فصل چهارم :

تبدیل لاپلاس

مونا نژند فومنی

تعریف:

فرض کنید $f(x)$ برای x های بزرگتر از صفر تعریف شده باشد و s نمایشگر یک متغیر حقیقی دلخواه باشد. در این صورت تبدیل لاپلاس $f(x)$ عبارت است از

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

در صورت وجود و همگرا بودن انتگرال فوق، $f(x)$ را لاپلاس پذیر می‌نامیم.

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ و تابع $f(x)$ را تبدیل وارون $F(s)$ می‌نامیم و داریم

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(x)$$

همگرایی تبدیلات:

همه توابع دارای لاپلاس نمی‌باشند. در اینجا شرایط کافی برای وجود تبدیل لاپلاس را ذکر می‌کنیم.

تعریف۱:

تابع $f(x)$ را بر بازه $[a, b]$ قطعه‌ای پیوسته می‌نامیم هرگاه در این بازه دارای حداکثر متناهی نقطه ناپیوستگی بوده و در نقاط ناپیوستگی دارای حد چپ و راست متناهی باشد و آن را بر بازه $[0, \infty)$ قطعه‌ای پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر $x_0 > 0$ در بازه $[0, x_0]$ قطعه‌ای پیوسته باشد.

تابع جزء صحیح به طور قطعه‌ای پیوسته است.

تعریف۲:

تابع $f(x)$ را بر بازه $[0, \infty)$ از مرتبه نمایی می‌نامیم هرگاه $\alpha > 0$ موجود باشد ، به طوری‌که

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^{\alpha x}} = 0$$

توابع چند جمله ای و توابع کراندار از مرتبه نمایی هستند.

قضیه:

اگر $f(x)$ بر بازه $[0, \infty)$ قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، تبدیل لاپلاس آن موجود است و

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$$

تذکر:

شرایط مذکور شرایط لازم برای وجود تبدیل لاپلاس نمی‌باشند.

مثلا لاپلاس $x^{-\frac{1}{2}}$ و $\frac{1-\cos x}{x}$ وجود دارد اما در شرایط بالا صدق نمی‌کنند.

نکته:

تبدیل لاپلاس و وارون آن خاصیت خطی دارند یعنی

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(x)] + \cdots + c_n \mathcal{L}[f_n(x)]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + \cdots + c_n F_n(s)] = c_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \cdots + c_n \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$

مثال:

تبدیل لاپلاس توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

$$1.\ f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2 & x \ge 1 \end{cases}$$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^1 e^{-sx} x\, dx + \int_1^\infty e^{-sx} 2\, dx$$

$$= -\frac{x}{s} e^{-sx} - \frac{1}{s^2} e^{-sx} \Big|_0^1 - \frac{2}{s} e^{-sx} \Big|_1^\infty$$

$$= (-\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2}) - \frac{2}{s}(e^{-\infty} - e^{-s})\,; \quad s > 0$$

$$= \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2}\ ; \quad s > 0$$

$$2.\ \mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax}\, dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}\, dx = \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)x} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{s-a}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{s-a}\ ; \quad s > a$$

فرمولهای مقدماتی تبدیل لاپلاس:

1. $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}\ , \qquad s > 0$

2. $\mathcal{L}[e^{ax}] = \dfrac{1}{s-a}\ , \qquad s > a$

3. $\mathcal{L}[x^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ , \qquad s > 0$

4. $\mathcal{L}[x^\alpha] = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\ , \qquad \alpha \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}\ , \qquad s > 0$

5. $\mathcal{L}[\sin ax] = \dfrac{a}{s^2+a^2}\ , \qquad s > a$

6 . $\mathcal{L}[\cos ax] = \dfrac{s}{s^2+a^2}\ , \qquad s > a$

7. $\mathcal{L}[\sinh ax] = \dfrac{a}{s^2-a^2}\ , \qquad s > |a|$

8. $\mathcal{L}[\cosh ax] = \dfrac{s}{s^2-a^2}\ , \qquad s > |a|$

9. $\mathcal{L}[J_0(ax)] = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\ , \qquad s > 0$

مثال:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

1. $\mathcal{L}[\cos^2 ax] = \mathcal{L}\left[\dfrac{\cos 2ax + 1}{2}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\mathcal{L}[\cos 2ax] + \mathcal{L}[1]\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s^2+4a^2} + \dfrac{1}{s}\right)$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right] = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}\right] = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}}$

$\alpha + 1 = \dfrac{3}{2} \ \rightarrow\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right] = \mathrm{I}$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{(A+B)s^2 + Cs + 4A}{s(s^2+4)} \longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \longrightarrow B = -\frac{1}{4} \\ C = 0 \\ 4A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\mathrm{I} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s} - \frac{\frac{1}{4}s}{s^2+4}\right] = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)$$

تمرین:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

1. $\mathcal{L}[\sin^2 ax]$
2. $\mathcal{L}[\sin x \cos 2x]$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4-1}\right]$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2-s-6}\right]$

تابع پله‌ای واحد:

تابع با ضابطه $u_a(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < a \\ 1 & x \ge a \end{cases}$ تابع پله‌ای واحد یا تابع واحد هوی ساید نامیده می‌شود.

$$\mathcal{L}\,[u_a(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}\,u_a(x)\,dx = \int_0^a e^{-sx}\,(0)\,dx + \int_a^\infty e^{-sx}\,(1)\,dx$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_a^\infty = -\frac{1}{s}(e^{-\infty} - e^{-as}) = \frac{e^{-as}}{s} \quad , \quad s > 0$$

نمادهای دیگر:

$$u(x-a), \qquad \mathrm{H}_a(x), \qquad \mathrm{H}(x-a)$$

نکته۱:

$$u_a(x)\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < a \\ \mathrm{f}(x) & x \ge a \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\,[u_a(x)\mathrm{f}(x)] = e^{-as}\,\mathcal{L}\,[\mathrm{f}(x+a)]$$

و در فرم وارون اگر $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = \mathrm{f}(x)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\mathrm{F}(s)] = u_a(x)\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)]_{x\to x-a} = u_a(x)\mathrm{f}(x-a)$$

قضیه دوم انتقال

نکته۲:

می توان تابع چند ضابطه ای $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \mathrm{f}_0(x) & 0 \le x < a_1 \\ \mathrm{f}_1(x) & a_1 \le x < a_2 \\ \mathrm{f}_2(x) & a_2 \le x < a_3 \end{cases}$ را به صورت یک تابع یک ضابطه ای

برحسب توابع پله‌ای واحد نوشت:

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}_0(x) + (\mathrm{f}_1(x) - \mathrm{f}_0(x))u_{a_1}(x) + (\mathrm{f}_2(x) - \mathrm{f}_1(x))u_{a_2}(x)$$

مثال:

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

1. $\mathcal{L}\left[u_{\frac{\pi}{4}}(x)\sin x\right]= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right]$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\mathcal{L}\left[sin\ x\right]+\ \mathcal{L}[cos\ x]\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}\right)$$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^3}\right]=u_1(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]_{x\to x-1}=\frac{1}{2!}u_1(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{s^3}\right]_{x\to x-1}$

$$=\frac{1}{2}u_1(x)(x-1)^2$$

3. $\mathrm{f}(x)=\begin{cases}sin\ x & 0\le x<\pi\\ sin\ x+cos\ x & x\ge\pi\end{cases}\qquad \mathcal{L}[\mathrm{f}]=?$

$$\mathrm{f}(x)=sin\ x+(sin\ x+cos\ x-sin\ x)\ u_\pi(x)=sin\ x+u_\pi(x)\ cos\ x$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]=\mathcal{L}[sin\ x]+\mathcal{L}[u_\pi(x)\ cos\ x]=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\mathcal{L}[cos(x+\pi)]$$

$$=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\mathcal{L}[-cos\ x]=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

تمرین:

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2-1}\right]$

2. $\mathrm{f}(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ x^2-2x+2 & x\ge 1\end{cases}\qquad \mathcal{L}[\mathrm{f}]=?$

تابع دلتای دیراک:

فرض کنید داشته باشیم

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & a < x < a+h \\ 0 & \text{بقیه جا ها} \end{cases}$$

سطح زیر نمودار این تابع یک است. اگر فاصله زمانی h خیلی کوچک شود، باید اندازه تابع بسیار بزرگ گردد تا حاصل ضرب مقدار تابع در زمان h (سطح زیر نمودار) یک باقی بماند.

در چنین وضعیتی $f_h(x)$ به تابع ضربه واحد یا تابع دیراک تبدیل می‌شود که به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$\delta_a(x) = \delta(x-a) = \lim_{h\to 0} f_h(x) = \begin{cases} \infty & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

خواص تابع دلتای دیراک:

$$1. \int \delta_a(x)\, f(x) dx = \begin{cases} f(a) & \text{در هر فاصله که شامل } x = a \text{ شود} \\ 0 & \text{در هر فاصله که شامل } x = a \text{ نشود} \end{cases}$$

خاصیت بالا را خاصیت غربالی تابع دیراک می گوییم.

$$2.\ u'_a(x) = \delta_a(x)$$

$$3. \int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = u(x)$$

$$4. \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x) \qquad , a \neq 0$$

نکته:

با توجه به فرمول تبدیل لاپلاس و خاصیت غربالی تابع دیراک و با شرط $a > 0$ داریم:

$$\mathcal{L}[f(x)\delta_a(x)] = \int_0^\infty \underbrace{e^{-sx} f(x)}_{g(x)}\, \delta_a(x)\, dx = g(a) = e^{-as} f(a)$$

$$\xrightarrow{f(x)=1} \quad \mathcal{L}[\delta_a(x)] = e^{-as}$$

$$\xrightarrow{f(x)=1\ ,a=0} \quad \mathcal{L}[\delta(x)] = 1$$

مثال:

حاصل لاپلاس $\mathcal{L}\left[u_{\frac{\pi}{2}}(x)\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ را بیابید.

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{u_{\frac{\pi}{2}}}_{a}(x)\,\underbrace{\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}_{f(x)}\right]=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\left[\delta\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]=e^{-\frac{\pi}{2}s}\times 1=e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

و یا می توان از روش زیر استفاده کرد.

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{u_{\frac{\pi}{2}}(x)}_{f(x)}\,\delta\left(x-\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{a}\right)\right]=e^{-\frac{\pi}{2}s}u_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\times 1=e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$u_{\frac{\pi}{2}}(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

تمرین:

با استفاده از تابع $f_h(x)$ مقدار لاپلاس تابع $\delta_a(x)$ را محاسبه کنید.

قضایای تبدیل لاپلاس

۱. قضیه اول انتقال:

اگر $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = \mathrm{F}(s)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{bx}\mathrm{f}(x)] = \int_0^\infty \underbrace{\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{e}^{bx}}_{\mathrm{e}^{-(s-b)x}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]_{s\to s-b} = \mathrm{F}(s-b)$$

و در فرم وارون اگر $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = \mathrm{f}(x)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s-b)] = \mathrm{e}^{bx}\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = \mathrm{e}^{bx}\mathrm{f}(x)$$

از قضیه اول انتقال نتایج زیر به‌دست می‌آید:

1. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}\right] = \dfrac{1}{\mathrm{s}-\mathrm{b}}$

2. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}x^{\mathrm{n}}\right] = \dfrac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^{\mathrm{n}+1}}\,, \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$

3. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}x^{\alpha}\right] = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^{\alpha+1}}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R} - \{0,-1,-2,\dots\}$

4. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}\sin ax\right] = \dfrac{a}{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^2 + a^2}$

5 . $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}\cos ax\right] = \dfrac{\mathrm{s}-\mathrm{b}}{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^2 + a^2}$

6. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}\sinh ax\right] = \dfrac{a}{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^2 - a^2}$

7. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}\cosh ax\right] = \dfrac{\mathrm{s}-\mathrm{b}}{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^2 - a^2}$

8. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{b}x}\mathrm{J}_0(ax)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{b})^2 + a^2}}$

مثال:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\underbrace{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}_{S}+\frac{3}{4}}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$b=-\frac{1}{2}$$

$$2.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{\underbrace{(s-1)^4}_{S}}\right]=\mathrm{e}^{x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\overbrace{(S+1)^2}^{S^2+2S+1}}{S^4}\right]=\mathrm{e}^{x}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{S^3}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S^4}\right]\right)$$

$$b=1$$

$$=\mathrm{e}^{x}\left(x+x^2+\frac{1}{3!}x^3\right)$$

$$3.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2(s-1)}}{\underbrace{(s-1)^3}_{S}-(s-1)}\right]=\mathrm{e}^{x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2S}}{S^3-S}\right]=\mathrm{e}^{x}\,u_2(x)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S^3-S}\right]_{x\to x-2}=\mathrm{I}$$

$$b=1$$

$$\frac{1}{S(S^2-1)}=\frac{A}{S}+\frac{BS+C}{S^2-1}=\frac{(a+B)S^2+CS-A}{S(S^2-1)}\longrightarrow\begin{cases}A+B=0\longrightarrow B=1\\ C=0\\ -A=1\longrightarrow A=-1\end{cases}$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{e}^{x}\,u_2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{S}+\frac{S}{S^2-1}\right]_{x\to x-2}=\mathrm{e}^{x}\,u_2(x)(-1+\cosh(x-2))$$

$$4.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{s+3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\underbrace{(s+3)}_{S}^{-\frac{1}{2}}}\right] = e^{-3x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S^{-\frac{1}{2}}}\right] = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}e^{-3x}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$b=-3$$

تمرین:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

1. $\mathcal{L}[e^{-2x}J_0(2x)]$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right]$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3+1}\right]$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^3+5s^2+2s-10}{s^2(s^2+4s+5)}\right]$

۲. قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس:

اگر $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = \mathrm{F}(s)$ باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{s}x}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$$

اگر از طرفین رابطه بالا نسبت به s مشتق nام بگیریم، داریم

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{s}x}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty (-x)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{s}x}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \mathcal{L}[(-x)^n\mathrm{f}(x)]$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}[x^n\mathrm{f}(x)] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathrm{F}(s)$$

و در فرم وارون اگر $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = \mathrm{f}(x)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n}\mathrm{F}(s)\right] = (-1)^n x^n\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = (-x)^n\mathrm{f}(x)$$

از قضیه مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس نتایج زیر به‌دست می‌آید:

1. $\mathcal{L}[x^n\mathrm{e}^{ax}] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\underbrace{\mathcal{L}[\mathrm{e}^{ax}]}_{\frac{1}{\mathrm{s}-a}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{s}-a)^{\mathrm{n}+1}}$

2. $\mathcal{L}[x\sin ax] = \frac{2as}{(\mathrm{s}^2+a^2)^2}$

3 . $\mathcal{L}[x\cos ax] = \frac{\mathrm{s}^2-a^2}{(\mathrm{s}^2+a^2)^2}$

4. $\mathcal{L}[x\sinh ax] = \frac{2as}{(\mathrm{s}^2-a^2)^2}$

5. $\mathcal{L}[x\cosh ax] = \frac{\mathrm{s}^2+a^2}{(\mathrm{s}^2-a^2)^2}$

6. $\mathcal{L}[x\,\mathrm{J}_0(ax)] = \frac{\mathrm{s}}{(\mathrm{s}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

مثال:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \mathcal{L}\left[u_{2\pi}(t)\,\underbrace{(t-2\pi)\,\mathrm{e}^{t-\pi}\sin t}_{f(t)}\right]=\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{e}^{-2\pi s}\mathcal{L}[(t+2\pi-2\pi)\mathrm{e}^{t+2\pi-\pi}\sin(t+2\pi)]=\mathrm{e}^{-2\pi s}\mathrm{e}^{\pi}\mathcal{L}\left[t\,\underbrace{\mathrm{e}^{t}\sin t}_{g(t)}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه مشتق لاپلاس}}\quad \mathrm{I}=\mathrm{e}^{-2\pi s+\pi}(-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{t}\sin t]$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه اول انتقال}}\quad \mathrm{I}=-\mathrm{e}^{-2\pi s+\pi}\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin t]_{s\to s-1}$$

$$\mathrm{I}=-\mathrm{e}^{-2\pi s+\pi}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\mathrm{s}^2+1})_{s\to s-1}=\mathrm{e}^{-2\pi s+\pi}\,\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}$$

$$2.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{s}^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a^2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\overbrace{2a^2}^{a^2+a^2}\ +\mathrm{s}^2-\mathrm{s}^2}{(\mathrm{s}^2+a^2)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2a^2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a^2+s^2}{(s^2+a^2)^2}-\frac{\mathrm{s}^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2a^2}(\frac{1}{a}\sin ax-x\cos ax)$$

نکته:

هرگاه محاسبه $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)]$ مشکل ولی محاسبه $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}'(s)]$ ساده‌تر باشد، برای محاسبه $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}'(s)]$$

معمولا زمانی که $\mathrm{F}(s)$ برابر با توابع $\tan^{-1} u(s)$، $\cot^{-1} u(s)$ و $\ln u(s)$ باشد، از این نکته استفاده می‌کنیم.

مثال:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s}{(s-1)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}[\ln s - \ln(s-1) - \ln(s-2)]$$
$$= -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}\right] = -\frac{1}{x}(1 - \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x})$$

$$2.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\cot^{-1}\frac{1}{s+4}\right] = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{\left(\frac{1}{s+4}\right)'}{\left(\frac{1}{s+4}\right)^2+1}\right] = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\Big(\underbrace{s+4}_{\mathrm{S}}\Big)^2}\right]$$

$$b = -4$$

$$= -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-4x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S^2+1}\right] = -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-4x}\sin x$$

$$3.\ \mathcal{L}^{-1}[\sqrt{\mathrm{s}+3}] = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\underbrace{\sqrt{\mathrm{s}+3}}_{(s+3)^{\frac{1}{2}}}}\right] = -\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-3x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}}\right] = -\frac{1}{2x\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\mathrm{e}^{-3x}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$b = -3$$

تمرین۱:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

1. $\mathcal{L}\left[u_{2\pi}(x)(x-2\pi)\, \mathrm{e}^{x-\pi}\sqrt[3]{(x-2\pi)^2}\right]$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{(\mathrm{s}^2+a^2)^2}\right]$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{(s+1)^2}\right)\right]$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\dfrac{\sqrt{s+1}}{s^2+4s+5}\right]$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\sqrt[3]{\dfrac{s(s+1)}{\mathrm{s}^2+1}}\right]$

6. $\mathcal{L}^{-1}\left[\tan^{-1}\dfrac{1}{2s+5}\right]$

7. $\mathcal{L}^{-1}[e^{-s}\cot^{-1}(s+1)]$

تمرین۲:

ابتدا لاپلاس $[x]$ را به‌دست آورده، سپس مقدار $\mathcal{L}[x[x]]$ را تعیین نمایید. ($[x]$ تابع جزصحیح می‌باشد.)

۳. قضیه انتگرل‌گیری از تبدیل لاپلاس:

اگر $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]=\mathrm{F}(s)$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{f}(x)}{x}$ موجود باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{f}(x)}{x}\right]=\int_{s}^{\infty}\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]\,\mathrm{d}s=\int_{s}^{\infty}\mathrm{F}(s)\,\mathrm{d}s$$

و

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{f}(x)}{x^n}\right]=\int_{s}^{\infty}\cdots\int_{s}^{\infty}\mathrm{F}(s)\,(\mathrm{d}s)^n$$

و در فرم وارون اگر $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)]=\mathrm{f}(x)$ باشد ، آنگاه داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_{s}^{\infty}\mathrm{F}(s)\,\mathrm{d}s\right]=\frac{\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)]}{x}=\frac{\mathrm{f}(x)}{x}$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_{s}^{\infty}\cdots\int_{s}^{\infty}\mathrm{F}(s)\,(\mathrm{d}s)^n\right]=\frac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$$

مثال:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \mathcal{L}\left[\frac{\sin 2x}{x}\right]=\int_{s}^{\infty}\mathcal{L}[\sin 2x]\mathrm{d}s=\int_{s}^{\infty}\frac{2}{\mathrm{s}^2+4}\mathrm{d}s=\tan^{-1}\frac{s}{2}\Big|_{s}^{\infty}$$
$$=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}\frac{s}{2}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{2}$$

$$2.\ \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]=\int_{s}^{\infty}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}]\mathrm{d}s=\int_{s}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{s}+a}-\frac{1}{\mathrm{s}+b}\right)\mathrm{d}s$$
$$=\underbrace{\ln(s+a)-\ln(s+b)}_{\ln\frac{s+a}{s+b}}\Big|_{s}^{\infty}=\ln 1-\ln\frac{s+a}{s+b}=\ln\frac{s+b}{s+a}$$

$$3.\ \mathcal{L}\left[\frac{1-\mathrm{J}_0(x)}{x}\right]=\int_{\mathrm{s}}^{\infty}\mathcal{L}[1-\mathrm{J}_0(x)]\mathrm{d}s=\int_{\mathrm{s}}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{s}}-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{s}^2+1}}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\underbrace{\ln \mathrm{s}-\ln\left(s+\sqrt{\mathrm{s}^2+1}\right)}_{\ln\frac{s}{s+\sqrt{\mathrm{s}^2+1}}}\Bigg|_{s}^{\infty}=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{s}{s+\sqrt{\mathrm{s}^2+1}}$$

تمرین:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \mathcal{L}\left[\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\right]$$

$$2.\ \mathcal{L}\left[\frac{\sin^2 ax}{x}\right]$$

$$3.\ \mathcal{L}\left[\frac{\sin^3 ax}{x}\right]$$

۴. قضیه لاپلاس مشتق:

اگر $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]=\mathrm{F}(s)$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{e}^{\alpha x}}=0$ باشد ، آنگاه

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}'(x)]=s\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]-\mathrm{f}(0)=s\mathrm{F}(s)-\mathrm{f}(0)$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}''(x)]=s^2\mathrm{F}(s)-s\mathrm{f}(0)-\mathrm{f}'(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{f}^{(n)}(x)\right]=s^n\mathrm{F}(s)-s^{n-1}\mathrm{f}(0)-\cdots-s\mathrm{f}^{(n-2)}(0)-\mathrm{f}^{(n-1)}(0)$$

مثال:

لاپلاس تابع $\mathrm{f}(x)$ را به‌دست آورید.

$$\mathrm{f}(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

پاسخ: $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]$ را به دو روش می‌توان به دست آورد:

راه حل اول: با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{f}(x)\,dx=\int_0^{\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{e}^{-t^2}dt\ \,dx$$

$$=\int_?^?\int_?^?\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{e}^{-t^2}dx\,dt=\cdots$$

راه حل دوم: می‌توانیم از $\mathrm{f}(x)$ مشتق بگیریم و $\mathcal{L}[\mathrm{f}'(x)]$ را به‌دست آوریم.

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}-0=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}'(x)]=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[x^{-\frac{1}{2}}\right]_{s\to s+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}\right)_{s\to s+1}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{s+1}}$$

از طرفی $\mathcal{L}[\mathrm{f}'(x)]=s\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]-\mathrm{f}(0)$ درنتیجه

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s\sqrt{s+1}}$$

تمرین۱:

فرض کنید $\mathrm{f}(x)$ و $\mathrm{g}(x)$ در $[0,\infty)$ پیوسته و از مرتبه نمایی باشند و $\mathrm{f}'(x)$، $\mathrm{g}'(x)$ و $\mathrm{g}''(x)$ در $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته باشند. همچنین فرض کنید تبدیل لاپلاس $\mathrm{f}(x)$ و $\mathrm{g}(x)$ به‌ترتیب $\mathrm{F}(s)$ و $\mathrm{G}(s)$ بوده و داشته باشیم $\mathrm{f}(0)=1$، $\mathrm{g}(0)=3$ و $\mathrm{g}'(0)=8$.

مطلوب است محاسبه تبدیل لاپلاس تابع $\mathrm{h}(x)$ برحسب $\mathrm{F}(s)$ و $\mathrm{G}(s)$.

$$\mathrm{h}(x)=x\,\mathrm{e}^{9x}\,(\mathrm{f}'(x)+\mathrm{g}''(x))$$

تمرین۲:

حاصل $\mathcal{L}[t\int_0^{2t}\frac{\sin u}{u}\,du]$ را بیابید.

تمرین۳:

فرض کنید $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-x}}$ و $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]=\mathrm{F(s)}$ باشد، آنگاه مقدار $\mathrm{sF(s)-F(s+1)}$ را بیابید.

تمرین۴:

با فرض اینکه $\begin{cases}\mathcal{L}[\sin\sqrt{x}]=A\\ \mathcal{L}[\cos\sqrt{x}]=B\end{cases}$، مقدار $\mathcal{L}[\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}]$ را محاسبه کنید.

تمرین۵:

با توجه به $\mathcal{L}[\mathrm{J}_0(x)]$ و رابطه $\frac{d}{dx}\{x^{-p}\mathrm{J}_p(x)\}=-x^{-p}\mathrm{J}_{p+1}(x)$، مقدار $\mathcal{L}[\mathrm{J}_1(x)]$ را به‌دست آورید.

۵. قضیه لاپلاس انتگرال:

اگر لاپلاس $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = \mathrm{F}(s)$ موجود باشد، با شرط $s > 0$ داریم

$$\mathcal{L}[\int_0^x \mathrm{f}(x)\, dx] = \frac{\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]}{s} = \frac{\mathrm{F}(s)}{s}$$

و

$$\mathcal{L}[\int_0^x \dots \int_0^x \mathrm{f}(x)\, (dx)^n] = \frac{\mathrm{F}(s)}{s^n}$$

و در فرم وارون اگر $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = \mathrm{f}(x)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{F}(s)}{s}\right] = \int_0^x \mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] dx = \int_0^x \mathrm{f}(x)\, dx$$

و

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{F}(s)}{s^n}\right] = \int_0^x \dots \int_0^x \mathrm{f}(x)\, (dx)^n$$

مثال:

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \ \mathcal{L}[\int_0^x \cos 2t\, dt] = \frac{\mathcal{L}[\cos 2t]}{s} = \frac{\frac{s}{s^2+4}}{s} = \frac{1}{s^2+4}$$

$$2.\ \ \mathcal{L}[x \underbrace{\int_0^x \frac{e^{3t} \sinh t}{t} dt}_{f(x)}] = \mathrm{I}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه مشتق لاپلاس}} \ \mathrm{I} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\int_0^x \frac{e^{3t} \sinh t}{t} dt]$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه لاپلاس انتگرال}} \ \mathrm{I} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathcal{L}\left[\frac{e^{3t} \sinh t}{t}\right]}{s}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه انتگرال لاپلاس}} \ \mathrm{I} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\int_s^\infty \mathcal{L}[e^{3t} \sinh t] ds}{s}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه اول انتقال}} \quad \mathrm{I} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\int_s^\infty \mathcal{L}[\sinh t]_{s\to s-3} ds}{s}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\int_{s-3}^\infty \frac{1}{s^2-1} ds}{s}\right)$$

$$\mathrm{I} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1}\Big|_{s-3}^{\infty}}{s}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{1}{2}(\ln 1 - \ln\frac{s-4}{s-2})}{s}\right)$$

$$3.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^3}\right] = \int_0^x \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]dx = \int_0^x e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S^3}\right]dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2!}e^{-x}x^2 dx = -\frac{x^2}{2}e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^x$$

$$= -\frac{x^2}{2}e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

تمرین:

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \mathcal{L}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-z}\,\delta(z-1)\ dz\right]$$

$$2.\ \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^x \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-2t}\sin t\ dt\right]$$

$$3.\ \mathcal{L}\left[\int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{t}}\ dt\right]$$

$$4.\ \mathcal{L}\left[t\,\mathrm{e}^{4t}\int_0^t x(1-\cos x)\ dx\right]$$

$$5.\ \mathcal{L}\left[x\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - \cos t}{t}\ dt\right]$$

$$6.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right]$$

۶. قضیه تبدیل لاپلاس توابع متناوب:

اگر $\mathrm{f}(x)$ برای x های مثبت تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، داریم

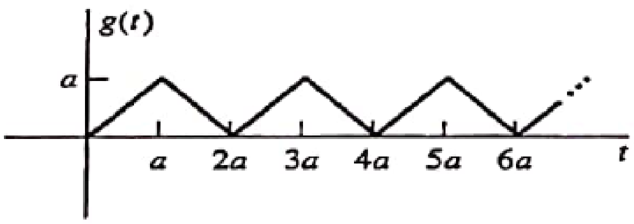
$$\mathrm{F}(s)=\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\int_0^T \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{f}(x)\,dx$$

برای محاسبه لاپلاس وارون $\mathrm{F}(s)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\mathrm{H}(s)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

نخست لاپلاس وارون $\mathrm{H}(s)$ را به‌دست می آوریم تا $h(x)$ محاسبه شود. ضابطه تابع $\mathrm{f}(x)$ مورد نظر به این صورت است که برای $0<x<\mathrm{T}$ همان $h(x)$ بوده و برای $x>\mathrm{T}$ گسترش متناوب $h(x)$ مذکور با دوره T می‌باشد.

مثال:

لاپلاس تابع متناوب زیر را به‌دست آورید.



پاسخ:

$$g(t)=\begin{cases} t & 0<t<a \\ 2a-t & a\le t\le 2a \end{cases},\qquad \mathrm{T}=2a$$

$$\mathcal{L}[\,g(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}\,g(t)dt=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2as}}\int_0^{2a}\mathrm{e}^{-st}\,g(t)dt$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2as}}\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-st}t\,dt+\int_a^{2a}\mathrm{e}^{-st}(2a-t)dt\right)$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2as}}\left(-\frac{t}{s}\,\mathrm{e}^{-st}-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\bigg|_0^a+\frac{-(2a-t)}{s}\,\mathrm{e}^{-st}+\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\bigg|_a^{2a}\right)$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2as}}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^2}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-2as}-\frac{\mathrm{e}^{-2as}}{s^2}\right)$$

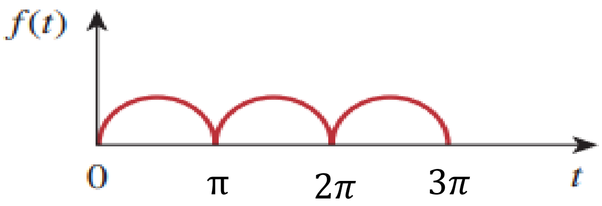
تمرین:

لاپلاس توابع متناوب زیر را به‌دست آورید.

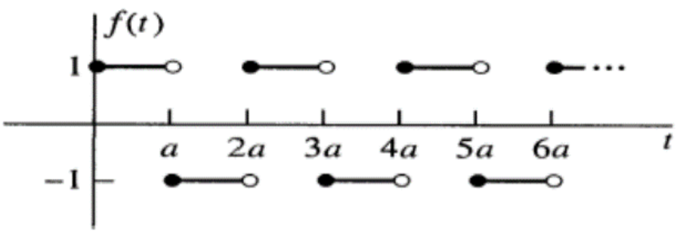
1. $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}, \qquad f(x+2) = f(x)$

2. $f(x) = [x] - x\,, \qquad f(x+1) = f(x)$

3.



4.



کاربردهای تبدیلات لاپلاس

۱. محاسبه انتگرال های ناسره:

اگر $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = \mathrm{F}(s)$ باشد، آنگاه طبق تعریف تبدیل لاپلاس داریم

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{f}(x)\, dx = \mathrm{F}(s)$$

$$if \qquad s = a \longrightarrow \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{f}(x)\, dx = \mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]_{s=a} = \mathrm{F}(a)$$

$$if \qquad s = 0 \longrightarrow \int_0^\infty \mathrm{f}(x) dx = \mathcal{L}[\mathrm{f}(x)]_{s=0} = \mathrm{F}(0)$$

مثال:

حاصل انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید.

$$1. \int_0^\infty x\, e^{-x} \cos 2x\, dx = \mathcal{L}[x \cos 2x]_{s=1} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos 2x]_{s=1}$$

$$= \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}\bigg|_{s = 1} = -\frac{3}{25}$$

$$2. \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{s=0} = \int_{s=0}^\infty \underbrace{\mathcal{L}[\sin x]}_{\frac{1}{s^2+1}} ds = \tan^{-1} s\,\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

تمرین:

حاصل انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید.

1. $\int_0^\infty \mathrm{J}_0(x)\,dx$

2. $\int_0^\infty \sin x \cos x\;dx$

3. $\int_0^\infty x^2 \cosh 3x\;dx$

4. $\int_0^\infty e^{-2x}\,u_4'(x)\,dx$

5. $\int_0^\infty e^{-3t}\,(\cos 3t - t\sin t)\,dt$

6. $\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{x-\sin x}{x}dx$

7. $\int_0^\infty e^{-2x}\,\frac{1-\mathrm{J}_0(5x)}{x}dx$

8. $\int_0^\infty e^{-3x}\,\frac{1-\cos x}{x}dx$

۲. حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با شرایط اولیه:

از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم و از حل یک معادله جبری $\mathcal{L}[y]$ را محاسبه و از آن لاپلاس وارون می‌گیریم تا y به‌دست آید.

اگر معادله دیفرانسیل یک معادله‌ی مرتبه دوم خطی با ضرایب متغیر باشد، اساس حل استفاده از فرمول

$$\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f(x)]$$

می‌باشد.

مثال:

مسائل مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل نمایید.

$$1.\ \ y'' + 4y = \cos 2x \ ; \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos 2x]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2+4)\mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^2+4} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{s}{(s^2+4)^2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right] = \frac{1}{4}x\ \sin 2x$$

2. $y'' + y = t^3\delta(t-2) + \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ t & t \geq 1 \end{cases}; \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

پاسخ:

$$y'' + y = t^3\delta(t-2) + 1 + (t-1)u_1(t)$$

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t^3\delta(t-2)] + \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[(t-1)u_1(t)]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] = \mathrm{e}^{-2s}(2^3) + \frac{1}{s} + \mathrm{e}^{-s}\mathcal{L}[t+1-1]$$

$$(s^2+1)\mathcal{L}[y] = 1 + 8e^{-2s} + \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+1} + \frac{8e^{-2s}}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}$$

$$y = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]}_{(1)} + 8\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right]}_{(2)} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]}_{(3)} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}\right]}_{(4)}$$

$$(1) = \sin t$$

$$(2) = u_2(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]_{t\to t-2} = u_2(t)\sin(t-2)$$

$$(3) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]dt = -\cos t\,\Big|_0^t = 1 - \cos t$$

$$(4) = u_1(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right]_{t\to t-1} = u_1(t)\Big(\int_0^t \underbrace{\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]dt}_{1-\cos t}\ dt\Big)_{t\to t-1}$$

$$= u_1(t)(t - \sin t)\Big|_0^{t-1} = u_1(t)(t - 1 - \sin(t-1))$$

3. $xy'' + 2y' + xy = 0\,; \qquad y(0) = \pi \ \ , \ y'(0) = 0$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[xy''] + 2\mathcal{L}[\,y'] + \mathcal{L}[xy] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[y''] + 2\big(s\mathcal{L}[y] - y(0)\big) - \frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[y] = 0$$

$\mathcal{L}[y]$ را به‌صورت $Y(s)$ نشان می‌دهیم.

$$-\frac{d}{ds}\big(s^2Y(s) - sy(0) - \ y'(0)\big) + 2sY - 2y(0) - \frac{dY}{ds} = 0$$

$$-\left(2sY + s^2\frac{dY}{ds} - \pi\right) + 2sY - 2\pi - \frac{dY}{ds} = 0$$

$$-(s^2+1)\frac{dY}{ds} = \pi \quad \longrightarrow \quad \frac{dY}{ds} = -\frac{\pi}{s^2+1} \qquad (*)$$

ادامه کار را می‌توان به دو روش حل کرد.

روش اول: معادله $(*)$ را در ds ضرب می‌کنیم

$dY = -\frac{\pi}{s^2+1}\,ds$ معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \mathcal{L}[y] = Y(s) = \pi\,cot^{-1}s + c$$

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}[y] = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = \lim_{s\to\infty}(\pi\cot^{-1}s + c) = \pi\cot^{-1}\infty + c \quad \longrightarrow \quad c = 0$$

$$y = \pi\mathcal{L}^{-1}[\cot^{-1}s] = -\frac{\pi}{x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+1}\right] = \frac{\pi}{x}\sin x$$

روش دوم:

$$\mathcal{L}[xy] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y] = -\frac{dY}{ds}$$

$$\mathcal{L}[xy] = \frac{\pi}{s^2+1} \quad \longrightarrow \quad xy = \pi\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \pi\sin x \quad \longrightarrow \quad y = \frac{\pi}{x}\sin x$$

* زمانی می‌توان از روش دوم استفاده کرد که به معادله دیفرانسیل به فرم $\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y] = \frac{dY}{ds} = F(s)$ برسیم.

$$4.\ xy'' - xy' + y = x^2 - \frac{x^3}{3}\ ; \qquad y(0) = 0\ \ ,\ y'(0) = 5$$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[xy''] - \mathcal{L}[\,xy'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x^2] - \frac{1}{3}\mathcal{L}[x^3]$$

$$-\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[y''] + \frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[y'] + \ \mathcal{L}[y] = \frac{2!}{s^3} - \frac{1}{3}.\frac{3!}{s^4}$$

$\mathcal{L}[y]$ را به‌صورت $Y(s)$ نشان می‌دهیم.

$$-\frac{d}{ds}\big(s^2Y(s) - sy(0) - \ y'(0)\big) + \frac{d}{ds}\big(sY(s) - y(0)\big) + Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^4}$$

$$-\left(2sY + s^2\frac{dY}{ds}\right) + (Y + s\frac{dY}{ds}) + Y = \frac{2(s-1)}{s^4}$$

$$-(s^2 - s)\frac{dY}{ds} - (2s-2)\mathrm{Y} = \frac{2(s-1)}{s^4}$$

$$\xrightarrow{\div -(s^2-s)} \quad \frac{dY}{ds} + \underbrace{\frac{2}{s}}_{p(s)}\ Y = \underbrace{-\frac{2}{s^5}}_{q(s)}$$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int p(s)\,ds} = e^{\int \frac{2}{s}\,ds} = e^{2\ln s} = s^2$$

$$Y = \frac{1}{\mu}\left(\int q(s)\,\mu\,ds + c\right) = s^{-2}\left(\int \underbrace{-\frac{2}{s^5}.\,s^2}_{-2s^{-3}}\,dx + c\right) = s^{-2}(s^{-2} + c)$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^4} - \frac{c}{s^2} \quad \longrightarrow \quad y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] - c\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{3!}x^2 - cx$$

$$y' = \frac{1}{2}x - c \quad \xrightarrow{y'(0)=5} \quad 5 = 0 - c \quad \longrightarrow \quad c = 5 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{3!}x^2 - 5x$$

تمرین:

مسائل مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل نمایید.

1. $y'' - 2y' + y = xe^{x} + e^{x};$ $\quad y(0) = y'(0) = 1$
2. $y'' + 2y' + 5y = \delta(x-\pi);$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $y'' - y' = e^{-x} + e^{x}u_3(x);$ $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$
4. $y'' + 4y' + 4y = 2t\,\delta_1(t) + u_2(t);$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$
5. $y'' + 2y' + 2y = x\,\delta_2(x);$ $\quad y(0) = y'(0) = 1$
6. $y'' + 2y' + y = \delta(t-1) + u_\pi(t);$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
7. $y'' + y' + y = \delta(x-\pi)\cos^2 x;$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$
8. $y'' - y' = \delta(x-2) + u_6(x)\cos(2x-12);$ $\quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + y = \begin{cases} \sin 2x & 0 \le x < \pi \\ 0 & x \ge \pi \end{cases};$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ x & 1 \le x < 2 \\ 0 & x \ge 2 \end{cases};$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
11. $2y'' + y' + 2y = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 5 \\ 1 & 5 \le x < 20 \\ 0 & x \ge 20 \end{cases};$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$
12. $y'' + 4y = \begin{cases} 4x & 0 \le x < 1 \\ 4 & x \ge 1 \end{cases};$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
13. $y'' + 4y = \begin{cases} \sin x & 0 \le x < \pi \\ \cos x + \sin x & x \ge \pi \end{cases};$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$
14. $xy'' - (2+x)y' + 3y = 0;$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$
15. $y'' + 2xy' - 4y = 1;$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$
16. $xy'' + (2x+3)y' + (x+3)y = 3e^{-x};$ $\quad y(0) = 0$
17. $xy'' + y' + 4xy = 0;$ $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$
18. $xy'' + (x-1)y' - y = 0;$ $\quad y(0) = 5$
19. $xy'' + y' + xy = 0;$ $\quad y(0) = 1$
20. $ty'' + 2y' + ty = \sin t;$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

کانولوشن (تلفیق-پیچش):

اگر $\mathcal{L}[\mathrm{f}(x)] = \mathrm{F}(s)$ و $\mathrm{G}(s) = \mathcal{L}[g(x)]$ هر دو به ازای $s \geq 0$ موجود باشند، آنگاه

$$\mathcal{L}[\mathrm{h}(x)] = \mathrm{H}(s) = \mathrm{F}(s).\mathrm{G}(s)$$

که در آن

$$\mathrm{h}(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

تابع h به کانولوشن f و g معروف است و آن را با نماد $\mathrm{f} * \mathrm{g}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathcal{L}[(\mathrm{f} * \mathrm{g})(x)] = \mathcal{L}\left[\int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt\right] = \mathcal{L}[\mathrm{f}(x)].\mathcal{L}[\mathrm{g}(x)] = \mathrm{F}(s).\mathrm{G}(s)$$

و در فرم وارون اگر $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s)] = \mathrm{f}(x)$ و $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{G}(s)] = \mathrm{g}(x)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F}(s).\mathrm{G}(s)] = (\mathrm{f} * \mathrm{g})(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

مثال:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = \mathrm{I}$$

پاسخ:

$$\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{f}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$$

$$\mathrm{G}(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{g}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin x$$

$$\mathrm{I} = (\mathrm{f} * \mathrm{g})(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_0^x 1.\sin t\ \, dt = -\cos t\,\Big|_0^x = 1 - \cos x$$

$$2.\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\ \ln(\frac{s+1}{s-1})\right] = \mathrm{I}$$

پاسخ:

$$\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s-1} \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{f}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = \mathrm{e}^{x}$$

$$\mathrm{G}(s) = \ln(\frac{s+1}{s-1}) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{g}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ln(\frac{s+1}{s-1})\right] = \mathcal{L}^{-1}[\ln(s+1) - \ln(s-1)]$$

$$= -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right] = -\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x})$$

$$\mathrm{I} = (\mathrm{f} * \mathrm{g})(x) = \int_0^x f(x-t)\ g(t)\ dt = \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\ (\frac{\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}}{t})\ dt$$

$$3.\ \int_0^\infty \int_0^x \mathrm{e}^{-3x}\ t\sqrt{t}\ \cos(x-t)\ dt\ dx = \mathrm{I}$$

پاسخ:

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-3x} \underbrace{\int_0^x t^{\frac{3}{2}}\ \cos(x-t)\ dt}_{h(x)}\ dx = \mathcal{L}[\int_0^x \underbrace{t^{\frac{3}{2}}}_{g(t)}\ \underbrace{\cos(x-t)}_{f(x-t)}\ dt]_{s=3}$$

$$= \mathcal{L}[\cos x]_{s=3}\ \mathcal{L}[x^{\frac{3}{2}}]_{s=3} = (\frac{s}{s^2+1})_{s=3}\ (\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}})_{s=3} = \frac{3}{10}.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{9\sqrt{3}}$$

تمرین:

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

1. $\mathcal{L}[x\, \mathrm{e}^{2x} \int_0^x \mathrm{t}^{\frac{1}{2}}\, \frac{\sin(x-t)}{x-t}\, dt]$

2. $\int_0^t \mathrm{J}_0(t-x)\, \mathrm{J}_0(x)\, dx$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)^{\frac{3}{2}}(s^2-1)}\right]$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}}{(s^2+1)^2}\, \ln(\frac{s}{s-1})\right]$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\tan^{-1}(s+1)\right]$

۳. حل معادلات انتگرالی:

ابتدا انتگرال موجود در معادله را به فرم پیچش در می‌آوریم سپس از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم و از حل یک معادله جبری $\mathcal{L}[y]$ را محاسبه و از آن لاپلاس وارون می‌گیریم تا y به‌دست آید.

مثال:

معادلات انتگرالی زیر را حل نمایید.

$$1.\ \ y = x^3 - \int_0^x \sin(t-x)\, y(t)\, dt$$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x^3] - \mathcal{L}[\int_0^x \underbrace{\sin \overbrace{(t-x)}^{-(x-t)}}_{f(x-t)}\ \underbrace{y(t)}_{g(t)}\ dt] = \frac{3!}{s^4} - \underbrace{\mathcal{L}[\sin(-x)]}_{\frac{-1}{s^2+1}}\ \mathcal{L}[y]$$

$$\longrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)\mathcal{L}[y] = \frac{3!}{s^4}$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{3!}{s^4}.\frac{s^2+1}{s^2} = \frac{3!\,(s^2+1)}{s^6}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^6}\right] = x^3 + \frac{1}{20}x^5$$

$$2.\ y(t)+\int_0^t y(t-\lambda)\,y(\lambda)\,d\lambda=2(2t+1)\,e^{2t}$$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[y]+\mathcal{L}[\int_0^t y(t-\lambda)\,y(\lambda)\,d\lambda]=\mathcal{L}[(4t+2)e^{2t}]$$

$$\mathcal{L}[y]+\mathcal{L}[y(t)]\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[(4t+2)]_{s\to s-2}=(\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s})_{s\to s-2}=\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{2}{s-2}$$

$$\mathcal{L}[y]+\mathcal{L}^2[y]=\frac{4+2(s-2)}{(s-2)^2}\quad\xrightarrow{\mathcal{L}[y]=Y}\quad Y^2+Y-\frac{2s}{(s-2)^2}=0$$

$$\Delta=1+\frac{8s}{(s-2)^2}=\frac{(s-2)^2+8s}{(s-2)^2}=\frac{s^2+4s+4}{(s-2)^2}=\frac{(s+2)^2}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}[y]=Y=\frac{-1\pm\sqrt{(\frac{s+2}{s-2})^2}}{2}=\frac{-1\pm\frac{s+2}{s-2}}{2}=\begin{cases}\dfrac{2}{s-2}\\[2ex]-\dfrac{s}{s-2}\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s-2}\right]=2e^{2t}\\[3ex]\mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{s}{s-2}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-2+2}{s-2}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\dfrac{s-2}{s-2}}_{1}+\dfrac{2}{s-2}\right]=-(\delta(t)+2e^{2t})\end{cases}$$

$$3.\ y''+y=u_{\frac{\pi}{2}}(x)\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\int_0^x u_{\frac{\pi}{2}}(x-\lambda)\cos\lambda\ d\lambda\ ,\quad y(0)=y'(0)=0$$

پاسخ:

$$\mathcal{L}[y'']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u_{\frac{\pi}{2}}(x)\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)]+\mathcal{L}[\int_0^x u_{\frac{\pi}{2}}(x-\lambda)\cos\lambda\ d\lambda]$$

$$s^2\mathcal{L}[y]-sy(0)-y'(0)+\mathcal{L}[y]=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}[\underbrace{\delta\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}_{\delta(x)}]+\mathcal{L}[u_{\frac{\pi}{2}}(x)]\mathcal{L}[\cos x]$$

$$(s^2+1)\mathcal{L}[y]=e^{-\frac{\pi}{2}s}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}.\frac{s}{s^2+1}\qquad\longrightarrow\qquad\mathcal{L}[y]=e^{-\frac{\pi}{2}s}(\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{(s^2+1)^2})$$

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\frac{\pi}{2}s}(\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{(s^2+1)^2})\right]=u_{\frac{\pi}{2}}(x)(\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]}_{(1)}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]}_{(2)})_{x\to x-\frac{\pi}{2}}$$

$$(1)=\sin x$$

یکی از روش‌ها برای به‌دست آوردن لاپلاس وارون (2)، استفاده از کانولوشن است.

$$\mathrm{F}(s)=\mathrm{G}(s)=\frac{1}{s^2+1}\qquad\longrightarrow\qquad f(x)=\mathrm{g}(x)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin x$$

$$(2)=(\mathrm{f}*\mathrm{g})(x)=\int_0^x f(x-t)\ g(t)\ dt=\int_0^x\sin(x-t)\,.\sin t\ dt$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2}\{\cos\underbrace{(x-t-t)}_{x-2t}-\cos\underbrace{(x-t+t)}_{x}\}\ dt=\frac{1}{2}\{-\frac{1}{2}\sin(x-2t)-t\cos x\}\Big|_0^x$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}\sin(-x)-x\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right\}=\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$$

تمرین:

معادلات انتگرالی زیر را حل نمایید.

1. $\int_0^t \frac{y(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx = 1 + t + t^2$

2. $\int_0^x \mathrm{J}_0(x-t)\,\mathrm{y}(t)\,dt = \sin x$

3. $\int_0^x \mathrm{t}\,\mathrm{y(t)}\,dt = \int_0^x \mathrm{t}\,\mathrm{J}_0(t)\,\mathrm{J}_0(t-x)\,dt$

4. $y(x) = e^x\,(1 + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,y(t)\,dt)$

5. $y'(t) - \frac{1}{2}\int_0^t (t-\lambda)^2\,\mathrm{y}(\lambda)\,d\lambda = -t\,; \qquad y(0) = -1$

6. $2y' = y + e^x - \int_0^x e^{x-t} y'(t)\,dt \quad ; \quad y(0) = 1$

7. $y' - \int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt = 1 + \sin x\,; \quad y(0) = 0$

8. $y' + \int_0^t \sin(\lambda - t)\,y'(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2\pi \\ \cos t & t \geq 2\pi \end{cases}; \quad y(0) = 0$

9. $y(t) - \int_0^t e^{t-\lambda}\cos(t-\lambda)\,y'(\lambda)\,d\lambda = (t-\pi)u_\pi\,(t); \qquad y(0) = 0$

10. $y(t) = e^{-t} + \int_0^t \lambda^2\,y''(t-\lambda)\,d\lambda\ ; \quad y(0) = y'(0) = 0$

11. $y'' + 2y' - 2\int_0^x \sin(x-t)\,y'(t)\,dt = \cos x; \quad y(0) = y'(0) = 0$

12. $y'' + \int_0^x e^{2(t-x)}\,y'(t)\,dt = e^{2x}\,; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$

13. $y'' - \int_0^x \cos(x-t)\,y'(t)\,dt = x^2\,\delta_2(x) + \begin{cases} 0 & 0 < t < \pi \\ \sin t & t \geq \pi \end{cases}; \ y(0) = y'(0) = 0$

14. $\begin{cases} y'' + y + \int_0^x \sinh(x-t)\,y(t)\,dt + \int_0^x \cosh(x-t)\,y'(t)\,dt = \cosh x; \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

۴. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل:

برای حل یک دستگاه n معادله n مجهول، از تک تک معادلات دستگاه لاپلاس می‌گیریم تا یک دستگاه n معادله n مجهول خطی حاصل شود. از حل این دستگاه، لاپلاس توابع مجهول را به‌دست می‌آوریم و سپس از آنها لاپلاس وارون می‌گیریم.

مثال:

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} + x - y = 0 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} - x + y + 1 = 0 \end{cases} \qquad x(0) = x'(0) = y(0) = 0 \qquad (*)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x''] - \mathcal{L}[x'] + \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] = 0 \\[2ex] \mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[1] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2\mathcal{L}[x] - sx(0) - x'(0) - (s\mathcal{L}[x] - x(0)) + \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] = 0 \\[2ex] s\mathcal{L}[y] - y(0) - \mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] + \dfrac{1}{s} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 - s + 1)\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] = 0 \\[2ex] -\mathcal{L}[x] + (s+1)\mathcal{L}[y] = -\dfrac{1}{s} \end{cases} \qquad (**)$$

حال معادله اول دستگاه $(**)$ را در $(s+1)$ ضرب می‌کنیم، سپس این دو معادله را با هم جمع کرده تا به عبارت زیر برسیم

$$(s+1)(s^2 - s + 1)\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[x] = -\frac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad s^3\mathcal{L}[x] = -\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[x] = -\frac{1}{s^4} \quad \longrightarrow \quad x = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^4}\right] = -\frac{1}{3!}t^3$$

در ادامه با جای‌گذاری $x = x(t)$ در معادله اول دستگاه $(*)$، می‌توان مقدار $y = y(t)$ را به‌دست آورد.

$$y = x - x' + x'' = -\frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{2!}t^2 - t$$

$$2.\quad \begin{cases} y' + 2y + 6\int_0^t x(z)\,dz = -2 \\ y' + x' + x = 0 \end{cases} \qquad x(0) = 2, \qquad y(0) = -4 \qquad (*)$$

پاسخ:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] + 6\mathcal{L}[\int_0^t x(z)\,dz] = -2\mathcal{L}[1] \\ \mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[x'] + \mathcal{L}[x] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\mathcal{L}[y] - y(0) + 2\mathcal{L}[y] + 6\dfrac{\mathcal{L}[x]}{s} = -\dfrac{2}{s} \\ s\mathcal{L}[y] - y(0) + s\mathcal{L}[x] - x(0) + \mathcal{L}[x] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{s}\mathcal{L}[x] + (s+2)\mathcal{L}[y] = -4 - \dfrac{2}{s} \\ (s+1)\mathcal{L}[x] + s\mathcal{L}[y] = -2 \end{cases} \qquad (**)$$

حال معادله اول دستگاه $(**)$ را در $(-s)$ و معادله دوم دستگاه $(**)$ را در $(s+2)$ ضرب می‌کنیم، سپس این دو معادله را با هم جمع کرده تا به عبارت زیر برسیم

$$-6\mathcal{L}[x] + (s+1)(s+2)\mathcal{L}[x] = 4s + 2 - 2(s+2)$$

$$(s-1)(s+4)\mathcal{L}[x] = 2s - 2 \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{L}[x] = \frac{2}{s+4}$$

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+4}\right] = 2e^{-4t}$$

در ادامه با جای‌گذاری $x = x(t)$ در معادله دوم دستگاه $(*)$، می‌توان مقدار $y = y(t)$ را به‌دست آورد.

$$y' = -(x + x') = -(2e^{-4t} - 8e^{-4t}) = 6e^{-4t}$$

$$y = \int 6e^{-4t}\,dt = -\frac{3}{2}e^{-4t} + c \quad \xrightarrow{y(0)=-4} \quad y = -\frac{3}{2}e^{-4t} - \frac{5}{2}$$

تمرین:

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

1. $\begin{cases} x' = -x + y + 1 \\ y' = -x + y \end{cases}$ $\qquad x(0) = y(0) = 0$

2. $\begin{cases} x' - y = \sin t \\ x + y' = 1 \end{cases}$ $\qquad x(0) = y(0) = 0$

3. $\begin{cases} x' - 2x - 3y = 2e^{2t} \\ y' - x - 4y = 3e^{2t} \end{cases}$ $\qquad x(0) = y(0) = 0$

4. $\begin{cases} x' + 3y' - 2x - 7y = e^{3t} \\ x' + 2y' - 3x - 6y = e^{3t} \end{cases}$ $\qquad x(0) = y(0) = 1$

5. $\begin{cases} D^2x + y = -2 \\ x + D^2y = 0 \end{cases}$ $\qquad x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

6. $\begin{cases} y_1'' + y_1 - y_2'' - 4y_2 = 0 \\ y_1' + y_2' = \cos t \end{cases}$ $\qquad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1, \; y_1'(0) = 2$

7. $\begin{cases} x' + x + y' + y = u_2(t) \\ x'' + x' - y'' - y' = 1 + (t-3)\delta(t-2) \end{cases}$

$x(0) = y'(0) = 2, \qquad y(0) = 0, \qquad x'(0) = -4$

8. $\begin{cases} x' = \sin t \\ y' = 2t + x - 1 \\ z'' + 2z' = y - x - t^2 \end{cases}$ $\qquad x(0) = y(0) = z(0) = z'(0) = 0$