy)$	ف
۳-	$(\exists y)(By \wedge Exy)$	۲، (ح∧)
۴-	$By \wedge Exy$	ف
۵-	By	۴، (ح∧)
۶-	Exy	۴، (ح∧)
۷-	$By \supset Cy$	۱، (ح∀)
۸-	Cy	۷،۵، (ح⊃)
۹-	$Cy \wedge Exy$	۸،۶، (م∧)
۱۰-	$(\exists y)(Cy \wedge Exy)$	۹، (م∃)
۱۱-	$(\exists y)(Cy \wedge Exy)$	۳،۴-۱۰، (ح∃)
۱۲-	$[Dx \wedge (\exists y)(By \wedge Exy) \supset (\exists y)(Cy \wedge Exy)]$	۲-۱۱، (م⊃)
۱۳-	$Dx \supset [(\exists y)(By \wedge Exy) \supset (\exists y)(Cy \wedge Exy)]$	۱۲، (صد)
۱۴-	$(\forall x)(Dx \supset [(\exists y)(By \wedge Exy) \supset (\exists y)(Cy \wedge Exy)])$	۱۳، (م∀)

۱-	$(\forall x)(Fx \supset Gx)$	مقدمه
	$\therefore (\forall x)([Hx \wedge (\forall y)(Gy \supset Ixy)] \supset (\forall y)(Fy \supset Ixy))$	(۶)
۲-	$Hx \wedge (\forall y)(Gy \supset Ixy)$	ف
۳-	$Fy \supset Gy$	۱، (ح∀)
۴-	$(\forall y)(Gy \supset Ixy)$	۲، (ح∧)
۵-	$Gy \supset Ixy$	۴، (ح∀)
۶-	$Fy \supset Ixy$	۵،۳، (ق.ش)
۷-	$(\forall y)(Fy \supset Ixy)$	۶، (م∀)
۸-	$[Hx \wedge (\forall y)(Gy \supset Ixy)] \supset (\forall y)(Fy \supset Ixy)$	۲-۷، (م⊃)
۹-	$(\forall x)([Hx \wedge (\forall y)(Gy \supset Ixy)] \supset (\forall y)(Fy \supset Ixy))$	۸، (م∀)

۱- $(\forall x)[(Jx \vee Kx) \supset (\forall y)(Ly \supset Mxy)]$	مقدمه
۲- $Ja \wedge {\sim}Mab$	مقدمه
۳- Kc	مقدمه
۴- $(\forall x)(Kx \supset {\sim}Mxd)$	مقدمه
$\therefore {\sim}Lb \wedge {\sim}Ld$	(۷)
۵- $(Ja \vee Ka) \supset (\forall y)(Ly \supset May)$	۱، (ح$\forall$)
۶- Ja	۲، (ح$\wedge$)
۷- $(\forall y)(Ly \supset May)$	۷،۵، (ح$\supset$)
۸- $Lb \supset Mab$	۹، (ح$\forall$)
۹- ${\sim}Mab$	۲، (ح$\wedge$)
۱۰- ${\sim}Lb$	۹،۸، (ر.ت)
۱۱- $Kc \supset {\sim}Mcd$	۴، (ح$\forall$)
۱۲- ${\sim}Mcd$	۱۱،۳، (ح$\supset$)
۱۳- $(Jc \vee Kc) \supset (\forall y)(Ly \supset Mcy)$	۱، (ح$\forall$)
۱۴- $Ja \vee Kc$	۳، (م$\vee$)
۱۵- $(\forall y)(Ly \supset Mcy)$	۱۴،۱۳، (ح$\supset$)
۱۶- $Ld \supset Mcd$	۱۵، (ح$\forall$)
۱۷- ${\sim}Ld$	۱۶،۱۲، (ر.ت)
۱۸- ${\sim}Lb \wedge {\sim}Ld$	۱۷،۱۰، (م$\wedge$)

۱- $(\forall x)[(Nx \wedge \sim Oxx) \supset (\forall y)(Ny \supset \sim Oyx)]$	مقدمه
۲- $(\forall x)(Nx \supset (\forall y)[(Ny \wedge \sim Oxy) \supset \sim Axy])$	مقدمه
$\therefore (\forall x)([Nx \wedge (\forall y)(Ny \supset \sim Oxy)] \supset (\forall y)(Ny \supset \sim Ayx))$	(۸)
۳- $Nx \wedge (\forall y)(Ny \supset \sim Oxy)$	ف
۴- Ny	ف
۵- $(\forall y)(Ny \supset \sim Oxy)$	۳، (ح∧)
۶- $Nx \supset \sim Oxx$	۵، (ح∀)
۷- Nx	۳، (ح∧)
۸- $\sim Oxx$	۶،۷، (ح⊃)
۹- $Nx \wedge \sim Oxx$	۷،۸، (م∧)
۱۰- $(Nx \wedge \sim Oxx) \supset (\forall y)(Ny \supset \sim Oyx)$	۱، (ح∀)
۱۱- $(\forall y)(Ny \supset \sim Oyx)$	۹،۱۰، (ح⊃)
۱۲- $Ny \supset \sim Oyx$	۱۱، (ح∀)
۱۳- $\sim Oyx$	۴،۱۲، (ح⊃)
۱۴- $Nx \wedge \sim Oyx$	۷،۱۳، (م∧)
۱۵- $(Nx \supset (\forall y)[(Ny \wedge \sim Oxy) \supset \sim Axy]$	۲، (ح∀)
۱۶- $(\forall y)[(Ny \wedge \sim Oxy) \supset \sim Axy$	۴،۱۵، (ح⊃)
۱۷- $(Nx \wedge \sim Oyx) \supset \sim Ayx$	۱۶، (ح∀)
۱۸- $\sim Ayx$	۱۴،۱۷، (ح⊃)
۱۹- $Ny \supset \sim Ayx$	۴-۱۸، (م⊃)
۲۰- $(\forall y)(Ny \supset \sim Ayx)$	۱۹، (م∀)
۲۱- $[Nx \wedge (\forall y)(Ny \supset \sim Oxy)] \supset (\forall y)(Ny \supset \sim Ayx)$	۳-۲۰، (م⊃)
۲۲- $(\forall x)([Nx \wedge (\forall y)(Ny \supset \sim Oxy)] \supset (\forall y)(Ny \supset \sim Ayx))$	۲۱، (م∀)

۱- $(\forall x)[(\exists y)(\exists z)(Bz \wedge \sim Cz \wedge Gxzy)] \supset Dx]$	مقدمه
۲- $(\forall x)[(Ex \wedge Fax) \supset (Gbxa \vee Gcxa)]$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Ex \wedge Fax \wedge Bx \wedge \sim Cx) \supset [(\forall x)\sim Gbxa \supset Dc]$	(۹)
۳- $(\exists x)(Ex \wedge Fax \wedge Bx \wedge \sim Cx)$	ف
۴- $(\forall x)\sim Gbxa$	ف
۵- $Ex \wedge Fax \wedge Bx \wedge \sim Cx$	ف
۶- $(Ex \wedge Fax) \supset (Gbxa \vee Gcxa)$	۲، (ح∀)
۷- $Ex \wedge Fax$	۵، (ح∧)
۸- $Gbxa \vee Gcxa$	۷،۶، (ح⊃)
۹- $(\exists y)(\exists z)(Bz \wedge \sim Cz \wedge Gczy) \supset Dc$	۱، (ح∀)
۱۰- $Bx \wedge \sim Cx$	۵، (ح∧)
۱۱- $\sim Gbxa$	۴، (ح∀)
۱۲- $Gcxa$	۱۱،۸، (ق.ا)
۱۳- $Bx \wedge \sim Cx \wedge Gcxa$	۱۲،۱۰، (م∧)
۱۴- $(\exists y)(\exists z)(Bz \wedge \sim Cz \wedge Gczy)$	۱۳، (م∃)
۱۵- Dc	۱۴،۹، (ح⊃)
۱۶- Dc	۳، ۵-۱۵، (ح∃)
۱۷- $(\forall x)\sim Gbxa \supset Dc$	۴-۱۶، (م⊃)
۱۸- $(\exists x)(Ex \wedge Fax \wedge Bx \wedge \sim Cx) \supset [(\forall x)\sim Gbxa \supset Dc]$	۳-۱۷، (م⊃)

۱- $(\forall x)(Ax \supset Hx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[(\exists y)(Ay \wedge Bxy) \supset (\exists y)(Hy \wedge Bxy)]$	(۱۰)
۲- $(\exists y)(Ay \wedge Bxy)$	ف
۳- $Ay \wedge Bxy$	ف
۴- $Ay \supset Hy$	۱، (ح∀)
۵- Ay	۳، (ح∧)
۶- Hy	۵،۴، (ح⊃)
۷- Bxy	۳، (ح∧)
۸- $Hy \wedge Bxy$	۷،۶، (م∧)
۹- $(\exists y)(Hy \wedge Bxy)$	۸، (م∃)
۱۰- $(\exists y)(Hy \wedge Bxy)$	۲، ۳-۹، (ح∃)
۱۱- $(\exists y)(Ay \wedge Bxy) \supset (\exists y)(Hy \wedge Bxy)$	۳-۱۰، (م⊃)
۱۲- $(\forall x)[(\exists y)(Ay \wedge Bxy) \supset (\exists y)(Hy \wedge Bxy)]$	۱۱، (م∀)

۴.۵ قضیه در P_N

تمرین ۱۶.۵: اثبات — صفحه ۱۱۲

قضیه‌های زیر را اثبات کنید.

1. (UI): $\vdash (\forall x)Fx \supset Fa$
2. $\vdash (\forall x)Fx \vee (\exists x){\sim}Fx$
3. $\vdash (\forall x)[Fx \supset (\exists y)Fy]$
4. $\vdash (\forall x)(Fx \vee {\sim}Fx)$
5. $\vdash (\forall x)Fx \supset (\forall y)Fy$
6. (UC): $\vdash (\forall y)[(\forall x)Fx \supset Fy]$
7. * $\vdash (\exists y)[Fy \supset (\forall x)Fx]$
8. $\vdash (\forall x)(\forall z)Fxz \supset (\forall y)(\forall z)Fyz$
9. $\vdash (\forall y)[(\forall x)(\exists z)Gxz \supset (\exists z)Gyz]$
10. $\vdash (\forall x)(Fx \supset Gx) \supset (\forall x)[(\exists y)(Fy \wedge Hxy) \supset (\exists y)(Gy \wedge Hxy)]$

پاسخ تمرین ۱۶.۵

(۱)	$\therefore (\forall x)Fx \supset Fa$
مقدمه	۱- $(\forall x)Fx$
۱، (ح$\forall$)	۲- Fa
۱-۲، (م$\supset$)	۳- $(\forall x)Fx \supset Fa$

(۲)	$\therefore (\forall x)Fx \vee (\exists x){\sim}Fx$
ف	۱- $\sim[(\forall x)Fx \vee (\exists x){\sim}Fx]$
۱، (دم)	۲- $\sim(\forall x)Fx \wedge {\sim}(\exists x){\sim}Fx$
۲، (ن.س)	۳- $(\exists x){\sim}Fx \wedge {\sim}(\exists x){\sim}Fx$
۱-۳، (م$\sim$)	۴- $\sim\sim[(\forall x)Fx \vee (\exists x){\sim}Fx]$
۴، (ح$\sim$)	۵- $(\forall x)Fx \vee (\exists x){\sim}Fx$

(۳)	$\therefore (\forall x)[Fx \supset (\exists y)Fy]$
ف	۱- Fx
۱، (م$\exists$)	۲- $(\exists y)Fy$
۱-۲، (م$\supset$)	۳- $Fx \supset (\exists y)Fy$
۳، (م$\forall$)	۴- $(\forall x)[Fx \supset (\exists y)Fy]$

(۴)	$\therefore (\forall x)(Fx \vee {\sim}Fx)$
ف	۱- $\sim(Fx \vee {\sim}Fx)$
۱، (دم)	۲- $\sim Fx \wedge {\sim\sim}Fx$
۱-۲، (م$\sim$)	۳- $\sim\sim(Fx \vee {\sim}Fx)$
۳، (ح$\sim$)	۴- $Fx \vee {\sim}Fx$
۴، (م$\forall$)	۵- $(\forall x)(Fx \vee {\sim}Fx)$

(۵)	$\therefore (\forall x)Fx \supset (\forall y)Fy$
ف	۱- $(\forall x)Fx$
۱، (ح$\forall$)	۲- Fx
۲، (م$\forall$)	۳- $(\forall y)Fy$
۱-۳، (م$\supset$)	۴- $(\forall x)Fx \supset (\forall y)Fy$

(۶)	$\therefore (\forall y)[(\forall x)Fx \supset Fy]$
ف	۱- $(\forall x)Fx$
۱، (ح$\forall$)	۲- Fy
۱-۲، (م$\supset$)	۳- $(\forall x)Fx \supset Fy$
۳، (م$\forall$)	۴- $(\forall y)[(\forall x)Fx \supset Fy]$

(۷)	$\therefore (\exists y)[Fy \supset (\forall x)Fx]$
ف	۱- $\sim(\exists y)[Fy \supset (\forall x)Fx]$
۱، (ن.س)	۲- $(\forall y)\sim[Fy \supset (\forall x)Fx]$
۲، (ح$\forall$)	۳- $\sim[Fy \supset (\forall x)Fx]$
۳، (اس)	۴- $\sim[\sim Fy \vee (\forall x)Fx]$
۴، (دم)	۵- $\sim\sim Fy \wedge \sim(\forall x)Fx$
۵، (ح$\wedge$)	۶- $\sim\sim Fy$
۶، (ح$\sim$)	۷- Fy
۷، (م$\forall$)	۸- $(\forall x)Fx$
۵، (ح$\wedge$)	۹- $\sim(\forall x)Fx$
۸،۹، (م$\wedge$)	۱۰- $(\forall x)Fx \wedge \sim(\forall x)Fx$
۱-۱۰، (م$\sim$)	۱۱- $\sim\sim(\exists y)[Fy \supset (\forall x)Fx]$
۱۱، (ح$\sim$)	۱۲- $(\exists y)[Fy \supset (\forall x)Fx]$

(۸)	$\therefore (\forall x)(\forall z)Fxz \supset (\forall y)(\forall z)Fyz$
ف	۱- $(\forall x)(\forall y)Fxz$
۱، (ح$\forall$)	۲- $(\forall z)Fxz$
۲، (م$\forall$)	۳- $(\forall y)(\forall z)Fyz$
۱-۳، (م$\supset$)	۴- $(\forall x)(\forall z)Fxz \supset (\forall y)(\forall z)Fyz$

(۹)	$\therefore (\forall y)[(\forall x)(\exists z)Gxz \supset (\exists z)Gyz]$
ف	۱- $(\forall x)(\exists z)Gxz$
۱، (ح$\forall$)	۲- $(\exists z)Gyz$
۱-۲، (م$\supset$)	۳- $(\forall x)(\exists z)Gxz \supset (\exists z)Gyz$
۳، (م$\forall$)	۴- $(\forall y)[(\forall x)(\exists z)Gxz \supset (\exists z)Gyz]$

(۱۰)	$\therefore (\forall x)(Fx \supset Gx) \supset (\forall x)[(\exists y)(Fy \wedge Hxy) \supset (\exists y)(Gy \wedge Hxy)]$
ف	۱- $(\forall x)(Fx \supset Gx)$
ف	۲- $(\exists y)(Fy \wedge Hxy)$
ف	۳- $Fy \wedge Hxy$
۳، (ح$\wedge$)	۴- Fy
۱، (ح$\forall$)	۵- $Fy \supset Gy$
۴،۵، (ح$\supset$)	۶- Gy
۳، (ح$\wedge$)	۷- Hxy
۶،۷، (م$\wedge$)	۸- $Gy \wedge Hxy$
۸، (م$\exists$)	۹- $(\exists y)(Gy \wedge Hxy)$
۲،۳-۹، (ح$\exists$)	۱۰- $(\exists y)(Gy \wedge Hxy)$
۲-۱۰، (م$\supset$)	۱۱- $(\exists y)(Fy \wedge Hxy) \supset (\exists y)(Gy \wedge Hxy)$
۱۱، (م$\forall$)	۱۲- $(\forall x)[(\exists y)(Fy \wedge Hxy) \supset (\exists y)(Gy \wedge Hxy)]$
۱-۱۲، (م$\supset$)	۱۳- $(\forall x)(Fx \supset Gx) \supset (\forall x)[(\exists y)(Fy \wedge Hxy) \supset (\exists y)(Gy \wedge Hxy)]$

۵.۵ قاعده معرفی قضیه در P_N

تمرین ۱۷.۵: نمونه جانشین صفحه ۱۱۵

برای هر یک از فرمول‌های گروه اول نمونه جانشینی در فرمول‌های گروه دوم بیابید.

- گروه اول (اصل)

۱. $(\forall x)(Ax \supset \sim Gx)$
۲. $(\exists x)(Ax \supset Gx)$
۳. $(\forall x)Ax \supset (\exists x)Ax$
۴. $(\exists x)(P \supset Fx)$
۵. $(\forall x)(Fxa \supset Fba)$

- گروه دوم (نمونه جانشین)

آ) $(\exists x)[(\forall z)Gza \supset (\forall y)Gyx]$
ب) $(\forall x)[(Bx \vee Hx) \supset \sim Hxa]$
ج) $(\forall x)[(\forall z)(Fzxa \equiv Gaxa) \supset (\forall z)(Fzba \equiv Gaba)]$
د) $(\forall x)(\exists y)(Fxy \vee Gya) \supset (\exists x)(\exists y)(Fxy \vee Gya)$
ه) $(\exists x)[(\exists y)Gya \supset Fx]$
و) $(\exists x)[(\forall y)Fyx \supset (\exists z)Gxz]$
ز) $(\forall x)Fxab \supset (\exists x)Fxab$
ح) $(\exists x)(Bx \supset Cx)$

پاسخ تمرین ۱۷.۵

۱. ب) ۲. و، ح) ۳. ز، د) ۴. آ، ه) ۵. ج)

۶.۵ P_N و اینهمانی

تمرین ۱۸.۵: ترجمه صفحه ۱۱۸

عبارات زیر را از زبان طبیعی به زبان صوری $\underline{\underline{L}}_P$ ترجمه کنید:

۱. حداقل یک شیء وجود دارد.

۲. دقیقاً یک شیء وجود دارد.

۳. خدا وجود دارد.

۴. ابن سینا همان سعدی نیست.

۵. هیچ نویسنده‌ای غیر از سعدی گلستان را ننوشته است.

۶. تنها حسن و حسین به کتابخانه رفته‌اند.

۷. ** سعدی بهترین نویسنده ایرانی است.

۸. * نویسنده شاهنامه ایرانی است.

۹. دقیقاً یک نویسنده‌ی گلستان وجود دارد.

۱۰. ** بزرگترین اقیانوس در شرق ژاپن قرار دارد.

پاسخ تمرین ۱۸.۵

۱. $(\exists x)x = x$

۲. $(\exists x)(\exists y)[x = y \wedge (\forall z)(z = y \vee z = x)]$

۳. $(\exists x)(x = a)$

۴. $a \neq b$

۵. هیچ نویسنده‌ی ناانیهمان با سعدی، گلستان را ننوشته است.

$$(\forall x)[(Ax \wedge x \neq a) \supset \sim Bxb]$$

۶. هر کسی که به کتابخانه رفته است، یا حسن است یا حسین.

$$(\forall x)[Ax \supset (x = a \vee x = b)]$$

۷. سعدی نویسنده‌ی ایرانی است. و سعدی از هر نویسنده‌ی ایرانی دیگر، نویسنده‌ی بهتری است. (Cxy: x نویسنده‌ی بهتری از y است.)

$$Aa \wedge Ba \wedge (\forall x)[(x \neq a \wedge Ax \wedge Bx) \supset Cax]$$

۸. یگانه نویسنده‌ی شاهنامه ایرانی است.

$$(\exists x)[Axa \wedge (\forall y)(Aya \supset y = x) \wedge Bx]$$

۹. $(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(Ay \supset x = y)]$

۱۰. اقیانوسی در شرق ژاپن وجود دارد که از هر اقیانوس دیگری بزرگتر است.

$$(\exists x)(Ax \wedge Bxa \wedge (\forall y)[(Ax \wedge y \neq x) \supset Cxy])$$

★ تمرین ۱۹.۵: اثبات — **صفحه ۱۲۱**

استدلال‌های زیر را تنها با استفاده از قواعد اصلی ثابت کنید. (قواعد فرعی $\underline{P}_N$)

1. $Fa, \sim Fb \vdash a \neq b$
2. $a = b, b = c \vdash a = c$
3. $a = b \vdash b = a$

پاسخ تمرین ۱۹.۵

۱- Fa	مقدمه
۲- $\sim Fb$	مقدمه
$\therefore a \neq b$	(۱)
۳- $a = b$	ف
۴- Fb	۱،۳، (ح=)
۵- $Fb \wedge \sim Fb$	۲،۴، (م∧)
۶- $a \neq b$	۳-۵، (م~)

۱- $a = b$	مقدمه
۲- $b = c$	مقدمه
$\therefore a = c$	(۳)
۳- $a = c$	۱،۲، (ح=)

۱- $a = b$	مقدمه
$\therefore b = a$	(۳)
۲- $b = b$	(م=)
۳- $b = a$	۱،۲، (ح=)

تمرین ۲۰.۵: اثبات ★★★ صفحه ۱۲۱

استدلال‌های زیر را ثابت کنید.

1. $a = b \vdash Fa \equiv Fb$
2. $c = d \vdash (b = c) \equiv (b = d)$
3. $(\exists x)(x \neq a \wedge Fx) \vdash (\exists x)Fx \wedge [Fa \supset (\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge Fx \wedge Fy)]$
4. $(\exists x)(Hx \wedge Gx), (\forall x)[Gx \supset (x = a \vee x = b)] \vdash Ha \vee Hb$
5. $(\exists x)(Gx \wedge Hx \wedge (\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y] \wedge Ix) \vdash (\forall x)[(Gx \wedge Hx) \supset Ix]$
6. $(\forall x)(Fx \supset (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy]), (\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy]) \vdash (\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Gxy])$

7. $(\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y] \vdash (\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$

8. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee z = y), (\exists x)(\exists y)(x \neq y) \vdash (\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$

$**$ 9. $(\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)] \vdash (\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$

$***$ 10. $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)] \vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z) \wedge (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$

پاسخ تمرین ۵.۲۰

(۱)

۱- $a = b$	مقدمه
$\therefore Fa \equiv Fb$	
۲- Fa	ف
۳- Fb	۱، ۲، (ح=)
۴- Fb	ف
۵- Fa	۱، ۴، (ح=)
۶- $Fa \equiv Fb$	۲-۳، ۴-۵ (م≡)

(۲)

۱- $c = d$	مقدمه
$\therefore (b = c) \equiv (b = d)$	
۲- $b = c$	ف
۳- $b = d$	۱، ۲، (تع=)
۴- $b = d$	ف
۵- $b = c$	۱، ۴، (ح=)
۶- $b = c \equiv b = d$	۲-۳، ۴-۵ (م≡)

۱- $(\exists x)(x \neq a \wedge Fx)$	مقدمه
$\therefore (\exists x)Fx \wedge [Fa \supset (\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge Fx \wedge Fy)]$	(۳)
۲- $x \neq a \wedge Fx$	ف
۳- Fx	۲، (ح$\wedge$)
۴- $(\exists x)Fx$	۳، (م$\exists$)
۵- Fa	ف
۶- $x \neq a \wedge Fx \wedge Fa$	۲،۵، (م$\wedge$)
۷- $(\exists y)(x \neq y \wedge Fx \wedge Fy)$	۶، (م$\exists$)
۸- $(\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge Fx \wedge Fy)$	۷، (م$\exists$)
۹- $Fa \supset (\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge Fx \wedge Fy)$	۵-۸، (م$\supset$)
۱۰- $(\exists x)Fx \wedge [Fa \supset (\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge Fx \wedge Fy)]$	۴،۹، (م$\wedge$)
۱۱- $(\exists x)Fx \wedge [Fa \supset (\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge Fx \wedge Fy)]$	۱،۲-۱۰، (ح$\exists$)

۱- $(\exists x)(Hx \wedge Gx)$	مقدمه
۲- $(\forall x)[Gx \supset (x = a \vee x = b)]$	مقدمه
$\therefore Ha \vee Hb$	(۴)
۳- $Hx \wedge Gx$	ف
۴- $Gx \supset (x = a \vee x = b)$	۲، (ح$\forall$)
۵- Hx	۳، (ح$\wedge$)
۶- Gx	۳، (ح$\wedge$)
۷- $x = a \vee x = b$	۴،۶، (ح$\supset$)
۸- $x = a$	ف
۹- Ha	۵،۸، (ح$=$)
۱۰- $Ha \vee Hb$	۹، (م$\vee$)
۱۱- $x = b$	ف
۱۲- Hb	۵،۱۱، (ح$=$)
۱۳- $Ha \vee Hb$	۱۲، (م$\vee$)
۱۴- $Ha \vee Hb$	۷،۸-۱۰،۱۱-۱۳، (ح$\vee$)
۱۵- $Ha \vee Hb$	۱،۳-۱۴، (ح$\exists$)

۱-	$(\exists x)(Gx \wedge Hx \wedge (\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y] \wedge Ix)$	مقدمه
	$\therefore (\forall x)[(Gx \wedge Hx) \supset Ix]$	(۵)
۲-	$Gz \wedge Hz$	ف
۳-	$Gx \wedge Hx \wedge (\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y] \wedge Ix$	ف
۴-	$Gx \wedge Hx \wedge (\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y]$	۳، (ح$\wedge$)
۵-	Ix	۳، (ح$\wedge$)
۶-	$(\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y]$	۴، (ح$\wedge$)
۷-	$(Gz \wedge Hz) \supset x = z$	۶، (ح$\forall$)
۸-	$x = z$	۲،۷، (ح$\supset$)
۹-	Iz	۵،۸، (ح$=$)
۱۰-	Iz	۱،۳-۹، (ح$\exists$)
۱۱-	$(Gz \wedge Hz) \supset Iz$	۲-۱۰، (م$\supset$)
۱۲-	$(\forall x)[(Gx \wedge Hx) \supset Ix]$	۱۱، (م$\forall$)

۱- $(\forall x)(Fx \supset (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy])$	مقدمه
۲- $(\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy])$	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Gxy])$	(۶)
۳- $Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy]$	ف
۴- Fx	۳، (ح$\wedge$)
۵- $Fy \wedge x \neq y$	ف
۶- $Fx \supset (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy]$	۱، (ح$\forall$)
۷- $(\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy]$	۶،۴، (ح$\supset$)
۸- $(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy$	۷، (ح$\forall$)
۹- $(\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy]$	۳، (ح$\wedge$)
۱۰- $(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy$	۹، (ح$\forall$)
۱۱- Hxy	۱۰،۵، (ح$\supset$)
۱۲- Fy	۵، (ح$\wedge$)
۱۳- $Fy \wedge Hxy$	۱۲،۱۱، (م$\wedge$)
۱۴- Gxy	۱۳،۸، (ح$\supset$)
۱۵- $(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy$	۱۴-۵، (م$\supset$)
۱۶- $(\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy]$	۱۵، (م$\forall$)
۱۷- $Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy]$	۱۶،۴، (م$\wedge$)
۱۸- $(\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy])$	۱۷، (م$\exists$)
۱۹- $(\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy])$	۱۷-۳،۱، (ح$\exists$)

۱- $(\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$ مقدمه

$\therefore (\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$ (۷)

۲- $(\exists x)Gx$ ۱، (ح$\wedge$)

۳- $(\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$ ۱، (ح$\wedge$)

۴- Gx ف

۵- Gy ف

۶- $Gx \wedge Gy$ ۵،۴، (م$\wedge$)

۷- $(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$ ۳، (م$\forall$)

۸- $(Gx \wedge Gy) \supset x = y$ ۷، (ح$\forall$)

۹- $x = y$ ۸،۶، (ح$\supset$)

۱۰- $Gy \supset x = y$ ۵-۹، (م$\supset$)

۱۱- $(\forall y)(Gy \supset x = y)$ ۱۰، (م$\forall$)

۱۲- $Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)$ ۱۱،۴، (م$\wedge$)

۱۳- $(\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$ ۱۲، (م$\exists$)

۱۴- $(\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$ ۲،۴-۱۳، (ح$\exists$)

۱- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee z = y)$ مقدمه

۲- $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ مقدمه

$\therefore (\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$ (۸)

۳- $(\exists y)(x \neq y)$ ف

۴- $x \neq y$ ف

۵- $(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee z = y)$ ۱، (ح$\forall$)

۶- $(\forall z)(x = y \vee x = z \vee z = y)$ ۵، (ح$\forall$)

۷- $x = y \vee x = z \vee z = y$ ۶، (ح$\forall$)

۸- $x = y \vee (x = z \vee z = y)$ ۷، (شر)

۹- $x = z \vee z = y$ ۴،۹، (ق.ا)

۱۰- $z = x \vee z = y$ ۹، (تق=)

۱۱- $(\forall z)(z = x \vee z = y)$ ۱۰، (م$\forall$)

۱۲- $x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)$ ۴،۱۱، (م$\wedge$)

۱۳- $(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$ ۱۲، (م$\exists$)

۱۴- $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$ ۱۳، (م$\exists$)

۱۵- $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$ ۳،۴-۱۴، (ح$\exists$)

۱۶- $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$ ۲،۳-۱۵، (ح$\exists$)

۱- $(\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$	مقدمه
$\therefore\ (\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$	(۹)
۲- $Gz \wedge (\forall y)(Gy \supset z = y)$	ف
۳- Gz	۲، (ح∧)
۴- $(\exists x)Gx$	۲، (م∃)
۵- $(\forall y)(Gy \supset z = y)$	۲، (ح∧)
۶- $Gx \wedge Gy$	ف
۷- $Gy \supset z = y$	۵، (ح∀)
۸- $Gx \supset z = x$	۵، (ح∀)
۹- Gx	۶، (ح∧)
۱۰- Gy	۶، (ح∧)
۱۱- $z = x$	۹،۸، (ح⊃)
۱۲- $z = y$	۱۰،۷، (ح⊃)
۱۳- $x = z$	۱۱، (تق=)
۱۴- $x = y$	۱۳،۱۲، (تع=)
۱۵- $(Gx \wedge Gy) \supset x = y$	۶-۱۴، (م⊃)
۱۶- $(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$	۱۵، (م∀)
۱۷- $(\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$	۱۶، (م∀)
۱۸- $(\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$	۱۶،۴، (م∧)
۱۹- $(\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$	۱،۲-۱۸، (ح∃)

۱- $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$	مقدمه
$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z) \wedge (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$	(۱۰)
۲- $(\exists y)[x' \neq y \wedge (\forall z)(z = x' \vee z = y)]$	ف
۳- $x' \neq y' \wedge (\forall z)(z = x' \vee z = y')$	ف
۴- $x' \neq y'$	۳، (ح∧)
۵- $(\forall z)(z = x' \vee z = y')$	۳، (ح∧)
۶- $z = x' \vee z = y'$	۵، (ح∀)
۷- $x = x' \vee x = y'$	۵، (ح∀)
۸- $y = x' \vee y = y'$	۵، (ح∀)
۹- $z = x'$	ف
۱۰- $y = z \vee y = y'$	۸،۹، (ح=)
۱۱- $x = z \vee x = y'$	۷،۹، (ح=)
۱۲- $y = z$	ف
۱۳- $x = y \vee x = z \vee y = z$	۱۲، (م∨)
۱۴- $y = y'$	ف
۱۵- $x = z \vee x = y$	۱۱،۱۴، (ح=)
۱۶- $x = y \vee x = z$	۱۵، (جا)
۱۷- $x = y \vee x = z \vee y = z$	۱۶، (م∨)
۱۸- $x = y \vee x = z \vee y = z$	۱۰، ۱۲-۱۳، ۱۴-۱۷، (ح∨)
۱۹- $z = y'$	ف
۲۰- $y = x' \vee y = z$	۷،۱۹، (ح=)
۲۱- $x = x' \vee x = z$	۸،۱۹، (ح=)
۲۲- $y = x'$	ف
۲۳- $x = y \vee x = z$	۲۱،۲۲، (ح=)
۲۴- $x = y \vee x = z \vee y = z$	۲۳، (م∨)
۲۵- $y = z$	ف
۲۶- $x = y \vee x = z \vee y = z$	۲۵، (م∨)
۲۷- $x = y \vee x = z \vee y = z$	۲۰، ۲۲-۲۴، ۲۵-۲۶، (ح∨)
۲۸- $x = y \vee x = z \vee y = z$	۶، ۹-۱۸، ۱۹-۲۷، (ح∨)
۲۹- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z)$	۲۸، (م∀)
۳۰- $(\exists x)(\exists y)x \neq y$	۲۹، (م∃)
۳۱- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z) \wedge (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$	۲۹،۳۰، (م∧)
۳۲- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z) \wedge (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$	۲، ۳-۳۱، (ح∃)
۳۳- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z) \wedge (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$	۱، ۲-۳۲، (ح∃)

جدول ۵.۵: لغتنامه‌ی تمرین ۲۱.۵

a	$=$	ملاصدرا، علی، پرفسور عبدالسلام، ابن سینا
b	$=$	اسفار، پدر احمد، پرفسور حسابی، شیخ اشراق
c	$=$	صدرالمتألهین، ملاصدرا
Ax	$=$	x فیزیکدان مسلمان است. ، x انسان است. ، x برنده جایزه نوبل است.
Bx	$=$	x آفریقایی است.
Cx	$=$	x نویسنده است.
Cxy	$=$	x ممکن است در مسابقه دور از y تندتر بدود.
Dx	$=$	x بی‌سواد است. ، x موسس مکتب فلسفی در ایران است.
Ix	$=$	x ایرانی است.
Mxy	$=$	x مؤلف y است.

تمرین ۲۱.۵: ترجمه و اثبات صفحه ۱۲۱

با توجه به توابع گزاره‌ای و نمادهای معرفی شده در جدول ۵.۵ اولاً استدلال‌های زیر را به زبان $\underline{L}_P$ ترجمه و ثانیاً درستی هر یک از آن‌ها را اثبات کنید.

۱. ملاصدرا مؤلف اسفار است. ملاصدرا همان صدرالمتألهین است. صدرالمتألهین ایرانی است. پس یک ایرانی مؤلف اسفار است.

۲. علی نویسنده است. هیچ نویسنده‌ای بی‌سواد نیست. پدر احمد بی‌سواد است، پس علی پدر احمد نیست.

* ۳. حداکثر یک فیزیکدان مسلمان برنده‌ی جایزه‌ی نوبل وجود دارد. پرفسور عبدالسلام فیزیکدانی مسلمان و برنده‌ی جایزه‌ی نوبل است. از دیگر فیزیکدان‌های مسلمان پرفسور حسابی است. پس پرفسور حسابی برنده‌ی جایزه‌ی نوبل نیست.

۴. تنها ابن سینا، شیخ اشراق و ملاصدرا مؤسس مکتب فلسفی در ایران بوده‌اند. هر یک از آن‌ها صاحب کتابی در منطق نیز هستند، پس هرکس مؤسس مکتب فلسفی در ایران بوده، صاحب کتابی در منطق است.

** ۵. فردی که ممکن است تندروترین دونده باشد آفریقایی است. پس هر فردی که آفریقایی نیست، ممکن است در مسابقه دو به وسیله‌ی فرد دیگری پشت سر گذاشته شود.

پاسخ تمرین ۲۱.۵

۱- Mab	مقدمه
۲- $a = c$	مقدمه
۳- Ic	مقدمه
$\therefore (\exists x)(Ix \wedge Mxb)$	(۱۰)
۴- Mcb	۱، ۲، (ح=)
۵- $Ic \wedge Mcb$	۳، ۴، (م$\wedge$)
۶- $(\exists x)(Ix \wedge Mxb)$	۵، (م$\exists$)

۱- Ca	مقدمه
۲- $(\forall x)(Cx \supset {\sim}Dx)$	مقدمه
۳- Db	مقدمه
$\therefore a \neq b$	(۲)
۴- $Ca \supset {\sim}Da$	۲، (ح$\forall$)
۵- ${\sim}Da$	۱، ۴، (ح$\supset$)
۶- $b \neq a$	۳، ۵، (ن=)
۷- $a \neq b$	۶، (تق=)

۱- $(\forall x)(\forall y)((Ax \wedge Ay) \supset [(Bx \wedge By) \supset x = y])$	مقدمه
۲- $Aa \wedge Ba$	مقدمه
۳- $b \neq a \wedge Ab$	مقدمه
$\therefore \sim Bb$	(۳)
۴- Aa	۲، (ح$\wedge$)
۵- $(Aa \wedge Ab) \supset [(Ba \wedge Bb) \supset a = b]$	۱، (ح$\forall$)
۶- Ab	۳، (ح$\wedge$)
۷- $Aa \wedge Ab$	۶،۴، (م$\wedge$)
۸- $(Ba \wedge Bb) \supset a = b$	۷،۵، (ح$\supset$)
۹- $b \neq a$	۳، (ح$\wedge$)
۱۰- $a \neq b$	۹، (تق=)
۱۱- $\sim(Ba \wedge Bb)$	۱۰،۸، (ر.ت)
۱۲- $\sim Ba \vee \sim Bb$	۱۱، (دم)
۱۳- Ba	۲، (ح$\wedge$)
۱۴- $\sim\sim Ba$	۱۳، (ن.م)
۱۵- $\sim Bb$	۱۴،۱۲، (ق.ا)

مقدمه	۱- $(\forall x)[Dx \supset (x = a \vee x = b \vee x = c)]$
مقدمه	۲- $Ea \wedge Eb \wedge Ec$
(۴)	$\therefore (\forall x)(Dx \supset Ex)$
ف	۳- Dx
۱، (ح$\forall$)	۴- $Dx \supset (x = a \vee x = b \vee x = c)$
۴،۳، (ح$\supset$)	۵- $x = a \vee x = b \vee x = c$
۲، (ح$\wedge$)	۶- $Ea \wedge Eb$
۲، (ح$\wedge$)	۷- Ec
۶، (ح$\wedge$)	۸- Ea
۶، (ح$\wedge$)	۹- Eb
ف	۱۰- $x = a \vee x = b$
ف	۱۱- $x = a$
۱۱،۸، (ح=)	۱۲- Ex
ف	۱۳- $x = b$
۱۳،۹، (ح=)	۱۴- Ex
۱۰، ۱۱-۱۲، ۱۳-۱۴، (ح$\vee$)	۱۵- Ex
ف	۱۶- $x = c$
۱۶،۷، (ح=)	۱۷- Ex
۵، ۱۰-۱۵، ۱۶-۱۷، (ح$\vee$)	۱۸- Ex
۳-۱۸، (م$\supset$)	۱۹- $Dx \supset Ex$
۱۹، (م$\forall$)	۲۰- $(\forall x)(Dx \supset Ex)$

۱- $(\forall x)([Ax \wedge (\forall y)(Ay \supset Cxy)] \supset Bx)$	مقدمه
$\therefore (\forall x)[(Ax \wedge \sim Bx) \supset (\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge \sim Cxy)]$	(۵)
۲- $Ax \wedge \sim Bx$	ف
۳- Ax	۲، (ح$\wedge$)
۴- $\sim Bx$	۲، (ح$\wedge$)
۵- $[Ax \wedge (\forall y)(Ay \supset Cxy)] \supset Bx$	۱، (ح$\forall$)
۶- $Ax \supset [(\forall y)(Ay \supset Cxy) \supset Bx]$	۵، (صد)
۷- $(\forall y)(Ay \supset Cxy) \supset Bx$	۳،۶، (ح$\supset$)
۸- $\sim(\forall y)(Ay \supset Cxy)$	۴،۷، (ر.ت)
۹- $(\exists y)\sim(Ay \supset Cxy)$	۸، (ن.س)
۱۰- $\sim(Ay \supset Cxy)$	ف
۱۱- $\sim(\sim Ay \vee Cxy)$	۱۰، (اس)
۱۲- $\sim\sim Ay \wedge \sim Cxy$	۱۱، (دم)
۱۳- $\sim\sim Ay$	۱۲، (ح$\wedge$)
۱۴- Ay	۱۳، (ح$\sim$)
۱۵- $\sim Cxy$	۱۲، (ح$\wedge$)
۱۶- $y \neq x$	۳،۱۴، (ن=)
۱۷- $Ay \wedge y \neq x$	۱۴،۱۶، (م$\wedge$)
۱۸- $Ay \wedge y \neq x \wedge \sim Cxy$	۱۵،۱۷، (م$\wedge$)
۱۹- $(\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge \sim Cxy)$	۱۸، (م$\exists$)
۲۰- $(\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge \sim Cxy)$	۹، ۱۰-۱۹، (ح$\exists$)
۲۱- $(Ax \wedge \sim Bx) \supset (\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge \sim Cxy)$	۲-۲۰، (م$\supset$)
۲۲- $(\forall x)[(Ax \wedge \sim Bx) \supset (\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge \sim Cxy)]$	۲۱، (م$\forall$)

مورد آخر البته ترجمه‌ی دقیقی نیست. گرچه با توجه به توابع گزاره‌ای داده شده و اینکه استدلال باید درست باشد، این چنین ترجمه کرده‌ایم. مشکل ترجمه‌ی عبارت زیر است:

ممکن است x در مسابقه دو به وسیله‌ی فرد دیگری پشت سر گذاشته شود. = Dx

برای ترجمه‌ی دقیق ابتدا به سراغ منطق موجهات رفته و فرمول $\Diamond\varphi$ را که به صورت «ممکن است که φ» خوانده می‌شود را به زبان صوریمان اضافه می‌کنیم. سپس توابع گزاره‌ی زیر را نیز در نظر می‌گیریم:

x تندروترین دونده است. = Fx

x در مسابقه دو به وسیله‌ی فرد دیگری پشت سر گذاشته می‌شود. = Gx

توجه کنید که $Dx = \Diamond Gx$ با فرمول $(\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge \sim Cxy)$ ترجمه شده است.

حالا استدلال باید به صورت زیر ترجمه شود:

$$(\forall x)[(Ax \wedge \Diamond Fx) \supset Bx] \vdash (\forall x)[(Ax \wedge \sim Bx) \supset \Diamond Gx]$$

حالا باید Fx و Gx را تحلیل کنیم. برای این کار توابع گزاره‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

Hxy = x در مسابقه دو از y تندتر می‌دود.

Ixy = x در مسابقه دو به وسیله‌ی y پشت سر گذاشته می‌شود.

بنابراین خواهیم داشت:

$$Fx = (\forall y)(Ay \supset Hxy) \qquad Gx = (\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge Ixy)$$

توجه کنید که:

$(\forall y)(Ay \supset \Diamond Hxy)$ $\neq$ ممکن است x تندروترین دونده باشد.

$(\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge \Diamond Ixy)$ $\neq$ Dx

اما اگر می‌شد این‌چنین ترجمه کنیم، آن موقع می‌توانستیم با جایگزینی $H'xy$ و $I'xy$ به جای $\Diamond Hxy$ و $\Diamond Ixy$ از منطق موجهات گذر کنیم.

با توجه به اینکه می‌خواهیم تلاش کنیم تا استدلال درست باشد، می‌توانیم رابطه‌ی بین H و I را با فرمول $(\forall x)(\forall y)(Hxy \equiv Iyx)$ بیان کنیم و قرار دهیم: $Ixy = Hyx$

توجه کنید که گزاره‌ی $(\forall x)(\forall y)(\sim Hxy \supset Iyx)$ کاذب است. چرا که اگر x تندتر از y ندود، احتمال دارد که هم‌پای y بدود و در نتیجه نمی‌توان گفت که الزاماً y را پشت سر می‌گذارد.

بنابراین استدلال مزبور را می‌توان به صورت زیر ترجمه کرد:

$$(\forall x)([Ax \wedge \Diamond(\forall y)(Ay \supset Hxy)] \supset Bx)$$
$$\therefore (\forall x)[(Ax \wedge \sim Bx) \supset \Diamond(\exists y)(Ay \wedge y \neq x \wedge Hyx)]$$

حالا حتی اگر ادات $\Diamond$ را نیز از استدلال فوق حذف کنیم، همچنان استدلال نادرست خواهد بود. چرا که گزاره‌ی $P = (\forall x)(\forall y)(\sim Hxy \supset Hyx)$ کاذب است.

در آخر می‌توان گفت که اگر P به عنوان مقدمه به استدلال افزوده شود، استدلال مزبور در منطق موجهات محمولی (سیستم QT_2) اثبات‌پذیر است.

فصل ۶

سیستم اصل موضوعی (P_A) و سیستم نموداری (P_T) منطق محمولات

۱.۶ سیستم نموداری منطق محمولات (P_T)

جدول ۱.۶: γـ قواعد

$(\forall)$: $\quad (\forall\alpha)\varphi_\alpha$ $\mid$ φ_β	$(\sim\exists)$: $\quad \sim(\exists\alpha)\varphi_\alpha$ $\mid$ $\sim\varphi_\beta$

جدول ۲.۶: δـ قواعد

$(\exists)$: $\quad (\exists\alpha)\varphi_\alpha$ $\mid$ φ_β	$(\sim\forall)$: $\quad \sim(\forall\alpha)\varphi_\alpha$ $\mid$ $\sim\varphi_\beta$
β باید متغیر باشد و در مراحل قبل آن گذر آزاد نباشد.	

نکته ۱.۶ *اولویت استفاده از قواعد به صورت زیر است:*

۱. αـ *قواعد* *(جدول ۱.۲)*

۲. δـ *قواعد* *(جدول ۲.۶)*

۳. γ ـ قواعد (جدول ۶.۱)

۴. β ـ قواعد (جدول ۶.۲)

تمرین ۶.۱: اثبات — صفحه ۱۳۲

استدلال‌های تمرین ۵.۱۲ و ۵.۱۳ صفحات ۱۱۳ و ۱۱۹ کتاب را با روش نموداری اثبات کنید.

پاسخ تمرین ۶.۱

$$(1) \qquad (\forall x)(Ax \supset Bx), \sim Bd \vdash_{P_T} \sim Ad$$

$$\begin{array}{lccl}
1. & \multicolumn{2}{c}{(\forall x)(Ax \supset Bx)\ \checkmark} & \text{premiss} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\sim Bd} & \text{premiss} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\sim\sim Ad} & \text{Neg Con} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{Ad \supset Bd} & 1, (\forall) \\
 & \diagup & \diagdown & \\
5. & \sim Ad & Bd & 4, (\sim \supset) \\
 & \otimes & \otimes & \\
 & 3 & 2 &
\end{array}$$

$$(2) \qquad (\forall x)(Cx \supset Dx), (\forall x)(Ex \supset \sim Dx) \vdash_{P_T} (\forall x)(Ex \supset \sim Cx)$$

1.	$(\forall x)(Cx \supset Dx)$ ✓	premiss
2.	$(\forall x)(Ex \supset \sim Dx)$ ✓	premiss
3.	$\sim(\forall x)(Ex \supset \sim Cx)$ ✓	Neg Con
4.	$\sim(Ex \supset \sim Cx)$ ✓	3, $(\sim\forall)$
5.	Ex	4, $(\sim\supset)$
6.	$\sim\sim Cx$	4, $(\sim\supset)$
7.	$Cx \supset Dx$ ✓	1, $(\forall)$
8.	$Ex \supset \sim Dx$ ✓	2, $(\forall)$
9.	$\sim Cx$ Dx	7, $(\supset)$
10.	$\otimes_{6}$ $\sim Ex$ $\otimes_{5}$ $\sim Dx$ $\otimes_{9}$	8, $(\supset)$

(3) $(\forall x)(Fx \supset \sim Gx), (\exists x)(Hx \wedge Gx) \vdash_{P_T} (\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$

1.	$(\forall x)(Fx \supset \sim Gx)$ ✓	premiss
2.	$(\exists x)(Hx \wedge Gx)$ ✓	premiss
3.	$\sim(\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$ ✓	Neg Con
4.	$Hx \wedge Gx$ ✓	2, $(\exists)$
5.	Hx	4, $(\wedge)$
6.	Gx	4, $(\wedge)$
7.	$Fx \supset \sim Gx$ ✓	1, $(\forall)$
8.	$\sim(Hx \wedge \sim Fx)$ ✓	3, $(\sim\exists)$
9.	$\sim Fx$ $\sim Gx$	7, $(\supset)$
10.	$\sim Hx$ $\otimes_{5}$ $\sim\sim Fx$ $\otimes_{9}$ $\otimes_{6}$	8, $(\sim\wedge)$

(4) $(\forall x)(Ax \supset Bx), (\exists x)(Ax \wedge \sim Bx) \vdash_{P_T} (\forall x)(Bx \supset Ax)$

1.	$(\forall x)(Ax \supset Bx)$ ✓	premiss
2.	$(\exists x)(Ax \wedge \sim Bx)$ ✓	premiss
3.	$Ax \wedge \sim Bx$ ✓	2, $(\exists)$
4.	Ax	3, $(\wedge)$
5.	$\sim Bx$	3, $(\wedge)$
6.	$Ax \supset Bx$ ✓	1, $(\forall)$
7.	$\sim Ax$ Bx	6, $(\supset)$
	$\otimes_4$ $\otimes_5$	

(5) $$(\forall x)(Kx \supset Lx), (\forall x)[(Kx \wedge Lx) \supset Mx] \vdash_{P_T} (\forall x)(Kx \supset Mx)$$

1.	$(\forall x)(Kx \supset Lx)$ ✓	premiss
2.	$(\forall x)[(Kx \wedge Lx) \supset Mx]$ ✓	premiss
3.	$\sim(\forall x)(Kx \supset Mx)$ ✓	Neg Con
4.	$\sim(Kx \supset Mx)$ ✓	3, $(\sim\forall)$
5.	Kx	4, $(\sim\supset)$
6.	$\sim Mx$	4, $(\sim\supset)$
7.	$Kx \supset Lx$ ✓	1, $(\forall)$
8.	$(Kx \wedge Lx) \supset Mx$ ✓	2, $(\forall)$
9.	$\sim Kx$ Lx	7, $(\supset)$
10.	$\otimes_5$ $\sim(Kx \wedge Lx)$ ✓ Mx	8, $(\supset)$
11.	$\sim Kx$ $\sim Lx$ $\otimes_6$	10, $(\sim\wedge)$
	$\otimes_5$ $\otimes_9$	

(6) $$(\forall x)(Ax \supset Cx), (\forall x)(Bx \supset Cx) \vdash_{P_T} (\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset Cx]$$

1.	$(\forall x)(Ax \supset Cx)$ ✓	premiss
2.	$(\forall x)(Bx \supset Cx)$ ✓	premiss
3.	$\sim(\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset Cx]$ ✓	Neg Con
4.	$\sim[(Ax \vee Bx) \supset Cx]$ ✓	3, $(\sim\forall)$
5.	$Ax \vee Bx$ ✓	4, $(\sim \supset)$
6.	$\sim Cx$	4, $(\sim \supset)$
7.	$Ax \supset Cx$ ✓	1, $(\forall)$
8.	$Bx \supset Cx$ ✓	2, $(\forall)$
9.	$\sim Ax$ $\quad$ Cx	7, $(\supset)$
10.	$\sim Bx$ $\quad$ Cx $\quad$ $\otimes_{6}$	8, $(\supset)$
11.	Ax $\quad$ Bx $\quad$ $\otimes_{6}$	5, $(\vee)$
	$\otimes_{9}$ $\quad$ $\otimes_{10}$	

(7) $\quad (\forall x)(Ax \supset Bx), (\exists x)(Ax \vee Bx) \vdash_{P_T} (\exists x)Bx$

1.	$(\forall x)(Ax \supset Bx)$ ✓	premiss
2.	$(\exists x)(Ax \vee Bx)$ ✓	premiss
3.	$\sim(\exists x)Bx$ ✓	Neg Con
4.	$Ax \vee Bx$ ✓	2, $(\exists)$
5.	$Ax \supset Bx$ ✓	1, $(\forall)$
6.	$\sim Bx$	3, $(\sim\exists)$
7.	Ax $\quad$ Bx	4, $(\vee)$
8.	$\sim Ax$ $\quad$ Bx $\quad$ $\otimes_{6}$	5, $(\supset)$
	$\otimes_{7}$ $\quad$ $\otimes_{6}$	

(8) $\quad (\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Hx)], (\forall x)[Hx \supset (Nx \wedge Mx)]$
$\vdash_{P_T} (\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Nx)]$

1.	$(\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Hx)]$ ✓				premiss
2.	$(\forall x)[Hx \supset (Nx \wedge Mx)]$ ✓				premiss
3.	$\sim(\forall x)[Ox \supset (Ex \supset Nx)]$ ✓				Neg Con
4.	$\sim[Ox \supset (Ex \supset Nx)]$ ✓				3, $(\sim\forall)$
5.	Ox				4, $(\sim\supset)$
6.	$\sim(Ex \supset Nx)$ ✓				4, $(\sim\supset)$
7.	Ex				6, $(\sim\supset)$
8.	$\sim Nx$				6, $(\sim\supset)$
9.	$Ox \supset (Ex \supset Hx)$ ✓				1, $(\forall)$
10.	$Hx \supset (Nx \wedge Mx)$ ✓				2, $(\forall)$
11.	$\sim Hx$			$Nx \wedge Mx$ ✓	10, $(\supset)$
12.	$\sim Ox$	$Ex \supset Hx$ ✓			9, $(\supset)$
13.	$\otimes_{5}$	$\sim Ex$	Hx		12, $(\supset)$
14.		$\otimes_{7}$	$\otimes_{11}$	Nx	11, $(\wedge)$
				$\otimes_{8}$	

(9) $(\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset (Cx \wedge Dx)], (\forall x)[(Cx \vee Dx) \supset (Ax \wedge Bx)]$
$\vdash_{P_T} (\forall x)(Ax \equiv Cx)$

1.	$(\forall x)[(Ax \vee Bx) \supset (Cx \wedge Dx)]$ ✓				premiss
2.	$(\forall x)[(Cx \vee Dx) \supset (Ax \wedge Bx)]$ ✓				premiss
3.	$\sim(\forall x)(Ax \equiv Cx)$ ✓				Neg Con
4.	$\sim(Ax \equiv Cx)$ ✓				3, $(\sim\forall)$
5.	$(Ax \vee Bx) \supset (Cx \wedge Dx)$ ✓				1, $(\forall)$
6.	$(Cx \vee Dx) \supset (Ax \wedge Bx)$ ✓				2, $(\forall)$
7.	Ax		$\sim Ax$		4, $(\sim\equiv)$
8.	$\sim Cx$		Cx		4, $(\sim\equiv)$
9.	$\sim(Ax \vee Bx)$ ✓	$Cx \wedge Dx$ ✓	$\sim(Cx \vee Dx)$ ✓	$Ax \wedge Bx$ ✓	5, $(\supset)$; 6, $(\supset)$
10.	$\sim Ax$	Cx	$\sim Cx$	Ax	$9_{\sim\vee}$; $8_{\wedge}$; $9_{\sim\vee}$; $9_{\wedge}$
	$\otimes_{7}$	$\otimes_{8}$	$\otimes_{8}$	$\otimes_{7}$	

(10) $(\forall x)[(Bx \supset Cx) \wedge (Dx \supset Ex)],$
$(\forall x)[(Cx \vee Ex) \supset ([Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx))]$
$\vdash_{P_T} (\forall x)(Bx \equiv Dx)$

1.	$(\forall x)[(Bx \supset Cx) \wedge (Dx \supset Ex)]$ ✓	premiss
2.	$(\forall x)[(Cx \vee Ex) \supset ([Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx))]$ ✓	premiss
3.	$\sim(\forall x)(Bx \equiv Dx)$ ✓	Neg Con
4.	$\sim(Bx \equiv Dx)$ ✓	3, $(\sim\forall)$
5.	$(Bx \supset Cx) \wedge (Dx \supset Ex)$ ✓	1, $(\forall)$
6.	$Bx \supset Cx$ ✓	5, $(\wedge)$
7.	$Dx \supset Ex$ ✓	5, $(\wedge)$
8.	$(Cx \vee Ex) \supset ([Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx))$	2, $(\forall)$
9.	$\sim(Cx \vee Ex)$ ✓ $[Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \wedge Dx)$ ✓	8, $(\supset)$
10.	$\sim[Fx \supset (Gx \supset Fx)]$ ✓ $Bx \wedge Dx$ ✓	9, $(\supset)$
11.	Fx Bx	$10_{\sim\supset}$; $10_{\wedge}$
12.	$\sim(Gx \supset Fx)$ ✓ Dx	$10_{\sim\supset}$; $10_{\wedge}$
13.	$\sim Fx$ ⊗ 11 $\sim Dx$ ⊗ 12 $\sim Bx$ ⊗ 11	$12_{\sim\supset}$; $4_{\sim\equiv}$
14.	$\sim Cx$	9, $(\sim\vee)$
15.	$\sim Ex$	9, $(\sim\vee)$
16.	$\sim Bx$ Cx ⊗ 14	6, $(\supset)$
17.	$\sim Dx$ Ex ⊗ 15	7, $(\supset)$
18.	Bx ⊗ 16 Dx ⊗ 17	4, $(\sim\equiv)$

(1) $\sim(\forall x)Fx \vdash_{P_T} (\exists x)\sim Fx$

1.	$\sim(\forall x)Fx$	premiss
2.	$\sim(\exists x)\sim Fx$ ✓	Neg Con
3.	$\sim Fx$	1, $(\sim\forall)$
4.	$\sim\sim Fx$	2, $(\sim\exists)$
	$\underset{3}{\otimes}$	

(2) $(\exists x)\sim(Fy \vee Gy) \vdash_{P_T} \sim(\forall y)(Fy \vee Gy)$

1.	$(\exists x)\sim(Fy \vee Gy)$ ✓	premiss
2.	$\sim\sim(\forall y)(Fy \vee Gy)$ ✓	Neg Con
3.	$(\forall y)(Fy \vee Gy)$ ✓	2, $(\sim)$
4.	$\sim(Fy \vee Gy)$	1, $(\exists)$
5.	$Fy \vee Gy$	3, $(\forall)$
	$\underset{4}{\otimes}$	

(3) $\sim(\forall x)\sim[Fx \equiv (\exists y)Gy] \vdash (\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$

1.	$\sim(\forall x)\sim[Fx \equiv (\exists y)Gy]$ ✓	premiss
2.	$\sim(\exists x)[Fx \equiv (\exists y)Gy]$ ✓	Neg Con
3.	$\sim\sim[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	1, $(\sim\forall)$
4.	$\sim[Fx \equiv (\exists y)Gy]$	2, $(\sim\exists)$
	$\underset{3}{\otimes}$	

(4) $(\exists x)(\forall y)Fxy \vdash_{P_T} \sim(\forall x)\sim(\forall y)Fxy$

1.	$(\exists x)(\forall y)Fxy$ ✓	premiss
2.	$\sim\sim(\forall x)\sim(\forall y)Fxy$ ✓	Neg Con
3.	$(\forall x)\sim(\forall y)Fxy$ ✓	2, $(\sim)$
4.	$(\forall y)Fxy$	1, $(\exists)$
5.	$\sim(\forall y)Fxy$	3, $(\sim\forall)$
	$\underset{4}{\otimes}$	

(5) $\sim(\exists x)(Gx \supset Fx) \vdash_{P_T} (\forall x)\sim(Gx \supset Fx)$

1.	$\sim(\exists x)(Gx \supset Fx)$ ✓	premiss
2.	$\sim(\forall x)\sim(Gx \supset Fx)$ ✓	Neg Con
3.	$\sim\sim(Gx \supset Fx)$	2, $(\sim\forall)$
4.	$\sim(Gx \supset Fx)$	1, $(\exists)$
	$\underset{3}{\otimes}$	

(6) $(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy) \vdash_{P_T} \sim(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$

1.	$(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$ ✓	premiss
2.	$\sim\sim(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$ ✓	Neg Con
3.	$(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$ ✓	2, $(\sim)$
4.	$(\exists y)(Fx \vee Gy)$	3, $(\exists)$
5.	$\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$	1, $(\forall)$
	$\underset{4}{\otimes}$	

(7) $(\forall x)(\forall y)Fxy \vdash_{P_T} (\forall y)(\forall x)Fxy$

1.	$(\forall x)(\forall y)Fxy$ ✓	premiss
2.	$\sim(\forall y)(\forall x)Fxy$ ✓	Neg Con
3.	$\sim(\forall x)Fxy$ ✓	2, $(\sim\forall)$
4.	$\sim Fxy$	3, $(\sim\forall)$
5.	$(\forall y)Fxy$ ✓	1, $(\forall)$
6.	Fxy	5, $(\forall)$
	$\underset{4}{\otimes}$	

(8) $(\exists x)(\exists y)(Fx \equiv Gy) \vdash_{P_T} (\exists y)(\exists x)(Fx \equiv Gy)$

1.	$(\exists x)(\exists y)(Fx \equiv Gy)$ ✓	premiss
2.	$\sim(\exists y)(\exists x)(Fx \equiv Gy)$ ✓	Neg Con
3.	$\sim(\exists x)(Fx \equiv Gy)$ ✓	2, $(\sim\exists)$
4.	$\sim(Fx \equiv Gy)$	3, $(\sim\exists)$
5.	$(\exists y)(Fx \equiv Gy)$ ✓	1, $(\forall)$
6.	$Fx \equiv Gy$	5, $(\forall)$
	$\underset{4}{\otimes}$	

(9) $(\forall x)(Fx \wedge Gx) \vdash_{P_T} (\forall x)Fx \wedge Gx$

1.	$(\forall x)(Fx \wedge Gx)$ ✓		premiss
2.	$\sim[(\forall x)Fx \wedge Gx]$ ✓		Neg Con
3.	$\sim(\forall x)Fx$ ✓	$\sim Gx$ ✓	2, $(\sim\wedge)$
4.	$\sim Fx$	$Fx \wedge Gx$ ✓	3, $(\sim\forall)$; 1, $(\forall)$
5.	$Fx \wedge Gx$ ✓	Gx	1, $(\forall)$; 4, $(\wedge)$
6.	Fx	$\otimes$ 3	5, $(\wedge)$
	$\otimes$ 4		

(10) $(\forall x)(Fx \equiv Gx) \wedge (\forall x)(Ax \vee Bx) \vdash_{P_T} (\forall x)[(Fx \equiv Gx) \wedge (Ax \vee Bx)]$

1.	$(\forall x)(Fx \equiv Gx) \wedge (\forall x)(Ax \vee Bx)$ ✓		premiss
2.	$\sim(\forall x)[(Fx \equiv Gx) \wedge (Ax \vee Bx)]$ ✓		Neg Con
3.	$(\forall x)(Fx \equiv Gx)$ ✓		1, $(\wedge)$
4.	$(\forall x)(Ax \vee Bx)$ ✓		1, $(\wedge)$
5.	$\sim[(Fx \equiv Gx) \wedge (Ax \vee Bx)]$		2, $(\sim\forall)$
6.	$Fx \equiv Gx$ ✓		3, $(\forall)$
7.	$Ax \vee Bx$ ✓		4, $(\forall)$
8.	$\sim(Fx \equiv Gx)$	$\sim(Ax \vee Bx)$	5, $(\sim\wedge)$
	$\otimes$ 6	$\otimes$ 7	

(11) $(\exists x)(Fx \vee Gx) \vdash_{P_T} (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$

1.	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$ ✓		
2.	$\sim[(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx]$ ✓		
3.	$\sim(\exists x)Fx$ ✓		2, $(\sim\vee)$
4.	$\sim(\exists x)Gx$ ✓		2, $(\sim\vee)$
5.	$Fx \vee Gx$ ✓		1, $(\exists)$
6.	$\sim Fx$		3, $(\sim\exists)$
7.	$\sim Gx$		4, $(\sim\exists)$
8.	Fx	Gx	5, $(\vee)$
	$\otimes$ 6	$\otimes$ 7	

(12) $(\exists x)(\exists y)Fxy \vee (\exists x)(\forall y)Gxy \vdash_{P_T} (\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$

1.	$(\exists x)(\exists y)Fxy \vee (\exists x)(\forall y)Gxy$ ✓		premiss
2.	$\sim(\exists x)[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$ ✓		Neg Con
3.	$(\exists x)(\exists y)Fxy$ ✓	$(\exists x)(\forall y)Gxy$ ✓	1, $(\vee)$
4.	$(\exists y)Fxy$	$(\forall y)Gxy$	3, $(\exists)$
5.	$\sim[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$ ✓	$\sim[(\exists y)Fxy \vee (\forall y)Gxy]$ ✓	2, $(\sim\exists)$
6.	$\sim(\exists y)Fxy$	$\sim(\forall y)Gxy$	5, $(\sim\vee)$; 5, $(\sim\wedge)$
	$\otimes$ 4	$\otimes$ 4	

جدول ۳.۶: αـ قواعد

$(=)$:	φ_{β_1} $\beta_1{=}\beta_2$ $\mid$ φ_{β_2}	φ_{β_1} $\beta_2{=}\beta_1$ $\mid$ φ_{β_2}	$(\sim =)$: $\beta{\neq}\beta$ $\otimes$

β_2 جانشین حداقل یک مورد از β_1 در φ_{β_1} می‌شود.

تمرین ۲.۶: اثبات — صفحه ۱۳۳

استدلال‌های تمرین ۱۹.۵ و ۲۰.۵ صفحات ۱۵۴ و ۱۵۵ کتاب را با روش نموداری اثبات کنید.

پاسخ تمرین ۲.۶

$$(1) \qquad Fa, \sim Fb \vdash_{\underline{P_T}} a \neq b$$

1.	Fa	premiss
2.	$\sim Fb$ ✓	premiss
3.	$\sim a \neq b$ ✓	Neg Con
4.	$a{=}b$	3, $(\sim)$
5.	$\sim Fa$	2, $(=)$
	$\otimes$ 1	

(2) $a = b, b = c \vdash_{\underline{\underline{P}}_T} a = c$

1.	$a{=}b$ ✓	premiss
2.	$b{=}c$ ✓	premiss
3.	$\sim a \neq c$	Neg Con
4.	a	1,2, (=)
	$\otimes$ 3	

(3) $a = b \vdash_{\underline{\underline{P}}_T} b = a$

1.	$a{=}b$ ✓	premiss
2.	$\sim b \neq a$ ✓	Neg Con
3.	$\sim b{=}b$	1,2, (=)
	$\otimes$ 3	

(1) $a = b \vdash_{\underline{\underline{P}}_T} Fa \equiv Fb$

1.	$a{=}b$ ✓		premiss
2.	$\sim(Fa \equiv Fb)$ ✓		Neg Con
3.	$\sim(Fb \equiv Fb)$ ✓		1,2, (=)
4.	Fb	Fb	3, $(\sim \equiv)$
5.	$\sim Fb$	$\sim Fb$	3, $(\sim \equiv)$
	$\otimes$ 4	$\otimes$ 4	

(2) $c = d \vdash_{\underline{\underline{P}}_T} (b = c) \equiv (b = d)$

1.	$c{=}d$ ✓		premiss
2.	$\sim[(b=c)\equiv(b=d)]$ ✓		Neg Con
3.	$\sim[(b=d)\equiv(b=d)]$ ✓		1,2, $(=)$
4.	$b{=}d$	$b{=}c$	3, $(\sim\equiv)$
5.	$\sim b{=}d$	$\sim b{=}d$	3, $(\sim\equiv)$
	$\otimes$ 4		

$$\text{(3a)}\qquad (\exists x)(x\neq a\wedge Fx)\vdash_{\underline{\underline{P}}_T}(\exists x)Fx$$

1.	$(\exists x)(x\neq a\wedge Fx)$ ✓	premiss
2.	$\sim(\exists x)Fx$ ✓	Neg Con
3.	$\sim Fx$	2, $(\sim\exists)$
4.	$x\neq a\wedge Fx$ ✓	1, $(\exists)$
5.	Fx	4, $(\wedge)$
	$\otimes$ 3	

$$\text{(3b)}\qquad (\exists x)(x\neq a\wedge Fx)\vdash_{\underline{\underline{P}}_T}Fa\supset(\exists x)(\exists y)(x\neq y\wedge Fx\wedge Fy)$$

1.	$(\exists x)(x\neq a\wedge Fx)$ ✓			premiss
2.	$\sim[Fa\supset(\exists x)(\exists y)(x\neq y\wedge Fx\wedge Fy)]$ ✓			Neg Con
3.	Fa			2, $(\sim\supset)$
4.	$\sim(\exists x)(\exists y)(x\neq y\wedge Fx\wedge Fy)$ ✓			2, $(\sim\supset)$
5.	$x\neq a\wedge Fx$ ✓			1, $(\exists)$
6.	$x\neq a$			5, $(\wedge)$
7.	Fx			5, $(\wedge)$
8.	$\sim(x\neq a\wedge Fx\wedge Fa)$ ✓			4, $(\sim\exists)^2$
9.	$\sim x\neq a$	$\sim(Fx\wedge Fa)$ ✓		8, $(\sim\vee)$
10.	$\otimes$ 6	$\sim Fx$	$\sim Fa$	9, $(\sim\wedge)$
		$\otimes$ 7	$\otimes$ 3	

$$\text{(4)}\qquad (\exists x)(Hx\wedge Gx),(\forall x)[Gx\supset(x=a\vee x=b)]\vdash_{\underline{\underline{P}}_T}Ha\vee Hb$$

1.	$(\exists x)(Hx \wedge Gx)$ ✓	premiss
2.	$(\forall x)[Gx \supset (x = a \vee x = b)]$ ✓	premiss
3.	$\sim(Ha \vee Hb)$ ✓	Neg Con
4.	$Hx \wedge Gx$ ✓	1, $(\exists)$
5.	$\sim Ha$	3, $(\sim\vee)$
6.	$\sim Hb$	3, $(\sim\vee)$
7.	Hx	4, $(\wedge)$
8.	Gx	4, $(\wedge)$
9.	$Gx \supset (x{=}a \vee x{=}b)$ ✓	2, $(\forall)$
10.	$\sim Gx$ $x{=}a \vee x{=}b$ ✓	9, $(\supset)$
11.	$\otimes_{8}$ $x{=}a$ ✓ $x{=}b$ ✓	10, $(\vee)$
12.	Ha $\otimes_{5}$	7,11, $(=)$
13.	Hb $\otimes_{6}$	7,11, $(=)$

(5) $(\exists x)(Gx \wedge Hx \wedge (\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y] \wedge Ix) \vdash_{\underline{\underline{P_T}}} (\forall x)[(Gx \wedge Hx) \supset Ix]$

1.	$(\exists x)(Gx \wedge Hx \wedge (\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y] \wedge Ix)$ ✓	premiss
2.	$\sim(\forall x)[(Gx \wedge Hx) \supset Ix]$ ✓	Neg Con
3.	$Gx \wedge Hx \wedge (\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y] \wedge Ix$ ✓	1, $(\exists)$
4.	$Gx \wedge Hx$	3, $(\wedge)$
5.	$(\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y] \wedge Ix$ ✓	3, $(\wedge)$
6.	$(\forall y)[(Gy \wedge Hy) \supset x = y]$ ✓	5, $(\wedge)$
7.	Ix ✓	5, $(\wedge)$
8.	$\sim[(Gy \wedge Hy) \supset Iy]$ ✓	2, $(\exists)$
9.	$Gy \wedge Hy$	8, $(\sim\supset)$
10.	$\sim Iy$	8, $(\sim\supset)$
11.	$(Gy \wedge Hy) \supset x{=}y$ ✓	6, $(\forall)$
12.	$\sim(Gy \wedge Hy)$ $x{=}y$ ✓	11, $(\supset)$
13.	$\otimes_{9}$ Iy $\otimes_{10}$	7,12, $(=)$

$$
\begin{array}{ll}
(6) & (\forall x)(Fx \supset (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy]) \\
 & (\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy]) \\
 & \therefore_{\underline{\underline{P_T}}} (\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Gxy])
\end{array}
$$

1.	$(\forall x)(Fx \supset (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy]) \checkmark$	premiss
2.	$(\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy]) \checkmark$	premiss
3.	$\sim(\exists x)(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Gxy]) \checkmark$	Neg Con
4.	$Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy] \checkmark$	2, $(\exists)$
5.	Fx	4, $(\wedge)$
6.	$(\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy] \checkmark$	4, $(\wedge)$
7.	$Fx \supset (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy] \checkmark$	1, $(\forall)$
8.	$\sim(Fx \wedge (\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Gxy]) \checkmark$	3, $(\sim\exists)$
9.	$\sim Fx \quad (\forall y)[(Fy \wedge Hxy) \supset Gxy] \checkmark$	7, $(\supset)$
10.	$\otimes_{5} \quad \sim Fx \quad \sim(\forall y)[(Fy \wedge x \neq y) \supset Gxy] \checkmark$	8, $(\sim\wedge)$
11.	$\otimes_{5} \quad \sim[(Fy \wedge x \neq y) \supset Gxy] \checkmark$	10, $(\sim\forall)$
12.	$Fy \wedge x \neq y \checkmark$	11, $(\sim\supset)$
13.	$\sim Gxy$	11, $(\sim\supset)$
14.	Fy	12, $(\wedge)$
15.	$(Fy \wedge x \neq y) \supset Hxy \checkmark$	6, $(\forall)$
16.	$\sim(Fy \wedge x \neq y) \quad Hxy$	15, $(\supset)$
17.	$\otimes_{12} \quad (Fy \wedge Hxy) \supset Gxy \checkmark$	9, $(\forall)$
18.	$\sim(Fy \wedge Hxy) \checkmark \quad Gxy$	17, $(\supset)$
19.	$\sim Fy \quad \sim Hxy \quad \otimes_{13}$	18, $(\sim\wedge)$
	$\otimes_{14} \quad \otimes_{16}$	

$$
\begin{array}{ll}
(7) & (\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y] \\
 & \therefore_{\underline{\underline{P_T}}} (\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]
\end{array}
$$

1.	$(\exists x)Gx \wedge (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$ ✓	premiss
2.	$\sim(\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$ ✓	Neg Con
3.	$(\exists x)Gx$ ✓	1, $(\wedge)$
4.	$(\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$ ✓	1, $(\wedge)$
5.	Gx	3, $(\exists)$
6.	$\sim[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$ ✓	2, $(\sim\exists)$
7.	$\sim Gx$ $\sim(\forall y)(Gy \supset x{=}y)$ ✓	6, $(\sim\wedge)$
8.	$\otimes_{5}$ $\sim(Gy \supset x{=}y)$ ✓	7, $(\sim\forall)$
9.	$(Gx \wedge Gy) \supset x{=}y$ ✓	4, $(\forall)^2$
10.	Gy	8, $(\sim\wedge)$
11.	$x \neq y$	8, $(\sim\wedge)$
12.	$\sim(Gx \wedge Gy)$ ✓ $x{=}y$	9, $(\supset)$
13.	$\sim Gx$ $\sim Gy$ $\otimes_{11}$	12, $(\sim\wedge)$
	$\otimes_{5}$ $\otimes_{10}$	

(8) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee z = y), (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$
$\vdash_{\underset{=}{P_T}} (\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$

1.	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x{=}y \vee x{=}z \vee z{=}y)$ ✓	premiss
2.	$(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ ✓	premiss
3.	$\sim(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$ ✓	Neg Con
4.	$x \neq y$	2, $(\exists)^2$
5.	$\sim[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$ ✓	3, $(\sim\exists)^2$
6.	$\sim x \neq y \qquad \sim(\forall z)(z{=}x \vee z{=}y)$ ✓	5, $(\sim\wedge)$
7.	$\otimes_4 \qquad \sim(z{=}x \vee z{=}y)$ ✓	6, $(\sim\forall)$
8.	$z \neq x$ ✓	7, $(\sim\vee)$
9.	$z \neq y$	7, $(\sim\vee)$
10.	$x{=}y \vee x{=}z \vee z{=}y$ ✓	1, $(\forall)^3$
11.	$x{=}y \qquad x{=}z \vee z{=}y$ ✓	10, $(\vee)$
12.	$\otimes_4 \qquad x{=}z$ ✓ $\qquad z{=}y$	11, $(\vee)$
13.	$z \neq z \qquad \otimes_9$	8,12, $(=)$
	$\otimes$	

(9a) $\quad (\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)] \vdash_{\underline{\underline{P}}_T} (\exists x)Gx$

1.	$(\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x{=}y)]$ ✓	premiss
2.	$\sim(\exists x)Gx$ ✓	Neg Con
3.	$Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x{=}y)$ ✓	1, $(\exists)$
4.	Gx	3, $(\wedge)$
5.	$\sim Gx$	2, $(\sim\exists)$
	$\otimes_4$	

(9b) $\quad (\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)] \vdash_{\underline{\underline{P}}_T} (\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$

1.	$(\exists x)[Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x = y)]$ ✓		premiss
2.	$\sim(\forall x)(\forall y)[(Gx \wedge Gy) \supset x = y]$ ✓		Neg Con
3.	$Gx \wedge (\forall y)(Gy \supset x{=}y)$ ✓		1, $(\exists)$
4.	Gx		3, $(\wedge)$
5.	$(\forall y)(Gy \supset x{=}y)$ ✓		3, $(\wedge)$
6.	$\sim[(Gz \wedge Gy) \supset z = y]$ ✓		2, $(\sim\forall)^2$
7.	$Gz \wedge Gy$ ✓		6, $(\sim\supset)$
8.	Gz		7, $(\wedge)$
9.	Gy		6, $(\sim\supset)$
10.	$z \neq y$ ✓		6, $(\sim\supset)$
11.	$Gz \supset x{=}z$ ✓		5, $(\forall)$
12.	$\sim Gz$	$x{=}z$ ✓	11, $(\supset)$
13.	$\otimes$ 8	$x \neq y$	10,12, $(=)$
14.		$Gy \supset x{=}y$ ✓	5, $(\forall)$
15.		$\sim Gy$ $\otimes$ 9 $x{=}y$ $\otimes$ 13	14, $(\supset)$

(10a) $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)]$

$\vdash_{\underline{\underline{P}}_T} (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z)$

1.	$(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z{=}x \vee z{=}y)]$ ✓	premiss
2.	$\sim(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x{=}y \vee x{=}z \vee y{=}z)$ ✓	Neg Con
3.	$x \neq y \wedge (\forall z)(z{=}x \vee z{=}y)$ ✓	1, $(\exists)$
4.	$x \neq y$	3, $(\wedge)$
5.	$(\forall z)(z{=}x \vee z{=}y)$ ✓	3, $(\wedge)$
6.	$\sim(x'{=}y' \vee x'{=}z \vee y'{=}z)$ ✓	2, $(\sim\forall)^3$
7.	$x' \neq y'$ ✓	6, $(\sim\wedge)$
8.	$\sim(x'{=}z \vee y'{=}z)$ ✓	6, $(\sim\wedge)$
9.	$x' \neq z$ ✓	8, $(\sim\wedge)$
10.	$y' \neq z$ ✓	8, $(\sim\wedge)$
11.	$z{=}x \vee z{=}y$ ✓	5, $(\forall)$
12.	$x'{=}x \vee x'{=}y$ ✓	5, $(\forall)$
13.	$y'{=}x \vee y'{=}y$ ✓	5, $(\forall)$

14.	$z{=}x$ ✓			$z{=}y$ ✓			11, $(\vee)$
15.	$x' \neq x$ ✓			$x' \neq y$			9,14, $(=)$
16.	$x'{=}x$	$x'{=}y$ ✓		$x'{=}x$ ✓		$x'{=}y$	12, $(\vee)$
17.	$\otimes$	$y'{=}x$	$y'{=}y$ ✓	$y'{=}x$ ✓	$y'{=}y$ ✓	$\otimes$	13, $(\vee)$
18.	15	$y' \neq x$	$x'{=}y'$	$x'{=}y'$	$y'{=}z$	15	$=_{10,14}$; $=_{16,17}$; $=_{16,17}$; $=_{14,17}$
		$\otimes$ 17	$\otimes$ 7	$\otimes$ 7	$\otimes$ 10		

(10b) $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)] \vdash_{\underline{P}_T} (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$

1.	$(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(z{=}x \vee z{=}y)]$ ✓	premiss
2.	$\sim(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ ✓	Neg Con
3.	$x \neq y \wedge (\forall z)(z{=}x \vee z{=}y)$ ✓	1, $(\exists)$
4.	$x \neq y$	3, $(\wedge)$
5.	$\sim(x \neq y)$	2, $(\sim\exists)^2$
	$\otimes$ 4	

بخش چهارم

ساختار معنایی و فرانظریه منطق محمولات

فصل ۷

ساختار معنایی منطق محمولات

۱.۷ تعبیر $\mathrm{L_P}$

$$I = \langle D, V \rangle$$

۱. D یک مجموعه غیرتهی است.

۲. V یک تابع به صورت زیر است:

$\{\varphi_0 \mid$ یک جمله نشانه است. $\varphi_0\} \to \{0,1\}$

$\{\beta \mid$ یک نماد فردی (ثابت یا متغیر فردی) است. $\beta\} \to D$

$\{\varphi_n \mid$ یک محمول‌نشانه‌ی n موضعی است. $\varphi_n\} \to \{A \mid A \subseteq D^n\}$

۲.۷ صدق در یک تعبیر

$\vDash_I \subseteq \{\varphi \mid$ یک فرمول است. $\varphi\} \times \{0,1\}$

$$\vDash_I \varphi \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \langle \varphi, 1 \rangle \in \vDash_I$$

۳.۷ قواعد معناشناسی $\mathbf{L_P}$

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{RS}_1) & \vDash_I \varphi_0 \iff V(\varphi_0)=1 \\
(\mathrm{RS}_2) & \vDash_I \varphi\beta_1\cdots\beta_n \iff \langle V(\beta_1),\cdots,V(\beta_n)\rangle \in V(\varphi_n) \\
(\mathrm{RS}_3) & \vDash_I \sim\varphi \iff \nvDash_I \varphi \\
(\mathrm{RS}_4) & \vDash_I \varphi\wedge\psi \iff \vDash_I \varphi \;\&\; \vDash_I \psi \\
(\mathrm{RS}_5) & \vDash_I \varphi\vee\psi \iff \vDash_I \varphi \text{ or } \vDash_I \psi \\
(\mathrm{RS}_6) & \vDash_I \varphi\supset\psi \iff \nvDash_I \varphi \text{ or } \vDash_I \psi \\
(\mathrm{RS}_7) & \vDash_I \varphi\equiv\psi \iff (\vDash_I \varphi \;\&\; \vDash_I \psi) \text{ or } (\nvDash_I \varphi \;\&\; \nvDash_I \psi) \\
(\mathrm{RS}_8) & \vDash_I (\forall\alpha)\varphi_\alpha \iff \forall o\in D\ (V(\beta)=o \Longrightarrow \vDash_I \varphi_\beta) \\
(\mathrm{RS}_9) & \vDash_I (\exists\alpha)\varphi_\alpha \iff \exists o\in D\ (V(\beta)=o \;\&\; \vDash_I \varphi_\beta)
\end{array}
$$

تمرین ۱.۷: صدق در مدل **صفحه ۱۳۹**

تعبیر زیر مفروض است:

$$I=\langle D,V\rangle \qquad D=\{o_1,o_2,o_3,o_4\}$$
$$V(a)=o_1,\ V(b)=o_2,\ V(c)=o_3,\ V(d)=o_4$$
$$V(F)=\{o_1,o_2\} \qquad V(B)=\{o_3,o_4\}$$
$$V(D)=\{\langle o_1,o_1\rangle,\langle o_2,o_2\rangle,\langle o_3,o_3\rangle,\langle o_1,o_3\rangle,\langle o_1,o_4\rangle,\langle o_2,o_3\rangle,\langle o_3,o_1\rangle,\langle o_4,o_1\rangle\}$$

تعبیر با زبان طبیعی:

۱. o_1 تا o_4 به ترتیب حسن، حسین، احمد و علی هستند.

۲. $V(F)$ و $V(B)$ به ترتیب مجموعه‌ی پدران و فرزندان هستند.

۳. $V(D)$ مجموعه‌ی زوج‌های مرتبی است که عضو اول آن، عضو دومش را دوست دارد.

کدام یک از فرمول‌های زیر در تعبیر مزبور صادق و کدام کاذب است؟

1. Ba
2. $(\forall x)Dxx$
3. $\sim Dad\vee\sim Fd$
4. $\sim(\exists x)Bx$
5. $(\forall x)Dax$
6. $(\exists x)(\forall y)[(Fx\wedge By)\supset Dxy]$

7. $(\forall x)(\forall y)[(Fx \wedge By) \supset Dyx]$
8. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Dxy \wedge Dyz) \supset Dxz]$

پاسخ تمرین ۱.۷

۱. کاذب است.

$$\vDash_I Ba \iff V(a) \in V(B) \iff o_1 \in \{o_3, o_4\}$$

۲. کاذب است.

$$\begin{aligned} \vDash_I (\forall x)Dxx &\iff \forall o \in D\ (V(x) = o \Longrightarrow \vDash_I Dxx) \\ &\iff \forall o \in D\ [V(x) = o \Longrightarrow \langle V(x), V(x)\rangle \in V(D)] \\ &\iff \forall o \in D, \langle o, o\rangle \in V(D) \\ &\iff \{\langle o_1, o_1\rangle, \langle o_2, o_2\rangle, \langle o_3, o_3\rangle, \langle o_4, o_4\rangle\} \subseteq V(D) \end{aligned}$$

۳. صادق است.

$$\begin{aligned} \vDash_I {\sim}Dad \vee {\sim}Fd &\iff \vDash_I {\sim}Dad \text{ or } \vDash_I {\sim}Fd \\ &\iff \nvDash_I Dad \text{ or } \nvDash_I Fd \\ &\iff \langle o_1, o_4\rangle \notin V(D) \text{ or } o_4 \notin V(F) \end{aligned}$$

۴. کاذب است.

$$\begin{aligned} \vDash_I {\sim}(\exists x)Bx &\iff \nvDash_I (\exists x)Bx \\ &\iff \forall o \in D\ [V(x) = o \Longrightarrow \nvDash_I Bx] \\ &\iff \forall o \in D\ [V(x) = o \Longrightarrow\ V(x) \notin V(B)] \\ &\iff \forall o \in D, o \notin V(B) \\ &\iff\ V(B) = \emptyset \end{aligned}$$

۵. کاذب است.

$$\begin{aligned} \vDash_I (\forall x)Dax &\iff \forall o \in D\ [V(x) = o \Longrightarrow \vDash_I Dax] \\ &\iff \forall o \in D\ [V(x) = o \Longrightarrow\ \langle V(a), V(x)\rangle \in V(D)] \\ &\iff \forall o \in D, \langle o_1, o\rangle \in V(D) \\ &\iff\ \{\langle o_1, o\rangle \mid o \in D\} \subseteq V(D) \end{aligned}$$

۶. صادق است.

$$\begin{aligned} & \vDash_I (\exists x)(\forall y)[(Fx \wedge By) \supset Dxy] \\ \Longleftrightarrow\ & \exists o \in D, \forall p \in D\ (o \notin V(F) \text{ or } p \notin V(B) \text{ or } \langle o,p\rangle \in V(D)) \\ \Longleftarrow\ & \forall p \in D\ (o_3 \notin V(F) \text{ or } p \notin V(B) \text{ or } \langle o_3,p\rangle \in V(D)) \end{aligned}$$

۷. کاذب است.

$$\begin{aligned} & \vDash_I (\forall x)(\forall y)[(Fx \wedge By) \supset Dyx] \\ \Longleftrightarrow\ & \forall o \in D, \forall p \in D\ (o \notin V(F) \text{ or } p \notin V(B) \text{ or } \langle p,o\rangle \in V(D)) \\ \Longleftrightarrow\ & \forall p \in D\ (p \notin V(B) \text{ or } \langle p,o_1\rangle \in V(D))\ \& \\ & \forall p \in D\ (p \notin V(B) \text{ or } \langle p,o_2\rangle \in V(D)) \\ \Longleftrightarrow\ & \langle o_3,o_1\rangle \in V(D)\ \&\ \langle o_4,o_1\rangle \in V(D)\ \& \\ & \langle o_3,o_2\rangle \in V(D)\ \&\ \langle o_4,o_2\rangle \in V(D) \end{aligned}$$

۸. کاذب است.

$$\begin{aligned} & \vDash_I (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Dxy \wedge Dyz) \supset Dxz] \\ \Longleftrightarrow\ & \forall o \in D, \forall p \in D, \forall q \in D \\ & (\langle o,p\rangle \notin V(D) \text{ or } \langle p,q\rangle \notin V(D) \text{ or } \langle o,q\rangle \in V(D)) \end{aligned}$$

مثال نقض: $\langle o_4,o_1\rangle \in V(D)\ \&\ \langle o_1,o_3\rangle \in V(D)\ \&\ \langle o_4,o_3\rangle \notin V(D)$

تمرین ۲.۷: صدق در مدل **صفحه ۱۳۹**

تعبیر زیر مفروض است:

$$\begin{aligned} I &= \langle D, V\rangle & & & D &= \{o_1,o_2,o_3\} \\ V(a) &= o_1 & V(b) &= o_2 & V(c) &= o_3 \\ V(M) &= \{o_2,o_3\} & & & V(D) &= \{\langle o_1,o_2\rangle, \langle o_3,o_2\rangle, \langle o_2,o_2\rangle, \langle o_2,o_1\rangle\} \end{aligned}$$

۱. فرمولی بسازید که در تعبیر I کاذب باشد.

۲. فرمولی با علامت نقض بسازید که در تعبیر I صادق باشد.

۳. فرمولی با یک سور کلی بسازید که در تعبیر I صادق باشد.

۴. فرمولی با یک سور وجودی بسازید که در تعبیر I کاذب باشد.

۵. فرمولی با یک سور وجودی و سور کلی بسازید که در تعبیر I صادق باشد.

پاسخ تمرین ۲.۷

از آنجا که فرمول‌های زیادی می‌توان ساخت تا خواسته‌ی سوالات بالا را برآورده کند، این تمرین یک پاسخ یکسانی ندارد. من چندتا از فرمول‌های ساده را برای ارضای شرایط خواسته شده، می‌آورم. فرمول‌هایی می‌آوریم که نه خود و نه نقیضشان قضیه نباشند.

1. $Ma, Daa, Dac, Dbc, Dca, Dcc, {\sim}Mb, {\sim}Mc$
2. ${\sim}Ma, {\sim}Daa, {\sim}Dac, {\sim}Dbc, {\sim}Dca, {\sim}Dcc$
3. $(\forall x)Dxb, (\forall x)(Dxx \supset Mx), (\forall x)(Dax \supset Dxx)$
4. $(\exists x){\sim}Dxb, (\exists x)(Dxx \wedge {\sim}Mx), (\exists x)(Dax \wedge {\sim}Dxx)$
5. $(\exists y)(\forall x)Dxy, (\forall x)(\exists y)Dxy, (\exists y)(\forall x)(Dyx \supset Dxx)$

تمرین ۳.۷: صدق در مدل صفحه ۱۴۰

ارزش هر یک از دو فرمول $(\forall x)(\forall y)(\exists z)Gxyz$ و $(\forall x)(\forall y)(\forall z)Gxyz$ را در تعبیر زیر بیابید:

$D =${علیرضا, مصطفی, فاطمه, حسین, حسن}

$V(G) =\{\langle o,p,q\rangle \mid$ مجموع حرف‌های o و p از q بیشتر است. $\}$

پاسخ تمرین ۳.۷

هر دو عضوی که از D در نظر بگیریم، مجموع حرف‌هایشان حداقل برابر ۶ است. از طرف دیگر تعداد حرف‌های «حسن» برابر ۳ است. پس فرمول اول صادق است.
مجموع حرف‌های «حسن» و «حسین» بیشتر از حرف‌های «علیرضا» نیست. پس فرمول دومی کاذب است.

۴.۷ اعتبار معنایی و نتیجه معنایی در L_P

$$\Sigma \vDash \varphi \overset{\text{df}}{\iff} \forall I\ (\forall \psi \in \Sigma, \vDash_I \psi \implies \vDash_I \varphi)$$

۵.۷ نشان دادن عدم اعتبار استدلال‌ها در منطق محمولات

تمرین ۴.۷: مثال نقض

صفحه ۱۴۵

عدم اعتبار استدلال‌های زیر را در یک تعبیر متناهی نشان دهید:

1. $(\exists x)(Ax \wedge Bx), Ab \not\models Bb$

2. $(\forall x)(Cx \supset Dx), (\forall x)(Ex \supset Dx) \not\models (\forall x)(Cx \supset Ex)$

3. $(\exists x)(Fx \wedge Gx), (\exists x)({\sim}Fx \wedge {\sim}Gx) \not\models (\exists x)(Gx \wedge {\sim}Fx)$

4. $(\forall x)[Hx \supset (Ix \supset Jx)], (\exists x)(Kx \wedge Ix), (\exists x)(Kx \wedge {\sim}Jx) \not\models (\forall x)(Hx \supset {\sim}Kx)$

5. $(\forall x)[Lx \supset (Mx \wedge Nx)], (\exists x)(Ox \wedge Ax) \not\models (\forall x)(Lx \supset Ox)$

6. $(\exists x)(Cx \wedge Dx), (\forall x)(Cx \supset Ex), (\exists x)(Ex \wedge {\sim}Cx) \not\models (\exists x)(Ex \wedge {\sim}Dx)$

7. $(\forall x)(Fx \supset Gx), (\exists x)(Hx \wedge Gx), (\exists x)(Hx \wedge {\sim}Gx) \not\models (\forall x)(Fx \supset Hx)$

∗8. $(\forall x)(\forall y)[Ix \supset (Jy \vee Ky)], (\forall x)([(\forall y)Jy \vee (\forall z)Kz] \supset Lx) \not\models (\exists x)(\exists y)(Ix \supset Ly)$

∗9. $(\forall x)(\exists y)(Mx \supset Ny), (\exists x)(\forall y)(Nx \supset Oy) \not\models (\forall x)Mx \supset (\forall y)Oy$

10. $(\forall x)(Ax \supset Bx), (\exists x)(\exists y)(Bx \wedge Cy) \not\models (\forall x)(Ax \supset Cx)$

∗11. $(\forall x)(\exists y)(Dx \equiv Ey) \not\models (\exists x)(\forall y)(Dy \equiv Ex)$

12. $(\forall x)Fx \supset [(\exists y)Gy \wedge (\exists z)Hz], (\exists x)(Gx \wedge Hx) \supset (\forall y)Iy \not\models (\forall x)Fx \supset (\exists y)Iy$

∗13. $(\exists x)(\exists y)(Jx \supset Ky), (\exists x)(\forall y)(Kx \supset Ly) \not\models (\exists x)Jx \supset (\forall y)Ly$

∗14. $(\exists x)(\exists y)(Mx \supset [Ny \wedge (\exists z)Oz]), (\forall x)(\forall y)[(Nx \wedge Ox) \supset Ay] \not\models (\forall x)(\exists y)(Mx \supset Ay)$

∗15. $(\forall x)(\forall y)(Bx \supset Cy), (\forall x)Cx \supset [(\exists y)(Dy \wedge Ey) \wedge (\exists z)(Dz \wedge {\sim}Ez)] \not\models (\forall x)(Bx \supset Dx)$

پاسخ تمرین ۴.۷

پیدا کردن یک مثال نقض برای نشان دادن عدم اعتبار یک استدلال کافی است. اما من مجبورم که همه‌ی تعبیرهای عدم اعتبار را برای شما بیاورم.
با توجه به روشی که در کتاب توضیح داده شده است، این تمرین ساده است و تنها به کمی حوصله نیاز دارد. شما می‌توانید در ابتدا فقط ۴ مورد اول و ۲ مورد آخر را حل کنید. اگر به سادگی توانستید موردهای ۱۴ و ۱۵ را حل کنید، پس مهارت حل این تمرین را پیدا کردید. در غیراینصورت موردهای بیشتری را حل کنید تا به مهارت کافی نزدیک شوید.
پیدا کردن تمام حالت‌های عدم اعتبار استدلال‌های منطق گزاره‌ها کاری طاقت فرسا است. بنابراین من از نرم افزار تحت وب Logic calculator: Server-side Processing استفاده کردم.

1. معتبر $U=\{a\},\ Aa\wedge Ba, Aa \models Ba$

   نامعتبر $U=\{a,b\},\ (Aa\wedge Ba)\vee(Ab\wedge Bb), Ab \not\models Bb$

Aa	Ab	Ba	Bb
1	1	1	0

2. $U=\{a\},\ Ca\supset Da, Ea\supset Da \not\models Ca\supset Ea$

Ca	Da	Ea
1	1	0

3. معتبر $U=\{a\},\ Fa\wedge Ga, \sim Fa\wedge\sim Ga \models Ga\wedge\sim Fa$

   نامعتبر
$$U=\{a,b\},\ \begin{cases}(Fa\wedge Ga)\vee(Fb\wedge Gb)\\ (\sim F\wedge\sim Ga)\vee(\sim Fb\wedge\sim Gb)\\ \qquad\therefore(Ga\wedge\sim Fa)\vee(Gb\wedge\sim Fb)\end{cases}$$

Fa	Fb	Ga	Gb
1	0	1	0
0	1	0	1

4. $U=\{a\},\ Ha\supset(Ia\wedge Ja), Ka\wedge Ia, Ka\wedge\sim Ja \models Ha\supset\sim Ka$

$$U=\{a,b\},\ \begin{cases}[Ha\supset(Ia\wedge Ja)]\wedge[Hb\supset(Ib\wedge Jb)]\\ (Ka\wedge Ia)\vee(Kb\wedge Ib)\\ (Ka\wedge\sim Ja)\vee(Kb\wedge\sim Jb)\\ \qquad\therefore(Ha\supset\sim Ka)\wedge(Hb\supset\sim Kb)\end{cases}$$

Ha	Hb	Ia	Ib	Ja	Jb	Ka	Kb
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1

5. $U = \{a\}$, $La \supset (Ma \wedge Na), Oa \wedge Aa, Oa \wedge {\sim}Ba \vDash La \supset Oa$

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} [La \supset (Ma \wedge Na)] \wedge [Lb \supset (Mb \wedge Nb)] \\ (Oa \wedge Aa) \vee (Ob \wedge Ab) \\ (Oa \wedge {\sim}Ba) \vee (Ob \wedge {\sim}Bb) \\ \qquad \therefore (La \supset Oa) \wedge (Lb \supset Ob) \end{cases}$$

Aa	Ab	Ba	Bb	La	Lb	Ma	Mb	Na	Nb	Oa	Ob
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1

6. $U = \{a\}$, $Ca \wedge Da, Ca \supset Ea, Ea \wedge {\sim}Ca \vDash Ea \wedge {\sim}Da$

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} (Ca \wedge Da) \vee (Cb \wedge Db) \\ (Ca \supset Ea) \wedge (Cb \supset Eb) \\ (Ea \wedge {\sim}Ca) \vee (Eb \wedge {\sim}Cb) \\ \quad \therefore (Ea \wedge {\sim}Da) \vee (Eb \wedge {\sim}Db) \end{cases}$$

Ca	Cb	Da	Db	Ea	Eb
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1

7. $U = \{a\}$, $Fa \supset Ga, Ha \wedge Ga, Ha \wedge {\sim}Ga \vDash Fa \supset Ha$, معتبر

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} (Fa \supset Ga) \wedge (Fb \supset Gb) \\ (Ha \wedge Ga) \vee (Hb \wedge Gb) \\ (Ha \wedge {\sim}Ga) \vee (Hb \wedge {\sim}Gb) \\ \quad \therefore (Fa \supset Ha) \wedge (Fb \supset Hb) \end{cases}, \quad \text{معتبر}$$

$$U = \{a, b, c\}, \begin{cases} (Fa \supset Ga) \wedge (Fb \supset Gb) \wedge (Fc \supset Gc) \\ (Ha \wedge Ga) \vee (Hb \wedge Gb) \vee (Hc \wedge Gc) \\ (Ha \wedge {\sim}Ga) \vee (Hb \wedge {\sim}Gb) \vee (Hc \wedge {\sim}Gc) \\ \quad \therefore (Fa \supset Ha) \wedge (Fb \supset Hb) \wedge (Fc \supset Hc) \end{cases}$$

Fa	Fb	Fc	Ga	Gb	Gc	Ha	Hb	Hc
1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1	0

8. $U = \{a\}$, $Ia \supset (Ja \vee Ka), (Ja \vee Ka) \supset La \vDash Ia \supset La$

برای اینکه اشتباه نکنید، می‌توانید فرمول‌های دارای سورهای تودرتو را در چند مرحله بسط دهید. به صورتی که در هر مرحله فقط بیرونی‌ترین سورها را بسط دهید. به عنوان مثال این مورد را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$U = \{a, b\}$

$$\begin{cases} (\forall y)[Ia \supset (Jy \vee Ky)] \wedge (\forall y)[Ib \supset (Jy \vee Ky)] \\ \Big([(\forall y)Jy \vee (\forall z)Kz] \supset La\Big) \wedge \Big([(\forall y)Jy \vee (\forall z)Kz] \supset Lb\Big) \\ \qquad \therefore (\exists y)(Ia \supset Ly) \vee (\exists y)(Ib \supset Jy) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [Ia \supset (Ja \vee Ka)] \wedge [Ia \supset (Jb \vee Kb)] \\ [Ib \supset (Ja \vee Ka)] \wedge [Ib \supset (Jb \vee Kb)] \\ [(Ja \wedge Jb) \vee (Ka \wedge Kb)] \supset La \\ [(Ja \wedge Jb) \vee (Ka \wedge Kb)] \supset Lb \\ \qquad \therefore (Ia \supset La) \vee (Ia \supset Lb) \vee (Ib \supset Ja) \vee (Ib \supset Jb) \end{cases}$$

Ia	Ib	Ja	Jb	Ka	Kb	La	Lb
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0

9. $U = \{a\},\ Ma \supset Na, Na \supset Oa \vDash Ma \supset Oa$

$U = \{a, b\}$

$$\begin{cases} [(Ma \supset Na) \vee (Ma \supset Nb) \wedge [(Mb \supset Na) \vee (Mb \supset Nb)] \\ [(Na \supset Oa) \wedge (Na \supset Ob)] \vee [(Nb \supset Oa) \wedge (Nb \supset Ob)] \\ \qquad \therefore (Ma \wedge Mb) \supset (Oa \wedge Ob) \end{cases}$$

Ma	Mb	Na	Nb	Oa	Ob
1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0

10. $U = \{a\},\ Aa \supset Ba, Ba \wedge Ca \vDash Aa \supset Ca$

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} (Aa \supset Ba) \wedge (Ab \supset Bb) \\ (Ba \wedge Ca) \vee (Ba \wedge Cb) \vee (Bb \wedge Ca) \vee (Bb \wedge Cb) \\ \qquad \therefore (Aa \supset Ca) \wedge (Ab \supset Cb) \end{cases}$$

Aa	Ab	Ba	Bb	Ca	Cb
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1

11. $U = \{a\},\ Da \equiv Ea \vDash Da \equiv Ea$

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} [(Da \equiv Ea) \vee (Da \equiv Eb)] \wedge [(Db \equiv Ea) \vee (Db \equiv Eb)] \\ \quad\therefore [(Da \equiv Ea) \wedge (Db \equiv Ea)] \vee [(Da \equiv Eb) \wedge (Db \equiv Eb)] \end{cases}$$

Da	Db	Ea	Eb
1	0	1	0
0	1	0	1

12. $U = \{a\},\ Fa \supset (Ga \wedge Ha), (Ga \wedge Ha) \supset Ia \vDash Fa \supset Ia$

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} (Fa \wedge Fb) \supset [(Ga \vee Gb) \wedge (Ha \vee Hb)] \\ [(Ga \wedge Ha) \vee (Gb \wedge Hb)] \supset (Ia \wedge Ib) \\ \quad\therefore (Fa \wedge Fb) \supset (Ia \vee Ib) \end{cases}$$

Fa	Fb	Ga	Gb	Ha	Hb	Ia	Ib
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0

13. $U = \{a\},\ Ja \supset Ka, Ka \supset La \vDash Ja \supset La$

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} (Ja \supset Ka) \vee (Ja \supset Kb) \vee (Jb \supset Ka) \vee (Jb \supset Kb) \\ [(Ka \supset La) \wedge (Ka \supset Lb)] \vee [(Kb \supset La) \wedge (Kb \supset Lb)] \\ \quad\therefore (Ja \vee Jb) \supset (La \wedge Lb) \end{cases}$$

Ja	Jb	Ka	Kb	La	Lb
1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0

14. $U = \{a\}$, $Ma \supset (Na \wedge Oa), (Na \wedge Oa) \supset Aa \models Ma \supset Aa$

$U = \{a, b\}$,

$$\begin{cases} \Big[\Big(Ma \supset [Na \wedge (Oa \vee Ob)]\Big) \vee \Big(Ma \supset [Nb \wedge (Oa \vee Ob)]\Big)\Big] \vee \\ \Big[\Big(Mb \supset [Na \wedge (Oa \vee Ob)]\Big) \vee \Big(Mb \supset [Nb \wedge (Oa \vee Ob)]\Big)\Big] \\ \Big[[(Na \wedge Oa) \supset Aa] \wedge [(Na \wedge Oa) \supset Ab]\Big] \wedge \\ \Big[[(Nb \wedge Ob) \supset Aa] \wedge [(Nb \wedge Ob) \supset Ab]\Big] \\ \qquad \therefore [(Ma \supset Aa) \vee (Ma \supset Ab)] \wedge [(Mb \supset Aa) \vee (Mb \supset Ab)] \end{cases}$$

Aa	Ab	Ma	Mb	Na	Nb	Oa	Ob
0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0

15. $U = \{a\},\ Ba \supset Ca, Ca \supset (Da \wedge Ea \wedge Da \wedge {\sim}Ea) \vDash Ba \supset Da$

$$U = \{a, b\}, \begin{cases} (Ba \supset Ca) \wedge (Ba \supset Cb) \wedge (Bb \supset Ca) \wedge (Bb \supset Cb) \\ (Ca \wedge Cb) \supset \Big([(Da \wedge Ea) \vee (Db \wedge Eb)] \wedge \\ [(Da \wedge {\sim}Ea) \vee (Db \wedge {\sim}Eb)]\Big) \\ \qquad \therefore (Ba \supset Da) \wedge (Bb \supset Db) \end{cases}$$

$U = \{a, b, c\}$

$$\begin{cases} (Ba \supset Ca) \wedge (Ba \supset Cb) \wedge (Ba \supset Cc) \wedge (Bb \supset Ca) \wedge \\ (Bb \supset Cb) \wedge (Bb \supset Cc) \wedge (Bc \supset Ca) \wedge (Bc \supset Cb) \wedge (Bc \supset Cc) \\ (Ca \wedge Cb \wedge Cc) \supset \Big([(Da \wedge Ea) \vee (Db \wedge Eb) \vee (Dc \wedge Ec)] \wedge \\ [(Da \wedge {\sim}Ea) \vee (Db \wedge {\sim}Eb) \vee (Dc \wedge {\sim}Ec)]\Big) \\ \qquad \therefore (Ba \supset Da) \wedge (Bb \supset Db) \wedge (Bc \supset Dc) \end{cases}$$

Ba	Bb	Bc	Ca	Cb	Cc	Da	Db	Dc	Ea	Eb	Ec
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0

تمرین ۵.۷: مثال نقض صفحه ۱۴۸

با روش اسناد ارزش‌ها عدم اعتبار استدلال‌های زیر را در یک تعبیر متناهی نشان دهید:

1. $(\exists x)(\exists y)(Ax \wedge By \wedge Cxy), (\forall x)([Ax \wedge (\exists y)(Dy \wedge Cxy)] \supset (\exists z)(Bz \wedge Cxz)) \nvDash (\exists x)(\exists y)(Ax \wedge Dy \wedge Cxy)$

2. $(\exists x)(Exa \vee Fx) \vee Fa, Eba \nvDash Fa \vee Fb$

3. $(\forall x)[Mxa \supset (\exists y)(Cy \wedge Ixy)], \sim Mba \nvDash (\forall x)(Cx \supset \sim Ibx)$

∗∗4. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Axy \wedge Ayz) \supset Axz], (\forall x)(\exists y)Axy, (\forall x)Axx, (\forall x)(\forall y)(Axy \supset Ayx) \nvDash (\forall x)(\forall y)(Axy \supset Ayx)$

∗∗5. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Bxy \wedge Byz) \supset Bxz], (\forall x)Bxx, (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Bxz \wedge Byz) \nvDash (\forall x)(\forall y)(Bxy \vee Byx)$

پاسخ تمرین ۵.۷

1. $U = \{a\}, \begin{cases} Aa \wedge Ba \wedge Caa \\ [Aa \wedge (Da \wedge Caa)] \supset (Ba \wedge Caa) \\ \quad \therefore Da \wedge Caa \end{cases}$

Aa	Ba	Caa	Da
1	1	1	0

2. $U = \{a\}, Eaa \vee Fa \vee Fa, Eba \vDash Fa \vee Fb$

$U = \{a, b\},$

$\begin{cases} (Eaa \vee Fa) \vee (Eba \vee Fb) \vee Fa \\ Eba \\ \quad \therefore Fa \vee Fb \end{cases}$

Eaa	Eba	Fa	Fb
1	1	0	0
0	1	0	0

3. $U = \{a\}, \begin{cases} Maa \supset (Ca \wedge Iaa) \\ \sim Maa \\ \quad \therefore Ca \supset \sim Iaa \end{cases}$

Ca	Iaa	Maa
1	1	0

4. $U = \{a\}, (Aaa \wedge Aaa) \supset Aaa, Aaa \vDash Aaa \supset Aaa$

$U = \{a, b\},$

$$\begin{cases}[(Aaa \wedge Aaa) \supset Aaa] \wedge [(Aaa \wedge Aab) \supset Aab] \wedge \\ [(Aab \wedge Aba) \supset Aaa] \wedge [(Aab \wedge Abb) \supset Aab] \wedge \\ [(Aba \wedge Aaa) \supset Aba] \wedge [(Aba \wedge Aab) \supset Abb] \wedge \\ [(Aba \wedge Aaa) \supset Aba] \wedge [(Aba \wedge Aab) \supset Abb] \wedge \\ [(Abb \wedge Aba) \supset Aba] \wedge [(Abb \wedge Abb) \supset Abb] \\ (Aaa \vee Aab) \wedge (Aba \vee Abb) \\ Aaa \wedge Abb \\ \qquad \therefore (Aaa \supset Aaa) \wedge (Aab \supset Aba) \wedge (Aba \supset Aab) \wedge (Abb \supset Abb)\end{cases}$$

این استدلال را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{cases}[(Aab \wedge Aba) \supset Aaa] \wedge [(Aba \wedge Aab) \supset Abb] \\ (Aaa \vee Aab) \wedge (Aba \vee Abb) \\ Aaa \wedge Abb \\ \qquad \therefore (Aab \supset Aba) \wedge (Aba \supset Aab)\end{cases}$$

Aaa	Aab	Aba	Abb
1	1	0	1
1	0	1	1

5. $U = \{a\}$, $(Baa \wedge Baa) \supset Baa, Baa, Baa \wedge Baa \models Baa \vee Baa$

$U = \{a, b\}$,

$$\begin{cases}[(Baa \wedge Baa) \supset Baa] \wedge [(Baa \wedge Bab) \supset Bab] \wedge \\ [(Bab \wedge Bba) \supset Baa] \wedge [(Bab \wedge Bbb) \supset Bab] \wedge \\ [(Bba \wedge Baa) \supset Bba] \wedge [(Bba \wedge Bab) \supset Bbb] \wedge \\ [(Bba \wedge Baa) \supset Bba] \wedge [(Bba \wedge Bab) \supset Bbb] \wedge \\ [(Bbb \wedge Bba) \supset Bba] \wedge [(Bbb \wedge Bbb) \supset Bbb] \\ Baa \wedge Bbb \\ [(Baa \wedge Baa) \vee (Bab \wedge Baa)] \wedge [(Baa \wedge Bba) \vee (Bab \wedge Bbb)] \wedge \\ [(Bba \wedge Baa) \vee (Bbb \wedge Bab)] \wedge [(Bba \wedge Bba) \vee (Bbb \wedge Bbb)] \\ \qquad \therefore (Baa \vee Baa) \wedge (Bab \vee Bba) \wedge (Bba \vee Bab) \wedge (Bbb \vee Bbb)\end{cases}$$

این استدلال که معتبر است را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{cases}[(Bab \wedge Bba) \supset Baa] \wedge [(Bba \wedge Bab) \supset Bbb]\\ [(Bba \wedge Bab) \supset Bbb]\\ Baa \wedge Bbb\\ [Baa \vee (Bab \wedge Baa)] \wedge [(Baa \wedge Bba) \vee (Bab \wedge Bbb)]\\ [(Bba \wedge Baa) \vee (Bbb \wedge Bab)] \wedge (Bba \vee Bbb)\\ \qquad \therefore\ Baa \wedge (Bab \vee Bba) \wedge Bbb\end{cases}$$

$U = \{a, b, c\}$,

$$\begin{cases}[(Baa \wedge Baa) \supset Baa] \wedge [(Baa \wedge Bab) \supset Bab] \wedge [(Baa \wedge Bac) \supset Bac]\\ [(Bab \wedge Bba) \supset Baa] \wedge [(Bab \wedge Bbb) \supset Bab] \wedge [(Bab \wedge Bbc) \supset Bac]\\ [(Bac \wedge Bca) \supset Baa] \wedge [(Bac \wedge Bcb) \supset Bab] \wedge [(Bac \wedge Bcc) \supset Bac]\\ [(Bba \wedge Baa) \supset Bba] \wedge [(Bba \wedge Bab) \supset Bbb] \wedge [(Bba \wedge Bac) \supset Bbc]\\ [(Bbb \wedge Bba) \supset Bba] \wedge [(Bbb \wedge Bbb) \supset Bbb] \wedge [(Bbb \wedge Bbc) \supset Bbc]\\ [(Bbc \wedge Bca) \supset Bba] \wedge [(Bbc \wedge Bcb) \supset Bbb] \wedge [(Bbc \wedge Bcc) \supset Bbc]\\ [(Bca \wedge Baa) \supset Bca] \wedge [(Bca \wedge Bab) \supset Bcb] \wedge [(Bca \wedge Bac) \supset Bcc]\\ [(Bcb \wedge Bba) \supset Bca] \wedge [(Bcb \wedge Bbb) \supset Bcb] \wedge [(Bcb \wedge Bbc) \supset Bcc]\\ [(Bcc \wedge Bca) \supset Bca] \wedge [(Bcc \wedge Bcb) \supset Bcb] \wedge [(Bcc \wedge Bcc) \supset Bcc]\\ Baa \wedge Bbb \wedge Bcc\\ (Baa \wedge Baa) \vee (Bab \wedge Bab) \vee (Bac \wedge Bac)\\ (Baa \wedge Bba) \vee (Bab \wedge Bbb) \vee (Bac \wedge Bbc)\\ (Baa \wedge Bca) \vee (Bab \wedge Bcb) \vee (Bac \wedge Bcc)\\ (Bba \wedge Baa) \vee (Bbb \wedge Bab) \vee (Bbc \wedge Bac)\\ (Bba \wedge Bba) \vee (Bbb \wedge Bbb) \vee (Bbc \wedge Bbc)\\ (Bba \wedge Bca) \vee (Bbb \wedge Bcb) \vee (Bbc \wedge Bcc)\\ (Bca \wedge Baa) \vee (Bcb \wedge Bab) \vee (Bcc \wedge Bac)\\ (Bca \wedge Bba) \vee (Bcb \wedge Bbb) \vee (Bcc \wedge Bbc)\\ (Bca \wedge Bca) \vee (Bcb \wedge Bcb) \vee (Bcc \wedge Bcc)\\ \qquad \therefore\ (Baa \vee Baa) \wedge (Bab \vee Bba) \wedge (Bac \vee Bca) \wedge\\ (Bba \vee Bab) \wedge (Bbb \vee Bbb) \wedge (Bbc \vee Bcb) \wedge\\ (Bca \vee Bac) \wedge (Bcb \vee Bbc) \wedge (Bcc \vee Bcc)\end{cases}$$

این استدلال که نامعتبر است را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$
\begin{cases}
[(Bab \wedge Bba) \supset Baa] \wedge [(Bab \wedge Bbc) \supset Bac] \\
[(Bac \wedge Bca) \supset Baa] \wedge [(Bac \wedge Bcb) \supset Bab] \\
[(Bba \wedge Bab) \supset Bbb] \wedge [(Bba \wedge Bac) \supset Bbc] \\
[(Bbc \wedge Bca) \supset Bba] \wedge [(Bbc \wedge Bcb) \supset Bbb] \\
[(Bca \wedge Bab) \supset Bcb] \wedge [(Bca \wedge Bac) \supset Bcc] \\
[(Bcb \wedge Bba) \supset Bca] \wedge [(Bcb \wedge Bbc) \supset Bcc] \\
Baa \wedge Bbb \wedge Bcc \\
Baa \vee Bab \vee Bac \\
(Baa \wedge Bba) \vee (Bab \wedge Bbb) \vee (Bac \wedge Bbc) \\
(Baa \wedge Bca) \vee (Bab \wedge Bcb) \vee (Bac \wedge Bcc) \\
(Bba \wedge Baa) \vee (Bbb \wedge Bab) \vee (Bbc \wedge Bac) \\
Bba \vee Bbb \vee Bbc \\
(Bba \wedge Bca) \vee (Bbb \wedge Bcb) \vee (Bbc \wedge Bcc) \\
(Bca \wedge Baa) \vee (Bcb \wedge Bab) \vee (Bcc \wedge Bac) \\
(Bca \wedge Bba) \vee (Bcb \wedge Bbb) \vee (Bcc \wedge Bbc) \\
Bca \vee Bcb \vee Bcc \\
\qquad \therefore Baa \wedge (Bab \vee Bba) \wedge (Bac \vee Bca) \wedge (Bba \vee Bab) \wedge Bbb \wedge \\
(Bbc \vee Bcb) \wedge (Bca \vee Bac) \wedge (Bcb \vee Bbc) \wedge Bcc
\end{cases}
$$

Baa	Bab	Bac	Bba	Bbb	Bbc	Bca	Bcb	Bcc
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1

۶.۷ معناشناسی منطق محمولات و اینهمانی

$$(\mathrm{RS}_{10}) \qquad \vDash_I \beta_1 = \beta_2 \Longleftrightarrow V(\beta_1) = V(\beta_2)$$

فصل ۸

فرانظریه منطق محمولات

۱.۸ فراقضیه بهنجاری (صحت)

تمرین ۱.۸: فراقضیه صحت **صفحه ۱۵۴**

گام استقراء را برای قاعده «م∃» اثبات کنید.

پاسخ تمرین ۱.۸

ساختار نحوی قاعده «م∃» به صورت زیر است:

$$\begin{array}{llll} \Sigma & n: & \varphi_\beta & \qquad \Sigma \vdash \varphi_\beta \\ & \vdots & & \\ \Sigma & n+m: & (\exists\alpha)\varphi_\alpha \quad \text{(م}\exists\text{)، m} & \qquad \Sigma \vdash (\exists\alpha)\varphi_\alpha \end{array}$$

فرض استقراء: $\Sigma \vdash \varphi_\beta \implies \Sigma \models \varphi_\beta$

حکم استقراء: $\Sigma \vdash (\exists\alpha)\varphi_\alpha \implies \Sigma \models (\exists\alpha)\varphi_\alpha$

۱. طبق فرض استقراء و سطر n: $\Sigma \models \varphi_\beta$

۲. فرض کنید: $\Sigma \vdash (\exists\alpha)\varphi_\alpha$

۳. فرض کنید: $\forall\psi \in \Sigma\colon \models_I \psi$

۴. طبق (۱) و (۳): $\models_I \varphi_\beta$

۵. طبق (۴) و تعریف D: $\exists o \in D\ (V(\beta) = o \;\&\; \models_I \varphi_\beta)$

۶. طبق (۵) و (RS_9):	$\models_I (\exists\alpha)\varphi_\alpha$
۷. طبق (۳) تا (۶):	$\Sigma \models (\exists\alpha)\varphi_\alpha$
۸. طبق (۲) تا (۷):	$\Sigma \vdash (\exists\alpha)\varphi_\alpha \implies \Sigma \models (\exists\alpha)\varphi_\alpha$

۲.۸ فراقضیه تمامیت

فرض کنید $\mathbf{L}$ یک بسط از «منطق گزاره‌های کلاسیک» $(\mathbf{CL})$ باشد. یعنی:

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{CL}} \varphi \implies \Sigma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$$

به عنوان مثال $\mathbf{L}$ می‌تواند «منطق محمولات مرتبه اول کلاسیک» (یعنی همین منطق معرفی شده در فصل‌های ۵ و ۶) یا «منطق موجهات» باشد.

طرح کلی اثبات فراقضیه تمامیت برای $\mathbf{L}$ به صورت زیر است:

$$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \varphi \implies \Sigma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$$

1. $\Sigma \not\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$	فرض
2. $\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \not\vdash_{\mathbf{L}} P \wedge \sim P$	قواعد منطق گزاره‌ها
3. $\exists I, \forall\psi \in \Sigma \cup \{\sim\varphi\}: \models_I \psi$	**لم وجود مدل**
(یعنی مجموعه‌ی $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ مدل دارد.)	
4. $\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \varphi$	قواعد معنایی $\mathbf{CL}$ و تعریف استدلال معتبر

بنابراین برای اثبات فراقضیه‌ی تمامیت هر منطقی که شامل $\mathbf{CL}$ (یا به عبارتی دیگر بر مبنای $\mathbf{CL}$) باشد، تنها کافی است که لم زیر ثابت شود:

لم وجود مدل: هر مجموعه‌ی سازگار مدل دارد.

این لم دقیقاً همان «مرحله‌ي سوم» در صفحه ۱۵۶ کتاب است که به زبان دیگری بیان شده است:

مرحله‌ی سوم: هر مجموعه‌ی برهانی سازگار، معنایی سازگار است.

$$\Sigma \not\vdash_{\mathbf{L}} P \wedge \sim P \implies \exists I, \forall\varphi \in \Sigma: \models_I \varphi$$

۱. فرض کنید که Σ یک مجموعه‌ی سازگار باشد.

۲. **مرحله‌ی اول (لم استانداردسازی)**

زیرمجموعه‌ای از فرمول‌ها مثل Δ وجود دارد به طوری که:

(آ) $\Sigma \subseteq \Delta$

(ب) Δ یک مجموعه‌ی برهانی سازگار پر است. (منطق گزاره‌ها)

(ج) Δ یک مجموعه‌ی «ωـ کامل» است. (خاص منطق محمولات)

۳. مدل (تعبیر) $I = \langle D, V \rangle$ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که:
V به هر جمله‌نشانه φ ارزش T را اسناد می‌دهد اگر و تنها اگر $\varphi \in \Delta$.

۴. **مرحله‌ی دوم (لم صدق)**

$$\forall \varphi \in \Delta \colon I(\varphi) = T$$

۵.
$$\forall \varphi \in \Sigma \colon \models_I \varphi$$

«لم صدق» به سادگی توسط استقراء اثبات می‌شود و چالش فنی خاصی ندارد. اما چالش‌برانگیزترین مرحله‌ی اثبات فراقضیه تمامیت «لم استانداردسازی» است که به خلاقیت و دانش ریاضیاتی زیادی در این حوزه نیاز دارد.

این روش مشابهاً در اثبات فراقضیه تمامیت در منطق موجهات نیز به کار می‌رود. رجوع کنید به فصل ۴ کتاب «مبانی منطق موجهات» دکتر نبوی.

تمرین ۲.۸: فراقضیه تمامیت — **صفحه ۱۵۸**

بر اساس

$$\varphi \in \Delta \iff {\sim}\varphi \notin \Delta \quad (۱.۸)$$

$$\varphi \in \Delta \iff \Delta \vdash \varphi \quad (۲.۸)$$

ثابت کنید که

$$\varphi \vee \psi \in \Delta \iff \varphi \in \Delta \text{ یا } \psi \in \Delta \quad (۳.۸)$$

$$\varphi \supset \psi \in \Delta \iff \varphi \notin \Delta \text{ یا } \psi \in \Delta \quad (۴.۸)$$

$$\varphi \equiv \psi \in \Delta \iff \varphi, \psi \in \Delta \text{ یا } \varphi, \psi \notin \Delta \quad (۵.۸)$$

پاسخ تمرین ۲.۸

$$\varphi \vee \psi \in \Delta \text{ و } \varphi \notin \Delta \xRightarrow{(۱.۸)} \varphi \vee \psi \in \Delta \text{ و } {\sim}\varphi \in \Delta$$

$$\xRightarrow{(۲.۸)} \Delta \vdash \varphi \vee \psi \text{ و } \Delta \vdash {\sim}\varphi$$

$$\xRightarrow{\text{قیاس انفصالی}} \Delta \vdash \psi \xRightarrow{(۲.۸)} \psi \in \Delta$$

$$\varphi \in \Delta \xRightarrow{(۲.۸)} \Delta \vdash \varphi \xRightarrow{\text{معرفی فصل}} \Delta \vdash \varphi \vee \psi \xRightarrow{(۲.۸)} \varphi \vee \psi \in \Delta$$

$$\psi \in \Delta \xRightarrow{(۲.۸)} \Delta \vdash \psi \xRightarrow{\text{معرفی فصل}} \Delta \vdash \varphi \vee \psi \xRightarrow{(۲.۸)} \varphi \vee \psi \in \Delta$$

$$\varphi \supset \psi \in \Delta \overset{(۲.۸)}{\Longleftrightarrow} \Delta \vdash \varphi \supset \psi \overset{\text{استلزام}}{\Longleftrightarrow} \Delta \vdash \sim\varphi \vee \psi$$
$$\overset{(۳.۸)}{\Longleftrightarrow} \sim\varphi \in \Delta \text{ یا } \psi \in \Delta \overset{(۱.۸)}{\Longleftrightarrow} \varphi \notin \Delta \text{ یا } \psi \in \Delta$$

$$\varphi \equiv \psi \in \Delta \overset{(۲.۸)}{\Longleftrightarrow} \Delta \vdash \varphi \equiv \psi \overset{\text{تعادل}}{\Longleftrightarrow} \Delta \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\sim\varphi \wedge \sim\psi)$$
$$\overset{(۳.۸)}{\Longleftrightarrow} \varphi \wedge \psi \in \Delta \text{ یا } \sim\varphi \wedge \sim\psi \in \Delta$$
$$\overset{(۲.۸)}{\Longleftrightarrow} \Delta \vdash \varphi \wedge \psi \text{ یا } \Delta \vdash \sim\varphi \wedge \sim\psi$$
$$\overset{\text{معرفی و حذف عطف}}{\Longleftrightarrow} (\Delta \vdash \psi \text{ و } \Delta \vdash \psi) \text{ یا } (\Delta \vdash \sim\varphi \text{ و } \Delta \vdash \sim\psi)$$
$$\overset{(۲.۸)}{\Longleftrightarrow} \varphi, \psi \in \Delta \text{ یا } \sim\varphi, \sim\psi \in \Delta$$
$$\overset{(۱.۸)}{\Longleftrightarrow} \varphi, \psi \in \Delta \text{ یا } \varphi, \psi \notin \Delta$$

$$(\forall\alpha)\varphi_\alpha \in \Delta \iff \forall\beta{:}\, \varphi_\beta \in \Delta \qquad (۶.۸)$$

تمرین ۳.۸: فراقضیه تمامیت — **صفحه ۱۵۹**

ثابت کنید که:

$$(\exists\alpha)\varphi_\alpha \in \Delta \iff \exists\beta{:}\, \varphi_\beta \in \Delta \qquad (۷.۸)$$

پاسخ تمرین ۳.۸

$$(\exists\alpha)\varphi_\alpha \in \Delta \overset{(۱.۸)}{\Longleftrightarrow} \sim(\exists\alpha)\varphi_\alpha \notin \Delta \overset{\text{نقض سور}}{\Longleftrightarrow} (\forall\alpha)\sim\varphi_\alpha \notin \Delta$$
$$\overset{(۶.۸)}{\Longleftrightarrow} \exists\beta{:}\, \sim\varphi_\beta \notin \Delta \overset{(۱.۸)}{\Longleftrightarrow} \exists\beta{:}\, \varphi_\beta \in \Delta$$

تمرین ۴.۸: فراقضیه تمامیت — **صفحه ۱۶۷**

فرض استقراء را برای حالات زیر ثابت کنید:

ج) $\varphi = \psi \vee \theta$ د) $\varphi = \psi \supset \theta$ ه) $\varphi = \psi \equiv \theta$

پاسخ تمرین ۴.۸

$\models_I \psi \vee \theta$	$\iff$	$\models_I \psi$ یا $\models_I \theta$	بنابر (RS_5)
	$\iff$	$\psi \in \Delta$ یا $\theta \in \Delta$	بنابر فرض استقراء
	$\iff$	$\psi \vee \theta \in \Delta$	بنابر (۳.۸)
$\models_I \psi \supset \theta$	$\iff$	$\not\models_I \psi$ یا $\models_I \theta$	بنابر (RS_6)
	$\iff$	$\psi \notin \Delta$ یا $\theta \in \Delta$	بنابر فرض استقراء
	$\iff$	$\psi \supset \theta \in \Delta$	بنابر (۴.۸)
$\models_I \psi \equiv \theta$	$\iff$	$(\models_I \psi$ و $\models_I \theta)$ یا $(\not\models_I \psi$ و $\not\models_I \theta)$	بنابر (RS_7)
	$\iff$	$\psi, \theta \in \Delta$ یا $\psi, \theta \notin \Delta$	بنابر فرض استقراء
	$\iff$	$\psi \equiv \theta \in \Delta$	بنابر (۵.۸)

Logic Circle

Keys to Solution in
The Elements of Modern Logic

Amer Amikhteh
Tarbiat Modares University
amer.amikhteh@modares.ac.ir

Product Page:
logiccircle.ir/?p=22763

June 21, 2023
Version 15