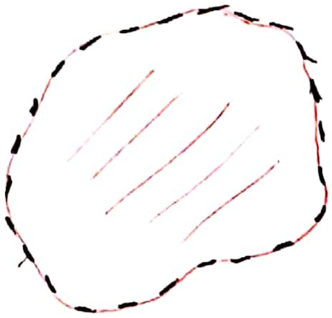
کاربرد مشتق: یافتن اکسترمم ها و نقاط زینی



یافتن اکسترمم:

۱- درون ناحیه: از طریق آزمون دوم

۲- روی مرز:
- ۱- جایگذاری خم در تابع
- ۲- حل خم پارامتری
- ۳- ضرایب لاگرانژ

آزمون مشتق دوم: فرض کنید $f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته در همسایگی نقطه‌ای مانند (a,b) باشد به طوریکه

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$$

۱- در این صورت f در (a,b) یک ماکسیمم موضعی دارد هرگاه $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(a,b)}>0$ و $f_{xx}(a,b)<0$.

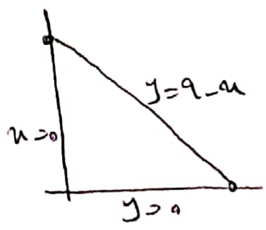
۲- f در (a,b) یک مینیمم نسبی دارد هرگاه $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(a,b)}>0$ و $f_{xx}(a,b)>0$.

۳- f در (a,b) دارای یک نقطه زینی (مینی‌ماکس) است هرگاه $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}<0$.

مثال: مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع زیر را بر یک ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$، $y=0$ و $y=9-x$ بیابید.

$$f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

حل. الف. ابتدا بررسی می‌کنیم که f در داخل ناحیه اکسترمم دارد یا نه.



$$f_x(x,y)=2-2x=0 \Rightarrow x=1,\ y\in\mathbb{R}$$

$$f_y(x,y)=2-2y=0 \Rightarrow y=1,\ x\in\mathbb{R} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \underline{x=1,\ y=1}$$

$$f_{xx}=-2<0 \qquad f_{yy}=-2<0 \qquad f_{xy}=0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = -2\times-2-(0)^2=4>0$$

بنابراین f در $(1,1)$ دارای ماکسیمم نسبی است.

ب. حال اکسترمم ها را روی مرز بررسی می‌کنیم.

مرز $y=0$

$f(x,0)=2+2x-x^2 \quad x\in[0,9]$

$f_x=2-2x=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

$(0,0)$, $(9,0)$ نقاط انتهایی

مرز $x=0$

$f(0,y)=2+2y-y^2$

$f_y=2-2y=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

$(0,0)$, $(0,9)$ نقاط انتهایی

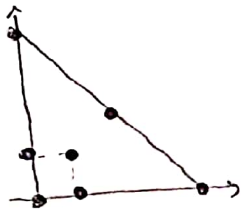
مرز $y=9-x$

$f(x,9-x)=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2$

$f_x=-2x+2(9-x)=-4x+18=0$

$\Rightarrow x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{9}{2}$

$(9,0),(0,9)$ نقاط انتهایی

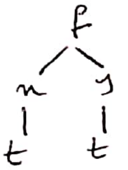


$f(0,0)$, $f(1,0)$, $f(9,0)$, $f(0,1)$, $f(0,9)$, $f(\frac{9}{2},\frac{9}{2})$

اکسترمم هم پارامتری. برای یافتن اکسترمم تابع $f(x,y)$ برحسب $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ ابتدا آن را به صورت تابعی از یک متغیر t نوشته و با استفاده از مشتق زنجیری، $\frac{df}{dt}=0$ را حل می‌کنیم و اکسترمم‌های تابع یک متغیره f برحسب t را حساب می‌کنیم.

مثال. اکسترمم‌های مطلق $f(x,y)=xy$ را برحسب پارامتری $\begin{cases}x=3\cos t\\y=2\sin t\end{cases}$ ، $0\le t\le \pi$ بیابید.

حل.



$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y(-3\sin t)+x(2\cos t)=2\sin t(-3\sin t)+(3\cos t)(2\cos t)$$
$$=-6\sin^2 t+6\cos^2 t=6\cos 2t$$

$\frac{df}{dt}=0 \Rightarrow \cos 2t=0 \Rightarrow 2t=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4})=3\cos(\frac{\pi}{4})\times 2\sin(\frac{\pi}{4})=3$ $\qquad f(\frac{3\pi}{4})=-3$

نقاط انتهایی $f(0)=0$ $\qquad f(\pi)=0$

تمرین. ۱- اکسترمم‌های نسبی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x,y)=y^2+xy-2x-2y+2$

ب) $f(x,y)=x\sin y$

ج) اکسترمم مطلق $f(x,y)=2x^2-4x+y^2-4y+1$ بر ناحیه مثلثی محدود به خطوط $x=0$ ، $y=2$ و $y=2x$.

د) اکسترمم‌های مطلق $f(x,y)=(x^2-4x)\cos y$ روی ناحیه $\begin{cases}1\le x\le 3\\ -\frac{\pi}{4}\le y\le \frac{\pi}{4}\end{cases}$

۲- اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y)=2x^2+y^2$ را روی نیم‌دایره $x^2+y^2=4$ و $y\ge 0$ بیابید.

۳- اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y)=2x+3y$ را روی ربع بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ در ربع اول را بیابید.

ضرایب لاگرانژ.

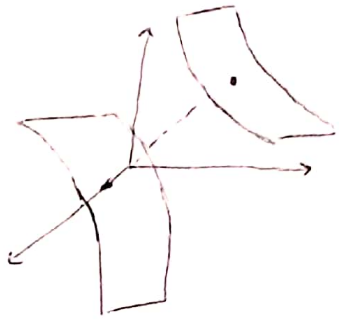
قضیه. فرض کنید که $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها پیوسته باشند.
برای یافتن مقادیر اکسترمم موضعی f با قید (شرط) $g(x,y,z)=0$، مقادیر x و y و z و λ را
چنان می‌یابیم که به طور همزمان در معادلات زیر صدق کنند.

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$$

مثال. مطلوبست یافتن نقاطی از رویه زیر که نزدیک‌ترین نقاط به مبدأ مختصات باشند. $\underline{x^2-z^2=1}$

حل. فرض کنید $p(x,y,z)$ نقطه از فضا باشد. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$OP(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$



$g(x,y,z)=x^2-z^2-1$

$\nabla f=(2x,2y,2z)$ $\qquad \nabla g=(2x,0,-2z)$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow \begin{cases}2x=2\lambda x \xRightarrow{x\neq 0 \text{ با فرض}} \lambda=1 \quad (1)\\ 2y=0 \Rightarrow y=0\\ 2z=-2\lambda z \xRightarrow{(1)} z=0\end{cases}$$

$$g(x,y,z)=x^2-z^2-1=0 \xRightarrow[z=0]{y=0} x=\pm 1 \Rightarrow (-1,0,0),\ (1,0,0)$$ نقاط

فرض $x=0$ $\quad g=x^2-z^2-1=0 \Rightarrow 0-z^2-1=0$ $\times$

مثال. سه عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۹ و مجموع مربعاتشان حداقل باشد.

حل. فرض کنید x و y و z، ۳ عدد حقیقی باشند. در این صورت $g(x,y,z)=x+y+z-9=0$ و $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. در این صورت داریم

$$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow (2x,2y,2z)=\lambda(1,1,1) \Rightarrow \begin{cases}2x=\lambda\\ 2y=\lambda\\ 2z=\lambda\end{cases} \Rightarrow x=y=z \quad (1)$$

$$g(x,y,z)=x+y+z-9=0 \xRightarrow{(1)} 3x=9 \Rightarrow x=3,\ y=z=3$$

مثال. مطلوبست یافتن دورترین و نزدیک‌ترین نقاط خم $x^2+xy+y^2=1$ از مبدأ مختصات.

$f(x,y)=x^2+y^2 \quad , \quad g(x,y)=x^2+xy+y^2-1=0$

$\nabla f=\lambda \nabla g \Rightarrow (2x,2y)=\lambda(2x+y\ ,\ x+2y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=\lambda(2x+y) \xrightarrow{\lambda\neq 1} x=\dfrac{\lambda y}{2-2\lambda} \quad ① \\ 2y=\lambda(x+2y) \xRightarrow{①} 2y=\lambda\left(\dfrac{\lambda y}{2-2\lambda}+2y\right) \xrightarrow[y\neq 0]{\text{با فرض}} 2(2-2\lambda)=\lambda^2+2\lambda(2-2\lambda) \end{cases}$$

$\Rightarrow 3\lambda^2-8\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=2\ ,\ \frac{2}{3}$

اگر $\lambda=2 \Rightarrow x=-y \xrightarrow{g=x^2+xy+y^2-1=0} x^2-x^2+x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \quad , \quad (\pm 1, \mp 1)$

اگر $\lambda=\frac{2}{3} \Rightarrow x=y \xrightarrow{g=x^2+xy+y^2-1=0} x^2+x^2+x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$

اگر $\lambda=1 \Rightarrow 2x=2x+y \Rightarrow y=0 \xrightarrow{g=0} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \quad (\pm 1, 0)$

هر این نقاط را در تابع f جایگذاری می‌کنیم و ماکسیمم و مینیمم مطلق را مشخص می‌کنیم.

تمرین ۱. اکسترمم های مطلق x^2+y^2 را با شرط $x^2-2x+y^2-4y=0$ را بیابید.

۲. نزدیک‌ترین نقطه صفحه $x+2y+3z=12$ به نقطه $(1,1,1)$ را بیابید.

۱- اکسترمم تابع $f(x,y)=xye^{-(2x+3y)}$ را در ربع اول بیابید.

۲- اکسترمم های تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ را روی قرص $x^2+y^2\le 1$ بیابید.