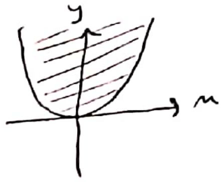
توابع چند متغیره: فرض کنید $D=\{(x_1,\dots,x_n) : x_i\in\mathbb{R}\}$. در این صورت تابع $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع n-متغیره نامیده می‌شود.

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto w=f(x_1,\dots,x_n)$$

مثال. دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید.

$$f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$$

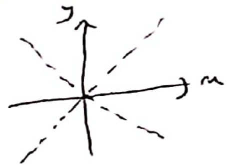


$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x^2\geq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x^2\}$$

$$R_f=[0,+\infty)$$

مثال. دامنه و برد تابع مقابل را بیابید.

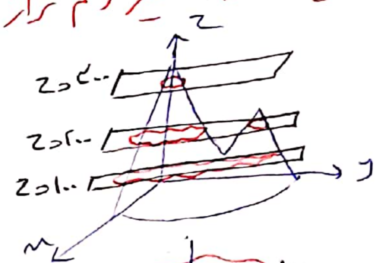
$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}$$



$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2\neq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq \pm x\}$$

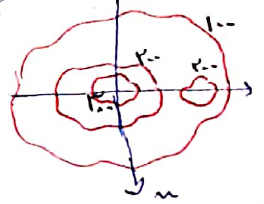
$$R_f=(-\infty,+\infty) \qquad f(x,1)=\frac{x}{x^2-1}$$

تعریف. نمودار، مسیر و خم تراز.



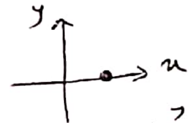
$$\text{نمودار تابع } f(x,y)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D_f,\ z=f(x,y)\}$$

$$\text{مسیر } f(x,y)=c=\{(x,y,c)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D_f,\ f(x,y)=c\}$$

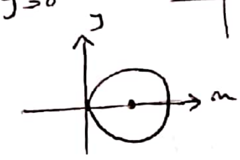


$$\text{خم تراز } f(x,y)=c=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D_f,\ f(x,y)=c\}$$

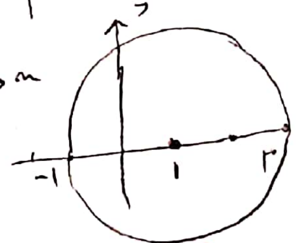
مثال. خم‌های تراز تابع $f(x,y)=-(x-1)^2-y^2+1$ را به ازای $c=1, 0, -3$ رسم کنید.



$$f(x,y)=1 \Rightarrow -(x-1)^2-y^2+1=1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=0 \Rightarrow x=1,\ y=0$$



$$f(x,y)=0 \Rightarrow -(x-1)^2-y^2+1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$



$$f(x,y)=-3 \Rightarrow -(x-1)^2-y^2+1=3 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=4$$

مثال. معادله‌ای برای خم تراز $f(x,y)=16-x^2-y^2$ بنویسید که از نقطه $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$ بگذرد.

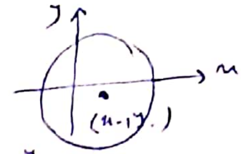
$$f(2\sqrt{2},\sqrt{2})=16-8-2=6 \Rightarrow f(x,y)=6$$

$$f(x,y)=16-x^2-y^2=6 \Rightarrow x^2+y^2=10$$

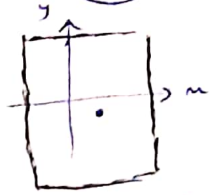
$$\text{خم تراز } f(x,y)=6=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=10\}$$

حد دو متغیره. فرض کنید تابع $f(x,y)$ در یک همسایگی محذوف نقطه $(x_0,y_0)\in D_f$ تعریف شده باشد.

در این صورت $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ هرگاه،



$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$



یا $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\quad 0<|x-x_0|<\delta,\ 0<|y-y_0|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$

مثال. فرض کنید $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$. نشان دهید این تابع در $(0,0)$ حد دارد.

باید نشان دهیم

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\quad 0<|x|<\delta,\ 0<|y|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x+y}{x^2+y^2+1}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x+y}{x^2+y^2+1}\right| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2+1} \leq \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2+1} \leq |x|+|y| < 2\delta < \varepsilon$$

کافیست $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$.

مثال. نشان دهید تابع $f(x,y)=\sin(xy)$ در $(0,0)$ دارای حد 0 است.

باید نشان دهیم

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\quad 0<|x|<\delta,\ 0<|y|<\delta \Rightarrow |\sin(xy)-0|<\varepsilon$$

$$|\sin(xy)| \leq |xy| = |x||y| < \delta^2 < \varepsilon$$

کافیست $\delta<\sqrt{\varepsilon}$.

قضیه های حد. فرض کنید $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L_2$. در این صورت

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y)\pm g(x,y)\big) = L_1\pm L_2$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big) = L_1\cdot L_2$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = \dfrac{L_1}{L_2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$

پیوستگی. تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) پیوسته است هرگاه

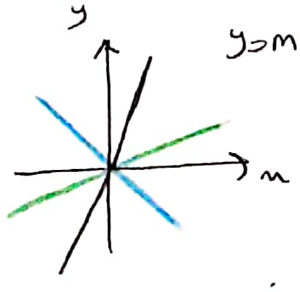
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

مثال. نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در هر نقطه بجز مبداء مختصات پیوسته است.

حل. تابع فوق در هر نقاط $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ پیوسته است. نشان می‌دهیم در $(0,0)$ پیوسته نیست.



روی مسیر $y=mx$

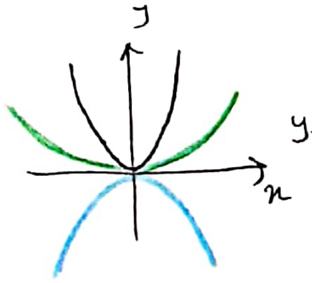
$$f(x,mx)=\frac{x(mx)}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}$$

روی مسیر $y=mx$

بنابراین حد تابع در نقطه $(0,0)$ به شیب خط $y=mx$ وابسته است و بنابراین تابع در $(0,0)$ حد ندارد و پیوسته نیست.

مثال. نشان دهید تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ در $(0,0)$ حد ندارد.



روی مسیر $y=mx^2$

$$f(x,mx^2)=\frac{x^2(mx^2)}{x^4+m^2x^4}=\frac{m}{1+m^2}$$

تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

تمرین. نشان دهید توابع زیر در $(0,0)$ حد ندارند.

1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$ 3) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^3}{xy}$

تمرین. با استفاده از قضیه های حد، مقادیر حد توابع زیر را محاسبه کنید.

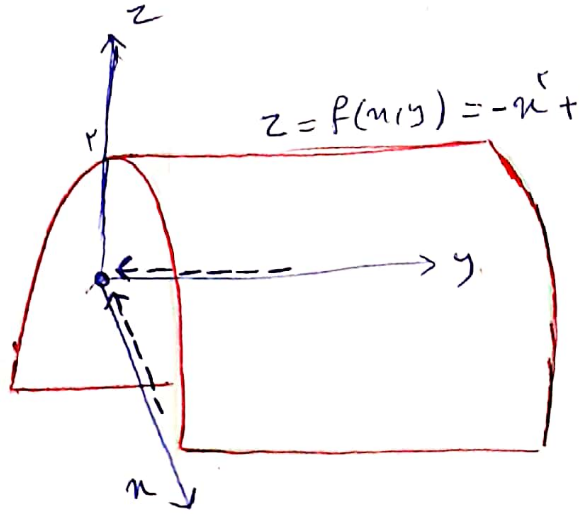
1) $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}=e^{0-\ln 2}=e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{4})} \sec x \tan y$

3) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} \quad x\neq y$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \left(\dfrac{\cos x-1}{x^2}\right)\left(\dfrac{y-2}{y^2-4}\right)$

$z=f(x,y)=-x^2+2$



$\dfrac{\partial f}{\partial x}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$

مشتق های جزئی.

مشتق جزئی f نسبت به x. فرض کنید تابع $f(x,y)$ در همسایگی نقطه (x_0,y_0) تعریف شده. در این صورت مشتق f نسبت به x در نقطه (x_0,y_0) برابر با حد زیر است در صورتی که حد موجود باشد.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\underset{\text{در } x_0}{\frac{d}{dx}f(x,y_0)}=f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

مشتق جزئی نسبت به y. به صورت مشابه تعریف می شود

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\underset{\text{در } y_0}{\frac{d}{dy}f(x_0,y)}=f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=x\sin(x+y)$ باشد. $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیابید.

$f(x,y)=x\times\sin(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1\times\sin(x+y)+x\times\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cos(x+y)$$

مثال- فرض کنید معادله زیر، x را به صورت تابع مشتق پذیری از دو متغیر مستقل y و z تعریف کند.

$$xy+y\ln(xz)+\sin(xy^2)=1$$ $\frac{\partial x}{\partial z}$ را بیابید.

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ $\qquad (\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\qquad (\sin(u))'=u'\cos u$

$(u^n)'=nu'u^{n-1}$

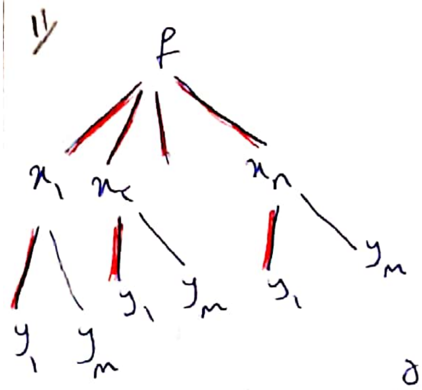
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(xy+y\ln(xz)+\sin(xy^2)-1=0\right)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\cdot y+x\frac{\partial y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\ln(xz)+y\frac{\partial(\ln(xz))}{\partial z}\right)+\frac{\partial(\sin(xy^2))}{\partial z}+0=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z}\cdot y+x\cancel{\frac{\partial y}{\partial z}}^{\,0}+\cancel{\frac{\partial y}{\partial z}}^{\,0}\ln(xz)+y\left(\left(\frac{\partial x}{\partial z}\cdot z+x\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}}^{\,1}\right)\times\frac{1}{xz}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial z}y^2+x\times 2y\cancel{\frac{\partial y}{\partial z}}^{\,0}\right)\times\cos(xy^2)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z}\left(y+y\times\frac{1}{xz}z+y^2\cos(xy^2)\right)+yx\times\frac{1}{xz}=0$$

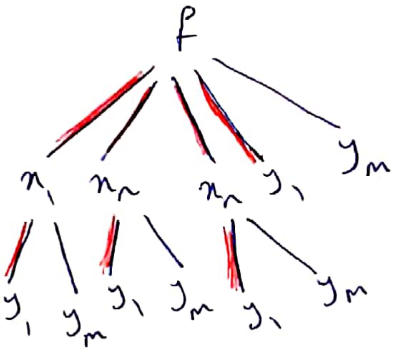
$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{-\frac{y}{z}}{y+\frac{y}{x}+y^2\cos(xy^2)}$$



قاعده زنجیری:

صورت اول: فرض کنید f تابعی مشتق پذیر برحسب متغیرهای مستقل x_1 تا x_n بوده و هر یک از x_i ها تابعی مشتق پذیر برحسب متغیرهای مستقل y_1 تا y_m باشند. در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_j}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_j}\qquad 1\le j\le m$$

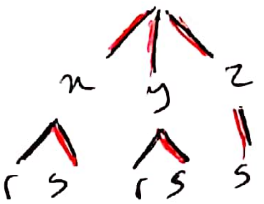


صورت دوم: فرض کنید f تابعی مشتق پذیر برحسب متغیرهای مستقل x_1 تا x_n و متغیرهای y_1 تا y_m بوده و هر یک از x_i ها تابعی مشتق پذیر برحسب y_1 تا y_m باشند. در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_j}+\frac{\partial f}{\partial y_j}\qquad 1\le j\le m$$

مثال: فرض کنید $f(x,y,z)=x+2y+z^2$ و $z=s^2$ و $x=\frac{r}{s}$ و $y=r^2\ln s$ باشد. مطلوبست محاسبه $\frac{\partial f}{\partial s}$ و $\frac{\partial f}{\partial r}$.

$$f(x,y,z)=x+2y+z^2$$



$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=1\times\frac{-r}{s^2}+2\times r^2\frac{1}{s}+2z\cdot 2s=\frac{-r}{s^2}+\frac{2r^2}{s}+4s^3$$

مثال: با فرض $z=f(t)$ ، $t=\frac{x+y}{xy}$ نشان دهید $x^2\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$t=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\left(\frac{-1}{y^2}\right)$$

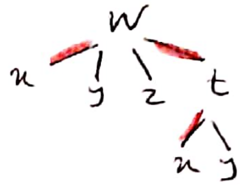
$$\Rightarrow x^2\frac{\partial z}{\partial x}=x^2\times\frac{-1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial t}=y^2\left(\frac{-1}{y^2}\right)\frac{\partial z}{\partial t}=y^2\frac{\partial z}{\partial y}$$

تمرین: اگر $u=x^2+e^{y^2}$ ، $x=\sin(2t)+\frac{1}{r}$ ، $y=\cos t^2$ آنگاه $\frac{\partial u}{\partial t}$ ، $\frac{\partial u}{\partial r}$ را بیابید.

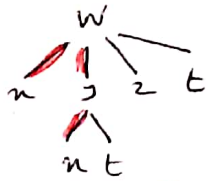
اگر $w=uv+\ln v$ ، $u=x+y$ ، $v=e^x\cos y$ آنگاه $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ را بیابید.

اگر $w=f(x,y)$ ، $x=u+v$ ، $y=u-v$ نشان دهید $\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

مثال. فرض کنید $w = x^2+y-z+\sin t$ و $x+y=t$. مطلوبست محاسبه



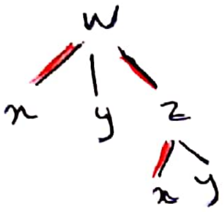
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2x+\cos t\times 1 = 2x+\cos(x+y)$$



$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{t,z} = \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 2x+1\times(-1) = 2x-1$$

مثال. اگر $w=x^2+y^2+z^2$ و $y\sin z+z\sin x=1$، مشتق های زیر را بیابید.

الف) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.



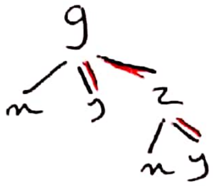
حل الف)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y\sin z+z\sin x=1=0\right) \Rightarrow \cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}\sin z+y\frac{\partial z}{\partial x}\cos z+\frac{\partial z}{\partial x}\sin x+z\cos x=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(y\cos z+\sin z) = -z\cos x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-z\cos x}{y\cos z+\sin z}$$

مثال. فرض کنید معادله $g(x,y,z)=0$، z را بصورت تابع مشتق پذیری از متغیرهای مستقل x و y بدست می دهد. فرض کنید $g_z\neq 0$. نشان دهید $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$.



$$g(x,y,z)=0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}.$$

تمرین. با فرض $f(x,y,z)=0$، ثابت کنید $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$.

تمرین. فرض کنید $w=x^2-y^2+4z+t$ و $x+2z+t=25$. نشان دهید بسته به اینکه چه متغیرهای مستقل و چه متغیرهای وابسته فرض شوند، هر یک از معادلات زیر $\frac{\partial w}{\partial x}$ را بدست می دهند.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x-2 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=2x-1$$

گرادیان و مشتق جهتی.

- برای توابع ۳- متغیره، گرادیان به صورت $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ تعریف می‌شود.

- اگر مشتقات جزئی $f(x,y,z)$ در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ تعریف شوند، آنگاه گرادیان f در P_0، بردار مقابل است.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

- فرض کنید $f(x,y,z)$ در $P_0(x_0,y_0,z_0)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد و $u=(u_1,u_2,u_3)$ یک بردار یکه باشد. در این صورت مشتق جهتی (سویی) f در جهت u به صورت زیر است.

$$(D_u f)_{P_0} = \overrightarrow{(\nabla f)}_{P_0} \cdot \vec{u}$$

$$= u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} + u_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

ویژگی‌های مشتق جهتی:

$$(D_u f)_{P_0} = \overrightarrow{(\nabla f)}_{P_0} \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cdot |u| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

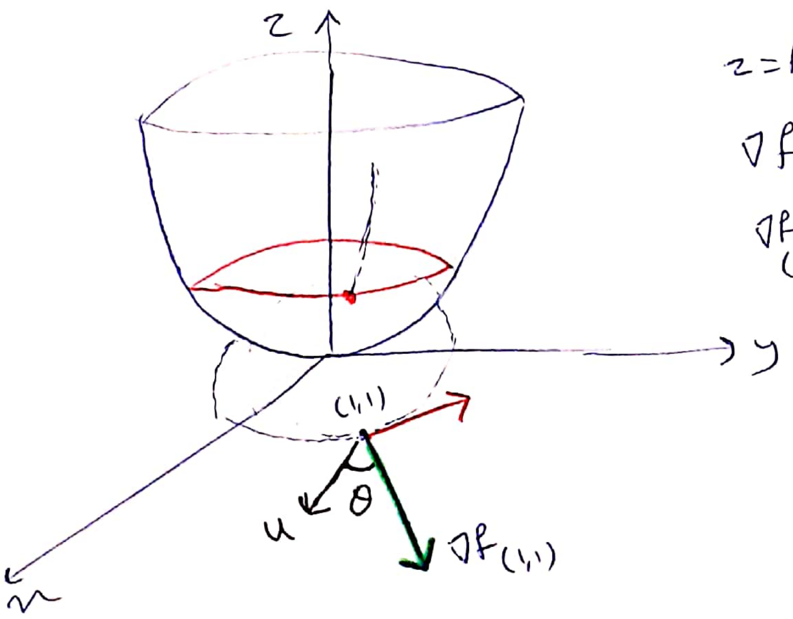
۱- f در جهت بردار $u = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ سریع‌ترین افزایش را دارد.

۲- تابع f در جهت بردار $u = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ سریع‌ترین کاهش را دارد.

۳- مشتق f در جهت عمود بر گرادیان برابر با صفر است.

۴- مشتق f در جهت محور x ها برابر است با مشتق جزئی x.

$$u=(1,0,0)=i \Rightarrow D_u f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (1,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}$$



$z = f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f = (2x, 2y)$

$\nabla f_{(1,1)} = (2,2)$

مثال. جهتی را بیابید که در آن f در P_0 سریعترین افزایش را داشته باشد. $P_0=(0,2,3)$

$$f(x,y,z)=e^{xy}+z^2$$

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(ye^{xy},\ xe^{xy},\ 2z\right) \qquad (\nabla f)_{P_0}=(2,0,6)$$

$$\Rightarrow u=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{(2,0,6)}{\sqrt{40}}=\frac{1}{\sqrt{40}}(2,0,6) \qquad (D_u f)_{P_0}=\nabla f\cdot u=(2,0,6)\cdot\frac{1}{\sqrt{40}}(2,0,6)=\frac{40}{\sqrt{40}}$$

مثال. جهت هایی را بیابید که مشتق $f(x,y)=xy+y^2$ در نقطه $P_0(2,5)$ برابر با صفر شود.

$$\nabla f=(y,\ x+2y) \qquad (\nabla f)_{P_0}=(5,12) \qquad u=(u_1,u_2)$$

$$(\nabla f)_{P_0}\cdot u=0 \Rightarrow 5u_1+12u_2=0 \Rightarrow u_1=-\frac{12u_2}{5} \quad (1)$$

u بردار یکه است $\Rightarrow u_1^2+u_2^2=1 \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{144u_2^2}{25}+u_2^2=\frac{(144+25)u_2^2}{25}=\frac{169}{25}u_2^2=1$$

$\Rightarrow u_2=\pm\frac{5}{13} \Rightarrow$ جهت اول $=\left(-\frac{12}{13},+\frac{5}{13}\right)$ جهت دوم $=\left(+\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$

مثال. مشتق $f(x,y)$ در $P_0(1,2)$ در جهت بردار $i+j$ برابر با $2\sqrt{2}$ و در جهت $-2j$ برابر با -3 است. مشتق f در جهت $-i-2j$ چقدر است؟

$$D_u f=\nabla f\cdot u \qquad u_{i+j}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \qquad u_{-2j}=\frac{1}{2}(0,-2)=(0,-1)$$

$$D_{u_{i+j}}f=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \quad (1) \qquad D_{u_{-2j}}f=-\frac{\partial f}{\partial y}=-3 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=1\\ \frac{\partial f}{\partial y}=3\end{cases}$$

تمرین. مطلوبست مشتق $f(x,y,z)=xyz$ در جهت بردار سرعت مارپیچ زیر در $t=\frac{\pi}{3}$.

$$R(t)=(\cos 3t)i+(\cos 3t)j+3tk$$

ویژگی های جبری گرادیان. فرض کنید توابع f و g دارای مشتقات جزئی باشند. آنگاه:

1) $\nabla(kf)=k\nabla f$ k عدد دلخواه

2) $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

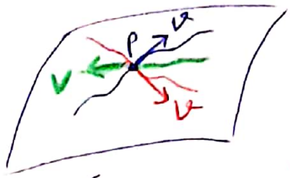
3) $\nabla(f\cdot g)=f\cdot\nabla g+g\nabla f$

فرض کنید $f(x,y,z)$ و مشتقات جزئی آن پیوسته هستند و $R(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ ، خمی مشتق‌پذیر روی رویه S با معادله $f(x,y,z)=c$ باشد. بنابراین

$$f(x(t),y(t),z(t))=c$$

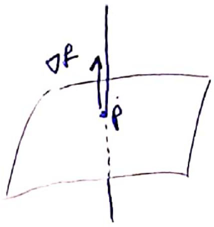
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial t}\right)=0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \nabla f\perp v$$



معادله خط قائم بر رویه. فرض کنید $f(x,y,z)=c$ معادله رویه S باشد. در این صورت معادله خط قائم بر رویه S در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ برابر است با

$$\begin{cases} x-x_0=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot t \\ y-y_0=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot t \\ z-z_0=\frac{\partial f}{\partial z}\cdot t \end{cases}$$



معادله صفحه مماس بر رویه. فرض کنید $f(x,y,z)=c$ معادله رویه S باشد. در این صورت معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)=0$$

مثال. معادلات خط قائم و صفحه مماس بر رویه $f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$ را در $P_0(1,2,3)$ بیابید.

$\nabla f=(2x,2y,1)$ $\quad (\nabla f)_{P_0}=(2,4,1)$

معادله خط قائم $\begin{cases} x-1=2t \\ y-2=4t \\ z-3=t \end{cases}$ $\quad$ معادله صفحه مماس $2(x-1)+4(y-2)+(z-3)=0$

تمرین. نقاطی از رویه $(y+z)^2+(z-x)^2=16$ را بیابید که در آنها خط قائم با صفحه yz موازی است.

تمرین. نشان دهید خم $R(t)=\sqrt{t}\,i+\sqrt{t}\,j+\frac{1}{4}(t+3)k$ در $t=1$ بر رویه $x^2+y^2-z=1$ قائم است.

تمرین. نشان دهید خم $R(t)=\sqrt{t}\,i+\sqrt{t}\,j+(2t-1)k$ در $t=1$ بر رویه $x^2+y^2-z=1$ مماس است.

مشتقات مرتبه دوم. مشتق مرتبه دوم تابع $f(x,y)$ در صورت وجود به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$$

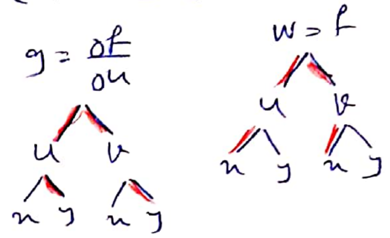
قضیه مشتق های آمیخته. فرض کنید $f(x,y)$ و مشتقات جزئی f_x، f_y، f_{xy} و f_{yx} در ناحیه‌ای شامل نقطه (a,b) پیوسته باشند. در این صورت

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

مثال. مطلوب است $\frac{\partial^5}{\partial^2 x\,\partial^3 y}(x\sin y+e^y)$.

$$\frac{\partial^5}{\partial^2 x\,\partial^3 y}(x\sin y+e^y)=\frac{\partial^5}{\partial y^3\partial x^2}(x\sin y+e^y)=\frac{\partial^4}{\partial y^3\partial x}(\sin y)=\frac{\partial^3}{\partial y^3}(0)=0$$

مثال. فرض کنید $w=f(u,v)$ و $u=x+y$، $v=xy$. مطلوب است w_{xy}.



$$w_x=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\times 1+\frac{\partial f}{\partial v}y$$

$$w_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\underline{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}+\frac{\partial f}{\partial v}+\underline{y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\times 1+\frac{\partial g}{\partial v}x=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(h)=\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial u}\times 1+\frac{\partial h}{\partial v}x=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x\frac{\partial^2 h}{\partial^2 v}$$

تمرین. فرض کنید $w=f(x,y)$، $x=u+v$، $y=u-v$. نشان دهید

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

اگر $z=xy^2-y\sin x$، مطلوب است $y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}$.