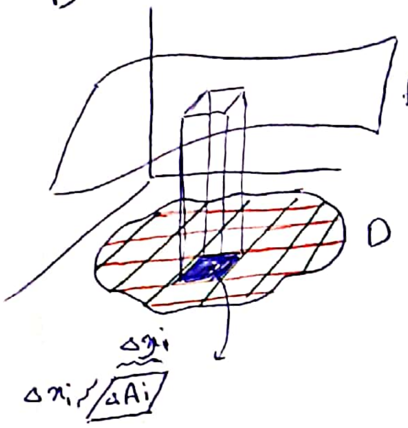
انتگرال.

انتگرال دوگانه. فرض کنید $f(x,y)$ تابعی پیوسته روی ناحیه D باشد. این ناحیه را با خطوط موازی محورهای x و y به n قسمت ΔA_i تا ΔA_n تقسیم می‌کنیم که $\Delta A_i=\Delta x_i\times\Delta y_i$. در هر قطعه ΔA_i، نقطه (x_i,y_i) را انتخاب کرده و مجموع $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$ را تشکیل می‌دهیم. در این صورت $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \text{diam}\,A_i\to 0}} S_n$ انتگرال دوگانه f روی D نامیده شده و آن را با $\iint_D f\,dA$ نمایش می‌دهیم.



ویژگی‌های انتگرال دوگانه.

1) $\iint_D \big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)dA=\iint_D f(x,y)dA\pm\iint_D g(x,y)dA$

2) $f(x,y)\geq 0 \Longrightarrow \iint_D f(x,y)dA\geq 0$

3) $\iint_D f(x,y)dA=\iint_{D_1} f(x,y)dA+\iint_{D_2} f(x,y)dA \qquad D=D_1\overset{\circ}{\cup} D_2$

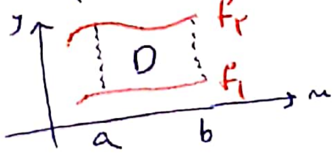
قضیه فوبینی (صورت اول) فرض کنید $f(x,y)$ تابعی پیوسته روی ناحیه $D:\begin{cases}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{cases}$ باشد. در این صورت

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_{y=c}^{d}\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx$$

قضیه فوبینی (صورت دوم). فرض کنید $f(x,y)$ تابعی پیوسته روی ناحیه D باشد. در این صورت

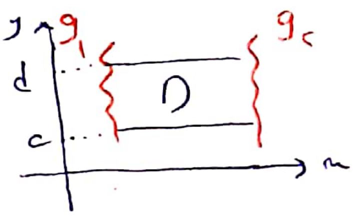
الف. اگر $D:\begin{cases}a\leq x\leq b\\ f_1(x)\leq y\leq f_2(x)\end{cases}$ که f_1 و f_2 روی $[a,b]$ پیوسته‌اند، آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_{x=a}^{b}\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



ب) اگر $D:\begin{cases}g_1(y)\leq x\leq g_2(y)\\ c\leq y\leq d\end{cases}$ که g_1 و g_2 توابعی پیوسته روی $[c,d]$ هستند آنگاه

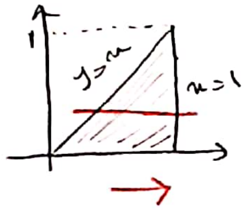
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_{y=c}^{d}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



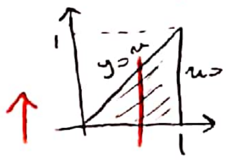
مثال ۱. انتگرال تابع $f(x,y)=4-y^2$ را روی ناحیه $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ -1\le y\le 3\end{cases}$ بیابید.

حل
$$\iint_D (4-y^2)\,dA = \int_{x=0}^{2}\int_{y=-1}^{3}(4-y^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{2}\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=-1}^{3}dx = \int_{x=0}^{2}\left(7-\frac{1}{3}\right)dx = 14-\frac{2}{3}$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\iint_A \frac{\sin x}{x}\,dA$ که در آن A مثلثی است واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $y=0$ ، $y=x$ و $x=1$.



$$\iint_A \frac{\sin x}{x}\,dA = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx$$
غیرقابل حل

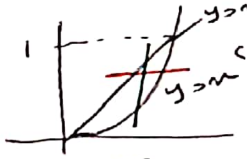


$$\iint_A \frac{\sin x}{x}\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\frac{\sin x}{x}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\frac{\sin x}{x}\,y\Big|_{y=0}^{x}dx = \int_{x=0}^{1}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_{x=0}^{1} = 1-\cos 1$$

مثال. ترتیب انتگرال گیری را عوض کنید.

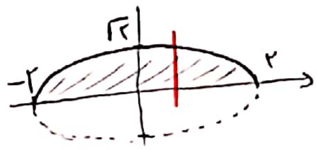
1) $$\int_0^1\int_y^{\sqrt y}dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x}dy\,dx = \int_{x=0}^{1} y\Big|_{x^2}^{x}dx = \int_{x=0}^{1}(x-x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$x=y$ و $x=\sqrt{y}\Rightarrow y=x^2$



2) $$\int_0^{\sqrt 2}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\,dy = \int_{x=-2}^{2}\int_{y=0}^{+\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} y\,dy\,dx = \cdots$$

$x=\pm\sqrt{4-2y^2}\Rightarrow x^2+2y^2=4$



$y=\pm\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$

تمرین. انتگرال های زیر را حل کنید.

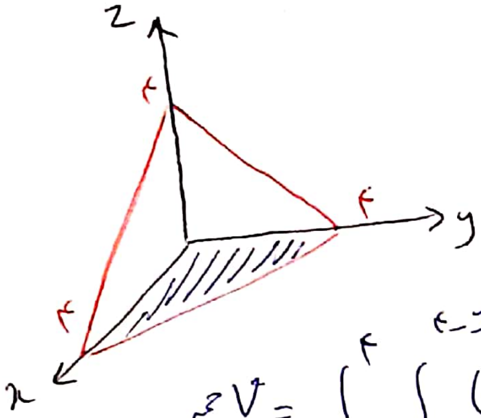
1) $\int_0^1\int_{2y}^{2}\cos(x^2)\,dx\,dy$

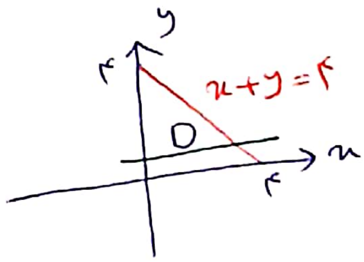
2) $\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}\,dx\,dy$

3) $\int_0^2\int_x^2 y^2\sin(xy)\,dy\,dx$

4) $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

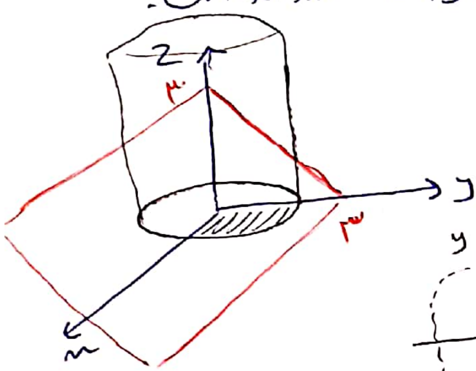
مثال. حجم جسم را بیابید که صفحه $z=4-x-y$ از یک هشتم اول جدا می‌کند.



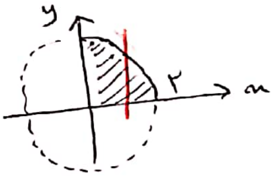


$$\text{حجم } V=\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{4-y}(4-x-y)\,dx\,dy=\int_{y=0}^{4}\left(4x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_{x=0}^{4-y}dy=\cdots$$

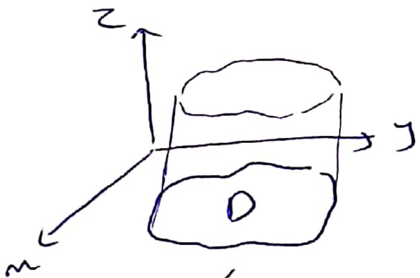
حجم جسم را در $\frac{1}{8}$ اول بیابید که با استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحه $z+y=3$ محدود شده است.



$$V=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{+\sqrt{4-x^2}}(3-y)\,dy\,dx=\cdots$$



مساحت ناحیه محدود واقع در صفحه از فرمول زیر بدست می‌آید.

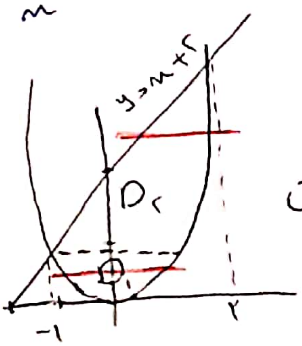


$$\boxed{\text{مساحت}=\iint_D 1\,dA}$$

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم

۱ × مساحت قاعده = حجم

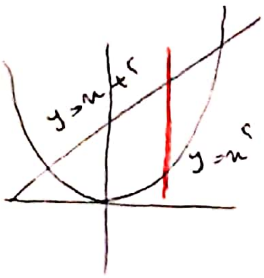
مطلوبست مساحت ناحیه D که به سهمی $y=x^2$ و خط $y=x+2$ محدود است.



$$\text{مساحت}=\int_{y=0}^{1}\int_{x=-\sqrt y}^{+\sqrt y}1\,dx\,dy+\int_{y=1}^{4}\int_{x=y-2}^{+\sqrt y}1\,dx\,dy=\cdots$$

$y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt y$ $\quad x^2=x+2\Rightarrow x^2-x-2=0$ $\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=-1, 2$

راه دوم



$$\text{مساحت}=\int_{x=-1}^{2}\int_{y=x^2}^{x+2}1\,dy\,dx=\cdots$$

جانشانی در انتگرال دوگانه - فرض کنید f تابعی پیوسته روی ناحیه R باشد. فرض کنید ناحیه G در صفحه uv با معادلات $\begin{cases} x=g(u,v) \\ y=h(u,v) \end{cases}$ به ناحیه R در صفحه xy تبدیل شود. در این صورت

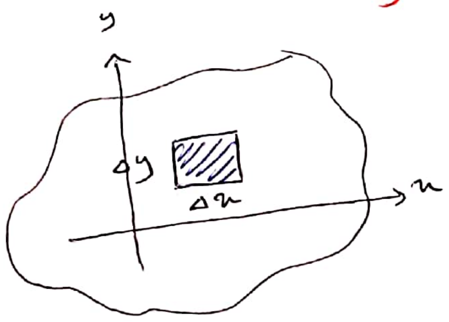
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(g(u,v),h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

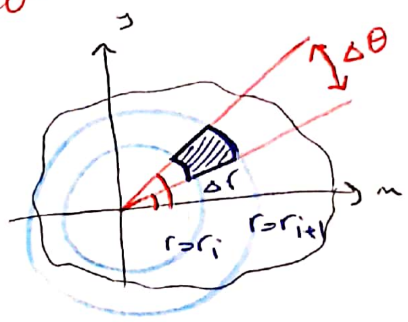
که $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

مثال: مقدار J را برای تبدیل $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ بیابید.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r\sin^2\theta - r\cos^2\theta = -r \Rightarrow |J| = r$$

$$dx\,dy \longrightarrow r\,dr\,d\theta$$





$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

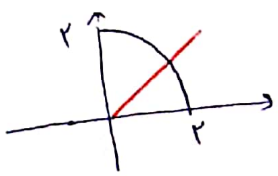
$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

$\Delta \theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$

$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$

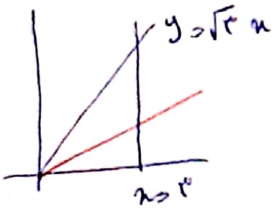
مثال. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$1)\ \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}\,r\,dr\,d\theta$$



$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\times\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{2} \sin(2\theta)\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{6}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{-8}{2\times 6}\cos(2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \dots$$

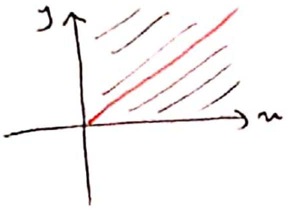
$$\text{(2)}\quad \int_0^3\int_0^{\sqrt{3}x}\frac{dy\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=0}^{\frac{3}{\cos\theta}}\frac{r\,dr\,d\theta}{r}=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} r\Big|_{r=0}^{\frac{3}{\cos\theta}}d\theta=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\,d\theta}{\cos\theta}$$



$\tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

$x=3\Rightarrow r\cos\theta=3\Rightarrow r=\frac{3}{\cos\theta}$

$$\text{(4)}\quad \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{+\infty}e^{-r^2}(r\,dr\,d\theta)=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\lim_{b\to+\infty}\left(\int_{r=0}^{b}re^{-r^2}dr\right)d\theta$$

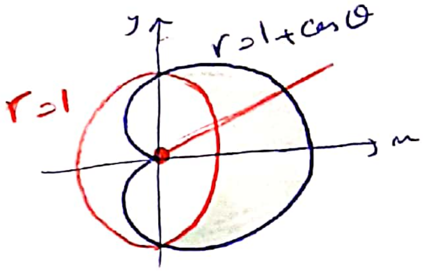


$$=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{b}\right)d\theta=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2}-e^{0}\right)\right)d\theta=\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{(5)}\quad \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\int_y^{\sqrt{a^2-y^2}}x\,dx\,dy \qquad\qquad \text{(6)}\quad \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}5\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

مثال. مطلوبست مساحت ناحیه‌ای که درون دلوار $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r=1$ قرار دارد.

$$\text{مساحت}=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{1+\cos\theta}r\,dr\,d\theta=\dots$$



مثال. فرض کنید R ناحیه‌ای در ربع اول و محدود به خطوط $y=x-2$ و $y=-2x+7$ و $y=-2x+4$ و $y=x+1$ است. با استفاده از تبدیلات $\begin{cases}u=x-y\\ v=2x+y\end{cases}$ انتگرال زیر را انتگرالی در صفحه uv تبدیل کرده آن را حل کنید.

$$\iint_R(2x^2-xy-y^2)\,dx\,dy=\int_{v=4}^{7}\int_{u=-1}^{2}u\times v\times\frac{1}{3}\,du\,dv=\dots$$

$$\begin{cases}u=x-y\\ v=2x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{3}\\[2mm] y=\dfrac{v-2u}{3}\end{cases}\Rightarrow J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$$

مرزها

$x-y=2$ | $y+2x=4$

$x-y=-1$ | $y+2x=7$

تمرین. فرض کنید R ناحیه‌ای در ربع اول صفحه xy و محدود به هذلولی‌های $xy=1$ و $xy=9$ و خطوط $y=x$ و $y=4x$ باشد. با استفاده از تبدیل $x=\frac{u}{v}$ ، $y=uv$ با ضوابط $u>0$ و $v>0$، انتگرال مقابل را حل کنید.

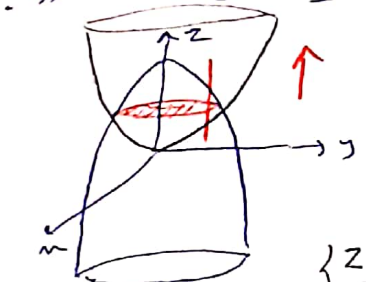
$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy$$

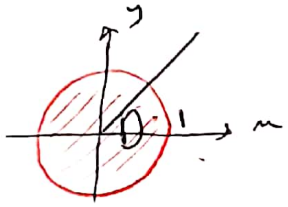
انتگرال سه‌گانه. فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی پیوسته روی ناحیه $V\subseteq\mathbb{R}^3$ باشد. با صفحات موازی صفحات مختصات، V را به n قسمت ΔV_1 تا ΔV_n تقسیم می‌کنیم که $\Delta V=\Delta x\times\Delta y\times\Delta z$. از هر ناحیه ΔV_i نقطه دلخواه (x_i,y_i,z_i) را انتخاب می‌کنیم. مجموع ریمان را تشکیل می‌دهیم. $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i$. مقدار $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ |\Delta V_i|\to 0}} S_n=\iiint_V f\,dV$ انتگرال سه‌گانه f روی V نامیده می‌شود.

حجم ناحیه V در فضا، از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\text{حجم } V=\iiint_V 1\,dV$$

مثال. حجم ناحیه‌ای را بیابید که از بالا به سهمیوار $z=2-x^2-y^2$ و از پایین به سهمیوار $z=x^2+y^2$ محدود است.



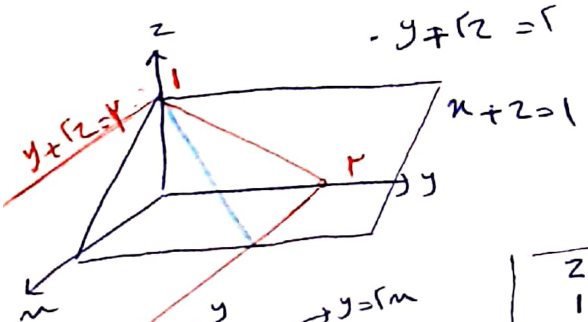


$$\begin{cases} z=2-x^2-y^2\\ z=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1$$

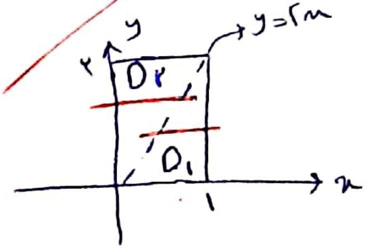
$$\text{حجم}=\iint_D\int_{z=x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$

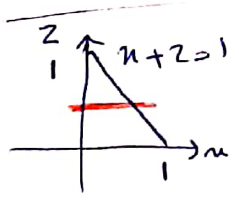
$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^2}^{2-r^2} dz\,r\,dr\,d\theta=\dots$$

مثال. حجم ناحیه واقع در $\frac{1}{8}$ اول و محدود به صفحات $x+z=1$ و $y+2z=2$.



$$\text{حجم}=\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{\frac{y}{2}}\int_{z=0}^{\frac{2-y}{2}} 1\,dz\,dx+\int_{y=0}^{2}\int_{x=\frac{y}{2}}^{1}\int_{z=0}^{1-x} 1\,dz\,dx=\dots$$

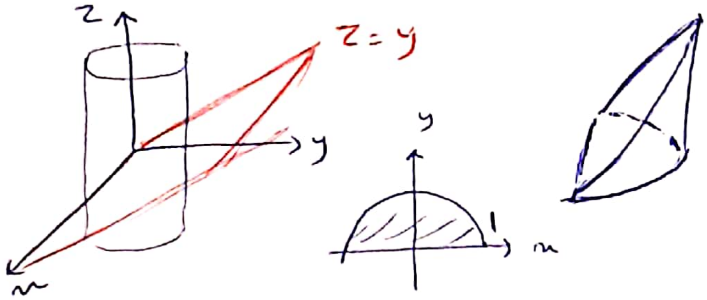




راه دوم

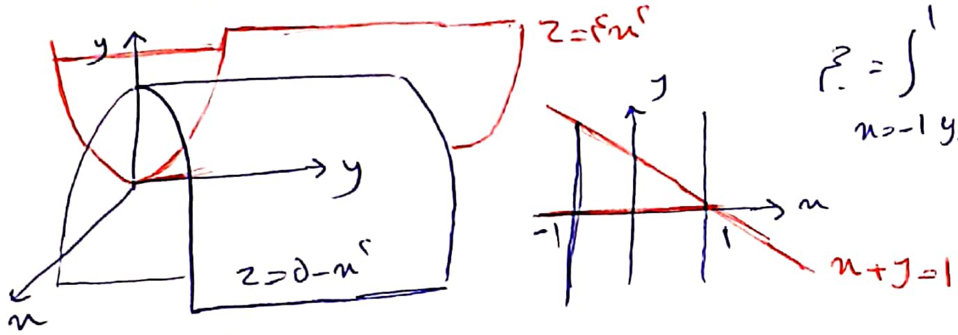
$$\text{حجم}=\int_{z=0}^{1}\int_{x=0}^{1-z}\int_{y=0}^{2-2z} 1\,dy\,dx\,dz=\dots$$

مثال: حجم برشی گوه‌ای از استوانه $x^2+y^2=1$ که از بالا به صفحه $z=y$ و از پایین به صفحه $z=0$ محدود شده.



$$\text{حجم} = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{y} 1\,dz\,dy\,dx$$

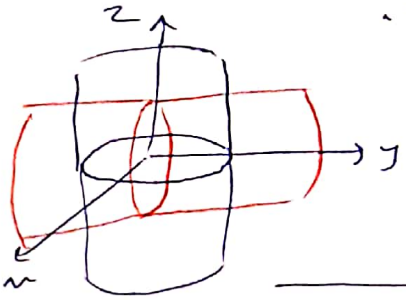
مثال: حجم ناحیه محصور بین استوانه‌های $z=5-x^2$ و $z=4x^2$، صفحات $y=0$ و $x+y=1$.



$$\text{حجم} = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=4x^2}^{5-x^2} 1\,dz\,dy\,dx$$

$$\begin{cases} z=4x^2 \\ z=5-x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x^2=5-x^2 \Rightarrow x=\pm 1$$

مثال: حجم فصل مشترک استوانه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$.



$$V=\int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-z^2}} 1\,dz\,dy\,dx$$

مقدار متوسط تابع $f(x,y,z)$ روی فضای V برابر است با

$$\frac{\iiint_V f(x,y,z)\,dV}{\iiint_V 1\,dV}$$

تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه. فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی پیوسته روی ناحیه R باشد و ناحیه G در فضای uvw با تبدیلات

$$\begin{cases} x=g(u,v,w) \\ y=h(u,v,w) \\ z=k(u,v,w) \end{cases}$$

به ناحیه R تبدیل شود. در این صورت

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_G f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw$$

که

$$J=J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

مثال. با استفاده از تبدیلات
$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$
، $J(\rho,\varphi,\theta)$ را بدست آورید.

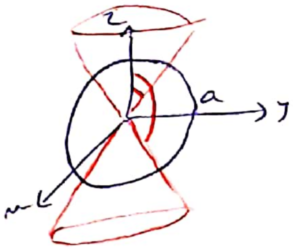
$$J(\rho,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi$$

$$dx\,dy\,dz \longrightarrow \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

مثال. مطلوبست مقدار متوسط تابع $f(r,\theta,z)=r$ روی ناحیه محدود به استوانه $r=1$ و صفحات $z=-1$, $z=1$

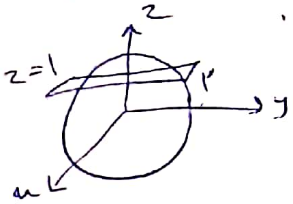
$$\text{مقدار متوسط } f=\frac{\iiint_V f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta}{\iiint_V 1\,dz\,r\,dr\,d\theta}=\frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=-1}^{1} r\,dz\,r\,dr\,d\theta}{\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=-1}^{1} 1\,dz\,r\,dr\,d\theta}=\cdots$$

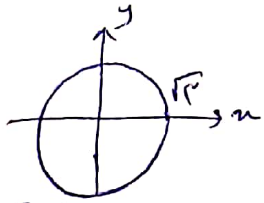
مثال. مطلوبست حجم قسمتی از کره $\rho=a$ که بین مخروطهای $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ قرار دارد.



$$\text{حجم}=\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_{\rho=0}^{a}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\cdots$$

مثال. صفحه $z=1$، کره $\rho=2$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند. حجم قسمت کوچکتر را بیابید.





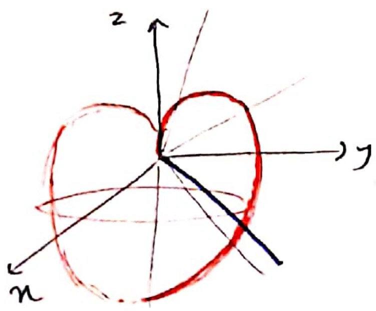
$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\rho=\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} 1\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\cdots$$

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2 \xrightarrow[\rho=2]{z=1} x^2+y^2+1=4 \Rightarrow x^2+y^2=3$$

$$z=1 \Rightarrow \rho\cos\varphi=1 \Rightarrow \rho=\frac{1}{\cos\varphi} \xrightarrow{\rho=2} 2=\frac{1}{\cos\varphi} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{1}{2}\ ,\ \varphi=\frac{\pi}{3}$$

مثال. حجم محصور در رویه $\rho=1-\cos\varphi$ را بیابید.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ρ	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

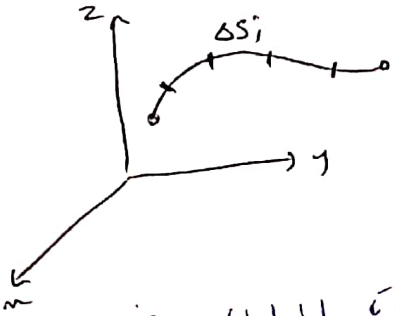


$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1-\cos\varphi} 1\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\cdots$$

انتگرال خمیده خطی.

فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی پیوسته روی خم $R(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ در بازه $a\le t\le b$ باشد. (بنابراین، این خم در دامنه تابع f قرار دارد.) این خم را از نقطه a تا b به n قسمت Δs_i تقسیم می‌کنیم و مجموع $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$ را تشکیل می‌دهیم که (x_i,y_i,z_i) نقطه‌ای در Δs_i است. در این صورت $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta s_i|\to 0}} S_n$، انتگرال f روی $[a,b]$ نامیده می‌شود و داریم

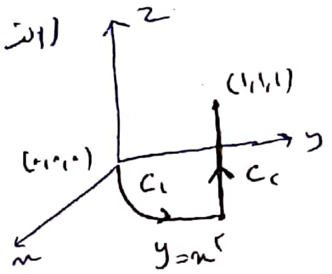
$$\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_{t=a}^{b} f(x(t),y(t),z(t))\,|V(t)|\,dt$$



$$|V(t)|=\frac{ds}{dt}$$

مثال. فرض کنید $f(x,y,z)=x+\sqrt{y}-z^2$. انتگرال f را از نقطه $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ روی خم‌های زیر حساب کنید.

الف)

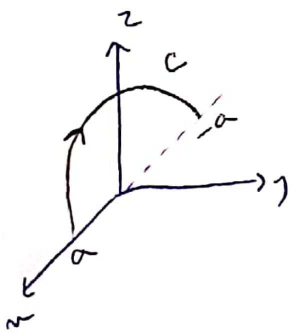


$C_1(t):\ R_1(t)=\underset{x}{t}\,i+\underset{y}{t^2}\,j \Rightarrow V_1(t)=i+2tj \Rightarrow |V_1|=\sqrt{1+4t^2}$

$C_2(t):\ R_1(t)=\underset{x}{1}i+\underset{y}{1}j+\underset{z}{t}k \Rightarrow V_2(t)=k \Rightarrow |V_2|=1$

$$\int_C f\,ds=\int_{C_1} f\,ds+\int_{C_2} f\,ds=\int_{t=0}^{1}\left(t+\sqrt{t^2}-0^2\right)\sqrt{1+4t^2}\,dt+\int_{t=0}^{1}\left(1+\sqrt{1}-t^2\right)\times 1\,dt$$

$$=\int_{t=0}^{1} 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt+\int_{t=0}^{1}(2-t^2)\,dt=\cdots$$



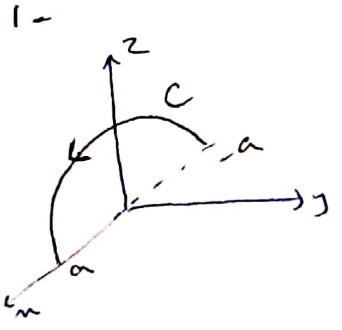
$C(t):\ R(t)=\cos t\, i+0j+\sin t\, k \qquad 0\le t\le \frac{\pi}{2}$

$V(t)=-\sin t\, i+\cos t\, k \qquad |V|=1$

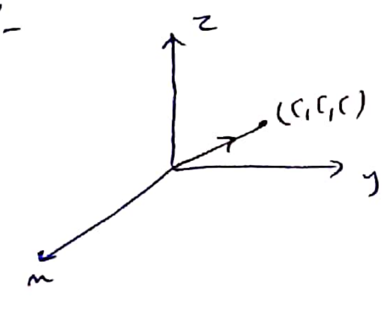
$$\int_C f\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t+\sqrt{0}-\sin^2 t\right)dt=\cdots$$

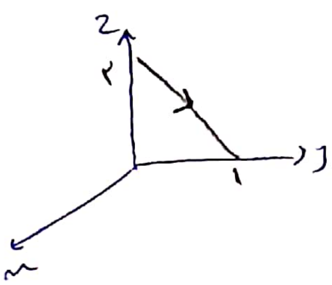
تمرین. خم‌های زیر را پارامتری کنید.

1-



2-

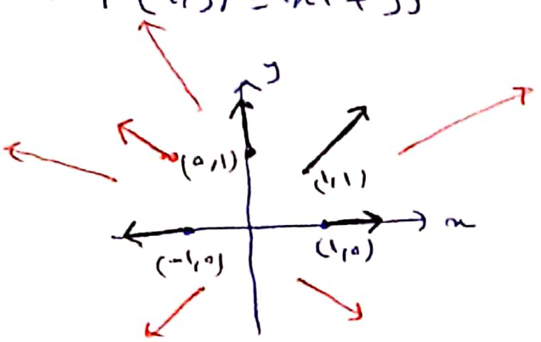




میدان برداری تابعی است که به هر نقطه یک بردار نسبت می دهد.

مثال. میدان های برداری زیر را رسم کنید.

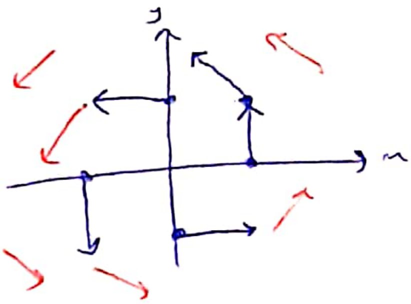
1) $F(x,y) = xi + yj$



$F(1,0) = i \qquad F(0,1) = j$

$F(1,1) = i + j \qquad F(-1,0) = -i$

2) $F(x,y) = \dfrac{-yi + xj}{\sqrt{x^2+y^2}}$



$F(1,0) = j \qquad F(0,1) = -i$

$F(-1,0) = -j \qquad F(0,-1) = i$

$F(1,1) = \dfrac{-i+j}{\sqrt{2}}$

تعریف دیورژانس و کرل $F(x,y) = Mi + Nj$ یک میدان برداری است. آنگاه

$$F \text{ دیورژانس } = \operatorname{div}(F) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

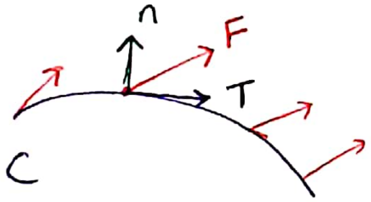
$$F \text{ کرل } = \operatorname{curl}(F) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k$$

انتگرال شارش و شار گذرنده. فرض کنید می خواهیم آهنگ وارد شدن یک سیال به ناحیه محدود به خمی چون C واقع در صفحه و یا آهنگ خارج شدن آن را از این ناحیه بدانیم.

تعریف. شار گذرنده F از یک خم C واقع در صفحه برابر است با

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$$

که $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر خم است.



• شارش F روی خم C برابر است با

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds$$

که $\vec{T}$ بردار یکه مماس بر خم است.

بنابراین اگر $F = Mi + Nj$ یک میدان برداری و C خم $R(t) = x(t)i + y(t)j$ در دامنه F باشد، آنگاه

$$\boxed{\begin{aligned} &C \text{ شار گذرنده } F \text{ از } = \int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \int_C M\,dy - N\,dx \\ &C \text{ شارش } F \text{ روی } = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds = \int_C M\,dx + N\,dy \\ &= C \text{ کار } F \text{ روی خم } \end{aligned}}$$

مثال. انتگرال شارش $F(x,y)=\underset{M}{-y}\,i+\underset{N}{x}\,j$ را روی م $R(t)=a\cos t\, i+b\sin t\, j$ با $0\le t\le 2\pi$ حساب کنید.

شارش یا کار F روی C $=\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=\int_C M\,dx+N\,dy$

$$R(t)=\underbrace{a\cos t}_{x}\, i+\underbrace{b\sin t}_{y}\, j \Longrightarrow dR=\underbrace{-a\sin t\,dt}_{dx}\, i+\underbrace{b\cos t\,dt}_{dy}\, j$$

$$\int_C M\,dx+N\,dy=\int_{t=0}^{2\pi} -(b\sin t)\times(-a\sin t\,dt)+(a\cos t)(b\cos t\,dt)$$

$$=\int_{t=0}^{2\pi}(ab\sin^2 t+ab\cos^2 t)\,dt=\int_{t=0}^{2\pi} ab\,dt=2\pi(ab)$$

قضیه گرین در صفحه. فرض کنید $F(x,y)=Mi+Nj$ یک میدان برداری است که

① M، N و مشتق های جزئی اول آنها در هر نقطه دلخواه از ناحیه R باز در خم C پیوسته باشد و

② C یک خم ساده بسته باشد. در این صورت

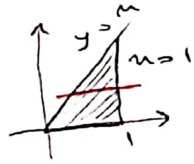
$$\text{شار گذرنده } F \text{ از } C=\oint_C F\cdot n\,ds=\int_C M\,dy-N\,dx \overset{\text{قضیه گرین}}{=} \iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_R \operatorname{div}F\,dx\,dy$$

$$\text{گردش } F \text{ روی } C=\oint_C F\cdot T\,ds=\int_C M\,dx+N\,dy \overset{\text{قضیه گرین}}{=} \iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_R \overrightarrow{\operatorname{curl}F}\cdot\vec{k}\,dx\,dy$$

مثال. با استفاده از قضیه گرین، گردش در خلاف جهت ساعت و شار برون سو را در مورد میدان F و خم C بیابید.
C مثلث محدود به $y=0$، $x=1$ و $y=x$

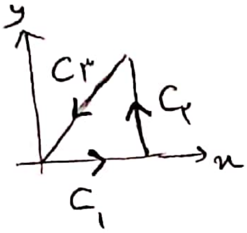
$$F(x,y)=\underbrace{(x^2-y)}_{M}\,i+\underbrace{(x+y^2)}_{N}\,j$$

حل. با استفاده از قضیه گرین: ۱- ترکیب M، N، مشتقات جزئی آن روی R^2 پیوسته هستند. ۲- خم C یک خم ساده بسته است.



$$\text{شار گذرنده } F \text{ از } C=\iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)=\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1}(2x+2y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{y=0}^{1}(x^2+2xy)\Big|_{x=y}^{1}dy=\int_{y=0}^{1}(1+2y-y^2-2y^2)\,dy=\left(y+y^2-3\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{1}=1+1-1=1$$



صورت انتشاری از قضیه گرین.

$$F(x,y) = \underbrace{(x^2-y)}_{M} i + \underbrace{(x+y^2)}_{N} j$$

$C_1: R_1(t) = \underbrace{t}_{x} i \qquad 0 \le t \le 1$

$dR_1 = \underbrace{dt}_{dx} i$

$C_2: R_2(t) = \underbrace{1}_{x} i + \underbrace{t}_{y} j \qquad 0 \le t \le 1$

$dR_2 = \underbrace{dt}_{dy} j$

$C_3: R_3(t) = \underbrace{t}_{x} i + \underbrace{t}_{y} j \qquad 1 \ge t \ge 0$

$dR_3 = \underbrace{dt}_{dx} i + \underbrace{dt}_{dy} j$

$$\int_C F\cdot n\, ds = \int_C M dy - N dx = \int_{C_1} M dy - N dx + \int_{C_2} M dy - N dx + \int_{C_3} M dy - N dx$$

$$= \int_{t=0}^{1} (t^2 \times 0 - (t)\, dt) + \int_{t=0}^{1} (1-t)\, dt - (1+t^2)\times 0 + \int_{t=1}^{0} (t^2-t)\, dt - (t+t^2)\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} (-t + 1 - t - t^2 + t + t + t^2)\, dt = \int_{t=0}^{1} (1+0)\, dt = (t)\Big|_{t=0}^{1} = 1$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\oint_C (4x-2y)dx + (2x-4y)dy$ روی خم C، که C عبارت است از دایره $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

$$\oint_C (4x-2y)dx + (2x-4y)dy$$

در اینجا $F = Mi + Nj$ که $M = 4x - 2y \quad , \quad N = 2x - 4y$

$$= \iint_{\text{دایره}} (2-(-2))\, dx dy = 4 \iint_{\text{دایره}} 1\, dx dy = 4 \times \text{مساحت دایره} = 4 \times \pi (2)^2 = 16\pi$$

مثال. نشان دهید به ازای هر خم بسته دلخواه C که قضیه گرین بر آن برقرار است داریم

$$\oint_C \underbrace{4x^3 y}_{M}\, dx + \underbrace{x^4}_{N}\, dy = 0$$

$$\oint_C 4x^3 y\, dx + x^4 dy = \iint_C \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy = \iint_C (4x^3 - 4x^3)\, dx dy = 0$$

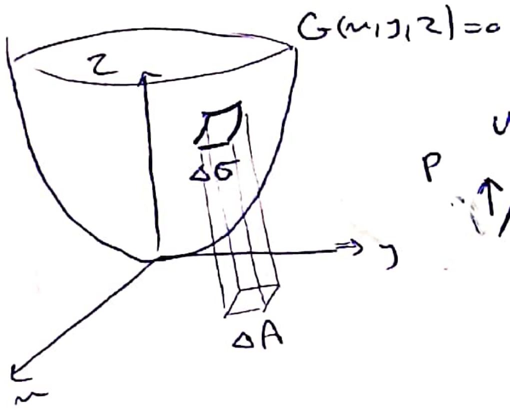
نتیجه‌ای از قضیه گرین. فرض کنید D یک ناحیه و C خم بسته ساده مرز D باشد. در این صورت مساحت D برابر است با

$$D\ \text{مساحت} = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx$$

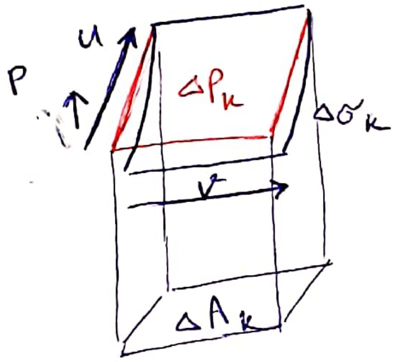
مثال. مساحت محدود به منحنی $R(t)=t^2 i+(\frac{t^3}{3}-t)j$ را به ازای $-\sqrt{3}\leq t\leq\sqrt{3}$ بیابید.

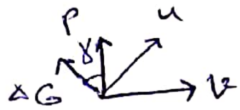
$$R(t)=\underbrace{t^2}_{x} i+\underbrace{(\frac{t^3}{3}-t)}_{y} j \qquad dR=\underbrace{2t\,dt}_{dx}\, i+\underbrace{(t^2-1)\,dt}_{dy}\, j$$

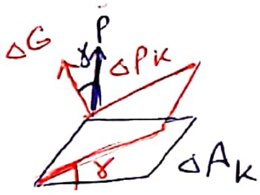
مساحت ناحیه محدود به منحنی $=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_{t=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2\times(t^2-1)\,dt-(\frac{t^3}{3}-t)\times 2t\,dt=\dots$



مساحت رویه و انتگرال رویه‌ای.







$$|(u\times v)\cdot p|=\Delta A_k=\underbrace{|u\times v|}_{\text{مساحت } \Delta P_k}|p||\cos\gamma|$$

$$\Rightarrow \Delta P_k|\cos\gamma|=\Delta A_k \xRightarrow{\text{اگر } \cos\gamma\neq 0} \Delta P_k=\frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma|}$$

از طرفی $\quad |\nabla G\cdot p|=|\nabla G||p||\cos\gamma|=|\nabla G||\cos\gamma| \Rightarrow \frac{1}{|\cos\gamma|}=\frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}$

فرض کنید رویه S دارای معادله $G(x,y,z)=0$ باشد. در این صورت مساحت رویه S برابر است با

$$\iint_S d\sigma=\iint_R \frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\,dA$$

که R تصویر S روی یکی از صفحات مختصات و p بردار یکه عمود بر آن صفحه است.

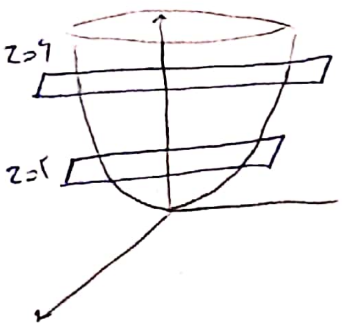
انتگرال رویه‌ای تابع $f(x,y,z)$ روی رویه S برابر است با:

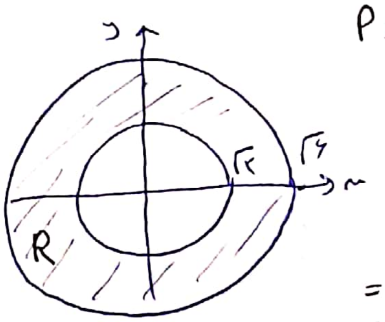
$$\iint_R f\cdot\frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\,dA$$

مثال . مطلوبست محاسبه مساحت نواری که صفحات $z=2$, $z=6$ از $x^2+y^2-z=0$ جدا می‌کنند.

$$S: G(x,y,z) = x^2+y^2-z = 0 \qquad \nabla G = (2x, 2y, -1) \qquad |\nabla G| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$$\vec{P} = (0,0,1) = \vec{k}$$

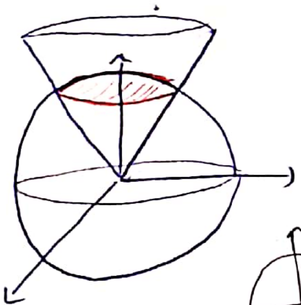




$$\iint_S d\sigma = \iint_R \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot P|}\,dx\,dy = \iint_R \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{1}\,dx\,dy$$

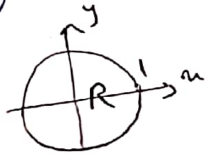
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2+1}\; r\,dr\,d\theta = \dots$$

مثال . مطلوبست مساحت قسمتی که مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از کره $x^2+y^2+z^2=2$ جدا می‌کند.



$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2 = 0 \qquad \nabla G = (2x, 2y, 2z)$$

$$|\nabla G| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = \sqrt{4(x^2+y^2+z^2)} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$$



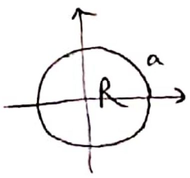
$$P = (0,0,1) = k \qquad \nabla G \cdot P = 2z = 2\sqrt{2-x^2-y^2}$$

$$\text{مساحت} = \iint_S d\sigma = \iint_R \frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot P|}\,dx\,dy = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{2-r^2}} \dots$$

مثال . مطلوبست محاسبه انتگرال $f(x,y,z) = x^2+y^2$ روی نیمکره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2 = 0 \qquad \nabla G = (2x,2y,2z) \qquad |\nabla G| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2a$$

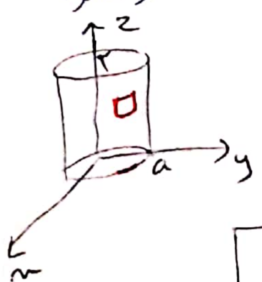
$$P = k$$



$$\text{انتگرال } f \text{ روی } S = \iint_S f\,d\sigma = \iint_R \frac{(x^2+y^2)\,2a}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \frac{2ar^2}{2\sqrt{a^2-r^2}} \times r\,dr\,d\theta \dots$$

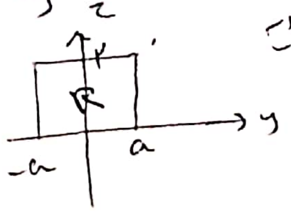
مثال . مطلوبست محاسبه مساحت استوانه $x^2+y^2=a^2$ که بین دو صفحه $z=0$ و $z=2$ قرار دارد.

$$G(x,y,z) = x^2+y^2-a^2 = 0 \qquad \nabla G = (2x,2y,0) \qquad |\nabla G| = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2a$$



$$P = i = (1,0,0) \qquad \nabla G\cdot P = 2x = 2\sqrt{a^2-y^2}$$

$$\text{مساحت} = 2\iint_S d\sigma = 2\int_{z=0}^{2}\int_{y=-a}^{a} \frac{2a}{2\sqrt{a^2-y^2}}\,dy\,dz = \dots$$



شار گذرنده از رویه.

تعریف رویه جهت پذیر (جهت دار). رویه S جهت پذیر نامیده می‌شود هرگاه با انتخاب یک بردار قائم n بر رویه در نقطه P و حرکت دادن پیوسته آن روی رویه، n هنگام بازگشت به P دارای همان جهت باشد.

مثال. رویه های تدریس شده، جهت پذیر هستند.
رویه‌های شکل نوار موبیوس و بطری کلاین جهت ناپذیرند.

شار گذرنده F از رویه S. فرض کنید F یک میدان و S رویه‌ای جهت پذیر با معادله $G(x,y,z)=0$ باشد. در این صورت شار گذرنده F از S در جهت $\vec{n}$ که $\vec{n}$ برداری یکه و عمود بر رویه است برابر است با

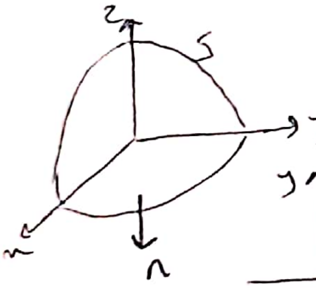
$$\iint_S F\cdot n\, d\sigma = \iint_R F\cdot \frac{\nabla G}{|\nabla G|}\,\frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot p|}\, dA = \iint_R F\cdot \frac{\nabla G}{|\nabla G\cdot p|}\, dA$$

جهت گرادیان، هم جهت با $\vec{n}$ انتخاب می‌شود.

مثال. مطلوب است شار میدان برداری $F(x,y,z)=\dfrac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ که از بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول از مبدا مختصات دور می‌شود.

$G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$ | $\nabla G=(2x,2y,2z)$ ✓

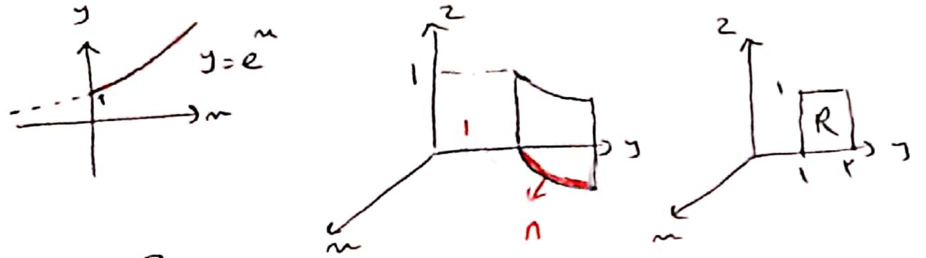
$p=k \qquad \nabla G\cdot p = 2z = 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ | $-\nabla G=(-2x,-2y,-2z)$ ✗



شار گذرنده F از S $= \iint_R F\cdot\frac{\nabla G}{|\nabla G\cdot p|}\, dA = \iint_R \frac{2x^2+2y^2+2z^2}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdy$

$$= \iint_R \frac{2a^2}{2a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dxdy = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{a} \frac{a\, r\, dr\, d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

مثال - فرض کنید S بخشی از استوانه $y = e^x$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول باشد که تصویر قائمش بر صفحه yz ، مستطیل $R_{yz} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 1 \end{array} \right.$ باشد. فرض کنید n آن بردار قائم بر S باشد که متوجه بیرون صفحه xz واقع است (دارد $\frac{1}{8}$ اول می‌شود.) مطلوب است محاسبه شار میدان $F = -2i + 2yj + zk$ گذرنده از S در جهت n.



$$\text{شار گذرنده } F \text{ از } S = \iint_R F \cdot \frac{\nabla G}{|\nabla G \cdot p|}\, dy\, dz$$

$G(x,y,z) = y - e^x = 0 \qquad \nabla G = (-e^x, 1, 0)$ ✗

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\nabla G = (e^x, -1, 0)$ ✓

$p = i = (1,0,0) \qquad |\nabla G \cdot p| = e^x$

$$\text{شار گذرنده} = \int_{z=0}^{1} \int_{y=1}^{2} (-2, 2y, z) \cdot \frac{(e^x, -1, 0)}{e^x}\, dy\, dz = \int_{z=0}^{1} \int_{y=1}^{2} \frac{-2e^x - 2y}{e^x}\, dy\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} \int_{y=1}^{2} \frac{-2y - 2y}{y}\, dy\, dz = -4 \int_{z=0}^{1} \int_{y=1}^{2} dy\, dz = -4 \times 1 = -4$$

تعریف دیورژانس و کرل

فرض کنید $F(x,y,z) = Mi + Nj + Pk$ یک میدان برداری با مشتقات جزئی پیوسته باشد. در این صورت

$$\operatorname{div} F = \text{دیورژانس } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\operatorname{curl} F = \text{کرل } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

قضیه گرین. فرض کنید $F = Mi + Nj + Pk$ یک میدان برداری باشد که M، N، P و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها پیوسته باشد.

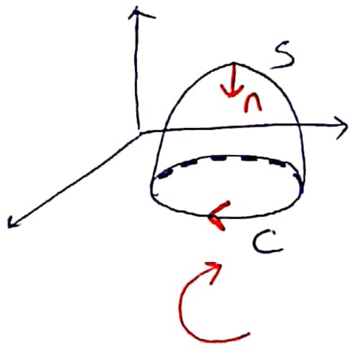
قضیه دیورژانس. اگر S رویه‌ای جهت پذیر باشد که ناحیه V را در خود محصور کرده، در این صورت (S رویه بسته است.)

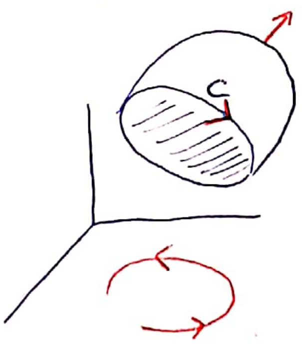
شار گذرنده F از S
$$= \iint_S F\cdot n\, d\sigma = \iint_R F\cdot \frac{\nabla G}{|\nabla G\cdot p|}\, dA \overset{\text{قضیه دیورژانس}}{=} \iiint_V \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right) dv$$
$$= \iiint_V \operatorname{div} F \, dv$$

قضیه استوکس. اگر S رویه‌ای جهت پذیر باشد که مرز آن خم بسته C با معادله $R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ باشد، آنگاه

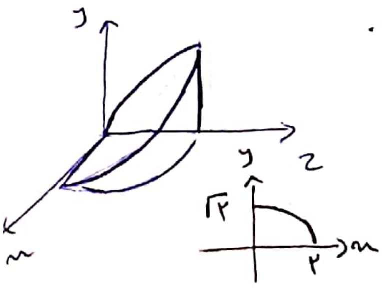
شارش F روی C
$$= \oint_C F\cdot dR = \oint_C M\,dx + N\,dy + P\,dz \overset{\text{قضیه استوکس}}{=} \iint_S \overrightarrow{\operatorname{curl} F}\cdot \vec{n}\, d\sigma$$

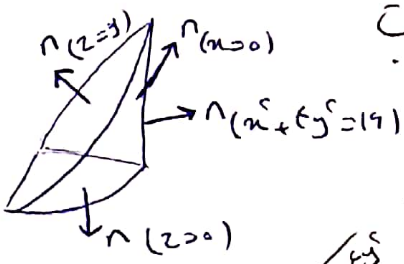
در اینجا $\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$ بردار یکه عمود بر سطح رویه S است و جهت $\vec{n}$ با توجه به جهت خم C و قانون دست راست مشخص می‌شود.





مثال. شار برون سوی $F = 2xz\,i + y\,j - z^2 k$ را از ناحیه گوه‌ای شکل که صفحه $z=y$ و استوانه $x^2+4y^2=16$ از $\frac{1}{8}$ اول جدا می‌کند.





M، N، P و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها پیوسته است. و S یک رویه بسته است.

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 2z + 1 - 2z = 1$$

شار برون سوی F گذرنده از S
$$= \iiint_V \operatorname{div} F\, dv = \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{\sqrt{16-4y^2}}\int_{z=0}^{y} 1\, dz\, dx\, dy$$

۱۸

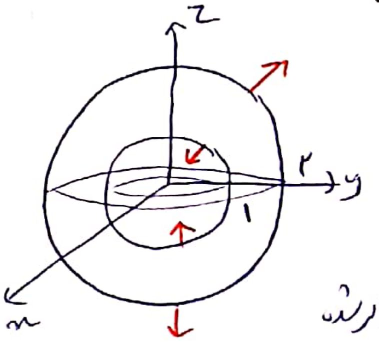
مثال. شار برون‌سوی $F=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(xi+yj+zk)$ را روی کره توپر $x^2+y^2+z^2\le a^2$ محاسبه کنید.

شرایط قضیه دیورژانس برقرار است.

$M = x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad \dots$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

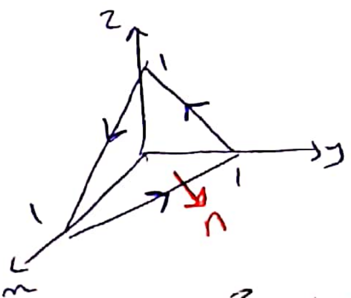
F شار گذرنده از کره $= \iiint_V \operatorname{div} F\, dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{a} \frac{4\rho^2}{\rho}\,\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \dots$



مثال. شار برون‌سوی F را روی ناحیه $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ بیابید.

شار گذرنده از ناحیه ذکر شده $= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{2} 4\rho^3 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta - \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1} 4\rho^3 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

مثال. گردش $F = yi + xzj + x^2k$ را روی خم C که مرز مثلثی است که صفحه $x+y+z=1$ از $\frac{1}{8}$ اول جدا می‌کند و جهت آن در خلاف جهت ساعت است وقتی از بالا نگاه کنیم بیابید.

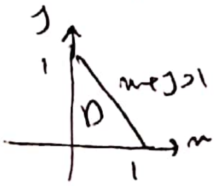


$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & x^2 \end{vmatrix} = i(-x) - j(2x-0) + k(z-1)$$

$G(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$ $\quad$ یا $\begin{cases} \nabla G = (1,1,1) \ \checkmark \\ \nabla G = (-1,-1,-1) \ \times \end{cases}$

$p = k = (0,0,1)$

$$\text{گردش} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot n\, d\sigma = \iint_D (-x, -2x, z-1) \cdot \frac{(1,1,1)}{1}\, dx\, dy$$



$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y} (-x-2x+z-1)\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y} \left(-3x + (1-x-y) - 1\right) dx\, dy = \dots$$

مثال - اگر مشتقات جزئی لازم مؤلفه‌های $F=Mi+Nj+Pk$ پیوسته باشند آنگاه

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F)=0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F)=\operatorname{div}\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}\right)=\operatorname{div}\left(i\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)-j\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)+k\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}-\frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y}\right)=0$$

تمرین: فرض کنید $f(x,y,z)$ مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن پیوسته باشند. در این صورت نشان دهید

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f)=\vec{0}.$$

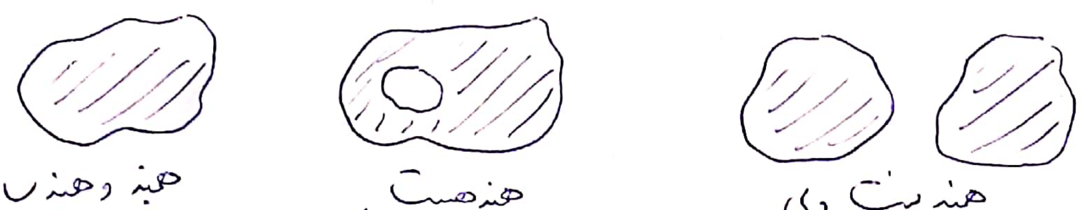
استقلال از مسیر و میدان‌های پایستار.

تعریف - استقلال از مسیر. فرض کنید A و B نقطه در ناحیه D باشند. $\int F\cdot dR$ مستقل از مسیر است هرگاه مقدار انتگرال فقط به نقاط A و B وابسته باشد و مستقل از خمی باشد که A را به B وصل می‌کند.

میدان پایستار. میدان F پایستار نامیده می‌شود هرگاه تابعی مانند f موجود باشد به طوری که $F=\nabla f$.

ناحیه همبند. D یک ناحیه همبند است هرگاه هر دو نقطه در D را بتوان با خم هموار درون D به هم وصل کرد.

ناحیه همبند ساده. D ناحیه همبند ساده است هرگاه هر خم بسته در D را بتوان منقبض کرد در یک نقطه جمع کرد بدون اینکه از D خارج شد.



همبند و همبند ساده

همبند است
همبند ساده نیست

همبند نیست ولی
همبند ساده است.

قضیه اصلی انتگرال های خطی. فرض کنید $F = Mi + Nj + Pk$ میدان برداری باشد که مولفه‌هایش (M, N, P) در ناحیه همبند باز D پیوسته باشند. در این صورت

میدان F پایستار است $\Longleftrightarrow$ $\int F \cdot dR$ مستقل از مسیر باشد.

به عبارت دیگر

$\int F \cdot dR$ مستقل از مسیر $\Longleftrightarrow$ تابع مشتق‌پذیری مانند f هست که $F = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$

در این صورت

$$\int_A^B F \cdot dR = f(B) - f(A)$$

قضیه. اگر روی ناحیه همبند ساده باز D، $\operatorname{curl} F = \vec{0}$ آنگاه میدان F روی D پایستار است.

تعریف. عبارت $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ صورت دیفرانسیلی نامیده می‌شود.

صورت دیفرانسیلی $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ کامل است اگر و تنها اگر میدان $F = Mi + Nj + Pk$ پایستار باشد.

مثال. $\int_{(0,0,0)}^{(1,\pi,2)} (e^x \cos y + yz)\,dx + (xz - e^x \sin y)\,dy + (xy + z)\,dz$ را روی خط راست واصل بین نقاط $(0,0,0)$ و $(1,\pi,2)$ بیابید.

ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا صورت دیفرانسیلی داخل انتگرال کامل است یا نه. این معادل بررسی پایستاری میدان زیر است.

$$F = \underbrace{(e^x \cos y + yz)}_{M} i + \underbrace{(xz - e^x \sin y)}_{N} j + \underbrace{(xy + z)}_{P} k$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)k$$

$$\operatorname{curl} F = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z} \checkmark \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = y = \frac{\partial M}{\partial z} \checkmark \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \sin y + z = \frac{\partial M}{\partial y} \checkmark$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} F = 0 \Longrightarrow \exists f \ni \nabla f = F \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (M, N, P)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = e^x \cos y + yz \Rightarrow f = e^x \cos y + xyz + \varphi_1(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = xz - e^x \sin y \Rightarrow f = xyz + e^x \cos y + \varphi_2(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = P = xy + z \Longrightarrow f = xyz + \frac{z^2}{2} + \varphi_3(x,y)$$

$$\Longrightarrow f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

چون F پایستار است پس انتگرال داده شده مستقل از مسیر است و

$$\therefore \int_A^B F \cdot dR = f(B) - f(A)$$

$$\Rightarrow \int_{(0,0,0)}^{(1,\pi,2)} (e^x \cos y + yz)\,dx + (xz - e^x \sin y)\,dy + (xy + z)\,dz$$

$$= f(1,\pi,2) - f(0,0,0) = e\cos\pi + 2\pi + \frac{2^2}{2} - e^0 \times 1 + 0 + 0 = -2e + 2\pi + 2$$