آمار و احتمال مهندسی

سلمان بابایی

محمد صیدپیشه

فهرست مطالب

فصل ۱

آمار توصیفی

واژه Statistics که به فارسی آن را آمار ترجمه کرده‌اند در اغلب زبان‌ها به دو معنی به کار می‌رود:

الف) به معنی اعداد و ارقام به عنوان مثال تعداد مرگ و میر یا میزان محصولات کشاورزی و ...

ب) به معنی روش‌های جمع آوری، تنظیم و تجزیه و تحلیل داده‌ها درباره یک موضوع

ما در این کتاب بیشتر با مفهوم دوم سر و کار داریم:

تعریف ۱.۰.۱ (جمعیت). از آنجایی که قضاوت درباره یک موضوع، فقط بر اساس یک داده یا یک فرد معقول به نظر می‌رسد و باید بر مبنای مجموعه‌ای از داده‌ها قضاوت کرد، بنابراین نخست مفهوم کلمه جمعیت را از نظر آمار شرح می‌دهیم.

مجموعه‌ای از افراد یا چیزهایی که می‌خواهیم درباره آن‌ها یک یا چند ویژگی را مطالعه کنیم یک جمعیت می‌نامیم، به عنوان مثال جمعیت دانشجویان دانشگاه پیام نور، از نظر درصد قبولی در آزمون کارشناسی ارشد و یا جمعیت لامپ‌های تولیدی یک کارخانه مشخص از نظر طول عمر و ...

تعریف ۲.۰.۱ (نمونه). با توجه به اینکه مطالعه همه افراد جمعیت، مستلزم صرف زمان و هزینه‌های زیاد اقتصادی می‌باشد، بنابراین به جای اینکه کل جمعیت را مطالعه و بررسی کنیم، بخشی از آن جمعیت *(نمونه)* را طبق ضوابطی معقول انتخاب می‌کنیم و مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نتیجه را به کل جمعیت تعمیم می‌دهیم. دقت شود که مشت نمونه خروار است ولی نه هر مشتی و قطعاً بی‌غرضی در انتخاب مشت و اندازه مشت در این نمایندگی نقش مهمی دارد.

۱.۱ فراوانی مطلق و فراوانی نسبی

هرگاه n شیء از k نوع با فرض $n \geq k$ به تعداد f_1 تا از نوع اول، f_2 تا از نوع دوم،... و f_k تا از نوع kام تشکیل شده باشد، در این صورت f_iها را فراوانی مطلق و $\frac{f_i}{n}$ها را فراوانی نسبی گوییم. فراوانی‌های نسبی را به ترتیب با $r_1, r_2, \dots, r_k$ نشان می‌دهند. واضح است که برای $i = 1, 2, \dots, k$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = n, \quad 1 \leq f_i \leq n, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = 1, \quad \frac{1}{n} \leq r_i \leq 1$$

۲.۱ فراوانی انباشته و فراوانی نسبی انباشته

با توجه به فراوانی نسبی برای $i = 1, 2, \dots, k$

$$s_i = \sum_{j=1}^{i} r_i, \qquad g_i = \sum_{j=1}^{i} f_i$$

را به ترتیب فراوانی انباشته و فراوانی نسبی انباشته می‌گویند. واضح است که

$$s_k = 1, \quad g_k = n$$

مثال ۱.۲.۱. پزشکی ۲۰ بیمار قلبی دارد که گروه خونی آن‌ها عبارت است از:

$B \quad A \quad O \quad AB \quad O \quad A \quad A \quad A \quad O \quad O \quad A \quad A \quad B \quad B \quad AB \quad O \quad AB \quad AB \quad O \quad O$

اگر چهار گروه خونی A، B، AB و O را به ترتیب با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ متناظر کنیم در این صورت جدول فراوانی گروه خونی این ۲۰ بیمار به صورت زیر خواهد بود.

جدول ۱.۱: جدول فراوانی گروه خونی ۲۰ بیمار قلبی

گروه خونی	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
A	۱	۶	۰/۳۰	۶	۰/۳۰
B	۲	۳	۰/۱۵	۹	۰/۴۵
AB	۳	۴	۰/۲۰	۱۳	۰/۶۵
O	۴	۷	۰/۳۵	۲۰	۱/۰۰
		۲۰	۱/۰۰		

۳.۱ جدول‌های آماری

نمایش داده‌ها را با نظمی خاص، در چند سطر و ستون یک جدول آماری می‌گویند. برای نحوه تنظیم یک جدول آماری به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۳.۱. داده‌های زیر اندازه‌های قد ۱۰۰ جوان بیست ساله در یکی از شهرهای ایران می‌باشند که بر حسب سانتی‌متر تا نزدیک‌ترین واحد سر راست شده‌اند.

۱۷۲	۱۸۴	۱۷۰	۱۵۰	۱۶۴	۱۷۱	۱۷۸	۱۷۲	۱۷۷	۱۵۱
۱۵۸	۱۶۵	۱۶۹	۱۷۲	۱۶۶	۱۶۴	۱۶۹	۱۵۹	۱۵۳	۱۷۰
۱۶۲	۱۵۴	۱۵۹	۱۸۲	۱۷۴	۱۶۲	۱۵۱	۱۶۵	۱۷۲	۱۵۶
۱۶۳	۱۷۰	۱۷۷	۱۸۴	۱۷۵	۱۷۱	۱۶۴	۱۵۶	۱۵۰	۱۶۵
۱۷۲	۱۶۹	۱۶۲	۱۷۲	۱۷۶	۱۷۵	۱۷۴	۱۶۹	۱۶۶	۱۵۴
۱۶۲	۱۶۷	۱۸۰	۱۶۹	۱۵۲	۱۵۹	۱۶۱	۱۶۴	۱۷۱	۱۵۶
۱۶۳	۱۷۰	۱۶۵	۱۷۲	۱۸۴	۱۷۰	۱۵۰	۱۶۴	۱۷۱	۱۷۰
۱۸۴	۱۷۷	۱۵۳	۱۷۰	۱۶۲	۱۵۴	۱۷۳	۱۷۷	۱۶۹	۱۷۲
۱۶۶	۱۶۴	۱۷۴	۱۶۹	۱۷۹	۱۷۷	۱۷۹	۱۷۳	۱۶۵	۱۶۵
۱۵۷	۱۶۳	۱۵۳	۱۵۸	۱۵۱	۱۶۲	۱۵۹	۱۶۱	۱۶۰	۱۸۳

برای تشکیل جدول فراوانی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

در این داده‌ها عدد ۱۵۰ کوچک‌ترین و ۱۸۴ بزرگ‌ترین داده هستند. چون داده‌ها تا نزدیک‌ترین واحد سر راست شده‌اند، می‌توان گفت اندازه واقعی قدها در فاصله [۱۴۹٫۵, ۱۸۴٫۵] قرار دارند. طول این فاصله یعنی ۳۵ را برد داده‌ها می‌نامیم و به چند فاصله مساوی، مثلاً ۵ فاصله هر یک به طول ۷ سانتی‌متر تقسیم می‌کنیم. هر کدام از فاصله های کوچک مثلاً [۱۴۹٫۵, ۱۵۶٫۵] را با ۱۴۹٫۵ − ۱۵۶٫۵ نشان داده، آن را یک رده با طول واقعی ۷ می‌نامیم. عدد ۱۴۹٫۵ را مرز پایین و عدد ۱۵۶٫۵ را مرز بالای این رده می‌خوانیم. تعداد رده‌ها باید طوری انتخاب شود که در هر رده یک یا چند داده داشته باشیم، و معمولاً تعداد داده‌ها نباید از ۵ کمتر یا از ۲۰ بیشتر باشد. گاهی به جای مثلاً ۱۴۹٫۵ − ۱۵۶٫۵ می‌نویسیم ۱۵۰ − ۱۵۶ و در این حال ۱۵۰ را کران پایین و ۱۵۶ را کرانه بالای این رده می‌خوانیم. نقطه وسط هر رده که آن را با x_i نشان می‌دهند، نماینده آن رده نامیده می‌شود. مثلاً نماینده ۱۴۹٫۵ − ۱۵۶٫۵ می‌شود ۱۵۳ که x_1 است. در واقع برای فشردگی داده‌ها، به جای تمام داده‌هایی که در رده یاد شده جا دارند، نماینده آن‌ها یعنی ۱۵۳ را به کار می‌برند. بدین ترتیب داده‌های بالا در جدول ۲.۱ به نام جدول فراوانی اندازه‌های قد ۱۰۰ جوان ۲۰ ساله خلاصه می‌شوند.

جدول ۲.۱: جدول فراوانی قد ۱۰۰ جوان بیست ساله

رده	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۱۴۹/۵–۱۵۶/۵	۱۵۳	۱۵	۰/۱۵	۱۵	۰/۱۵
۱۵۶/۵–۱۶۳/۵	۱۶۰	۲۰	۰/۲۰	۳۵	۰/۳۵
۱۶۳/۵–۱۷۰/۵	۱۶۷	۳۰	۰/۳۰	۶۵	۰/۶۵
۱۷۰/۵–۱۷۷/۵	۱۷۴	۲۵	۰/۲۵	۹۰	۰/۹۰
۱۷۷/۵–۱۸۴/۵	۱۸۱	۱۰	۰/۱۰	۱۰۰	۱/۰۰
		۱۰۰	۱/۰۰		

تمرین ۲.۳.۱. میزان هموگلوبین خون در ۵۰ بیمار سرطانی بر حسب گرم در ۱۰۰ میلی متر عبارت است از:

۱۳٫۶	۱۴٫۸	۱۳٫۷	۱۴٫۲	۱۱٫۵	۱۱٫۹	۱۳٫۸	۱۴٫۶	۱۴٫۲	۱۲٫۷
۱۳٫۴	۱۱٫۵	۱۱٫۹	۱۴٫۸	۱۲٫۷	۱۲٫۴	۱۵٫۳	۱۵٫۲	۱۳٫۵	۱۵٫۰
۱۲٫۴	۱۲٫۰	۱۳٫۸	۱۱٫۷	۱۰٫۰	۱۳٫۲	۱۵٫۵	۱۴٫۰	۱۳٫۵	۱۵٫۰
۱۲٫۷	۱۲٫۹	۱۳٫۷	۱۵٫۱	۱۳٫۵	۱۲٫۷	۱۵٫۷	۱۰٫۹	۱۴٫۰	۱۴٫۸
۱۴٫۰	۱۳٫۸	۱۲٫۷	۱۱٫۹	۱۲٫۰	۱۱٫۴	۱۱٫۱	۱۳٫۷	۱۳٫۲	۱۶٫۲

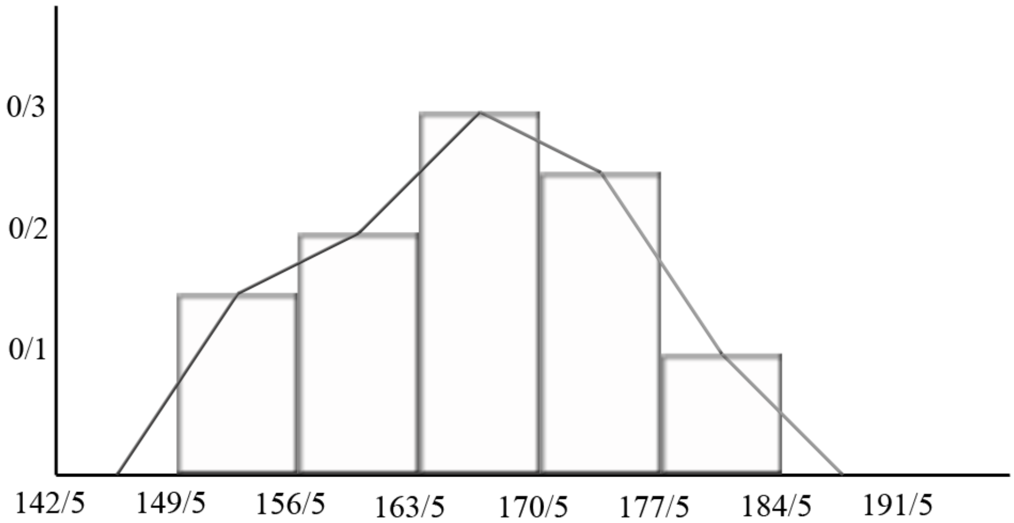
با تشکیل ۷ رده به طول ۰٫۹، جدول فراوانی کامل را تشکیل دهید.

۴.۱ نمودارهای آماری

نمایش داده‌ها را، طبق قراردادهای خاص به صورت هندسی، یک نمودار آماری می‌گویند. یک نمودار آماری باید به نحوی ترسیم شود که بتوان به راحتی اطلاعات نهفته در داده‌ها را از روی آن تا حدودی با چشم بدون توضیح و تشریح اضافی دید. مقیاس‌های اندازه گیری روی محورهای افقی و عمودی باید مشخص باشند. نمودار های آماری در امور اقتصادی، صنعتی بهداشتی و غیره به کار می‌روند و بر حسب رشته مربوط آن‌ها را به طرق مختلف ترسیم می‌کنند. در این جا فقط چند نوع نمودار که در آمار و احتمال مورد نیاز می‌باشند شرح می‌دهیم.

۱.۴.۱ هیستوگرام

نموداری است مرکب از چند مستطیل که از روی جدول فراوانی داده‌های پیوسته ساخته می‌شود. تعداد مستطیل‌ها برابر است با تعداد رده‌ها. قاعده هر مستطیل روی محور xها جا دارد و طولش برابر است با طول واقعی رده که هرچه باشد آن را یک واحد تلقی می‌کنیم و مرکز آن نماینده رده است. ارتفاع هر مستطیل برابر است با فراوانی نسبی رده مربوط. هیستوگرام را برای داده‌های جدا هم که بتوان آن‌ها را در یک جدول فراوانی با



شکل ۱.۱: هیستوگرام و چندبر فراوانی مربوط به قدها

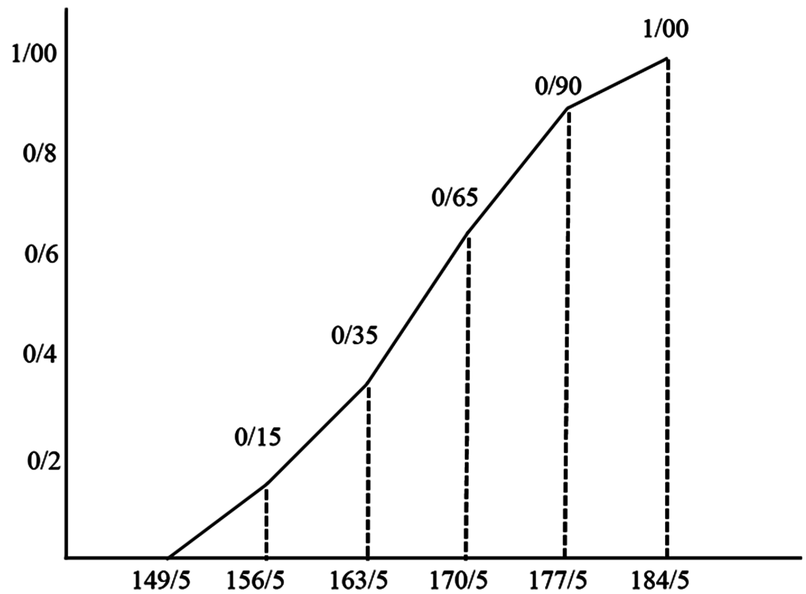
فواصل مساوی تنظیم کرد، نیز به کار می‌برند. مساحت تمام مستطیل‌های یک هیستوگرام برابر یک واحد مربع است. در شکل ۱.۱ هیستوگرام جدول فراوانی مربوط به قدها داده شده است. ملاحظه شود که فراوانی‌های نظیر رده‌های ۱۴۹٫۵ – ۱۴۲٫۵ و ۱۹۱٫۵ – ۱۸۴٫۵ صفر می‌باشند، ولی برای ترسیم نمودارهای بعدی آن‌ها را منظور می‌داریم.

۲.۴.۱ چندبر فراوانی

اگر نقطه‌های وسط قاعده‌های بالایی مستطیل‌های هیستوگرام و نقطه‌های وسط رده‌هایی را که بلافاصله در دو انتهای هیستوگرام بوده، و دارای فراوانی صفر هستند، به هم بپیوندیم، یک خط شکسته به دست می‌آید که آن را چندبر فراوانی می‌نامند.

۳.۴.۱ چندبر فراوانی انباشته

اگر نقاطی را که طول آن‌ها مرز رده‌ها و عرض آن‌ها فراوانی نسبی انباشته تا آن مرز باشد، به هم بپیوندیم یک خط شکسته به دست می‌آید که آن را چندبر فراوانی انباشته می‌نامند. شکل ۲.۱ چندبر فراوانی انباشته مربوط به قدها می‌باشد.



شکل ۲.۱: چندبر فراوانی انباشته مربوط به قدها

۵.۱ معیارهای تمرکز

فرض می‌کنیم تعداد داده‌ها n و به صورت $x_۱, x_۲, \ldots, x_k$ با فراوانی‌های $f_۱, f_۲, \ldots, f_k$ خلاصه شده باشند در صورتی که داده‌ها در جدول‌ها رده بندی شده باشند، x_iها را نماینده رده‌ها می‌گیریم.

۱.۵.۱ میانگین حسابی

مجموع داده‌ها، تقسیم بر تعداد آن‌ها یعنی

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i}{n}$$

را میانگین داده‌ها می‌گویند. هرگاه تمام فراوانی‌ها برابر یک باشد داریم $k = n$ و در این حال $\bar{x}$ را در زبان معمولی معدل می‌نامند.

مثال ۱.۵.۱. اگر نمرات درسی دانشجویی برای یک‌ترم به صورت زیر باشد، میانگین نمرات او (معدل) را محاسبه کنید.

درس	آمار	ریاضی	برنامه نویسی	اندیشه اسلامی	زبان تخصصی
تعداد واحد	۳	۴	۳	۲	۳
نمره نهایی	۱۶	۱۴.۵	۱۳	۱۸.۵	۱۵

حل.
n : مجموع واحدها
f_i : تعداد واحدهای درس i–ام
x_i : نمره نهایی درس i–ام

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n} = \frac{[(3 \times 16) + (4 \times 14/5) + \cdots + (3 \times 15)]}{3+4+3+2+3} = 15/13$$

۲.۵.۱ معدل وزنی

اگر $0 < w_i < 1$ برای $i = 1, 2, \ldots, k$ و $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$، آنگاه

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{k} w_i x_i$$

را معدل وزنی اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ با وزن‌های $w_1, w_2, \ldots, w_n$ می‌نامند، بنابراین میانگین حسابی هم یک نوع معدل وزنی می‌باشد که در آن $w_i = \frac{f_i}{n}$.

۳.۵.۱ میانگین هندسی

در صورتی که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ همگی مثبت باشند، میانگین هندسی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \cdots x_k^{f_k}}$$

برای محاسبه این میانگین آسان‌تر این است که ابتدا لگاریتم آن را حساب کنیم، یعنی:

$$\ln G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i \ln x_i \to G = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i \ln x_i}$$

در واقع لگاریتم این نوع میانگین برابر است با میانگین حسابی

$$\ln x_1, \ln x_2, \ldots, \ln x_k$$

مثال ۲.۵.۱. میانگین هندسی داده‌های زیر را بدست آورید.

$$15, 19, 16, 11, 15, 11, 12, 3, 8, 7, 3, 1, 7, 7, 5$$

حل.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \ln x_i = \frac{1}{15}(2\ln 15 + 1\ln 19 + 1\ln 16 + 2\ln 11 + \cdots + 1\ln 5)$$

$$G = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \ln x_i} = 7/5$$

۴.۵.۱ میانگین توافقی

در صورتی که $x_1, x_2, \ldots, x_k$ همگی غیر صفر باشند، میانگین توافقی آن‌ها را با H نشان می‌دهند و از رابطه

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}$$

به دست می‌آید. این میانگین در عینک سازی و مطالعه شبکه های برق به کار می‌رود. در حقیقت برابر است با عکس میانگین حسابی $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_k}$.

تمرین ۳.۵.۱. برای داده‌های مثال بالا نشان دهید میانگین توافقی برابر ۵/۱ است.

۵.۵.۱ میانگین ریشه‌ای رتبه ۲

این میانگین به صورت

$$M_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i x_i^2}{n}\right)^{1/2}$$

تعریف می‌شود و در حقیقت برابر است با جذر میانگین حسابی $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_k^2$. می‌توان ثابت کرد که برای داده‌های مثبت، میان این چهار نوع میانگین نامساوی زیر برقرار است.

$$H \le G \le \bar{x} \le M_2$$

برای اثبات این نامساوی باید نشان داد که میانگین ریشه‌ای رتبه r یعنی $M_r = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i x_i^r}{n}\right)^{1/r}$ تابعی صعودی از r است. سپس با قرار دادن r برابر ۲، ۱، ۰ و ۱− در M_r نامساوی فوق حاصل می‌شود.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	f_i/x_i	$f_i \log x_i$
۱	۳	۳	۳	۳	۰/۰۰۰
۲	۵	۱۰	۲۰	۲/۵۰۰	۱/۵۰۵
۳	۲	۶	۱۸	۰/۶۶۷	۰/۹۵۴
۵	۳	۱۵	۷۵	۰/۶۰۰	۲/۰۹۷
مجموع	۱۳	۳۴	۱۱۶	۶/۷۶۷	۴/۵۵۶

$$\bar{x} = ۲/۶۱ \quad G = ۲/۲۴ \quad M_۲ = ۲/۹۹ \quad H = ۱/۹۲$$

۱.۵.۶ میانه

عدد m را میانه می‌نامند هرگاه تقریباً نصف داده‌ها از m کوچک‌تر باشند. برای محاسبه میانه برای داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ ابتدا آن‌ها را به طور غیر نزولی یعنی به صورت $x_۱ \leq x_۲ \leq \ldots \leq x_n$ مرتب می‌کنیم. اگر n فرد باشد، داده‌ای که در وسط قرار دارد میانه خواهد بود و اگر n زوج باشد، نصف مجموع دو داده‌ای که در وسط قرار دارند میانه خواهد بود.

مثال ۱.۵.۴. میانه داده‌های زیر را پیدا کنید.

$$۳۱ \quad ۴ \quad ۵ \quad ۲۱ \quad ۲۰ \quad ۳۰ \quad ۱۷ \quad ۸ \quad ۱۲$$

حل. ابتدا داده‌ها را به صورت غیر نزولی مرتب می‌کنیم

$$۴ \quad ۵ \quad ۸ \quad ۱۲ \quad \boxed{۱۷} \quad ۲۰ \quad ۲۱ \quad ۳۰ \quad ۳۱$$

بنابراین عدد ۱۷ که در وسط قرار دارد میانه خواهد بود.

مثال ۱.۵.۵. میانه داده‌های زیر را بیابید.

$$۲ \quad ۳ \quad ۲ \quad ۱ \quad ۴ \quad ۵ \quad ۳ \quad ۲$$

حل. ابتدا داده‌ها را به صورت غیر نزولی مرتب می‌کنیم:

$$۱ \quad ۲ \quad ۲ \quad \boxed{۲ \quad ۳} \quad ۳ \quad ۴ \quad ۵$$

در این حالت عدد ۲ و ۳ در وسط قرار دارند، پس میانه برابر خواهد بود با:

$$m = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵$$

نکته. میانه تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک قرار نمی‌گیرد. برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۵.۶. میانه داده‌های زیر را بدست آورید.

$$۱۰ \quad ۷ \quad ۱۲ \quad ۹ \quad ۷۵$$

ابتدا داده‌ها را به طور غیر نزولی مرتب می‌کنیم.

$$۷ \quad ۹ \quad \boxed{۱۰} \quad ۱۲ \quad ۷۵$$

بنابراین $m = ۱۰$ خواهد بود. واضح است که اکثر داده‌ها اختلاف کمی با عدد ۱۰ دارند و این عدد معیار خوبی برای تمرکز داده‌هاست و تحت تأثیر مقدار عدد ۷۵ قرار نگرفت در صورتی که برای میانگین داریم:

$$\bar{x} = \frac{۷+۹+۱۰+۱۲+۷۵}{۵} = ۲۲/۳$$

ملاحظه می‌شود که این عدد معیار خوبی برای تمرکز نمی‌باشد، زیرا اکثر داده‌ها اختلاف چشم‌گیری با این عدد دارند.

۷.۵.۱ چندک‌ها

عدد Q_p را که در آن $0 < p < 1$، چندک مرتبه p می‌نامند. هرگاه تقریباً $100p$ درصد داده‌ها کوچک‌تر از آن باشند، مثلاً $Q_{0/17}$ می‌گویند هرگاه تقریباً ۱۷ درصد داده‌ها کوچک‌تر از $Q_{0/17}$ باشد.

نکته. چندک‌ها کلی از میانه می‌باشند و در حقیقت $Q_{0/5}$ همان میانه یعنی m است.

نکته. به ازای $p = 0/25, 0/5, 0/75$ چارک‌ها به دست می‌آیند و آن‌ها را به ترتیب با Q_1, Q_2, Q_3 نشان می‌دهند. Q_1 و Q_3 را چارک اول و سوم و Q_2 را میانه می‌گویند.

نکته. به ازای $p = 0/1, 0/2, \ldots, 0/9$ دهک‌ها به دست می‌آیند و آن‌ها را با $D_1, D_2, \ldots, D_9$ نشان می‌دهند.

نکته. به ازای $p = 0/01, 0/02, \ldots, 0/09$ صدک‌ها به دست می‌آیند و آن‌ها را با $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$ نشان می‌دهند.

طرز محاسبه چندک‌ها

ابتدا داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را به طور غیر نزولی یعنی به صورت $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ مرتب می‌کنیم. حال برای به دست آوردن Q_p با تقریب خوب بدین طریق عمل می‌کنیم: اگر $(n+1)p$ مساوی عدد صحیح r باشد فرض می‌کنیم $Q_p = x_r$. در غیر این صورت قسمت صحیح عدد $(n+1)p$ را به عنوان r و قسمت اعشاری آن را به عنوان w در نظر می‌گیریم. واضح است که $0 < w < 1$، در این حالت چندک مرتبه p از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q_p = (1-w)x_r + wx_{r+1}$$

مثال ۷.۵.۱. برای داده‌های ۱۲ ۸ ۷ ۷ ۵ ۴ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰ که به صورت غیر نزولی مرتب شده‌اند، $Q_{0/6}$ را حساب کنید.

حل. چون $n = 11$، $p = 0/6$، $(n+1)p = 7/2$، $r = 7$ و $w = 0/2$ بنابراین داریم:

$$Q_{0/6} = D_6 = P_{60} = (1 - 0/2)x_7 + 0/2x_8 = 0/8 \times 5 + 0/2 \times 7 = 5/4$$

محاسبه چندک‌ها برای داده‌های رده بندی شده

در این حالت با توجه به جدول فراوانی داده‌ها رده ای را که Q_p در آن قرار دارد را مشخص می‌کنیم برای این منظور نخستین رده ای را که فراوانی انباشته آن بزرگ‌تر یا مساوی np باشد را مشخص می‌کنیم و به عنوان رده Q_p می‌نامیم. سپس با استفاده از فرمول زیر مقدار Q_p را بدست آوریم:

$$Q_p = L_p + (\frac{np - g_p}{f_p})w$$

n: تعداد داده‌ها
L_p: مرز پایین رده Q_p
g_p: فراوانی انباشته رده بلافاصله قبل از رده Q_P
f_p: فراوانی مطلق رده Q_p
w: طول رده

مثال ۸.۵.۱. برای داده‌های جدول ۲.۱ صدک نوزدهم و میانه را بدست آورید.

حل. چون $n = ۱۰۰$، $p = ۰/۱۹$ و $np = ۱۹$ بنابراین رده $P_{۱۹}$ می‌شود ۱۶۳/۵ − ۱۵۶/۵. حال با استفاده از فرمول بالا داریم:

$$Q_{۰/۱۹} = ۱۵۶/۵ + \frac{(۱۹ - ۱۵)}{۲۰} \times ۷ = ۱۵۷/۹$$

میانه یعنی صدک مرتبه پنجاهم، بنابراین داریم $n = ۱۰۰$، $p = ۰/۵$ و $np = ۵۰$ و لذا رده میانه می‌شود ۱۷۰/۵ − ۱۶۳/۵. حال با استفاده از فرمول بالا داریم:

$$m = Q_{۰/۵} = ۱۶۳/۵ + \frac{(۵۰ - ۳۵)}{۳۰} \times ۷ = ۱۶۷$$

۸.۵.۱ مد یا نما

داده‌ای که فراوانی آن نسبت به سایر داده‌ها بیشتر باشد نما یا مد نامیده می‌شود و آن را با M نشان می‌دهند.

مثال ۹.۵.۱. برای داده‌های ۱ ۳ ۱ ۳ ۱ ۳ ۲ ۴ ۵ ۳ ۳ ۱ نما برابر با ۳ است، زیرا فراوانی داده ۳ بیشتر از سایر داده‌هاست.

مثال ۱۰.۵.۱. برای داده‌های ۵ ۳ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۱ ۱ ۱ دو داده ۱ و ۳ را که فراوانی آن‌ها بیش از سایر داده‌هاست به عنوان مد در نظر می‌گیریم. این داده‌ها را دو نمایی گوییم.

محاسبه نما برای داده‌های رده پیوسته

در این حالت با توجه به جدول فراوانی داده‌ها، رده ای را که دارای فراوانی بیشتر باشد را به عنوان رده نما انتخاب می‌کنیم. سپس از فرمول زیر مقدار نما را بدست می‌آوریم.

$$M = L_M + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} w$$

L_M: مرز پایین رده نما
$d_۱$: اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نما و رده بلافاصله قبل از آن
$d_۲$: اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نما و رده بلافاصله بعد از آن
w: طول رده

مثال ۱۱.۵.۱. برای داده‌های جدول ۲.۱ مقدار مد یا نما را محاسبه کنید.

حل. چون رده ۱۶۳/۵ − ۱۷۰/۵ دارای بیشترین فراوانی مطلق است، پس این رده همان رده نما خواهد بود. پس با استفاده از فرمول بالا داریم: $d_۱ = ۰/۳ - ۰/۲ = ۰/۱ \quad d_۲ = ۰/۳ - ۰/۲۵ = ۰/۰۵$

$$M = ۱۶۳/۵ + \frac{۰/۱}{۰/۱ + ۰/۰۵} \times ۷ = ۱۶۸/۲$$

۶.۱ معیارهای پراکندگی

فرض کنید میزان پس انداز برای خانوارهای جامعه اول ۱۰۰، ۵۰ و ۰ و برای خانوارهای جامعه دوم برابر ۶۰، ۵۰ و ۴۰ باشد. واضح است که میانگین پس انداز برای خانوارهای دو جامعه برابر است ولی آیا می‌توان گفت نحوه پراکندگی داده‌ها برای این دو جامعه یکسان است؟ اکنون چند معیار مفید را برای سنجش پراکندگی شرح می‌دهیم. فرض کنید $x_۱, x_۲, \dots, x_k$ یک سری داده‌های nتایی L فراوانی‌های $f_۱, f_۲, \dots, f_k$ و میانگین $\bar{x}$ باشد.

۱.۶.۱ برد

اگر $x_{(۱)}$ کوچک‌ترین و $x_{(n)}$ بزرگ‌ترین داده باشد،

$$R = x_{(n)} - x_{(۱)}$$

را برد داده‌ها می‌نامند.

از آنجایی که این معیار فقط به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده بستگی دارد و اگر بقیه داده‌ها تغییر کند تأثیری در برد ایجاد نخواهد کرد، پس لازم است معیار دیگری معرفی شود.

۲.۶.۱ میانگین انحراف‌ها

قدر مطلق $x_i - \bar{x}$ را انحراف از میانگین برای داده x_i و

$$d = \frac{\sum_{i=۱}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$$

را میانگین انحراف‌ها می‌نامند.

به عنوان مثال برای داده‌های ۷ ۷ ۲ ۴ داریم:

$$\bar{x} = \frac{۴ + ۲ + ۷ + ۷}{۴} = ۵, \qquad d = \frac{|۴ - ۵| + |۲ - ۵| + ۲|۷ - ۵|}{۴} = ۲$$

میانگین انحراف‌ها، معیار خوبی برای سنجش میزان پراکندگی داده‌هاست ولی طرز محاسبه و کشف خواص ریاضی آن علت وجود قدر مطلق قدری پیچیده است، بنابراین به جای آن معیار دیگری به نام واریانس و یا جذر آن به نام انحراف معیار استاندارد را به کار می‌برند.

۳.۶.۱ واریانس و انحراف استاندارد

واریانس به معنی تفاوت و تغییر بوده و با $S^۲$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$S^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^۲$$

در واقع واریانس میانگین مجذور انحراف‌ها از میانگین می‌باشد.

برای داده‌های ۷، ۷، ۲ و ۴ داریم

$$S^۲ = \frac{۱}{۴}[(۴-۵)^۲ + (۲-۵)^۲ + ۲ \times (۷-۵)^۲] = ۴/۵$$

چون واریانس از توان دوم داده‌ها استفاده می‌کند بنابراین واحد اندازه‌گیری داده در این حالت عوض می‌شود. مثلاً اگر قد افراد بر حسب سانتی‌متر باشد میزان پراکندگی آن‌ها با استفاده از فرمول واریانس بر حسب سانتی‌متر مربع خواهد شد ، از این رو جذر مثبت آن یعنی S را که انحراف استاندارد می‌نامند به کار می‌برند. گاهی واریانس را از فرمول

$$S_u^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{k} f(x_i - \bar{x})^۲$$

به دست می‌آورند، یعنی به جای n از $n-۱$ استفاده می‌کنند. دلیل آماری این مطلب در فصل‌های بعد مشخص خواهد شد ولی واضح است که برای nهای بزرگ $S^۲$ و $S_u^۲$ تقریباً برابرند.

تمرین ۱.۶.۱. نشان دهید $S^۲ = \bar{x^۲} - \bar{x}^۲$ که در آن $\bar{x^۲} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i^۲}{n}$

۴.۶.۱ داده‌های استاندارد

فرض کنید دانش آموزان یک کلاس در آزمون ریاضی دارای میانگین ۷۲ و انحراف استاندارد ۱۵ و آزمون فیزیک دارای میانگین ۵۰ و انحراف استاندارد ۲۰ می‌باشند. اگر نمره علی در ریاضی ۶۰ و در درس فیزیک ۳۵ باشد، به نظر شما معلومات او در کدام درس بیشتر است؟

واضح است که این دو آزمون مقیاس‌های مختلفی دارند، بنابراین مقایسه اعداد ۶۰ و ۳۵ منطقی نخواهد بود، از این رو برای مقایسه باید ابتدا آن‌ها را با استفاده از رابطه زیر استاندارد کنیم

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

حال مقدار استاندارد شده دو عدد را با هم می‌توانیم مقایسه کنیم.

$$z_1 = \frac{60 - 72}{15} = -0/80 \quad \text{نمره استاندارد شده ریاضی}$$
$$z_2 = \frac{35 - 50}{20} = -0/75 \quad \text{نمره استاندارد شده فیزیک}$$

بنابراین علی در فیزیک وضعیت بهتری نسبت به ریاضی دارد، زیرا $z_2 > z_1$

۵.۶.۱ ضریب تغییر

نسبت انحراف استاندارد به میانگین یعنی

$$v = \frac{s}{\bar{x}}$$

را که اغلب به صورت درصد بیان می‌شود، ضریب تغییر می‌نامند. این ضریب که به واحد اندازه گیری بستگی ندارد در عمل برای مقایسه به کار می‌رود.

مثال ۲.۶.۱. کارخانه ای دو نوع لاستیک اتومبیل تولید می‌کند. برای نوع A میانگین عمر ۱۰۰۰۰ کیلومتر با انحراف استاندارد ۲۰۰۰ کیلومتر و برای نوع B میانگین عمر ۱۱۰۰۰ کیلومتر با انحراف استاندارد ۱۰۰۰ کیلومتر می‌باشد کدام نوع لاستیک بهتر است؟

حل.

$$v_1 = \frac{2000}{10000} = 0/20 \qquad \text{ضریب تغییر برای نوع } A$$
$$v_1 = \frac{1000}{11000} = 0/04 \qquad \text{ضریب تغییر برای نوع } B$$

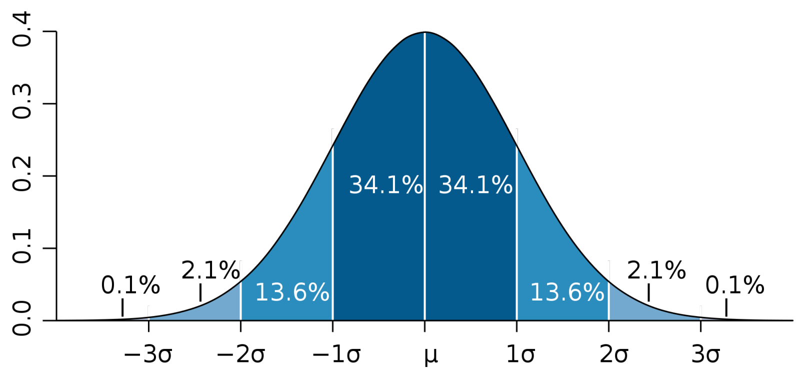
بنابراین نوع B بهتر است زیرا میانگین عمر آن بیشتر و نیز ضریب تغییر آن کوچک‌تر است.

۷.۱ چولگی و برجستگی

طبیعی‌ترین منحنی فراوانی، منحنی فراوانی نرمال استاندارد می‌باشد که معادله مختصاتی آن به صورت

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

است. این منحنی، زنگوله‌ای شکل بوده و از نظر تقارن، کشیدگی و پخی، تناسب و زیبایی خاصی دارد. مساحت زیر منحنی به نحوه طبیعی طبق شکل ۳.۱ توزیع شده است.



شکل ۳.۱: منحنی نرمال استاندارد

در عمل هیچ متغیری وجود ندارد که منحنی فراوانی آن کاملاً نرمال استاندارد باشد. اغلب منحنی فراوانی داده‌ها نامتقارن و کشیده و یا پخ می‌باشند. میزان نانرمالی را با دو معیار به نام‌های چولگی و برجستگی می‌سنجند. این دو معیار به میانگین‌های مخصوص، به نام گشتاورها بستگی دارند.

۱.۷.۱ گشتاور و گشتاور مرکزی داده‌ها

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_k$ به ترتیب با فراوانی‌های $f_1, f_2, \ldots, f_k$ یک سری داده nتایی باشند. میانگین توان r-ام x_iها و $x_i - \bar{x}$ها، یعنی

$$m'_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^r}{n} \qquad m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^r}{n}$$

را گشتاور rام و گشتاور مرکزی rام داده‌ها می‌نامند. r معمولاً یک عدد طبیعی است. واضح است که m'_1 برابر $\bar{x}$ و m_1 برابر صفر و m_2 برابر s^2 می‌باشد. اگر داده‌ها نسبت به میانگین، متقارن باشند، گشتاورهای مرکزی فرد یعنی $m_3, m_5, \ldots$ برابر صفر هستند.

۲.۷.۱ چولگی

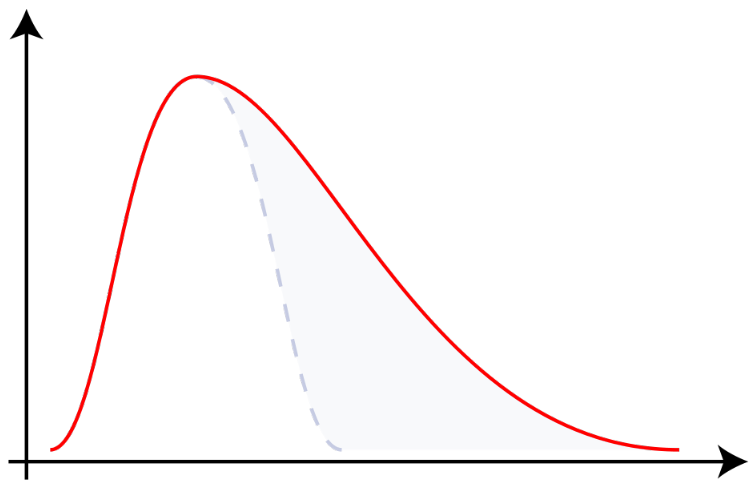
میزان عدم تقارن منحنی فراوانی را چولگی می‌نامند. فرض کنید $\bar{x}$ میانگین، m میانه، M نما، s انحراف استاندارد و m_3 گشتاور مرکزی سوم باشند. هر کدام از فرمول‌های زیر را می‌توان به عنوان معیار چولگی به کار برد:

ضریب چولگی اول پیرسن $\quad b_1 = \frac{\bar{x} - M}{s}$

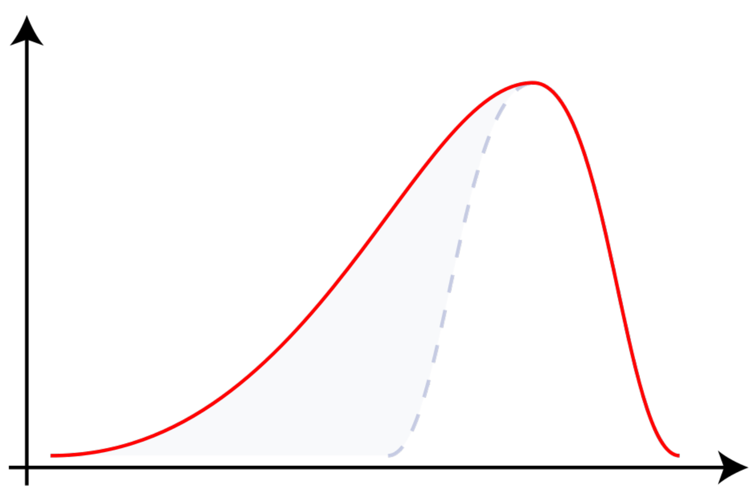
ضریب چولگی دوم پیرسن $\quad b_2 = \frac{3(\bar{x} - m)}{s}$

ضریب گشتاوری چولگی $\quad g = \frac{m_3}{s^3}$

در فرمول‌های بالا s را بدین جهت به کار برده‌ایم تا این ضرایب به واحد اندازه گیری بستگی نداشته باشند. در صورتی که داده‌ها نسبت به میانگین متقارن باشند، ضرایب بالا برابر صفر هستند، ولی باید متوجه بود که عکس این موضوع کاملاً صحت ندارد. بر حسب این که $b_۱$، $b_۲$ و g مثبت یا منفی باشند، منحنی فراوانی چوله به راست (شکل ۱.۴) یا چوله به چپ (شکل ۱.۵) می‌باشد.



شکل ۱.۴: منحنی فراوانی چوله به راست



شکل ۱.۵: منحنی فراوانی چوله به چپ

چون نما کمتر از میانگین و میانه، تحت تأثیر چولگی قرار می‌گیرد، از این رو ضریب $b_۱$ را به صورت بالا تعریف کرده‌اند. ولی در عمل محاسبه نما با دقت کافی مشکل می‌باشد، بنابراین $b_۲$ را که به کمک رابطه $M-\bar{x}\simeq ۳(\bar{x}-m)$ از روی $b_۱$ به دست می‌آید، به کار می‌برند.

مثال ۱.۷.۱. طول عمر ۱۰۰ باتری اتومبیل دارای میانگین و میانه و انحراف استاندارد ۳/۵۰، ۳/۴۸ و ۱/۶۵ سال می‌باشد، ضریب چولگی را محاسبه کنید.

حل. با اطلاعات داده شده، ضریب چولگی دوم پیرسن می‌شود

$$b_۲=\frac{۳(\bar{x}-m)}{s}=\frac{۳(۳/۵۰-۳/۴۸)}{۱/۶۵}=۰/۰۳۶$$

بنابراین منحنی فراوانی طول عمر باتری‌ها کمی چوله به راست می‌باشد.

۳.۷.۱ برجستگی

میزان کشیدگی یا پخی منحنی فراوانی را نسبت به منحنی نرمال استاندارد، برجستگی آن می‌نامند. فرض کنید $m_۴$ گشتاور مرکزی چهارم و s انحراف استاندارد باشد. چون برای داده‌های نرمال $\frac{m_۴}{s^۴}$، به عدد ۳ نزدیک می‌باشد، معیار برجستگی را از فرمول

$$k=\frac{m_۴}{s^۴}-۳$$

به دست می‌آورند. بر حسب آنکه k مثبت یا منفی باشد، منحنی فراوانی کشیده یا پخ می‌باشد. اگر k نزدیک صفر باشد، برجستگی منحنی فراوانی طبیعی است.

مثال ۲.۷.۱. در مثال قبل، گشتاور مرکزی چهارم برابر است با ۹/۲۳. برجستگی را محاسبه کنید.

حل.

$$k=\frac{۹/۲۳}{(۱/۶۵)^۴}-۳=۱/۲۵-۳=-۱/۷۵$$

بنابراین منحنی فراوانی طول عمر باتری‌ها، نسبت به منحنی فراوانی نرمال استاندارد، پخ می‌باشد.

مثال ۳.۷.۱. ساعات غیبت کارگران یک کارخانه بر حسب ساعت در ۶۰ روز با یک نمونه تصادفی ۵۰تایی بررسی و نتایج زیر ثبت شده است. (علم و صنعت ۸۶)

C	۰−۴	۴−۸	۸−۱۲	۱۲−۱۶	۱۶−۲۰	۲۰−۲۴	۲۴−۲۸	۲۸−۳۲	۳۲−۳۶
f	۲	۳	۶	۹	۱۰	۸	۷	۴	۱

الف) میانگین عددی، مد، میانه، دهک سوم و صدک بیست و یکم را محاسبه کنید.

ب) اگر با غیبت بیش از ۳۰ ساعت در ماه، کارگران اخراج شوند چند نفر از این نمونه اخراج می‌شوند.

رده	x_i	فراوانی مطلق f_i	فراوانی نسبی r_i	فراوانی تجمعی g_i	فراوانی نسبی تجمعی
۰-۴	۲	۲	۰/۰۴	۲	۰/۰۴
۴-۸	۶	۳	۰/۰۶	۵	۰/۱۰
۸-۱۲	۱۰	۶	۰/۱۲	۱۱	۰/۲۲
۱۲-۱۶	۱۴	۹	۰/۱۸	۲۰	۰/۴۰
۱۶-۲۰	۱۸	۱۰	۰/۲۰	۳۰	۰/۶۰
۲۰-۲۴	۲۲	۸	۰/۱۶	۳۸	۰/۷۶
۲۴-۲۸	۲۶	۷	۰/۱۴	۴۵	۰/۹۰
۲۸-۳۲	۳۰	۴	۰/۰۸	۴۹	۰/۹۸
۳۲-۳۶	۳۴	۱	۰/۰۲	۵۰	۱/۰۰

حل. الف)

$$\bar{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i = \frac{۱}{۵۰}\sum_{i=۱}^{۹} f_i x_i = \frac{۱}{۵۰}(۲ \times ۲ + ۶ \times ۳ + \cdots + ۳۴) = ۱۸$$

مد $$M = L_M + (\frac{d_۱}{d_۱ + d_۲})w = ۱۶ + (\frac{۱}{۱+۲})۴ = ۱۷/۳۳$$

$d_۱$: اختلاف فراوانی مطلق مربوط به رده مد و رده قبل از مد
$d_۱$: اختلاف فراوانی مطلق مربوط به رده مد و رده بعد از مد
L_M: کران پایین مربوط به رده مد

میانه $$m = L_{۰/۵} + (\frac{۰/۵n - g_{۰/۵}}{f_{۰/۵}})w = ۱۶ + (\frac{۵۰ \times ۰/۵ - ۲۰}{۱۰})۴ = ۱۸$$

$L_{۰/۵}$: کران پایین مربوط به رده میانه
$f_{۰/۵}$: فراوانی مطلق مربوط به رده میانه
$g_{۰/۵}$: فراوانی تجمعی مربوط به رده قبل از رده میانه

$$Q_p = L_p + (\frac{np - g_p}{f_p})w$$

$$Q_{۰/۳} = L_{۰/۳} + (\frac{۵۰ \times ۰/۳ - g_{۰/۳}}{f_{۰/۳}})۴ = ۱۲ + (\frac{۱۵ - ۱۱}{۹})۴ = ۱۴/۶۶$$

$$Q_{۰/۲۱} = L_{۰/۲۱} + (\frac{۵۰ \times ۰/۲۱ - g_{۰/۲۱}}{f_{۰/۲۱}})w = ۸ + (\frac{۱۰/۵ - ۵}{۶})۴ = ۱۱/۶۶$$

ب) ابتدا باید با استفاده از $Q_p = L_p + (\frac{np-g_p}{f_p})w$ مقدار درصد داده‌هایی که کمتر از ۳۰ هستند را پیدا کنیم

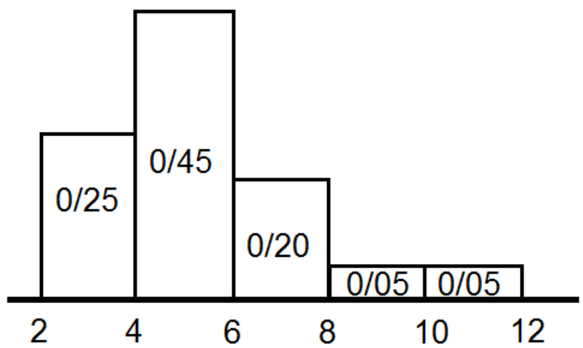
سپس اگر این مقدار را از یک کم کنیم درصد افرادی که بالای ۳۰ ساعت غیبت دارند بدست می‌آید.

$$Q_p = L_p + (\frac{np - g_p}{f_p})w$$
$$۳۰ = ۲۸ + (\frac{۵۰p - ۴۵}{۴})۴ \longrightarrow p = ۰/۹۴$$
$$۱ - ۰/۹۴ = ۰/۰۶$$

پس تعداد افرادی که اخراج می‌شوند برابر است با:

$$۵۰ \times ۰/۰۶ = ۳$$

مثال ۴.۷.۱. اگر هیستوگرام توزیع درآمد در یک جامعه (بر حسب صد هزار تومان) به صورت زیر گزارش شده باشد و در این جامعه درآمد ۲۰ درصد آن‌ها زیر خط فقر باشد، خط فقر این جامعه چقدر است؟



حل. کافی است صدک بیستم را حساب کنیم.

$$Q_{۰/۲۰} = ۲ + \frac{۰/۲ - ۰}{۰/۲۵} \times ۲ = ۳/۶$$

بنابراین خط فقر در این جامعه برابر است با

$$۳/۶ \times ۱۰۰۰۰۰ = ۳۶۰۰۰۰ \quad \text{تومان}$$

مثال ۵.۷.۱. برای داده‌های ۸، ۱۰، ۸، ۶، ۵، ۴، ۳، ۸ و ۴ میانگین انحراف‌ها از میانه چقدر است؟

حل. ابتدا داده‌ها را به طور غیر نزولی مرتب می‌کنیم، سپس میانه را پیدا می‌کنیم.

$$۳ \quad ۴ \quad ۴ \quad ۵ \quad \boxed{۶} \quad ۸ \quad ۸ \quad ۸ \quad ۱۰$$

بنابراین $m = ۶$

$$\text{میانگین انحراف‌ها از میانه} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - m) = \frac{۱}{۹}[(۳-۶)+(۴-۶)+\cdots+(۱۰-۶)] = \frac{۲}{۹}$$

مثال ۶.۷.۱. با تغییر مدیر یک فروشگاه بزرگ، فروش در سال اول دو برابر سال قبل، در سال دوم سه برابر سال اول و در سال سوم چهار برابر سال دوم شده است. به طور متوسط فروش از آغاز مدیریت جدید چند برابر شده است؟

حل. با استفاده از میانگین هندسی داریم:

$$G = \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \dots x_n} = \sqrt[۳]{(۲)(۳)(۴)} = ۲/۸۸$$

مثال ۷.۷.۱. در جامعه ای با حجم $N = ۱۰۰$ کمیت‌های زیر بدست آمده است:

$$\sum n_i (x_i - \bar{x})^۲ = ۲۵۰۰$$
$$\sum n_i (x_i - \bar{x})^۴ = ۱۹۰۰۰۰$$

در مورد کشیدگی توزیع چه می‌توان گفت؟

حل.

$$\text{کشیدگی } k = \frac{m_۴}{s^۴} - ۳$$
$$m_۴ = \frac{۱}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x})^۴ = \frac{۱}{۱۰۰} \times ۱۹۰۰۰۰ = ۱۹۰۰$$
$$s^۲ = \frac{۱}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۱۰۰} \times ۲۵۰۰ = ۲۵$$
$$k = \frac{۱۹۰۰}{(۲۵)^۲} - ۳ = ۰/۰۴$$

چون میزان کشیدگی ناچیز است پس توزیع از نظر کشیدگی به توزیع نرمال نزدیک است.

فصل ۲

اصول احتمال

۱.۲ آزمایش تصادفی

هر آزمایشی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد یک آزمایش تصادفی نامیده می‌شود، مثلاً در پرتاب سکه سالم چون از قبل نتیجه این پرتاب دقیقاً مشخص نیست پس پرتاب سکه یک آزمایش تصادفی است.

۱.۱.۲ پیشامد و فضای نمونه

در یک آزمایش تصادفی، هر پیشامد E عبارت است از زیر مجموعه‌ای از مجموعه تمام نتیجه‌ها، مثلاً در آزمایش تصادفی پرتاب سکه شیر آمدن یک پیشامد می‌باشد زیرا مجموعه‌ای از مجموعه $S = \{H, T\}$ می‌باشد.

مثال ۱.۱.۲. در بازی شیر و خط، سکه ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش فضای نمونه و پیشامد حداقل یک بار شیر آمدن را مشخص کنید.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$
$$E = \{HH, HT, TH\}$$

۲.۱.۲ اعمال روی پیشامدها

اعمال روی پیشامدها درست مانند اعمال روی مجموعه‌ها می‌باشد که اکنون آن‌ها را شرح می‌دهیم.

اجتماع دو پیشامد

اجتماع دو پیشامد E و F پیشامدی است که نتایج آن هم در F و هم در E باشد و آن را با $E \cap F$ نشان می‌دهند، این پیشامد زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد E و F با هم رخ دهند. اگر $E \cap F \neq \emptyset$، دو پیشامد E و F را جدا از هم یا دو پیشامد ناسازگار می‌نامند.

متمم یک پیشامد

متمم پیشامد E، پیشامدی است مانند E' به طوری که $E \cup E' = S$ و $E \cap E' = \emptyset$، در واقع E' زمانی رخ می‌دهد که E رخ ندهد.

۳.۱.۲ فضای نمونه با پایان و بی پایان

اگر تعداد اعضای فضای نمونه یک عدد طبیعی باشد آن را فضای نمونه با پایان و در غیر این صورت ان را فضای نمونه بی پایان می‌نامیم. مثلاً در پرتاب دو بار یک سکه، فضای نمونه با پایان است ولی اگر همین سکه را آن قدر پرتاب کنیم تا برای نخستین بار شیر بیاید، در این صورت فضای نمونه S به صورت زیر خواهد بود که یک فضای نمونه بی پایان است.

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$$

۴.۱.۲ فضای نمونه گسسته و پیوسته

اگر فضای نمونه شامل تعداد اعضای متناهی یا تعداد نامتناهی ولی شمارش پذیر باشد، آن را فضای نمونه گسسته گویند. مثلاً فضای نمونه پرتاب یک سکه، تعداد اعضای متناهی دارد ولی فضای نمونه ای پرتاب سکه تا رسیدن اولین شیر فضای نمونه، تعداد اعضای نامتناهی ولی شمارش پذیر دارد، پس هر دو فضای نمونه ای گسسته‌اند. اکنون حالتی را در نظر بگیرید که می‌خواهیم در بازه $(\circ, 1)$ عددی انتخاب کنیم یا مدت زمانی را که منتظر می‌مانیم تا یک قطعه الکتریکی از کار بیفتد در این جا دیگر فضای نمونه را نمی‌توان با تعداد نشان داد، به این فضای نمونه ای، یک فضای نمونه ای پیوسته گویند.

۵.۱.۲ احتمال و فراوانی نسبی

اگر یک آزمایش تصادفی به دفعات زیاد تکرار شود در این صورت احتمال پیشامد A به تعبیر فراوانی نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{فراوانی نسبی پیشامد } A = \frac{\text{تعداد دفعاتی که } A \text{ در } N \text{ تکرار آزمایش روی می‌دهد}}{N}$$

مثلاً اگر سکه سالمی را N بار پرتاب کنیم و تعداد دفعاتی را که در این N پرتاب شیر بیاید به عنوان پیشامد A در نظر بگیریم، واضح است که برای Nهای کوچک (مثلاً $N = ۱۰$) ممکن است تعداد دفعاتی که شیر ظاهر شود با تعداد دفعاتی که خط ظاهر می‌شود برابر نباشد ولی اگر N بزرگ اختیار شود، در این صورت شانس شیر آمدن به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند. این تعریف به زبان ریاضی به صورت زیر خواهد بود.

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} (\text{فراوانی نسبی پیشامد } A \text{ در } N \text{ تکرار})$$

۲.۲ قواعد شمارش

گاهی اوقات با وضعیت‌هایی مواجه می‌شویم که یا باید تمام حالت‌های ممکن آزمایشی را فهرست کنیم یا دست کم مشخص کنیم که چند حالت ممکن وجود دارد مثلاً سازمانی که برای ماشین‌ها پلاک صادر می‌کند باید بداند اگر از دو حرف و چهار رقم استفاده کند چند شماره می‌تواند صادر کند.

فرض کنید کار A را به n طریق با نام‌های $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ و کار B را به m طریق با نام‌های $y_۱, y_۲, \dots, y_m$ بتوان انجام داد، در این صورت اصل جمع و اصل ضرب عبارتند از:

۱.۲.۲ اصل جمع برای شمارش

اگر کار L منوط به انجام کار A یا B باشد، آن‌گاه کار L را می‌توان به $m+n$ طریق با نام‌های $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ $y_۱, y_۲, \dots, y_m$ انجام داد.

به عنوان مثال اگر هدف رفتن از خانه به دانشگاه باشد (کار L)، با تاکسی (کار A) از سه راه یا با اتوبوس (کار B) از دو راه امکان داشته باشد، بنابراین به پنج طریق شما می‌توانید از خانه به دانشگاه بروید.

۲.۲.۲ اصل ضرب برای شمارش

اصل ضرب برای شمارش اگر انجام کار L منوط به انجام پیاپی کار A و B باشد آنگاه کار ما را می‌توان به mn طریق به نام‌های $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), \dots, (x_n, y_m)$ انجام داد.

در مثال قبل اگر از منزل تا پارک با تاکسی (کار A) از سه راه از پارک تا دانشگاه (کار B) از دو راه امکان داشته باشد بنابراین شما به شش طریق با تاکسی و با اتوبوس می‌توانید از منزل به دانشگاه بروید.

این دو اصل را می‌توان به جای دو کار A و B، به k کار $A_۱, A_۲, \dots, A_k$ تعمیم داد.

مثال ۱.۲.۲. با استفاده از مجموعه اعداد $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ چند سه تایی مرتب (x, y, z) می‌توان ساخت؟

حل. هرکدام از x, y, z را می‌توان به ۴ طریق برگزید، بنابراین تمام سه تایی‌ها مرتب می‌شود $۶۴ = ۴ \times ۴ \times ۴$.

۳.۲.۲ شمارش با مدل‌های جعبه و مهره

فرض کنید تعداد N جعبه متمایز را بخواهیم با تعداد R مهره پرکنیم بر حسب اینکه مهره‌ها متمایز یا غیر متمایز باشند و در هر جعبه گذاشتن مهره مکرر مجاز یا غیر مجاز باشد چهار مدل داریم.

مهره‌ها متمایز و مهره مکرر مجاز است

در این مدل تعداد روش‌های پر کردن جعبه‌ها را با $C(N,R)$ نشان می‌دهیم و آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم: چون R مهره متمایز داریم که مجازیم هرکدام را در هر یک از N جعبه بگذاریم، بنابراین پر کردن جعبه‌ها معادل با انجام یابی R کار است که هر یک را به N طریق می‌توان انجام داد پس طبق اصل ضرب داریم:

$$C(N,R) = N^R$$

مثلاً دو مهره a و b را می‌توان به نه طریق در سه جعبه سبز و سفید و قرمز گذاشت.

مهره‌های متمایز و مهره مکرر غیرمجاز است

در این حالت باید داشته باشیم $R \leq N$، تعداد روش‌های پر کردن جعبه‌ها را با $C(\bar{N},R)$ نشان داده و آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم برای پر کردن جعبه‌ها نخست R جعبه را از بین N جعبه انتخاب کرده (کار A_1)و سپس R جعبه انتخاب شده را با R مهره متمایز یک به یک پر می‌کنیم (کار A_2). چون کار A_1 را به $\binom{N}{R}$ طریق و کار A_2 را به $R!$ طریق می‌توان انجام داد پس طبق اصل ضرب داریم:

$$C(\bar{N},R) = \binom{N}{R} R! = \frac{N!}{(N-R)!}$$

این درست برابر تعداد جایگشت‌های Rتایی و N چیز متمایز است.

مثلاً دو مهره a و b را می‌توان به شش طریق در سه جعبه سبز و سفید و قرمز قرار داد، به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره گذاشته شود.

مهره‌ها غیر متمایز و مهره مکرر غیرمجاز است

در این مدل، که باید داشته باشیم $R \leq N$، تعداد روش‌های پر کردن جعبه‌ها را $C(\bar{N},\bar{R})$ نشان داده آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم: برای پر کردن جعبه‌ها نخست R جعبه را بین N جعبه انتخاب می‌کنیم (کار A_1) و سپس R جعبه انتخاب شده را با R مهره غیر متمایز یک به یک پر می‌کنیم (کار A_2). چون کار A_1 به $\binom{N}{R}$ طریق و کار A_2 را تنها به یک طریق می‌توان انجام داد پس طبق اصل ضرب داریم:

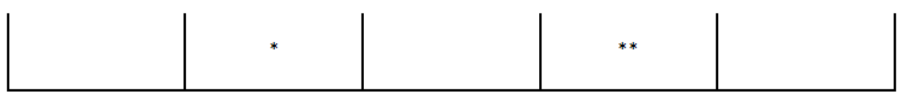
$$C(\bar{N},\bar{R}) = \binom{N}{R} \times 1 = \frac{N!}{R!(N-R)!}$$

این درست برابر تعداد ترکیب‌های Rتایی N چیز متمایز است.

مثلاً دو مهره a و a را می‌توان به سه طریق در سه جعبه سبز و سفید و قرمز قرارداد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره گذاشته شود. تعداد جایگشت‌هایی که از R چیز غیر متمایز از نوع a و $N-R$ چیز غیر متمایز از نوع b می‌توان تشکیل داد طبق این مدل می‌شود $\binom{N}{R}$ زیرا برای ساختن هر جایگشت می‌توان R جعبه از بین N جعبه متمایز را با aها و بقیه جعبه‌ها را با bها پر کرد. مثلاً از a و a و b و b و b می‌توان تعداد $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ جایگشت تشکیل داد.

مهره‌ها غیر متمایز و مهره مکرر مجاز است

در این مدل تعداد روش‌های پر کردن جعبه‌ها را با $C(N,\bar{R})$ نشان داده آن را بدین طریق پیدا می‌کنیم برای روشن شدن مطلب فرض کنید بخواهیم پنج جعبه را با سه مهره غیر متمایز پرکنیم با توجه به شکل زیر اگر پنج جعبه را با شش خط عمودی مجسم کرده و خط اول و آخر را ثابت تصور کنیم پر کردن این ۵ جعبه با این سه مهره معادل است با ساختن یک جایگشت از چهار خط عمودی و سه ستاره که به $\binom{۷}{۴} = ۳۵$ روش امکان دارد.



به طور کلی اگر N جعبه را $N+۱$ خط عمودی نشان دهیم و خط اول و آخر را ثابت کنیم، پر کردن این N جعبه به وسیله R مهره معادل است با ساختن یک جایگشت از $N-۱$ خط عمودی R ستاره که به $\binom{N+R-۱}{R}$ روش امکان دارد. بنابراین

$$C(N,\bar{R}) = \binom{N+R-۱}{R}$$

مثلاً دو مهره a و a را می‌توان به شش روش در سه جعبه سبز و سفید و قرمز گذاشت.

مثال ۲.۲.۲. تعداد جواب‌های درست و غیر منفی معادله دو مجهولی $X_۱ + X_۲ = ۴$ را که به صورت بردار $(X_۱, X_۲)$ نشان داده می‌شوند پیدا کنید.

حل. پیدا کردن هر جواب معادل است با چهار مهره غیر متمایز در دو جعبه متمایز $X_۱$ و $X_۲$، که طبق مدل اخیر جعبه و مهره به $\binom{۲+۴-۱}{۴} = ۵$ طریق امکان دارد، و این جواب‌ها عبارتند از

$$(۰,۴),(۴,۰),(۳,۱),(۱,۳),(۲,۲)$$

به طور کلی معادله N مجهولی $X_۱ + X_۲ + \cdots + X_N = R$ دارای $\binom{N+R-۱}{R}$ جواب درست غیر منفی است.

مثال ۳.۲.۲. بیست گلوله یکسان را به تصادف درون پنج جعبه با شماره های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ریخته‌ایم احتمال ان را بیابید که حداقل هر جعبه حاوی یک مهره باشد. احتمال اینکه حداقل هر جعبه حاوی تعدادی گلوله که کمتر از عدد روی آن نیست، باشد؟

حل. الف) تعداد حالت‌های کل برابر است با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$ که برابر است با $\binom{5+20-1}{20}$
اکنون اگر در هر جعبه یک گلوله قرار دهیم تعداد حالت‌های مطلوب برابر خواهد بود با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = 15$ که برابر است با $\binom{5+15-1}{15}$ بنابراین احتمال این که هر جعبه حداقل حاوی یک گلوله باشد برابر خواهد بود با

$$\frac{\binom{5+15-1}{15}}{\binom{5+20-1}{20}}$$

ب) اگر در هر جعبه به تعداد شماره روی جعبه گلوله قرار دهیم تعداد حالت‌های مطلوب برابر خواهد بود با تعداد جواب‌های صحیح و نا منفی معادله $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = 15$ که برابر است با $\binom{5+5-1}{5}$
بنابراین احتمال فوق برابر خواهد بود با

$$\frac{\binom{5+5-1}{5}}{\binom{5+20-1}{20}}$$

اگر N چیز داشته باشیم به طوری که N_1 تا از نوع O_1 و N_2 تا از O_2 و ... و N_k تا از نوع O_k و $N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$ در این صورت تعداد جایگشت‌هایی را که از این N چیز می‌توان تشکیل داد برابر است با

$$\binom{N}{N_1, N_2, \ldots, N_k} = \frac{N!}{N_1! N_2! \ldots N_k!}$$

مثال ۴.۲.۲. چهار نفر تبریزی دو نفر کاشانی و سه نفر تهرانی روی ۹ صندلی که در یک ردیف قرار دارند به تصادف می‌نشینند. احتمال اینکه نام همشهری‌ها پهلوی هم باشد چقدر است؟

حل. با توجه به اینکه همشهری بودن مهم است پس فرقی نمی‌کند که شخص A اول باشد یا شخص B اگر A و B همشهری باشند بنابراین این نه نفر به $\frac{9!}{4!2!3!}$ طریق هم‌شانس می‌توانند پهلوی هم بنشینند. حال اگر شهرها را از نظر ترتیب مهم بدانیم بنابراین سه شهر به $3!$ طریق می‌توانند صندلی‌ها را اشغال کنند بنابراین احتمال مورد نظر می‌شود $\frac{3!}{\frac{9!}{4!2!3!}}$.

۳.۲ بسط دوجمله ای

اگر a و b دو عدد حقیقی باشد بسط دوجمله ای $(a+b)^n$ به صورت زیر خواهد بود که در آن n یک عدد طبیعی است

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

با استفاده از شمارنده k در فرمول بالا واضح است که $(a+b)^n$، $n+1$ جمله دارد و ضریب هر جمله‌ی $a^k b^{n-k}$ برابر است با $\binom{n}{k}$.

مثال ۱.۳.۲. ضریب جمله $x^{۲}y^{۳}$ در بسط $(۲x+\frac{y}{۳})^{۵}$ چقدر است ؟

حل. اگر فرض کنیم $a=۲x$ و $b=\frac{y}{۳}$ خواهید داشت:

$$(۲x+\frac{y}{۳})^{۵}=(a+b)^{۵}$$

بنابراین ضریب $a^{۲}b^{۳}$ برابر خواهد بود با $\binom{۵}{۲}=۱۰$ حال با جایگذاری خواهیم داشت

$$۱۰(۲x)^{۲}(\frac{y}{۳})^{۳}=\frac{۴۰}{۲۷}x^{۲}y^{۳}$$

مثال ۲.۳.۲. نشان دهید

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^{n}$$

حل. اگر در بسط دوجمله ای $(a+b)^{n}$ فرض کنیم $a=b=۱$ خواهیم داشت

$$(۱+۱)^{n}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(۱)^{k}(۱)^{n-k}=\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}$$

تمرین ۳.۳.۲. تمرین)نشان دهید که

$$\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+(-۱)^{n}\binom{n}{n}$$

۴.۲ فضای احتمال

در یک فضای احتمال باید سه اصل زیر برقرار باشد

اصل ۱) $p(S)=۱$

اصل ۲) $p(E)\geq ۰$

اصل ۳) $p(\cup_{i=۱}^{\infty}E_i)=\sum_{i=۱}^{\infty}p(E_i)$ اگر $E_i\cap E_j=\emptyset$

قضیه ۱.۴.۲. برای پیشامدهای دو به دو ناسازگار $E_۱,E_۲,\ldots,E_n$ داریم:

$$p(\cup_{i=۱}^{n}E_i)=\sum_{i=۱}^{n}p(E_i)$$

مثال ۲.۴.۲. نشان دهید اگر پیشامد E' متمم پیشامد E باشد، آنگاه

$$p(E')=۱-p(E)$$

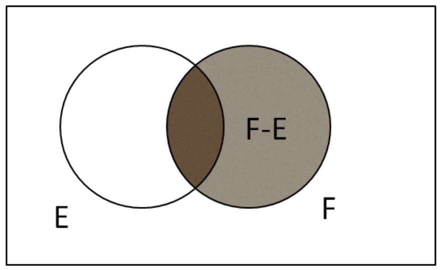
حل. چون E و E' ناسازگارند و $S=E\cup E'$ بنابراین با استفاده از اصل قضیه (۱) و قضیه بالا داریم:

$$p(E\cup E')=p(S)=۱=p(E)+p(E')\Rightarrow p(E')=۱-p(E)$$

مثال ۳.۴.۲. برای دو پیشامد E و F نشان دهید .

$$p(F-E)=p(F)-p(E\cap F)$$

حل. با توجه به شکل چون دو پیشامد $(E\cap F)$ و $(F-E)$ ناسازگارند و همچنین $F=(F-E)\cup(E\cap F)$ بنابراین طبق قضیه بالا داریم:



$$p(F)=p[(F-E)\cup(E\cap F)]=p(F-E)+p(E\cap F)$$

بنابراین $p(F-E)=p(F)-p(E\cap F)$.

تمرین ۴.۴.۲. برای دو پیشامد E و F نشان دهید

$$p(E\cup F)=p(F)+p(E)-p(E\cap F)$$

۵.۲ احتمال شرطی

در محاسبه احتمال وقایع، علم به اینکه پیشامدی رخ داده است ممکن است در احتمال رخ دادن پیشامد دیگر تأثیر نگذارد مثلاً در پرتاب یک تاس اگر بدانیم تاس زوج آمده احتمال اینکه عدد ۲ ظاهر شود افزایش میابد در اینجا با احتمال شرطی سروکار خواهیم داشت:

فرض کنید A و B دو پیشامد دلخواه در فضای احتمال باشند به طوری که $p(B)\neq 0$ احتمال A به شرط B، یعنی احتمال پیشامد A با علم به اینکه پیشامد B رخ داده است، برابر است با

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)},\qquad p(B)>0$$

مثال ۱.۵.۲. تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم عدد تاس کمتر از ۴ است، احتمال اینکه بدانیم آن عدد ۲ باشد چقدر است؟

حل. A: پیشامد عدد ۲

$$p(A)=\frac{1}{6}$$

B: پیشامد عدد کمتر از ۴

$$p(B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$p(A|B) = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

۶.۲ قانون ضرب احتمال

با فرض $p(B) > ۰$ از رابطه احتمال شرطی داریم:

$$p(A \cap B) = p(B)p(A|B)$$

که می‌توان ان را به صورت زیر تعمیم داد.

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B|A)p(C|A \cap B)$$

مثال ۱.۶.۲. ظرفی شامل ۵ توپ سفید و ۳ توپ سیاه می‌باشد از این ظرف توپ را یک به یک به تصادف خارج می‌کنیم احتمال اینکه هر دو توپ سفید باشد چقدر است؟

حل. A: سفید بودن توپ اول B: سفید بودن توپ دوم

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{۱۴}$$

مثال ۲.۶.۲. هفت کارت سفید شش کارت سبز و یک کارت قرمز را به خوبی مخلوط می‌کنیم، از میان آن‌ها سه کارت را یک به یک بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این سه کارت به ترتیب سفید سبز و قرمز باشد چقدر است؟

حل. A: پیشامد سفید بودن کارت اول B: پیشامد سبز بودن کارت دوم C: پیشامد قرمز بودن کارت سوم

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B|A)p(C|A \cap B) = \frac{۷}{۱۴} \times \frac{۶}{۱۳} \times \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۵۲}$$

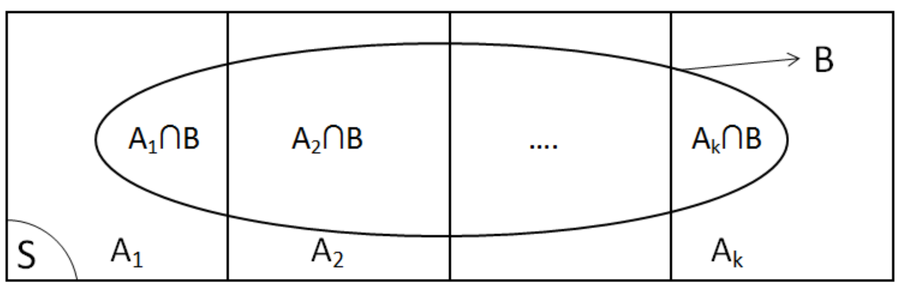
مثال ۳.۶.۲. عددی به تصادف از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد انتخاب شده زوج است احتمال آن را بیابید که مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشد.

حل. A: پیشامد اینکه عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد B: پیشامد اینکه عدد انتخاب شده مضرب زوج باشد C: پیشامد اینکه عدد انتخاب شده مضرب ۵ باشد

$$\begin{aligned} p\big[(A\cup C)|B\big] &= \frac{p\big[(A\cup C)\cap B\big]}{p(B)} = \frac{p\big[(A\cap B)\cup(B\cap C)\big]}{p(B)} \\ &= \frac{p(A\cap B)+p(B\cap C)-p(A\cap B\cap C)}{p(B)} \\ &== \frac{\frac{۱۶}{۱۰۰}+\frac{۱۰}{۱۰۰}-\frac{۳}{۱۰۰}}{\frac{۵۰}{۱۰۰}} = \frac{۲۳}{۵۰} \end{aligned}$$

۱.۶.۲ فرمول تفکیک احتمال

در بعضی مسائل نمی‌توان احتمال پیشامدی مانند B را مستقیماً محاسبه کرد، زیرا همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌کنید این پیشامد به پیشامدهای $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ وابسته است یعنی داریم:
$B = (A_۱\cap B)\cup(A_۲\cap B)\cup\cdots\cup(A_k\cap B)$



چون پیشامدهای بالا دو به دو ناسازگارند پس داریم:

$$\begin{aligned} p(B) &= p\big[(A_۱\cap B)\cup(A_۲\cap B)\cup\cdots\cup(A_k\cap B)\big] \\ &= p(A_۱\cap B)+p(A_۲\cap B)+\cdots+p(A_k\cap B) \\ &= \sum_{i=۱}^{k} p(A_i\cap B) \end{aligned}$$

اکنون از قانون ضرب احتمال داریم:

$$p(B) = \sum_{i=۱}^{k} p(A_i\cap B) = \sum_{i=۱}^{k} p(A_i)p(B|A_k)$$

این فرمول را فرمول تفکیک یا فرمول احتمال کل می‌نامند و برای حل بعضی مسائل احتمال مفید است.

مثال ۴.۶.۲. دو ظرف داریم ظرف یک شامل دو مهره سفید و سه مهره سیاه و ظرف ۲ شامل یک مهره سیاه است اگر یک مهر از طرف اول برداشته و بدون نگاه کردن به رنگ آن ان را در ظرف دوم قرار دهیم و سپس از ظرف دوم یک مهره انتخاب کنیم احتمال اینکه مهره انتخابی از ظرف دو سیاه باشد چقدر است؟

حل. در اینجا احتمال سیاه بودن مهره‌ی ابتدایی از طرف دوم بستگی به رنگ مهره‌ی انتخابی از ظرف اول دارد
$A_۱$: پیشامد اینکه مهره انتخابی از ظرف اول سفید باشد $A_۲$: پیشامد اینکه مهره انتخابی از ظرف اول سیاه باشد

$$p(B)=p(A_۱)p(B|A_۱)+p(A_۲)p(B|A_۲)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۴}{۱۵}$$

۲.۶.۲ فرمول بیز

از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$p(A_j|B)=\frac{p(A_j\cap B)}{p(B)}$$

حال با استفاده از فرمول تفکیک احتمال و قانون ضرب احتمال فرمول معروف بیز به دست می‌آید.

$$p(A_j|B)=\frac{p(B|A_j)p(A_j)}{\sum_{i=۱}^{k}p(B|A_j)p(A_j)}$$

مثال ۵.۶.۲. شخصی دو سکه در جیب دارد که یکی سالم و دیگری شانس مشاهده شیر روی سکه $\frac{۱}{۳}$ است وی یک سکه را به تصادف از جیب خود انتخاب کرده و آن را پرتاب می‌کند شیر مشاهده شده است احتمال اینکه سکه سالم انتخاب شده باشد چقدر است؟ (مهندسی معدن ۸۹)
۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$

حل. A: پیشامد اینکه سالم انتخاب شود B: پیشامد اینکه دو پرتاب سکه شیر ظاهر شود

$$\begin{aligned}p(A|B)&=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A)p(B|A)}{p(A)p(B|A)+p(A')p(B|A')}\\&=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۵}\end{aligned}$$

مثال ۶.۶.۲. دستگاه‌های یک کارگاه تولیدی سه دسته‌اند: فرسوده، عادی و جدید که به ترتیب ۲۰، ۷۰ و ۱۰ درصد قطعات با آن‌ها تولید می‌شود. احتمال اینکه قطعه تولید شده هرکدام از این سه نوع دستگاه کاملاً بی‌نقص باشد به ترتیب ۹۰، ۹۵ و ۹۹ درصد است. در این کارگاه احتمال اینکه یک قطعه بی‌نقص را یک دستگاه فرسوده تولید کرده باشد چقدر است؟ (امیر کبیر ۹۰-۸۹)

حل. A_1: پیشامد اینکه دستگاه فرسوده باشد A_2: پیشامد اینکه دستگاه عادی باشد A_3: پیشامد اینکه دستگاه جدید باشد B: پیشامد اینکه دستگاه بی نقص باشد

$$\begin{aligned} p(A_1|B) &= \frac{p(A_1\cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A_1)p(A_1)}{p(B|A_1)p(A_1)+p(B|A_2)p(A_2)+p(B|A_3)p(A_3)} \\ &= \frac{۰/۹\times ۰/۲}{۰/۹\times ۰/۲+۰/۹۵\times ۰/۷+۰/۹۹\times ۰/۱} = \frac{۰/۱۸}{۰/۱۸+۰/۶۶۵+۰/۰۹۹} \\ &= \frac{۰/۱۸}{۰/۹۴۴} = ۰/۱۹ \end{aligned}$$

مثال ۷.۶.۲. احتمال اینکه فردی دارای مدرک کارشناسی است دریک آزمون استخدامی قبول شود ۰/۴ است. احتمال اینکه فردی که استخدام می‌شود دارای مدرک کارشناسی باشد ۰/۳ است. احتمال اینکه در این جامعه آماری فردی دارای مدرک کارشناسی باشد ۰/۷ است. مطلوب است احتمال اینکه یک فرد قبول شود. (مهندسی کامپیوتر ۸۷)

۱) ۰/۲۱ ۲) $\frac{۲}{۳۰}$ ۳) ۰/۲۸ ۴) $\frac{۲۸}{۳۰}$

حل. B: پیشامد اینکه فرد قبول شود A: پیشامد اینکه فرد مدرک کارشناسی داشته باشد

$$P(\text{قبول شود}|\text{مدرک کارشناسی داشته باشد}) = p(B|A) = ۰/۴$$

$$P(\text{مدرک کارشناسی داشته باشد}|\text{قبول شود}) = p(A|B) = ۰/۳$$

$$p(A) = ۰/۷, \qquad p(A') = ۱ - p(A) = ۰/۳$$

$$p(B) = p(A)p(B|A) + p(A')p(B|A') = ۰/۷\times ۰/۴ + ۰/۳p(B|A')$$

$$p(B|A') = \frac{p(B)p(A'|B)}{p(A')} = \frac{p(B)p(A'|B)}{۰/۳}$$

$$p(A'|B) = ۱ - p(A|B) = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

با جایگذاری داریم:

$$p(B) = ۰/۲۸ + ۰/۷p(B) \to p(B) = \frac{۲۸}{۳۰}$$

مثال ۸.۶.۲. دستگاه دروغ سنج به یک مظنون وصل می‌گردد میدانیم اگر شخص گناهکار باشد با احتمال ۹۵ درصد دستگاه دروغ سنج او را مشخص می‌کند اگر شخص بی گناه باشد با احتمال ۹۹درصد بی گناهی او را آشکار می‌کند اگر یک مظنون از یک زندان که فقط ۵درصد آن‌ها تا کنون جنایاتی مرتکب شده‌اند انتخاب گردد و دستگاه نشان دهد که او گناهکار است احتمال اینکه او بی گناه باشد را بیابید. (امیر کبیر میان‌ترم اول ۸۶-۸۵)

حل. A: فرد بی گناه باشد A': فرد گناهکار باشد B: دستگاه بگوید گناهکار است B': دستگاه بگوید بی گناه است

$$\begin{aligned} p(A|B) &= \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B|A)p(A)+p(B|A')p(A')} \\ &= \frac{(۱-p(B'|A))p(A)}{(۱-p(B'|A))p(A)+(۱-p(B|A'))p(A')} \\ &= \frac{(۱-۰/۹۹)\times ۰/۹۵}{(۱-۰/۹۹)\times ۰/۹۵+۰/۹۵\times ۰/۰۵} = \frac{۰/۰۱}{۰/۰۱+۰/۰۵} = \frac{۱}{۶} \end{aligned}$$

تمرین ۹.۶.۲. هدفی مشخص است و احتمال اینکه هر یک از سه نفر A، B و C این هدف را با گلوله بزنند، به ترتیب $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ است. هرکدام یک بار مستقل از هم تیر اندازی می‌کنند.

الف) احتمال اینکه تنها یک تیر به هدف خورده باشد چقدر است ؟

ب) اگر تنها یک تیر به هدف خورده باشد احتمال اینکه این تیر را ...زده باشد چقدر است (تهران جنوب ۸۵-۸۴)

تمرین ۱۰.۶.۲. ده کیسه کاملاً یکسان که به ترتیب از یک تا ده شماره گذاری شده است وجود دارد در کیسه i-ام i مهره قرمز و $۲i$ مهره آبی وجود دارد ($۱ \leq i \leq ۱۰$). یکی از این کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه مهره انتخاب شده قرمز باشد چیست؟

ب) اگر مهره خارج شده قرمز باشد احتمال اینکه از کیسه‌ی پنجم خارج شده باشد چیست؟ (امیر کبیر ۸۵-۸۴)

تمرین ۱۱.۶.۲. تعمیرات دستگاه‌های الکترونیکی در یک کارخانه توسط شرکت‌های A، B و C انجام می‌پذیرد به طوری که ۷۰درصد از A و۲۰درصد موارد از B و ۱۰ درصد موارد از شرکت C استفاده می‌شود. همچنین به ترتیب در ٪۵، ٪۶ و ٪۴ موارد شرکت‌های A، B و C کار خود ا به درستی انجام نمی‌دهند. دریک زمان مشخص اگر تعمیر دستگاه الکتریکی این کارخانه به درستی انجام نشده باشد چقدر احتمال وجود دارد توسط B انجام شده باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۷)

تمرین ۱۲.۶.۲. شرکتی ۱۰۰ نفر استخدام می‌کند ۸۰درصد مرد و۳۰ درصد زن، در بخش حسابداری برای ٪۱۵ از مردان و ٪۲۰ از زنان کار فراهم می‌شود. اگر در بخش حسابداری شخصی به تصادف از میان افراد جدید انتخاب شود، احتمال اینکه این فرد از میان مردان باشد چقدر است؟ (مهندسی صنایع ۸۴)

فصل ۳

متغیرهای تصادفی گسسته

۱.۳ متغیر تصادفی گسسته

اگر متغیر تصادفی روی یک مجموعه شمارا مقدار اختیار کند، آن را متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم. به عنوان مثال اگر در پرتاب تاس، متغیر تصادفی x را شماره وجه رو شده در نظر بگیریم چون x مقادیر $۱, ۲, \ldots, ۶$ را اختیار می‌کند گسسته است و یا اگر متغیر تصادفی x را تعداد تصادفات رانندگی در یک زمان و مکان مشخص در نظر بگیریم، چون x مقادیر $۰, ۱, ۲, \ldots$ را اختیار می‌کند پس این متغیر تصادفی، گسسته است.

اگر x یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابع

$$f_X(x) = p(X = x), \quad x \in \mathbb{R}$$

را تابع جرم احتمال x می‌نامیم. با توجه به اصول احتمال، بدیهی است که تابع f_X دارای خصوصیات زیر باشد.

۱. به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $۰ \leq f(x)$

۲. $\sum_x f_X(x) = \sum_x p(X = x) = ۱$، یعنی مجموع احتمالات همه مقادیر باید برابر یک شود.

مثال ۱.۱.۳. آیا تابع زیر یک تابع جرم احتمال است؟

$$f_X(x) = \begin{cases} (\frac{۱}{۲})^x & x = ۱, ۲, \ldots \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

از آنجایی که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f_X(x) \geq ۰$ و $\sum_x f_X(x) = \sum_{x=۱}^{\infty} (\frac{۱}{۲})^x = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۱$ پس $f_X(x)$ یک تابع جرم احتمال است.

مثال ۲.۱.۳. به ازای چه مقداری از c تابع زیر یک تابع جرم احتمال است؟

$$p(X = x) = c\frac{۲^x}{x!}, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

حل. اولاً باید $c>0$ تا شرط $f_X(x)\geq 0$ برقرار باشد، ثانیاً

$$\begin{aligned}\sum_x f_X(x) &= \sum_x p(X=x)=\sum_{x=0}^{\infty} c\frac{2^x}{x!}=c\sum_{x=0}^{\infty}\frac{2^x}{x!}\\ &= ce^2=1\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$c=e^{-2}$$

یادآوری: $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}=e^a$

تمرین ۳.۱.۳. به ازای چه مقداری از c تابع $p(X=x)=\frac{c}{n!},\ n\in\mathbb{N}$ یک تابع جرم احتمال است؟

مثال ۴.۱.۳. به ازای چه مقدار (یا مقادیری) از c، تابع زیر یک تابع جرم احتمال است؟

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{c}{x} & x=1,2,\dots\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

حل. اولاً باید $c>0$، ثانیاً

$$\sum_x f_X(x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{c}{x}=c\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x}$$

اما $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x}$ همگرا نمی‌باشد، لذا به ازای هیچ مقداری از c تابع فوق نمی‌تواند یک تابع جرم احتمال باشد.

مثال ۵.۱.۳. فرض کنید X متغیری تصادفی باشد که مقادیر صحیح و نامنفی اختیار می‌کند و برای پیشامدی مانند A داریم:

$$2^n p(A|X=n)=n!p(X=n|A)$$

در این صورت مقدار $p(A)$ را بدست آورید. (امیرکبیر ۸۸)

حل. می‌دانیم: $p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ بنابراین از رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned}&2^n p(A|X=n)=n!p(X=n|A)\\ &2^n\frac{p(A\cap X=n)}{p(X=n)}=\frac{n!p(A\cap X=n)}{p(A)}, \qquad n=0,1,\dots\\ &p(X=n)=\frac{p(A)2^n}{n!} \qquad n=0,1,\dots\end{aligned}$$

چون $p(X=n)$ یک تابع جرم احتمال است پس داریم:

$$\sum_{x=0}^{\infty}p(X=n)=1\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(A)2^n}{n!}=p(A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=1$$

یادآوری: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ بنابراین داریم:

$$p(A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = 1 \to p(A)e^2 = 1 \Rightarrow p(A) = e^{-2}$$

مثال ۶.۱.۳. اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X $(f(x))$ فقط برای اعداد صحیح و نامنفی تعریف شده باشد و داشته باشیم:

$$f(x+1) = \frac{1}{x+1}f(x), \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

مقدار $f(0)$ کدام است؟ (مهندسی نساجی ۸۸ و مهندسی معدن ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{e^2}$ ۳) $\frac{1}{2e}$ ۴) $\frac{1}{e}$

با توجه رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned}
&x = 0 \to f(1) = f(0)\\
&x = 1 \to f(2) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}f(0)\\
&x = 2 \to f(3) = \frac{1}{3}f(2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}f(0)\\
&x = 3 \to f(4) = \frac{1}{4}f(3) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}f(0)\\
&x = 4 \to f(5) = \frac{1}{5}f(4) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{5!}f(0)
\end{aligned}$$

بنابراین به طور کلی داریم

$$f(x) = \frac{1}{x!}f(0), \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

حال چون f تابع جرم احتمال است لذا داریم:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1 \to \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}f(0) = f(0)\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}$$

یادآوری: $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!} = e^a$

$$f(0)\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!} = f(0)\times e^1 = 1 \to f(0) = e^{-1}$$

مثال ۷.۱.۳. مقدار c را چنان بیابید که تابع زیر یک تابع جرم احتمال باشد. (امیرکبیر ۸۹)

$$f(x) = \begin{cases} c\frac{\theta^x}{x} & x = 1, 2, \dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حل. چون $f(x)$ یک تابع جرم احتمال است پس داریم:

۱. $f(x) > ۰ \quad \forall x = ۱, ۲, \ldots \Rightarrow c > ۰$

۲. $\sum_{x=۱}^{\infty} f(x) = ۱ \Rightarrow c \sum_{x=۱}^{\infty} \frac{\theta^x}{x} = ۱$

از آنجایی که $\frac{\theta^x}{x} = \frac{y^x}{x}\Big|_۰^\theta = \int_۰^\theta y^{x-۱} dy$ بنابراین با جایگذاری در بالا خواهیم داشت (چون تابع زیر انتگرال مثبت است مجازیم جای $\int$ و $\sum$ را عوض کنیم)

$$c \sum_{x=۱}^{\infty} \frac{\theta^x}{x} = c \sum_{x=۱}^{\infty} \int_۰^\theta y^{x-۱} dy = c \int_۰^\theta \Big(\sum_{x=۱}^{\infty} y^{x-۱} \Big) dy$$

از آنجایی که $۰ < \theta < ۱$ پس در انتگرال فوق $۰ < y < ۱$ بنابراین $\sum_{x=۱}^{\infty} y^{x-۱} = \frac{۱}{۱-y}$ که با جایگذاری در بالا داریم:

$$c \int_۰^\theta \frac{dy}{۱-y} = -c \ln(۱-y)\Big|_۰^\theta = -c \ln(۱-\theta) = ۱ \rightarrow c = \frac{-۱}{\ln(۱-\theta)}$$

تمرین ۸.۱.۳. فرض کنید متغیر تصادفی X مقادیر ۰، ۱ و ۲ را انتخاب کند و برای یک c ثابت داشته باشیم:

$$p(X = i) = cp(X = i-۱), \quad i = ۱, ۲$$

و

$$p(X = ۰) = \frac{۱}{۲}$$

در این صورت مقدار ثابت c را بیابید.

تمرین ۹.۱.۳. اگر یک تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد

$$p(X = x) = A(x+۱)(\frac{۲}{۳})^۲(\frac{۱}{۳})^x, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

آنگاه مقدار ثابت A را بیابید.

۲.۳ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی

تابع توزیع تجمعی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

یعنی مقدار احتمال اینکه متغیر تصادفی X تمام مقادیر کوچک‌تر یا مساوی مقدار مشاهده شده x را اختیار کند.

۱.۲.۳ خواص تابع توزیع تجمعی

۱. F تابعی غیر نزولی است، یعنی اگر $a < b$ باشد آنگاه $F(a) \leq F(b)$

۲. $\lim_{x\to\infty} F(x) = ۱$

۳. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = ۰$

۴. F از راست پیوسته است.

۲.۲.۳ رابطه بین تابع توزیع و تابع جرم احتمال متغیر تصادفی گسسته

اگر $p(X = x)$ تابع جرم احتمال باشد آنگاه تابع توزیع به صورت

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i)$$

محاسبه می‌شود ولی اگر تابع توزیع را داشته باشیم تابع جرم احتمال از روی آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$p(X = x_۰) = p(x_۰ \leq X \leq x_۰) = p(X \leq x_۰) - p(X < x_۰) = F(x_۰) - F(x^-)$$

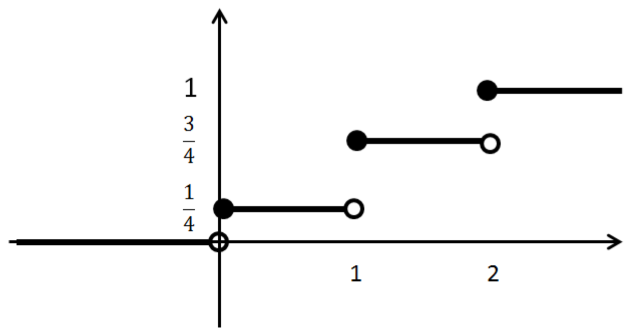
مثال ۱.۲.۳. فرض کنید سکه سالمی را دو بار پرتاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را تعداد شیرها در این دو پرتاب می‌نامیم. تابع احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورده و با استفاده از آن تابع توزیع تجمعی را به دست آورید و سپس آن را رسم کنید.

حل. واضح است که متغیر تصادفی X مقادیر ۰، ۱ و ۲ را می‌تواند اختیار کند. تابع احتمال این متغیر تصادفی به صورت زیر است.

$X = x$	۰	۱	۲
$p(X = x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

اکنون برای به دست آوردن تابع توزیع تجمعی با توجه به تعریف داریم:

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{۱}{۴} & ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} & ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} & x \geq ۲ \end{cases}$$



از شکل واضح است که همه ویژگی‌های تابع توزیع تجمعی برقرار نیست.

مثال ۲.۲.۳. تحقیق کنید که تابع $F_X(x) = \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$ یک تابع توزیع تجمعی است. (امیر کبیر ۸۸)

حل. برای اینکه تابع $F(x)$ یک تابع توزیع تجمعی باشد باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

۱. غیر نزولی

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{e^x(e^x+e^{-x}) - e^x(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^۲} = \frac{۲}{(e^x+e^{-x})^۲} > ۰$$

چون مشتق تابع مثبت است، پس تابع صعودی (غیر نزولی) است.

۲. $F(-\infty) = ۰, \quad F(\infty) = ۱$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} = ۱$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} = ۰$$

۳. از راست پیوسته

واضح است که تابع $F_X(x) = \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$ تابعی پیوسته است (زیرا $e^x + e^{-x} > ۰$). بنابراین از راست پیوسته نیز هست.

چون تابع $F_X(x) = \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$ همه ویژگی‌ها را داراست پس یک تابع توزیع تجمعی است.

۳.۳ میانگین متغیر تصادفی گسسته

میانگین متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x xp(X=x)$$

میانگین متغیر تصادفی X را با μ_X نیز نشان می‌دهند و گاهی آن را امید ریاضی X نیز می‌نامند.

مثال ۱.۳.۳. سکه ای سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم، اگر متغیر تصادفی X را تعداد شیرها در این دو پرتاب تعریف کنیم میانگین متغیر تصادفی X را بدست آورید.

حل. با توجه به تعریف، ابتدا باید تابع احتمال X را داشته باشیم. واضح است که

$X=x$	۰	۱	۲
$p(X=x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

از تعریف داریم:

$$\mathrm{E}(X)=\sum_x xp(X=x)=۰\times\frac{۱}{۴}+۱\times\frac{۱}{۲}+۲\times\frac{۱}{۴}=۱$$

۴.۳ میانگین تابعی از یک متغیر تصادفی گسسته

اگر X یک متغیر تصادفی باشد در این صورت $g(X)$ نیز به عنوان تابعی از X یک متغیر تصادفی خواهد بود. میانگین متغیر تصادفی $g(X)$ مشابه تعریف میانگین متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{E}(g(X))=\sum_x g(x)p(X=x)$$

مثال ۱.۴.۳. در مثال بالا، میانگین $g(X)=X^۲$ را بدست آورید.

حل. از تعریف داریم:

$$\mathrm{E}(X^۲)=\sum_x x^۲p(X=x)=۰^۲\times\frac{۱}{۴}+۱^۲\times\frac{۱}{۲}+۲^۲\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۵.۳ واریانس متغیر تصادفی گسسته

واریانس متغیر تصادفی X که بیان گر میانگین توان دوم انحراف از میانگین متغیر تصادفی X است به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X-\mu_X)^۲$$

واریانس متغیر تصادفی X را با $\sigma_X^۲$ نیز نشان می‌دهند. به سادگی می‌توان نشان داد که

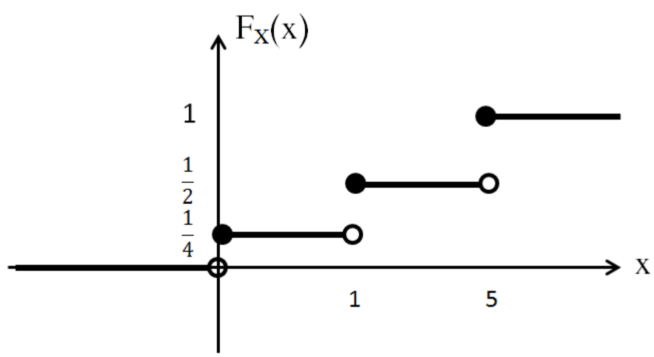
$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X-\mu_X)^۲=\mathrm{E}(X^۲)-\mathrm{E}^۲(X)$$

در مثال بالا داریم:

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^۲)-\mathrm{E}^۲(X)=\frac{۳}{۲}-(۱)^۲=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱.۵.۳. فرض کنید تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X برابر تابع زیر باشد، میانگین و واریانس X را بیابید. (امیرکبیر ۹۰)

$$F_X(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ \frac{۱}{۴} & ۰\leq x<۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۱\leq x<۵ \\ ۱ & ۵\leq x \end{cases}$$



از آنجایی که نمودار تابع توزیع به شکل پله ای است پس متغیر تصادفی X گسسته بوده و تنها مقادیر $x=۰,۱,۵$ را اختیار می‌کند (زیرا در این نقاط نمودار جهش دارد)، بنابراین داریم:

$$p(X=۰)=p(X\leq ۰)-p(X<۰)=F_X(۰)-F_X(۰^-)=\frac{۱}{۴}-۰=\frac{۱}{۴}$$

$$p(X=۱)=p(X\leq ۱)-p(X<۱)=F_X(۱)-F_X(۱^-)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$p(X=۵)=p(X\leq ۵)-p(X<۵)=F_X(۵)-F_X(۵^-)=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین داریم:

$X=x$	۰	۱	۵
$p(X=x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$

$$\mathrm{E}(X)=\sum_x xp(X=x)=۰\times\frac{۱}{۴}+۱\times\frac{۱}{۴}+۵\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۱}{۴}$$

$$\mathrm{E}(X^۲)=\sum_x x^۲p(X=x)=۰^۲\times\frac{۱}{۴}+۱^۲\times\frac{۱}{۴}+۵^۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵۱}{۴}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^۲)-\mathrm{E}^۲(X)=\frac{۵۱}{۴}-\frac{۱۱}{۴}=۱۰$$

۶.۳ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی گسسته

گاهی اوقات محاسبه میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی با استفاده از تعاریف آن‌ها مشکل است، در این مواقع می‌توان از تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X کمک گرفت.

تعریف ۱.۶.۳. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} p(X = x)$$

همان‌طور که از نام این تابع پیداست، در واقع این تابع، گشتاورهای متغیر تصادفی X را می‌تواند به صورت زیر تولید کند.

$$\mathrm{E}(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=۰}$$

یعنی برای محاسبه $\mathrm{E}(X^k)$ کافی است k بار نسبت به t از تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X مشتق بگیریم و در آخر t را با مقدار صفر جایگزین کنیم.

مثال ۲.۶.۳. متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f_X(x) = \frac{۱}{۲}^x,\ x = ۱, ۲, \dots$ است.

الف) تابع توزیع تجمعی X را محاسبه کنید.

ب) تابع مولد گشتاور X را تعیین کنید.

ج) میانگین، واریانس و انحراف معیار X را محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۸)

حل. الف)

$$f(x) = p(X = x) = \begin{cases} (\frac{۱}{۲})^x & x = ۱, ۲, \dots \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{t \le x} p(X = t) = \sum_{t=۱}^{x} (\frac{۱}{۲})^t$$

می‌دانیم که تابع توزیع روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود (دامنه آن $\mathbb{R}$ است) و باید برای تمامی مقادیر $\mathbb{R}$ مقادیر تابع مشخص شده باشد ابتدا ما تابع را زمانی که $x = ۱, ۲, \dots$ است محاسبه می‌کنیم.

$$= \sum_{t=۱}^{x} (\frac{۱}{۲})^t = ۱ - (\frac{۱}{۲})^x \quad x = ۱, ۲, \dots$$

$$F(x) = \begin{cases} ۱ - (\frac{۱}{۲})^{[x]} & x \ge ۱ \\ ۰ & x < ۱ \end{cases}$$

توجه داشته باشید که تابع احتمال تنها در حالتی که $x = ۱, ۲, \dots$ نا صفر است.

ب)

$$M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tx})=\sum_{x=۱}^{\infty}e^{tx}(\frac{۱}{۲})^x=\sum_{x=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۲}e^t)^x=\frac{\frac{۱}{۲}e^t}{۱-\frac{۱}{۲}e^t}=\frac{e^t}{۲-e^t}$$

می‌دانیم برای اینکه سری فوق همگرا باشد باید $|\frac{۱}{۲}e^t|<۱$

$$M_X(t)=\frac{e^t}{۲-e^t}\qquad t<\ln ۲$$

ج) می‌دانیم

$$\mathrm{E}(X^k)=\frac{d^kM_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=۰}\qquad k=۱,۲,\dots$$
$$\mathrm{E}(X)=\frac{d}{dt}(\frac{e^t}{۲-e^t})\Big|_{t=۰}=\frac{e^t(۲-e^t)+e^{۲t}}{(۲-e^t)^۲}\Big|_{t=۰}=\frac{۲}{(۲-e^۰)^۲}=۲$$
$$\mathrm{E}(X^۲)=\frac{d^۲M_X(t)}{dt^۲}\Big|_{t=۰}=\frac{d}{dt}(\frac{۲e^t}{(۲-e^t)^۲})\Big|_{t=۰}=\frac{۲e^t(۲-e^t)^۲+۴e^{۲t}(۲-e^t)}{(۲-e^t)^۴}\Big|_{t=۰}=۶$$
$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^۲)-\mathrm{E}^۲(X)=۶-۴=۲$$

انحراف معیار آن برابر با جذر واریانس یعنی $\sqrt{۲}$ است.

تمرین ۳.۶.۳. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $M(t)=(\frac{۱}{۳}e^t+\frac{۲}{۳})^m$ می‌باشد. مقدار $\mathrm{E}(X(X-۱))$ کدام است؟ (مدیریت نساجی ۸۶)

۱) $\frac{m}{۹}$ ۲) $\frac{m(m+۱)}{۹}$ ۳) $m(m-۱)$ ۴) $\frac{m(m-۱)}{۹}$

حل.

$$\mathrm{E}(X)=\frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=۰}=\frac{m}{۳}e^t(\frac{e^t}{۳}+\frac{۲}{۳})^{m-۱}\Big|_{t=۰}=\frac{m}{۳}$$
$$\mathrm{E}(X^۲)=\frac{d^۲M_X(t)}{dt^۲}\Big|_{t=۰}=\frac{m}{۳}e^t(\frac{e^t}{۳}+\frac{۲}{۳})^{m-۱}+\frac{۱}{۹}m(m-۱)e^{۲t}(\frac{e^t}{۳}+\frac{۲}{۳})^{m-۲}\Big|_{t=۰}$$
$$=\frac{m}{۳}+\frac{m(m-۱)}{۹}$$
$$\mathrm{E}(X(X-۱))=\mathrm{E}(X^۲-X)=\mathrm{E}(X^۲)-\mathrm{E}(X)=\frac{m}{۳}+\frac{m(m-۱)}{۹}-\frac{m}{۳}=\frac{m(m-۱)}{۹}$$

مثال ۴.۶.۳. متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع مولد گشتاوری به صورت $M_X(t)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}e^t+\frac{۱}{۳}e^{-t}$ است. (امیرکبیر ۸۸)

الف) تابع احتمال X را تعیین کنید.

ب) تابع توزیع $(F_X(x))$ را تعیین کنید.

حل. الف) با استفاده از تعریف تابع مولد گشتاور داریم:

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} p(X = x) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}e^t + \frac{۱}{۳}e^{-t}$$

با استفاده از تساوی دو رابطه داریم:

$$M_X(t) = e^{۰\times t} \times \frac{۱}{۲} + e^{۱\times t} \times \frac{۱}{۶} + e^{-۱\times t} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}e^t + \frac{۱}{۳}e^{-t}$$

بنابراین متغیر تصادفی X فقط مقادیر $x = ۰, -۱, ۱$ را اختیار می‌کند که مقادیر احتمال آن‌ها از تعریف بالا به صورت زیر به دست می‌آید.

$$p(X = ۰) = \frac{۱}{۲}, \quad p(X = -۱) = \frac{۱}{۳}, \quad p(X = ۱) = \frac{۱}{۶}$$

ب) با استفاده از تعریف تابع توزیع داریم:

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{t \le x} p(X = t) = \begin{cases} ۰ & x < -۱ \\ \frac{۱}{۳} & -۱ \le x < ۰ \\ \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۶} & ۰ \le x < ۱ \\ \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۱ & x \ge ۱ \end{cases}$$

مثال ۵.۶.۳. اگر X دارای تابع احتمال $x = ۱, ۲, \ldots, m$ و $f(x) = \frac{۱}{m}$ باشد، تابع مولد گشتاور آن کدام است؟ (مهندس نساجی ۸۸)

۱) $\frac{۱-e^{mt}}{۱-e^t}$ ۲) $\frac{e^t(۱-e^{mt})}{m(۱-e^t)}$ ۳) $\frac{e^t(۱-e^{mt})}{۱-e^t}$ ۴) $\frac{e^t(۱-e^{mt})}{m}$

حل.

$$M(t) = \mathrm{E}(e^{tx}) = \sum_{x=۱}^{m} e^{tx}\frac{۱}{m} = \frac{۱}{m}\sum_{x=۱}^{m}(e^t)^x = \frac{۱}{m}\frac{e^t(۱-e^{mt})}{۱-e^t}$$

مثال ۶.۶.۳. اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد که فقط برای اعداد صحیح نامنفی تعریف شده باشد و تابع مولد گشتاور آن به صورت $M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - ۱))$ باشد، تابع مولد گشتاور $Y = X - \lambda$ کدام است؟ (مهندسی نساجی ۸۸)

۱) $\exp(\lambda(e^t - t - ۱))$ ۲) $\exp(\lambda(e^t - ۱))$

۳) $\exp(\lambda t + \frac{۱}{۲}t^۲)$ ۴) $\exp(\lambda(e^t - \lambda))$

حل.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathrm{E}(e^{tY}) = \mathrm{E}(e^{t(X-\lambda)}) = \mathrm{E}(e^{-\lambda t + tX}) \\ &= e^{-\lambda t}\,\mathrm{E}(e^{tx}) = e^{-\lambda t} M_X(t) \\ &= e^{-\lambda t}\exp\left[\lambda(e^t - ۱)\right] \end{aligned}$$

تمرین ۳.۶.۷. اگر X دارای توزیع یکنواخت روی مجموعه $\{۱,۲,\dots,n\}$ با تابع احتمال زیر باشد. $\mathrm{E}(X)$ را محاسبه نمایید. (مهندسی سیستم ۸۴)

$$f(x)=\frac{۱}{n} \qquad x=۱,۲,\dots,n$$

۱) $n+۱$ ۲) $\frac{n+۱}{۲}$ ۳) $\frac{n+۱}{n}$ ۴) $\frac{(n-۱)^۲}{۱۲}$

تمرین ۳.۶.۸. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $M(t)=\frac{۱}{۱-t},\ t<۱$ می‌باشد، مقدار $\mathrm{E}(X(x-۱))$ کدام است؟ (مهندسی نساجی)
۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

تمرین ۳.۶.۹. فرض کنید برای متغیر تصادفی گسسته X داشته باشیم $\mathrm{E}(X(X-۴))=۵$ و $\mathrm{E}(X)=۲$. واریانس $-۴X+۱۲$ را حساب کنید. (معدن ۸۷)
۱) ۲۵۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

تمرین ۳.۶.۱۰. اگر X دارای تابع احتمال

$$f(x)=-\frac{q^x}{x\ln p}, \quad x=۱,۲,\dots \quad q=۱-p,\ p\in(۰,۱)$$

باشد، در صورت وجود مقدار $\mathrm{E}(X)$ کدام است؟ (صنایع ۸۸)
۱) $\frac{q}{p\ln p}$ ۲) $-\frac{q}{p\ln p}$
۳) $-\frac{p}{q\ln p}$ ۴) وجود ندارد.

۳.۷ توزیع برنولی

آزمایش برنولی یک آزمایش تصادفی است که نتیجه آن تنها یکی از دو حالت شکست یا پیروزی می‌تواند باشد، مثل بازی شیر یا خط، آزمایش طبی که نتیجه آن مثبت یا منفی دارد و .... متغیر تصادفی برنولی روی یک آزمایش برنولی به صورت زیر تعریف می‌شود و با نماد $X\sim B(p)$ نشان داده می‌شود.

$$X=\begin{cases} ۱ & \text{اگر پیروزی اتفاق بیفتد} \\ ۰ & \text{اگر شکست اتفاق بیفتد} \end{cases}$$

تابع احتمال متغیر تصادفی برنولی به صورت زیر است.

$$p(X=۱)=p, \quad p(X=۰)=۱-p=q$$

نتیجه: اگر $X\sim B(p)$ باشد، آنگاه

۱. $\mathrm{E}(X)=p$

۲. $\mathrm{Var}(X)=pq$

۳. $M_X(t)=q+pe^t$

۸.۳ توزیع دوجمله ای

اگر یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p را n بار مستقل از هم انجام دهیم، متغیر تصادفی Y را تعداد پیروزی‌ها در این n بار آزمایش برنولی تعریف کنیم در این صورت متغیر تصادفی Y دارای توزیع دوجمله ای خواهد بود و آن را با نماد $Y \sim Bin(n,p)$ نشان می‌دهیم و تابع احتمال آن به صورت زیر است.

$$p(Y=y)=\begin{cases} \binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y} & y=0,1,2,\dots,n \quad 0<p<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

نتیجه: اگر $Y \sim Bin(n,p)$ باشد، آنگاه

۱. $\mathrm{E}(X)=np$

۲. $\mathrm{Var}(X)=npq$

۳. $M_X(t)=(q+pe^t)^n$

۱.۸.۳ رابطه بین توزیع برنولی و دو جمله ای

اگر $X_1,X_2,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با احتمال پیروزی p باشد، در این صورت متغیر تصادفی $Y=\sum_{i=1}^{n}$ دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و p خواهد بود.

مثال ۱.۸.۳. دانشجویی به ۱۰ سؤال چهار گزینه ای به صورت کاملاً تصادفی جواب می‌دهد. مطلوب است

الف) احتمال اینکه او به ۴ سؤال پاسخ درست دهد؟

ب) احتمال اینکه او حداقل به ۳ سؤال پاسخ درست دهد؟

ج) احتمال اینکه او حداکثر به ۴ سؤال پاسخ درست دهد؟

حل. با توجه به این که او یا به یک سؤال درست پاسخ می‌دهد یا درست پاسخ نمی‌دهد، پس پاسخ دادن تصادفی به سؤال چهار گزینه ای یک آزمایش برنولی است و چون این آزمایش ۱۰ بار مستقل از هم تکرار می‌شود پس دوجمله ای می‌شود، لذا داریم

Y: تعداد پاسخ‌های درست او در ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای

$$Y \sim Bin(10,\frac{1}{4}) \longrightarrow p(Y=y)=\binom{10}{y}(\frac{1}{4})^y(\frac{3}{4})^{10-y} \qquad y=0,1,\dots,10$$

الف)

$$p(Y=4)=\binom{10}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^{10-4}$$

ب)

$$p(Y \geq ۳) = ۱ - p(Y < ۳) = ۱ - \big[p(Y = ۰) + p(Y = ۱) + p(Y = ۲)\big]$$
$$= ۱ - \Big[\binom{۱۰}{۰}(\frac{۱}{۴})^{۰}(\frac{۳}{۴})^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱}(\frac{۱}{۴})^{۱}(\frac{۳}{۴})^{۹} + \binom{۱۰}{۲}(\frac{۱}{۴})^{۲}(\frac{۳}{۴})^{۸}\Big]$$

ج)

$$p(Y \leq ۳) = p(Y = ۰) + p(Y = ۱) + p(Y = ۲) + p(Y = ۳)$$
$$= \binom{۱۰}{۰}(\frac{۱}{۴})^{۰}(\frac{۳}{۴})^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱}(\frac{۱}{۴})^{۱}(\frac{۳}{۴})^{۹} + \binom{۱۰}{۲}(\frac{۱}{۴})^{۲}(\frac{۳}{۴})^{۸} + \binom{۱۰}{۳}(\frac{۱}{۴})^{۳}(\frac{۳}{۴})^{۷}$$

مثال ۲.۸.۳. فرض کنید X و Y به ترتیب دارای توزیع‌های دوجمله ای با پارامترهای $n = ۲$ و p و $n = ۴$ و p باشند، $X \sim Bin(۲, p)$ و $Y \sim Bin(۴, p)$. اگر $p(X \geq ۱) = \frac{۵}{۹}$ باشد، $p(Y \geq ۱)$ را محاسبه کنید. *(علم و صنعت ۸۷-۸۶)*

حل.

$$X \sim Bin(۲, p) \Rightarrow p(X = x) = \binom{۲}{x}p^{x}(۱ - p)^{۲-x} \qquad x = ۰, ۱, ۲$$

$$p(x \geq ۱) = \frac{۵}{۹} \Rightarrow p(x \geq ۱) = ۱ - p(X = ۰) = \frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow p(X = ۰) = \frac{۴}{۹} = \binom{۲}{۰}p^{۰}(۱ - p)^{۲} \Rightarrow (۱ - p)^{۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow p = \frac{۱}{۳}$$

$$p(Y \geq ۱) = ۱ - p(Y = ۰) = ۱ - \binom{۴}{۰}p^{۰}(۱ - p)^{۴} = ۱ - (\frac{۲}{۳})^{۴} = \frac{۶۵}{۸۱}$$

مثال ۳.۸.۳. تیراندازی با احتمال ۶۰ درصد تیرهای خود را به هدف می‌زند. احتمال اینکه از چهار تیری که این تیرانداز به هدف پرتاب می‌کند دقیقاً سه تیر به هدف بزند چقدر است؟ *(نساجی ۸۵)*

۱) $\frac{۹}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۹}{۶۲۵}$ ۴) $\frac{۲۱۶}{۶۲۵}$

حل. چون در هر پرتاب دو حالت وجود دارد یا تیر به هدف می‌خورد و یا به هدف نمی‌خورد پس در نتیجه یک آزمایش برنولی می‌باشد چون به تعداد $n = ۴$ تکرار می‌شود، لذا توزیع دوجمله ای است در نتیجه داریم $X \sim Bin(۴, ۰/۶)$.

$$p(X = ۳) = \binom{۴}{۳}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)^{۴-۳} = ۴^{۲} \times \frac{۶^{۳}}{۱۰^{۴}} = \frac{۲۱۶}{۶۲۵}$$

مثال ۴.۸.۳. اگر X دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای (n, p) باشد، مقدار عبارت زیر با کدام گزینه برابر است؟ *(صنایع ۸۹)*

$$p(X = ۲k) - p(X = ۲k + ۱) \qquad k = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

یا

$$p(\text{زوج } X) - p(\text{فرد } X)$$

۱) p^n ۲) $(۱-p)^n$ ۳) $(۱-۲p)^n$ ۴) صفر

حل.

$$\mathrm{E}((-۱)^X) = \sum_{x=۰}^{n}(-۱)^x f(x) = \sum_{\text{زوج } X} f(x) + \sum_{\text{فرد } X}(-f(x)) = p(\text{زوج } X) - p(\text{فرد } X)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((-۱)^X) &= \sum_{x=۰}^{n}(-۱)^x \binom{n}{x} p^x(۱-p)^{n-x} = \sum_{x=۰}^{n}\binom{n}{x}(-p)^x(۱-p)^{n-x}\\ &= (-p+۱-p)^n = (۱-۲p)^n\end{aligned}$$

(می‌دانیم $\sum_{x=۰}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x} = (a+b)^n$)

مثال ۵.۸.۳. فرض کنید X دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و θ به شکل زیر باشد.

$$f(x) = \binom{n}{k}\theta^x(۱-\theta)^{n-x}, \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots \quad \theta \in [۰, ۱]$$

مقدار $\mathrm{E}(X^۲ - X)$ کدام است؟ (مهندسی سیستم ۸۴)

۱) $n^۲\theta^۲$ ۲) $n(n-۱)\theta^۲$ ۳) $(n-۱)^۲\theta^۲$ ۴) $n(n+۱)\theta^۲$

حل.

$$\mathrm{E}(X^۲ - X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}^۲(X) - \mathrm{E}(X) \star$$

می‌دانیم

$$\mathrm{Var}(X) = n\theta(۱-\theta),\ \mathrm{E}(X) = n\theta$$

در نتیجه داریم:

$$\star = n\theta(۱-\theta) + n^۲\theta^۲ - n\theta = n(n-۱)\theta^۲$$

مثال ۶.۸.۳. دو تاس سالم را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک بار مجموع دو خال مشاهده شده برابر ۷ باشد کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۹)

۱) $۱-(\frac{۵}{۶})^۶$ ۲) $۱-(\frac{۱}{۶})^۶$ ۳) $(\frac{۱}{۶})^۶$ ۴) $(\frac{۵}{۶})^۶$

حل.

$$\text{احتمال مجموع هفت} = p\big((۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\big) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

در نتیجه توزیع مورد نظر توزیع دوجمله ای با $n = ۶$ و $p = \frac{۱}{۶}$ می‌باشد.

$$p(X \geq ۱) = ۱ - p(X < ۱) = ۱ - p(X = ۰) = ۱ - \binom{۶}{۰}(\frac{۱}{۶})^۰(\frac{۵}{۶})^۶ = ۱ - (\frac{۵}{۶})^۶$$

تمرین ۷.۸.۳. فرض کنید X دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و p باشد، $\mathrm{E}(\frac{۱}{۱+X})$ را حساب کنید.

تمرین ۸.۸.۳. در شش پرتاب مستقل یک تاس سالم، احتمال اینکه عدد ۳ لااقل یک بار ظاهر شود چقدر است؟ (مهندسی برق ۸۲)

۱) $(\frac{۵}{۶})^۶$ ۲) $۱-(\frac{۵}{۶})$ ۳) $۱-(\frac{۵}{۶})^۶$ ۴) $\frac{۱}{۶}+(\frac{۱}{۶})^۲+(\frac{۱}{۶})^۳+\cdots+(\frac{۱}{۶})^۶$

تمرین ۹.۸.۳. اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل بوده و X دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای $n=۱۰$ و $p=\frac{۱}{۴}$ و Y دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای $m=۲۰$ و $p=\frac{۱}{۴}$ باشند، آنگاه مقدار $p(X+Y>۲۸)$ کدام است؟ (نساجی ۸۳)

۱) $۳۱(\frac{۱}{۴})^{۳۰}$ ۲) $۹۱(\frac{۱}{۴})^{۳۰}$ ۳) $۹۱(\frac{۱}{۲})^{۳۰}$ ۴) $۳۱(\frac{۱}{۲})^{۳۰}$

تمرین ۱۰.۸.۳. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ نمونه‌هایی تصادفی از توزیعی با تابع احتمال $f(x)=\theta^x(۱-\theta)^{۱-x},\ x=۰,۱$ باشد، مقدار $\mathrm{E}\left[\sum_{i=۱}^n X_i\right]^۲$ کدام است؟ (صنایع ۸۶)

۱) $n\theta(۱-\theta)$ ۲) $n\theta(۱-\theta^n)^۲$ ۳) $n(\theta+\theta^۲+\cdots+\theta^n)$ ۴) $n\theta[۱+(n-۱)\theta]$

۹.۳ توزیع هندسی

اگر یک آزمایش برنولی را آنقدر تکرار کنیم تا به اولین پیروزی برسیم، در این صورت تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین پیروزی دارای توزیع هندسی خواهد بود که با نماد $X \sim Ge(p)$ نشان می‌دهیم که در آن p احتمال پیروزی آزمایش برنولی است و تابع احتمال این متغیر به صورت زیر است:

$$p(X=x)=\begin{cases} p(۱-p)^{x-۱} & x=۱,۲,\ldots \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به عنوان مثال اگر تاسی را آنقدر پرتاب کنیم تا خال ۶ ظاهر شود، تابع احتمال به صورت $p(X=x)=\frac{۱}{۶}(\frac{۵}{۶})^{x-۱},\ x=۱,۲,\ldots$ است.

نتیجه: اگر $X \sim Ge(p)$ آنگاه:

۱. $\mathrm{E}(X)=\frac{۱}{p}$

۲. $\mathrm{Var}(X)=\frac{۱-p}{p^۲}$

۳. $M_X(t)=\frac{pe^t}{۱-(۱-p)e^t};\quad t<-\ln(۱-p)$

۳.۱۰ توزیع دوجمله ای منفی

اگر یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p را آنقدر تکرار کنیم تا به r-امین پیروزی برسیم در این صورت تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به r-امین پیروزی دارای توزیع دوجمله ای منفی خواهد بود که با نماد $X \sim NB(r,p)$ نشان می‌دهیم و تابع احتمال آن به صورت زیر است.

$$p(X=x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & x = r, r+1, \dots \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به عنوان مثال در کنترل کیفیت محصولات یک کارخانه آنقدر از خط تولید آن نمونه می‌گیرند تا مثلاً به ۵ کالای معیوب برسند، هرچه تعداد نمونه‌ها بیشتر باشد بدیهی است کیفیت محصولات بهتر است.

۱.۳.۱۰ رابطه بین توزیع هندسی و دوجمله ای منفی

اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع هندسی با پارامتر p باشند، در این صورت متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$ دارای دوجمله ای منفی با پارامترهای r و p خواهد بود، یعنی:

$$Y = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim NB(r,p)$$

نتیجه: با استفاده از رابطه بین توزیع هندسی و دوجمله ای داریم:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1-p}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{\sum_{i=1}^{r} X_i}(t) = \mathrm{E}(e^{t\sum_{i=1}^{r} X_i}) = \mathrm{E}(e^{tX_1})\,\mathrm{E}(e^{tX_2}) \cdots \mathrm{E}(e^{tX_r}) = (M_X(t))^r \\ &= (\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t})^r \end{aligned}$$

مثال ۱.۱.۳.۱۰. اگر X دارای توزیع هندسی با احتمال موفقیت p باشد، اگر داشته باشیم $p(X=4) = \frac{1}{9} p(X=2)$ در این صورت $p(X \geq 3)$ را بیابید. (امیرکبیر ۸۷)

حل.

$$X \sim Ge(p) \longrightarrow p(X=x) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1, 2, \dots$$

$$p(X=4) = \frac{1}{9} p(X=2) \Rightarrow p(1-p)^{4-1} = \frac{1}{9} p(1-p)^{2-1}$$

$$(1-p)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow p = \frac{2}{3},\ p = -\frac{2}{3}$$ غیر قابل قبول

در نتیجه:

$$p(X = x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \quad x = 1, 2, \ldots$$

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X = 1) - p(X = 2) = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{1}{9}$$

مثال ۲.۱۰.۳. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی مشترک $f(t) = (\frac{1}{2})^t,\ t = 1, 2, \ldots$ باشند. در این صورت مقدار k را چنان بیابید که داشته باشیم $p(X \geq k, Y \geq 2k) = \frac{1}{16}$. (امیرکبیر ۸۸)

حل. از مستقل بودن X و Y داریم:

$$p(X \geq k, Y \geq 2k) = p(X \geq k)p(Y \geq 2k) = \Big(\sum_{x=k}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x\Big)\Big(\sum_{x=2k}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^y\Big)$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{(\frac{1}{2})^{2k}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k-2} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 3k - 2 = 4 \rightarrow k = 2$$

مثال ۳.۱۰.۳. احتمال اینکه معادله زیر جواب حقیقی داشته باشد چقدر است؟

$$x^2 + Ax + 4 = 0$$

که در آن A تعداد دفعاتی است که یک سکه سالم را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر بیاید. (مهندسی صنایع ۸۲)

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل.

$$\Delta = A^2 - 16 > 0 \rightarrow A \geq 4$$

چون a دارای توزیع هندسی با پارامتر $p = \frac{1}{2}$ است، پس داریم

$$p(A = a) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^a \qquad a = 1, 2, \ldots$$

$$p(A \geq 4) = \sum_{a=4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

مثال ۴.۱۰.۳. سکه سالمی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا دو نتیجه شیر به دست آید. احتمال اینکه تعداد پرتاب‌های لازم عددی زوج باشد را پیدا کنید. (مهندسی صنایع ۸۰)

حل. با توجه به اینکه یک آزمایش برنولی را آنقدر تکرار کرده‌ایم تا به دومین موفقیت دست یابیم پس از توزیع دوجمله ای منفی استفاده می‌کنیم.

$$p(X=x)=\binom{x-۱}{r-۱}p^r(۱-p)^{x-r} \qquad x=r,r+۱,\ldots$$

$$p=\frac{۱}{۲},\quad r=۲,\quad (x=۲k,\ k=۱,۲,\ldots)$$

$$\begin{aligned}
p(X=۲k;k=۱,۲,\ldots)&=\sum_{x=\text{زوج}}p(X=x)\\
&=\sum_{k=۱}^{\infty}\binom{۲k-۱}{۲-۱}(\frac{۱}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^{۲k-۲}=\sum_{k=۱}^{\infty}\binom{۲k-۱}{۱}(\frac{۱}{۲})^{۲k}\\
&=\frac{۱}{۴}\sum_{k=۱}^{\infty}(۲k-۱)(\frac{۱}{۴})^{k-۱}\\
&=\frac{۱}{۴}\sum_{k=۱}^{\infty}k(\frac{۱}{۴})^{k-۱}-\frac{۱}{۴}\sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۱}{۴})^{k-۱}\\
&=\frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}k(\frac{۱}{۴})^{k-۱}-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}}
\end{aligned}$$

برای به دست آوردن جواب سری $\sum_{k=۱}^{\infty}k(\frac{۱}{۴})^{k-۱}$ ابتدا در حالت کلی سری $\sum_{x=۱}^{\infty}x\theta^{x-۱}$ را به ازای $۰<\theta<۱$ حل می‌کنیم و در نهایت قرار می‌دهیم $\theta=\frac{۱}{۴}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{x=۱}^{\infty}x\theta^{x-۱}&=\sum_{x=۱}^{\infty}\frac{d\theta^x}{d\theta}=\frac{d(\sum_{x=۱}^{\infty}\theta^x)}{d\theta}=\frac{d(\frac{\theta}{۱-\theta})}{d\theta}\\
&=\frac{۱-\theta+\theta}{(۱-\theta)^۲}=\frac{۱}{(۱-\theta)^۲}
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty}k(\frac{۱}{۴})^{k-۱}=\frac{۱}{(۱-\frac{۱}{۴})^۲}=\frac{۱۶}{۹}$$

با جایگذاری داریم:

$$p(X=۲k;\ k=۱,۲,\ldots)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۶}{۹}-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۵}{۹}$$

مثال ۵.۱۰.۳. فرض کنید X دارای توزیع هندسی به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} pq^{x-1} & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ثابت کنید برای پارامترهای اختیاری K و M

$$p(X = n - 1 + K | X > n - 1) = p(X = K)$$

(خاصیت فقدان حافظه). (علم و صنعت ۸۵)

حل. با استفاده از احتمال شرطی داریم

$$\begin{aligned} p(X = n - 1 + K | X > n - 1) &= \frac{p(X = n - 1 + K, X > n - 1)}{p(X > n - 1)} \\ &= \frac{p(X = n - 1 + K)}{p(X > n - 1)} = \frac{pq^{n-2+K}}{\sum_{x=n}^{\infty} pq^{x-1}} = \frac{pq^{n-2+K}}{\frac{pq^{n-1}}{1-q}} \\ &= \frac{(1-q)q^{n-2+K}}{q^{n-1}} = (1-q)q^{K-1} = pq^{k-1} \\ &= p(X = K) \end{aligned}$$

تمرین ۶.۱۰.۳. ده درصد تولیدات یک تولیدی پوشاک معیوب است. احتمال اینکه در یک بازرسی از این تولیدات در چهارمین بازرسی اولین پوشاک معیوب بدست آید، چقدر است؟ (مهندسی مواد ۸۰)

۱) ۰/۰۶ ۲) ۰/۰۷۲۹ ۳) ۰/۰۸۲۹ ۴) ۰/۰۶۲۹

تمرین ۷.۱۰.۳. یک تاس سالم را آنقدر می‌اندازیم تا برای اولین بار خال شش بیاید. اگر X شماره انداخت‌ها (تعداد پرتاب‌ها) برای مشاهده اولین خال شش باشد، احتمال اینکه X مضرب سه باشد چقدر است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۱)

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۷۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲۷۵

تمرین ۸.۱۰.۳. احتمال اینکه در چهارمین پرتاب مستقل سه سکه سالم برای بار دوم هر سه نتیجه شیر یا هر سه نتیجه خط بیاید چقدر است؟ (مهندسی صنایع ۸۱)

۱) $\frac{3}{256}$ ۲) $\frac{9}{256}$ ۳) $\frac{27}{256}$ ۴) $\frac{81}{256}$

تمرین ۹.۱۰.۳. احتمال اینکه معادله $Ax^2 - 4x + A = 0$ دو ریشه غیر منفی داشته باشد چقدر است که در آن A تعداد دفعاتی است که یک سکه سالم را پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر بیاید. (مهندسی کامپیوتر ۸۳)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۳.۱۱ توزیع پوآسن

هر گاه متغیر تصادفی X را تعداد اتفاقات در یک بازه زمانی یا مکانی مشخص (دارای شرایط خاص) تعریف کنیم، به عنوان مثال تعداد تصادفات رانندگی در محدوده زمانی و مکانی مشخص یا تعداد زدگی های یک توپ پارچه و ...، در این صورت متغیر X دارای توزیع پوآسن است که با نماد $X \sim P(\lambda)$ نشان می‌دهیم که در آن λ میانگین تعداد اتفاقات در آن بازه می‌باشد.

نتیجه: اگر $X \sim P(\lambda)$ باشد، آنگاه

۱. $$p(X=x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = ۰, ۱, ۲, \ldots \quad \lambda > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

۲. $\mathrm{E}(X) = \lambda$

۳. $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

۴. $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - ۱)}$

مثال ۳.۱۱.۱. فرض کنید تعداد غلط‌های املایی در یک صفحه از کتاب دارای توزیع پوآسن با میانگین ۲ غلط در هر صفحه باشد. احتمال اینکه در یک صفحه بیش از یک غلط املایی وجود داشته باشد چقدر است؟

حل. اگر تعریف کنیم X: تعداد غلط‌های املایی در صفحه

$$\mathrm{E}(X) = \lambda = ۲ \rightarrow p(X=x) = \frac{e^{-۲}۲^x}{x!} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

$$p(X > ۱) = ۱ - p(X \leq ۱) = ۱ - \frac{e^{-۲}۲^۰}{۰!} - \frac{e^{-۲}۲^۱}{۱!} = ۱ - ۳e^{-۲}$$

نکته: اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پوآسن با پارامتر λ باشد، در این صورت متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=۱}^n X_i$ نیز دارای توزیع پوآسن با پارامتر $n\lambda$ خواهد بود.

۳.۱۱.۱ تقریب توزیع دوجمله‌ای با استفاده از توزیع پوآسن

اگر در توزیع دوجمله ای مقدار p کوچک و مقدار n به اندازه‌کافی بزرگ باشد، در این صورت می‌توان احتمال‌های توزیع دوجمله ای را با استفاده از توزیع پوآسن تقریب زد که در آن $\lambda = np$ است.

مثال ۳.۱۱.۲. فرض کنید در یک چهار راه شلوغ، احتمال تصادف برای هر ماشین ثابت و برابر ۰٫۰۰۱ باشد. با فرض این که در ساعت ۴ تا ۶ بعد از ظهر تعداد ۱۰۰۰ ماشین از این چهار راه عبور کنند، احتمال اینکه در این فاصله زمانی ۲ تصادف یا بیشتر رخ دهد چقدر است؟

حل. فرض کنید X تعداد تصادفات در فاصله زمانی مذکور در این چهار راه باشد. می‌توان فرض کرد که هر ماشین عبوری از این چهار راه یک آزمایش برنولی است که با شانس $\frac{1}{1000}$ تصادف می‌کند، پس برای ۱۰۰۰ بار تکرار این آزمایش داریم $X \sim Bin(1000, 0{,}001)$. لذا، مطلوب مسئله عبارت است از:

$$\begin{aligned} p(X \geq 2) &= 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) \\ &= 1 - \binom{1000}{0}\left(\frac{1}{1000}\right)^0\left(\frac{999}{1000}\right)^{1000} - \binom{1000}{1}\left(\frac{1}{1000}\right)^1\left(\frac{999}{1000}\right)^{999} \\ &= 0{,}2661 \end{aligned}$$

اما در اینجا چون $p = \frac{1}{1000}$ خیلی کوچک است، می‌توان از تقریب پوآسن استفاده کرد چون $\lambda = np = 1000 \times \frac{1}{1000} = 1$، لذا داریم:

$$p(X = x) = \frac{e^{-1}1^x}{x!} = \frac{e^{-1}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \frac{e^{-1}}{0!} - \frac{e^{-1}}{1!} = 1 - 2e^{-1} = 0{,}2642$$

که بسیار نزدیک به مقدار واقعی ۰٫۲۶۶۱ است.

فرض کنید تعداد زدگی های یک نوع پارچه دارای توزیع پوآسن با تعداد متوسط ۴ زدگی در هر متر مربع باشد. مطلوب است محاسبه احتمال‌های زیر:

الف) احتمال اینکه در هر متر مربع دقیقاً ۶ زدگی وجود داشته باشد.

ب) احتمال اینکه در هر ۲ متر مربع حداقل ۳ زدگی وجود داشته باشد.

ج) احتمال اینکه در هر نیم متر مربع حداقل ۴ زدگی وجود داشته باشد.

حل. در اینجا $\lambda = 4$ داده شده است.

الف)

$$p(X = 6) = \frac{e^{-6}4^6}{6!} = 0{,}104$$

ب)

متر مربع	زدگی	
۱	۴	
۲	$\lambda = ?$	$\longrightarrow \lambda = 8$

$$\begin{aligned} p(X \geq 3) &= 1 - p(X < 3) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) - p(X = 2) \\ & 1 - \frac{e^{-8}8^0}{0!} - \frac{e^{-8}8^1}{1!} - \frac{e^{-8}8^2}{2!} = 0{,}9862 \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{array}{ccc} \text{متر مربع} & \text{زدگی} & \\ ۱ & ۴ & \\ ۰/۵ & \lambda=? & \longrightarrow \lambda=۲ \end{array}$$

$$p(X \geq ۴) = ۱ - p(X \leq ۳) = ۱ - \frac{e^{-۲}۲^{۰}}{۰!} - \frac{e^{-۲}۲^{۱}}{۱!} - \frac{e^{-۲}۲^{۲}}{۲!} - \frac{e^{-۲}۲^{۳}}{۳!} = ۰/۱۴۲۹$$

مثال ۳.۱۱.۳. در یک فروشگاه به طور متوسط در هر ساعت ۳۰ مشتری وارد فروشگاه می‌شود.

الف) احتمال اینکه در عرض ۴ دقیقه حداکثر ۲ یا حداقل ۴ مشتری وارد فروشگاه شود چقدر است؟

ب) احتمال اینکه زمان بین ورود دو مشتری متوالی حداقل ۵ دقیقه طول بکشد چقدر است؟ (آزاد- جنوب ۸۷-۸۸)

حل. متغیر تصادفی X را برابر با تعداد مشتری‌های وارد شده به فروشگاه در ۴ دقیقه در نظر می‌گیریم، چون در هر ساعت به طور متوسط ۳۰ مشتری وارد می‌شود، منطقی است که در هر ۴ دقیقه به طور متوسط ۲ مشتری وارد شود. با استفاده از تناسب داریم:

$$\begin{array}{ccc} \text{مشتری} & \text{دقیقه} & \\ ۳۰ & ۶۰ & \\ \lambda & ۴ & \Rightarrow \lambda = ۲ \Longrightarrow X \sim P(۲) \end{array}$$

الف)

$$\begin{aligned} p(X \leq ۲ \cup X \geq ۴) &= p(X \leq ۲) + p(X \geq ۴) - p(X \leq ۲ \cap X \geq ۴) \\ &= p(X \leq ۲) + p(X \geq ۴) - ۰ \\ &= p(X \leq ۲) + ۱ - p(X < ۴) \\ &= p(X \leq ۲) + ۱ - p(X \leq ۳) \\ &= p(X = ۰) + p(X = ۱) + p(X = ۲) + ۱ \\ &\quad - p(X = ۰) - p(X = ۱) - p(X = ۲) - p(X = ۳) \\ &= ۱ - p(X = ۳) = ۱ - \frac{e^{-۲}۲^{۳}}{۳!} = ۱ - \frac{۴e^{-۲}}{۳} \end{aligned}$$

ب) به طور متوسط در ۵ دقیقه ۲/۵ نفر وارد فروشگاه می‌شود.

$$\begin{array}{ccc} \text{نفر} & \text{دقیقه} & \\ ۳۰ & ۶۰ & \\ \lambda' & ۵ & \Rightarrow \lambda' = ۲/۵ \Longrightarrow Y \sim P(۲/۵) \end{array}$$

$$p(Y = ۰) = \frac{e^{-۲/۵}(۲/۵)^{۰}}{۰!} = e^{-۲/۵}$$

مثال ۴.۱۱.۳. در یک بانک سه کارمند به طور متوسط در هر دقیقه ۱، ۲ و ۲ مشتری دارند که به طور مستقل به آن‌ها مراجعه می‌کنند و انها نیز توانایی پاسخگویی حداکثر به تعداد متوسط مشتریان مراجعه کننده خود را در هر دقیقه دارند. *(علم و صنعت ۸۵-۸۶)*

الف) احتمال اینکه حداکثر تا ۲ دقیقه پس از شروع به کار بانک، هر ۳ کارمند بیکار باشند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه در یک دقیقه اول پس از شروع به کار بانک، در باجه های هر سه کارمند صف ایجاد شود چقدر است؟

حل. الف) توزیع مراجعه به کارمندان در یک دقیقه دارای توزیع پوآسن با پارامترهای ۱، ۲ و ۲ است و در دو دقیقه دارای توزیع پوآسن به ترتیب با پارامترهای ۲، ۴ و ۴ هستند، پس:

$$X_1 \sim P(2), \qquad X_2 \sim P(4) \qquad X_3 \sim P(4)$$

$$\begin{aligned} p(\text{هر سه کارمند بیکار باشند}) &= p(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) \\ &\overset{\text{ها مستقل}X_i}{=\!=\!=} p(X_1 = 0)p(X_2 = 0)p(X_3 = 0) \\ &= \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^0 e^{-4}}{0!} \\ &= \theta^{-2} + 2e^{-4} \end{aligned}$$

ب) Y_i را تعداد مشتری‌ها در هر دقیقه در نظر می‌گیریم که به طور متوسط دارای توزیع پوآسن با پارامترهای ۱،۲ و ۲ می‌باشد.
هر کارمند بیشتر از تعداد متوسط مشتریانش، مشتری داشته باشد: $Y_1 > 1, Y_2 > 2, Y_3 > 2$

$$\begin{aligned} p(Y_1 > 1, Y_2 > 2, Y_3 > 2) &\overset{\text{ها مستقل}Y_i}{=\!=\!=} p(Y_1 > 1)p(Y_2 > 2)p(Y_3 > 2) \\ &= \big(1 - p(Y_1 = 0) - p(Y_1 = 1)\big)\big(1 - p(Y_2 = 0) \\ &\quad - p(Y_2 = 1) - p(Y_2 = 2)\big)\big(1 - p(Y_3 = 0) \\ &\quad - p(Y_3 = 1) - p(Y_3 = 2)\big) = (1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} \\ &\quad - \frac{e^{-1}1^1}{1!})(1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!} - \frac{e^{-2}2^1}{1!} - \frac{e^{-2}2^2}{2!})^2 \\ &= (1 - 2e^{-1})(1 - 5e^{-2})^2 \end{aligned}$$

مثال ۵.۱۱.۳. فرض کنید احتمال خرید کالای معینی از فروشگاه برابر ۰٫۰۱ باشد. اگر تعداد مشتریان این فروشگاه به طور متوسط ۳۰۰ نفر باشند، احتمال اینکه فروشنده در یک روز ۳ تا از کالای فوق را بفروشد چقدر است؟ *(مهندسی صنایع ۸۶)*

۱) $\frac{2}{9}e^{-3}$ ۲) $\frac{2}{27}e^{-3}$ ۳) $\frac{9}{2}e^{-3}$ ۴) $\frac{27}{2}e^{-3}$

حل. در اینجا چون $p = ۰/۰۱$ کوچک و $n = ۳۰۰$ بزرگ است، پس می‌توان توزیع دوجمله ای را با توزیع پوآسن با پارامتر $\lambda = np$ تقریب زد. یعنی داریم:

$$X \sim P(۳۰۰ \times ۰/۰۱)$$

$$p(X = ۳) = \frac{e^{-۳}۳^۳}{۳!} = \frac{۹}{۲}e^{-۳}$$

مثال ۶.۱۱.۳. اگر $X_۱, X_۲, X_۳$ یک نمونه تصادفی از توزیع پوآسن با نرخ وقوع $\lambda = ۲$ در هر ساعت باشد، مقدار $p(\bar{X} < \frac{۱}{۳})$ چقدر است؟ *(مهندسی صنایع ۸۷)*

۱) $۶e^{-۲}$ ۲) $e^{-۶}$ ۳) $۶e^{-۶}$ ۴) $۷e^{-۶}$

حل.

$$p(\bar{X} < \frac{۱}{۳}) = p(\frac{۱}{۳}\sum_{i=۱}^{۳} X_i < \frac{۱}{۳}) = p(\sum_{i=۱}^{۳} X_i < ۱)$$

چون مجموع n متغیر تصادفی پوآسن مستقل، توزیع پوآسن با پارامتر $n\lambda$ می‌باشد، پس داریم: $Y = \sum_{i=۱}^{۳} X_i \sim P(۲ \times ۳)$

$$p(\sum_{i=۱}^{۳} X_i < ۱) = p(\sum_{i=۱}^{۳} X_i = ۰) = p(Y = ۰) = \frac{e^{-۶}۶^۰}{۰!} = e^{-۶}$$

تمرین ۷.۱۱.۳. فرض کنید ۱٪ لامپ‌های تولید شده در یک کارخانه معیوب باشند. مطلوب است احتمال اینکه از ۲۰۰ لامپ انتخاب شده:

الف) ۳ لامپ معیوب باشد چقدر است؟

ب) حداقل ۶ لامپ معیوب باشد چقدر است؟ *(امیرکبیر ۸۵-۸۴)*

تمرین ۸.۱۱.۳. متوسط تعداد تصادف در یک چهارراه در طول یک ماه، ۴ تصادف گزارش شده است.

الف) احتمال این که در طول یک هفته، هیچ گونه تصادفی در این چهار راه رخ ندهد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه یک تصادف در طول هفته در این چهار راه رخ دهد چیست؟

ج) اگر تعداد تصادفات در طول یک هفته در این چهار راه را با X نشان دهیم، تابع احتمال X را تعیین و به کمک تابع مولد گشتاور، میانگین و واریانس آن را محاسبه کنید. *(امیرکبیر ۸۶)*

تمرین ۹.۱۱.۳. متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $f(x) = \frac{e^{-۳}۳^x}{x!},\ x = ۰, ۱, \ldots$ است. مقدار $\mathrm{E}(۵^X)$ را بدست آورید. *(مهندسی نساجی ۸۷)*

۱) $e^۳$ ۲) $e^۵$ ۳) $e^{۱۲}$ ۴) $e^{۱۵}$

تمرین ۳.۱۱.۱۰. تعداد لکه های رنگ موجود در هر متر پارچه خاص، متغیر تصادفی پوآسن با میانگین ۱ است. چهار قطعه یک متری برش می‌دهیم، احتمال اینکه هیچ قطعه ای بیش از یک لکه نداشته باشد چقدر است؟ (مهندسی نساجی ۸۵)
۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۲۹

فصل ۴

متغیرهای تصادفی پیوسته

۱.۴ متغیر تصادفی پیوسته

هرگاه مقادیری که متغیر تصادفی X اختیار می‌کند غیر شمارا باشد، X را یک متغیر تصادفی پیوسته گوییم. به عنوان مثال انتخاب عدد تصادفی در بازه $(0, 1)$. برخلاف متغیرهای تصادفی گسسته، احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته مقدار ثابتی مانند x_0 را اختیار کند برابر صفر است یعنی $p(X = x_0) = 0$. مثلاً واضح است که در انتخاب عدد تصادفی در بازه $(0, 1)$ احتمال عدد $\frac{1}{2}$ برابر صفر است.

گوییم تابع $f(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X است، هرگاه

۱. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

برای متغیر تصادفی پیوسته داریم:

$$p(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

اگر مجموعه $A = \{a \leq X \leq b\}$ آنگاه داریم

$$p(a \leq X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X \leq b) = p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

مثال ۱.۱.۴. آیا تابع زیر می‌تواند یک تابع چگالی احتمال باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حل. اولاً به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \geq 0$ ثانیاً

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 1dx + \int_1^{+\infty} 0dx = 1$$

بنابراین $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال است.

مثال ۲.۱.۴. در مثال بالا مطلوب است محاسبه احتمال‌های زیر:

الف) $p(X > \frac{۱}{۳})$

ب) $p(\frac{۱}{۳} < X < \frac{۱}{۲})$

حل. الف)

$$p(X > \frac{۱}{۳}) = \int_{\frac{۱}{۳}}^{۱} ۱dx = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

ب)

$$\int_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

۱.۱.۴ رابطه بین تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f و تابع توزیع F باشد، در این صورت اگر تابع چگالی را داشته باشیم، تابع توزیع از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

ولی اگر تابع توزیع را داشته باشیم تابع چگالی از رابطه

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

به دست می‌آید.

مثال ۳.۱.۴. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است. تابع توزیع تجمعی آن را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > ۰ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

حل. با استفاده از تعریف بالا داریم:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} ۰ & x \leq ۰ \\ ۱ - e^{-x} & x > ۰ \end{cases}$$

زیرا اگر $x \leq ۰$ آنگاه $f(t) = ۰$ و اگر $x > ۰$ باشد، داریم:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{۰} ۰dt + \int_{۰}^{x} e^{-t}dt = ۰ - e^{-t}\Big|_{۰}^{x} = ۱ - e^{-x}$$

مثال ۴.۱.۴. تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

$$F(x) = \begin{cases} 1-(1+x)e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال X را بدست آورید.

حل. چون تابع توزیع را داریم، کافی است از آن مشتق بگیریم.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

۲.۱.۴ میانگین متغیر تصادفی پیوسته

میانگین متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

مثال ۵.۱.۴. فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

میانگین (امید ریاضی) متغیر تصادفی X را بدست آورید.

حل. طبق تعریف بالا داریم:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

۳.۱.۴ میانگین تابعی از متغیر تصادفی پیوسته

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، واضح است که $g(X)$ نیز چون تابعی از یک متغیر تصادفی است، یک متغیر تصادفی خواهد بود. میانگین این متغیر تصادفی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

مثال ۶.۱.۴. در مثال قبل میانگین متغیر تصادفی X^2 را بدست آورید.

حل.

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

۴.۱.۴ واریانس متغیر تصادفی پیوسته

مشابه واریانس متغیر تصادفی گسسته، واریانس متغیر تصادفی پیوسته نیز از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X-\mu)^{۲} = \mathrm{E}(X^{۲}) - \mathrm{E}^{۲}(X)$$

مثال ۷.۱.۴. واریانس متغیر تصادفی X را در مثال ۵.۱.۴ بدست آورید.

حل. با توجه به مثال قبل و رابطه بالا داریم:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^{۲}) - \mathrm{E}^{۲}(X) = \frac{۱}{۳} - (\frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

۵.۱.۴ تابع مولد گشتاور متغیرهای تصادفی پیوسته

تابع مولد گشتاور برای متغیرهای تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M_x(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(x)dx$$

و همچنین مشابه حالت گسسته داریم:

$$\mathrm{E}(X^k) = \frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=۰} \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

مثال ۸.۱.۴. تابع چگالی متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی را بدست آورده و با استفاده از آن میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را محاسبه کنید.

حل. طبق تعریف داریم:

$$\begin{aligned} M_x(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(x)dx = \int_{۰}^{+\infty} e^{tX} e^{-X} dx \\ &= \int_{۰}^{+\infty} e^{-(۱-t)x} dx = \frac{-۱}{۱-t} e^{-(۱-t)x}\Big|_{۰}^{\infty} = \frac{۱}{۱-t} \qquad t < ۱ \end{aligned}$$

برای اینکه انتگرال بالا همگرا باشد باید $۱ - t > ۰$ باشد.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{d(\frac{۱}{۱-t})}{dt} = \frac{۱}{(۱-t)^{۲}}\Big|_{t=۰} = ۱$$

$$\mathrm{E}(X^{۲}) = \frac{d^{۲}M_X(t)}{dt^{۲}} = \frac{d(\frac{۱}{(۱-t)^{۲}})}{dt} = \frac{۲}{(۱-t)^{۳}}\Big|_{t=۰} = ۲$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^{۲}) - \mathrm{E}^{۲}(X) = ۲ - (۱)^{۲} = ۱$$

مثال ۹.۱.۴. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-ax} & x \geq ۰ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

که در آن پارامتر a عددی ثابت و مثبت است، داده شده است.

الف) ثابت k را بدست آورید.

ب) میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۹)

حل. الف) تابع چگالی دارای دو خاصیت است، در نتیجه داریم:

.۱

$$f_X(x) \geq ۰ \Rightarrow k \geq ۰$$

.۲

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{۰} ۰\, dx + \int_{۰}^{+\infty} ke^{-ax}dx = ۱$$

$$\Rightarrow k \times \frac{-۱}{a}e^{-ax}\Big|_{۰}^{\infty} = ۱ \Rightarrow \frac{-k}{a}e^{-a\infty} - \frac{-k}{a}e^{۰} = ۱$$

$$a > ۰ \Rightarrow ۰ + \frac{k}{a} = ۱ \Rightarrow k = a$$

ب)

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{+\infty} axe^{-ax}dx + \int_{-\infty}^{۰} x \times ۰\, dx = \int_{۰}^{+\infty} a \times e^{-ax}dx$$

از روش جزء به جزء این انتگرال را حساب می‌کنیم.

$$ax = u \to adx = du$$

$$e^{-ax}dx = dv \Rightarrow v = \frac{-۱}{a}e^{-ax}$$

$$\int_{۰}^{\infty} axe^{-ax}dx = -xe^{-ax}\Big|_{۰}^{\infty} - \int_{۰}^{\infty} -e^{-ax}dx$$

$$= ۰ + \int_{۰}^{\infty} e^{-ax}dx = \frac{-۱}{a}e^{-ax}\Big|_{۰}^{\infty} = \frac{۱}{a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^۲) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^۲ f(x)dx = \int_{-\infty}^{۰} ۰ \times x^۲ dx + \int_{۰}^{+\infty} x^۲ a e^{-ax} dx \\ &= \int_{۰}^{+\infty} x^۲ a e^{-ax} dx\end{aligned}$$

با استفاده از جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}& a e^{-ax}dx = dv \Rightarrow v = -e^{-ax} \\ & u = x^۲ \Rightarrow du = ۲x dx\end{aligned}$$

$$= -x^۲ e^{-ax}\Big|_{۰}^{\infty} - \int_{۰}^{\infty} -۲x e^{-ax} dx = ۲\int_{۰}^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{۲}{a^۲}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) = \frac{۲}{a^۲} - \frac{۱}{a^۲} = \frac{۱}{a^۲}$$

مثال ۴.۱.۱۰. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} kx(۲-x) & ۰ \le x \le ۲ \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) k را محاسبه کنید.

ب) اگر $M_۰$ مد توزیع باشد، $p(X < M_۰)$ را بدست آورید.

ج) اگر m میانه توزیع باشد، $p(\frac{۱}{۲} < X < \frac{m}{۲})$ را بدست آورید. (علم و صنعت ۸۶-۸۵)

حل. الف) از خواص تابع چگالی احتمال داریم:

۱.

$$f_X(x) \ge ۰ \Rightarrow k \ge ۰$$

۲.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{۰} ۰ dx + \int_{۲}^{+\infty} ۰ dx + \int_{۰}^{۲} kx(۲-x)dx = ۱$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{۲} kx(۲-x)dx = ۱ \Rightarrow k\int_{۰}^{۲}(۲x - x^۲)dx = k(x^۲ - \frac{x^۳}{۳})\Big|_{۰}^{۲} = ۱$$

$$\Rightarrow k(۴ - \frac{۸}{۳}) = ۱ \Rightarrow k = \frac{۳}{۴}$$

ب) مد یعنی نقطه ای از دامنه که تابع چگالی $f(x)$ در آن بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند، بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{۳}{۴}x(۲-x)\Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}x-\frac{۳}{۴}x^{۲}=۰$$
$$\Rightarrow x=۱=M \text{ مد}$$

$$p(X<۱)=\int_{۰}^{۱}\frac{۳}{۴}x(۲-x)dx+\int_{-\infty}^{۰}۰\,dx=\int_{۰}^{۱}\frac{۳}{۴}(۲x-x^{۲})dx$$
$$=\frac{۳}{۴}(x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۳}{۴}(۱-\frac{۱}{۳})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

ج) می‌دانیم اگر m میانه توزیع باشد، داریم $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\frac{۱}{۲}$

$$\int_{۰}^{m}\frac{۳}{۴}x(۲-x)dx=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۴}(x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۳})\Big|_{۰}^{m}=\frac{۱}{۲}$$
$$\frac{۳}{۴}(m^{۲}-\frac{m^{۳}}{۳})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=۱,۱-\sqrt{۳},۱+\sqrt{۳}$$
$$p(\frac{۱}{۲}<X<\frac{۱}{۲})=۰$$

جواب‌های $m=۱\pm\sqrt{۳}$ قابل قبول نیستند چون متعلق به بازه $(۰,۲)$ نمی‌باشند.

مثال ۱۱.۱.۴. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی روبرو باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ce^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}} & x>\alpha \\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید.

ب) تابع توزیع X را بدست آورید.

ج) اگر $t<\frac{۱}{\beta}$ باشد، $\mathrm{E}(e^{tX})$ را محاسبه کنید. (آزاد تهران- جنوب ۸۳- ۸۲)

حل. الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=۱\Rightarrow\int_{\alpha}^{+\infty}ce^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}dx=۱$$
$$x-\alpha=y\Rightarrow\int_{۰}^{+\infty}ce^{-\frac{y}{\beta}}dy=۱$$
$$-c\beta e^{-\frac{y}{\beta}}\Big|_{۰}^{\infty}=۱\Rightarrow c\beta=۱\Rightarrow c=\frac{۱}{\beta}\quad(\beta \text{ باید مثبت باشد})$$

ب)

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{۱}{\beta}e^{-\frac{(t-\alpha)}{\beta}}dt=-e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}}\Big|_{\alpha}^{x}=۱-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\qquad x>\alpha$$

ج)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(e^{tX})&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tX}f(x)dx=\\&=\int_{-\infty}^{\alpha}e^{tX}\times ۰dx+\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{e^{tX}}{\beta}e^{-(\frac{x-\alpha}{\beta})}dx\\&=\frac{e^{tX}}{\beta}\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-(\frac{۱}{\beta}-t)x}dx=\frac{e^{tX}}{\beta}\times\frac{-e^{-(\frac{۱}{\beta}-t)x}}{\frac{۱}{\beta}-t}\Big|_{\alpha}^{\infty}\\&=\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}-(\frac{۱}{\beta}-t)\alpha}}{۱-\beta t}=\frac{e^{\alpha t}}{۱-\beta t}\qquad t<\frac{۱}{\beta}\end{aligned}$$

مثال ۱۲.۱.۴. تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت

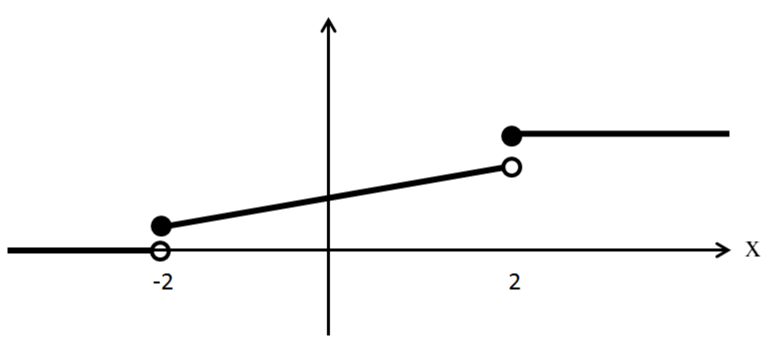
$$F(x)=\begin{cases}۰ & x<-۲\\ \frac{x+۴}{۸} & -۲\leq x<۲\\ ۱ & x\geq ۲\end{cases}$$

داده شده است.

الف) تابع احتمال، میانگین و واریانس X را بدست بیاورید.

ب) مقدار $p(|X|\leq ۱)$ را محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۹)

حل. الف) ابتدا شکل تابع توزیع را رسم می‌کنیم. برای اینکه متوجه شویم متغیر گسسته است یا پیوسته.



با توجه به پرش در دو نقطه ۲ و ۲− و پیوستگی در فاصله $(-۲, ۲)$ این تابع توزیع متغیر آمیخته است. در قسمت پیوسته مشتق می‌گیریم و در قسمت گسسته در نقاط ۲− و ۲ جرم احتمال را محاسبه می‌کنیم.

$$p(X=-۲)=p(X\leq -۲)-p(X<۲)=\frac{۱}{۴}-۰=\frac{۱}{۴}$$

$$p(X=۲)=p(X\leq ۲)-p(X<۲)=۱-\frac{۶}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{۱}{۸}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=-۲,۲\\ \frac{۱}{۸} & -۲<x<۲\end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X)\int_{-۲}^{+۲}\frac{x}{۸}dx+(-۲)\times\frac{۱}{۴}+۲\times\frac{۱}{۴}=\frac{x^۲}{۱۶}\Big|_{-۲}^{۲}+۰=۰$$

$$\mathrm{E}(X^۲)=\int_{-۲}^{۲}\frac{x^۲}{۸}dx+(-۲)^۲\times\frac{۱}{۴}+(۲)^۲\times\frac{۱}{۴}=\frac{x^۳}{۲۴}\Big|_{-۲}^{۲}+۱+۱=\frac{۸}{۳}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^۲)-\mathrm{E}^۲(X)=\frac{۸}{۳}-۰=\frac{۸}{۳}$$

ب)

$$p(|X|\leq ۱)=p(-۱\leq X\leq ۱)=\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{۸}dx=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۳.۱.۴. تابع چگالی احتمال یک سیگنال تصادفی به صورت زیر است.

$$f(x)=\frac{A}{۱+x^۲}\quad x\in\mathbb{R}$$

احتمال $p(|X|<۱)$ برابر است با: *(مهندسی برق ۸۲)*

۱) $\frac{۱}{۲\pi}$ ۲) $\frac{۱}{\pi}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل. چون تابع فوق یک تابع چگالی است، پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{۱+x^۲}dx=A\tan^{-۱}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=A(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲})=۱\to A=\frac{۱}{\pi}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} p(|X| < ۱) &= p(-۱ < X < ۱) = \int_{-۱}^{۱} f(x)dx \\ &= \int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{\pi(۱+x^۲)} = \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}x\Big|_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{\pi}(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}) \\ &= \frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

مثال ۱۴.۱.۴. فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر $Y = \max\{X, a\}$ و $Z = \min\{X, a\}$ مقدار $\mathrm{E}(Z) + \mathrm{E}(Y)$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ۸۳)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x > ۰$$

۱) $a + \frac{۱}{\lambda}$ ۲) $a + \frac{۱}{\lambda}e^{-\lambda a}$ ۳) $e^{-\lambda a} + \frac{۱}{\lambda}$ ۴) $\frac{۱}{\lambda}(۱ - e^{-\lambda a})$

حل. می‌دانیم: $\max\{a,b\} + \min\{a,b\} = a + b$ بنابراین

$$Z + Y = \min\{X, a\} + \max\{X, a\} = X + a$$

$$\mathrm{E}(Z) + \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(a) = \mathrm{E}(X) + a$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{۰} x \times ۰ dx + \int_{۰}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

با تغییر متغیر $\lambda x = t \rightarrow \lambda dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{\lambda}$

$$= \int_{۰}^{\infty} te^{-t}\frac{dt}{\lambda} = \frac{۱}{\lambda}(-te^{-t}\Big|_{۰}^{\infty} + \int_{۰}^{\infty} e^{-t}dt) = \frac{۱}{\lambda}(۰ - e^{-t}\Big|_{۰}^{\infty}) = \frac{۱}{\lambda}$$

$$t = u \rightarrow dt = du$$

$$e^{-t}dt = dv \rightarrow v = -e^{-t}$$

بنابراین $\mathrm{E}(X) + a = \frac{۱}{\lambda} + a$.

مثال ۱۵.۱.۴. اگر میانگین متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x) = a + bx^۲,\ ۰ < x < ۱$ برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد، مقادیر a و b کدام هستند؟ (مهندسی سیستم ۸۴)

۱) $a = \frac{۲}{۳}, b = ۱$ ۲) $a = ۱, b = ۶$ ۳) $a = \frac{-۶}{۵}, b = \frac{-۳}{۵}$ ۴) $a = \frac{۳}{۵}, b = \frac{۶}{۵}$

حل. چون تابع فوق یک تابع چگالی است، پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{۰} ۰dx + \int_{۰}^{۱} d + bx^۲dx + \int_{۱}^{\infty} ۰dx = ۱$$

$$\Rightarrow ax + \frac{b}{۳}x^{۳}\Big|_{۰}^{۱} = a + \frac{b}{۳} = ۱$$

$$\mathrm{E}(X)\frac{۳}{۵} \to \int_{۰}^{۱} x(a+bx^{۲})dx = \frac{ax^{۲}}{۲} + \frac{bx^{۴}}{۴}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{a}{۲} + \frac{b}{۴} = \frac{۳}{۵}$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{۳} = ۱ \\ \frac{a}{۲} + \frac{b}{۴} = \frac{۳}{۵} \end{cases} \to a = \frac{۳}{۵},\ b = \frac{۶}{۵}$$

تمرین ۱۶.۱.۴. تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X به صورت مقابل تعریف شده است.

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ -ke^{-x}(x+۱) + ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

الف) تابع مولد گشتاور X را تعیین کنید.

ب) میانگین و انحراف معیار X را محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۵-۸۴)

تمرین ۱۷.۱.۴. فرض کنید تابع توزیع تجمعی X به صورت مقابل باشد.

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{x}{۴} & ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۱}{۲} + \frac{x-۱}{۴} & ۱ \leq x \leq ۲ \\ \frac{۱۱}{۱۲} & ۲ \leq x < ۳ \\ ۱ & x \geq ۳ \end{cases}$$

الف) $p(X = ۱)$ را بدست آورید.

ب) $p(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۲})$ را بدست آورید.

ج) $\mathrm{E}(X)$ را محاسبه کنید. (علم و صنعت ۸۶-۸۵)

تمرین ۱۸.۱.۴. تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت مقابل است.

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & ۰ < x < ۱ \\ b(۲-x) & ۱ \leq x < ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

اگر $\mathrm{E}(X) = ۱$، آن گاه دو مقدار ثابت a و b را محاسبه کنید. (آزاد تهران- جنوب ۸۷)

تمرین ۱۹.۱.۴. متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمالی به صورت زیر است. مقدار ثابت k کدام است؟ (مهندسی نساجی ۸۶)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{\pi}(۱+x)} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

تمرین ۲۰.۱.۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ x^۳ & ۰ \leq x < ۱ \\ ۱ & x \geq ۱ \end{cases}$$

باشد، مقدار $p(|X - \frac{۲}{۳}| > \frac{۱}{۳})$ را بیابید. (مهندسی صنایع ۸۶)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

تمرین ۲۱.۱.۴. اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x & ۰ \leq ۰ < x < ۱ \\ ۰ & o.w \end{cases}$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X باشد، (میانه و مد) توزیع X کدام است؟ (مهندسی صنایع ۸۶)

۱) $(\sqrt{۲}, ۲)$ ۲) $(۲, \sqrt{۲})$ ۳) $(۲, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$ ۴) $(\sqrt{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$

تمرین ۲۲.۱.۴. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشد، مقدار $\mathrm{E}(e^{F(x)})$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ۸۶)

۱) $\exp(۱) - ۱$ ۲) $\exp(\frac{۱}{۲}) - ۱$ ۳) ۱ ۴) $\exp(۱)$

۲.۴ توزیع یکنواخت

فرض کنید X نقطه ای تصادفی باشد که از فاصله (a, b)، انتخاب شده است. بدیهی است که در این صورت X یک متغیر تصادفی پیوسته روی فاصله (a, b) است و می‌تواند هر مقداری مانند $a < x < b$ را با شانس یکسان اختیار کند، یعنی تابع چگالی احتمال X به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{b-a} & a < x < b \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی بالا باشد، گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت روی (a, b) است و به صورت $X \sim U(a, b)$ نشان می‌دهیم.

نتیجه: اگر $X \sim U(a, b)$ باشد، آنگاه

۱. $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{۲}$

۲. $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^۲}{۱۲}$

۳. $M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$

نکته. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، در این صورت متغیر تصادفی $Y = F(X)$ دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(۰, ۱)$ خواهد بود که در آن F تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X است.

مثال ۱.۲.۴. اگر θ دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(-۱,۱)$ باشد، احتمال اینکه معادله درجه دوم زیر دارای دو ریشه حقیقی باشد چقدر است؟ (امیرکبیر ۹۰)

حل.

$$X^۲ - ۲(\theta+۱)X + ۲\theta^۲ + ۲\theta + \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$\Delta = (-۲(\theta+۱))^۲ - ۴(۲\theta^۲ + ۲\theta + \frac{۱}{۲}) = -۴\theta^۲ + ۲ > ۰$$

$$p(\Delta > ۰) = p(-۴\theta^۲ + ۲ > ۰) = p(\frac{-\sqrt{۲}}{۲} < \theta < \frac{-\sqrt{۲}}{۲}) = \int_{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \frac{۱}{۲} d\theta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

زیرا،

$$\theta \sim U(-۱,۱) \to f(\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} & -۱ < \theta < ۱ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

مثال ۲.۲.۴. متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $F(x)$ است. اگر F تابعی اکیداً صعودی و $Y = F(X)$، آنگاه حاصل $p(Y - \mathrm{E}(Y) < \frac{۱}{۴})$ را پیدا کنید. (مهندسی کامپیوتر ۸۲)

حل. می‌دانیم متغیر تصادفی پیوسته X هر توزیعی که داشته باشد در این صورت $Y = F(X)$ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی فاصله $(۰,۱)$ است، پس داریم:

$$Y \sim U(۰,۱) \to \mathrm{E}(Y) = \frac{۱+۵}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$p(Y - \mathrm{E}(Y) < \frac{۱}{۴}) = p(Y - \frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۴}) = p(Y < \frac{۳}{۴}) = \int_۰^{\frac{۳}{۴}} ۱ dx = \frac{۳}{۴}$$

زیرا:

$$f(y) = \begin{cases} ۱ & ۰ < y < ۱ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

مثال ۳.۲.۴. فرض کنید $X \sim U(۰,a)$ باشد. اگر $Y = \min(X, \frac{a}{۲})$ تعریف شود، در این صورت $\mathrm{E}(Y)$ را محاسبه کنید. (مهندسی صنایع ۸۲)

حل.

$$X \sim U(۰,a) \to f(y) = \begin{cases} \frac{۱}{a} & ۰ < x < a \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X & X < \frac{a}{۲} \\ \frac{a}{۲} & X > \frac{a}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int_0^{\frac{a}{2}} xf(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{a}{2} f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} x\frac{1}{a}dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{a}{2}.\frac{1}{a}dx \\ &= \frac{x^2}{2a}\Big|_0^{\frac{a}{2}} + \frac{x}{2}\Big|_{\frac{a}{2}}^{a} = \frac{3a}{8}\end{aligned}$$

مثال ۴.۲.۴. فرض کنید X متغیر تصادفی است که دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ است. از ۵ بار نمونه گیری احتمال اینکه دقیقاً ۳ بار در فاصله $[0/3, 0/8]$ قرار بگیرد چقدر است؟ *(مهندسی کامپیوتر ۸۵)*

حل.

$$X \sim U(0,1) \to f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$p(0/3 < X < 0/8) = \int_{0/3}^{0/8} f(x)dx = \int_{0/3}^{0/8} 1dx = 0/5$$

با توجه به اینکه در اینجا عدد انتخاب شده با احتمال ۰/۵ در فاصله مورد نظر قرار می‌گیرد و یا با احتمال $(1 - 0/5)$ در این فاصله قرار نمی‌گیرد، پس یک توزیع برنولی دارد و چون این آزمایش ۵ بار با همان شرایط یکسان تکرار می‌شود، لذا توزیع دوجمله ای با پارامترهای $p = 0/5$ و $n = 5$ دارد. یعنی داریم:

$$Y \sim Bin(5, 0/5)$$

$$p(Y=3) = \binom{5}{3}(0/5)^3(1-0/5)^5 = \frac{10}{32}$$

تمرین ۵.۲.۴. X متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & o.w \end{cases}$ به ازای چه مقداری از k، $p(\tan X < k) = \frac{1}{2}$ است. *(مهندسی نساجی ۸۵)*

تمرین ۶.۲.۴. فرض کنید $X \sim U(0,1)$. مقدار $E[\min(X, \frac{1}{2})]$ چقدر است؟ *(مهندسی صنایع ۸۶)*

تمرین ۷.۲.۴. یک عدد تصادفی از بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه سینوس آن از کسینوس آن بیشتر شود چقدر است؟ *(مهندسی معدن ۸۷)*

تمرین ۸.۲.۴. متغیر تصادفی X دارای توزیع پیوسته و صعودی $F(x)$ است. فرض کنید $Y = (F(X))^2$. واریانس متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید. *(تألیفی)*

۳.۴ توزیع نمایی (منفی)

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد،

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

گوییم X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است و آن را با نماد $X \sim Exp(\lambda)$ نشان می‌دهیم.
نتیجه: اگر $X \sim Exp(\lambda)$ باشد، آنگاه

۱. $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

۲. $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

۳. $t < \lambda \qquad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

مثال ۱.۳.۴. فرض کنید طول عمر باتری‌های ساخت یک کارخانه دارای توزیع نمایی با میانگین ۶ ماه باشد.

الف) احتمال اینکه یک باتری که به تصادف از انبار کارخانه انتخاب شده حداقل یک سال عمر کند چقدر است؟

ب) اگر بدانیم یک باتری حداقل دو ماه کار کرده است، احتمال اینکه آن حداقل ۸ ماه کار کند چقدر است؟

حل. چون $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 6$ پس در نتیجه $\lambda = \frac{1}{6}$ و

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف)

$$p(X > 12) = \int_{12}^{\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{6}} dx = -e^{-\frac{x}{6}}\Big|_{12}^{\infty} = e^{-\frac{12}{6}} = e^{-2} \simeq 0/135$$

ب)

$$p(X > 8 | X > 2) = \frac{p(X > 8 \cap X > 2)}{p(X > 2)} = \frac{p(X > 8)}{p(X > 2)} = \frac{\int_8^\infty \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}dx}{\int_2^\infty \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}dx} = \frac{e^{-\frac{8}{6}}}{e^{-\frac{2}{6}}} \simeq 0/368$$

۱.۳.۴ توزیع گاما

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد،

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & x > 0, r > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

گوییم X دارای توزیع گاما با پارامترهای r و λ است و آن را با نماد $X \sim G(r, \lambda)$ نشان می‌دهیم. **نتیجه:** اگر $X \sim G(r, \lambda)$ باشد، آنگاه

۱. $\mathrm{E}(X) = \frac{r}{\lambda}$

۲. $\mathrm{Var}(X) = \frac{r}{\lambda^2}$

۳. $t < \lambda \qquad M_X(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - t})^r$

چند رابطه مفید در تابع چگالی گاما

۱. $\int_0^\infty x^{r-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(r)}{\lambda^r}$

۲. $r > 0 \qquad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$

۳. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \Gamma(n+1) = n!$

۴. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

نکته. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر λ باشند. در این صورت متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ خواهد بود.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, \lambda)$$

مثال ۲.۳.۴. مقادیر $\Gamma(6)$ و $\Gamma(\frac{5}{2})$ را بدست آورید.

$$\Gamma(6) = 5! = 120$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

مثال ۳.۳.۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{2}$ باشد. مقدار $\mathrm{E}(e^X)$ چقدر است؟ (امیر کبیر ۸۸)

حل.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

می‌دانیم $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ و همچنین داریم $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$ در نتیجه $\lambda = 2$ می‌شود.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(e^X) = \int_0^\infty e^x(2e^{-2x})dx + \int_{-\infty}^0 0 \times e^x dx = 2\int_0^\infty e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big|_0^\infty = 2$$

با استفاده از تابع مولد گشتاور نیز می‌توان حل کرد. می‌دانیم

$$\mathrm{E}(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad t < \lambda \Leftrightarrow X \sim Exp(\lambda)$$

$$\begin{matrix} t = 1 \\ \lambda = 2 \end{matrix} \Rightarrow \mathrm{E}(e^X) = \frac{2}{2-1} = 2$$

مثال ۴.۳.۴. در یک فرودگاه به طور متوسط هر ساعت ۶ هواپیما به زمین می‌نشیند. اگر بدانیم زمان بین فرود متوالی دو هواپیما حداکثر نیم ساعت بوده است، چقدر احتمال دارد فرود آن‌ها حداقل یک ربع فاصله داشته باشد؟ (علم و صنعت ۸۶)

حل. متغیر تصادفی X تعداد فرودها در یک ساعت است که دارای توزیع پوآسن با میانگین ۶ است و متغیر تصادفی Y را زمان بین دو فرود متوالی بر حسب ساعت در نظر می‌گیریم، آنگاه $Y \sim Exp(۶)$ یعنی Y دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{۶}$ می‌باشد.

ساعت	فرود	
۱	۶	
$\mathrm{E}(X)$	۱	$\Longrightarrow \mathrm{E}(X) = \frac{۱}{۶}$

به طور متوسط $\frac{۱}{۶}$ ساعت طول می‌کشد که یک هواپیما فرود بیاید.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{\lambda} \Rightarrow \lambda = ۶$$

$$p(Y \geq \frac{۱}{۴} | X \leq \frac{۱}{۲}) = \frac{p(Y \geq \frac{۱}{۴}, X \leq \frac{۱}{۲})}{p(X \leq \frac{۱}{۲})} = \frac{p(\frac{۱}{۴} \leq X \leq \frac{۱}{۲})}{p(X \leq \frac{۱}{۲})} = \frac{\int_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۱}{۲}} ۶e^{-۶x}dx}{\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} ۶e^{-۶x}dx} = \frac{-e^{-۳} + e^{-\frac{۳}{۲}}}{-e^{-۳} + ۱}$$

مثال ۵.۳.۴. فرض کنید $X \sim \Gamma(۲, ۱)$ با تابع چگالی $f(x) = xe^{-x},\ x > ۰$ باشد. مقدار $p(X > ۲ + ۱ | X > ۱)$ چقدر است؟ (مهندسی صنایع ۸۸)

حل.

$$p(X \geq ۲ + ۱ | X \geq ۱) = p(X \geq ۳ | X \geq ۱) = \frac{p(X \geq ۳ \cap X \geq ۱)}{p(X \geq ۱)} = \frac{p(X \geq ۳)}{X \geq ۱}$$

$$p(X \geq ۳) = \int_{۳}^{\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_{۳}^{\infty} + \int_{۳}^{\infty} e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_{۳}^{\infty} = ۴e^{-۳}$$

$$x = u \rightarrow dx = du$$
$$e^{-x}dx = dv \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$p(X \geq ۱) = \int_{۱}^{\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_{۱}^{\infty} = ۲e^{-۱} \Rightarrow \frac{p(X \geq ۳)}{p(X \geq ۱)} = \frac{۴e^{-۳}}{۲e^{-۱}} = ۲e^{-۲}$$

مثال ۶.۳.۴. نسبت انحراف معیار به میانگین در یک متغیر تصادفی ارلانگ (گاما) از مرتبه سوم با تابع چگالی ذیل را حساب کنید. (نساجی ۸۹)

$$f(x) = \frac{\lambda^{۳}}{۲!}x^{۲}e^{-\lambda x} \qquad x \geq ۰$$

حل.

$$\mathrm{E}(X)=\int_{۰}^{\infty}x\frac{\lambda^{۳}}{۲!}x^{۲}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^{۳}}{۲}\int_{۰}^{\infty}x^{۳}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^{۳}}{۲}\frac{\Gamma(۴)}{\lambda^{۴}}=\frac{۳}{\lambda}$$

(می‌دانیم $\int_{۰}^{\infty}x^{r-۱}e^{-\lambda x}dx=\frac{\Gamma(r)}{\lambda^{r}}$)

$$\mathrm{E}(X^{۲})=\int_{۰}^{\infty}x^{۲}\frac{\lambda^{۳}}{۲!}x^{۲}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^{۳}}{۲}\int_{۰}^{\infty}x^{۴}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^{۳}}{۲}\frac{\Gamma(۵)}{\lambda^{۵}}=\frac{۱۲}{\lambda^{۲}}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^{۲})-\mathrm{E}^{۲}(X)=\frac{۱۲}{\lambda^{۲}}-\frac{۹}{\lambda^{۲}}=\frac{۳}{\lambda^{۲}}$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathrm{E}(X)}=\frac{\sqrt{\frac{۳}{\lambda^{۲}}}}{\frac{۳}{\lambda}}\overset{\lambda>۰}{=\!=}\frac{\frac{\sqrt{۳}}{\lambda}}{\frac{۳}{\lambda}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال ۷.۳.۴. فرض کنید $X_{۱}$ و $X_{۲}$ نمونه تصادفی از توزیع نمایی با تابع احتمال زیر است.

$$f(x)=ce^{-cx}\qquad x>۰,\ c>۰$$

اگر تعریف کنیم $Y=\frac{X_{۱}+X_{۲}}{۲}$، آنگاه $\mathrm{E}(\frac{۱}{Y})$ را پیدا کنید. (مهندسی صنایع ۸۹)

حل.

$$\mathrm{E}(\frac{۱}{Y})=\mathrm{E}(\frac{۲}{X_{۱}+X_{۲}})=۲\,\mathrm{E}(\frac{۱}{X_{۱}+X_{۲}})$$

اگر تعریف کنیم $Z=X_{۱}+X_{۲}$ در این صورت چون متغیر تصادفی Z مجموع دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی است، پس Z دارای توزیع گاما با پارامترهای c و ۲ خواهد بود، یعنی

$$f(z)=\frac{c^{۲}}{\Gamma(۲)}z^{۲-۱}e^{-cz}\qquad z>۰.c>۰$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\frac{۱}{Y})&=۲\,\mathrm{E}(\frac{۱}{Z})=۲\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{z}f(z)dz=\frac{۲c^{۲}}{\Gamma(۲)}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{z}.ze^{-cz}dz\\&=۲c^{۲}\int_{۰}^{\infty}e^{-cz}dz=-\frac{۲c^{۲}}{c}e^{-cz}\Big|_{۰}^{\infty}=۲c\end{aligned}$$

تمرین ۸.۳.۴. اگر توزیع طول عمر یک مؤلفه صنعتی توزیع نمایی با پارامتر λ باشد و بدانیم که متوسط طول عمر این مؤلفه ۱۰ سال است، آنگاه احتمال اینکه این مؤلفه ۵ سال دیگر هم کار کنند در حالی که بدانیم ۷ سال کار کرده است چقدر است؟ (علم و صنعت ۸۹)

تمرین ۹.۳.۴. تجربه گذشته نشان می‌دهد که تعداد مراجعه کنندگان به یک پمپ بنزین در هر ساعت به طور متوسط ۸ اتومبیل می‌باشد. با شروع در یک نقطه زمانی، احتمال اینکه اولین اتومبیل در فاصله پانزده دقیقه وارد پمپ بنزین شود چقدر است؟ *(سیستم ۸۴)*

تمرین ۱۰.۳.۴. متغیر تصادفی X در بازه $(-۱,۳)$ به طور یکنواخت توزیع شده است و متغیر تصادفی Y توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$ دارد. مقدار λ را به طوری که $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$ پیدا کنید. *(مهندسی برق ۸۲)*

تمرین ۱۱.۳.۴. اگر متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد،

$$f(x) = \begin{cases} cx^d e^{-\frac{x}{۲}} & x > ۰ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

با فرض $\mathrm{E}(X) = ۹$ و $\mathrm{Var}(X) = ۲۷$ مقادیر c و d را بیابید. *(مهندسی صنایع ۸۱)*

۴.۴ توزیع نرمال

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد،

$$f_X(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲} \qquad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > ۰$$

گوییم X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ است و آن را با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ نشان می‌دهیم.
نتیجه: اگر $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ باشد، آنگاه

۱. $\mathrm{E}(X) = \mu$

۲. $\mathrm{Var}(X) = \sigma^۲$

۳. $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$

اگر $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ باشد در این صورت $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(۰,۱)$ است که آن را نرمال استاندارد می‌گوییم که دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_Z(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{z^۲}{۲}} \qquad z \in \mathbb{R}$$

مثال ۱.۴.۴. قد جوانان یک شهر دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۶۵ و واریانس ۵۰ سانتی‌متر می‌باشد.

الف) اگر جوانی به تصادف از این شهر انتخاب شود، احتمال اینکه قدش کمتر از ۱۷۰ سانتی‌متر باشد چقدر است؟

ب) اگر جوانی به تصادف از این شهر انتخاب شود، احتمال اینکه قدش بیش از ۲ متر باشد چقدر است؟

ج) چند درصد جوانان این شهر قدی بین ۱۵۰ و ۱۸۰ سانتی‌متر دارند؟

د) ۹۰ درصد جوانان این شهر قدی کمتر از چه مقداری دارند؟

حل. اگر متغیر تصادفی X را طول قد جوانان این شهر بر حسب سانتی‌متر در نظر بگیریم، داریم

$$X \sim N(165, 50)$$

الف)

$$p(X < 170) = p(\frac{X-165}{\sqrt{50}} < \frac{170-165}{\sqrt{50}}) = p(Z < 0/71) = \int_{-\infty}^{0/71} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

اما محاسبه انتگرال فوق میسر نیست لذا مقادیر تقریبی این نوع انتگرال‌ها را در آخر اغلب کتاب‌های آماری تحت عنوان تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد می‌توان یافت. بنابراین از جدول داریم:

$$p(Z < 0/71) = 0/7611$$

ب)

$$\begin{aligned} p(X > 200) &= 1 - p(X < 200) = 1 - p(\frac{X-165}{\sqrt{50}} < \frac{200-165}{\sqrt{50}}) \\ &= 1 - p(Z < 4/95) \simeq 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} p(150 < X < 180) &= p(\frac{150-165}{\sqrt{50}} < \frac{X-165}{\sqrt{50}} < \frac{168-165}{\sqrt{50}}) \\ &= p(-2/12 < Z < 2/12) = p(Z < 2/12) - p(Z < -2/12) \\ &= 0/9830 - 0/0170 = 0/9660 \end{aligned}$$

د) مطلوب مسئله، مقداری مانند a است به طوری که

$$p(X < a) = 0/9 \to p(\frac{X-165}{\sqrt{50}} < \frac{a-165}{\sqrt{50}}) = 0/9$$

با استفاده از جدول داریم:

$$\frac{a-165}{\sqrt{50}} = 1/28 \to a = 174$$

نکته. ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال، توزیع نرمال دارد، یعنی اگر $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ در این صورت اگر X و Y مستقل از هم باشند، در این صورت متغیر تصادفی $T = aX + bY$ که ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی مستقل نرمال است، دارای توزیع نرمال با میانگین $a\mu_1 + b\mu_2$ و واریانس $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$ است، یعنی

$$T \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

مثال ۲.۴.۴. فرض کنید $X \sim N(۱, ۱)$ و $Y \sim N(۰, ۲)$، اگر X و Y مستقل از هم باشند در این صورت $p(X > Y + ۱)$ را محاسبه کنید.

حل.

$$p(X > Y + ۱) = p(X - Y > ۱) = ۱ - p(X - Y < ۱) = ۱ - p(T < ۱)$$

با توجه به مطلب فوق $T = X - Y \sim N(۱, ۳)$، لذا داریم

$$۱ - p(T < ۱) = ۱ - p(\frac{T - ۱}{\sqrt{۳}} < \frac{۱ - ۱}{\sqrt{۳}}) = ۱ - p(Z < ۰) = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

نکته. فرض کنید $X_۱, X_۲, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و برای هر X_i داشته باشیم $X_i \sim N(\mu, \sigma^۲)$، در این صورت با توجه به نکته بالا داریم:

$$T = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^۲) \to \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^۲}} \sim N(۰, ۱)$$

$$\bar{X} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^۲}{n}) \to \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(۰, ۱)$$

مثال ۳.۴.۴. وزن بسته‌هایی که توسط ماشین بسته بندی پر می‌شود، دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۵۰ گرم و انحراف معیار ۲۰ گرم است. احتمال آنکه ۶۴ بسته پر شده توسط این ماشین دارای وزنی کمتر از ۲۵۲ گرم باشد چقدر است؟

حل. فرض می‌کنیم X_i نشان دهنده وزن بسته i–ام $(i = ۱, ۲, \dots, ۶۴)$ باشد. واضح است که X_iها مستقلند و همچنین $X_i \sim N(۲۵۰, ۴۰۰)$.

$$p(\bar{X} < ۲۵۲) =?$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\bar{X} \sim N(۲۵۰, \frac{۴۰۰}{۶۴})$$

بنابراین داریم:

$$p(\bar{X} < ۲۵۲) = p(\frac{\bar{X} - ۲۵۰}{\sqrt{\frac{۴۰۰}{۶۴}}} < \frac{۲۵۲ - ۲۵۰}{\sqrt{\frac{۴۰۰}{۶۴}}})$$

از جدول

$$= p(Z < ۰/۸) = ۰/۷۸۸۱$$

۱.۴.۴ قضیه حد مرکزی

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع مشترک $f(x)$ با میانگین و واریانس μ_X و واریانس $\sigma_X^۲$ باشد به طوری که $\sigma_X^۲ < \infty$ اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، در این صورت دو نتیجه تقریبی زیر را داریم:

۱. $T = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim N(n\mu_X, n\sigma_X^۲)$

۲. $\bar{X} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim N(\mu_X, \frac{\sigma_X^۲}{n})$

مثال ۴.۴.۴. اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_{۷۵}$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $U(۰, ۱)$ باشند. چقدر احتمال دارد که برای میانگین نمونه $\bar{X}$ مقداری بین ۰/۴۵ و ۰/۵۵ بدست آید؟

حل. برای $i = ۱, ۲, \ldots, ۷۵$ داریم:

$$X_i \sim U(۰, ۱)$$
$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{۱}{۲}$$
$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{۱}{۱۲}$$

در واقع مطلوب مسئله به صورت زیر است:

$$p(۰/۴۵ < \bar{X} < ۰/۵۵)$$

برای محاسبه احتمال فوق باید توزیع دقیق $\bar{X}$ را داشته باشیم، اما بدست آوردن تابع چگالی دقیق $\bar{X}$ کاری بس دشوار و تقریباً غیر ممکن است، لذا چون حجم نمونه یعنی $n = ۷۴$ بزرگ است، پس می‌توانیم از قضیه حد مرکزی استفاده کنیم.

$$\bar{X} \sim N(\frac{۱}{۲}, \frac{\frac{۱}{۱۲}}{۷۵})$$

$$\begin{aligned} p(۰/۴۵ < \bar{X} < ۰/۵۵) &= p(\frac{۰/۴۵ - ۰/۵}{\sqrt{\frac{۱}{۹۰۰}}} < \frac{\bar{X} - ۰/۵}{\sqrt{\frac{۱}{۹۰۰}}} < \frac{۰/۵۵ - ۰/۵}{\sqrt{\frac{۱}{۹۰۰}}}) \\ &= p(-۱/۵ < Z < ۱/۵) = p(Z < ۱/۵) - p(Z < -۱/۵) \\ &= ۰/۹۳۳۲ - ۰/۰۶۶۸ = ۰/۸۶۶ \end{aligned}$$

مثال ۵.۴.۴. میزان کشیدگی میله ای فولادی تحت بار مشخصی یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰/۰۵ اینچ و انحراف معیار $\sigma = ۰/۰۱$ اینچ پیروی می‌کند. (امیرکبیر ۹۰)

الف) احتمال اینکه میزان کشیدگی میله بین ۰/۰۲۵ و ۰/۰۶۵ باشد چیست؟

ب) احتمال اینکه میزان کشیدگی میله ای کمتر از ۰/۰۴ اینچ باشد چقدر است؟

حل. X: میزان کشیدگی میله

$$X \sim N(0/05, (0/01)^2)$$

الف)

$$\begin{aligned} p(0/025 < X < 0/065) &= p(\frac{0/025 - 0/05}{0/01} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0/065 - 0/05}{0/01}) \\ &= p(-2/5 < Z < 1/5) \\ &= p(Z < 1/5) - p(Z < -2/5) = 0/9332 - 0/0054 \\ &= 0/9278 \end{aligned}$$

این اعداد از جدول احتمال نرمال استاندارد بدست آمده است.

ب)

$$p(X < 0/04) = p(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0/04 - 0/05}{0/01}) = p(Z < -1) = 0/1587$$

مثال ۶.۴.۴. فرض کنید X و Y دارای توزیع‌های نرمال مستقل از هم به ترتیب با میانگین‌های ۶ و ۷ و واریانس‌های ۹ و ۱۶ باشند. اگر $p(2X + Y \leq \lambda) = p(4X - 3Y \geq 4\lambda)$ مقدار λ را پیدا کنید. (علم و صنعت ۸۶)

حل. می‌دانیم

$$\begin{cases} X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases} \Rightarrow aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

$$\begin{cases} X \sim N(6, 9) \\ Y \sim N(7, 16) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2X + Y \sim N(2 \times 6 + 7, 4 \times 9 + 16) \\ 4X - 3Y \sim N(4 \times 6 - 3 \times 7, 16 \times 9 + 9 \times 16) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2X + Y \sim N(19, 52) \\ 4X - 3Y \sim N(3, 288) \end{cases}$$

$$p(2X + Y \leq \lambda) = p(\frac{2X + Y - 19}{\sqrt{52}} \leq \frac{\lambda - 19}{\sqrt{52}}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p(4X - 3Y \geq 4\lambda) &= p(\frac{4X - 3Y - 3}{\sqrt{288}} \geq \frac{4\lambda - 3}{\sqrt{288}}) \\ &= p(Z \geq \frac{4\lambda - 3}{\sqrt{288}}) = p(Z < -\frac{4\lambda - 3}{12\sqrt{2}}) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p(2X + Y \leq \lambda) = p(4X - 3Y \geq 4\lambda) \\ (1) \ \& \ (2) \end{cases} \Rightarrow$$

با استفاده از رابطه بالا داریم

$$\frac{\lambda-۱۹}{\sqrt{۵۲}}=-\frac{۴\lambda-۳}{۱۲\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{\lambda-۱۹}{\sqrt{۵۲}}=\frac{-۴\lambda+۳}{۱۲\sqrt{۲}}$$
$$\Rightarrow -۴\sqrt{۵۲}\lambda+۳\sqrt{۵۲}=۱۲\sqrt{۲}\lambda-۲۲۸\sqrt{۲}\Rightarrow(۱۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۵۲})\lambda=۲۲۸\sqrt{۲}+۳\sqrt{۵۲}$$
$$\Rightarrow\lambda=\frac{۲۲۸\sqrt{۲}+۳\sqrt{۵۲}}{۱۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۵۲}}$$

مثال ۷.۴.۴. اگر $\bar{X}$ یک نمونه تصادفی $n=۳۶$ تایی از توزیع نمایی با چگالی

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}e^{-\frac{x}{۳}} & x>۰\\ ۰ & o.w\end{cases}$$

باشد، با استفاده از قضیه حد مرکزی مقدار تقریبی $p(۲/۵\leq\bar{X}\leq۴)$ را بدست آورید. (امیرکبیر ۸۹)

حل. چون $n=۳۶$ و واریانس متناهی است، می‌توانیم از قضیه حد مرکزی استفاده کنیم . چون توزیع نمایی است در نتیجه داریم:

$$\mathrm{E}(X)=۳$$
$$\mathrm{Var}(X)=۹=\sigma^۲$$

در نتیجه با توجه به قضیه حد مرکزی داریم

$$\bar{X}\sim N(۳,\frac{۹}{۳۶})$$

$$p(\frac{۲/۵-۳}{\sqrt{\frac{۹}{۳۶}}}\leq\frac{\bar{X}-۳}{\sqrt{\frac{۹}{۳۶}}}\leq\frac{۴-۳}{\sqrt{\frac{۹}{۳۶}}})=p(-۱\leq Z\leq۲)=p(Z\leq۲)-p(Z\leq-۱)$$
$$=۰/۹۷۷۲-۰/۱۵۸۷=۰/۸۱۸۵$$

مثال ۸.۴.۴. ۵ درصد قطعات ولید در یک کارخانه ای معیوب است. اگر تعداد ۲۰۰ کالا از این نوع را به تصادف خریداری کرده باشیم، مطلوب است احتمال آن که

الف) دقیقاً ۱۸۵ کالا سالم باشد.

ب) حداکثر ۱۹۲ کالا سالم باشد. (امیرکبیر ۸۸)

حل.

$$X_۱,X_۲,\ldots,X_{۲۰۰}\sim B(۰/۹۵)\Rightarrow Y=\sum_{i=۱}^{۲۰۰}X_i\sim Bin(۲۰۰,۰/۹۵)$$

احتمال سالم بودن $=۱-$ احتمال معیوب بودن $=۱-۰/۰۵=۰/۹۵$

الف)

$$p(Y=۱۸۵)=\binom{۲۰۰}{۱۸۵}(۰/۹۵)^{۱۸۵}(۱-۰/۹۵)^{۲۰۰-۱۸۵}$$

بنا به قضیه حد مرکزی (n بزرگ و $\sigma^۲$ متناهی)

$$\begin{aligned}p(Y=۱۸۵)&=p(Y\leq ۱۸۵)-p(Y\leq ۱۸۴)\\&=p(\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{۱۸۵-۱۹۰}{\sqrt{۹/۵}})-p(\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{۱۸۴-۱۹۰}{\sqrt{۹/۵}})\\&=p(Z<-۱/۶۲)-p(Z\leq -۱/۹۴)=۰/۰۵۲۶-۰/۰۲۶۲\\&=۰/۰۲۶۴\end{aligned}$$

ب)

$$p(Y\leq ۱۹۲)=p(\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{۱۹۲-۱۹۰}{\sqrt{۹/۵}})=p(Z\leq ۰/۶۴)=۰/۷۳۸۹$$

مثال ۹.۴.۴. فرض کنید X دارای توزیع نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۴ باشد. $\mathrm{E}(e^{۲X})$ را حساب کنید. (کامپیوتر ۸۵)

حل. می‌دانیم تابع مولد گشتاور توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ به صورت زیر است.

$$M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=e^{\mu t+\frac{۱}{۲}\sigma^۲t^۲}$$

اگر $\mu=۲$ و $\sigma^۲=۴$ و $t=۲$ قرار دهیم، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

$$\mathrm{E}(e^{۲X})=e^{۲\times ۲+\frac{۱}{۲}۴\times ۴}=e^{۱۲}$$

مثال ۱۰.۴.۴. اگر X و Y دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین $\mu_X=۵$ و $\mu_Y=۶$ و واریانس‌های مساوی ۲ باشد، مقدار $p(Y<X+۱)$ را محاسبه کنید. (نساجی ۸۲)

حل. چون ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی مستقل نرمال، توزیع نرمال دارد پس داریم:

$$Y-X\sim N(\mu_Y-\mu_X,\sigma_Y^۲+\sigma_X^۲)$$

$$p(Y<X+۱)=p(Y-X<۱)=p(\frac{(Y-X)-(\mu_Y-\mu_X)}{\sqrt{\sigma_Y^۲+\sigma_X^۲}}<\frac{۱-(۶-۵)}{\sqrt{۲+۲}})=p(Z<۰)=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۱.۴.۴. اگر $X\sim N(۱,۱)$ باشد، $p(X\geq ۲|X\geq ۱)$ را محاسبه کنید. (مهندسی صنایع ۸۳)

حل.

$$\begin{aligned} p(X \geq ۲|X \geq ۱) &= \frac{p(X \geq ۲, X \geq ۱)}{p(X \geq ۱)} = \frac{p(X \geq ۲)}{p(X \geq ۱)} \\ &= \frac{۱ - p(X < ۲)}{۱ - p(X < ۱)} = \frac{۱ - p(Z < \frac{۲-۱}{۱})}{۱ - p(Z < \frac{۱-۱}{۱})} \\ &= \frac{۱ - p(Z < ۱)}{۱ - p(Z < ۰)} = \frac{۱ - ۰/۸۴۱۳}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۰/۳۱۷۴ \qquad \text{از جدول} \end{aligned}$$

تمرین ۱۲.۴.۴. فرض کنید نمره یک امتحان دارای توزیع نرمال با معدل μ و انحراف معیار σ باشد.

الف) اگر ٪۹۸/۵ از امتحان دهندگان نمره بالاتر از ۴۸/۵ و ٪۷۹/۱ نیز نمره کمتر از ۷۸/۸ کسب کرده باشند، μ و σ را محاسبه کنید.

ب) با فرض $\mu = ۷۰$ و $\sigma = ۱۰$، اگر ۵۰ نفر از امتحان دهندگان تصادفی و با جایگذاری انتخاب شوند، احتمال اینکه حداکثر ۲۴ نفر از آن‌ها نمره ای بین ۶۰ و ۸۰ داشته باشند چقدر است؟

ج) احتمال تست (ب) را با تقریب مناسبی محاسبه کنید. *(علم و صنعت ۸۵)*

تمرین ۱۳.۴.۴. تعداد سؤال‌های یک آزمون ۱۰۰ تا و هر سؤال آن پنج گزینه ای است که یکی درست و بقیه غلط است. اگر نمره قبولی حداقل ۳۲ باشد، احتمال قبول شدن کسی که به همه سؤالات به صورت تصادفی جواب بدهد چقدر است؟ *(امیرکبیر ۹۰)*

تمرین ۱۴.۴.۴. معمولاً ٪۸۰ تولیدات یک کارخانه به طور سالم تولید می‌شود. در یک نمونه ۳۶ تایی، احتمال این که حداقل ۱۲ کالای سالم داشته باشد به طور تقریب چقدر است؟ *(مهندسی مکاترونیک ۸۷)*

تمرین ۱۵.۴.۴. فرض کنید X_iها مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(۲, ۴)$ باشند، مقدار $p(\sum_{i=۱}^{۶۴} X_i > ۱۹۲)$ را بدست آورید. *(مهندسی صنایع ۸۴)*

۵.۴ توزیع خی‌دو

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع خی‌دو با n درجه آزادی است هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۲}}}{\Gamma(\frac{n}{۲})} x^{\frac{n}{۲}-۱} e^{-\frac{۱}{۲}x} & x > ۰ \\ ۰ & x \leq ۰ \end{cases}$$

این توزیع را به طور خلاصه با نماد $X \sim \chi^۲_{(n)}$ نشان می‌دهند.

با مقایسه تابع چگالی خی‌دو و تابع چگالی گاما، واضح است که توزیع خی‌دو حالت خاصی از توزیع گاما است. به طور دقیق‌تر، توزیع خی دو با n درجه آزادی همان توزیع $G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ است. لذا میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور این توزیع با استفاده از توزیع گاما به صورت زیر خواهد بود.

۱. $E(X) = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n$

۲. $Var(X) = \frac{\frac{n}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2n$

۳. $t < \frac{1}{2} \qquad M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

۱.۵.۴ رابطه توزیع خی دو با توزیع نرمال

اگر متغیرهای تصادفی $Z_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک نرمال استاندارد باشد، آنگاه $Y = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2_(n)$. همچنین می‌توان نشان داد که اگر $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ (i = 1, 2, \ldots, n)$، در این صورت متغیر تصادفی $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع خی دو با $n-1$ درجه آزادی است که در آن $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})$، واریانس نمونه ای است. کاربرد این مطلب در استنباط آماری در مورد پارامتر واریانس جامعه نرمال می‌باشد که در فصل‌های بعد خواهیم دید.

۲.۵.۴ توزیع tی استیودنت

می‌دانیم اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد با فرض معلوم بودن σ^2، متغیر تصادفی $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است، ولی اگر σ^2 مجهول باشد و به جای σ^2 از برآورد آن یعنی $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ استفاده کنیم، آنگاه $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ بدست می‌آید که این متغیر تصادفی دیگر توزیع نرمال استاندارد ندارد بلکه دارای توزیع tی استیودنت با $(n-1)$ درجه آزادی است. این توزیع بسیار شبیه به توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. می‌توان نشان داد که اگر n به اندازه کافی بزرگ شود این توزیع به توزیع نرمال استاندارد نزدیک می‌شود.

مثال ۱.۵.۴. نمونه تصادفی ۴۱ تایی از جامعه ای نرمال با میانگین $\mu = 15$ و واریانس σ^2 انتخاب کرده‌ایم. اگر واریانس نمونه برابر $S^2 = 10$ باشد، احتمال اینکه میانگین این نمونه ۴۱ تایی کمتر از ۱۶ باشد چقدر است؟

حل.

$$p(\bar{X} < 16) = p(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{16-15}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{41}}}) \simeq p(T_{40} < 2/02)$$

احتمال فوق به صورت تقریبی با استفاده از جدول توزیع تجمعی tی استیودنت در آخر کتاب آورده شده است.

$$p(T_{۴۰} < ۲/۰۲) \simeq ۰/۹۷۵$$

چون در اینجا $n = ۴۱$ به اندازه کافی بزرگ است، پس داریم:

$$p(T_{۴۰} < ۲/۰۲) \simeq p(Z < ۲/۰۲) = ۰/۹۷۸۳$$

دیده می‌شود که این دو عدد تفاوت چندانی با هم ندارند.

۳.۵.۴ توزیع F فیشر

فرض کنید $X \sim \chi^۲_{(n)}$ و $Y \sim \chi^۲_{(m)}$ و همچنین متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند، در این صورت داریم:

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \sim F(n, m)$$

اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هر یک دارای توزیع نرمال با میانگین μ_X و واریانس $\sigma^۲_X$ و همچنین $Y_۱, Y_۲, \ldots, Y_m$ متغیرهای تصادفی مستقل و هر یک دارای توزیع نرمال با میانگین μ_Y و واریانس $\sigma^۲_Y$ و نیز X_iها و Y_iها مستقل باشند، آنگاه

$$\frac{(n-۱)S^۲_۱/\sigma^۲_X}{(m-۱)S^۲_۲/\sigma^۲_Y} \sim F(n-۱, m-۱)$$

که در آن $S^۲_۱ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$ و $S^۲_۲ = \frac{۱}{m-۱}\sum_{i=۱}^{m}(Y_i - \bar{Y})^۲$. این مطلب برای استنباط درباره نسبت واریانس‌های دو جامعه نرمال به کار می‌رود که در فصل‌های بعد خواهیم دید.

برای محاسبه احتمال‌های تجمعی این توزیع ($p(F(n,m) < a)$) مشابه توزیع‌های نرمال، T و $\chi^۲$ جداولی در آخر کتاب‌های آماری طراحی شده است.

۶.۴ توزیع تابعی از متغیرهای تصادفی

فرض کنید که تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X مشخص است و می‌خواهیم تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = g(X)$ را بدست آوریم. برای این منظور از روش تابع توزیع استفاده می‌کنیم که در مثال‌های زیر شرح داده می‌شود.

مثال ۱.۶.۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $(۰, ۱)$ باشد.

الف) تابع چگالی احتمال $U = e^X$ را محاسبه کنید.

ب) تابع مولد گشتاور $V = -\ln(X)$ را بدست آورید. (امیرکبیر ۹۰)

حل. الف) ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی U را بدست می‌آوریم و سپس از آن نسبت به u مشتق می‌گیریم و مشتق تابع توزیع، تابع چگالی است.

$$F_U(u) = p(U \leq u) = p(e^X \leq u)$$

از دو طرف نامساوی داخل احتمال $\ln$ می‌گیریم و چون $\ln$ تابعی صعودی است، نامساوی تغییری نمی‌کند.

$$f_X(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ F_U(u) = p(X \leq \ln u)$$

$$۰ < x < ۱ \Rightarrow ۱ < e^X < e \Rightarrow ۱ < u < e \Rightarrow ۰ < \ln u < ۱$$

$$\Rightarrow F(u) = \int_۰^{\ln u} ۱ dx = \begin{cases} ۰ & u < ۱ \\ \ln u & ۱ < u < e \\ ۱ & u > e \end{cases}$$

$$f(u) = \frac{dF(u)}{du} = \frac{۱}{u} \qquad ۱ < u < e$$

برای اینکه مطمئن شویم تابع بدست آمده تابع چگالی است، ویژگی‌های آن را بررسی کنید.

ب)

$$M_V(t) = \mathrm{E}(e^{tV}) = \mathrm{E}(e^{-t\ln X}) = \mathrm{E}(e^{\ln(X^{-t})}) = \mathrm{E}(X^{-t}) = \int_۰^۱ x^{-t} \times ۱ dx = \frac{x^{-t+۱}}{-t+۱}\Big|_۰^۱$$

$$= \frac{۱}{۱-t} \qquad ۱ - t > ۰$$

مثال ۲.۶.۴. X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم مقابل است.

$$p(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{xy}{۱۸} & x = ۱, ۲, ۳ \quad y = ۱, ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع احتمال $Z = XY$ را تعیین کنید. (امیرکبیر ۸۵)

حل. برای بدست آوردن تابع احتمال Z باید تمامی نقاطی را که احتمال آن غیر صفر است محاسبه کرد. در تمامی متغیرهای گسسته از این روش استفاده کنید.

$$p(Z = ۱) = p(X = ۱, Y = ۱) = \frac{۱}{۱۸}$$

$$p(Z = ۲) = p(X = ۱, Y = ۲) + p(X = ۲, Y = ۱) = \frac{۲}{۱۸} + \frac{۲}{۱۸} = \frac{۲}{۹}$$

$$p(Z=۳)=p(X=۳,Y=۱)=\frac{۱}{۶}$$
$$p(Z=۴)=p(X=۲,Y=۲)=\frac{۲}{۹}$$
$$p(Z=۶)=p(X=۳,Y=۲)=\frac{۱}{۳}$$

در سایر نقاط، احتمال متغیر تصادفی Z برابر صفر است.

مثال ۳.۶.۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۲}{\pi(۱+x^۲)} & x>۰\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد. تابع احتمال متغیر $Y=\frac{۱}{X}$ را حساب کنید. (مهندسی نساجی ۸۵)

حل.

$$F_Y(y)=p(Y=y)=p(\frac{۱}{X}\le y)=p(X\ge\frac{۱}{y})=\int_{\frac{۱}{y}}^{+\infty}\frac{۲}{\pi(۱+x^۲)}dx$$
$$=\frac{۲}{\pi}\int_{\frac{۱}{y}}^{+\infty}\frac{dx}{۱+x^۲}=\frac{۲}{\pi}\tan^{-۱}x\Big|_{\frac{۱}{y}}^{+\infty}=\frac{۲}{\pi}(\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\frac{۱}{y})$$
$$=۱-\frac{۲}{\pi}\tan^{-۱}\frac{۱}{y}$$
$$f_Y(y)=\frac{dF(y)}{dy}=-\frac{۲}{\pi}(\frac{-۱/y^۲}{۱+۱/y^۲})=\begin{cases}\frac{۲}{\pi(۱+y^۲)} & y>۰\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

مثال ۴.۶.۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)=\frac{۱}{x\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(\ln x)^۲}{۲}}$ باشد. مقدار $\sigma_Y^۲$ را که در آن $Y=\ln X$ حساب کنید. (نساجی ۸۶)

حل.

$$F_Y(y)=p(Y\le y)=p(\ln X\le y)=p(X\le e^y)=F_X(e^y)$$
$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=e^yf_X(e^y)=e^y\frac{۱}{e^y\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{y^۲}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{y^۲}{۲}}\qquad -\infty<y<+\infty$$

توزیع Y نرمال استاندارد است که واریانس آن برابر با یک است.

مثال ۵.۶.۴. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با تابع احتمال یکسان

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t} & t\ge ۰\\ ۰ & t<۰\end{cases}$$

باشد. تابع احتمال متغیر تصادفی $W=\min(X,Y)$ را حساب کنید. (نساجی ۸۶)

حل.

$$\begin{aligned} F_W(w) &= p(W \leq w) = p(\min(X,Y) \leq w) = ۱ - p(\min(X,Y) \geq w) \\ &= ۱ - p(X \geq w, Y \geq w) = ۱ - p(X \geq w)p(Y \geq w) \\ &= ۱ - (\int_w^\infty e^{-t}dt)(\int_w^\infty e^{-t}dt) = ۱ - e^{-۲w} \end{aligned}$$

$$f(w) = \frac{dF(w)}{dw} = \begin{cases} ۲e^{-۲w} & w > ۰ \\ ۰ & w < ۰ \end{cases}$$

تمرین ۶.۶.۴. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت مقابل تعریف شده است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۵} & -۲ < x < ۳ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = X^۲$ را حساب کنید. (امیرکبیر ۸۵)

تمرین ۷.۶.۴. فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(۱ + e^{-x})^۲} \qquad -\infty < x < \infty$$

تابع چگالی $Y = \frac{۱}{۱+e^{-X}}$ را بدست آورید.

تمرین ۸.۶.۴. تابع احتمال توأم X و Y عبارت است از

$$f_X(x) = \begin{cases} ۲e^{-(x+y)} & ۰ < x < y < \infty \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) تابع احتمال توأم $U = X$ و $V = X + Y$ را بدست آورید.

ب) تابع احتمال حاشیه ای U و V را بدست آورید. (علم و صنعت ۸۵)

تمرین ۹.۶.۴. اگر تابع توزیع X به صورت $F_X(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ t & ۰ \leq t \leq ۱ \\ ۱ & t > ۱ \end{cases}$ باشد، تابع توزیع $Y = -\ln X$ را حساب کنید. (کامپیوتر ۸۲)

تمرین ۱۰.۶.۴. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\pi} & -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد. تابع چگالی $Y = \tan X$ را حساب کنید. (نساجی ۸۲)

۷.۴ نامساوی مارکوف و چبیشف

برای هر عدد ثابت و مثبت c و هر تابع نامنفی g از متغیر تصادفی X داریم

$$p(g(X) \geq c) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{c} \qquad \text{نامساوی چبیشف}$$

اگر در نامساوی مارکوف قرار دهیم $g(X) = (X-\mu)^{۲}$ و $c = k^{۲}\sigma^{۲}$، داریم:

$$\forall \epsilon > ۰;\ p(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{۱}{k^{۲}}$$

مثال ۱.۷.۴. فرض کنید تابع چگالی X به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} ۶x(۱-x) & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$p(\mu - ۲\sigma < X < \mu + ۲\sigma)$ را محاسبه کنید و سپس نتیجه را با نتیجه حاصل از نامساوی چبیشف مقایسه کنید (μ میانگین و σ انحراف معیار). (امیرکبیر ۸۸)

حل.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{۰}^{۱} ۶x(۱-x)dx + \int_{-\infty}^{۰} (۰ \times x)dx + \int_{۱}^{\infty} (۰ \times x)dx \\
&= ۶\int_{۰}^{۱} (x^{۲} - x^{۳})dx = ۶(\frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۴}}{۴})\Big|_{۰}^{۱} \\
&= \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(X^{۲}) = \int_{۰}^{۱} ۶x(۱-x) \times x^{۲}dx = ۶\int_{۰}^{۱} (x^{۳} - x^{۴})dx = ۶(\frac{x^{۴}}{۴} - \frac{x^{۵}}{۵})\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۳}{۱۰}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^{۲}) - \mathrm{E}^{۲}(X) = \frac{۳}{۱۰} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۱}{۲۰}}$$

$$\begin{aligned}
p(\frac{۱}{۲} - ۲\sqrt{\frac{۱}{۲۰}} < X < p(\frac{۱}{۲} + ۲\sqrt{\frac{۱}{۲۰}}) &= \int_{\frac{۱}{۲}-۲\sqrt{\frac{۱}{۲۰}}}^{\frac{۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۲۰}}} ۶x(۱-x)dx \\
&= ۶\int_{\frac{۱}{۲}-۲\sqrt{۰/۰۵}}^{\frac{۱}{۲}+۲\sqrt{۰/۰۵}} (x - x^{۲})dx = ۶(\frac{x^{۲}}{۲} - \frac{x^{۳}}{۳})\Big|_{\frac{۱}{۲}-۲\sqrt{۰/۰۵}}^{\frac{۱}{۲}+۲\sqrt{۰/۰۵}} \\
&= ۶((\frac{(۰/۵ + ۲\sqrt{۰/۰۵})^{۲}}{۲} - \frac{(۰/۵ + ۲\sqrt{۰/۰۵})^{۳}}{۳}) - \frac{(۰/۵ - ۲\sqrt{۰/۰۵})^{۲}}{۲} \\
&\quad + \frac{(۰/۵ - ۲\sqrt{۰/۰۵})^{۳}}{۳}) = ۶(۰/۴۴ - ۰/۲۸ - ۰/۰۰۱ + ۰/۰۰۰۰۴) \\
&= ۰/۹۶
\end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی چبیشف داریم:

$$p(\mu-۲\sigma<X<\mu+۲\sigma)=p(-۲\sigma<X-\mu<۲\sigma)=p(|X-\mu|\le ۲\sigma)\ge ۱-\frac{۱}{۲^۲}$$
$$=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

احتمال دقیق برابر با ۰/۹۶ بود و نامساوی چبیشف با آن سازگار است.

مثال ۲.۷.۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی مثبت با میانگین ۳ باشد. حداکثر مقدار $p(X\ge ۵)$ چقدر است؟ *(صنایع ۸۸)*

حل. با استفاده از نامساوی مارکوف داریم

$$p(X\ge ۵)\le \frac{\mathrm{E}(X)}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

تمرین ۳.۷.۴. فرض کنید تعداد محصولات تولید شده در یک کارخانه در طول هفته یک متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ و واریانس ۲۵ باشد آنگاه در مورد حداقل مقدار احتمال این که محصول یک هفته بین ۴۰ و ۶۰ باشد چقدر است؟ *(آزاد جنوب ۸۷)*

تمرین ۴.۷.۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با امید ریاضی ۲ و انحراف معیار $\frac{۱}{۴}$ باشد. حداقل مقدار $p(۱<X<۳)$ چقدر است؟ *(صنایع ۸۸)*

فصل ۵

متغیرهای تصادفی توأم

تاکنون با یک متغیر تصادفی سر و کار داشتیم ولی در پدیده های روزمره و مسائل علمی مختلف غالباً با ثبت یا مشاهده همزمان چند مقدار مواجه هستیم به عنوان مثال برای سنجش آمادگی جسمانی یک ورزشکار قد و وزن او به عنوان دو معیار باید در نظر گرفته شوند. یعنی در اینجا قد و وزن او هر کدام یک متغیر تصادفی می‌باشد که باید به طور همزمان مورد توجه قرار گیرند.

۱.۵ تابع احتمال توأم گسسته

اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند در این صورت تابع دو متغیره $f(x,y)$ که به صورت $f(x,y) = p(X=x, Y=y)$ تعریف می‌شود، یک تابع احتمال توأم گسسته نامیده می‌شود هرگاه دو ویژگی زیر را داشته باشد.

۱. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{۲} \quad ۰ \leq f(x,y) \leq ۱$ (احتمال هر زوج مرتب (x,y) بین صفر و یک باشد)

۲. $\sum_y \sum_x f(x,y) = ۱$ (جمع همه احتمالات برابر یک شود)

مثال ۱.۱.۵. الف) مقدار c را چنان بیابید تا جدول زیر جدول احتمال توأم (x,y) باشد.

ب) مقدار $f(۰,۱)$ چقدر است؟

$Y \backslash X$	0	1
1	$2c$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	c

حل. ۱. از ویژگی ۱ نتیجه می‌شود که $c > 0$، و از ویژگی دوم داریم:

$$\sum_{y=1}^{2}\sum_{x=0}^{1} f(x,y) = 2c + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c = 1 \to c = \frac{1}{12}$$

۲. $f(0,1) = 2c = \frac{2}{12}$

۱.۱.۵ امید ریاضی تابعی از دو متغیر تصادفی

مشابه تعریف $\mathrm{E}(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$ امید ریاضی $g(X,Y)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) \sum_y \sum_x g(x,y)f(x,y)$$

مثال ۲.۱.۵. اگر تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر باشد، مطلوب است

$Y \backslash X$	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

الف) $\mathrm{E}(XY)$

ب) $\mathrm{E}(X)$

حل. الف) با استفاده از تعریف فوق و اینکه $g(X,Y) = XY$

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_y \sum_x xyf(x,y) = 0 \times 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 2 \times \frac{1}{4} + 1 \times 2 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

ب) اگر در نظر بگیریم $g(X,Y) = X$ داریم:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_y \sum_x xf(x,y) = 0 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

۲.۵ توابع احتمال حاشیه ای

برای بدست آوردن توابع احتمال حاشیه ای از روی تابع احتمال توأم از روابط زیر استفاده کنیم.

$$p(X = x) = \sum_y p(X = x, Y = y)$$

و

$$p(Y = y) = \sum_x p(X = x, Y = y)$$

مثال ۱.۲.۵. توابع احتمال حاشیه ای (کناری) متغیرهای تصادفی X و Y را با توجه به تابع احتمال توأم زیر بدست آورید.

$Y \backslash X$	0	1	2	$p(Y=y)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
$p(X=x)$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	1

حل. با توجه به روابط بالا برای به دست آوردن تابع احتمال حاشیه ای X کافی ست روی مقادیر Y احتمالات توأم را با هم جمع کنیم، مثلاً

$$p(X=۰)=p(X=۰,Y=۱)+p(X=۰,Y=۳)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۴}{۱۲}$$

و به همین ترتیب $p(X=۱)$ و $p(X=۲)$ نیز به دست می‌آید. تابع احتمال حاشیه ای Y نیز به طور مشابه حاصل می‌شود.

۳.۵ استقلال دو متغیر تصادفی گسسته

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند، این دو متغیر را مستقل از هم گوییم هرگاه برای هر دوتایی (x,y) داشته باشیم:

$$p(X=x,Y=y)=p(X=x)p(Y=y)$$

دقت داشته باشیم که اگر حتی یک زوج مرتب (x,y) پیدا شود که رابطه بالا برای آن درست نباشد دو متغیر مستقل نخواهند بود.

مثال ۱.۳.۵. دو سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X تعداد شیرها و Y شماره خال‌ها باشد، جدول توزیع احتمال (X,Y) را بیابید. آیا X و Y مستقلند؟

حل. با توجه به جدول زیر

$Y \backslash X$	0	1	2	$p(Y=y)$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$
4	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$
5	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$
6	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$
$p(X=x)$	$\frac{6}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{6}{18}$	1

چون به ازای هر (x,y) داریم $p(X=x,Y=y)=p(X=x)p(Y=y)$ پس دو متغیر X و Y مستقلند، مثلاً

$$p(X=۱,Y=۴)=\frac{۱}{۱۸}$$
$$p(X=۱)p(Y=۴)=\frac{۶}{۱۸}\times\frac{۳}{۱۸}=\frac{۱}{۱۸}$$

۴.۵ توابع احتمال شرطی در حالت گسسته

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع احتمال توأم گسسته باشد، تابع احتمال شرطی متغیر تصادفی X (در هر نقطه x) به شرط آن که $Y=y$ معین باشد عبارت است از:

$$f(x|y)=p(X=x|Y=y)=\frac{p(X=x,Y=y)}{p(Y=y)},\quad p(Y=y)\neq ۰$$

و به طریق مشابه

$$f(y|x)=p(Y=y|X=x)=\frac{p(X=x,Y=y)}{p(X=x)},\quad p(X=x)\neq ۰$$

مثال ۱.۴.۵. فرض کنید تابع احتمال توأم (X,Y) به صورت زیر باشد.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

تابع احتمال شرطی $f(x|Y=۰)$ را بدست آورید.

حل. طبق تعریف بالا داریم:

$Y \backslash X$	0	1	$p(Y=y)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
$p(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

$$p(Y=۰)=\frac{۳}{۸}\qquad p(X=۰|Y=۰)=\frac{p(X=۰,Y=۰)}{p(Y=۰)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۳}{۸}}=\frac{۱}{۳}$$

$$p(X=۱|Y=۰)=\frac{p(X=۱,Y=۰)}{p(Y=۰)}=\frac{\frac{۲}{۸}}{\frac{۳}{۸}}=\frac{۲}{۳}$$

$X|Y=0$	0	1
$f(x|Y=0)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

۵.۵ امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی

امید ریاضی شرطی مشابه امید ریاضی و واریانس معمولی که قبلاً معرفی شد، تعریف می‌شود با این تفاوت که در اینجا به جای تابع احتمال، تابع احتمال شرطی استفاده می‌شود.

$$\mathrm{E}(X|Y=y)=\sum_x xf(x|y),\quad \mathrm{E}(Y|X=x)=\sum_y yf(y|x)$$

$$\mathrm{Var}(X|Y=y)=\mathrm{E}(X^۲|Y=y)-(\mathrm{E}(X|Y=y))^۲$$

که در آن

$$\mathrm{E}(X^۲|Y=y)=\sum_x x^۲f(x|y)$$

مثال ۱.۵.۵. در مثال قبل $\mathrm{E}(X|Y=۰)$ و $\mathrm{Var}(X|Y=۰)$ را بدست آورید.

حل. همان‌طور که دیدیم تابع احتمال X به شرط $Y=۰$ به صورت زیر است.

$X\|Y=0$	0	1
$f(x\|Y=0)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

بنابراین با توجه به تعریف بالا داریم

$$\mathrm{E}(X|Y=۰)=\sum_x xf(x|y)=۰\times\frac{۱}{۳}+۱\times\frac{۲}{۳}$$

$$\mathrm{E}(X^۲|Y=۰)=\sum_x x^۲f(x|y)=۰^۲\times\frac{۱}{۳}+۱^۲\times\frac{۲}{۳}$$

$$\mathrm{Var}(X|Y=۰)=\mathrm{E}(X^۲|Y=۰)-\big(\mathrm{E}(X|Y=۰)\big)^۲=\frac{۲}{۳}-(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۲}{۹}$$

۱.۵.۵ کواریانس

در بسیاری از موارد دانستن تغییرات دو متغیر تصادفی نسبت به هم حائز اهمیت است به عنوان مثال رابطه بین وزن و سرعت دونده، برای این منظور از مفهوم کواریانس استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}\Big[\big(X-\mathrm{E}(X)\big)\big(Y-\mathrm{E}(Y)\big)\Big]=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

ویژگی‌های کواریانس:

۱. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$

۲. $\mathrm{Cov}(X,c)=۰$ که در آن c مقداری ثابت است.

۳. $\operatorname{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\operatorname{Cov}(X,Y)$ که در آن a، b، c و d مقادیر ثابتی هستند.

۴. $\operatorname{Cov}(X+Y, Z) = \operatorname{Cov}(X,Z) + \operatorname{Cov}(Y,Z)$

۵. $\operatorname{Cov}(X,X) = \operatorname{Var}(X)$

۶. برای دو متغیر تصادفی X و Y داریم $\operatorname{E}(XY) = \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y)$ بنابراین $\operatorname{Cov}(X,Y) = ۰$. توجه داشته باشید که عکس این مطلب درست نیست یعنی اگر $\operatorname{Cov}(X,Y)$ صفر باشد استقلال دو متغیر را نتیجه نمی‌دهد.

۲.۵.۵ ضریب همبستگی

از آنجایی که مقدار کواریانس به واحد اندازه‌گیری بستگی دارد (بنا به ویژگی ۳) و نیز مقدار کواریانس از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌تواند تغییر کند بنابراین برای رفع این معایب از ضریب همبستگی برای سنجش میزان تغییرات بین دو متغیر استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}$$

ویژگی‌های ضریب همبستگی

۱. $\rho(aX+b, cY+d) = \frac{ac}{|ac|}\rho(X,Y)$ که در آن a، b، c و d مقادیر ثابتی هستند.

۲. $-۱ \le \rho \le +۱$

اگر $-۱ < \rho < ۱$ بیانگر این است که دو متغیر ارتباط خطی مستقیم دارند.

اگر $-۱ < \rho < ۰$ بیانگر این است که دو متغیر ارتباط خطی عکس دارند.

اگر $\rho = ۰$، دو متغیر نا همبسته‌اند، یعنی ارتباط خطی بین دو متغیر وجود ندارد.

اگر $\rho = ۱$، بیانگر ارتباط خطی مستقیم بین دو متغیر است یعنی $Y = aX + b,\ a > ۰$

اگر $\rho = -۱$، بیانگر ارتباط خطی عکس بین دو متغیر است یعنی $Y = aX + b,\ a < ۰$

ویژگی‌های واریانس

۱. $\operatorname{Var}(c) = ۰$ که در آن c مقداری ثابت است.

۲. $\operatorname{Var}(aX+b) = a^۲\operatorname{Var}(X)$ که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند.

۳. $\operatorname{Var}(aX \pm bY) = a^۲\operatorname{Var}(X) + b^۲\operatorname{Var}(Y) \pm ۲ab\operatorname{Cov}(X,Y)$

مثال ۲.۵.۵. جعبه ای شامل ۲ مهره سفید و سه مهره سیاه است. یک مهره تصادفی و بدون جایگذاری انتخاب کرده و متغیر تصادفی X را تعداد مهره سفید خارج شده در نظر می‌گیریم سپس از باقیمانده مهره‌ها ۳ مهره بدون جایگذاری انتخاب کرده و متغیر تصادفی Y را تعداد مهره های سیاه در این انتخاب در نظر می‌گیریم. (علم و صنعت ۸۶)

الف) تابع احتمال توأم X و Y را بدست آورید.

ب) واریانس X را بدست آورید.

ج) $\mathrm{E}(Y|X=0)$ را محاسبه کنید.

د) کواریانس بین X و Y را بدست آورید.

حل. الف) داریم

$Y \backslash X$	0	1	$p(Y=y)$
1	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
3	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$p(X=x)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	

X: تعداد مهره های سفید در انتخاب اول $X=0,1$

Y: تعداد مهره های سیاه در انتخاب دوم $Y=1,2,3$

$$p(X=0,Y=1)=p(X=0)p(Y=1|X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}=\frac{3}{10}$$

$$p(X=0,Y=2)=p(X=0)p(Y=2|X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}}=\frac{3}{10}$$

$$p(X=0,Y=3)=p(X=0)p(Y=3|X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{\binom{2}{3}\binom{2}{0}}{\binom{4}{3}}=0$$

$$p(X=1,Y=1)=p(X=1)p(Y=1|X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{\binom{1}{2}\binom{3}{1}}{\binom{4}{3}}=0$$

$$p(X=1,Y=2)=p(X=1)p(Y=2|X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}}=\frac{3}{10}$$

ب)

$$\mathrm{E}(X) = ۰ \times \frac{۶}{۱۰} + ۱ \times \frac{۴}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰}$$

$$\mathrm{E}(X^۲) = ۰^۲ \times \frac{۶}{۱۰} + ۱^۲ \times \frac{۴}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) = \frac{۴}{۱۰} - \frac{۱۶}{۱۰۰} = \frac{۲۴}{۱۰۰}$$

ج) داریم

$Y = y \mid X = 0$	1	2	3
$p(Y = y \mid X = 0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\mathrm{E}(Y \mid X = ۰) = \sum_y p(Y = y \mid X = ۰) = ۱ \times \frac{۱}{۲} + ۲ \times \frac{۱}{۲} + ۳ \times ۰ = \frac{۳}{۲}$$

د)

$$\mathrm{E}(Y) = ۱ \times \frac{۳}{۱۰} + ۲ \times \frac{۳}{۱۰} + ۳ \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۶}{۵}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_x \sum_y xyp(X = x, Y = y)\\ &= ۰ \times ۱ \times \frac{۳}{۱۰} + ۰ \times ۲ \times \frac{۳}{۱۰} + \cdots + ۱ \times ۳ \times \frac{۱}{۱۰}\\ &= \frac{۹}{۱۰}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \frac{۹}{۱۰} - \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۵} = \frac{۴۲}{۱۰۰}$$

مثال ۳.۵.۵. تابع احتمال توأم متغیر تصادفی X و Y به صورت مقابل داده شده است.

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & x = ۱, ۲, ۳ \quad y = ۱, ۲, ۳ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را محاسبه کنید.

ب) توابع احتمال حاشیه ای را بیابید.

ج) آیا X و Y مستقل هستند؟ (آزاد جنوب ۸۵)

حل. الف) چون تابع فوق یک تابع احتمال توأم است پس باید داشته باشیم:

$$\sum_{y=۱}^{۳}\sum_{x=۱}^{۳} p(X=x, Y=y) = \sum_{y=۱}^{۳}\sum_{x=۱}^{۳} kxy = ۱$$

$$\Rightarrow k[۱\times۱+۱\times۲+۱\times۳+۲\times۱+۲\times۲+۲\times۳+۳\times۱+۳\times۲+۳\times۳] = ۱$$

$$k = \frac{۱}{۳۶}$$

ب)

$$p(X=x) = \sum_y p(X=x, Y=y) = \sum_{y=۱}^{۳} \frac{xy}{۳۶} = \frac{x}{۳۶}\sum_{y=۱}^{۳} y = \frac{x}{۶} \qquad x=۱,۲,۳$$

$$p(Y=y) = \sum_x p(X=x, Y=y) = \sum_{x=۱}^{۳} \frac{xy}{۳۶} = \frac{y}{۳۶}\sum_{x=۱}^{۳} x = \frac{y}{۶} \qquad y=۱,۲,۳$$

ج)

$$p(X=۱, Y=۱) = \frac{۱\times۱}{۳۶} = p(X=۱)p(Y=۱) = \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶} \checkmark$$

$$p(X=۱, Y=۲) = \frac{۱\times۲}{۳۶} = p(X=۱)p(Y=۲) = \frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۶} \checkmark$$

$$\vdots$$

$$p(X=۳, Y=۳) = \frac{۳\times۳}{۳۶} = p(X=۳)p(Y=۳) = \frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶} \checkmark$$

چون به ازای همه مقادیر x و y رابطه $p(X=x, Y=y) = p(X=x)p(Y=y)$ برقرار است پس در نتیجه متغیرهای X و Y مستقل هستند.

مثال ۴.۵.۵. اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم مقابل باشند،

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۴۸}(x+y)^۲ & x=۰,۱,۲ \quad y=۰,۱,۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) $\mathrm{E}(Y|X=۱)$ و $\mathrm{Var}(Y|X=۱)$ را محاسبه کنید.

ب) $p(X+Y>۲)$ و $p(Y>۱|X<\frac{۳}{۲})$ را محاسبه کنید. (امیر کبیر ۸۶)

حل. الف) برای محاسبه $E(Y|X=۱)$ و $\mathrm{Var}(Y|X=۱)$ باید $p(Y=y|X=۱)$ را محاسبه کنیم.

Y \ X	0	1	2	$p(Y=y)$
0	0	$\frac{1}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{5}{48}$
1	$\frac{1}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{9}{48}$	$\frac{14}{48}$
2	$\frac{4}{48}$	$\frac{9}{48}$	$\frac{16}{48}$	$\frac{29}{48}$
$p(X=x)$	$\frac{5}{48}$	$\frac{14}{48}$	$\frac{29}{48}$	1

$$p(Y=۰|X=۱)=\frac{p(X=۱,Y=۰)}{p(X=۱)}=\frac{\frac{۱}{۱۴}}{\frac{۱۴}{۴۸}}=\frac{۱}{۱۴}$$

$$p(Y=۱|X=۱)=\frac{p(X=۱,Y=۱)}{p(X=۱)}=\frac{\frac{۴}{۴۸}}{\frac{۱۴}{۴۸}}=\frac{۴}{۱۴}$$

مثال ۵.۵.۵. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y هر دو دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(۰,۱)$ و مستقل از هم باشند. اگر تعریف کنیم $Z=X+Y$ و $V=X-Y$ آنگاه $\mathrm{Cov}(Z,V)$ چقدر است؟

حل.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z,V)&=\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y)=\frac{(۱-۰)^۲}{۱۲}-\frac{(۱-۰)^۲}{۱۲}\\&=۰\end{aligned}$$

مثال ۶.۵.۵. $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ دارای واریانس مشترک یک می‌باشند. اگر دو به دو دارای ضریب همبستگی $\frac{۱}{۲}$ باشند، واریانس $X_۱-X_۲+X_۳$ را بیابید. (کامپیوتر ۸۹)

حل.

$$\rho(X_۱,X_۲)=\frac{\mathrm{Cov}(X_۱,X_۲)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_۱)\,\mathrm{Var}(X_۲)}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{\mathrm{Cov}(X_۱,X_۲)}{\sqrt{۱\times ۱}}\Rightarrow\mathrm{Cov}(X_۱,X_۲)=\frac{۱}{۲}$$

$$\rho(X_۱,X_۳)=\frac{\mathrm{Cov}(X_۱,X_۳)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_۱)\,\mathrm{Var}(X_۳)}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{\mathrm{Cov}(X_۱,X_۳)}{\sqrt{۱\times ۱}}\Rightarrow\mathrm{Cov}(X_۱,X_۳)=\frac{۱}{۲}$$

$$\rho(X_۲,X_۳)=\frac{\mathrm{Cov}(X_۲,X_۳)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_۲)\,\mathrm{Var}(X_۳)}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{\mathrm{Cov}(X_۲,X_۳)}{\sqrt{۱\times ۱}}\Rightarrow\mathrm{Cov}(X_۲,X_۳)=\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_۱ - X_۲ + X_۳) &= \mathrm{Var}(X_۱) + \mathrm{Var}(X_۲) + \mathrm{Var}(X_۳) - ۲\,\mathrm{Cov}(X_۱, X_۲)\\ &\quad + ۲\,\mathrm{Cov}(X_۱, X_۳) - ۲\,\mathrm{Cov}(X_۲, X_۳) = ۱ + ۱ + ۱ - ۲ \times \frac{۱}{۲}\\ &\quad + ۲ \times \frac{۱}{۲} - ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲\end{aligned}$$

مثال ۷.۵.۵. فرض کنید دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر دارای توزیع یکنواخت گسسته به صورت زیر باشد. احتمال اینکه $p(X \neq Y)$ باشد را محاسبه کنید. *(مهندسی مکاترونیک ۸۷)*

$$p(X = x) = \frac{۱}{\theta} \quad x = ۱, ۲, \dots, \theta$$

$$p(Y = y) = \frac{۱}{\theta} \quad y = ۱, ۲, \dots, \theta$$

حل.

$$\begin{aligned}p(X \neq Y) &= ۱ - p(X = Y) = ۱ - \sum\sum_{x=y} p(X = x, Y = y)\\ &= ۱ - \sum\sum_{x=y} p(X = x)p(Y = y) = ۱ - \sum\sum_{x=y} \frac{۱}{\theta} \times \frac{۱}{\theta}\\ &= ۱ - \frac{۱}{\theta^۲} \sum\sum_{x=y} ۱ = ۱ - \frac{۱}{\theta^۲} \times \theta\\ &= ۱ - \frac{۱}{\theta}\end{aligned}$$

تعداد نقاطی که x و y می‌توانند با هم برابر باشند برابر است با θ که به صورت $(۱, ۲, \dots, \theta)$ است، یعنی

$$x = y = ۱ \quad \text{یا} \quad x = y = ۲ \quad \text{یا} \quad \dots \quad x = y = \theta$$

مثال ۸.۵.۵. فرض کنید $p(X_i = x_i) = \binom{۱}{x_i}\theta^{x_i}(۱-\theta)^{۱-x_i},\ i = ۱, ۲, \dots, n$ در این صورت $\mathrm{Var}(\Pi_{i=۱}^n X_i)$ را پیدا کنید (X_iها مستقل هستند). *(مهندسی مکاترونیک ۸۷)*

حل. با توجه به ضابطه تابع $p(X_i = x_i)$ واضح است که متغیر X فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کند، یعنی

$$p(X_i = ۰) = \binom{۱}{۰}\theta^۰(۱ - \theta)^{۱-۰} = ۱ - \theta \quad i = ۱, ۲, \dots, n$$

$$p(X_i = ۱) = \binom{۱}{۱}\theta^۱(۱ - \theta)^{۱-۱} = \theta \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

بنابراین متغیر تصادفی $Y=\Pi_{i=۱}^{n}X_i$ نیز مقادیر ۰ یا ۱ را می‌تواند اختیار کند. اگر همه X_iها برابر ۱ باشد، متغیر Y عدد ۱ را می‌گیرد در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود، یعنی

$$\begin{aligned} p(Y=۱) &= p(X_۱=۱, X_۲=۱, \dots, X_n=۱) \\ &= p(X_۱=۱)p(X_۲=۱)\cdots p(X_n=۱) \\ &= \theta^n \end{aligned}$$

$$p(Y=۰) = ۱ - p(Y=۱) = ۱-\theta^n$$

$Y=y$	0	1
$p(Y=y)$	$1-\theta^n$	θ^n

$$\mathrm{E}(Y) = ۰\times p(Y=۰) + ۱\times p(Y=۱) = ۰\times(۱-\theta^n) + ۱\times\theta^n = \theta^n$$
$$\mathrm{E}(Y^۲) = ۰^۲\times p(Y=۰) + ۱^۲\times p(Y=۱) = ۰^۲\times(۱-\theta^n) + ۱^۲\times\theta^n = \theta^n$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^۲) - \mathrm{E}^۲(Y) = \theta^n - \theta^{۲n} = \theta^n(۱-\theta^n)$$

مثال ۹.۵.۵. هر یک از متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع هندسی (مدل تعداد آزمایش‌ها) با پارامتر p و مستقل هستند. $p(X=Y)$ چقدر است؟ (مهندسی صنایع ۸۳)

$$p(X=x) = p(۱-p)^{x-۱} \quad x=۱,۲,\dots$$
$$p(Y=y) = p(۱-p)^{y-۱} \quad y=۱,۲,\dots$$

حل. چون X و Y مستقل هستند پس داریم:

$$p(X=x,Y=y) = p(X=x)p(Y=y) = p^۲(۱-p)^{x+y-۲} \quad x=۱,۲,\dots \ y=۱,۲,\dots$$

$$\begin{aligned} p(X=Y) &= \sum_{x=y}\sum p(X=x,Y=y) = \sum_{x=y}\sum p^۲(۱-p)^{x+y-۲} \\ &= \sum_{x=۱}^{\infty} p^۲(۱-p)^{x+x-۲} = \frac{p^۲}{(۱-p)^۲}\sum_{x=۱}^{\infty}(۱-p)^{۲x} \\ &= \frac{p^۲}{(۱-p)^۲}\times\frac{(۱-p)^۲}{۱-(۱-p)^۲} = \frac{p^۲}{p^۲+۲p} \\ &= \frac{p}{p+۲} \end{aligned}$$

تمرین ۱۰.۵.۵. سکه ای که شانس شیر در آن سه برابر خط است را ۳ بار پرتاب می‌کنیم و متغیرهای تصادفی X و Y را به ترتیب تعداد شیرها و تعداد خط‌ها در ۳ بار پرتاب سکه در نظر می‌گیریم. تابع احتمال توأم X و Y را بدست آورده و $\mathrm{Var}(X)$ و $\mathrm{Var}(Y)$ را تعیین کنید. آیا X و Y از هم مستقلند؟ چرا؟ (آزاد تهران- جنوب ۸۷)

تمرین ۱۱.۵.۵. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع دو جمله ای با پارامترهای n و p باشند. ثابت کنید

$$p(X+Y=n)=\binom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)$$

(امیر کبیر ۹۰)

تمرین ۱۲.۵.۵. یک سکه را n بار پرتاب می‌کنیم، فرض کنید X تعداد شیر و Y تعداد خطها باشد. مقدار $\mathrm{Var}(X+Y)$ را بدست آورید. (کامپیوتر ۸۹)

تمرین ۱۳.۵.۵. اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با واریانس σ^2 باشند و داشته باشیم $Y=X_1+2X_2$ و $Z=X_1+bX_2$ برای اینکه متغیرهای Y و Z غیر همبسته (نا همبسته) باشند، مقدار b چقدر است؟ (مهندسی معدن ۸۹)

تمرین ۱۴.۵.۵. می‌دانیم $\begin{array}{c|cc} X=x & 0 & 1 \\ \hline p(X=x) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$ و $\begin{array}{c|cc} Y=y & 1 & 2 \\ \hline p(Y=y) & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$ و $p(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}$ می‌باشد. واریانس $Z=3X+Y-12$ را محاسبه کنید. (مهندسی صنایع ۸۲)

تمرین ۱۵.۵.۵. اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشند،

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{25}(x+y)^2 & x=0,1,2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

آنگاه مقدار $p(X<2|Y=1)$ را بدست آورید. (نساجی ۸۳)

۶.۵ تابع چگالی توأم

اگر X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته باشند، در این صورت تابع دو متغیره $f(x,y)$ را یک تابع چگالی توأم گویند هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد.

۱. به ازای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ داشته باشیم $f(x,y)\geq 0$

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

مثال ۱.۶.۵. مقدار c را چنان بیابید تا تابع زیر یک تابع چگالی توأم باشد.

$$f(x,y)=\begin{cases} c & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حل. از ویژگی یک بدیهی است که $c>0$ و از ویژگی دوم خواهیم داشت

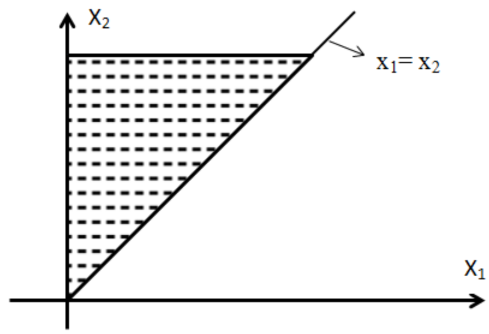
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int\int_{\text{سایر جاها}} 0\,dxdy+\int_0^1\int_0^1 c\,dxdy=0+c=1\Rightarrow c=1$$

مثال ۲.۶.۵. الف) مقدار c را چنان بیابید تا تابع زیر یک تابع چگالی توأم باشد.

$$f(x,y)=\begin{cases} c & ۰<x_۱<x_۲<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ب) مقدار $p(X_۱<\frac{۱}{۲}X_۲)$ چقدر است؟

حل. با توجه به این که حدود $x_۱$ و $x_۲$ به هم وابسته‌اند، لذا برای تشخیص بهتر ناحیه انتگرال گیری، بهتر است شکل ناحیه مورد نظر را رسم کنیم.

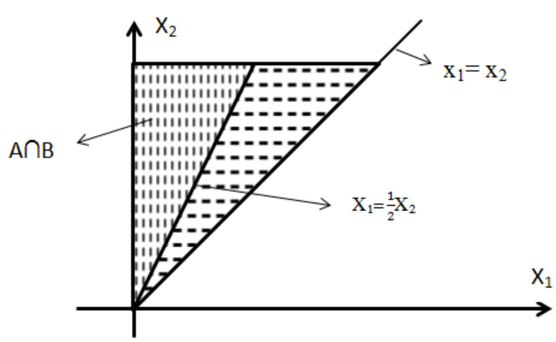


الف) از ویژگی ۱ واضح است که $c>۰$ و از ویژگی دو با توجه به شکل داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_۱,x_۲)dx_۱dx_۲=\underset{\text{سایر جاها}}{\int\int} ۰\,dx_۱dx_۲+\int_۰^۱\int_۰^{x_۲} c\,dx_۱dx_۲$$

$$=c\int_۰^۱ x_۲dx_۲=\frac{cx_۲^۲}{۲}\Big|_۰^۱=\frac{c}{۲}=۱\to c=۲$$

ب) برای محاسبه این نوع احتمالات کافی است اشتراک پیشامد مورد نظر با ناحیه انتگرال گیری را مشخص کرده سپس روی ناحیه مشترک انتگرال دوگانه بگیریم. با در نظر گرفتن $A=\{۰<X_۱<X_۲<۱\}$ و $B=\{X_۱<\frac{۱}{۲}X_۲\}$ داریم:



$$\iint_{A\cap B} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}x_2} 2dx_1dx_2 = 2\int_0^1 \frac{1}{2}x_2dx_2 = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

۷.۵ توابع چگالی حاشیه ای

برای بدست آوردن توابع چگالی حاشیه ای از روی تابع چگالی توأم از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \int_y f(x,y)dy$$

$$f(y) = \int_x f(x,y)dx$$

در واقع برای بدست آوردن تابع چگالی حاشیه ای متغیر تصادفی X کافی است متغیر تصادفی Y را با انتگرال گیری روی حدود y حذف کنیم.

مثال ۱.۷.۵. اگر تابع چگالی توأم (x,y) به صورت زیر باشد،

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy & 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

توابع چگالی حاشیه ای X و Y را بدست آورید.

حل.

$$f(x) = \int_0^2 (x^2 + \frac{1}{3}xy)dy = x^2y + \frac{1}{6}xy^2\Big|_0^2 = 2x^2 + \frac{2}{3}x \qquad 0 < x < 1$$

$$f(y) = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3}xy)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}x^2y\Big|_0^1 = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \qquad 0 < y < 2$$

مثال ۲.۷.۵. فرض کنید تابع چگالی توأم متغیر تصادفی (X,Y) به صورت زیر باشد.

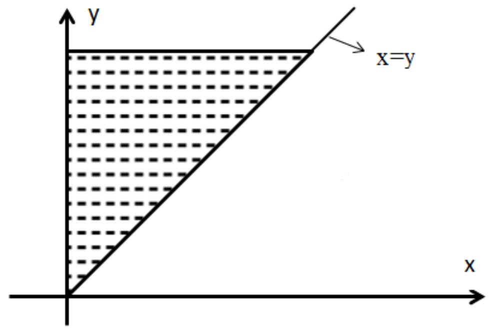
$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه

الف) $f_X(x)$

ب) $f_Y(y)$

حل. چون حدود x و y به هم وابسته‌اند پس برای راحتی کار بهتر است شکل را رسم کنیم.



$$f(x)=\int_x^{\infty} e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_x^{\infty}=e^{-x} \qquad x>0$$
$$f(y)=\int_x^{\infty} e^{-y}dx=-e^{-y}x\Big|_0^{y}=ye^{-y} \qquad y>0$$

۸.۵ دو متغیر تصادفی مستقل پیوسته

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته باشد. این دو متغیر را مستقل گوییم هرگاه به ازای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ داشته باشیم:

$$f(x,y)=f(x)f(y)$$

در مثال فوق چون داریم

$$f(x,y)=e^{-y}$$
$$f(x)f(y)=ye^{-x-y}$$

بنابراین $f(x,y)\neq f(x)f(y)$ پس X و Y مستقل نیستند.

مثال ۱.۸.۵. فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0<x<1, \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

آیا X و Y مستقلند؟

حل.

$$f(x)=\int_0^1 1dy=1 \qquad 0<x<1$$
$$f(y)=\int_0^1 1dx=1 \qquad 0<y<1$$

چون به ازای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ داریم $f(x,y)=f(x)f(y)$ پس X و Y مستقل هستند.

۹.۵ تابع چگالی شرطی

تابع چگالی شرطی متغیر تصادفی X (در هر نقطه x) به شرط آنکه $Y=y$ معین باشد، عبارت است از

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)} \qquad f(y)>0$$

به طریق مشابه

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)} \qquad f(x)>0$$

مثال ۱.۹.۵. چگالی توأم

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x+2y) & 0<x<1, \quad 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

داده شده است.

الف) $f(x|y)$ را بدست آورید.

ب) مقدار $p(X\leq \frac{1}{2}|Y=\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

حل. الف)

$$f(y)=\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dx=\frac{x^2}{3}+\frac{4}{3}yx\Big|_0^1=\frac{4}{3}y+\frac{1}{3} \qquad 0<y<1$$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{2}{3}(x+2y)}{\frac{1}{3}(4y+1)}=\frac{2(x+2y)}{4y+1} \qquad 0<x<1,\ 0<y<1$$

ب) برای محاسبه $p(X\leq \frac{1}{2}|Y=\frac{1}{2})$ ابتدا $f(x|y=\frac{1}{2})$ را بدست می‌آوریم سپس روی حدود مربوط به x از تابع چگالی شرطی $f(x|y=\frac{1}{2})$ انتگرال می‌گیریم.

$$f(x|y=\frac{1}{2})=\frac{2(x+1)}{2+1}=\frac{2}{3}(x+1) \qquad 0<x<1$$

$$p(X<\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x|y=\frac{1}{2})dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}(x+1)dx=\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{12}$$

مثال ۲.۹.۵. فرض کنید X دارای تابع چگالی

$$f(x)=7x^6 \quad 0<x<1$$

باشد و Y به شرط $X=x$ دارای تابع چگالی

$$f(y|x)=\frac{2y}{x^2} \quad 0<y<x$$

باشد، آنگاه $p(X>2Y)$ چقدر است؟

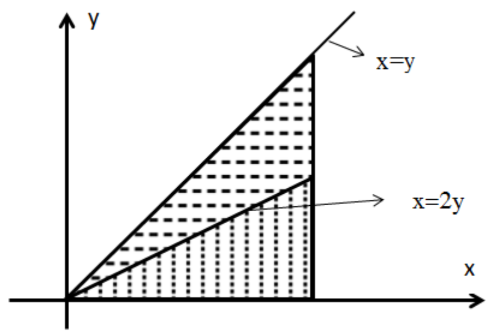
حل. برای محاسبه $p(X > ۲Y)$ ابتدا باید تابع چگالی توأم را بدست آوریم. طبق تعریف داریم

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

بنابراین

$$f(x,y) = f(x)f(y|x) = ۷x^۶ \times \frac{۲y}{x^۲} = ۱۴x^۴y \qquad ۰ < y < x < ۱$$

اکنون ناحیه انتگرال گیری را با رسم شکل مشخص می‌کنیم.



$$p(X > ۲Y) = \int_۰^۱ \int_۰^{\frac{۱}{۲}x} ۱۴x^۴ydydx = \int_۰^۱ (۷x^۴y^۲\Big|_۰^{\frac{۱}{۲}x})dx = \int_۰^۱ \frac{۷}{۴}x^۶dx = \frac{۱}{۴}x^۷\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۴}$$

۱۰.۵ امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی

امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی مشابه امید ریاضی و واریانس معمولی که قبلاً معرفی شد، تعریف می‌شود با این تفاوت که در اینجا به جای تابع چگالی حاشیه ای تابع چگالی شرطی استفاده می‌شود.

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$$

$$\mathrm{E}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy$$

$$\mathrm{Var}(X|Y=y) = \mathrm{E}(X^۲|Y=y) - \big(\mathrm{E}(X|Y=y)\big)^۲$$

که در آن

$$\mathrm{E}(X^۲|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^۲f(x|y)dx$$

مثال ۱.۱۰.۵. فرض کنید تابع چگالی توأم (x,y) به صورت زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases} ۲ & ۰<x<y<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه

الف) $\mathrm{E}(X|Y=\frac{۱}{۳})$

ب) $\mathrm{Var}(X|Y=\frac{۱}{۳})$

حل. ابتدا باید تابع چگالی شرطی $f(x|y=\frac{۱}{۳})$ را بدست آوریم.

$$f(y)=\int_{۰}^{y}۲dx=۲y \quad ۰<y<۱$$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{۲}{۲y}=\frac{۱}{y} \quad ۰<x<y<۱$$

$$f(x|y=\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۳ \quad ۰<x<\frac{۱}{۳}$$

$$\mathrm{E}(X|Y=\frac{۱}{۳})=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x|y=\frac{۱}{۳})dx=\int_{۰}^{\frac{۱}{۳}}۳xdx=\frac{۳}{۲}x^{۲}\Big|_{۰}^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۶}$$

$$\mathrm{E}(X^{۲}|Y=\frac{۱}{۳})=\int_{-\infty}^{\infty}x^{۲}f(x|y=\frac{۱}{۳})dx=\int_{۰}^{\frac{۱}{۳}}۳x^{۲}dx=x^{۳}\Big|_{۰}^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲۷}$$

$$\mathrm{Var}(X|Y=\frac{۱}{۳})=\mathrm{E}(X^{۲}|Y=\frac{۱}{۳})-\left(\mathrm{E}(X|Y=\frac{۱}{۳})\right)^{۲}=\frac{۱}{۲۷}-(\frac{۱}{۶})^{۲}=\frac{۱}{۱۰۸}$$

مثال ۲.۱۰.۵. هرگاه تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد، آنگاه $\mathrm{E}(Y|X=x)$ را بدست آورید.

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & ۰<x<y \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حل. ابتدا باید $f(y|x)$ را بدست آوریم.

$$f(y)=\int_{x}^{\infty}e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_{x}^{\infty}=e^{-x} \quad x>۰$$

$$f(y|x)=\frac{e^{-y}}{e^{-x}}=e^{x-y} \quad ۰<x<y$$

$$\mathrm{E}(Y|X=x)=\int_{x}^{\infty}ye^{x-y}dy=e^{x}\int_{x}^{\infty}ye^{-y}dy$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$y = u \rightarrow dy = du$$
$$e^{-y}dy = dv \rightarrow v = -e^{-y}$$

$$e^{x}\int_{x}^{\infty} ye^{-y}dy = e^{x}\Big[-ye^{-y}\big|_{x}^{\infty} - e^{-y}\big|_{x}^{\infty}\Big] = x + ۱$$

مثال ۳.۱۰.۵. فرض کنید تابع احتمال توأم X و Y به صورت مقابل باشد.

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(۲ - x - y) & ۰ < x < ۱, \quad ۰ < y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) c را پیدا کنید.

ب) $p(Y > ۲X)$ و $p(Y > \frac{۱}{۲}X^{۲})$ را محاسبه کنید.

ج) $p(۰ < X < \frac{۱}{۲}|Y = \frac{۱}{۳})$ را محاسبه کنید.

د) $\mathrm{E}(X|Y = y)$ را بدست آورید.

ه) ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

و) استقلال X و Y را بررسی کنید. (علم و صنعت ۸۶)

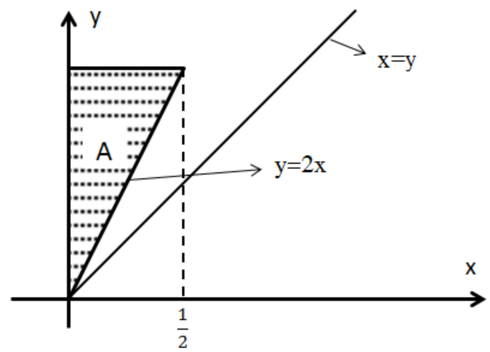
حل. الف) چون $f(x,y)$ یک تابع چگالی احتمال توأم می‌باشد پس باید

۱. $f(x,y) \geq ۰ \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{۲} \rightarrow c > ۰$

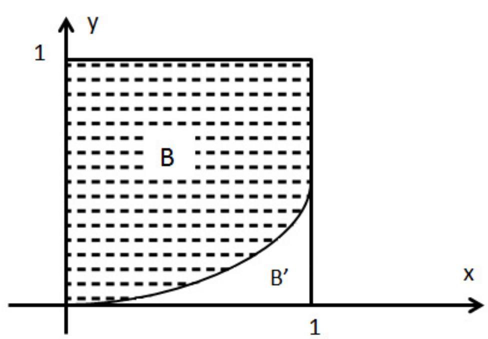
۲.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = ۱ \rightarrow \underset{\text{سایر جاها}}{\int\int} ۰\,dxdy + \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱} cx(۲ - x - y)dxdy$$
$$= c\int_{۰}^{۱}[x^{۲} - \frac{x^{۳}}{۳} - y\frac{x^{۲}}{۲}|_{۰}^{۱}]dy = c\int_{۰}^{۱}(\frac{۲}{۳} - \frac{y}{۲})dy$$
$$= c(\frac{۲}{۳}y - \frac{y^{۲}}{۴}|_{۰}^{۱}) = c(\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۴}) = ۱ \rightarrow c = \frac{۱۲}{۵}$$

ب) $A = \{(x,y)|y > ۲x,\ ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۱\}$



$$p(Y > ۲X) = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}}\int_{۲x}^{۱} \frac{۱۲}{۵}x(۲-x-y)dydx$$
$$= \int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}} [\frac{۲۴}{۵}xy - \frac{۱۲}{۵}x^۲y - \frac{۶}{۵}xy^۲|_{۲x}^{۱}]dx = \int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}} (\frac{۴۸}{۵}x^۳ - ۱۲x^۲ + \frac{۱۸}{۵}x)dx$$
$$= \frac{۴۸}{۲\circ}x^۴ - \frac{۱۲}{۳}x^۳ + + \frac{۱۸}{۱\circ}x^۲|_{\circ}^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۱\circ}$$



$$B' = \{(x,y)|y < \frac{x^۲}{۲},\ \circ < x < ۱,\ \circ < y < ۱\}$$

$$
\begin{aligned}
p(Y > \frac{۱}{۲}X^{۲}) &= ۱ - \iint_{B'} f(x,y)dxdy = ۱ - \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\frac{x^{۲}}{۲}} \frac{۱۲}{۵}x(۲-x-y)dydx \\
&= ۱ - \int_{۰}^{۱} [\frac{۲۴}{۵}xy - \frac{۱۲}{۵}x^{۲}y - \frac{۶}{۵}xy^{۲}|_{۰}^{\frac{x^{۲}}{۲}}]dx \\
&= ۱ - \int_{۰}^{۱} \frac{۱۲}{۵}x^{۳} - \frac{۶}{۵}x^{۴} - \frac{۶}{۲۰}x^{۵}dx = ۱ - (\frac{۱۲}{۲۰}x^{۴} - \frac{۶}{۲۵} - \frac{۶}{۱۲۰}|_{۰}^{۱}) \\
&= \frac{۶۹}{۱۰۰}
\end{aligned}
$$

ج) برای محاسبه این احتمال ابتدا باید تابع چگالی شرطی $f(x|y = \frac{۱}{۳})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
f(y) &= \int_{x} f(x,y)dx = \int_{۰}^{۱} \frac{۱۲}{۵}x(۲-x-y)dx \\
&= \frac{۲۴}{۵} \times \frac{x^{۲}}{۲} - \frac{۱۲}{۵} \times \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{۱۲}{۵}y \times \frac{x^{۲}}{۲}|_{۰}^{۱} \\
&= \frac{۱}{۵}(۸ - ۶y) \qquad ۰ < y < ۱
\end{aligned}
$$

$$
f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{۱۲}{۵}x(۲-x-y)}{\frac{۱}{۵}(۸-۶y)} = \frac{۶x(۲-x-y)}{۴-۳y} \qquad ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۱
$$

$$
f(x|y = \frac{۱}{۳}) = \frac{۶x(۲-x-y)}{۴ - ۳ \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۱۰}{۳}x - ۲x^{۲} \qquad ۰ < x < ۱
$$

$$
\begin{aligned}
p(۰ < X < \frac{۱}{۲}|Y = \frac{۱}{۳}) &= \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} f(x|y = \frac{۱}{۳})dx \\
&= \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱۰}{۳}x - ۲x^{۲}dx = \frac{۱۰}{۶}x^{۲} - \frac{۲}{۳}x^{۳}|_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \\
&= \frac{۱}{۳}
\end{aligned}
$$

د) برای محاسبه امید $\mathrm{E}(X|Y = y)$ باید از تابع چگالی $f(x|y)$ که در قسمت (ج) بدست آوردیم استفاده کنیم.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X|Y = y) &= \int_{x} xf(x|y)dx = \int_{۰}^{۱} x\frac{۶x(۲-x-y)}{۴-۳y}dx = \frac{۴x^{۳} - \frac{۳}{۲}x^{۴} - ۲x^{۳}y}{۴-۳y}\Big|_{۰}^{۱} \\
&= \frac{\frac{۵}{۲} - ۲y}{۴-۳y} = \frac{۵-۴y}{۸-۶y} \qquad ۰ < y < ۱
\end{aligned}
$$

ه)

$$f(x) = \int_y f(x,y)dy = \int_۰^۱ \frac{۱۲}{۵}x(۲-x-y)dy = \frac{۲۴}{۵}xy - \frac{۱۲}{۵}x^۲y - \frac{۶}{۵}xy^۲|_۰^۱$$
$$= \frac{۱۸}{۵}x - \frac{۱۲}{۵}x^۲ \quad ۰ < x < ۱$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_۰^۱ x(\frac{۱۸}{۵}x - \frac{۱۲}{۵}x^۲)dx = \frac{۶}{۵}x^۳ - \frac{۳}{۵}x^۴|_۰^۱ = \frac{۳}{۵}$$

$$\mathrm{E}(X^۲) = \int_۰^۱ x^۲(\frac{۱۸}{۵}x - \frac{۱۲}{۵}x^۲)dx = \frac{۹}{۱۰}x^۴ - \frac{۱۲}{۲۵}x^۵|_۰^۱ = \frac{۲۱}{۵۰}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^۲) - \mathrm{E}^۲(X) = \frac{۲۱}{۵۰} - (\frac{۳}{۵})^۲ = \frac{۶}{۱۰۰}$$

از قسمت (ج) داشتیم: $f(y) = \frac{۱}{۵}(۸-۶y) \quad ۰ < y < ۱$ پس داریم:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_۰^۱ y(\frac{۸}{۵} - \frac{۶}{۵}y)dy = \frac{۴}{۵}y^۲ - \frac{۲}{۵}y^۳|_۰^۱ = \frac{۲}{۵}$$

$$\mathrm{E}(Y^۲) = \int_۰^۱ y^۲(\frac{۸}{۵} - \frac{۶}{۵}y)dy = \frac{۸}{۱۵}y^۳ - \frac{۳}{۱۰}y^۴|_۰^۱ = \frac{۷}{۳۰}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^۲) - \mathrm{E}^۲(Y) = \frac{۷}{۱۰} - (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۱۱}{۱۵۰}$$

$$\mathrm{E}(XY) = \int\int xyf(x,y)dxdy = \int_۰^۱\int_۰^۱ \frac{۱۲}{۵}x^۲y(۲-x-y)dydx$$
$$= \frac{۱۲}{۵}\int_۰^۱ [x^۲y^۲ - x^۳\frac{y^۲}{۲} - x^۲\frac{y^۳}{۳}|_۰^۱]dx = \frac{۱۲}{۵}\int_۰^۱ \frac{۲}{۳}x^۲ - \frac{x^۳}{۲}dx$$
$$= \frac{۷}{۳۰}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{۷}{۳۰} - \frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}}{\sqrt{\frac{۶}{۱۰۰}\times\frac{۱۱}{۱۵۰}}}$$
$$= ۰٫۱۶$$

و)

$$f(x,y) \neq f(x)f(y)$$

$$\frac{۱۲}{۵}x(۲-x-y) \neq (\frac{۱۸}{۵}x - \frac{۱۲}{۵}x^{۲})(\frac{۸}{۵} - \frac{۶}{۵}y)$$

پس X و Y مستقل نیستند.

مثال ۴.۱۰.۵. X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر است.

$$f(x,y) = \begin{cases} ۸xy & ۰ < y < x,\ ۰ < x < a \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار ثابت a را محاسبه کنید.

ب) $\mathrm{E}(Y|X)$ و $\mathrm{Var}(Y|X)$ را تعیین کنید.

ج) کواریانس X و Y را محاسبه کنید. (امیر کبیر ۸۸)

حل. الف) چون $f(x,y)$ تابع احتمال توأم است پس باید

۱. $f(x,y) \geq ۰ \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{۲}$ ✓

۲.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = ۱ \rightarrow \int\int_{\text{سایر جاها}} ۰\,dxdy + \int_{۰}^{a}\int_{۰}^{x} ۸xydydx = \int_{۰}^{a}(۴xy^{۲}|_{۰}^{x})dx$$

$$= \int_{۰}^{a} ۴x^{۳}dx = x^{۴}|_{۰}^{a} = a^{۴} = ۱$$

$$\Rightarrow a = -۱ \text{ غ ق ق},\ a = +۱$$

ب) برای محاسبه $\mathrm{E}(Y|X)$ و $\mathrm{Var}(Y|X)$ ابتدا باید تابع چگالی شرطی $f(y|x)$ را بدست آوریم.

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{۸xy}{۴x^{۳}} = \frac{۲y}{x^{۲}} \quad ۰ < y < x < ۱$$

$$f(x) = \int_{y} f(x,y)dy = \int_{۰}^{x} ۸xydy = ۴xy^{۲}|_{۰}^{x} = ۴x^{۳} \quad ۰ < x < ۱$$

$$\mathrm{E}(Y|X) = \int_{y} yf(y|x)dy = \int_{۰}^{x} y\frac{۲y}{x^{۲}}dy = \frac{۲y^{۳}}{۳x^{۲}}|_{۰}^{x} = \frac{۲}{۳}x$$

$$\mathrm{E}(Y^{۲}|X) = \int_{y} y^{۲}f(y|x)dy = \int_{۰}^{x} y^{۲} \times \frac{۲y}{x^{۲}}dy = \frac{y^{۴}}{۲x^{۲}}|_{۰}^{x} = \frac{x^{۲}}{۲}$$

$$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathrm{E}(Y^{۲}|X) - \mathrm{E}^{۲}(Y|X) = \frac{x^{۲}}{۲} - (\frac{۲}{۳}x)^{۲} = \frac{x^{۲}}{۱۸}$$

ج)

$$f(y)=\int_x f(x,y)dx=\int_y^{1} 8xydx=4yx^2\Big|_y^1=4y(1-y^2)\quad 0<y<1$$

$$\mathrm{E}(Y)=\int_y yf(y)dy=\int_0^1 4y^2(1-y^2)dy=\frac{4}{3}y^3-\frac{4}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{8}{15}$$

$$\mathrm{E}(X)=\int_x xf(x)dx=\int_0^1 x\times 4x^3dx=\frac{4}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY)&=\int\int xyf(xy)dxdy=\int_0^1\int_0^x 8x^2y^2dydx=\int_0^1 8x^2\times\frac{y^3}{3}\Big|_0^x dx\\&=\int_0^1\frac{8}{3}x^5dx=\frac{8}{18}x^6\Big|_0^1=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

مثال ۵.۱۰.۵. فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{c}{x}e^{-2x} & 0<y<x<\infty\\ 0 & o.w\end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید.

ب) $p(Y<2|X=3)$ را بدست آورید.

ج) $\mathrm{Var}(Y|X=x)$ را بدست آورید.

د) ضریب همبستگی $X-Y$ را بدست آورید.

حل. الف) ۱. $f(x,y)\geq 0\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\to c>0$

۲.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1\to\underbrace{\int\int}_{\text{سایر جاها}}0dxdy+\int_0^\infty\int_0^x\frac{c}{x}e^{-2x}dydx\\=\int_0^\infty c[\frac{y}{x}e^{-2x}\Big|_0^x]dx=c\int_0^\infty e^{-2x}dx=-\frac{c}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty\\=\frac{c}{2}=1\to c=2\end{aligned}$$

ب) برای محاسبه $p(Y < ۲|X = ۳)$ ابتدا باید تابع چگالی شرطی $f(y|x)$ را بدست آوریم:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{۲}{x}e^{-۲x}}{۲e^{-۲x}} = \frac{۱}{x} \quad ۰ < y < x$$

$$f(x) = \int_y f(x,y)dy = \int_۰^x \frac{۲}{x}e^{-۲x}dy = \frac{۲y}{x}e^{-۲x}|_۰^x = ۲e^{-۲x} \quad x > ۰$$

$$f(y|x = ۳) = \frac{۱}{۳} \quad ۰ < y < ۳$$

$$p(Y < ۲|X = ۳) = \int_۰^۲ f(y|x = ۳)dy = \int_۰^۲ \frac{۱}{۳}dy = \frac{۲}{۳}$$

ج)

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_y yf(y|x)dx = \int_۰^x y\frac{۱}{x}dy = \frac{y^۲}{۲x}|_۰^x = \frac{x}{۲}$$

$$\mathrm{E}(Y^۲|X = x) = \int_y y^۲f(y|x)dx = \int_۰^x y^۲\frac{۱}{x}dy = \frac{y^۳}{۳x}|_۰^x = \frac{x^۲}{۳}$$

$$\mathrm{Var}(Y|X = x) = \mathrm{E}(Y^۲|X = x) - \mathrm{E}^۲(Y|X = x) = \frac{x^۲}{۳} - (\frac{x}{۲})^۲ = \frac{x^۲}{۱۲}$$

د) توجه داشته باشید که در اینجا اگر بخواهیم $\mathrm{E}(Y)$ و $\mathrm{E}(Y^۲)$ را از روی تابع چگالی $f(y)$ بدست آوریم باید ابتدا $f(y)$ را محاسبه کنیم. یعنی داریم:

$$f(y) = \int_x f(x,y)dx = \int_y^\infty \frac{۲}{x}e^{-۲x}dx$$

ولی محاسبه انتگرال فوق به سادگی امکان پذیر نیست لذا برای محاسبه $\mathrm{E}(Y)$ و $\mathrm{E}(Y^۲)$ از رابطه کلی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$g(X,Y) = Y \to \mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy = \int\int_{\text{سایر جاها}} y \times ۰dxdy$$
$$+ \int_۰^\infty\int_۰^x y\frac{۲}{x}e^{-۲x}dydx = \int_۰^\infty [\frac{y^۲}{x}e^{-۲x}|_۰^x]dx =$$
$$\int_۰^\infty xe^{-۲x}dx = \frac{\Gamma(۲)}{۲^۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$g(X,Y)=Y^{۲}\to \mathrm{E}(Y^{۲})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^{۲}f(x,y)dxdy=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{x}y^{۲}\frac{۲}{x}e^{-۲x}dydx$$
$$=\int_{۰}^{\infty}[\frac{۲y^{۳}}{۳x}e^{-۲x}\Big|_{۰}^{x}]dx=\frac{۱۲}{۳}\int_{۰}^{\infty}x^{۲}e^{-۲x}dx$$
$$=\frac{۲}{۳}\times\frac{\Gamma(۳)}{۲^{۳}}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲!}{۸}=\frac{۱}{۶}$$

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{E}(Y^{۲})-\mathrm{E}^{۲}(Y)=\frac{۱}{۶}-(\frac{۱}{۴})^{۲}=\frac{۵}{۴۸}$$

$$g(X,Y)=X\to \mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{x}x\frac{۲}{x}e^{-۲x}dydx$$
$$=\int_{۰}^{\infty}[۲ye^{-۲x}\Big|_{۰}^{x}]dx=۲\int_{۰}^{\infty}xe^{-۲x}dx=۲\frac{\Gamma(۲)}{۲^{۲}}$$
$$=\frac{۱}{۲}$$

$$g(X,Y)=X^{۲}\to \mathrm{E}(X^{۲})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{۲}.\frac{۲}{x}e^{-۲x}dxdy=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{x}x^{۲}\frac{۲}{x}e^{-۲x}dydx$$
$$=\int_{۰}^{\infty}[۲xye^{-۲x}\Big|_{۰}^{x}]dx=۲\int_{۰}^{\infty}x^{۲}e^{-۲x}dx$$
$$=۲\times\frac{\Gamma(۳)}{۲^{۳}}=\frac{۲\times ۲!}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(Y^{۲})-\mathrm{E}^{۲}(Y)=\frac{۱}{۲}-(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$g(X,Y)=XY\to \mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{x}xy\frac{۲}{x}e^{-۲x}dydx$$
$$=\int_{۰}^{\infty}[y^{۲}e^{-۲x}\Big|_{۰}^{x}]dx=\int_{۰}^{\infty}x^{۲}e^{-۲x}dx=\frac{\Gamma(۳)}{۲^{۳}}=\frac{۲!}{۸}$$
$$=\frac{۱}{۴}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۴۸}}}=۰/۷۷$$

مثال ۶.۱۰.۵. اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم زیر باشد آنگاه مقدار ثابت k و کواریانس X و Y را حساب کنید. (نساجی ۸۶)

$$f(x,y)=\begin{cases} k & ۰<y<x,\ ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حل. با توجه به ویژگی‌های تابع چگالی توأم داریم:

۱. $f(x,y)>۰ \Rightarrow k>۰$

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=۱ \Rightarrow \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x} kdydx=۱$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{۱} ky|_{۰}^{x}dx=\int_{۰}^{۱} kxdx=\frac{k}{۲}\Rightarrow \frac{k}{۲}=۱\Rightarrow k=۲$$

$$\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x} ۲xydydx=\int_{۰}^{۱}[۲x\frac{y^{۲}}{۲}|_{۰}^{x}]dx$$
$$=\int_{۰}^{۱} x^{۳}dx=\frac{x^{۴}}{۴}|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۴}$$

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x} ۲xdydx=\int_{۰}^{۱} ۲xy|_{۰}^{x}dx$$
$$=\int_{۰}^{۱} ۲x^{۲}dx=\frac{۲x^{۳}}{۳}|_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{۱}{۳}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)=\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۹}=\frac{۱}{۳۶}$$

مثال ۷.۱۰.۵. فرض کنید $X_{۱}$ و $X_{۲}$ دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع یکسان با تابع چگالی احتمال $f(x)=۲x$ و $۰\le x\le ۱$ باشد، مقدار $p(\frac{X_{۱}}{X_{۲}}\le ۰/۵)$ را حساب کنید. (صنایع ۸۸)

حل. چون $X_{۱}$ و $X_{۲}$ مستقل هستند در نتیجه تابع چگالی توأم آن برابر با حاصل‌ضرب تابع چگالی $X_{۱}$ و $X_{۲}$ است، یعنی

$$f(x_{۱},x_{۲})=f(x_{۱})f(x_{۲})=۴x_{۱}x_{۲} \quad ۰\le x_{۱}\le ۱,\ ۰\le x_{۲}\le ۱$$

$$p(\frac{X_{۱}}{X_{۲}}\le ۰/۵)=p(X_{۱}\le ۰/۵X_{۲})=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۰/۵x_{۱}} f(x,y)dx_{۱}dx_{۲}=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۰/۵x_{۲}} ۴x_{۱}x_{۲}dx_{۱}dx_{۲}$$
$$=\int_{۰}^{۱}(۴x_{۲}\frac{x_{۱}^{۲}}{۲})|_{۰}^{۰/۵x_{۲}}dx_{۲}=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} x_{۲}^{۳}dx_{۲}=\frac{۱}{۲}.\frac{x_{۲}^{۴}}{۴}|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۸}$$

مثال ۸.۱۰.۵. اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم زیر باشد، مقدار $p(X \leq \frac{1}{2}|Y = \frac{1}{2})$ را حساب کنید. (نساجی ۸۸)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حل.

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{1} \frac{2}{3}(x+2y)dx + \int_{\text{سایر جاها}} 0\,dx = \frac{2}{3}(\frac{x^2}{2} + 2yx)|_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y \quad 0 < y < 1$$

$$f_{X|Y=y} = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{2}{3}(x+2y)}{\frac{1}{3} + \frac{4y}{3}} = \frac{2x+4y}{1+4y}$$

$$f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x|y=\frac{1}{2}) = \frac{2x+2}{1+2} = \frac{2x+2}{3} \quad 0 < x < 1$$

$$p(X \leq \frac{1}{2}|Y = \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x|y=\frac{1}{2})dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x+2}{3}dx = \frac{2}{3}(\frac{x^2}{2} + x)|_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{10}{24}$$

تمرین ۹.۱۰.۵. تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0 < y < x,\ 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) ثابت k را محاسبه کنید.

ب) مقدار $p(X|Y = \frac{1}{2})$ را بدست آورید. (امیر کبیر ۸۹)

تمرین ۱۰.۱۰.۵. فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر باشد. (آزاد تهران- جنوب ۸۷)

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & x,y > 0,\ x^2+y^2 \leq 5,\ y > 2x \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) k را محاسبه کنید.

ب) $p(X+Y < 1)$ را بدست آورید.

ج) $\mathrm{E}(X)$ را پیدا کنید.

تمرین ۱۱.۱۰.۵. فرض کنید تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y به شکل زیر باشد. (امیر کبیر ۹۰)

$$f(x,y)=\begin{cases} c(x^{2}+y) & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) مقدار c را مشخص کنید.

ب) ضریب همبستگی X و Y (یعنی $\rho(X,Y)$) را محاسبه کنید.

ج) $\mathrm{E}(Y|X=\frac{1}{2})$ و $\mathrm{Var}(Y|X=\frac{1}{2})$ را بدست آورید.

تمرین ۱۲.۱۰.۵. اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشد، مقدار $\mathrm{E}(X^{2}|Y)$ را حساب کنید. (علوم کامپیوتر ۸۹)

$$f(x,y)=\begin{cases} 12x^{2}y^{3} & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تمرین ۱۳.۱۰.۵. اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشد، مقدار ثابت k و تابع احتمال شرطی $f(x|y)$ را حساب کنید. (نساجی ۸۶)

$$f(x,y)=\begin{cases} ky(y-x) & -y<x<y,\ 0<y<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تمرین ۱۴.۱۰.۵. فرض کنید (X,Y) یک متغیر تصادفی پیوسته دو بعدی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشد،

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{5}x+cy & 0<x<1,\ 1<y<5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مقدار $p(X+Y>3)$ را حساب کنید. (صنایع ۸۵)

فصل ۶

براورد فاصله ای

۱.۶ براوردگر نا اریب

تعریف ۱.۱.۶ (آماره). تابع $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ از نمونه تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را که در آن پارامتر مجهول نباشد، یک آماره می‌نامند. واضح است که Y یک متغیر تصادفی است که توزیع آن ممکن است به پارامتر بستگی داشته باشد یا نداشته باشد.

تعریف ۲.۱.۶ (براوردگر نا اریب). گوییم براوردگر $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ یک براوردگر نا اریب برای پارامتر مجهول θ است هرگاه داشته باشیم:

$$\mathrm{E}\left(g(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \theta$$

مثال ۳.۱.۶. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه ای تصادفی مستقل از یک جامعه باشد و $U = \frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)$

الف) نشان دهید اگر جامعه مذکور دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0, a)$ باشد، $\frac{1}{4}U$ یک براوردگر نا اریب برای واریانس جامعه است.

ب) در صورتی که جامعه مذکور دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، به ازای چه ضریبی cU یک براوردگر نا اریب برای واریانس جامعه است؟ (امیر کبیر ۹۰)

حل. الف)

$$X \sim U(0, a) \to f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 < x < a \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(a-0)^2}{12} = \frac{a^2}{12}, \quad \mathrm{E}(X) = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\frac{۱}{۴}U) &= \mathrm{E}(\frac{۱}{۴}[\frac{۱}{n}(X_۱^۲ + X_۲^۲ + \ldots + X_n^۲)])\\ &= \frac{۱}{۴n}[\mathrm{E}(X_۱^۲) + \mathrm{E}(X_۲^۲) + \ldots + \mathrm{E}(X_n^۲)] = \frac{۱}{۴n}[n\,\mathrm{E}(X^۲)]\\ &= \frac{۱}{۴}\mathrm{E}(X^۲) = \frac{۱}{۴}(\mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}^۲(X)) = \frac{۱}{۴}(\frac{a^۲}{۱۲} + (\frac{a}{۲})^۲)\\ &= \frac{a^۲}{۱۲}\end{aligned}$$

ب)

$$X \sim E(\lambda) \to f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > ۰,\ \lambda > ۰ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{۱}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{۱}{\lambda^۲}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(cU) &= \mathrm{E}(\frac{c}{n}[\mathrm{E}(X_۱^۲ + X_۲^۲ + \ldots + X_n^۲)])\\ &= \frac{c}{n}[\mathrm{E}(X_۱^۲) + \mathrm{E}(X_۲^۲) + \ldots + \mathrm{E}(X_n^۲)] = \frac{c}{n}[n\,\mathrm{E}(X^۲)]\\ &= c\,\mathrm{E}(X^۲) = c(\mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}^۲(X)) = c(\frac{۱}{\lambda^۲} + \frac{۱}{\lambda^۲}) = \frac{۲c}{\lambda^۲}\\ &= \frac{۱}{\lambda^۲} \to \boxed{c = \frac{۱}{۲}}\end{aligned}$$

مثال ۴.۱.۶. فرض کنید $U_۱$ و $U_۲$ براوردگرهای نااریب به ترتیب برای θ و $\theta^۲$ باشند. همچنین واریانس‌های هر یک برابر $\theta^۲$ باشد، در این صورت به ازای چه مقداری از c براوردگر cT یک براوردگر نااریب برای $\theta^۲$ است که در آن $T = U_۱^۲ + ۲U_۲$؟ (مهندسی نساجی ۸۵)

حل.

$$\mathrm{E}(U_۱) = \theta, \quad \mathrm{E}(U_۲) = \theta^۲, \quad \mathrm{Var}(U_۱) = \mathrm{Var}(U_۲) = \theta^۲$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(cT) = \theta^۲ \to c\,\mathrm{E}(T) &= c\,\mathrm{E}(U_۱^۲ + ۲U_۲) = c[\mathrm{E}(U_۱^۲) + ۲\,\mathrm{E}(U_۲)]\\ &= c(\mathrm{Var}(U_۱) + \mathrm{E}^۲(U_۱) + ۲\,\mathrm{E}(U_۲)) = c(\theta^۲ + \theta^۲ + ۲\theta^۲)\\ &= \theta^۲ \to c = \frac{۱}{۴}\end{aligned}$$

تمرین ۵.۱.۶. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. ثابت کنید $T = ۳\bar{X} - ۲$ یک براوردگر نااریب برای θ است. (مهندسی صنایع ۸۶)

$$f(x;\theta) = \frac{۲(x-\theta)}{(۱-\theta)^۲} \quad \theta < x < ۱$$

۲.۶ فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال

فرض کنید هدف براورد میانگین نمرات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه امیرکبیر باشد و فرض کنید از شما سؤال شود که فکر می‌کنید میانگین نمرات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه امیرکبیر چقدر است؟ اگر شما جواب دهید که فکر می‌کنم ۱۴ باشد، حال اگر شما سؤال شود که با چه احتمالی (اطمینانی) فکر می‌کنید میانگین نمرات ۱۴ است؟ واضح است که شما باید بگویید با احتمال صفر میانگین نمرات ۱۴ است، زیرا نمره یک متغیر تصادفی پیوسته بوده و هر مقداری بین صفر و ۲۰ را می‌تواند اختیار کند و برای متغیرهای پیوسته داریم $p(X = x_۰) = ۰$ لذا $p(X = ۱۴) = ۰$. اگر بگوییم با احتمال یک میانگین نمرات بین صفر و ۲۰ است باز حرفی بدیهی بیان کردیم . بنابراین اگر بخواهیم محافظه کارانه نظری بیان کنیم بهتر است مثلاً بگوییم: «فکر می‌کنم ۸۰ درصد احتمال دارد میانگین نمرات بین ۱۲ تا ۱۶ باشد». این همان تخمین فاصله‌ای است، یعنی هدف این است که با احتمالمان پارامتری را با طول فاصله ای کم براورد کنیم.

اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند، آنگاه فاصله اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای میانگین توزیع نرمال به صورت زیر است.

۱. اگر $\sigma^۲$ معلوم باشد: $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\frac{\alpha}{۲}})$

۲. اگر $\sigma^۲$ مجهول باشد: $(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})})$

۳.۶ فاصله اطمینان برای واریانس توزیع نرمال

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند، آنگاه فاصله اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای واریانس توزیع نرمال به صورت زیر است.

۱. اگر μ معلوم باشد: $\left(\frac{nS_۰^۲}{\chi^۲_{(n,۱-\frac{\alpha}{۲})}}, \frac{nS_۰^۲}{\chi^۲_{(n,\frac{\alpha}{۲})}}\right)$
که در آن $S_۰^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu)^۲$ می‌باشد.

۲. اگر $\sigma^۲$ مجهول باشد: $\left(\frac{(n-۱)S^۲}{\chi^۲_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}}, \frac{(n-۱)S^۲}{\chi^۲_{(n-۱,\frac{\alpha}{۲})}}\right)$
که در آن $S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$ می‌باشد.

مثال ۱.۳.۶. می‌دانیم توزیع وزن نان‌های یک نانوایی نرمال است. بازرسی پنج عدد نان را به تصادف انتخاب کرده است. نتیجه بر حسب گرم به این صورت است: ۱۸۸، ۱۹۲، ۱۸۵، ۱۹۰، ۲۰۵. یک بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین وزن واقعی نان‌ها (یعنی μ) بدست آورید. (امیرکبیر ۹۰)

حل. در اینجا $\sigma^۲$ مجهول است (واریانس نان‌های تولید شده) در نتیجه از فاصله اطمینان زیر استفاده می‌کنیم (توزیع نان‌ها نیز نرمال است)

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}$$

$$\bar{x} = \frac{۲۰۵ + ۱۹۰ + ۱۸۵ + ۱۹۲ + ۱۸۸}{۵} = ۱۹۲$$

$$S^۲ = \frac{۱}{n-۱} \sum (X_i - \bar{X})^۲ = \frac{\sum X_i^۲ - n\bar{X}^۲}{n-۱}$$

$$S^۲ = \frac{(۲۰۵-۱۹۲)^۲ + (۱۹۰-۱۹۲)^۲ + (۱۸۵-۱۹۲)^۲ + (۱۹۲-۱۹۲)^۲ +}{۴}$$

$$\frac{(۱۸۸-۱۹۲)^۲}{} = \frac{۱۶۹ + ۴ + ۴۹ + ۰ + ۱۶}{۴} = ۵۹/۵ \Rightarrow S = ۷/۷۱$$

از جدول داریم $t_{(۴,۰/۹۷۵)} = ۲/۷۸$ آنگاه

$$\left(۱۹۲ - \frac{۷/۷۱}{\sqrt{۵}} \times ۲/۷۸, ۱۹۲ + \frac{۷/۷۱}{\sqrt{۵}} \times ۲/۷۸\right) \Rightarrow (۱۸۲/۴, ۲۰۱/۶)$$

مثال ۲.۳.۶. یک کارخانه اتومبیل سازی رینگ‌های پیستون موتور اتومبیل تولید می‌کند. قطر رینگ‌ها دارای توزیع $N(\mu, \sigma^۲)$ می‌باشد. در یک نمونه تصادفی ۳۱ تایی از رینگ‌ها، میانگین و انحراف معیار ۷۴ و ۰.۰۰۵ بدست آمده است.

الف) یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای σ بدست آورید.

ب) یک فاصله اطمینان ۹۹ درصدی برای متوسط قطر رینگ‌های تولیدی کارخانه بیابید. (علم و صنعت ۸۵)

حل. الف) چون توزیع قطر رینگ‌ها دارای توزیع نرمال است و μ مجهول است، فاصله اطمینان برای $\sigma^۲$ به صورت زیر است.

$$\left(\frac{(n-۱)S^۲}{\chi^۲_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}}, \frac{(n-۱)S^۲}{\chi^۲_{(n-۱,\frac{\alpha}{۲})}}\right)$$

و برای انحراف معیار یعنی σ به صورت جذر این فاصله است.

$$\left(\sqrt{\frac{(n-۱)S^۲}{\chi^۲_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}}}, \sqrt{\frac{(n-۱)S^۲}{\chi^۲_{(n-۱,\frac{\alpha}{۲})}}}\right)$$

$$S = ۰/۰۰۵, \qquad \alpha = ۰/۰۵, \qquad \frac{\alpha}{۲} = ۰/۰۲۵, \qquad ۱ - \frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۷۵$$

$$\begin{matrix} \chi^۲_{(۳۰,۰/۰۲۵)} = ۱۶/۸ \\ \chi^۲_{(۳۰,۰/۹۷۵)} = ۴۷ \end{matrix} \Longrightarrow \left(\frac{۰/۰۰۵\sqrt{۳۰}}{\sqrt{۴۷}}, \frac{۰/۰۰۵\sqrt{۳۰}}{\sqrt{۱۶/۸}}\right) \Rightarrow \sigma \in (۰/۰۰۳۹, ۰/۰۰۶۶)$$

ب)

$$\mu \in (\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(30)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(30)\frac{S}{\sqrt{n}})$$

$$\mu \in (74 - (2/75)\frac{0/005}{\sqrt{31}}, 74 + (2/75)\frac{0/005}{\sqrt{31}}) = (73/99, 74/002)$$

مثال ۳.۳.۶. یک رستوران می‌خواهد میانگین پول دریافت شده از ناهار را براورد کند. بر اساس یک نمونه تصادفی ۳۰تایی میانگین نمونه برای ۹۶۰ ریال است. با فرض $\sigma = 200$،

الف) یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین بدست آورید.

ب) تعداد نمونه چند تا باشد تا طول فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برابر با ۹۸ باشد؟ *(علم و صنعت ۸۶)*

حل. الف) $n = 30$، $\bar{x} = 960$، $\sigma = 200$

$$(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = (888/43, 1031/57)$$

ب)

$$\text{طول فاصله اطمینان } L = (\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - (\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 98$$

$$2 \times 1/96 \times \frac{200}{\sqrt{n}} = 98 \Rightarrow \sqrt{n} = 8 \Rightarrow n = 64$$

مثال ۴.۳.۶. یک نمونه ۱۵ تایی از یک نوع نخ تحت آزمون استحکام قرار گرفت. میانگین نمونه $\bar{x} = 903/2$ و انحراف معیار نمونه $S = 9/4$ به دست آمده است. با فرض نرمال بودن استحکام، فاصله اطمینان ۰/۹۵ برای میانگین استحکام این نوع نخ‌ها چقدر است؟ *(نساجی ۸۳)*
توجه: $t_{14, 0/975}$، $t_{14, 0/95}$، $z_{0/975} = 1/96$، $z_{0/95} = 1/65$

حل.

$$1 - \alpha = 0/95 \rightarrow \alpha = 0/05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0/975$$

$$(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})})$$

$$(903/2 - 2/145 \times \frac{9/4}{\sqrt{15}}, 903/2 + 2/145 \times \frac{9/4}{\sqrt{15}}) \Longrightarrow (898, 908/4)$$

مثال ۵.۳.۶. محققی برای جمع آوری اطلاعات و براورد میانگین یک صفت از یک جامعه نرمال با واریانس $\sigma^2 = 25$، چه تعداد نمونه باید انتخاب نماید تا با ۰/۹۵ اطمینان خطای براورد حداکثر ۱ باشد. *(مهندسی مکاترونیک ۸۵)*

حل.

$$p(|\bar{X}-\mu|<۱)=۰/۹۵$$
$$p(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{۱}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})=۰/۹۵$$
$$p(|z|<\frac{\sqrt{n}}{۵})=۰/۹۵\xrightarrow{\text{از جدول}}\frac{\sqrt{n}}{۵}=۱/۹۶\rightarrow n=(۵\times ۱/۹۶)^{۲}=۹۷$$

مثال ۶.۳.۶. اگر یک نمونه ۲۵ تایی از یک جامعه نرمال با واریانس نمونه ای ۶۴ باشد، آنگاه فاصله اطمینان ۰.۹۵ درصدی برای انحراف معیار جامعه را بدست آورید. (مهندسی صنایع ۸۹)

حل.

$$S^{۲}=۶۴,\ ۱-\alpha=۰/۹۵\rightarrow\alpha=۰/۰۵\rightarrow\frac{\alpha}{۲}=۰/۰۲۵,\ ۱-\frac{\alpha}{۲}=۰/۹۷۵,\ n=۲۵$$

می‌دانیم: $\frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma^{۲}}\sim\chi^{۲}_{n-۱}$

از رابطه بالا فاصله اطمینان برای $\sigma^{۲}$ به صورت زیر است.

$$\left(\frac{(n-۱)S^{۲}}{\chi^{۲}_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}},\frac{(n-۱)S^{۲}}{\chi^{۲}_{(n-۱,\frac{\alpha}{۲})}}\right)$$
$$\left(\frac{(۲۵-۱)۶۴}{۳۹/۳۶۴},\frac{(۲۵-۱)۶۴}{۱۲/۴۰۱}\right)\rightarrow(۳۹/۰۲,۱۲۳/۸۶)$$

بنابراین بازه اطمینان برای σ کافی است از بازه فوق جذر بگیریم که به صورت زیر در می‌آید.

$$(۶/۲۴,۱۱/۱۲)$$

تمرین ۷.۳.۶. فرض کنید نمرات درس آمار دانشجویان یک دانشکده دارای توزیع نرمال باشند. بر اساس یک نمونه تصادفی ۹ تایی از نمرات، فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین نمرات درس آمار دانشجویان به صورت $(۳۰/۵۲,۳۵/۴۸)$ بدست آمده است.

الف) میانگین و واریانس نمرات ۹ دانشجوی انتخاب شده را بیابید.

ب) یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای واریانس نمرات درس آمار دانشجویان بیابید (با فرض $S=۴$). (آزاد جنوب ۸۵)

تمرین ۸.۳.۶. طول عمر نوعی باتری اتومبیل دارای توزیع نرمال است. یک نمونه تصادفی از این نوع باتری انتخاب و پس از استفاده نتایج زیر بدست آمده است.

$$۲/۸,۳,۳/۱,۳/۵,۳/۲,۴,۲/۹$$

الف) یک بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین طول عمر واقعی این نوع باتری را بدست آورید.

ب) یک بازه اطمینان ٪۹۹ برای انحراف معیار واقعی این نوع باتری را بدست آورید. *(امیرکبیر ۸۸)*

تمرین ۹.۳.۶. فرض کنید یک نوع مواد آلاینده معلق در هوای تهران در یک ایستگاه بر حسب میکروگرم اندازه گیری و نتایج به صورت زیر داده شده است:

۲/۵, ۳, ۲/۵, ۱/۵, ۳, ۱/۵, ۲, ۲/۵, ۱/۵, ۱

اگر این اعداد دارای توزیع نرمال باشند، فواصل (۱/۶, ۲/۶) و (۰/۲۶, ۱/۳۲) به ترتیب فواصل اطمینان چند درصدی برای میانگین و واریانس می‌باشند؟ *(آزاد جنوب ۸۸)*

تمرین ۱۰.۳.۶. یک نمونه تصادفی ۳۶ تایی از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس $\sigma^2 = ۴$ انتخاب می‌شود. احتمال اینکه پارامتر μ در فاصله $(\bar{X} \mp ۰/۶۵)$ باشد تقریباً چقدر است؟ *(مهندسی صنایع ۸۶)*

تمرین ۱۱.۳.۶. در یک جامعه نرمال از کالاهای تولیدی برای براورد کالای معیوب تولید شده، اگر بخواهیم ۰/۹۵ اطمینان داشته باشیم که خطای حاصل از براورد کمتر از ۰/۰۲ باشد، کمترین حجم نمونه لازم چقدر است؟ *(مهندسی صنایع ۸۶)*

تمرین ۱۲.۳.۶. کمیت تصادفی X بر طبق قانون نرمال با امید ریاضی μ و واریانس σ توزیع شده است. به منظور ارزیابی μ در تخمین فاصله ای حداکثر خطای ممکن با احتمال ۰/۹۵ اعتماد چقدر است، با فرض اینکه در نمونه ای به حجم $n = ۵$ و $S^2 = ۲۵$ (واریانس نمونه ای) و $t_{۰/۹۷۵,۴}$ به دست آمده باشد. *(آزاد ۸۰)*

فصل ۷

آزمون فرض آماری

متغیر تصادفی X را که توزیع آن به پارامتر θ بستگی دارد در نظر بگیرید. ممکن است مقدار واقعی θ به علت تغییر شرایط تغییر نماید. ادعای هر نوع تغییر را باید از راه مشاهده، یعنی به کمک داده‌ها یا انکار کنیم یا انکار نکنیم. به زبان آماری این کار را آزمون آماری پارامتر θ می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۰.۷ (فرض صفر). فرضی که از ابتدا تا کنون مورد قبول بوده است و اینک ممکن است بر اثر وجود شواهدی تغییر کند، فرض صفر یا فرض اولیه می‌نامند و آن را با نماد H_0 نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۰.۷ (فرض یک). فرضی را که در برابر فرض صفر قرار می‌گیرد و درستی آن را زیر سؤال می‌برد، فرض مقابل یا فرض یک می‌نامند و آن را با نماد H_1 نشان می‌دهیم.

۱.۷ خطاهای آزمون، ناحیه بحرانی و p-مقدار

۱.۱.۷ خطاهای آزمون

احتمال خطای نوع اول (α):

$$\alpha = p(\text{خطای نوع اول}) = p(\text{فرض } H_0 \text{ را رد کنیم در حالی که } H_0 \text{ درست باشد}) = p(\text{رد } H_0 | \text{درست } H_0)$$

احتمال خطای نوع اول (β):

$$\beta = p(\text{خطای نوع دوم}) = p(\text{فرض } H_1 \text{ را رد کنیم در حالی که } H_1 \text{ درست باشد}) = p(\text{رد } H_1 | \text{درست } H_1)$$

توان آزمون:

احتمال اینکه فرض صفر را به درستی رد کنیم، یعنی

$$\pi = p(\text{را رد کنیم } H_0 | \text{درست باشد } H_1) = 1 - \beta$$

۲.۱.۷ ناحیه بحرانی یا ناحیه رد H_0

ناحیه ای (فاصله ای) که بر اساس یک آزمون فرض آماری تصمیم گیری می‌کنیم، یعنی اگر مقدار تابعی مشخص از مشاهدات (آماره) در این ناحیه قرار گیرد فرض صفر را رد می‌کنیم در غیر این صورت نمی‌توان فرض صفر را رد کرد.

برای فهم بهتر مفاهیم بالا به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱.۷. شخصی ادعا کرده است که سکه‌هایی که ضراب‌خانه، ضرب می‌کند سالم نیستند و شانس شیر آمدن آن‌ها برابر $\frac{1}{3}$ ولی مدیر ضراب‌خانه این ادعا را قبول ندارد و می‌گوید سکه‌ها کاملاً سالم هستند، یعنی شانس شیر آمدن آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. یعنی به زبان آماری داریم:

$$\begin{cases} H_0 : p = \frac{1}{2} \\ H_1 : p = \frac{1}{3} \end{cases}$$

در اینجا برای قضاوت در مورد ادعاهای مورد نظر باید ابتدا از سکه های ضراب‌خانه به طور کاملاً تصادفی نمونه گیری می‌کنیم. فرض کنید ۱۰ سکه را به طور تصادفی انتخاب کردیم، به زبان آماری یعنی

$$X_1, X_2, \ldots, X_{10} \sim B(p)$$

چون پرتاب سکه یک آزمایش برنولی است با شانس شیر آمدن p.

اکنون فرض کنید با دو طرف قرارداد کنیم که اگر در این پرتاب ۱۰ سکه حداکثر دو بار شیر آمد، آن وقت سکه‌ها سالم نیستند و $p = \frac{1}{3}$ مورد قبول است در غیر این صورت $p = \frac{1}{2}$ قابل قبول است. به زبان آماری یعنی $(Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 2)$ به عنوان یک ناحیه رد برای فرض صفر است.

چون در اینجا نتیجه پرتاب سکه‌ها جنبه احتمالی دارد، بنابراین ممکن است دچار دو نوع خطا شویم یا سکه‌ها سالم بودند و به اشتباه گفتیم سالم نیستند (خطای نوع اول) و یا اینکه سکه‌ها سالم نبودند ولی به اشتباه گفتیم سالمند (خطای نوع دوم).

اکنون می‌خواهیم احتمال این دو نوع خطا را محاسبه کنیم.

$$\alpha = p(\text{رد شود } H_0 | \text{درست باشد } H_0)$$
$$= p(Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 2 | p = \frac{1}{2})$$

میدانیم اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim B(p)$ آنگاه $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$ بنابراین

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \overset{H_0}{\sim} Bin(10, \frac{1}{2})$$
$$= p_{H_0}(Y \leq 2) = p_{H_0}(Y = 0) + p_{H_0}(Y = 1) + p_{H_0}(Y = 2)$$
$$= \binom{10}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{10} + \binom{10}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^9 + \binom{10}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^8$$
$$= \frac{56}{1024}$$

و به طور مشابه دارم:

$$\beta = p(\text{رد شود } H_1 | \text{درست باشد } H_1)$$
$$= p(Y = \sum_{i=1}^{n} X_i > 2 | p = \frac{1}{3}) = 1 - p_{H_1}(Y = \sum X_i \leq 2)$$

چون

$$Y = \sum X_i \overset{H_1}{\sim} Bin(10, \frac{1}{3})$$

بنابراین

$$\beta = 1 - p_{H_1}(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 2) = 1 - \left[\binom{10}{0}(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^{10} + \binom{10}{1}(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^9 + \binom{10}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^8\right]$$

۳.۱.۷ p-مقدار ($p - value$)

کمترین مقداری از α (یعنی میزان یا سطح آزمون) است، که یافته آماره آزمون ممکن است موجب رد فرض صفر گردد.

مثال ۲.۱.۷. می‌دانیم که تعداد تصادفات رانندگی در یک خیابان در هر روز یک متغیر تصادفی پواسن می‌باشد. اگر بخواهیم فرض $\lambda < 0/5$ آزمون کنیم و ناحیه رد آزمون به صورت $\sum_{i=1}^{12} X_i < 5$ بیان شده باشد، آنگاه

احتمال خطای نوع اول و توان آزمون را برای حالت‌هایی که فرض مقابل $\lambda = ۰/۳$ و $\lambda = ۰/۴$ باشد محاسبه کنید. (امیرکبیر ۸۵)

حل. ناحیه رد (بحرانی): $C = \{\sum_{i=۱}^{۱۲} X_i < ۵\}$

$$\begin{cases} H_۰: & \lambda = ۰/۵ \\ H_۱: & \lambda = ۰/۳ \end{cases}$$

$$\alpha = p(H_۰ \text{ درست}|\text{رد } H_۰) = p(\sum_{i=۱}^{۱۲} X_i < ۵ | \lambda = ۰/۵)$$

(می‌دانیم اگر $X_i \sim P(\lambda)$ و مستقل از هم باشند آنگاه $\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$) در نتیجه $\sum_{i=۱}^{۱۲} X_i \sim P(۱۲ \times ۰/۵) \Leftarrow \sum_{i=۱}^{۱۲} X_i \sim P(۶)$

$$\Rightarrow \alpha = p(\sum_{i=۱}^{۱۲} X_i < ۵) = ۰/۲۸ \quad \text{با استفاده از جدول پواسن}$$

$$\pi = p(H_۱ \text{ درست}|\text{رد } H_۰) = p(\sum_{i=۱}^{۱۲} X_i < ۵ | \lambda = ۰/۳) \qquad \sum_{i=۱}^{۱۲} X_i \sim P(۱۲ \times ۰/۳$$

$$\pi = ۰/۷۰۶۵ \quad \text{با استفاده از جدول پواسن}$$

$$\begin{cases} H_۰: & \lambda = ۰/۵ \\ H_۱: & \lambda = ۰/۴ \end{cases}$$

α این آزمون نیز تفاوتی با آزمون قبلی ندارد و $\alpha = ۰/۲۸$ اما توان آزمون متفاوت است.

$$\pi = p(\sum_{i=۱}^{۱۲} X_i < ۵ | \lambda = ۰/۴) \qquad \sum_{i=۱}^{۱۲} X_i \sim p(۱۲ \times ۰/۴ = ۴/۸)$$

$$\pi = p(\sum_{i=۱}^{۱۲} X_i < ۵) = ۰/۴۷۶۲ \quad \text{با استفاده از جدول}$$

مثال ۳.۱.۷. فرض کنید X دارای توزیع $Ge(\theta)$ با تابع احتمال زیر باشد.

$$f(x;\theta) = \theta(۱-\theta)^x \quad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

بر اساس یک مشاهده می‌خواهیم آزمون $H_۰: \theta = \frac{۱}{۲}$ در مقابل $H_۱: \theta < \frac{۱}{۲}$ را انجام دهیم. اگر X مقداری بیشتر از ۲ اختیار کند، فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم. احتمال خطای نوع اول را بدست آورید. با فرض $H_۱: \theta = \frac{۱}{۴}$ احتمال خطای نوع دوم و توان آزمون را بدست آورید. (مهندسی مکاترونیک ۸۵)

حل.

$$\alpha = p(H_{\circ} \text{ درست}|\text{رد } H_{\circ}) = p(X > ۲|\theta = \frac{۱}{۲})$$
$$\sum_{x=۳}^{\infty} f_{\theta=\frac{۱}{۲}}(x) = \sum_{x=۳}^{\infty} \frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{۲})^x = \frac{۱}{۲}\sum_{x=۳}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^x = \frac{۱}{۲} \times \frac{\frac{۱}{۸}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۸}$$

$$\beta = p(H_{۱} \text{ درست}|\text{رد } H_{۱}) = p(X \leq ۲|\theta = \frac{۱}{۴})$$
$$\sum_{x=\circ}^{۲} f_{\theta=\frac{۱}{۴}}(x) = \sum_{x=\circ}^{۲} \frac{۱}{۴}(۱ - \frac{۱}{۴})^x = \frac{۱}{۴}((\frac{۳}{۴})^{\circ} + (\frac{۳}{۴})^{۱} + (\frac{۳}{۴})^{۲})$$
$$= \frac{۳۷}{۶۴} \rightarrow \pi = ۱ - \beta = ۱ - \frac{۳۷}{۶۴} = \frac{۲۷}{۶۴} \quad \text{توان آزمون}$$

مثال ۴.۱.۷. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_{۱\circ}$ نمونه تصادفی از جامعه برنولی با پارامتر θ باشد و علاقه‌مند به آزمون $H_{\circ} : \theta = \frac{۱}{۲}$ در برابر $H_۱ : \theta = \frac{۲}{۳}$ باشیم. اگر $\sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i \geq ۸$ ناحیه بحرانی آزمون باشد، احتمال خطای نوع اول تقریباً چقدر است؟ (کامپیوتر ۸۵)

حل.

$$\alpha = p(H_{\circ} \text{ درست}|\text{رد } H_{\circ}) = p(\sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i \geq ۸|\theta = \frac{۱}{۲})$$
$$= p(\sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i = ۸ \text{ یا } \sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i = ۹ \text{ یا } \sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i = ۱\circ|\theta = \frac{۱}{۲})$$
$$= p(\sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i = ۸|\theta = \frac{۱}{۲}) + p(\sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i = ۹|\theta = \frac{۱}{۲}) + p(\sum_{i=۱}^{۱\circ} X_i = ۱\circ|\theta = \frac{۱}{۲})$$
$$= \binom{۱\circ}{۸}(\frac{۱}{۲})^۸(\frac{۱}{۲})^۲ + \binom{۱\circ}{۹}(\frac{۱}{۲})^۹(\frac{۱}{۲})^۱ + \binom{۱\circ}{۱\circ}(\frac{۱}{۲})^{\circ}(\frac{۱}{۲})^{\circ}$$
$$= (\frac{۱}{۲})^{۱\circ}(۴۵ + ۱\circ + ۱) = \frac{۵۶}{۱\circ۲۴} \simeq \circ/\circ۵$$

یادآوری: $X_i \sim B(\theta) \rightarrow Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim Bin(n, \theta)$

مثال ۵.۱.۷. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$ باشد. برای آزمون $H_{\circ} : \lambda = ۱$ در مقابل $H_۱ : \lambda = ۲$ در سطح $\circ/\circ۵$ اگر ناحیه بحرانی به صورت $X < C$ باشد، مقدار C را بدست آورید. (مهندسی نساجی ۸۸)

حل.

$$\mathrm{E}(X)=\frac{۱}{\lambda}\rightarrow f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>۰\\ ۰ & o.w\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= p(H_۰ \text{ رد} | \text{درست } H_۰)=p(X<C|\lambda=۱)\\ &=\int_۰^C e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_۰^C=۱-e^{-C}=۰/۰۵\Rightarrow C=-\ln(۰/۹۵)\end{aligned}$$

مثال ۶.۱.۷. فرض کنید $X\sim Bin(۶,p)$ و علاقه‌مند به آزمون $H_۰:p=\frac{۱}{۴}$ در مقابل $H_۱:p=\frac{۳}{۴}$ هستیم. اگر ناحیه بحرانی به فرم $X\geq k$ و $x=۵$ مشاهده شود، p-مقدار را محاسبه کنید. (مهندسی صنایع ۸۸)

حل.

$$\begin{aligned}p-value &= p(\text{با مقدار مشاهده شده } H_۰ \text{ رد} | \text{درست } H_۰)\\ &=p(X\geq ۵|p=\frac{۱}{۴})=p(X=۵|p=\frac{۱}{۴})+p(X=۶|p=\frac{۱}{۴})\\ &=\binom{۶}{۵}(\frac{۱}{۴})^۵(\frac{۳}{۴})^۱+\binom{۶}{۶}(\frac{۱}{۴})^۶(\frac{۳}{۴})^۰\\ &=\frac{۱۹}{۴^۶}\end{aligned}$$

مثال ۷.۱.۷. در یک آزمون فرض برای یک جامعه نرمال با انحراف معیار $\sigma=۰/۵$ تعداد $n=۹$ نمونه تصادفی را انتخاب کرده و میانگین آن‌ها برابر ۸/۷۵ می‌باشد. p-مقدار آزمون برای فرض $H_۰:\mu=۸/۵$ در مقابل $H_۱:\mu>۸/۵$ را بدست آورید. (مهندسی مکاترونیک ۸۵)

حل. واضح است که ناحیه رد باید به صورت $\bar{X}>k$ باشد.

$$\begin{aligned}p-value &= p(\text{با مقدار مشاهده شده } H_۰ \text{ رد} | \text{درست } H_۰)\\ &=p(\bar{X}>۸/۷۵|\mu=۸/۵)=p\Big(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>\frac{۸/۷۵-۸/۵}{\frac{۰/۵}{\sqrt{۹}}}\Big)\\ &=۱-p(Z<۱/۵)=۱-۰/۹۳۳۲=۰/۰۶۶۸ \qquad \text{از جدول}\end{aligned}$$

تمرین ۸.۱.۷. فرض کنید $p(X=x)=\binom{۱}{x}\theta^x(۱-\theta)^{۱-x};\ x=۰,۱$ از این توزیع یک نمونه تصادفی ۵ تایی اختیار می‌کنیم. هدف آزمون $H_۰:\theta=\frac{۱}{۲}$ در برابر $H_۱:\theta\neq\frac{۱}{۲}$ است. فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم اگر حداکثر ۱ موفقیت یا حداقل ۴ موفقیت حاصل شود. در این صورت مقدار احتمال خطای نوع اول را بدست آورید.

تمرین ۹.۱.۷. صفت مورد مطالعه در یک بررسی اقتصادی دارای توزیع نرمال با انحراف معیار $\sigma=۳$ می‌باشد. اگر هدف آزمون فرض $H_۰:\mu=۱۵$ در برابر $H_۱:\mu=۱۶$ با احتمال‌های خطای نوع اول و دوم ۰/۰۵ باشد، چه تعداد نمونه تصادفی باید انتخاب گردد؟ (مهندسی صنایع ۸۵)

۲.۷ آزمون فرض برای میانگین توزیع نرمال

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، در این صورت داریم:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$		
فرضیه برای μ	ناحیه رد H_0 (بحرانی) σ^2 معلوم	ناحیه رد H_0 (بحرانی) σ^2 مجهول
$\mu_0 < \mu_1$ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha}$	$t_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1,1-\alpha)}$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
$\mu_0 > \mu_1$ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha}$	$t_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{(n-1,1-\alpha)}$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$\begin{cases} Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ \text{یا} \\ Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$	$\begin{cases} t_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \\ \text{یا} \\ t_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq -t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \end{cases}$

⋆ μ_0 و μ_1 مقادیری معلوم هستند.

۳.۷ آزمون فرض برای واریانس توزیع نرمال

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، در این صورت داریم:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$		
فرضیه برای σ^2	ناحیه رد H_0 (بحرانی) μ معلوم	ناحیه رد H_0 (بحرانی) μ مجهول
$\sigma_0^2 < \sigma_1^2$ $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi_0^2 = \frac{nS_0^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{(n,1-\alpha)}$ $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
$\sigma_0^2 > \sigma_1^2$ $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi_0^2 = \frac{nS_0^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{(n,\alpha)}$ $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{(n-1,\alpha)}$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$	$\begin{cases} \chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{(n,1-\frac{\alpha}{2})} \\ \text{یا} \\ \chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{(n,\frac{\alpha}{2})} \end{cases}$ $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\begin{cases} \chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \\ \text{یا} \\ \chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})} \end{cases}$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

مثال ۱.۳.۷. آزمون‌هایی به صورت زیر در سطح تشخیص $\alpha = 0/5$ برای μ و σ انجام دهید (نمونه به دست آمده از جامعه نرمال می‌باشد). (امیرکبیر ۸۸)

الف) $\begin{cases} H_0 : \mu = ۳/۵ \\ H_1 : \mu \neq ۳/۵ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} H_0 : \sigma = ۱/۵ \\ H_1 : \sigma < ۱/۵ \end{cases}$

$$۴, ۲, ۱, ۳, ۴, ۳, ۴, ۳, ۵$$

حل. الف) در این مثال چون جامعه نرمال و واریانس آن مجهول و تعداد نمونه کوچک است، ناحیه رد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{ناحیه رد: } \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})} \quad \text{یا} \quad \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq -t_{(n-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}$$

$$\bar{X} = ۳/۲۲ \quad S^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۹} x_i^۲ - n\bar{x}^۲}{n-۱}$$

$$s^۲ = \frac{۱۶+۴+۱+۹+۱۶+۹+۱۶+۹+۲۵-۹\times(۳/۲۲)^۲}{۸} = \frac{۱۰۵-۹۳/۳۱}{۸}$$

$$s^۲ = ۱/۴۶ \Rightarrow s = ۱/۲ \quad \mu_0 = ۳/۵ \; \alpha = ۰/۰۱ \; \Rightarrow ۱-\frac{\alpha}{۲} = ۰/۹۹۵$$

$$t_{(۸,۰/۹۹۵)} = ۳/۳۵۵ \Rightarrow \frac{۳/۲۲-۳/۵}{\frac{۱/۲}{۳}} = \frac{-۰/۲۸}{۰/۴} = -۰/۷$$

اگر $-۰/۷$ در یکی از دو ناحیه بالا که مشخص کردیم صدق کند، H_0 را رد می‌کنیم و اگر صدق نکند ما نمی‌توانیم H_0 را رد کنیم. بر اساس این نمونه که در اختیار داریم

$$-۰/۷ \ngeq ۳/۳۳۵ \quad \text{یا} \quad -۰/۷ \nleq -۳/۳۳۵$$

در هیچ یک از دو ناحیه صدق نمی‌کند پس ما بر اساس داده‌هایی که داریم نمی‌توانیم فرض صفر را رد کنیم.

ب)

$$\begin{cases} H_0 : \sigma = ۱/۵ \\ H_1 : \sigma < ۱/۵ \end{cases}$$

ناحیه رد آن به صورت مقابل است:

$$\frac{S\sqrt{(n-۱)}}{\sigma_0} \leq \sqrt{\chi^۲_{(n-۱,\alpha)}}$$

بر اساس داده‌ها داریم:

$$\frac{۱/۲\sqrt{۸}}{۱/۵} \leq \sqrt{۱/۶۴} \qquad ۲/۲۶ \leq ۲/۲۸; \qquad \chi^۲_{(n-۱,\alpha)} = ۱/۶۴$$

داده های ما در ناحیه رد صدق می‌کند، در نتیجه H_0 در $\alpha = ۰/۰۱$ رد می‌شود.

مثال ۲.۳.۷. بطری‌های تولیدی یک کارخانه تولید آب میوه باید به طور متوسط حاوی یک لیتر آب میوه با انحراف معیار ۱۰ سی‌سی باشد. برای کنترل این استاندارد، روزانه ۳۶ بطری به تصادف بررسی می‌شود. برای کنترل کیفیت این کارخانه، آزمون فرض زیر طراحی شده است.

$$\begin{cases} H_۰ : \mu = ۱۰۰۰^{cc} \\ H_۱ : \mu \neq ۱۰۰۰^{cc} \end{cases}$$

در صورتی که خطای نوع اول، یعنی α، پنج درصد باشد، ناحیه بحرانی آزمون را مشخص کنید، یعنی بگویید با چقدر فاصله گرفتن میانگین حجم ۳۶ باتری انتخابی از ۱۰۰۰ سی‌سی، باید خط تولید متوقف شود (فرض کنید که در صورت بروز اشکال در خط تولید، انحراف معیار حجم آب میوه درون بطری‌ها تقریباً بی تغییر باقی می‌ماند)؟ (امیرکبیر ۹۰)

حل. در این مسئله توزیع حجم بطری‌ها نرمال نیست، اما چون $n = ۳۶$ است می‌توانیم از قضیه حد مرکزی استفاده کنیم و ناحیه رد آن به صورت زیر خواهد شد.

$$\text{ناحیه رد}: |\bar{X} - \mu_۰| > C$$

در این مسئله ما می‌خواهیم C را بدست آوریم.

$$\alpha = p(\text{ناحیه رد} | \text{درست } H_۰) = p(|\bar{X} - ۱۰۰۰| > C | \mu = ۱۰۰۰) = ۰٫۰۵$$

$$\begin{aligned} p(|\bar{X} - ۱۰۰۰| > C) &= p(\bar{X} - ۱۰۰۰ > C \text{ یا } \bar{X} - ۱۰۰۰ < -C) \\ &= p(\bar{X} - ۱۰۰۰ > C) + p(\bar{X} - ۱۰۰۰ < -C) = ۰٫۰۵ \end{aligned}$$

می‌توانیم ۰٫۰۵ را تقسیم بر دو کنیم و به تک تک احتمال‌های بالا اختصاص دهیم.

$$p(\bar{X} - ۱۰۰۰ > C) = ۰٫۰۲۵$$
$$p(\bar{X} - ۱۰۰۰ < -C) = ۰٫۰۵$$

با استفاده از قضیه حد مرکزی داریم:

$$p\left(\frac{\bar{X} - ۱۰۰۰}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = p\left(Z > \frac{C}{\frac{۱۰}{\sqrt{۳۶}}}\right)$$

$$\Rightarrow p\left(Z > \frac{۶C}{۱۰}\right) = ۰٫۰۲۵$$

$$\Rightarrow p\left(Z < \frac{۶C}{۱۰}\right) = ۰٫۹۷۵$$

با استفاده از جدول نرمال استاندارد داریم:

$$\frac{۶C}{۱۰} = ۱٫۹۶ \Rightarrow C = ۳٫۲۶$$

در نتیجه ناحیه رد به صورت زیر خواهد شد:

$$|\bar{X} - ۱۰۰۰| > ۳٫۲۶$$

مثال ۳.۳.۷. الف) آزمون فرض، خطای نوع اول و خطای نوع دوم را تعریف کنید.

ب) در آزمونی به صورت $\begin{cases} H_{\circ}: \mu = ۱۰ \\ H_{۱}: \mu = ۱۲ \end{cases}$ برای میانگین جامعه نرمال با واریانس ۴ در صورتی که ناحیه بحرانی به صورت $\bar{X} > ۱۱$ تعریف شود، مقادیر α و β را برای دو نمونه تصادفی ۹ و ۲۵ تعیین کنید.

ج) از مقایسه α و β در این دو مرحله چه نتیجه ای به دست می‌آید؟ (امیرکبیر ۸۶)

حل. الف) نکات را بخوانید.

ب) $n = ۹$

$$\alpha = p(H_{\circ} \text{ درست} | H_{\circ} \text{ رد}) = p(\bar{X} > ۱۱ | \mu = ۱۰)$$
$$= p\Big(\frac{\bar{X} - ۱۰}{\frac{۲}{\sqrt{۹}}} > \frac{۱۱ - ۱۰}{\frac{۲}{\sqrt{۹}}}\Big) = p(Z > \frac{۳}{۲})$$

$$\alpha = p(Z < \frac{۳}{۲}) \overset{\text{از جدول}}{=\!=\!=} ۰/۹۳۳۲ \Rightarrow \alpha = ۰/۰۶۶۸$$

$$\beta = p(H_{۱} \text{ درست} | H_{۱} \text{ رد}) = p(\bar{X} < ۱۱ | \mu = ۱۲)$$
$$= p\Big(Z < \frac{۱۱ - ۱۲}{\frac{۲}{۳}}\Big) = p(Z < -۱/۵) = ۰/۰۶۶۸$$

$n = ۲۵$

$$\alpha = p(\bar{X} > ۱۱ | \mu = ۱۰) = p\Big(Z > \frac{۱۱ - ۱۰}{\frac{۲}{\sqrt{۲۵}}}\Big) = p(Z > ۲/۵)$$
$$\alpha = p(Z < ۲/۵) = ۰/۹۹۳۸ \Rightarrow \alpha = ۰/۰۰۶۲$$
$$\beta = p(\bar{X} < ۱۱ | \mu = ۱۲) = p(Z < \frac{۱۱ - ۱۲}{\frac{۵}{۲}}) = p(Z < -۲/۵) = ۰/۰۰۶۲$$

ج) با افزایش n، α و β کاهش یافته‌اند.

مثال ۴.۳.۷. یک تولید کننده لامپ ادعا می‌کند که لامپ‌هایش دست کم ۶۰۰ ساعت کار می‌کند. برای امتحان وی ۱۶ عدد لامپ را آزمایش می‌کند. اگر مقدار آماره t در بازه $-۱/۸ < t < \infty$ قرار گیرد، ادعا را خواهد پذیرفت. حال اگر در یک نمونه $\bar{x} = ۵۸۰$ و $s = ۴۰$ ساعت باشد، چه باید گفت؟ (مهندسی صنایع ۸۲)

حل.

$$t_{\circ} = \frac{\bar{x} - \mu_{\circ}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{۵۸۰ - ۶۰۰}{\frac{۴۰}{\sqrt{۱۶}}} = -۲$$

چون $t_{\circ} = -۲$ به بازه $-۱/۸ < t < \infty$ متعلق نیست، پس نمی‌توان ادعای وی را پذیرفت.

مثال ۵.۳.۷. متغیر تصادفی $X \sim N(\circ, \sigma^{۲})$ مفروض است. نمونه تصادفی $X_{۱}$ و $X_{۲}$ را در نظر می‌گیریم و مایلیم به ازای $\alpha = \circ/\circ ۳$ فرض $H_{\circ} : \sigma \geq ۱$ را در برابر $H_{۱} : \sigma < ۱$ آزمایش کنیم. اگر مناسب‌ترین آماره آزمون را در این مسئله به کار ببریم، ناحیه بحرانی را بدست آورید؟ (مهندسی صنایع ۸۲)

حل. در این مسئله چون میانگین معلوم است، $(\mu_{\circ} = \circ)$ پس آماره مناسب $\frac{nS_{\circ}^{۲}}{\sigma^{۲}}$ می‌باشد که دارای توزیع $\chi_n^{۲}$ خواهد بود، یعنی داریم:

$$\frac{۲S_{\circ}^{۲}}{\sigma_{\circ}^{۲}} \sim \chi_{۲}^{۲}$$

$$S_{\circ}^{۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu_{\circ})^{۲} = \frac{۱}{۲}\Big[(X_{۱} - \circ)^{۲} + (X_{۲} - \circ)^{۲}\Big] = \frac{X_{۱}^{۲} + X_{۲}^{۲}}{۲}$$

$$\alpha = p_{H_{\circ}}(\frac{۲S_{\circ}^{۲}}{\sigma^{۲}} < C) = p_{H_{\circ}}(\frac{X_{۱}^{۲} + X_{۲}^{۲}}{۲} < C)$$
$$= \int_{\circ}^{C} \frac{۱}{۲}e^{-\frac{x}{۲}}dx = -e^{-\frac{x}{۲}}\Big|_{\circ}^{C} = ۱ - e^{-\frac{C}{۲}} = \circ/\circ ۳ \rightarrow C = -۲\ln \circ/۹۷$$

بنابراین ناحیه بحرانی به صورت زیر خواهد بود.

$$[\circ, -۲\ln \circ/۹۷]$$

یادآوری: $X \sim \chi_n^{۲}$ آنگاه داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۲}}}{\Gamma(\frac{n}{۲})}x^{\frac{n}{۲}-۱}e^{-\frac{۱}{۲}x} & x > \circ \\ \circ & o.w \end{cases}$$

مثال ۶.۳.۷. در یک نمونه تصادفی ۲۰ تایی از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^{۲}$ مقادیر نمونه ای $\bar{x} = ۱۱$ و $s^{۲} = ۱۶$ حاصل شده است. آزمون فرض $H_{\circ} : \sigma^{۲} = ۹$ را در برابر $H_{۱} : \sigma^{۲} > ۹$ در سطح $\alpha = \circ/\circ ۵$ انجام دهید. (مهندسی صنایع ۸۳)

حل.

$$\alpha = p_{H_{\circ}}(\frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma^{۲}} > C|\sigma^{۲} = ۹)$$
$$\circ/\circ ۵ = p(\chi_{۲۱}^{۲} > C) \rightarrow p(\chi_{۱۹}^{۲} < C) = \circ/۹۵$$

از جدول

$$C = ۳\circ/۱۴۴$$

بنابراین ناحیه بحرانی به صورت $(۳\circ/۱۴۴, \infty)$ خواهد بود. حال با توجه به داده‌ها داریم:

$$\chi_{\circ}^{۲} = \frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma_{\circ}^{۲}} = \frac{۱۹ \times ۱۶}{۹} = ۳۳/۷۷$$

چون $\chi^2_{\circ}$ متعلق به ناحیه بحرانی است، پس فرض صفر را در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ رد می‌کنیم.

تمرین ۷.۳.۷. از جامعه با انحراف معیار $\sigma = ۲۵$ یک نمونه تصادفی با اندازه $n = ۱۰۰$ انتخاب شده است. برای انجام آزمونی به صورت $\begin{cases} H_{\circ} : \mu = ۳۶ \\ H_1 : \mu = ۴۲ \end{cases}$ و با ناحیه بحرانی $\bar{X} > ۴۰$ احتمال خطای نوع اول (α) و نوع دوم (β) و توان آزمون (π) را بدست آورید. *(امیرکبیر ۸۹)*

تمرین ۸.۳.۷. یک نمونه تصادفی $n = ۸$ تایی از جامعه نرمال انتخاب و نتایج زیر بدست آمده است.

$$۴, ۳, ۴, ۳, ۵, ۵, ۲, ۶$$

آیا با استفاده از سطح تشخیص $\alpha = ۰/۰۵$ می‌توان پذیرفت که انحراف معیار جامعه برابر $\sigma = ۱$ است؟ *(امیرکبیر ۸۹)*

تمرین ۹.۳.۷. برای انجام آزمون فرضیه های $H_{\circ} : \mu = ۷۵$ را در برابر $H_1 : \mu = ۷۸$ در صورتی که داشته باشیم $p\{\bar{X} \geq C|\mu = ۷۵\} = ۰/۰۲۵$، احتمال خطای نوع دوم آزمون *(β)* را محاسبه کنید. در صورتی که نمونه ای به اندازه $n = ۴۹$ با انحراف نمونه ای $s = ۵$ از این جامعه در اختیار داشته باشیم. *(امیرکبیر ۸۵)*

تمرین ۱۰.۳.۷. یک نمونه تصادفی ۲۰ تایی از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 مقادیر نمونه ای $\bar{x} = ۱۱$ و $s^2 = ۱۶$ را حاصل ساخته است. اگر $\sigma^2 = ۴$ فرض شود، آزمون فرض $H_{\circ} : \mu = ۱۲$ را در برابر $H_1 : \mu < ۱۲$ را در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ انجام دهید. *(مهندسی نساجی ۸۳)*

۴.۷ آزمون فرض برای تفاضل میانگین‌های دو جامعه نرمال مستقل

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال μ_1 و σ_1^2 و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ یک نمونه تصادفی m تایی مستقل از n نمونه اول و از توزیع نرمال با میانگین μ_2 و σ_2^2 باشند. در این صورت داریم:

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$		
فرضیه برای $\mu_1 - \mu_2$	ناحیه رد H_0 (بحرانی) σ_1^2 و σ_2^2 معلوم	ناحیه رد H_0 (بحرانی) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ مجهول
$a_0 < a_1$ $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = a_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 = a_1 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = a_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > a_0 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq Z_{1-\alpha}$	$t_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \geq t_{(n+m-2,1-\alpha)}$ $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$ $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$
$a_0 < a_1$ $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = a_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 = a_1 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = a_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < a_0 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq -Z_{1-\alpha}$	$t_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \leq -t_{(n+m-2,1-\alpha)}$ $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$ $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$
$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = a_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq a_0 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ یا $Z_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$t_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \geq t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})}$ یا $t_0 = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-a_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \leq -t_{(n+m-2,1-\frac{\alpha}{2})}$

۵.۷ آزمون فرض برای نسبت واریانس‌های دو جامعه نرمال مستقل

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ یک نمونه تصادفی m تایی مستقل از n نمونه اول و از توزیع نرمال با میانگین μ_2 و σ_2^2 باشند. در این صورت داریم:

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$		
فرضیه برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	ناحیه رد H_0 (بحرانی) μ_1 و μ_2 معلوم	ناحیه رد H_0 (بحرانی) $\mu_1 = \mu_2$ مجهول
$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} F_0 = \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} \geq F_{(n,m,1-\frac{\alpha}{2})} \\ \text{یا} \\ F_0 = \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} \leq F_{(n,m,\frac{\alpha}{2})} \end{cases}$ $\begin{cases} S_{01}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2 \\ S_{02}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \mu_2)^2 \end{cases}$	$\begin{cases} F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{(n-1,m-1,1-\frac{\alpha}{2})} \\ \text{یا} \\ F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{(n-1,m-1,\frac{\alpha}{2})} \end{cases}$ $\begin{cases} S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\ S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2 \end{cases}$
$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_0 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$	$F_0 = \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} < F_{(n,m,1-\alpha)}$	$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{(n-1,m-1,\alpha)}$
$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_0 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$	$F_0 = \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} > F_{(n,m,\alpha)}$	$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{(n-1,m-1,1-\alpha)}$

مثال ۱.۵.۷. ارائه کننده روش جدید در تولید لامپ‌های الکترونی مدعی است که این روش، طول عمر لامپ‌ها را به میزان ۵۵۰ ساعت افزایش می‌دهد. جهت آزمون این ادعا بر اساس یک نمونه ۳۶ تایی از لامپ‌ها قبل از استفاده از این روش مشاهده کردیم $\bar{x} = 1000$ و $\sum_{i=1}^{36} x_i^2 = 36350000$ و بر مبنای یک نمونه ۴۰ تایی از روش جدید مشاهده شده که $\bar{y} = 1500$ و $\sum_{i=1}^{40} y_i^2 = 90390000$، اکنون با فرض برابری واریانس‌ها، این ادعا را با استفاده از $p - value$ یا به طور معمول یک بار در سطح تشخیص ۵٪ و یک بار در سطح تشخیص ۱٪ آزمون کنید (در هر مورد فرض مقابل $\mu_2 - \mu_1 = 500$ باشد). (امیرکبیر ۸۵)

حل.

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 550$$

$$H_1 : \mu_2 - \mu_1 = 500$$

$$p - value = p(\bar{Y} - \bar{X} \leq \bar{y} - \bar{x} | \text{درست } H_0)$$

$\bar{Y}$ و $\bar{X}$ متغیرهای تصادفی هستند و $\bar{y}$ و $\bar{x}$ مشاهدات آن‌ها هستند.
می‌دانیم در اینجا $\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(\mu_۲-\mu_۱)}{S_p\sqrt{\frac{۱}{n}+\frac{۱}{m}}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است.

$$p-value = p(\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(۵۵۰)}{S_p\sqrt{\frac{۱}{n}+\frac{۱}{m}}} \leq \frac{\bar{y}-\bar{x}-(۵۵۰)}{S_p\sqrt{\frac{۱}{n}+\frac{۱}{m}}})$$

$$S_p^۲ = \frac{(n-۱)S_۱^۲+(m-۱)S_۲^۲}{n+m-۲} = ۱۰۰۰۰$$

$$n=۳۶,\ m=۴۰,\ \bar{x}=۱۰۰۰,\ \bar{y}=۱۵۰۰,\ s_۱^۲=۱۰۰۰۰,\ s_۲^۲=۱۰۰۰۰$$

$$p-value = p(Z \leq \frac{۵۰۰-۵۵۰}{۱۰۰\sqrt{\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۴۰}}}) = p(Z \leq \frac{-۵۰}{۲۲/۹۷}) = p(Z \leq -۲/۱۷) = ۰/۰۱۵۰$$

$p-value < ۰/۰۵ \Longrightarrow$ در سطح ۰/۰۵ فرض $H_۰$ رد می‌شود

$p-value > ۰/۰۱ \Longrightarrow$ در سطح ۰/۰۱ فرض $H_۰$ رد نمی‌شود

$p-value$ میزان اطمینان به فرض $H_۰$ است.

مثال ۲.۵.۷. می‌خواهیم آزمونی برای انحراف معیار دو جامعه آماری به صورت $H_۰ : \sigma_۱ = \sigma_۲$ در مقابل $H_۱ : \sigma_۱ \neq \sigma_۲$ انجام دهیم. اگر نمونه‌هایی که از آن دو جامعه استخراج شده به صورت زیر باشند:

نمونه جامعه اول: ۳, ۳/۲, ۲/۹, ۲/۵, ۳/۴, ۲/۸, ۳/۲, ۳

نمونه جامعه دوم: ۳, ۲/۶, ۳/۱, ۳/۵, ۳/۲, ۳/۹

الف) شرایط لازم برای انجام این آزمون را شرح دهید.

ب) در صورتی که شرایط مذکور برقرار باشد، این آزمون را در سطح معنی دار $\alpha = ۰/۱$ انجام دهید. (امیرکبیر ۸۵)

حل. الف) دو جامعه باید از هم مستقل باشند و همچنین توزیع این دو جامعه باید نرمال باشد.

$$H_۰ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲$$
$$H_۱ : \sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$$

ب) چون μ مجهول است ناحیه رد $H_۰$ به صورت زیر است.

$$\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} \geq F_{(n-۱,m-۱,۱-\frac{\alpha}{۲})}$$

یا

$$\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} \leq F_{(n-۱,m-۱,\frac{\alpha}{۲})}$$

$$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-\bar{x})^2}{n-1},\quad S_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i^2-\bar{y})^2}{m-1}$$

$$s_1^2=0/077,\quad s_2^2=0/061\ \Rightarrow \frac{s_1^2}{s_2^2}=1/26$$

$$\alpha=0/1\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0/05\quad 1-\frac{\alpha}{2}=0/95$$

$$F_{(7,5,0/05)}=\frac{1}{F_{(5,7,0/95)}}=\frac{1}{3/97}=0/25$$

$$F_{(7,5,0/95)}=4/88$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}=1/26\not> 4/88,\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}=1/26\not< 0/25$$

داده‌ها در دو ناحیه رد صدق نمی‌کنند در نتیجه فرض صفر در سطح $\alpha=0/1$ رد نمی‌شود.

مثال ۳.۵.۷. دو نوع فیلتر آب برای مقایسه بر حسب میانگین تقلیل مواد ناخالصی موجود در آب مورد بررسی قرار می‌گیرند. ۲۱ نمونه آب با هر یک از فیلترها آزمایش می‌شوند. خلاصه اطلاعات به شرح زیر هستند.

$$n_1=21,\ \bar{x}=8,\ s_x^2=4/5,\ n_2=21,\ \bar{y}=6/5,\ s_y^2=2$$

در سطح $\alpha=0/05$ آزمون فرض $\begin{cases}H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2\\ H_1:\sigma_x^2>\sigma_y^2\end{cases}$ را انجام دهید.

حل.

$$\alpha=0/05\to 1-\alpha=0/95\quad\Rightarrow F_{(20,20,0/95)}=2/12,\ F_0=\frac{s_x^2}{s_y^2}=\frac{4/5}{2}=2/5$$

چون $F_0>F_{(20,20,0/95)}$ پس فرض صفر رد می‌شود.

یادآوری: $\frac{s_x^2}{s_y^2}\times\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}\sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$ و چون $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}=1$ پس $\frac{s_x^2}{s_y^2}\sim F_{(20,20)}$

مثال ۴.۵.۷. دو نمونه تصادفی ۱۶ تایی مستقل به ترتیب از دو جامعه با توزیع‌های $N(\mu_1,32)$ و $N(\mu_2,32)$ انتخاب می‌شود. علاقه‌مند به آزمون $H_0:\mu_1=\mu_2$ در مقابل $H_1:\mu_1>\mu_2$ در سطح $\alpha=0/05$ هستیم. ناحیه بحرانی رد فرض صفر را بیابید. (مکاترونیک ۸۵)

حل.

$$n_1=16,\ n_2=16,\ \alpha=0/05$$

$$Z_0=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}>Z_{1-\alpha}=Z_{0/95}$$

$$Z_{\circ} = \frac{(\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲) - \circ}{\sqrt{\frac{۳۲}{۱۶} + \frac{۳۲}{۱۶}}} > ۱/۶۴$$

بنابراین ناحیه بحرانی رد فرض صفر به صورت $\bar{X}_۱ - \bar{X} > ۳/۲۸$ خواهد بود.

تمرین ۷.۵.۵. دو نمونه تصادفی از دو جامعه نرمال مستقل انتخاب و نتایج زیر به دست آمده است:

نمونه جامعه اول : ۳, ۲/۵, ۳/۱, ۳/۴, ۳/۵

نمونه جامعه دوم : ۳, ۳/۲, ۳/۳, ۲/۷, ۲/۵, ۳/۴, ۲/۷

آیا در سطح تشخیص ۱٪ می‌توان گفت که انحراف معیار جامعه اول بزرگ‌تر از انحراف معیار جامعه دوم است؟ (امیرکبیر ۸۶)

تمرین ۷.۵.۶. ارائه کننده مکانیسم جدید در تولید نوع خاصی از قطعات حساس، مدعی است این روش میزان دقت تولید محصولات را افزایش داده و واریانس ضخامت قطعات تولیدی را به نصف کاهش می‌دهد. جهت آزمون این ادعا، یک نمونه تصادفی ۳۰ تایی از روش اول انتخاب کردیم و مشاهده شد ۲ $= \bar{x}$ و $\sum_{i=۱}^{۳۰} x_i^۲ = ۱۲۷$ و بر اساس یک نمونه تصادفی ۳۶ تایی از روش دوم مشاهده شد که ۲/۰۱ $= \bar{y}$ و $\sum_{i=۱}^{۳۶} y_i^۲ = ۱۴۷$. حال ادعای مطروحه را در سطح تشخیص ۵٪ آزمون کرده و نتیجه آزمون را بیابید. (امیرکبیر ۸۴)

تمرین ۷.۵.۷. برای مقایسه دو جامعه اطلاعات زیر در اختیار است:

جامعه اول (x)	۱۴	۱۷	۱۸	۱۷	۱۹
جامعه دوم (y)	۱۵	۱۴	۱۸	۱۶	۱۷

با فرض نرمال بودن دو جامعه و مساوی بودن واریانس‌ها آیا در سطح $\alpha = ۰/۱$ می‌توان که میانگین‌های دو جامعه مساوی است؟ (مهندسی صنایع ۸۴)

تمرین ۷.۵.۸. فرض کنید یافته های دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های $N(\mu_۱, \sigma_۱^۲)$ و $N(\mu_۲, \sigma_۲^۲)$ به صورت زیر باشند. علاقه‌مند به آزمون $\begin{cases} H_\circ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \\ H_۱ : \sigma_۱^۲ < \sigma_۲^۲ \end{cases}$ هستیم. در سطح معنی داری $\alpha = ۰/۱$ آیا می‌توان فرض برابری واریانس‌ها را پذیرفت؟ (مهندسی سیستم ۸۴)

۷.۶ آزمون فرض برای P (برای n به اندازه کافی بزرگ)

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با احتمال پیروزی P باشد. در این صورت داریم:

$X \sim B(P)$	
ناحیه رد H_0 (بحرانی)	فرضیه برای P
$Z_0 = \frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \geq Z_{1-\alpha}$ $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$P_0 < P_1$ $\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P = P_1 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P > P_0 \end{cases}$
$Z_0 = \frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \leq -Z_{1-\alpha}$	$P_1 < P_0$ $\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P = P_1 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases}$
$Z_0 = \frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_0 = \frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \leq -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P \neq P_0 \end{cases}$

۷.۷ آزمون فرض برای تفاضل نسبت‌ها

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim B(P_1)$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \sim B(P_2)$ دو نمونه تصادفی به حجم n و m از دو جامعه مستقل باشند، در این صورت داریم:

$X \sim B(P_1), \quad Y \sim B(P_2)$	
فرضیه برای $P_1 - P_2$	ناحیه رد H_0 (بحرانی)
$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 = p \\ H_1 : P_2 > P_1 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_1}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \geq Z_{1-\alpha}$ $\hat{P}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{P} = \frac{n\hat{P}_1 + m\hat{P}_2}{m+n}$ $\hat{P}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$
$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 = p \\ H_1 : P_2 < P_1 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_1}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \leq -Z_{1-\alpha}$ $\hat{P}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{P} = \frac{n\hat{P}_1 + m\hat{P}_2}{m+n}$ $\hat{P}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$
$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \neq p \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases}$	$Z_0 = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_1}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ یا $Z_0 = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_1}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}} \leq -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\hat{P}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{P} = \frac{n\hat{P}_1 + m\hat{P}_2}{m+n}$ $\hat{P}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$

مثال ۱.۷.۷. ارائه کننده روش جدید در تولیدات یک کارخانه مدعی است که این روش درصد ضایعات را از ۸٪ به ۵٪ کاهش می‌دهد. جهت آزمون این ادعا، یک نمونه ۵۰ تایی از محصولات را انتخاب کردیم و مشاهده شد که ۲ مورد از آن‌ها معیوب است. اکنون فرض‌ها را نوشته و ادعای مطروحه را در سطح تشخیص ۵٪ آزمون کنید. (امیرکبیر ۸۴)

حل.

$$\begin{cases} H_0 : p = 0/08 \\ H_1 : p = 0/05 \end{cases}$$

ناحیه بحرانی به صورت زیر است.

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \leq -Z_{1-\alpha}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \hat{P} = \frac{2}{50} = 0/04$$

$$z_0 = \frac{0/04 - 0/08}{\sqrt{\frac{0/04\times 0/96}{50}}} = -1/48 \nless -Z_{0/95} = -1/64$$

فرض صفر رد نمی‌شود.

مثال ۲.۷.۷. از ۹۰ دانشجوی ثبت نام شده در دوره کارشناسی ارشد دانشگاه A، ۴۰ نفر دختر هستند. از ۵۵ دانشجویی که در خوابگاه زندگی می‌کنند ۲۵ نفر دختر هستند. اگر P_1 نسبت دانشجویان کارشناسی ارشد پسر در خوابگاه و P_2 نسبت دانشجویان کارشناسی ارشد دختر در خوابگاه باشد و اگر علاقه‌مند به آزمون $H_0 : P_1 = P_2$ در مقابل $H_1 : P_1 \neq P_2$ باشیم، آیا در سطح $\alpha = 0/1$ فرض صفر را می‌پذیرید؟ (مهندسی صنایع ۸۳)

حل.

$$x_1 = 55 - 25 = 30 \quad \text{تعداد دانشجویان پسر خوابگاهی}$$

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{30 + 25}{50 + 40} = \frac{11}{18}$$

$$z_0 = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(\frac{25}{40} - \frac{30}{50}) - 0}{\sqrt{\frac{11}{18}\times\frac{7}{18}(\frac{1}{50} + \frac{1}{40})}} = -0/2417 \nless -Z_{0/95} = -1/64$$

فصل ۸

رگرسیون خطی ساده

مدل $Y|x = a + bx + E$ را یک مدل رگرسیون خطی ساده می‌گویند که در آن متغیر x غیر تصادفی بوده و مقدار آن مشخص است ولی متغیر $Y|x$ وابسته به x بوده و تصادفی است. متغیر تصادفی E خطای تصادفی است و فرض می‌کنیم که میانگین آن صفر و واریانس آن $\sigma^۲$ باشد. پارامترهای این مدل a، b و $\sigma^۲$ می‌باشد که باید با استفاده از مشاهدات $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), \ldots, (x_n, y_n)$ براورد شوند.

۱.۸ روش حداقل مربعات خطا

با استفاده از مدل بالا برای هر مشاهده (x_i, y_i) داریم:

$$e_i = y_i - a - bx_i$$

در این روش می‌خواهیم مقادیر a و b را طوری بیابیم که تابع $L(a, b) = \sum_{i=۱}^{n} e_i^۲$ مینیمم شود. با مشتق گرفتن از تابع L نسبت به a و b به دست می‌آوریم:

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_x^۲}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

که در آن $S_{xy} = \sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ و $S_x^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲$ می‌باشند.

۲.۸ براورد ناااریب $\sigma^۲$

براورد نااریب $\sigma^۲$ به صورت زیر است.

$$\hat{\sigma^۲} = \frac{۱}{n-۲}(S_y^۲ - \hat{b}^۲ S_x^۲)$$

که در آن $S_y^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(y_i - \bar{y})^۲$.

مثال ۱.۲.۸. برای بررسی تأثیر افزایش یک ماده روی ذوب یک فلز ۵ بار از این آزمایش نمونه گرفته‌ایم و رد آن برای مقدار ماده اضافه شده (X) و نقطه ذوب فلز (Y) نتایج زیر حاصل گردید.

$$\sum_{i=۱}^{۵} x_i = ۱۵,\ \sum_{i=۱}^{۵} y_i = ۳۵۰,\ \sum_{i=۱}^{۵} x_i y_i = ۹۳۰,\ \sum_{i=۱}^{۵} x_i^۲ = ۵۵,\ \sum_{i=۱}^{۵} y_i^۲ = ۲۶۱۰۰$$

شیب خط رگرسیون خطی $Y_i = a + bx_i + E_i$ را محاسبه کنید. (مهندسی صنایع ۸۴)

حل.

$$b = \frac{S_{XY}}{S_X^۲} = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=۱}^{n} x_i}{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - n\bar{x}^۲}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \sum_{i=۱}^{n} x_i(y_i - \bar{y}) - \bar{x}\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=۱}^{n} x_i - ۰\\ &= \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=۱}^{n} x_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲ &= \sum_{i=۱}^{n}(x_i^۲ - ۲\bar{x}x_i + \bar{x}^۲) = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - ۲\bar{x}\sum_{i=۱}^{n} x_i + n\bar{x}^۲\\ &= \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - ۲n\bar{x}^۲ + n\bar{x}^۲\\ &= \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - n\bar{x}^۲\end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{۱}{۵}\sum_{i=۱}^{۵} x_i = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

$$\bar{y} = \frac{۱}{۵}\sum_{i=۱}^{۵} y_i = \frac{۳۵۰}{۵} = ۷۰$$

$$b = \frac{۹۳۰ - ۷۰ \times ۱۵}{۵۵ - ۵ \times (۳)^۲} = -۱۲$$

مثال ۲.۲.۸. در مدل رگرسیون خطی $Y = \alpha + \beta x + \epsilon$، Y متغیر پاسخ و x متغیر مستقل است. برای یک نمونه تصادفی ۱۶ تایی $(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), \ldots, (x_{۱۶}, y_{۱۶})$ خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است. اگر

$\epsilon \sim N(\circ, \sigma^۲)$ باشد، براورد ناریب $\sigma^۲$ را بدست آورید. (مهندسی صنایع ۸۷)

$$\sum_{i=۱}^{۱۶} x_i = ۳۲,\ \sum_{i=۱}^{۱۶} x_i^۲ = ۷۳,\ \sum_{i=۱}^{۱۶} y_i = ۴۸,\ \sum_{i=۱}^{۱۶} y_i^۲ = ۱۶\circ,\ \sum_{i=۱}^{۱۶} x_i y_i = ۱\circ۲$$

حل.

$$\hat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{n-۲}(S_y^۲ - \hat{\beta}^۲ S_x^۲) = \frac{۱}{۱۶-۲}(۱۶ - (\frac{۲}{۳})^۲ \times ۹) = \frac{۲}{۷}$$

$$S_y^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(y_i - \bar{y})^۲ = \sum_{i=۱}^{n} y_i^۲ - n\bar{y}^۲ = ۱۶\circ - ۱۶ \times (۳)^۲ = ۱۶$$

$$S_x^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲ = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - n\bar{x}^۲ = ۷۳ - ۱۶ \times (۲)^۲ = ۹$$

$$\bar{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i = \frac{۳۲}{۱۶} = ۲$$

$$\bar{y} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} y_i = \frac{۴۸}{۱۶} = ۳$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=۱}^{n} x_i}{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - n\bar{x}^۲} = \frac{۱\circ۲ - ۳(۳۲)}{۷۳ - ۱۶(۲)^۲} = \frac{۲}{۳}$$

تمرین ۳.۲.۸. اگر برای برازش یک مدل رگرسیون خطی ساده $y = \alpha + \beta x + \epsilon$ از اطلاعات زیر استفاده شود، $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ را بدست آورید. (مهندسی صنایع ۸۴)

x	−۱	−۲	۰	۱	۲
y	۰	۱	۲	۳	۴

تمرین ۴.۲.۸. در رابطه $Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i,\ (i = ۱, ۲, \ldots, n)$ اگر

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = \circ,\ \sum_{i=۱}^{n} y_i = ۳n,\ \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i = ۲n,\ \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ = n,\ \sum_{i=۱}^{n} y_i^۲ = ۱\circ n$$

براورد $\alpha - \beta$ را بدست آورید. (صنایع ۸۵)