فصل اول:

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مونا نژند فومنی

تعریف معادله دیفرانسیل:

هر معادله‌ای برحسب یک متغیر وابسته، یک یا چند متغیر مستقل و مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر یا متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

- در صورتی که فقط یک متغیر مستقل در معادله دیفرانسیل موجود باشد معادله را معادله دیفرانسیل معمولی و اگر بیش از یک متغیر مستقل داشته باشیم، معادله را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم.

مرتبه معادله دیفرانسیل:

بالاترین مرتبه مشتق ظاهرشده در معادله را مرتبه معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

درجه معادله دیفرانسیل:

اگر بتوان معادله را برحسب مشتقات موجود در آن به‌صورت یه چندجمله‌ای نوشت؛ بزرگترین توانِ مربوط به بالاترین مرتبه مشتق بیان کننده درجه معادله دیفرانسیل است.

* در حالت کلی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{F}\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

که در آن x متغیر مستقل، y متغیر وابسته و $y', \dots, y^{(n)}$ مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل است.

معادله دیفرانسیل خطی:

هر معادله دیفرانسیل به فرم $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ را یک معادله دیفرانسیل خطی و درغیر این صورت آن را معادله دیفرانسیل غیرخطی می‌نامیم.

- اگر $f(x)$ برابر با صفر باشد، آن را همگن معادله می‌نامیم.
- هر معادله دیفرانسیل خطی از درجه ۱ می‌باشد.

مثال:

1. $y'' + xy' + x^2y = \mathrm{e}^x$

✓ مرتبه۲، درجه۱، خطی، غیرهمگن

2. $y'' + yy' + x = 0$

✓ مرتبه۲، درجه۱، غیرخطی (yy')، غیرهمگن

3. $y'' + \cos y = 0$

✓ مرتبه۲، فاقد درجه، غیرخطی ($\cos y$)، همگن

4. $y' + (\cos x)y = 0$

✓ مرتبه۱، درجه۱، خطی، همگن

5. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0$

✓ مرتبه۲، فاقد درجه، غیرخطی ($\sin\theta$)، همگن

6. $x^3y''' + (y')^4 - 4x = 0$

✓ مرتبه۳، درجه۱، غیرخطی ($(y')^4$)، غیرهمگن

7. $(y'')^2 + 3x\,(y')^5 - y = 0$

✓ مرتبه۲، درجه۲، غیرخطی ($(y'')^2$،$(y')^5$)، همگن

8. $\dfrac{d^3y}{dx^3}\cdot\dfrac{d^4y}{dx^4} + \mathrm{e}^x y = 0$

✓ مرتبه۴، درجه۱، غیرخطی ($\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}$)، همگن

جواب عمومی معادله دیفرانسیل:

به ازای هر معادله دیفرانسیل معین، هر معادله‌ای برحسب متغیر وابسته، متغیر مستقل و ثابت‌های پارامتری که در شرایط زیر صدق کند را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

۱. هیچ یک از مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل ظاهر نشود.
۲. تعداد ثابت‌های پارامتری با مرتبه معادله دیفرانسیل برابر باشد.
۳. در بازه‌ای مانند (a, b) در معادله دیفرانسیل صدق کند.

* در حالت کلی جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nام به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{f}(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$$

که در آن x متغیر مستقل، y متغیر وابسته و $c_1, \dots, c_n$ ثابت‌های پارامتری است.

نکته:

اگر در معادله جواب عمومی به جای ثابت‌ها، مقادیر عددی معینی قرار دهیم آنگاه جواب خصوصی معادله دیفرانسیل به‌دست می‌آید.

مجموعه منحنی‌های جواب‌های خصوصی یک معادله دیفرانسیل را منحنی‌های انتگرال آن معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

برای تعیین مقدارهای ثابت در جواب عمومی، n شرط اولیه که همگی در یک نقطه مطرح باشد، داده می‌شود که به‌صورت زیر است

$$y(x_0) = y_0\,, \quad y'(x_0) = y_1\,, \dots\,, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_n$$

در این حالت، معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را مسئله مقدار اولیه می‌نامیم.

مثال:

نشان دهید $y = 1 + c\mathrm{e}^{-x^2}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + 2xy = 2x$ است و سپس مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$ را حل نمایید.

پاسخ: $y = 1 + c\mathrm{e}^{-x^2}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است زیرا در سه شرط جواب عمومی صدق می‌کند.

شرط (۱): هیچ یک از مشتقات y در جواب نیست.

شرط (۲): معادله دیفرانسیل مرتبه اول است و ما هم یک ثابت پارامتری در جواب داریم.

شرط (۳): جواب در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند

$$\underbrace{-2cx\mathrm{e}^{-x^2}}_{y'} + 2x(\underbrace{1 + c\mathrm{e}^{-x^2}}_{y}) = 2x$$

حال برای حل مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$ ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + 2xy = 2x$ را به‌دست می‌آوریم (در قسمت اول سوال جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده است.)، سپس با استفاده از شرط‌های داده شده ثابت‌های پارامتری را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} y = 1 + c\mathrm{e}^{-x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases} \xrightarrow{x=0,\ y=2} \quad 2 = 1 + c\mathrm{e}^{0} \quad \longrightarrow \quad c = 1$$

$$\Longrightarrow \quad y = 1 + \mathrm{e}^{-x^2}$$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

تمرین:

نشان دهید $y = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{-x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + y = 0$ است و سپس مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ را حل نمایید.

طرز تشکیل معادله دیفرانسیل از روی جواب عمومی:

با حذف ثابت‌های پارامتری بین معادله جواب عمومی و معادلات به‌دست آمده از معادله جواب عمومی با مشتق‌گیری‌های متوالی (به تعداد ثابت‌های پارامتری)، معادله دیفرانسیل موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال:

معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های زیر را به‌دست آورید.

$$1. \; y = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x}$$

پاسخ: ابتدا به تعداد ثابت‌های پارامتری (دو بار) از منحنی مشتق می‌گیریم.

$$y' = A\mathrm{e}^{x} + 2B\mathrm{e}^{2x}$$

$$y'' = A\mathrm{e}^{x} + 4B\mathrm{e}^{2x}$$

حال با استفاده از اعمال جبری مجاز و مناسب از سه معادله بالا باید به یک معادله دیفرانسیل بدون ثابت پارامتری برسیم.

$$\begin{cases} y' - y = B\mathrm{e}^{2x} \\ y'' - y' = 2B\mathrm{e}^{2x} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2(y' - y) = y'' - y' \quad \Longrightarrow \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$2. \; y = c_1 x + c_2 \ln x \qquad (*)$$

پاسخ: ابتدا به تعداد ثابت‌های پارامتری (دو بار) از منحنی مشتق می‌گیریم.

$$y' = c_1 + \frac{c_2}{x} \qquad (**)$$

$$y'' = -\frac{c_2}{x^2} \qquad (***)$$

حال با استفاده از اعمال جبری مجاز و مناسب از سه معادله بالا باید به یک معادله دیفرانسیل بدون ثابت پارامتری برسیم.

$$\xRightarrow{(***)} \qquad c_2 = -x^2 y''$$

$$\xRightarrow{c_2 \text{ در } (**)} \qquad c_1 = y' - \frac{1}{x}(-x^2 y'') = y' + x y''$$

$$\xRightarrow{c_1 \text{ و } c_2 \text{ در } (*)} \qquad y = x(y' + x y'') + \ln x \, (-x^2 y'') = x y' + x^2 y''(1 - \ln x)$$

$3.\, xy^2 = c$

پاسخ: ابتدا به تعداد ثابت‌های پارامتری (یک بار) از منحنی مشتق می‌گیریم.

$$y^2 + 2xyy' = 0$$

حال با استفاده از اعمال جبری مجاز و مناسب از دو معادله بالا باید به یک معادله دیفرانسیل بدون ثابت پارامتری برسیم.

با توجه به اینکه در معادله دوم ثابت پارامتری‌ای وجود ندارد لذا می‌توان آن را به عنوان معادله دیفرانسیل موردنظر درنظر گرفت. یعنی

$$y' = -\frac{y}{2x}$$

تمرین:

معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های زیر را به‌دست آورید.

$1.\, y = Ae^x + Be^{-x} + C$

$2.\, y = A\cos 2x + \sin 2x$

$3.\, \ln y = ax^2 + b$

$4.\, y = x - 1 + ae^{-x}$

$5.\, y = Ax^2 + Bx + C$

$6.\, y = a\sin(2x + b)$

قضیه پیکارد (قضیه وجود و یکتایی جواب):

اگر $f(x,y)$ و $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ در ناحیه مستطیلی

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \ |x - x_0| \le a , |y - y_0| \le b\}$$

توابعی پیوسته از x و y باشند آنگاه عددی مانند h وجود دارد به طوری که معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ در فاصله‌ی $|x - x_0| \le h$ دارای جواب منحصر به فرد $y = y(x)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ است.

(که در آن $a \le h$ و b ، دو عدد حقیقی و مثبت می‌باشند.)

روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدا از هم (جدا شدنی، جدایی پذیر، تفکیک پذیر):

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اولی پس از یک سری اعمال جبری مجاز و مناسب، به‌صورت

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

نوشته شود، معادله دیفرانسیل با متغیرهای جدا از هم می‌نامیم.

روش حل: جواب عمومی معادله دیفرانسیل با متغیرهای جدا از هم پس از انتگرال‌گیری با یک ثابت به‌دست می‌آید.

مثال ۱:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $xy^3dx + e^{x^2}dy = 0$

پاسخ:

$$xy^3dx = -e^{x^2}dy \quad \xrightarrow{\div y^3e^{x^2}} \quad xe^{-x^2}dx = -y^{-3}dy$$ معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int xe^{-x^2}dx = \int -y^{-3}dy \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}y^{-2} + c$$

2. $(xy^2 - x)dx + (x^2y + y)dy = 0$

پاسخ:

$$x(y^2-1)dx = -y(x^2+1)dy \quad \xrightarrow{\div (x^2+1)(y^2-1)} \quad \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{-y\,dy}{y^2-1}$$ معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int \frac{x}{x^2+1}dx = \int -\frac{y}{y^2-1}dy \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = -\frac{1}{2}\ln(y^2-1) + \frac{1}{2}\ln c$$

$$\underbrace{\ln(x^2+1) + \ln(y^2-1)}_{\ln(x^2+1)(y^2-1)} = \ln c \quad \longrightarrow \quad (x^2+1)(y^2-1) = c$$

مثال ۲:

مسئله مقدار اولیه زیر را حل نمایید.

$$y' = \frac{2x}{1+e^y}\ , \qquad y(2) = 0$$

پاسخ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+e^y} \quad \longrightarrow \quad 2x\,dx = (1+e^y)dy$$ معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int 2x\,dx = \int (1+e^y)\,dy \quad \longrightarrow \quad x^2 = y + e^y + c$$

$$\begin{cases} x^2 = y + e^y + c \\ y(2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{x=2,\ y=0} \quad 4 = 0 + e^0 + c \quad \longrightarrow \quad c = 3$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 = y + e^y + 3$$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

مثال ۳:

نشان دهید معادله دیفرانسیل زیر با تغییر متغیر مناسب به یک معادله دیفرانسیل جدا شدنی تبدیل می‌شود.

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

پاسخ: با درنظر گرفتن تغییر متغیر $xy = u$ و جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل داریم:

$$xy = u \quad \longrightarrow \quad xdy + ydx = du \quad \longrightarrow \quad dy = \frac{du - \frac{u}{x}dx}{x}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{u}{x}f(u)dx + xg(u)\left(\frac{du - \frac{u}{x}dx}{x}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{u}{x}[f(u) - g(u)]dx = -g(u)du$$

$$\xrightarrow{\div u[f(u)-g(u)]} \quad \frac{dx}{x} = \frac{-g(u)}{u[f(u) - g(u)]}du$$ معادله دیفرانسیل جداشدنی

نکته:

برای حل معادلات دیفرانسیل به فرم $y' = f(ax + by + c)$ می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $u = ax + by + c$ معادله را به یک معادله دیفرانسیل جدا از هم تبدیل کرد.

مثال ۴:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{dy}{dx} = tan^2(x + y)$$

پاسخ:

$$x + y = u \quad \longrightarrow \quad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \quad -1 + \frac{du}{dx} = \tan^2 u \quad \longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 u \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{1}{1 + \tan^2 u}\, du$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int dx = \int \frac{1}{1 + \tan^2 u}\, du = \int \frac{1}{\sec^2 u}\, du = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)\, du$$

$$\longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + c \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{4}\sin 2(x + y) + c$$

تمرین۱:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y' = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$

2. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

3. $y \cos x \, dx = (1 + 2y^2) \, dy$

4. $xy' = y \tan(\ln y)$

5. $\sin x \cos^2 y = y' \cos^2 x$

6. $y' = e^{y-x} \sin x$

7. $xy \, dy = (y-1)(x+1) \, dx$

8. $y' = (x+y)^2 - (x+y)$

9. $y' = \sin(x-y)$

10. $(x-y)^2 y' = 1$

تمرین۲:

مسائل مقدار اولیه زیر را حل نمایید.

1. $y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y}\,, \qquad y(0) = -2$

2. $x^2 (\cos y)\, y' + 1 = 0\,, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{16}{3}\pi$

تمرین ۳:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر داده شده، به‌دست آورید.

$(\ln x + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0\,, \qquad t = \dfrac{y^3}{x}$

عبارت همگن:

عبارت $f(x,y)$ را همگن از درجه n می‌نامیم اگر به ازای هر $t > 0$ داشته باشیم:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

مثال:

1. $f(x,y) = 2y\,e^{\frac{y}{x}} - x$

$$f(tx,ty) = 2ty\,e^{\frac{ty}{tx}} - tx = t\left(2y\,e^{\frac{y}{x}} - x\right) = t\,f(x,y)$$

عبارت همگن از درجه ۱

2. $f(x,y) = x^2 + xy\,cos\,(\frac{x}{y})$

$$f(tx,ty) = t^2x^2 + \underbrace{(tx)(ty)}_{t^2xy}\,cos\,(\frac{tx}{ty}) = t^2\left(x^2 + xy\cos\,(\frac{x}{y})\right) = t^2 f(x,y)$$

عبارت همگن از درجه ۲

3. $f(x,y) = x^3 + \sqrt{x^2 - y^2}$

$$f(tx,ty) = t^3x^3 + \sqrt{t^2x^2 - t^2y^2} = t^3x^3 + t\sqrt{x^2 - y^2} \neq t^n f(x,y)$$

عبارت همگن نیست!

معادلات دیفرانسیل همگن:

معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را همگن می‌نامیم هرگاه هر دو عبارت $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ همگن و هم درجه باشند.

روش حل: برای حل معادلات دیفرانسیل همگن از تغییر متغیر $\begin{cases} y=vx \\ dy=xdv+vdx \end{cases}$ استفاده می‌کنیم تا به یک معادله دیفرانسیل جدا از هم برحسب x و v برسیم و پس از حل در جواب به‌جای v مساوی‌اش $\frac{y}{x}$ را قرار می‌دهیم.

نکته:

اگر در معادله دیفرانسیل، توابع لگاریتمی، مثلثاتی و نمایی وجود داشته باشند و اگر این توابع بر حسب $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ نباشند آنگاه معادله دیفرانسیل همگن نیست و اگر این توابع برحسب $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ باشند باید معادله دیفرانسیل همگن بررسی شود.

مثال:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ \ y\,dx=\left(x+\sqrt{xy}\right)dy$$

پاسخ: معادله دیفرانسیل همگن

$$y=vx \quad \to \quad dy=x\,dv+v\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \ vx\,dx=\left(x+\underbrace{\sqrt{x.vx}}_{x\sqrt{v}}\right)(x\,dv+v\,dx) \quad \to \quad xv\sqrt{v}\,dx=-x^2\left(1+\sqrt{v}\right)dv$$

$$\to \ \frac{1}{x}\,dx=-\frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}\,dv$$ معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \ \int\frac{1}{x}\,dx=\int-\left(v^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{v}\right)dv \quad \to \quad \ln x=2v^{-\frac{1}{2}}-\ln v+c$$

$$\to \ \ln x=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\underbrace{\ln\frac{y}{x}}_{\ln y-\ln x}+c \quad \to \quad \ln y-2\sqrt{\frac{y}{x}}=c$$

2. $(y - xy')\cos\left(\frac{y}{x}\right) = x$

پاسخ:

$$y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)y' \quad \longrightarrow \quad \left(y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x\right)dx = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy$$

معادله دیفرانسیل همگن

$$y = vx \quad \rightarrow \quad dy = x\,dv + v\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \left(vx\cos\left(\frac{vx}{x}\right) - x\right)dx = x\cos\left(\frac{vx}{x}\right)(x\,dv + v\,dx)$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\longrightarrow \quad -x\,dx = x^2\cos v\,dv \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x}\,dx = -\cos v\,dv$$

$$\xrightarrow{\int} \quad \int\frac{1}{x}\,dx = \int -\cos v\;dv \quad \longrightarrow \quad \ln x = -\sin v + c \quad \longrightarrow \quad \ln x + \sin\left(\frac{y}{x}\right) = c$$

تمرین:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y' = \frac{x+y}{x}$

2. $e^{\frac{y}{x}}(x-y)dx + x\left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right)dy = 0$

3. $x\frac{dy}{dx} = x\tan\frac{y}{x} + y$

4. $xy' + y\ln x = y\ln y + y$

5. $(x\cos\frac{y}{x})(ydx + xdy) = (y\sin\frac{y}{x})(xdy - ydx)$

6. $x\,dx + \left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$

7. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$

8. $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

معادلات دیفرانسیل با ضرایب خطی ثابت:

فرم کلی چنین معادلات دیفرانسیلی به‌صورت

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \qquad (*)$$

می‌باشد که در آن ضرایب a، b، c، a'، b' و c' ثابت حقیقی هستند.

روش حل: اگر در معادله دیفرانسیل $(*)$، $c = c' = 0$ باشد آنگاه یک معادله دیفرانسیل همگن خواهیم داشت. در غیر این صورت

- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ باشد (یعنی دو خط موازی‌اند)، در این صورت با اختیار تغییر متغیر $z = ax + by$ معادله دیفرانسیل $(*)$ به یک معادله دیفرانسیل جدا از هم تبدیل می‌شود.
- اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد (یعنی دو خط متقاطع‌اند)، در این صورت دو خط همدیگر را در نقطه (x_0, y_0) قطع می‌کنند که می‌توان با اختیار تغییر متغیرهای $\begin{cases} x = X + x_0 & \rightarrow \quad dx = dX \\ y = Y + y_0 & \rightarrow \quad dy = dY \end{cases}$ معادله دیفرانسیل $(*)$ را به یک معادله دیفرانسیل همگن تبدیل نمود.

مثال۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$1.\ y' = \frac{x - 3y + 3}{2x - 6y + 1}$$

پاسخ:

$$\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$$ معادله دیفرانسیل با ضرایب خطی ثابت – موازی

$$z = x - 3y \quad \longrightarrow \quad z' = 1 - 3y' \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1 - z'}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \frac{1 - z'}{3} = \frac{z + 3}{2z + 1} \quad \longrightarrow \quad 1 - z' = \frac{3z + 9}{2z + 1} \quad \longrightarrow \quad z' = 1 - \frac{3z + 9}{2z + 1}$$

$$\longrightarrow \quad dz = -\frac{z+8}{2z+1}dx \quad \longrightarrow \quad -dx = \frac{2z+1}{z+8}dz$$ معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int -dx = \int \frac{2z+1}{z+8}dz = \int \frac{2(z+8)-15}{z+8}\,dz = \int (2-\frac{15}{z+8})dz$$

$$\longrightarrow \quad -x = 2z - 15\ln(z+8) + c \quad \longrightarrow \quad -x = 2(x-3y) - 15\ln(x-3y+8) + c$$

2. $(x-y-1)dx - (x+4y-1)dy = 0$

پاسخ:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{4}$$ معادله دیفرانسیل با ضرایب خطی ثابت – متقاطع

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+4y-1=0 \end{cases} \longrightarrow \quad x_0 = 1\,, \quad y_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = X+1 & \to \quad dx = dX \\ y = Y & \to \quad dy = dY \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} (X-Y)dX - (X+4Y)dY = 0$$ معادله دیفرانسیل همگن

$$Y = vX \quad \longrightarrow \quad dY = X\,dv + v\,dX$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} (X-vX)dX - (X+4vX)(X\,dv + v\,dX) = 0$$

$$\longrightarrow \quad X(1-v-v-4v^2)dX = X^2(1+4v)dv \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{X}dX = -\frac{4v+1}{4v^2+2v-1}dv$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int \frac{1}{X}dX = -\int \frac{4v+1}{4v^2+2v-1}dv \quad \longrightarrow \quad \ln X = -\frac{1}{2}\ln(4v^2+2v-1) + \ln c$$

$$\underbrace{\ln X + \frac{1}{2}\ln(4v^2+2v-1)}_{\ln(X\sqrt{4v^2+2v-1})} = \ln c \quad \longrightarrow \quad X\sqrt{4v^2+2v-1} = c$$

$$\longrightarrow \quad (x-1)\sqrt{4(\frac{y}{x-1})^2 + 2(\frac{y}{x-1}) - 1} = c$$

3. $y' \ln(\frac{y+x}{x+2}) = \frac{y+x}{x+2} - \ln(\frac{y+x}{x+2})$

پاسخ:

معادله دیفرانسیل با ضرایب خطی ثابت – متقاطع $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{0}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2=0 \end{cases} \longrightarrow \ x_0 = -2\,,\ \ y_0 = 2 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = X-2 \ \rightarrow \ dx = dX \\ y = Y+2 \ \rightarrow \ dy = dY \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل همگن

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \ln\left(\frac{X+Y}{X}\right) dY = [\frac{X+Y}{X} - \ln\left(\frac{X+Y}{X}\right)]\, dX$$

$$Y = vX \quad \longrightarrow \quad dY = X\,dv + v\,dX$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \ln\left(\frac{X+vX}{X}\right)(X\,dv + v\,dX) = \left[\frac{X+vX}{X} - \ln\left(\frac{X+vX}{X}\right)\right] dX$$

$$\longrightarrow \quad X\ln(v+1)\,dv = \underbrace{\left[v+1\underbrace{-\ln(v+1) - v\ln(v+1)}_{-(v+1)\ln(v+1)}\right]}_{(v+1)[1-\ln(v+1)]} dX$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{X}dX = \frac{\ln(v+1)}{(v+1)[1-\ln(v+1)]}dv$$

$$\xrightarrow{\int} \quad \int \frac{1}{X}dX = \int \frac{\ln(v+1)}{(v+1)[1-\ln(v+1)]}dv \xRightarrow{z=1-\ln(v+1)} \int \frac{1-z}{z}(-dz)$$

$$\ln X = z - \ln z + c \quad \longrightarrow \quad \ln(x+2) = 1 - \ln\left(\frac{y-2}{x+2}+1\right) - \ln\left[1 - \ln\left(\frac{y-2}{x+2}+1\right)\right] + c$$

مثال۲:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر داده شده، به‌دست آورید.

$$(x + 2\tan y + 3)dx + (2x + 4\tan y - 3)\sec^2 y\,dy = 0, \qquad u = \tan y$$

پاسخ:

$$du = \sec^2 y\, dy \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} (x + 2u + 3)dx + (2x + 4u - 3)du = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$ معادله دیفرانسیل با ضرایب خطی ثابت – موازی

$$z = x + 2u \longrightarrow dz = dx + 2du \longrightarrow dx = dz - 2du$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} (z + 3)(dz - 2du) + (2z - 3)du = 0 \longrightarrow (z + 3)dz = 9du$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \int 9du = \int (z + 3)dz \longrightarrow 9u = \frac{z^2}{2} + 3z + c$$

$$\longrightarrow 9\tan y = \frac{1}{2}(x + 2\tan y)^2 + 3(x + 2\tan y) + c$$

تمرین ۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$
2. $(x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0$
3. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$
4. $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$

تمرین ۲:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر داده شده، به‌دست آورید.

$$x(x^2 + y^2 - 7)dx - y(2x^2 + 2y^2 - 8)dy = 0\,, \qquad u = x^2, \qquad w = y^2$$

معادلات دیفرانسیل کامل:

تعریف:

معادله دیفرانسیل به فرم $(*)$ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل می‌نامیم اگر تابعی مانند $f(x,y)$ موجود باشد به طوری که $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ باشد.

قضیه:

فرض کنید در معادله دیفرانسیل $(*)$، $M(x,y)$، $N(x,y)$، $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ در ناحیه $D\subseteq\mathbb{R}^2$ پیوسته باشند آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دیفرانسیل $(*)$ کامل باشد آن است که داشته باشیم:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\qquad (**)$$

روش حل: حال فرض کنید در معادله دیفرانسیل $(*)$، M و N طوری باشند که شرط $(**)$ برقرار باشد پس بنا به قضیه بیان شده معادله دیفرانسیل $(*)$ کامل است و طبق تعریف معادله دیفرانسیل کامل تابعی مانند $f(x,y)$ وجود دارد به قسمی که

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy=0\quad\longrightarrow\quad df=0\quad\longrightarrow\quad f(x,y)=c$$ جواب عمومی

حال برای به‌دست آوردن تابع $f(x,y)$ از دو روش می‌توان استفاده کرد:

- **روش اول:**

با توجه به خاصیت تابع $f(x,y)$، از طرفین رابطه $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\longrightarrow\quad f(x,y)=\int M(x,y)\,dx+g(y)\qquad (\#)$$

در ادامه با توجه به اینکه $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$، از طرفین عبارت $(\#)$ نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\longrightarrow\quad N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx+g'(y)$$

حال از رابطه فوق نسبت به y انتگرال می‌گیریم تا $g(y)$ به‌دست آید سپس در رابطه $(\#)$ جای‌گذاری می‌کنیم

$$\longrightarrow \quad g(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \right] dy$$

$$\longrightarrow \quad f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \right] dy$$

$$\int M(x,y)\,dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx \right] dy = c$$ جواب عمومی

- **روش دوم:**

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int N^*\,dy$$

$$\longrightarrow \quad \int M(x,y)dx + \int N^*\,dy = c$$ جواب عمومی

که در آن N^* جملاتی از $N(x,y)$ هستند که x ندارند.

مثال:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $(ye^x + 4x)dx + (2y + e^x)dy = 0$

پاسخ:

$\mathrm{M}(x,y) = ye^x + 4x\,, \quad \mathrm{N}(x,y) = 2y + e^x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$ معادله دیفرانسیل کامل

حال برای به‌دست آوردن جواب عمومی معادله دیفرانسیل کامل از دو روش می‌توان استفاده کرد.

روش اول:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = ye^x + 4x \xrightarrow{\int dx} f(x,y) = \int (ye^x + 4x)\,dx + g(y) = ye^x + 2x^2 + g(y)$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad 2y + e^x = N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + g'(y) \quad \longrightarrow \quad g'(y) = 2y \quad \xrightarrow{\int dy} \quad g(y) = y^2$$

$$\xrightarrow{f(x,y)=c} \quad ye^x + 2x^2 + y^2 = c$$

روش دوم:

$$\int M(x,y)\,dx + \int N^*\,dy = c \quad \longrightarrow \quad \int (ye^x + 4x)\,dx + \int 2y\,dy = c$$

$$\longrightarrow \quad ye^x + 2x^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{c}$$

2. $2x\sin 3y\,dx + 3x^2\cos 3y\,dy = 0$

پاسخ:

$$\mathrm{M}(x,y) = 2x\sin 3y \;, \qquad \mathrm{N}(x,y) = 3x^2\cos 3y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x\,cos3y = \frac{\partial N}{\partial x}$$ معادله دیفرانسیل کامل

حال برای به‌دست آوردن جواب عمومی معادله دیفرانسیل کامل از دو روش می‌توان استفاده کرد.

روش اول:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2x\sin 3y \xrightarrow{\int dx} f(x,y) = \int 2x\sin 3y\,dx + g(y) = x^2\sin 3y + g(y)$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} 3x^2\cos 3y = N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2\cos 3y + g'(y) \longrightarrow g'(y) = 0 \xrightarrow{\int dy} g(y) = 0$$

$$\xrightarrow{f(x,y)=c} \quad x^2\sin 3y = c$$

روش دوم:

$$\int M(x,y)\,dx + \int N^*\,dy = c \quad \longrightarrow \quad \int 2x\sin 3y\,dx + 0 = c$$

$$\longrightarrow \quad x^2\sin 3y = c$$

3. $(x-1)^{-1}y\,dx+\left[\ln(2x-2)+\frac{1}{y}\right]dy=0$

پاسخ:

$$\mathrm{M}(x,y)=(x-1)^{-1}y\,,\qquad \mathrm{N}(x,y)=\ln(2x-2)+\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x-1}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ معادله دیفرانسیل کامل

حال برای به‌دست آوردن جواب عمومی معادله دیفرانسیل کامل از دو روش می‌توان استفاده کرد.

روش اول:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=(x-1)^{-1}y\ \xrightarrow{\int dx}\ f(x,y)=\int\frac{y}{x-1}dx+g(y)=y\ln(x-1)+g(y)$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\ \underbrace{\ln(2x-2)}_{\underbrace{\ln 2(x-1)}_{\ln 2+\ln(x-1)}}+\frac{1}{y}=N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\ln(x-1)+g'(y)\ \longrightarrow\ g'(y)=\ln 2+\frac{1}{y}$$

$$\xrightarrow{\int dy}\ g(y)=\mathrm{y}\ln 2+\ln y\qquad\xrightarrow{f(x,y)=c}\qquad y\ln(x-1)+\mathrm{y}\ln 2+\ln y=c$$

روش دوم:

$$\int M(x,y)\,dx+\int N^*\,dy=c\qquad\longrightarrow\qquad\int\frac{y}{x-1}dx+\int(\ln 2+\frac{1}{y})\,dy=c$$

$$\longrightarrow\quad y\ln(x-1)+\mathrm{y}\ln 2+\ln y=c$$

تمرین:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $(e^y+\cos x\cos y)\,dx=(\sin x\sin y-xe^y)\,dy$
2. $(x-y-2)\,dy+(x+y-1)\,dx=0$
3. $(e^x-3x^2y^2)\,y'+ye^x=2xy^3$
4. $\left(1+e^{2\theta}\right)d\varphi+2\varphi\,e^{2\theta}\,d\theta=0$

عامل انتگرال ساز:

اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد (یعنی $\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y}$)، در این صورت گاهی می‌توان با ضرب طرفین معادله دیفرانسیل فوق در تابعی مانند $\mu = \mu(x,y)$ معادله دیفرانسیل را کامل نمود. آنگاه خواهیم داشت:

$$\mu\, M(x,y)dx + \mu\, N(x,y)dy = 0$$

معادله دیفرانسیل فوق کامل است. یعنی داریم

$$\frac{\partial(\mu\, M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\, N)}{\partial x}$$

در این صورت $\mu = \mu(x,y)$ را عامل انتگرال ساز یا فاکتور انتگرال گیری می‌نامیم که اگر عامل انتگرال ساز برحسب z باشد از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \mu = e^{\int h(z)dz} \\ h(z) = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial z}{\partial x} - M\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{\mathrm{M}_y - \mathrm{N}_x}{\mathrm{N}\, z_x - \mathrm{M}\, z_y} \end{cases}$$

مثال۱:

اگر عامل انتگرال ساز معادلات دیفرانسیل زیر برحسب z باشد ابتدا عامل انتگرال ساز معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورده سپس به کمک آن جواب عمومی معادلات دیفرانسیل را بیابید.

1. $(x^2 - y^2 - y)\, dx - (x^2 - y^2 - x)\, dy = 0\,, \quad z = x^2 - y^2$

پاسخ:

$$\mathrm{M}(x,y) = x^2 - y^2 - y\,, \quad \mathrm{N}(x,y) = -(x^2 - y^2 - x)$$

$$h(z) = \frac{\mathrm{M}_y - \mathrm{N}_x}{\mathrm{N}\, z_x - \mathrm{M}\, z_y} = \frac{-2y - 1 + (2x - 1)}{-(x^2 - y^2 - x)(2x) - (x^2 - y^2 - y)(-2y)}$$

$$= \frac{2x - 2y - 2}{-2x(x^2 - y^2) + 2x^2 + 2y(x^2 - y^2) - 2y^2} = \frac{2x - 2y - 2}{(x^2 - y^2)(2y - 2x) + 2(x^2 - y^2)}$$

$$h(z)=\frac{2x-2y-2}{(x^2-y^2)(2y-2x+2)}=\frac{-1}{x^2-y^2}=\frac{-1}{z}$$

$$\longrightarrow\quad \mu=e^{\int h(z)dz}=e^{\int\frac{-1}{z}dz}=e^{-\ln z}=z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x^2-y^2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}\times\mu}\quad \underbrace{\left(1-\frac{y}{x^2-y^2}\right)}_{m}dx\underbrace{-\left(1-\frac{x}{x^2-y^2}\right)}_{n}dy=0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}=\frac{\partial n}{\partial x}$$ معادله دیفرانسیل کامل

$$\int m\,dx+\int n^*\,dy=c\qquad\longrightarrow\quad\int\left(1-\frac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\int -\,dy=c$$

$$\longrightarrow\quad x-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)-y=c$$

2. $(y^3+xy^2+y)dx+(x^3+x^2y+x)dy=0,\qquad z=xy$

پاسخ:

$$\mathrm{M}(x,y)=y^3+xy^2+y\,,\qquad \mathrm{N}(x,y)=x^3+x^2y+x$$

$$h(z)=\frac{\mathrm{M}_y-\mathrm{N}_x}{\mathrm{N}\,z_x-\mathrm{M}\,z_y}=\frac{3y^2+2xy+1-3x^2-2xy-1}{y(x^3+x^2y+x)-x(y^3+xy^2+y)}=\frac{3(y^2-x^2)}{xy(x^2-y^2)}=\frac{-3}{xy}=\frac{-3}{z}$$

$$\longrightarrow\quad \mu=e^{\int h(z)dz}=e^{\int\frac{-3}{z}dz}=e^{-3lnz}=z^{-3}=(xy)^{-3}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}\times\mu}\quad \underbrace{(x^{-3}+x^{-2}y^{-1}+x^{-3}y^{-2})}_{m}dx+\underbrace{(y^{-3}+x^{-1}y^{-2}+x^{-2}y^{-3})}_{n}dy=0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}=-x^{-2}y^{-2}-2x^{-3}y^{-3}=\frac{\partial n}{\partial x}$$ معادله دیفرانسیل کامل

$$\int m\,dx + \int n^*\,dy = c \quad \longrightarrow \quad \int (x^{-3} + x^{-2}y^{-1} + x^{-3}y^{-2})\,dx + \int y^{-3}\,dy = c$$

$$\longrightarrow \quad -\frac{1}{2}x^{-2} - x^{-1}y^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}y^{-2} - \frac{1}{2}y^{-2} = c$$

حالات خاص:

در برخی مسائل به نوع تابع عامل انتگرال ساز (z) اشاره‌ای نمی‌شود لذا در این حالت برای به‌دست آوردن عامل انتگرال ساز باید نوع تابع حدس زده شود که در اینجا به بررسی برخی از این حالات خاص می‌پردازیم.

- **حالت اول:** اگر عامل انتگرال ساز تابعی برحسب x باشد یعنی $z = x$؛

$$\begin{cases} \mu = e^{\int h(x)\,dx} \\ h(x) = \dfrac{\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}}{\mathrm{N}} = \dfrac{\mathrm{M}_y - \mathrm{N}_x}{\mathrm{N}} \end{cases}$$

- **حالت دوم:** اگر عامل انتگرال ساز تابعی برحسب y باشد یعنی $z = y$؛

$$\begin{cases} \mu = e^{\int h(y)\,dy} \\ h(x) = \dfrac{\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}}{-\mathrm{M}} = \dfrac{\mathrm{M}_y - \mathrm{N}_x}{-\mathrm{M}} \end{cases}$$

مثال ۲:

ابتدا عامل انتگرال ساز معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورده سپس به کمک آن جواب عمومی معادلات دیفرانسیل را بیابید.

1. $2xyy' + 2y^2 + 3x = 0$

پاسخ:

$$\underbrace{(2y^2+3x)}_{\mathrm{M}}\,dx+\underbrace{2xy}_{\mathrm{N}}\,dy=0$$

$$\frac{\mathrm{M}_y-\mathrm{N}_x}{\mathrm{N}}=\frac{4y-2y}{2xy}=\frac{1}{x}=h(x)$$

$$\longrightarrow\quad \mu=e^{\int h(x)\,dx}=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}\times\mu}\quad \underbrace{(2xy^2+3x^2)}_{m}\,dx+\underbrace{2x^2y}_{n}\,dy=0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}=4xy=\frac{\partial n}{\partial x}$$ معادله دیفرانسیل کامل

$$\int m\,dx+\int n^*\,dy=c\quad\longrightarrow\quad\int(2xy^2+3x^2)dx+0=c\quad\longrightarrow\quad x^2y^2+x^3=c$$

2. $\left[\frac{y}{x}\ln(\ln y)+\frac{2}{3}xy^4\right]\,dx+[\frac{\ln x}{\ln y}+x^2y^3]\,dy=0$

پاسخ:

$$\mathrm{M}(x,y)=\frac{y}{x}\ln(\ln y)+\frac{2}{3}xy^4\ ,\qquad \mathrm{N}(x,y)=\frac{\ln x}{\ln y}+x^2y^3$$

$$\frac{\mathrm{M}_y-\mathrm{N}_x}{\mathrm{N}}=\frac{\frac{1}{x}\ln(\ln y)+\frac{y}{x}.\frac{1}{y\ln y}+\frac{8}{3}xy^3-\frac{1}{x\ln y}-2xy^3}{\frac{\ln x}{\ln y}+x^2y^3}=\frac{\frac{1}{x}\ln(\ln y)+\frac{2}{3}xy^3}{\frac{\ln x}{\ln y}+x^2y^3}\neq h(x)\quad *$$

$$\frac{\mathrm{M}_y-\mathrm{N}_x}{-\mathrm{M}}=\frac{\frac{1}{x}\ln(\ln y)+\frac{2}{3}xy^3}{-\underbrace{\left[\frac{y}{x}\ln(\ln y)+\frac{2}{3}xy^4\right]}_{y\left[\frac{1}{x}\ln(\ln y)+\frac{2}{3}xy^3\right]}}=-\frac{1}{y}=h(y)$$

$$\longrightarrow\quad \mu=e^{\int h(y)\,dy}=e^{\int-\frac{dy}{y}}=e^{-\ln y}=y^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله} \times \mu} \quad \underbrace{\left[\frac{1}{x}\ln(\ln y) + \frac{2}{3}xy^3\right]}_{m} dx + \underbrace{\left[\frac{\ln x}{y\ln y} + x^2y^2\right]}_{n} dy = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{1}{xy\ln y} + 2xy^2 = \frac{\partial n}{\partial x}$$ معادله دیفرانسیل کامل

$$\int m\,dx + \int n^*\,dy = c \quad \longrightarrow \quad \int \left[\frac{1}{x}\ln(\ln y) + \frac{2}{3}xy^3\right] dx + 0 = c$$

$$\longrightarrow \quad \ln x\,.\ln(\ln y) + \frac{1}{3}x^2y^3 = c$$

نکته:

اگر معادله دیفرانسیل غیرکامل باشد گاهی می‌توان با ضرب طرفین معادله دیفرانسیل در $x^\alpha y^\beta$ معادله را کامل نموده سپس با توجه به شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل، α و β را محاسبه کرد.

مثال ۳:

ابتدا عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورده سپس به کمک آن جواب عمومی معادله دیفرانسیل را بیابید.

$$(5xy^2 - 4y\sin y)dx = (xy\cos y + 3x\sin y - 4x^2y)dy$$

پاسخ: فرض می‌کنیم عامل انتگرال ساز به فرم $\mu = x^\alpha y^\beta$ باشد، در این صورت با ضرب μ در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\underbrace{\left(5x^{\alpha+1}y^{\beta+2} - 4x^\alpha y^{\beta+1}\sin y\right)}_{M} dx \underbrace{-\left(x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\cos y + 3x^{\alpha+1}y^\beta \sin y - 4x^{\alpha+2}y^{\beta+1}\right)}_{N} dy = 0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرال ساز، معادله دیفرانسیل فوق کامل است لذا شرط کامل بودن برای معادله برقرار است.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 5(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - 4(\beta+1)x^\alpha y^\beta \sin y - 4x^\alpha y^{\beta+1} \cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1}\cos y - 3(\alpha+1)x^\alpha y^\beta \sin y + 4(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 5(\beta+2) = 4(\alpha+2) \\ 4(\beta+1) = 3(\alpha+1) \\ 4 = \alpha+1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 3,\ \ \beta = 2$$

$$\mu = x^3y^2 \;\longrightarrow\; (5x^4y^4 - 4x^3y^3\sin y)dx - (x^4y^3\cos y + 3x^4y^2\sin y - 4x^5y^3)dy = 0$$

$$\int M\,dx + \int N^*\,dy = c \quad \longrightarrow \quad \int (5x^4y^4 - 4x^3y^3\sin y)\,dx + 0 = c$$

$$\longrightarrow \quad x^5y^4 - x^4y^3\sin y = c$$

تمرین۱:

ابتدا عامل انتگرال ساز معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورده سپس به کمک آن جواب عمومی معادلات دیفرانسیل را بیابید.

1. $\left(\tan y - \frac{y}{x}\sec y\right) dx + (x - \sec y \ln x)\,dy = 0$
2. $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$
3. $x\,dx + y\,dy = y^2\,dx$
4. $(xy-1)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$
5. $2x\,dx = [3y^2 + (x^2 - y^3)\tan y]\,dy$
6. $x(x+y^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$
7. $\left(2ye^{x^2y^2} + 2y^2\right) dx + \left(2xe^{x^2y^2} + 3xy\right) dy = 0, \qquad z = xy$
8. $ydy + (x + x^2 + y^2)dx = 0, \qquad z = x^2 + y^2$
9. $ydx = (x + x^2 + y^2)dy, \qquad z = x^2 + y^2$
10. $(y^4 - 2y^2)dx + (3xy^3 - 4xy + y)dy = 0, \qquad z = xy^2$

تمرین۲:

اگر $\mu = \frac{5}{xy^2}$ عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $(Axy - 2y^2)\,dx + (3xy - x^2)\,dy = 0$ باشد، ابتدا A را به‌دست آورده سپس جواب عمومی معادلات دیفرانسیل را بیابید.

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

فرم کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ \text{یا} \\ \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \end{cases}$$

روش حل: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{\mu}\left(\displaystyle\int q(x)\,\mu\,dx + c\right) \\ \\ \mu = e^{\int p(x)dx} \end{cases} \implies \quad y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$$

مثال۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$1.\ dy = (y + e^x)dx$

پاسخ:

$$\xrightarrow{\div dx} \quad \frac{dy}{dx} \underbrace{-}_{p(x)} y = \underbrace{e^x}_{q(x)}$$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\int q(x)\,\mu\,dx + c\right) = e^x\left(\int \underbrace{e^x e^{-x}}_{1}\ dx + c\right) = e^x(x + c)$$

2. $xy' + 2y = 4x^2 + 3x$

پاسخ:

$$\xrightarrow{\div x} \quad y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{4x+3}_{q(x)}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\int q(x)\,\mu\,dx + c\right) = x^{-2}\left(\int \underbrace{(4x+3)x^2}_{4x^3+3x^2}\,dx + c\right) = x^{-2}(x^4 + x^3 + c)$$

مثال۲:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر داده شده، به‌دست آورید.

$$y' + x\sin 2y = 2e^{-x^2}\cos^2 y\,, \qquad u = \tan y$$

پاسخ:

$$u' = (\sec^2 y)\,y' \quad \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \quad \frac{1}{\sec^2 y}u' + x(2\sin y\cos y) = 2e^{-x^2}\cos^2 y$$

$$\xrightarrow{\div\cos^2 y} \quad u' + \underbrace{2x}_{p(x)}\,u = \underbrace{2e^{-x^2}}_{q(x)}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\int q(x)\,\mu\,dx + c\right) = e^{-x^2}\left(\int \underbrace{2e^{-x^2}e^{x^2}}_{2}\,dx + c\right) = e^{-x^2}(2x + c)$$

$$\longrightarrow \quad \tan y = e^{x^2}(2x + c)$$

نکته:

گاهی اوقات برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول باید نقش x و y عوض شود تا بتوانیم معادله را حل کنیم.

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{1}{\mu}\left(\int q(y)\,\mu\,dy+c\right) \\ \mu=e^{\int p(y)\,dy} \end{cases}$$

مثال ۳:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$y\ \ln y\frac{dx}{dy}+(x-y)=0$$

پاسخ:

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\xrightarrow{\div y\ln y} \quad \frac{dx}{dy}+\frac{(x-y)}{y\ \ln y}=0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{dy}+\underbrace{\frac{1}{y\ \ln y}}_{p(y)}x=\underbrace{\frac{1}{\ln y}}_{q(y)}$$

$$\mu=e^{\int p(y)\,dy}=e^{\int\frac{dy}{y\ \ln y}}=e^{\ln(\ln y)}=\ln y$$

$$x=\frac{1}{\mu}\left(\int q(y)\,\mu\,dy+c\right)=\frac{1}{\ln y}\left(\int \underbrace{\frac{1}{\ln y}.\ln y}_{1}\,dy+c\right)=\frac{1}{\ln y}(y+c)$$

تمرین۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $\tan x\, dy + (y - 3\sec x)\, dx = 0$
2. $y' \cos x + y + (1 + \sin x)\cos x = 0$
3. $(1 + e^{-x})(y' + y) = 1$
4. $y\, dx + \left(2x - \dfrac{\sin y}{y^2}\right) dy = 0$
5. $y'(x \sin y + 2\sin 2y) = 1$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x + e^y}$

تمرین۲:

مسائل مقدار اولیه زیر را حل نمایید.

1. $x\, y' + 2y = \sin x$,　　　$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
2. $x^2\, y' + y = 2$,　　　$\lim_{x \to 0} y(x) =$ کراندار

تمرین۳:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر داده شده، به‌دست آورید.

1. $xy' = x^2 \sec y + \tan y$,　　　$z = \sin y$
2. $y' + xy \ln y = xy$,　　　$u = \ln y$
3. $\sin y \dfrac{dy}{dx} = \cos y\,(1 - x\cos y)$,　　　$z = \dfrac{1}{\cos y}$
4. $y' + \dfrac{y}{x}\ln y = \dfrac{y}{x^2}(\ln y)^2$,　　　$z = \dfrac{1}{\ln y}$
5. $x^2 y y'' = (xy' - y)^2$,　　　$y = e^{\int z(x)\, dx}$

معادلات دیفرانسیل برنولی:

فرم کلی معادلات دیفرانسیل برنولی به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x)\, y^n \\ \qquad\quad \text{یا} \\ \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\, y^n \end{cases} \qquad\qquad n \neq 0,1$$

روش حل: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل برنولی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$(y' + p(x)y = q(x)\, y^n) \times y^{-n} \quad \longrightarrow \quad y^{-n}\, y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

حال تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ استفاده می‌کنیم تا به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول برسیم و پس از حل در جواب به جای u مساوی‌اش یعنی y^{1-n} را قرار می‌دهیم.

$$u = y^{1-n} \quad \longrightarrow \quad u' = (1-n)y^{-n}y' \quad \longrightarrow \quad y^{-n}y' = \frac{u'}{1-n}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \quad \frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x) \quad \xrightarrow{\times(1-n)} \quad u' + (1-n)p(x)\, u = (1-n)\, q(x)$$

به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌رسیم. پس از حل آن در جواب به جای u مساوی‌اش یعنی y^{1-n} را قرار می‌دهیم.

مثال۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y' + y = e^{2x}y^3$

پاسخ: معادله دیفرانسیل برنولی

$$(\, y' + y = e^{2x}y^3) \times y^{-3} \quad \longrightarrow \quad y^{-3}y' + y^{-2} = e^{2x}$$

$$u = y^{-2} \quad \longrightarrow \quad u' = -2y^{-3}y' \quad \longrightarrow \quad y^{-3}y' = -\frac{1}{2}u'$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} -\frac{1}{2}u' + u = e^{2x} \quad \xrightarrow{\times(-2)} \quad u' \underbrace{-2}_{p(x)} u = \underbrace{-2e^{2x}}_{q(x)}$$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int 2\, dx} = e^{-2x}$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\int q(x)\,\mu\, dx + c\right) = e^{2x}\left(\int \underbrace{-2e^{2x}\, e^{-2x}}_{-2} dx + c\right) = e^{2x}(-2x + c)$$

$$\longrightarrow \quad y^{-2} = e^{2x}(-2x + c)$$

2. $x\, dy = [y + \frac{x^2}{y}(1 + \ln x)]\, dx$

پاسخ:

$$\xrightarrow{\div\, dx} xy' = y + \frac{x^2}{y}(1 + \ln x) \quad \xrightarrow{\div x} \quad y' - \frac{1}{x}y = x(1 + \ln x)\, y^{-1}$$ معادله دیفرانسیل برنولی

$$[y' - \frac{1}{x}y = x(1 + \ln x)\, y^{-1}] \times y \quad \longrightarrow \quad yy' - \frac{1}{x}y^2 = x(1 + \ln x)$$

$$u = y^2 \quad \longrightarrow \quad u' = 2yy' \quad \longrightarrow \quad yy' = \frac{1}{2}u'$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \quad \frac{1}{2}u' - \frac{1}{x}u = x(1 + \ln x) \quad \xrightarrow{\times 2} \quad u' \underbrace{-\frac{2}{x}}_{p(x)} u = \underbrace{2x\,(1 + \ln x)}_{q(x)}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\int q(x)\,\mu\, dx + c\right) = x^2\left(\int \underbrace{2x(1 + \ln x).\, x^{-2}}_{\frac{2(1+\ln x)}{x}}\, dx + c\right) = x^2[(1 + \ln x)^2 + c]$$

$$\longrightarrow \quad y^2 = x^2[(1 + \ln x)^2 + c]$$

نکته:

گاهی اوقات برای حل معادلات دیفرانسیل برنولی باید نقش x و y عوض شود تا بتوانیم معادله را حل کنیم.

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)x^n$$

ابتدا طرفین معادله دیفرانسیل را در x^{-n} ضرب می‌کنیم سپس $u=x^{1-n}$ درنظر می‌گیریم.

مثال۲:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

$$xy'+y=2x^2y^2y'\ln y$$

پاسخ:

$$\longrightarrow\ (2x^2y^2\ln y-x)\,y'=y\quad\longrightarrow\quad y'=\frac{y}{2x^2y^2\ln y-x}\quad\longrightarrow\quad\frac{dx}{dy}=\frac{2x^2y^2\ln y-x}{y}$$

$$\longrightarrow\quad\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=(2y\ln y)\,x^2$$ معادله دیفرانسیل برنولی

$$[\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=(2y\ln y)\,x^2]\times x^{-2}\quad\longrightarrow\quad x^{-2}\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^{-1}=2y\ln y$$

$$u=x^{-1}\quad\longrightarrow\quad\frac{du}{dy}=-x^{-2}\frac{dx}{dy}\quad\longrightarrow\quad x^{-2}\frac{dx}{dy}=-\frac{du}{dy}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}}\quad-\frac{du}{dy}+\frac{1}{y}u=2y\ln y\quad\xrightarrow{\times(-1)}\quad\frac{du}{dy}\underbrace{-\frac{1}{y}}_{p(y)}u=\underbrace{-2y\ln y}_{q(y)}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu=e^{\int p(y)dy}=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln y}=y^{-1}$$

$$u=\frac{1}{\mu}\left(\int q(y)\,\mu\,dy+c\right)=y\left(\int\underbrace{(-2y\ln y)y^{-1}}_{-2\ln y}\,dy+c\right)=y[-2(y\ln y-y)+c]$$

$$\longrightarrow\quad x^{-1}=y[-2(y\ln y-y)+c]$$

تمرین۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\,(1 - \sin x)$

2. $y' = y(y^3 \cos x + \tan x)$

3. $2 \cos y\, dx = (x^3 - \sin y)\, dy$

4. $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$

5. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

6. $xy(xy^2 + 1)y' - 1 = 0$

7. $2y' + (\tan x)\, y = \dfrac{(4x+5)^2}{\cos y}\, y^3$

8. $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$

تمرین۲:

مسئله مقدار اولیه زیر را حل نمایید.

$$dy + x(4y - 8y^{-3})\, dx = 0\,, \qquad y(0) = 1$$

تمرین۳:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را با توجه به تغییر متغیر داده شده، به‌دست آورید.

1. $(\sin y)\, dy = \cos y\,(1 - x \cos y)\, dx\,, \quad z = \cos y$

4. $(\sin x)\, y' = y \cos x \ln y + y\,(\ln y)^2\,, \quad t = \ln y$

کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

روش کاهش مرتبه:

دسته ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در دو حالت زیر

- فاقد متغیر y $\quad F(x,y',y'')=0$
- فاقد متغیر x $\quad G(y,y',y'')=0$

با تغییر متغیرهای مناسب به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می‌شوند که این روش را کاهش مرتبه می‌نامیم.

روش حل:

- حالت اول:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx}$$

با جای‌گذاری در معادله دیفرانسیل به معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F\left(x\,,p\,,\frac{dp}{dx}\right)=0$ می‌رسیم.
پس از حل در جواب به جای p، y' را قرار داده و بار دیگر معادله دیفرانسیل به‌دست آمده را حل می‌کنیم.

- حالت دوم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

با جای‌گذاری در معادله دیفرانسیل به معادله دیفرانسیل مرتبه اول $G\left(y\,,p\,,p\frac{dp}{dy}\right)=0$ می‌رسیم.
پس از حل در جواب به جای p، y' را قرار داده و بار دیگر معادله دیفرانسیل به‌دست آمده را حل می‌کنیم.

نکته:

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به‌صورت $F(y',y'')=0$ تعریف شود آنگاه معادله دیفرانسیل به هر دو روش قابل حل خواهد شد.

مثال۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $xy'' + y' = 1 + x^2$

پاسخ: کاهش مرتبه-فاقد متغیر y

$$y' = p\,, \quad y'' = \frac{dp}{dx} \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} x\frac{dp}{dx} + p = 1 + x^2 \quad (*)$$

معادله دیفرانسیل$(*)$ به دو روش قابل حل است:

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} + \dfrac{1}{x}p = \dfrac{1+x^2}{x} & \text{معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول} \\ \underbrace{(p - 1 - x^2)}_{M}\, dx + \underbrace{x}_{N}\, dp = 0 & \text{معادله دیفرانسیل کامل} \end{cases}$$

از روش معادله دیفرانسیل کامل استفاده می‌کنیم.

$$\int M(x,p)\, dx + \int N^*\, dp = c_1 \quad \rightarrow \quad \int (p - 1 - x^2)\, dx + 0 = c_1$$

$$\rightarrow px - x - \frac{x^3}{3} = c_1 \quad \rightarrow \quad p = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}$$

$$\xrightarrow{p=y'} y' = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x} \quad \rightarrow \quad dy = \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}\right) dx \qquad \text{معادله دیفرانسیل جدا از هم}$$

$$\xrightarrow{\int} \int dy = \int \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{c_1}{x}\right) dx \quad \rightarrow \quad y = x + \frac{x^3}{9} + c_1 \ln x + c_2$$

2. $yy'' = y^2y' + (y')^2$

پاسخ: کاهش مرتبه-فاقد متغیر x

$$y' = p\,, \quad y'' = p\,\frac{dp}{dy}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \quad yp\frac{dp}{dy} = y^2p + p^2 \quad \xrightarrow{\div yp} \quad \frac{dp}{dy} \underbrace{-\frac{1}{y}}_{a(y)} p = \underbrace{y}_{q(y)}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int a(y)dy} = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ln y} = y^{-1}$$

$$p = \frac{1}{\mu}\left(\int q(y)\,\mu\,dy + c_1\right) = y\left(\int \underbrace{y\,y^{-1}}_{1}\,dy + c_1\right) = y(y + c_1)$$

$$\xrightarrow{p=y'} \quad y' = y(y + c_1) \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{1}{y(y + c_1)}dy$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int dx = \int \frac{dy}{y(y + c_1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{c_1}}{y} - \frac{\frac{1}{c_1}}{y + c_1}\right) dy$$

$$\longrightarrow \quad x = \frac{1}{c_1}\ln y - \frac{1}{c_1}\ln(y + c_1) + c_2$$

مثال۲:

مسائل مقدار اولیه زیر را حل نمایید.

$$1.\ y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln\frac{y'}{x}\right), \qquad y(1) = -\frac{1}{2}, \qquad y'(1) = 1$$

پاسخ: کاهش مرتبه-فاقد متغیر y

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}\left(1 + \ln\frac{p}{x}\right) \longrightarrow dp = \frac{p}{x}\left(1 + \ln\frac{p}{x}\right)dx$$

معادله دیفرانسیل همگن

$$p = vx \rightarrow dp = x\,dv + v\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} x\,dv + v\,dx = v\,(1 + \ln v)\,dx \longrightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{v\ln v}dv$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \int \frac{1}{v\ln v}dv = \int \frac{1}{x}dx \longrightarrow \ln(\ln v) = \ln x + \ln c_1 = \ln c_1 x \longrightarrow \ln v = c_1 x$$

$$\longrightarrow v = e^{c_1 x} \longrightarrow \frac{p}{x} = e^{c_1 x} \longrightarrow p = xe^{c_1 x} \xrightarrow{p=y'} y' = xe^{c_1 x}$$

$$y'(1) = 1 \xrightarrow{x=y'=1} 1 = e^{c_1} \longrightarrow c_1 = 0 \longrightarrow y' = x \longrightarrow dy = x\,dx$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \int dy = \int x\,dx \longrightarrow y = \frac{x^2}{2} + c_2$$

$$\mathrm{y}(1) = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x=1,\ \ y=-\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_2 \longrightarrow c_2 = -1 \longrightarrow y = \frac{x^2}{2} - 1$$

2. $y'' \cos y - (y')^2 \sin y = (y')^3, \qquad y(0) = \frac{\pi}{6}, \qquad y'(0) = 2$

پاسخ: کاهش مرتبه-فاقد متغیر x

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy} \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} p\frac{dp}{dy}\cos y - p^2 \sin y = p^3$$

$$\xrightarrow{\div p\cos y} \quad \frac{dp}{dy} - (\tan y)\,p = (\sec y)\,p^2$$

معادله دیفرانسیل برنولی

$$\left[\frac{dp}{dy} - (\tan y)\,p = (\sec y)\,p^2\right] \times p^{-2} \quad \longrightarrow \quad p^{-2}\frac{dp}{dy} - (\tan y)\,p^{-1} = \sec y$$

$$u = p^{-1} \quad \longrightarrow \quad \frac{du}{dy} = -p^{-2}\frac{dp}{dy} \quad \longrightarrow \quad p^{-2}\frac{dp}{dy} = -\frac{du}{dy}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \quad -\frac{du}{dy} - (\tan y)\,u = \sec y \quad \xrightarrow{\times(-1)} \quad \frac{du}{dy} + \underbrace{\tan y}_{a(y)}\,u = \underbrace{-\sec y}_{q(y)}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\mu = e^{\int a(y)dy} = e^{\int \tan y\, dy} = e^{-\ln(\cos y)} = \frac{1}{\cos y} = \sec y$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\int q(y)\,\mu\, dy + c_1\right) = \cos y\left(\int -\sec^2 y\; dy + c_1\right) = \cos y\,[-\tan y + c_1]$$

$$\longrightarrow \quad p^{-1} = -\sin y + c_1 \cos y \;\; (*) \quad \xrightarrow{p=y',\ \frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}} \quad dx = (-\sin y + c_1\cos y)\,dy$$

معادله دیفرانسیل جدا از هم

$$\xrightarrow{\int} \quad \int dx = \int(-\sin y + c_1 \cos y)\,dy \quad \longrightarrow \quad x = \cos y + c_1 \sin y + c_2 \qquad (**)$$

$$\begin{matrix} y(0) = \frac{\pi}{6} \\ y'(0) = 2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{جای گذاری در } (*),(**)} \begin{cases} \frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} + c_1\cos\frac{\pi}{6} \\ 0 = \cos\frac{\pi}{6} + c_1 \sin\frac{\pi}{6} + c_2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad c_2 = -\frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\longrightarrow \qquad x = \cos y + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin y - \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

تمرین۱:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

1. $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$
2. $xy'' = y'(y' - 1)$
3. $xy'' = y'$
4. $(1 + x^2)\, y'' + 2xy' = 1$
5. $yy'' + (y')^2 = (y')^3 \ln y$
6. $yy'' + (y')^2 = 2(y')^3 e^{-y}$
7. $y'' + (y')^3\, e^{2y} = 0$
8. $y'' = 0$

تمرین۲:

مسئله مقدار اولیه زیر را حل نمایید.

$$xy'' + y' = 2x \ln x\ , \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = \frac{1}{2}$$

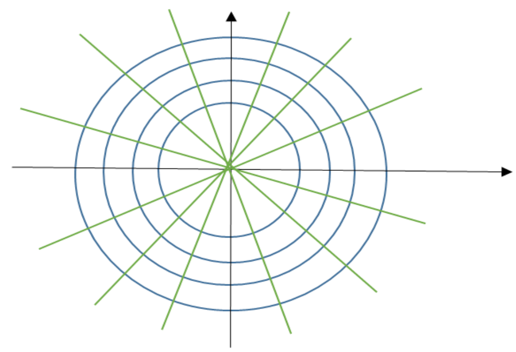
دسته مسیر:

اگر دو دسته منحنی به معادلات $C_\alpha: f(x,y,\alpha)=0$ و $C_\beta: g(x,y,\beta)=0$ همدیگر را تحت زاویه‌ی معینی قطع کنند آنها را نسبت به هم یک دسته مسیر می‌نامیم.

اگر این دو دسته منحنی یکدیگر را تحت زاویه‌ی قائمه قطع کنند آنها را نسبت به هم دسته مسیرهای قائم و درغیر این صورت دسته مسیرهای مائل می‌نامیم.

تابعی که بر هر یک از دسته منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ عمود باشد مسیر متعامد می‌نامیم.

به عنوان مثال دسته‌ی خطوط و دسته‌ی دوایر نسبت به هم دسته مسیرهای قائم هستند.



دسته دوایر $C_\alpha: x^2+y^2=\alpha^2$

دسته خطوط $C_\beta: y=\beta x$

روش تعیین دسته مسیرهای قائم در دستگاه دکارتی:

۱. ابتدا معادله دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی داده شده را به دست می‌آوریم. معادله دیفرانسیل به‌دست آمده را، معادله دیفرانسیل اصلی می‌نامیم.

۲. به‌جای y' در معادله دیفرانسیل اصلی $-\frac{1}{y'}$ را قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل قائم به‌دست آید.

۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل قائم همان دسته مسیر قائم است.

مثال:

مسیرهای قائم دسته منحنی‌های زیر را بیابید.

1. $x^2 + y^2 = \alpha^2$

پاسخ:

معادله دیفرانسیل اصلی $2x + 2yy' = 0 \longrightarrow y' = -\frac{x}{y}$

معادله دیفرانسیل قائم $y' = -\frac{1}{y'} \longrightarrow -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}$

معادله دیفرانسیل جدا از هم $\longrightarrow -\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \longrightarrow \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{y}\,dy$

$$\xrightarrow{\int} \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \longrightarrow \ln y = \ln x + \ln c = \ln cx \longrightarrow y = cx$$

دسته مسیر قائم

2. $\sin y = a\,e^{x^2}$

پاسخ:

معادله دیفرانسیل اصلی $y' cosy = 2xa\,e^{x^2} \longrightarrow y' \cos y = 2x \sin y \longrightarrow y' = 2x \tan y$

معادله دیفرانسیل قائم $y' = -\frac{1}{y'} \longrightarrow -\frac{1}{y'} = 2x \tan y$

معادله دیفرانسیل جدا از هم $\longrightarrow -\frac{dx}{dy} = 2x \tan y \longrightarrow \frac{1}{2x}\,dx = -\tan y\,dy$

$$\xrightarrow{\int} \int \frac{1}{2x} dx = \int -\tan y\; dy \longrightarrow \frac{1}{2} \ln x = \ln \cos y + \ln c$$

دسته مسیر قائم $\longrightarrow \ln x^{\frac{1}{2}} = \ln c \cos y \longrightarrow \sqrt{x} = c\;\cos y$

مثال۲:

معادله منحنی‌ایی را پیدا کنید که از نقطه $(2,1)$ بگذرد و عمود بر منحنی در نقطه (x,y) دارای شیب $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$ باشد.

پاسخ:

$y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$ معادله دیفرانسیل اصلی

$y' = -\frac{1}{y'} \longrightarrow -\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{y^2-x^2}$ معادله دیفرانسیل قائم

$$\longrightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{y^2-x^2} \longrightarrow (y^2-x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

معادله دیفرانسیل همگن- معادله دیفرانسیل کامل

از روش معادله دیفرانسیل کامل استفاده می‌کنیم.

$$M(x,y) = y^2 - x^2\,, \quad N(x,y) = 2xy$$

$$\int M(x,y)\,dx + \int N^*\,dy = c \longrightarrow \int (y^2-x^2)\,dx + 0 = c$$

$\longrightarrow xy^2 - \frac{1}{3}x^3 = c \quad (*)$ دسته مسیر قائم

$(*)$ در $(2,1)$ نقطه $\longrightarrow 2 - \frac{8}{3} = c \longrightarrow c = -\frac{2}{3}$

$\longrightarrow xy^2 - \frac{1}{3}x^3 = -\frac{2}{3}$ منحنی مورد نظر

تمرین۱:

مسیرهای قائم دسته منحنی‌های زیر را بیابید.

1. $y = ce^{-\sin x}$
2. $y^2 = cx + x^2$
3. $x^2 y = c$
4. $y + x - 2 = ce^{-x}$
5. $x^2 - xy + y^2 = c^2$
6. $y = c(\tan x + \sec x)$
7. $y = cx^2 + 1$
8. $\int_0^x t^2\, y(t) = c + x^3\, y(x)$

تمرین۲:

معادله دسته منحنی‌هایی را تعیین کنید که به دسته منحنی‌های $y^2 = 2cx$ عمود باشند و از نقطه $(1, \sqrt{2})$ بگذرند.

تمرین۳:

مقدار n را طوری بیابید که خانواده منحنی‌های $x^n + y^n = c_1$ و $y = \frac{x}{1 - c_2 x}$ دسته مسیرهای قائم یکدیگر باشند.

نکات فصل اول:

- برای تشخیص معادلات دیفرانسیل جدا از هم، همگن و کامل حتما باید ضریب dx و dy مشخص باشد.

- اگر در معادله دیفرانسیل توابع لگاریتمی، مثلثاتی و نمایی وجود داشته باشند و اگر این توابع بر حسب $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ نباشند آنگاه معادله دیفرانسیل همگن نیست و اگر این توابع برحسب $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ باشند باید معادله دیفرانسیل همگن بررسی شود.

- برای تشخیص معادله دیفرانسیل کامل یا به‌دست آوردن عامل انتگرال ساز، معادله دیفرانسیل حتما باید به‌صورت $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ باشد.

- در تشخیص معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول و برنولی باید در معادله y' یا $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ داشته باشیم.

- جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی بصورت $y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx} q(x)\,dx + c\right)$ می‌باشد.

- در کاهش مرتبه برای حالت فاقد متغیر y، $\begin{cases} y' = p \\ y'' = \frac{dp}{dx} \end{cases}$ است و برای حالت فاقد متغیر x، $\begin{cases} y' = p \\ y'' = p\frac{dp}{dy} \end{cases}$ است.

- برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل اصلی در دسته مسیر بعد از گرفتن مشتق حتما ثابت پارامتری باید حذف شود.