ساختار نحوی منطق محمولات.

- سیستم استنتاج طبیعی منطق محمولات (PN)

مثال زیر را در نظر بگیرید.

سقراط انسان است.	P
هر انسانی فانی است.	Q
سقراط فانی است.	$\therefore R$

استدلال این عبارات در منطق گزاره‌ها نه از صوری و نه از نظر معنایی درست و معتبر نیست. چون درستی و اعتبار این استدلال به ساختار درونی و اجزای مقدمات و نتیجه آن وابسته است. چنین استدلالهایی در منطق محمولات مورد بحث قرار می‌گیرد.

زبان صوری P_N.

۱- واژگان P_N.

- جمله های اتمی $\quad P, Q, R, \ldots, P', Q', R', \ldots$
- ثوابت منطقی $\quad \sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,)$
- محمول ها $\quad A_1, B_1, \ldots, O_1, A_2, B_2, \ldots, O_2, \ldots$

(اندیس محمول ها نشان‌دهنده تعداد موضع آنهاست.)

- عبارتهای فردی
  - ثابت های فردی (حروف کوچک از a تا e) $\quad a, b, c, d, e, a', b', c', d', e', \ldots$
  - متغیرهای فردی $\quad x, y, z, x', y', z', \ldots$

هر رشته متناهی از عبارتهای موجود در واژگان L_P (زبان صوری منطق محمولات) را یک «عبارت» می نامند.

برای آشنایی با قواعد ساخت P_N، فرامتغیرها از الفبای یونانی به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

- برای نشان دادن فرمول‌ها: $\varphi, \psi, \theta, \ldots$
- " " " محمول‌ها: Φ
- " " " متغیرهای فردی: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$
- " " " ثابت‌های فردی: $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$

قواعد ساخت P_N.

FR_1. هر جملهٔ ش.ن. یک فرمول است.

FR_2. اگر φ یک فرمول باشد، $\sim\varphi$ هم فرمول است.

FR_3. اگر φ و ψ فرمول باشند، عبارات $(\varphi \wedge \psi)$، $(\varphi \vee \psi)$، $(\varphi \to \psi)$، و $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ هم فرمولند.

FR_4. اگر Φ^n یک محمول n-موضعی و β_1 تا β_n ثابت‌های فردی باشند، آنگاه $\Phi\beta_1 \ldots \beta_n$ یک فرمول است مانند $Fa, Gab, Kdeb, \ldots$

FR_5. اگر α یک متغیر فردی و φ_α فرمولی از P_N باشد، $(\forall\alpha)\varphi$ و $(\exists\alpha)\varphi$ نیز فرمول هستند به شرطی که:

- φ شامل مورد آزادی از متغیر α باشد.
- φ شامل سوری بر حسب α نباشد.

$\forall$ سور کلی یا عمومی و $\exists$ سور جزئی یا وجودی نامیده می‌شود. در عبارت $(\forall\alpha)\varphi$ و $(\exists\alpha)\varphi$، به φ، دامنهٔ سور گفته می‌شود. در واقع دامنهٔ سور، کوتاه‌ترین فرمول واقع در سمت راست سور است. مثال:

$$(\forall x)\underbrace{(Fx \to Gx)}_{\text{دامنه سور}}$$

$$(\forall x)\underbrace{Fx}_{\text{دامنه سور}} \to Gx$$

- سوری از متغیر x را در فرمول φ ، **سور آزاد** آن متغیر می‌نامند هرگاه در دامنه سور $(\forall x)$ یا $(\exists x)$ قرار نگیرد. برای مثال در فرمول‌های زیر متغیر x سور آزاد دارد و به آن متغیر آزاد می‌گویند.

$$Fx \to Gx \qquad (\forall y)\, Fxy \to (\exists z) Gz$$

- در صورتی که متغیر x در دامنه سور برحسب x قرار گیرد، به آن «**سور پابند**» آن متغیر می‌گویند. مثلاً در فرمول بالا، y در Fxy و z در Gz به ترتیب در دامنه سورهای $\forall y$ و $\exists z$ هستند و سور پابند هستند و به آنها متغیر پابند می‌گویند.

- اگر فرمول φ دارای متغیر آزاد باشد به آن **تابع گزاره‌ای** یا **تابع جمله‌ای** می‌گویند.

- تابع گزاره‌ای با توجه به تعداد متغیرهای آزاد، تابع گزاره‌ای یک متغیره، دو متغیره، ... نامیده می‌شود. مثلاً Fx تابع یک متغیره و $Fxya$ دو متغیره است.

- در صورتی که همه متغیرها در یک فرمول پابند باشند به آن فرمول **جمله** یا **گزاره** گفته می‌شود.

تقسیم‌بندی فرمول‌های مسوّر:

- فرمول یک محمولی یک سوری. $(\forall x)(Fx \to Gx)$
- فرمول یک محمولی چندسوری. $(\forall x)(\exists y)\big((Gx \wedge Fy) \to D_z\big)$
- فرمول چندمحمولی یک سوری. $(\forall x) Fax$
- فرمول چندمحمولی چندسوری. $(\forall x)(\forall y)(Fxy \leftrightarrow Fyx)$

با توجه به FR_5 ، عبارات زیر فرمول نیستند.

$(\forall x)\, Fa$ (سور تهی) دارای متغیر آزاد نیست.

$(\forall x)\,(Fx \to (\exists x)Gx)$ دامنه سور اول شامل سور دیگری است.

$(\forall x)(\exists x)Gxx$ 〃

کاربست R_4 - مجموعه کاربست R_4 P_4 تهی است.

تمرین. در عبارات زیر، فرمول‌ها را از غیرفرمول‌ها جدا کنید. در بین فرمول‌ها، مشخص کنید کدام گزاره و کدام تابع گزاره‌ای است.

۱. $(\forall x)\, L_{zx}$

۲. $(Fy) \wedge (Gx)$

۳. $Fx \wedge Ga$

۴. $(\exists x\, Fx \wedge Gx)$

۵. $(\forall y)(Fy)$

۶. $(\exists x)(\forall y)Fx$

۷. $(\exists x)(\forall x)(Fx \to \sim Gx)$

۸. $(\exists x)Px \leftrightarrow (\exists x)Gx$

۹. $(\exists G)\left((\forall x)Gx \to (\forall y)Fy\right)$

۱۰. $(\forall x)(\forall y)\left(Axy \leftrightarrow (\exists z)(Gy \to Fxyz)\right)$

ترجمه از زبان طبیعی به زبان صوری منطق محمولات.

مثال ① ابن سینا منطق دان است. ——— منطق دان است. (محمول تک موضعی)

② قله اورست بلندتر از قله دماوند است. ——— بلندتر از ——— است. (۲ موضعی)

③ حسن کتاب خود را به علی می دهد. ——— ، ——— را به ——— می دهد. (۳ موضعی)

① Aa ② Bbc ③ $Cdea'$.

گزاره های سوردار.

① گزاره های با محمول تک موضعی و سور واحد.

مثال.

۱. هر مثلث، شکل است. (هر الف، ب است.) موجبه کلیه A

۲. هیچ اروپایی، آسیایی نیست. (هیچ الف، ب نیست.) سالبه کلیه E

۳. بعضی منطق دانان، ریاضی دان هستند. (بعضی الف، ب است.) موجبه جزئیه I

۴. بعضی انسانها، سفید پوست نیستند. (بعضی الف، ب نیست.) سالبه جزئیه O

فرمول بندی گزاره های فوق در منطق محمولات جدید.

۱. به ازای هر شی، اگر آن شی مثلث باشد، آنگاه آن شی، شکل است.

Bx = x شکل است ، Ax = x مثلث است

$(\forall x)(Ax \to Bx)$

۲. به ازای هر شی، اگر آن شی اروپایی باشد، آنگاه آن شی آسیایی نیست.

Dx = x آسیایی است ، Cx = x اروپایی است

$(\forall x)(Cx \to \sim Dx)$

۳. شیئی وجود دارد که آن شئ منطق‌دان است و آن شئ ریاضیدان است.

$(\exists x)(Ex \wedge Fx)$

$Ex =$ x منطق‌دان است $=$ ، $Fx =$ x ریاضی‌دان است

۴. شیئی هست که آن شئ انسان است و آن شئ سفیدپوست نیست.

$(\exists x)(Gx \wedge \sim Hx)$

$Gx =$ x انسان است ، $Hx =$ x سفیدپوست است.

مثال. هر هواپیمای یا حامل هلیم است یا هیدروژن.

$Ax =$ x هواپیما است ، $Bx =$ x حاوی هلیم است ، $Cx =$ x حامل هیدروژن است

$(\forall x)[Ax \rightarrow (Bx \vee Cx)]$

مثال. هر شکل سه ضلعی دارای سه ارتفاع است.

$Dx =$ x شکل است ، $Ex =$ x سه ضلعی است ، $Fx =$ x دارای ۳ ارتفاع است

$(\forall x)[(Dx \wedge Ex) \rightarrow Fx]$

مثال. سارها همگی سمی نیستند. (بعضی از سارها سمی نیستند.)

$(\exists x)(\overset{\text{سار بودن}}{Ax} \wedge \sim \overset{\text{سمی بودن}}{Bx})$

مثال. هیچ مربعی مثلث نیست. (هر مربعی غیر مثلث است.)

$(\forall x)(\overset{\text{مربع بودن}}{Ax} \rightarrow \sim \overset{\text{مثلث بودن}}{Bx})$

(۱) گزاره‌های با محمول یک موضعی و سور تعدد.

مثال. اگر تمام پلنگ‌ها گوشتخوار باشند، بعضی حیوانات گوشتخوارند.

x پلنگ است $= Ax$ $\qquad$ x گوشتخوار است Bx $\qquad$ $Cx =$ است x حیوان

$$(\forall x)(Ax \to Bx) \longrightarrow (\exists y)(Cy \wedge By)$$

مثال. اگر چیزی گم شود، آنگاه اگر هیچ پلیس خبردار نشود، آن چیز بازگردانده نمی‌شود.

x گم می‌شود $= Ax$ $\qquad$ x پلیس است $= Bx$ $\qquad$ $Cx =$ x خبردار می‌شود

x برگردانده می‌شود $= Dx$

$$(\exists x)Ax \longrightarrow \left((\forall y)(By \to \sim Cy) \longrightarrow \sim Dx\right)$$ ✗ غلط

عبارت درست: چیزی اگر گم شود، آنگاه ....

$$(\forall x)\left(Ax \to \left((\forall y)(By \to \sim Cy) \to \sim Dx\right)\right)$$

تمرینات ص ۸۸

۱- سقراط و ارسطو و افلاطون فیلسوفند.

$$Fa \wedge Fb \wedge Fc$$

۲- شهر قم بین تهران و اصفهان است.

$$B_{abc}$$

۳- اگر عدد ۲ کوچکتر از ۱۰ و عدد ۱۰ کوچکتر از ۱۵ باشد، آنگاه عدد ۲ کوچکتر از عدد ۱۵ است.

$$(A_{ab} \wedge A_{bc}) \to A_{ac}$$

۳) گزاره‌های با محمول چند موضعی و سور واحد

مثال

- اگر کسی حسن را ببیند شادمان می‌شود.

Am = x انسان است B_{xy} = x، y را می‌بیند Cx = x شادمان می‌شود

$$(\forall x)\big((Ax \wedge Bxa) \rightarrow Cx\big)$$

- اگر حسن خودش را دوست نداشته باشد، هیچ کس را دوست ندارد.

x، y را دوست دارد = Axy x انسان است = Bx.

$$\sim Aaa \rightarrow (\forall x)(Bx \rightarrow \sim Aax)$$

۴. گزاره‌های با محمول چند موضعی و سور متعدد.

مثال.

- هر پدری فرزندی دارد.

Ax = x پدر بودن Bx = x فرزند است x، y را دارد = Cxy.

$$(\forall x)\big[Ax \rightarrow (\exists y)(By \wedge Cxy)\big) \quad (*)$$

- هیچ کس تمامی کتابها را نخوانده است.

Ax = x انسان است Bx = x کتاب است x، y را خوانده است = Cxy

$$(\forall x)\big(Ax \rightarrow \sim(\forall y)(By \rightarrow Cxy)\big)$$

$$(\forall x)\big(Ax \rightarrow (\exists y)(By \wedge \sim Cxy)\big)$$

در مثال اول اگر بدانیم که متغیر x (عام کش) مجموعه پدران و y عام کش متغیر، مجموعه فرزندان باشد عبارت (*) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$(\forall x)(\exists y)\,Cxy$$

مثال‌هایی از عبارات و تعاریف ریاضی.

در مثال‌های ۱ تا ۹ فرض کنید عالم سخن، اعداد حقیقی هستند.

۱) مربع هر عددی، نامنفی است. (هر عددی دارای مربع نامنفی است.)

A_x : مربع نامنفی داشتن

$(\forall x)\, A_x$

یا $(\forall x)\,(x^2 \geq 0)$ یا $\forall x\,(x^2 \geq 0)$

---

۲) عمل جمع جابجایی است. (به ازای هر دو عدد x و y، عمل جمع جابجایی است.)

A_{xy} : مجموع x و y

$(\forall x)(\forall y)\,(A_{xy} \equiv A_{yx})$

یا $(\forall x)(\forall y)\,(x+y = y+x)$ یا $\forall x\, \forall y\,(x+y = y+x)$

---

۳) عمل جمع دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. (به ازای هر ۳ عدد x، y و z، عمل جمع شرکت‌پذیر است.)

$A_{xyz} = (x+y)+z$ ، $B_{xyz} = x+(y+z)$

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(A_{xyz} \equiv B_{xyz})$

یا $\forall x\, \forall y\, \forall z\,((x+y)+z = x+(y+z))$

---

۴) هر عدد منفی، دارای توان ۳ (مکعب) منفی است.

A_x = منفی بودن عدد

B_x = منفی بودن توان ۳ عدد.

$(\forall x)\,(A_x \to B_x)$

یا $\forall x\,(x<0 \Rightarrow x^3<0)$.

۵) اگر دو عدد مربع یکسان داشته باشند، آنگاه قدر مطلق یکسان دارند.

A_{xy} = یکسان بودن مربع x و y B_{xy} = یکسان بودن قدر مطلق x و y.

$(\forall x)(\forall y)(A_{xy} \to B_{xy})$

یا $\forall x \forall y \left((x^2 = y^2) \Rightarrow |x| = |y| \right)$

---

۶) برای اعداد در بازه $[0,1]$، جذر عدد بزرگتر یا مساوی با عدد است.

A_x = قرار داشتن عدد در بازه $[0,1]$ ، B_{xy} = جذر x بودن y

C_{xy} = بزرگتر یا مساوی بودن y از x.

$(\forall x)\left(A_x \to (\exists y)(B_{xy} \wedge C_{xy}) \right)$

$\forall x \in [0,1] \; (\sqrt{x} \geq x)$

---

۷) عبارت $x \geq x^2$ دارای جواب است.

$\exists x (x \geq x^2)$

عبارت $x^2 + y^2 = 2xy$ دارای جواب است:

$\exists x \exists y (x^2 + y^2 = 2xy)$

---

۸) بعضی از اعداد اول، زوج هستند.

$\exists x \left((x \text{ زوج است}) \wedge (x \text{ اول است}) \right)$

---

۹) • جمع هر دو عدد زوج، زوج است.

E_x = زوج بودن عدد E_{xy} زوج بودن جمع دو عدد x و y.

$(\forall x)(\forall y)(E_x \wedge E_y \to E_{xy})$

• دو عدد زوج موجودند که جمع آنها زوج نیست.

(نقیض عبارت بالا)

$(\exists x)(\exists y)(E_x \wedge E_y \wedge \sim E_{xy})$

تعریف تابع کراندار. تابع f کراندار است هرگاه مقادیر آن بین دو عدد ثابت قرار گیرد.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x)$$

$$\forall x \in D_x \qquad -M \leq f(x) \leq M$$

کدام عبارت زیر درست است؟

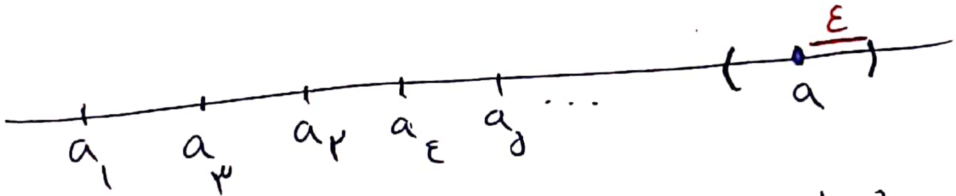
$$\forall x \in D_f \ (\exists M \quad -M \leq f(x) \leq M)$$

$$\exists M \ (\forall x \in D_f \quad -M \leq f(x) \leq M)$$

$$\forall x \in D_f \quad \equiv \quad \forall x \ (x \in D_f)$$

فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. تعریف همگرایی دنباله $(a_n)_n$ به a را بنویسیم.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	۱	۲	۳	۴	۵	...
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...



مثال

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \longrightarrow 0$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \cdots \quad 0$$

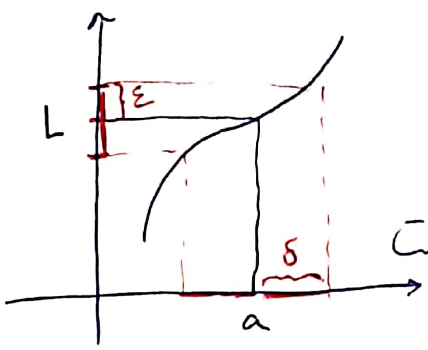
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \ni \quad n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

به قسمی که

$$\exists N > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

نادرست

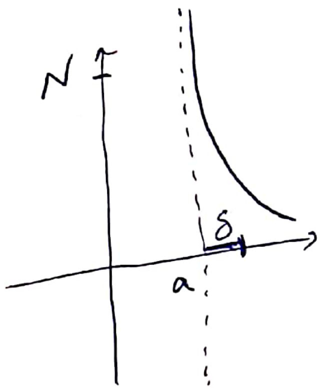
تعریف $\lim_{x\to a} f(x)=L$ را بنویسید.



$\forall \varepsilon>0\ \ \exists \delta>0\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

نادرست $\exists \delta>0\ \ \forall \varepsilon>0\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

تعریف $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ را بنویسید.



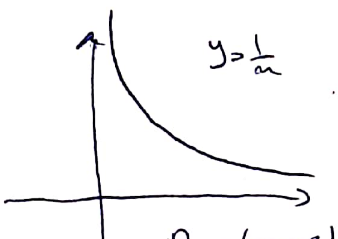
$\forall N>0\ \ \exists \delta>0\ \ x-a\ \ \delta \Rightarrow f(x)>N$

تعریف پیوستگی f: f در a پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

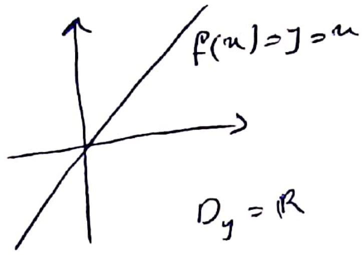
$\forall \varepsilon>0\ \ \exists \delta>0\ \ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

تعریف پیوستگی یکنواخت. می‌خواهیم f(x) و f(y) به اندازه‌ای که می‌خواهیم به هم نزدیک باشند به شرطی که x و y به اندازه کافی به هم نزدیک باشند.

$\forall \varepsilon>0\ \ \exists \delta>0\ \ \forall x\ \forall y\ \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$



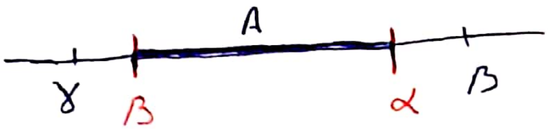
$D_y=(0,+\infty)$

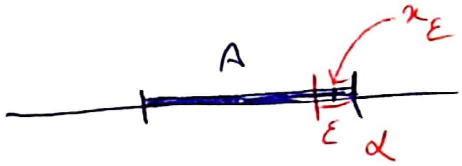


$D_y=\mathbb{R}$

تعریف سوپریمم و اینفیمم یک مجموعه.

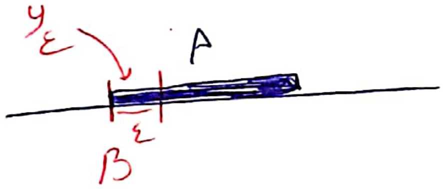
فرض کنید A یک مجموعه از اعداد باشد. سوپریمم مجموعه A، عددی مانند α است که α، کوچکترین کران بالای A است. همچنین اینفیمم مجموعه A، عددی مانند β است که β، بزرگترین کران پایین A است.





تعریف α سوپریمم A است.

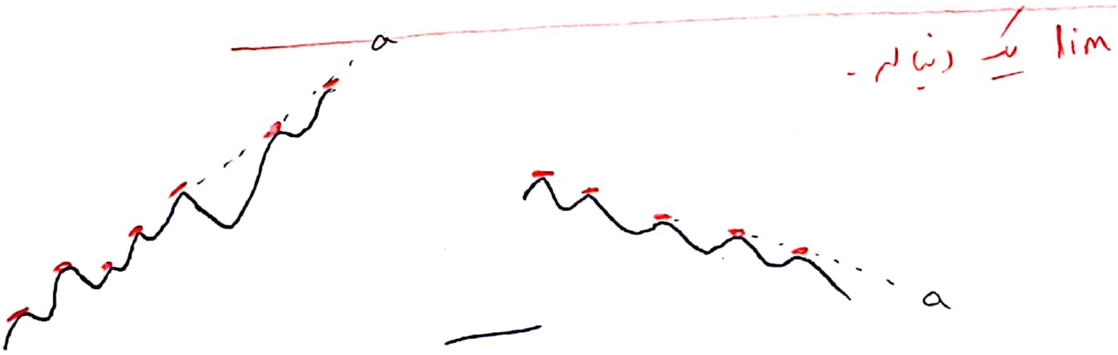
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists x_\varepsilon \quad \ni \quad \alpha-\varepsilon<x_\varepsilon$$



تعریف β اینفیمم A است.

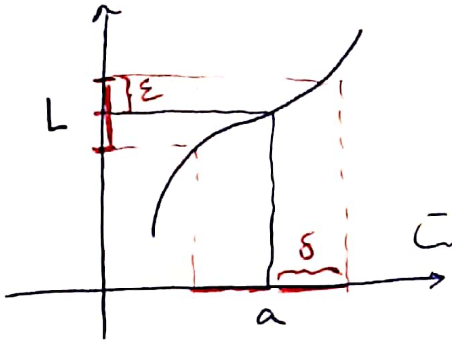
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists y_\varepsilon \quad \ni \quad \beta+\varepsilon>x_\varepsilon$$

تعریف lim sup یک دنباله.



$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$$

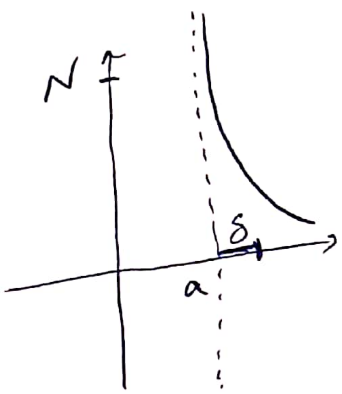
تعریف $\lim_{x\to a} f(x) = L$ را بنویسید.



$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\exists \delta>0 \quad \forall \varepsilon>0 \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ نادرست

تعریف $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ را بنویسید.



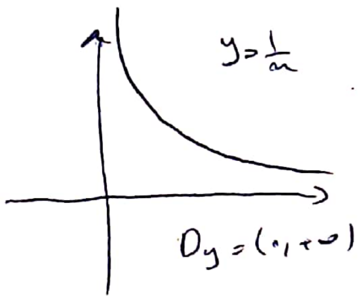
$\forall N>0 \quad \exists \delta>0 \quad x-a<\delta \Rightarrow f(x)>N$

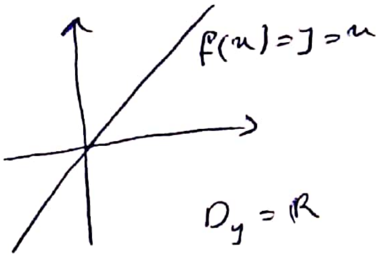
تعریف پیوستگی f: f در a پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

تعریف پیوستگی یکنواخت. می‌خواهیم f(x) و f(y) به اندازه‌ای که می‌خواهیم به هم نزدیک باشند، شرطی که x و y به اندازه کافی به هم نزدیک باشند.

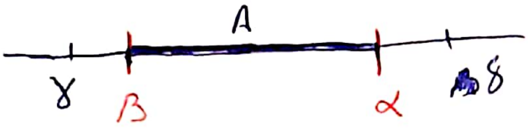
$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \ \forall y \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

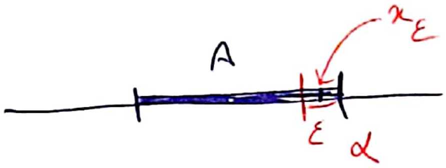




تعریف سوپریمم و اینفیمم یک مجموعه.

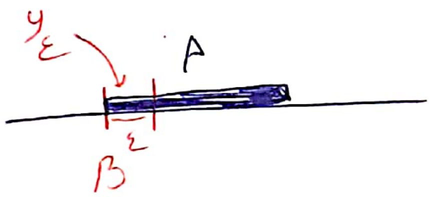
فرض کنید A یک مجموعه از اعداد باشد. سوپریمم مجموعه A، عددی مانند α است که α، کوچکترین کران بالای A است. همچنین اینفیمم مجموعه A، عددی مانند β است که β، بزرگترین کران پایین A است.





تعریف α سوپریمم A است.

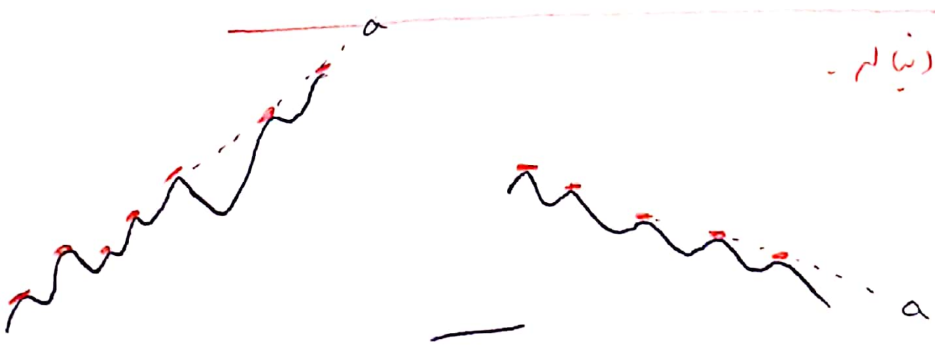
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists x_\varepsilon \quad \ni \quad \alpha-\varepsilon<x_\varepsilon$$



تعریف β اینفیمم A است.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists y_\varepsilon \quad \ni \quad \beta+\varepsilon>y_\varepsilon$$

تعریف lim sup یک دنباله.



$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$$

- هرکس که سیبی می‌خورد، میوه‌ای می‌خورد .

$Ax =$ x انسان است $\qquad$ $Bx =$ x سیب است $\qquad$ $Cx =$ x میوه است

$Dxy =$ x ، y را می‌خورد

$$(\forall x)\big((Ax \wedge (\exists y)(By \wedge Dxy)) \rightarrow (\exists z)(Cz \wedge Dxz)\big)$$

$$(\forall x)\big(Ax \rightarrow ((\exists y)(By \wedge Dxy) \rightarrow (\exists z)(Cz \wedge Dxz))\big)$$

کدام یک از عبارت‌های زیر درست است ؟

$$(\forall x)(Px \wedge Qx) \equiv ((\forall x)Px) \wedge ((\forall x)Qx)$$

$$(\forall x)(Px \vee Qx) \equiv ((\forall x)Px) \vee ((\forall x)Qx)$$

$$(\exists x)(Px \wedge Qx) \equiv ((\exists x)Px) \wedge ((\exists x)Qx)$$

$$(\exists x)(Px \vee Qx) \equiv ((\exists x)Px) \vee ((\exists x)Qx)$$

دستگاه استنتاجی P_N

۱- اصول موضوعه P_N . این مجموعه تهی است.

۲- قواعد استنتاج P_N

به ۴ دسته معرفی کلی = م $\forall$ ، حذف کلی = ح $\forall$ ، معرفی وجودی = م $\exists$ و حذف وجودی = ح $\exists$ تقسیم می‌شوند.

در اینجا تمام قواعد استنتاج منطق گزاره‌ها برقرار است. این ۴ قاعده جدید همراه با شرایطی برای بکارگیری هستند. این شرایط ۲ دسته عمومی (برای هر ۴ دسته) و اختصاصی (برای ۲ دسته) تقسیم می‌شوند.

قواعد عمومی . ۱- φ_α دامنه سور باشد.

۲- φ_β نمونه درست φ_α باشد.

توضیح (۱) . در هر ۴ حالت، φ_α باید دامنه سور باشد تا قاعده قابل اجرا باشد.

مثلاً در قاعده اول که (ح $\forall$) به صورت $\dfrac{(\forall\alpha)\,\varphi_\alpha}{\therefore\ \varphi_\beta}$ است، در صورتی می‌توانیم قاعده را اجرا کنیم که φ_α دامنه $(\forall\alpha)$ باشد.

مثلاً باید به صورت $(\forall x)\,(Ax \to Bx)$ باشد و اگر به صورت $(\forall x)\,Ax \to Bx$ باشد قاعده قابل اجرا نیست. چون در مورد دوم فقط Ax در دامنه سور $\forall$ است و این ۴ قاعده : این صورت نیستند که فقط بر بخشی از فرمول اثر کنند.

توضیح (۲). در صورتی می‌گوئیم که φ_β، نمونه درست φ_α است که :

الف) در تمامی موارد آزاد α در φ_α ، β جانشین شود.

ب) β فقط جانشین α و نه متغیر دیگری شود.

ج) اگر β یک متغیر باشد، در کلیه مواردی که α در φ_α آزاد است، β نیز در φ_β آزاد باشد.

جدول ۴. قواعد اصلی P_N

قواعد	شرایط و قیود
(ح ∀) : $\dfrac{(\forall\alpha)\ \phi_\alpha}{\therefore \phi_\beta}$	شرط عمومی : α دامنه سور است و ϕ_β باید «نمونه درست» آن ϕ باشد؛ یعنی β و فقط β جانشین تمامی موارد آزاد α و فقط α در ϕ_α می‌گردد و در صورتی که β یک متغیر باشد، در کلیه مواردی که α در ϕ_α آزاد است، β نیز باید در ϕ_β آزاد باشد. شرط اختصاصی : ندارد.
(م ∀) : $\dfrac{\phi_\beta}{\therefore (\forall\alpha)\ \phi_\alpha}$	شرط عمومی : همان شرط مذکور در قاعده «ح ∀» است. شرایط اختصاصی : ۱ـ β باید یک متغیر باشد. ۲ـ β نباید در مقدمات و در فرضی که ϕ_β در حوزه آن است آزاد باشد. ۳ـ β نباید در $(\forall\alpha)\ \phi_\alpha$ آزاد باشد.
(ح ∃) : $(\exists\alpha)\phi_\alpha$ ف ϕ_β $\vdots$ ψ $\therefore \psi$	شرط عمومی : همان شرط مذکور در قاعده «ح ∀» است. شرایط اختصاصی : ۱ـ β باید یک متغیر باشد. ۲ـ β نباید در ψ آزاد باشد. ۳ـ β نباید در سطرهای قبل از ϕ_β آزاد باشد.
(م ∃) : $\dfrac{\phi_\beta}{\therefore (\exists\alpha)\phi_\alpha}$	شرط عمومی : همان شرط مذکور در قاعده «ح ∀» است. شرط اختصاصی : ندارد.[۱]

۴۲

اگر β یک متغیر است، در همه مواردی که متغیر α در $\varphi\alpha$ آزاد است، β نیز باید در $\varphi\beta$ آزاد باشد. در مثال زیر نادرست هستند.

$$1)\quad \frac{(\forall x)(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)}{\therefore (\exists y)(Fy \equiv \sim Fy)} \qquad (\forall\ ح)$$

$$2)\quad \frac{(\forall y)(Fy \vee Gy)}{\therefore (\exists x)(\forall y)(Fx \vee Gy)} \qquad (\exists\ م)$$

مثال‌های زیر عرضه‌های درست و کاربرد صحیح قواعد استنتاج را نشان می‌دهد.

$$(\forall\ ح):\quad \frac{(\forall x)Fx}{\therefore Fa},\quad \frac{(\forall y)(Fy \vee Gb)}{\therefore Fa \vee Gb},\quad \frac{(\forall z)(Fxz \to Gb)}{\therefore Fxb \to Gb},\quad \frac{(\forall x)(\exists z)(Fxy \equiv Gz)}{\therefore (\exists z)(Fyy \equiv Gz)}$$

$$(\forall\ م):\quad \frac{Fy}{\therefore (\forall x)Fx},\quad \frac{Fx \equiv Gx}{\therefore (\forall y)(Fy \equiv Gy)},\quad \frac{Gyxz}{\therefore (\forall x)Gyxz},\quad \frac{Fz \to (\exists x)(Gx \wedge Hz)}{(\forall y)(Fy \to (\exists x)(Gx \wedge Hy))}$$

$$(\exists\ م):\quad \frac{Fxy}{\therefore (\exists y)Fxy},\quad \frac{Fx \wedge Gx}{\therefore (\exists y)(Fy \wedge Gx)},\quad \frac{Fx \to Gyz}{\therefore (\exists x)(Fx \to Gyz)},\quad \frac{(\forall y)Fzy}{\therefore (\exists x)(\forall y)Fxy}$$

در قاعده (∀ م)، β نباید در مقدمات و در فرضی که $\varphi\beta$ جزء آن است آزاد باشد.

مثال. در قاعده (∀ح)، فرض کنید عبارت $\overset{\forall\alpha}{(\forall x)}\overbrace{(\exists y)(Fx \to Fy)}^{\varphi\alpha}$ را داریم.

وقتی $(\forall x)$ حذف شد، x در φx آزاد می‌شود. در این صورت به جای x هر متغیری را می‌توانیم قرار دهیم بجز y. چون در شرایط می‌گوید اگر α در $\varphi\alpha$ آزاد است، β باید در $\varphi\beta$ آزاد باشد. اگر بعد از حذف $(\forall x)$ به جای x، متغیر y را قرار دهیم آنگاه y توسط $(\exists y)$ پابند می‌شود و نادرست است.

شرایط اختصاصی

دو قاعده $(\forall$ م$)$ و $($ح $\exists)$ دارای شرایط اختصاصی علاوه بر شرایط عمومی هستند.

حالت $(\forall$ م$)$

$$\frac{\varphi_\beta}{\therefore (\forall\alpha)\,\varphi_\alpha}$$

۱- β باید متغیر باشد.

اگر β متغیر نباشد، نتیجه می‌تواند نادرست باشد. مثلاً در

$$\frac{\text{لیمو زرد است}}{\therefore \text{هر چیزی زرد است.}}$$

اشکال وجود دارد

«زرد است.» محمول است و «لیمو» ثابت است نه متغیر. برای همین نتیجه‌گیری نادرست شده است.

۲- β نباید در مقدمات و در فرضی که φ_β در حوزه آن است آزاد باشد.

مثال نادرست.

فرض

$$
\begin{array}{lll}
\vdots & & \\
m & (\forall y)\big((Fz \wedge Gz) \rightarrow Hy\big) & \\
\vdots & & \\
n & (\exists x)\big[(Fx \wedge Gz) \rightarrow Hz\big] & \\
n+1 & (\forall y)(\exists x)\big((Fx \wedge Gy) \rightarrow Hy\big) & (n)(\forall\text{م})
\end{array}
$$

مثال نادرست

$$
\begin{array}{lll}
n & (\exists x)\big((Fx \wedge Gz) \rightarrow Hz\big) & \text{فرض} \\
\vdots & & \\
n+k & (\forall y)(\exists x)\big((Fx \wedge Gz) \rightarrow Hy\big) & (n)(\forall\text{م})
\end{array}
$$

۳- β نباید در $(\forall\alpha)\,\varphi_\alpha$ آزاد باشد.

این یعنی در خط آخر که عبارت را سوری می‌کنیم، باید β جای همه α بنشیند. مثلاً،

$$\frac{Fx \equiv Fx}{\therefore (\forall y)\,(Fx \equiv Fy)}$$

درست نیست چون x در خط آخر آزاد است.