

درس ریاضی 2

مبحث رویه ها

مدرس: ساناز لامعی

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

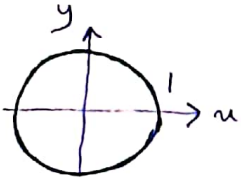
رودیه‌ها.

رودیه‌ها، نمودار کواچ در مختصات سه‌بعدی.

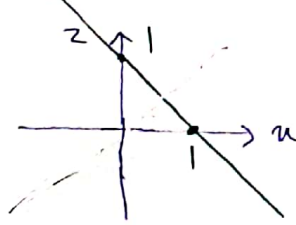
۱- استوانه. رودیه‌ای است متشکل از همه خطوطی که از یک نقطه ثابت در صفحه xy و یک خط ثابت موازی z .

مثال. استوانه‌های زیر را رسم کنید.

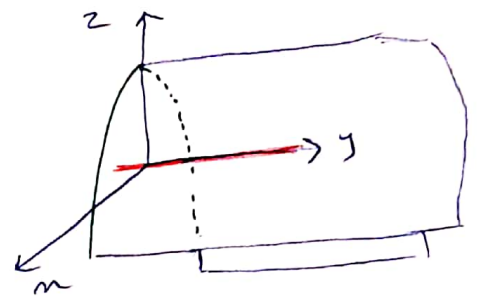
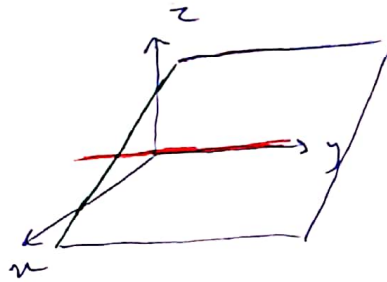
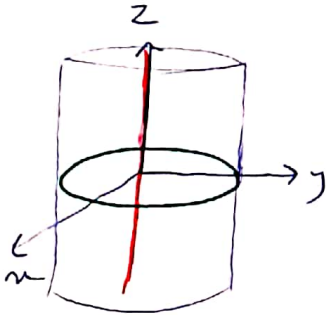
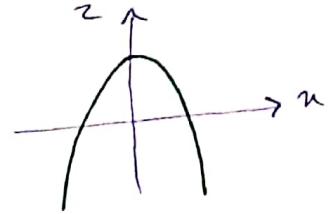
۱) $x^2 + y^2 = 1$



۲) $x + z = 1$

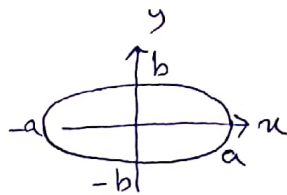


۳) $z = -x^2 + 1$

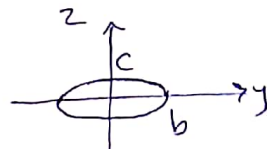


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

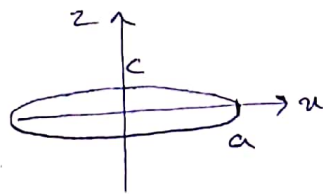
$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



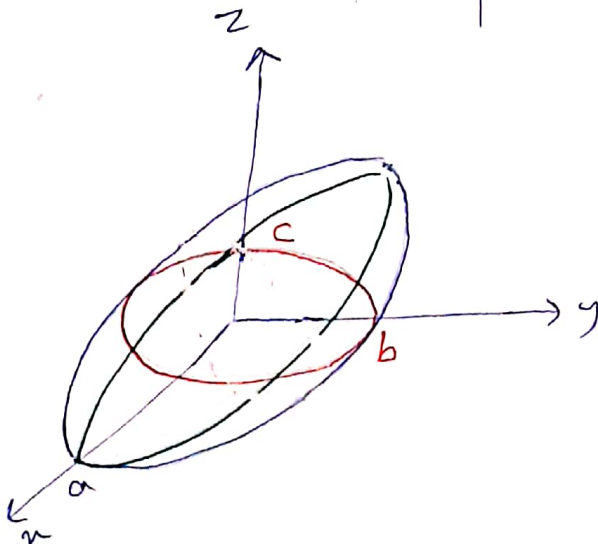
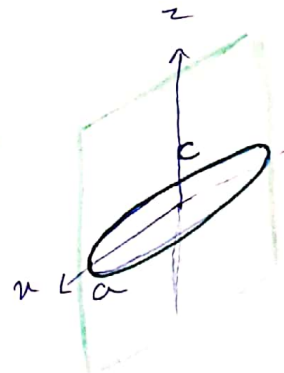
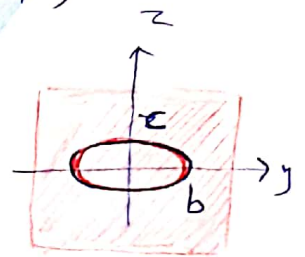
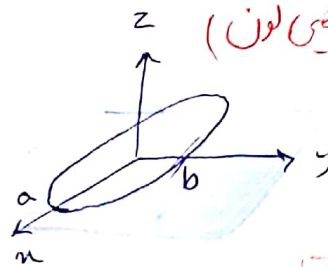
$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



۲- بیضی دایره (بیضی کون)

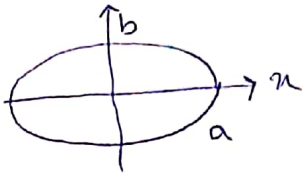


$$\frac{z}{c} = \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} \quad , c > 0$$

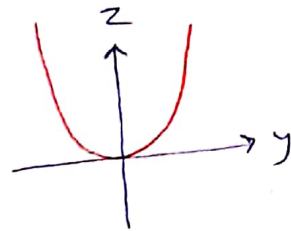
۳- سهمی دایره

$$z=0 \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 0 \Rightarrow x=y=0$$

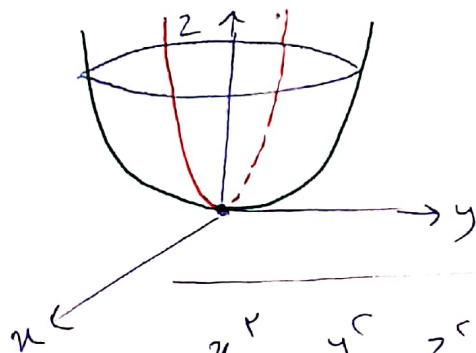
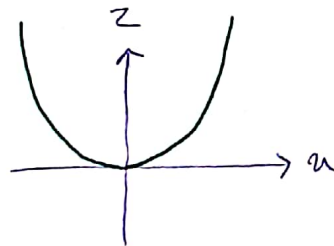
$$z=c \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 1 \Rightarrow$$



$$x=0 \Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{y^r}{b^r} \Rightarrow z = \frac{c}{b^r} y^r$$



$$y=0 \Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{x^r}{a^r} \Rightarrow z = \frac{c}{a^r} x^r$$

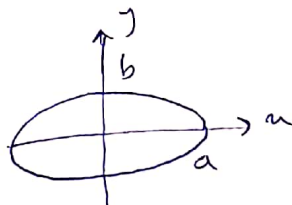


$$\frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = \frac{z^r}{c^r}$$

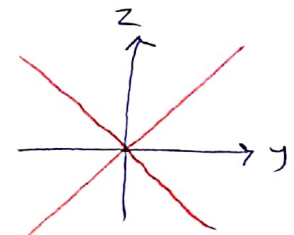
۴- مخروط

$$z=0 \Rightarrow x=y=0$$

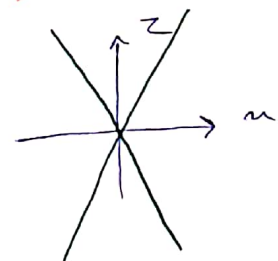
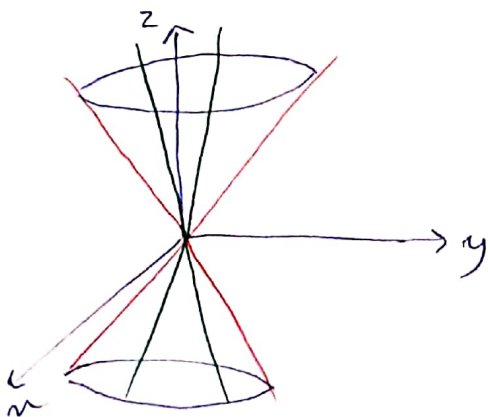
$$z=\pm c \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 1$$



$$x=0 \Rightarrow \frac{y^r}{b^r} = \frac{z^r}{c^r} \Rightarrow y^r = \frac{b^r}{c^r} z^r \Rightarrow y = \pm \frac{b}{c} z$$



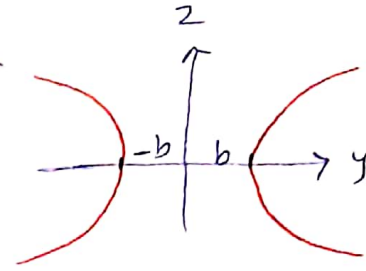
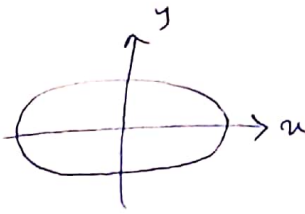
$$y=0 \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} = \frac{z^r}{c^r} \Rightarrow x^r = \frac{a^r}{c^r} z^r \Rightarrow x = \pm \frac{a}{c} z$$



۵- هذلولی دار یکپارچه.

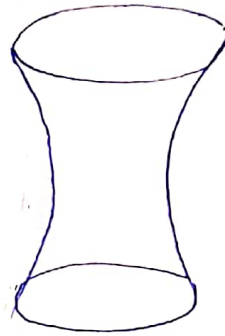
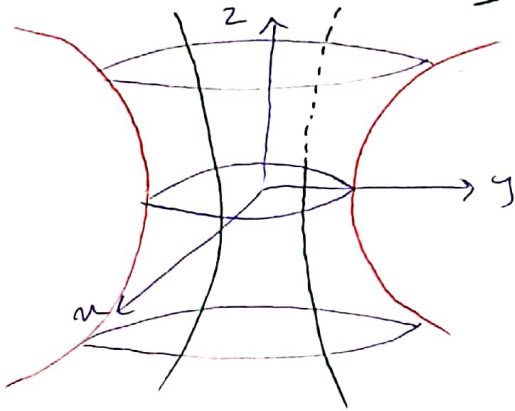
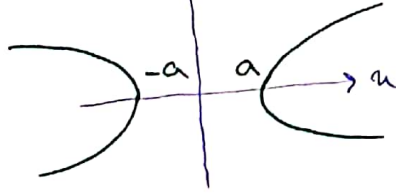
$$\frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} - \frac{z^r}{c^r} = 1$$

$$z=0 \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 1$$



$$x=0 \Rightarrow \frac{y^r}{b^r} - \frac{z^r}{c^r} = 1$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} - \frac{z^r}{c^r} = 1$$

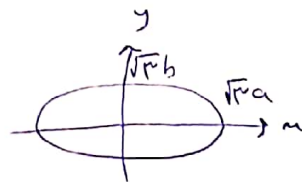


$$\frac{z^r}{c^r} - \frac{x^r}{a^r} - \frac{y^r}{b^r} = 1$$

۶- هذلولی دار دوپارچه.

$$\Rightarrow \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = \frac{z^r}{c^r} - 1 \Rightarrow \frac{z^r}{c^r} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{z^r}{c^r} \geq 1 \Rightarrow z \geq c \Rightarrow \begin{cases} z \geq c \\ z \leq -c \end{cases}$$

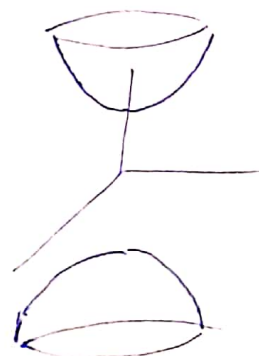
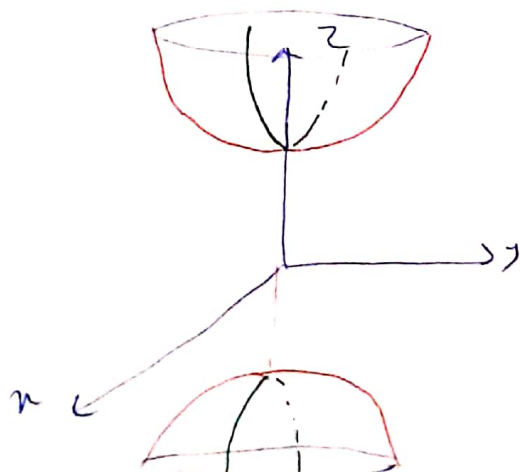
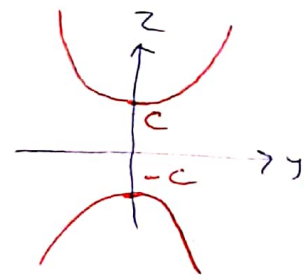
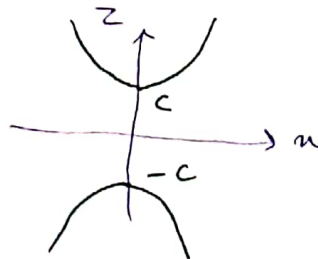
$$z = \pm c \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$



$$z = \pm c \Rightarrow \frac{x^r}{a^r} + \frac{y^r}{b^r} = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{z^r}{c^r} - \frac{y^r}{b^r} = 1$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{z^r}{c^r} - \frac{x^r}{a^r} = 1$$



مسأله‌ها

رویه‌های مذکور در مسائل ۱-۳۴ را رسم کنید. در مورد سهمیوارها،
هذلولیوارها و مخروطها، نوع رویه را ذکر کنید.

بیضیوارها

$$۹x^2 + y^2 + z^2 = ۹ \quad ۰.۱$$

$$۴x^2 + ۴y^2 + z^2 = ۱۶ \quad ۰.۲$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ۴ \quad ۰.۳$$

$$۹x^2 + ۴y^2 + z^2 = ۳۶ \quad ۰.۴$$

$$۴x^2 + ۹y^2 + ۲z^2 = ۳۶ \quad ۰.۵$$

$$۹x^2 + ۴y^2 + ۳۶z^2 = ۳۶ \quad ۰.۶$$

سهمیوارها

$$x^2 + y^2 = z \quad ۰.۷$$

$$x^2 + z^2 = y \quad ۰.۸$$

$$x^2 + ۴y^2 = z \quad ۰.۹$$

$$z = x^2 + ۹y^2 \quad ۰.۱۰$$

رویه‌های مذکور در مسائل ۳۵-۳۸، استوانه‌های سهموی مورد هستند. آنها را، همان‌طور که رویه‌های درجه دوم دیگر را رسم می‌کنید، بکشید.



$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \quad ۳۵ \\ x &= y^2 - z \quad ۳۶ \\ y &= x^2 + z \quad ۳۷ \\ z &= 4 - x^2 - y^2 \quad ۳۸ \end{aligned}$$

۳۹. خم

$$\mathbf{R}(t) = (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{2} \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{1-t}\mathbf{k}$$

در بازه $0 \leq t \leq 1$ باریک رویه درجه دوم واقع است. معادله‌ای برای این رویه پیدا کنید و نوع آن را مشخص کنید.

۴۰. الف) مساحت مقطع بیضیوار

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

با صفحه $z = z_1$ را با $A(z_1)$ نشان دهید و آن را به صورت تابعی از z_1 بیان کنید. (مساحت بیضی که نصف طول قطرهای آن A و B باشد، برابر πAB است.)
ب) حجم بیضیوار قسمت (الف) را با انتگرالگیری بیابید.
از برشهای عمود بر محور z استفاده کنید.
پ) حجم بیضیوار زیر را به دست آورید

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

اگر $a = b = c = 1$ ، آیا از پاسخ شما حجم کره‌ای به شعاع a به دست می‌آید؟



TOOLKIT PROGRAM
3D Grapher

۳.۱۵ مختصات استوانه‌ای و مختصات کروی

در این بخش، دو دستگاه جدید مختصات را که در مورد فضا بدکار می‌روند، معرفی می‌کنیم: دستگاه مختصات استوانه‌ای و دستگاه مختصات کروی. در دستگاه مختصات استوانه‌ای، استوانه‌هایی که محورشان در امتداد محور z است و صفحه‌هایی که شامل محور z هستند معادلات بسیار ساده‌ای دارند. در دستگاه مختصات کروی،

$$z = 8 - x^2 - y^2 \quad ۱۱$$

$$z = 18 - x^2 - 9y^2 \quad ۱۲$$

$$x = 2 - 2y^2 - z^2 \quad ۱۳$$

$$y = 1 - x^2 - z^2 \quad ۱۴$$

$$z = x^2 + y^2 + 1 \quad ۱۵$$

$$z = 4x^2 + y^2 - 4 \quad ۱۶$$

مخروطها

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad ۱۷$$

$$y^2 + z^2 = x^2 \quad ۱۸$$

$$x^2 + z^2 = y^2 \quad ۱۹$$

$$4x^2 + 9y^2 = z^2 \quad ۲۰$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36z^2 \quad ۲۱$$

$$2x^2 + 9z^2 = 9y^2 \quad ۲۲$$

هذلولیوارها

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad ۲۳$$

$$y^2 + z^2 - x^2 = 1 \quad ۲۴$$

$$(y^2/4) + (z^2/9) - (x^2/4) = 1 \quad ۲۵$$

$$(x^2/4) + (y^2/4) - (z^2/9) = 1 \quad ۲۶$$

$$(x^2/9) + (y^2/4) - z^2 = 1 \quad ۲۷$$

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1 \quad ۲۸$$

$$z^2 - (x^2/4) - y^2 = 1 \quad ۲۹$$

$$(y^2/4) - (x^2/4) - z^2 = 1 \quad ۳۰$$

$$(x^2/4) - (y^2/9) - z^2 = 1 \quad ۳۱$$

$$(x^2/4) - (z^2/4) - y^2 = 1 \quad ۳۲$$

سهمیوارهای هذلولوی

$$y^2 - x^2 = z \quad ۳۳$$

$$x^2 - y^2 = z \quad ۳۴$$

نقطه‌های استوانه‌ای. هر نقطه (x, y, z) در مختصات دکارتی، دارای مختصات (r, θ, z)

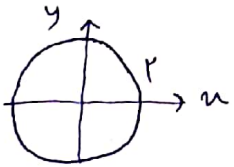
در مختصات استوانه‌ای است،

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{بنابراین} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctan } \frac{y}{x} \end{cases}$$

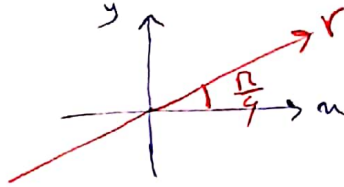
$\frac{r}{\theta}$

نکته: رویه‌های زیر را در مختصات استوانه‌ای رسم کنید.

۱) $r = 2$

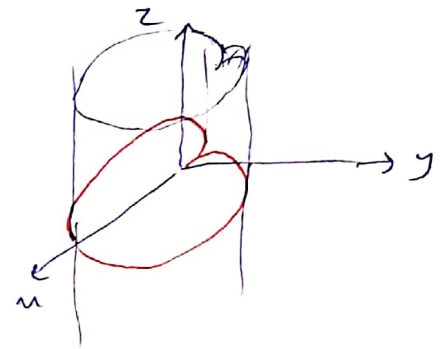
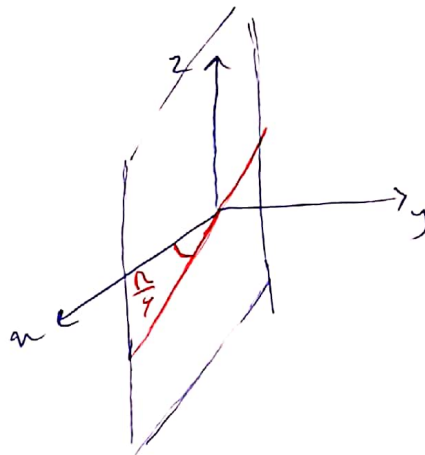
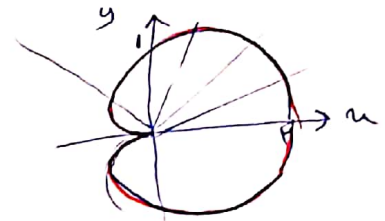


۲) $\theta = \frac{\pi}{4}$



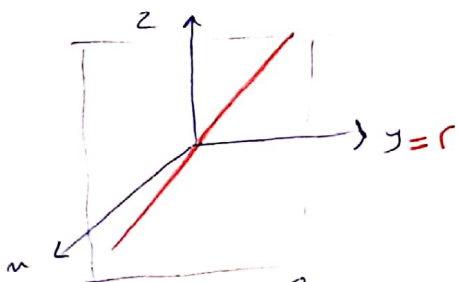
۳) $r = 1 + \cos \theta$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	2	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 + \frac{1}{2}$	1	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	2

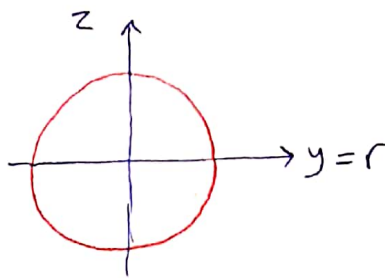


۴) $z = r$

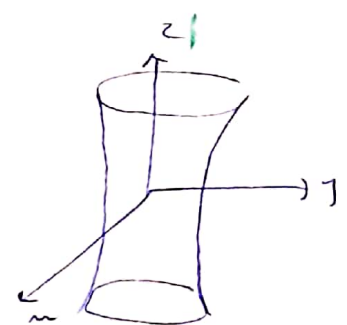
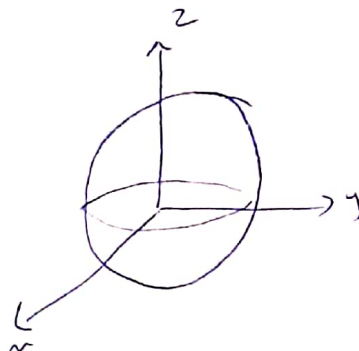
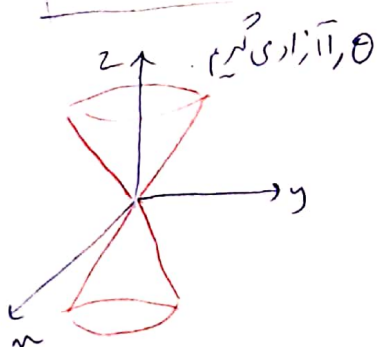
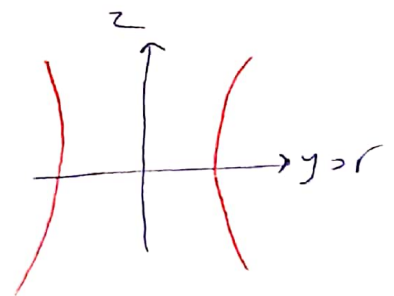
فرض می‌کنیم $\theta = \frac{\pi}{4}$



۵) $r^2 + z^2 = 1$

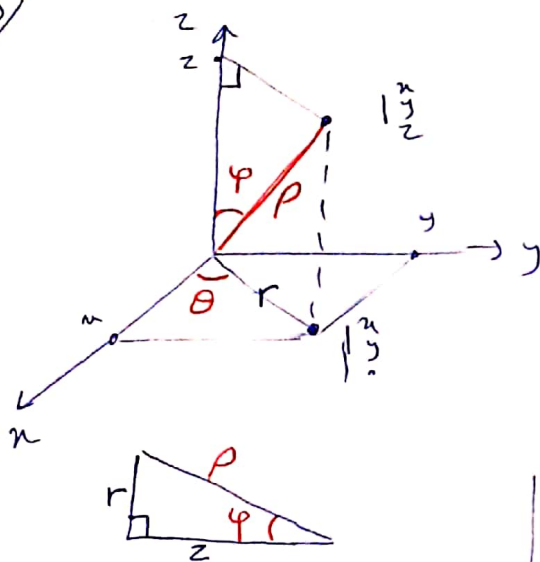


۶) $r^2 - z^2 = 1$



0/

مختصات کروی. نقطه (x, y, z) در مختصات دکارتی دارای
مختصات (ρ, φ, θ) در مختصات کروی است.



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\rho} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\cos \varphi = \frac{z}{\rho} \quad \tan \varphi = \frac{r}{z}$$

$$\sin \varphi = \frac{r}{\rho}$$

بنابراین

$$x = \rho \cos \theta = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

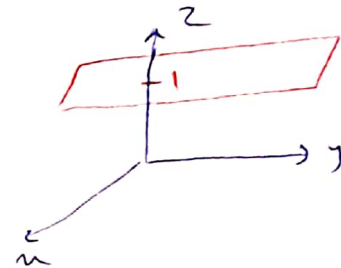
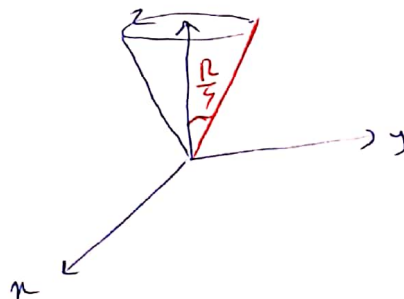
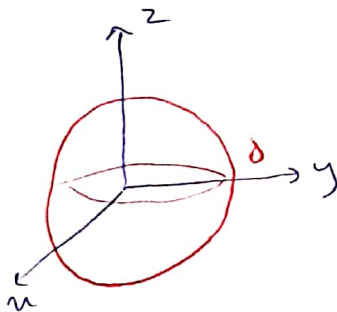
$$z = \rho \cos \varphi$$

مثال. رویه‌های زیر را رسم کنید.

۱) $\rho = a$

۲) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

۳) $\rho \cos \varphi = 1$

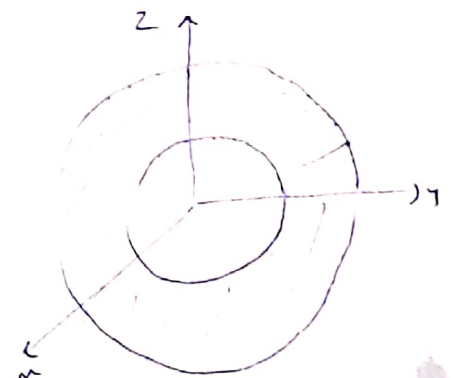
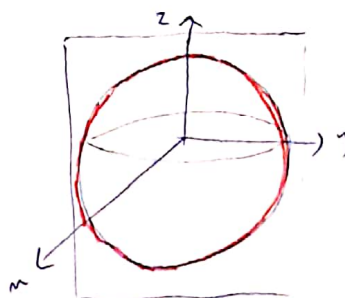
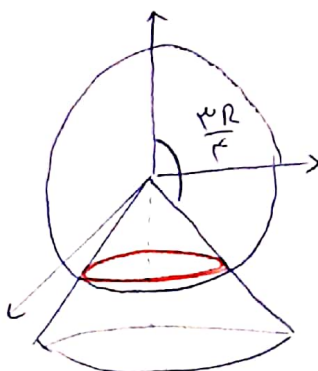


مثال. تساوی زیر را در روابط زیر صحت داشته رسم کنید.

۱) $\rho = r, \varphi = \frac{\pi R}{r}$

۲) $\theta = \frac{\pi}{\rho}, \rho = a$

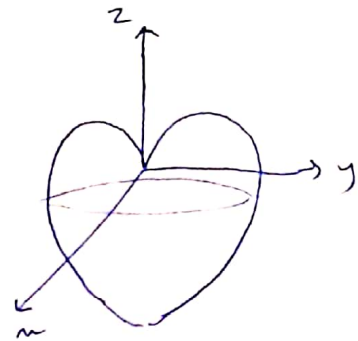
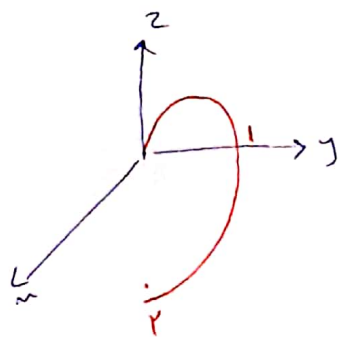
۳) $1 \leq \rho \leq 2$



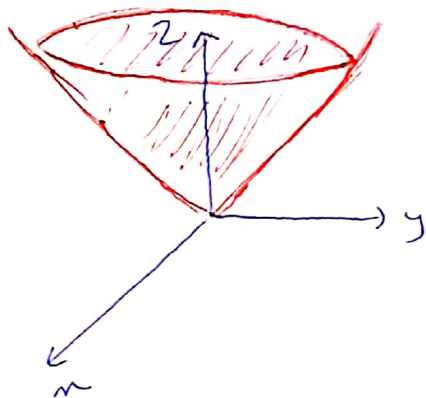
4)

$$\rho = 1 - \cos \varphi$$

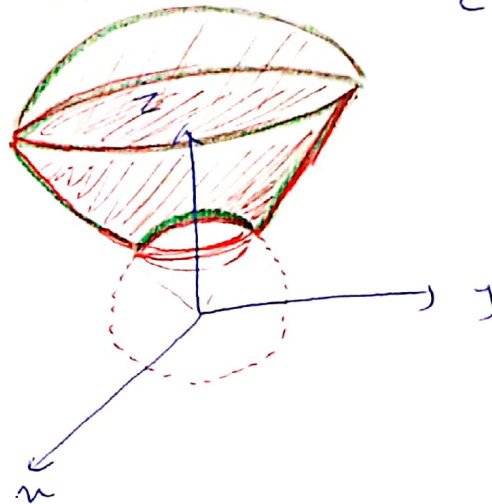
φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	π
ρ	1	$1 - \frac{1}{2}$	$1 - 1$	$1 - \frac{1}{2}$	1	$1 + \frac{1}{2}$	2



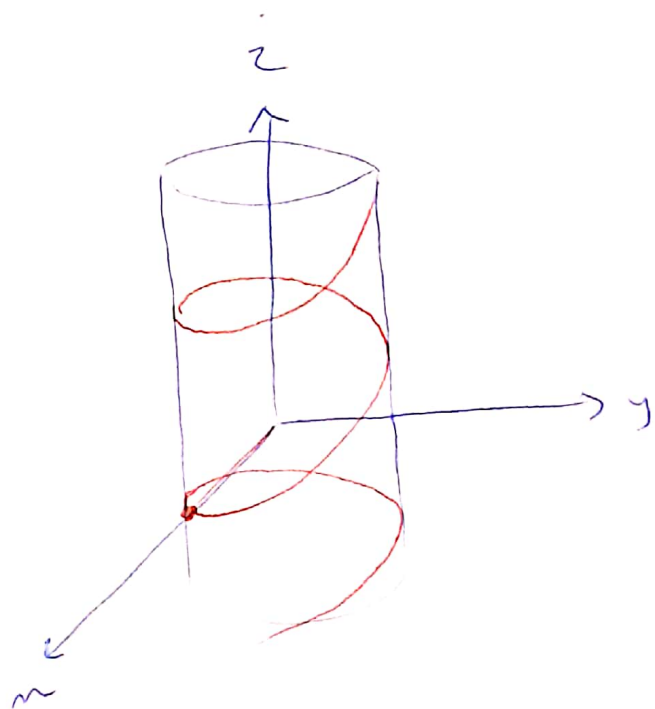
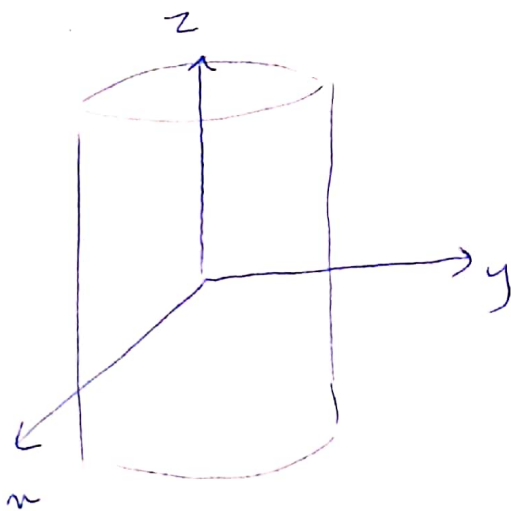
$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq \rho \leq 2$$



$$r = \rho, z = \frac{\theta}{\rho}$$



درمسأله‌های ۱۱-۲۰، هر معادله در یک دستگاه مختصات (دکارتی، استوانه‌ای، یا کروی) داده شده است. آن را به معادلاتی در دودستگاه دیگر تبدیل کنید. همچنین، مجموعه نقاطی را که به وسیله معادله تعریف می‌شوند، مشخص کنید.

$$r=0 \quad 0.11$$

$$x^2+y^2=5 \quad 0.12$$

$$z=0 \quad 0.13$$

$$z=-2 \quad 0.14$$

$$\rho \cos \phi = 3 \quad 0.15$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=z \quad 0.16$$

$$\rho \sin \phi \cos \theta = 0 \quad 0.17$$

$$\tan^2 \phi = 1 \quad 0.18$$

$$x^2+y^2+z^2=4 \quad 0.19$$

$$\rho = 6 \cos \phi \quad 0.20$$

درمسأله‌های ۲۱-۲۸، مجموعه‌هایی از نقاط را که مختصات استوانه‌ای آنها در معادله یا جفت معادله داده شده صدق می‌کنند، وصف کنید.

$$r=2 \quad 0.21$$

$$r^2+z^2=1 \quad 0.22$$

$$r=1-\cos \theta \quad 0.23$$

$$r=2 \cos \theta \quad 0.24$$

$$r=2, \quad z=3 \quad 0.25$$

$$\theta = \pi/6, \quad z=r \quad 0.26$$

$$r=3, \quad z=\theta/2 \quad 0.27$$

$$r^2-z^2=1 \quad 0.28$$

درمسأله‌های ۲۹-۳۴، مجموعه‌هایی از نقاط را که مختصات کروی آنها در معادله یا جفت معادله داده شده صدق می‌کنند، وصف کنید.

$$\phi = \pi/6 \quad 0.29$$

$$\rho = 6, \quad \phi = \pi/6 \quad 0.30$$

$$\rho = 5, \quad \theta = \pi/2 \quad 0.31$$

$$\theta = \pi/2, \quad \phi = \pi/2 \quad 0.32$$

$$\theta = \pi/2, \quad \rho = 2 \cos \phi \quad 0.33$$

۰.۳۴ $\rho = 1 - \cos \phi$ (دانه‌ماهی: بودن θ در این معادله، نشان دهنده تقارن نسبت به محور z است. مقطع این رویه با صفحه xy چیست؟)

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. استوانه چیست؟ چند معادله مثال بسازید که تعریف کننده استوانه‌هایی در مختصات دکارتی باشند؛ و نیز چند مثال در مختصات استوانه‌ای بیاورید. در مورد رسم استوانه‌ها چه توصیه‌هایی می‌توانید ارائه کنید؟

۲. مثالهایی از بیضیوار، سهمیوار، و هذلولیوار بیاورید (با ذکر معادله و رسم شکل). در مورد رسم این رویه‌ها چه توصیه‌هایی می‌توانید ارائه کنید؟

۳. مختصات استوانه‌ای و کروی چگونه تعریف می‌شوند؟ نمودارهایی رسم کنید که نشان بدهند مختصات استوانه‌ای و کروی چگونه به مختصات دکارتی فضایی مربوط می‌شوند. در دستگاه‌های سه‌مختصی چه مجموعه‌هایی دارای معادلات «مختص-ثابت» (نظیر $x=1, r=1, \phi=\pi/3$) هستند؟

مسأله‌های گوناگون

درمسأله‌های ۱-۱۲، هر معادله، تعریف کننده مجموعه‌ای در صفحه و مجموعه‌ای در فضای سه بعدی است. در مورد هر معادله، هر دو مجموعه را توصیف کنید.

$$x+y=1 \quad 0.1$$

$$x=0 \quad 0.2$$

$$x^2+y^2=4 \quad 0.3$$

$$x^2+4y^2=16 \quad 0.4$$

$$y^2=-x \quad 0.5$$

$$r=1+\cos \theta \quad 0.6$$

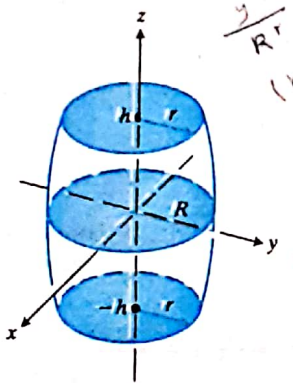
$$r=\cos 2\theta \quad 0.7$$

$$r=\frac{2}{(2-\cos \theta)} \quad 0.8$$

$$r=-\sin \theta \quad 0.9$$

$$r \cos \theta = 1 \quad 0.10$$

اینکه، فرض کنید $r=0$ و $h=R$ و در نتیجه، بشکه به شکل کره باشد. آیا از فرمول شما حجم این کره به دست می‌آید؟



۲۰۰۱۵. بشکه مورد بحث در مسأله ۲۳.

۲۴. نشان دهید حجم قطعه‌ای که از تقاطع سهمیوار بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

با صفحه $z=h$ به دست می‌آید، برابر است با حاصلضرب نصف مساحت قاعده قطعه در ارتفاع آن.

۲۵. الف) مطلوب است حجم جسم محدود به هذلولیوار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

و صفحات $z=0$ و $z=h$ با ضابطه $h > 0$.

ب) پاسخ خود به قسمت (الف) را بر حسب h و A_0 و A_h بیان کنید که A_0 و A_h مساحت نواحی حاصل از تقاطع صفحات $z=0$ و $z=h$ با هذلولیوار هستند.

پ) نشان دهید که حجم مورد نظر از فرمول زیر نیز به دست می‌آید

$$V = \frac{h}{6} (A_0 + 4A_m + A_h)$$

که در آن، A_m مساحت مقطع هذلولیوار با صفحه $z=h/2$ است.

۲۶. ذره‌ای چون P در امتداد سیم پیچی به شکل یک پیچ مستدیر قائم (شکل ۲۱-۱۵) بدون اصطکاک می‌لغزد. اگر جهت مثبت محور z را به سمت پایین بگیریم، مختصات استوانه‌ای P در لحظه t در معادلات $r=a$ ، $r=b\theta$ ، $z=b\theta$ صدق می‌کنند که a و b ثابت‌های مثبتی هستند. چنانچه ذره در $t=0$ با سرعت صفر شروع به حرکت کند و تحت نیروی گرانش پایین بیاید، قانون بقای

$$r = \sin 2\theta \quad ۱۱$$

$$r = \theta \quad ۱۲$$

در مسأله‌های ۱۳-۱۸، مطلوب است توصیف مجموعه‌هایی در فضا که با معادله‌ها و نامعادله‌های داده شده تعریف می‌شوند.

$$3 \leq \rho \leq 5 \quad ۱۳$$

$$r \geq 2, \quad \rho \leq 5 \quad ۱۴$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \quad ۱۵$$

$$2x^2 + 9y^2 \leq 36 \quad ۱۶$$

$$\rho = 1, \quad \theta = \phi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad ۱۷$$

$$x^2 + y^2 = f(z) \quad ۱۸$$

۱۹. در رویه‌ای که معادله‌اش در مختصات کروی به شکل $\rho = f(\phi)$ است چه تقارنی می‌توان یافت؟

۲۰. فرض کنید PO فاصله $P(x, y, z)$ از مبدأ و PA فاصله P از نقطه $A(0, 0, 3)$ است. برای رویه‌هایی که با روابط زیر تعریف می‌شوند، معادلاتی دکارتی بنویسید

$$PO = 2PA \quad \text{الف)}$$

$$PO + PA = 6 \quad \text{ب)}$$

$$|PO - PA| = 2 \quad \text{پ)}$$

۲۱. معادله

$$r^2 + z^2 = 4r \cos \theta + 6r \sin \theta + 2z$$

معادله یک کره در مختصات استوانه‌ای است. مختصات دکارتی مرکز کره را پیدا کنید.

۲۲. معادلات پارامتری $x=x(\theta)$ ، $y=y(\theta)$ و $z=z(\theta)$ را برای خمی که فصل مشترک کره $\rho=a$ با صفحه $y+z=0$ است پیدا کنید.

۲۳. بشکه‌ای به شکل بیضیواری است که دو انتهای آن با صفحات عمود بر محور z بریده شده و مقطع‌های حاصل با هم برابرند (شکل ۲۰-۱۵). ارتفاع بشکه $2h$ ، شعاع مقطع وسطی R ، و شعاع هر دو مقطع انتهایی r است. فرمولی برای حجم بشکه پیدا کنید. سپس دو موضوع را بررسی کنید. اول اینکه، فرض کنید این بشکه به شکل استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع $2h$ درآید. در این صورت، $r=R$. آیا از فرمول شما حجم این استوانه به دست می‌آید؟ دوم