$$S \to \varepsilon \mid BB \mid AB \mid BA \mid BA_{۱} \mid A_{۳}A_{۳}$$
$$A \to BB \mid AB \mid BA \mid BA_{۲} \mid A_{۴}A_{۴}$$
$$B \to A_{۵}A_{۵}$$
$$A_{۱} \to AB$$
$$A_{۲} \to AB$$

7-10: اتوماتای پشته‌ای یا ماشین پایین فشردنی (Pushdown automata)

در این بخش نوع دیگری از مدل محاسباتی به نام اتوماتای پشته‌ای یا ماشین پایین فشردنی را معرفی می‌کنیم. این اتوماتا مانند اتوماتای متناهی نامعین می‌باشد، با این تفاوت که دارای یک جزء اضافی به نام پشته است. پشته علاوه بر حافظه محدودی که در واحد کنترل وجود دارد، حافظه‌ای اضافی به ماشین می‌دهد. خواهیم دید، رده زبان‌هایی که می‌تواند بوسیله این اتوماتاها پذیرفته شود، دقیقاً رده زبان‌های مستقل از متن است.

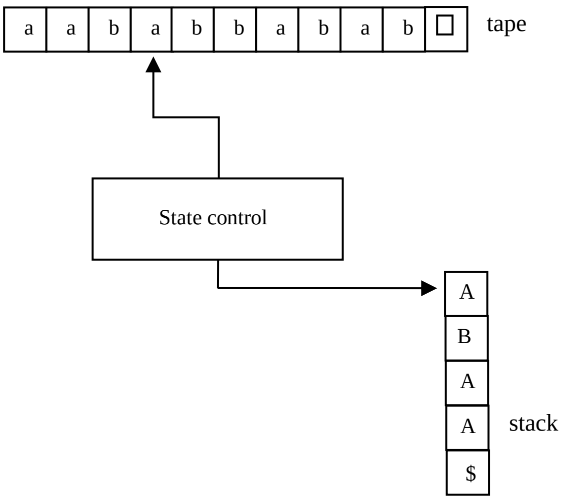
موضوع را با یک توصیف غیر رسمی از اتوماتای پشته‌ای معین شروع می‌کنیم. چنین اتوماتایی شامل موارد ذیل می‌باشد، همچنین شکل 7-1 را ببینید.

1. یک نوار وجود دارد که به سلول‌های حافظه‌ای تقسیم می‌شود. هر سلول یک نماد متعلق به یک مجموعه‌ی متناهی Σ را در خود ذخیره می‌کند. مجموعه‌ی Σ را الفبای نوار گویند. یک نماد مخصوص مانند □ وجود دارد که در Σ موجود نیست. این نماد را نماد خالی blank symbol گویند. اگر یک سلول شامل □ باشد، آنگاه این به این معنی است که سلول دقیقاً خالی است.
2. یک هد نوار (Tape head) وجود دارد که می‌تواند در طول نوار حرکت کند، در هر حرکت یک سلول به راست می‌رود. این هد همچنین می‌تواند سلولی که اخیراً اسکن شده است را بخواند.
3. یک استک (stack) وجود دارد که نمادهای یک مجموعه‌ی متناهی Γ در آن قرار دارند و آن را الفبای استک نامند. این مجموعه شامل نماد خاص $\$$ می‌باشد.

4. یک هد استک (stack head) وجود دارد که می‌تواند نماد بالای استک را بخواند. این هد همچنین می‌تواند نماد بالای پشته را حذف (pop) کند و می‌تواند نمادهای Γ را به روی استک درج (push) نماید.
5. یک واحد کنترل وجود دارد که می‌تواند در هر یک از تعداد متناهی حالت‌ها باشد. مجموعه‌ی حالت‌ها را با Q نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل یک حالت خاص q است که آن را حالت شروع نامند.

ورودی یک اتوماتای پشته‌ای یک رشته در Σ^* است. این رشته‌ی ورودی بر روی نوار اتوماتای پشته‌ای ذخیره می‌شود. در آغاز هد نوار در چپ‌ترین نماد رشته‌ی ورودی قرار می‌گیرد. در شروع استک تنها شامل نماد خاص $\$$ است و اتوماتای پشته‌ای در حالت شروع q قرار دارد. در یک گام محاسباتی، اتوماتای پشته‌ای موارد زیر را انجام می‌دهد:

1. فرض کنیم اتوماتای پشته‌ای در حال حاضر در حالت r باشد. گیریم a نمادی از Γ باشد که با هد نوار خوانده شود و A نمادی از Γ باشد که در بالای استک قرار دارد.
2. بسته به حالت جاری r، نماد نواری a و نماد استکی A،



شکل 7-1: یک اتوماتای پشته‌ای.

(a) اتوماتای پشته‌ای به حالت r' از Q می‌رود (که ممکن است همان r باشد)،

(b) هد نوار یا یک سلول به راست می‌رود یا در سلول جاری می‌ماند، و

(c) بالاترین نماد A بوسیله یک رشته w که به Γ^* تعلق دارد، جایگزین می‌شود.

دقیق‌تر این که:

i. اگر $w = \varepsilon$ ، آنگاه A از استک حذف شده است و حال آن که،

ii. اگر $w = B_1B_2...B_k$ ، $k \geq 1$ و $B_1, B_2, ..., B_k \in \Gamma$ ، آنگاه A با w تعویض می‌شود و w_k نماد جدید بالای استک می‌شود.

بعداً مشخص می‌کنیم که چه زمانی اتوماتای پشته‌ای رشته‌ی ورودی را پذیرش می‌کند. حال یک تعریف رسمی از اتوماتای پشته‌ای معین ارایه می‌کنیم.

تعریف 7-10-1: یک اتوماتای پشته‌ای معین عبارتست از یک 5 تایی $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q)$ که در آن:

1. Σ یک مجموعه‌ی متناهی به نام الفبای نوار است. نماد خالی یا □ در Σ قرار ندارد.
2. Γ یک مجموعه ی متناهی به نام الفبای استک است. این الفبا نماد خاص \$ را در بردارد.
3. Q یک مجموعه‌ی متناهی است که عناصرش حالت‌ها نام دارند،
4. q عضوی از Q است، آن را حالت شروع نامیم،
5. δ تابع انتقال است، تابعی به صورت زیر

$$\delta : Q \times (\Sigma \bigcup \{\square\}) \times \Gamma \to Q \times \{N, R\} \times \Gamma^*$$

به عنوان برنامه‌ی اتوماتای پشته‌ای در نظر گرفت. این تابع می‌گوید که اتوماتا در یک گام محاسباتی چه چیزی انجام می‌دهد؟ فرض کنیم $r \in Q$ ، $a \in \Sigma \bigcup \{\square\}$ ، و $A \in \Gamma$. به علاوه گیریم $r' \in Q$ ، $\sigma \in \{R, N\}$ ، و $w \in \Gamma^*$ طوری باشند که:

$$\delta(r, a, A) = (r', \sigma, w) \quad (7\text{-}1)$$

این انتقال یعنی اگر:

- اتوماتای پشته‌ای در حالت r باشد،
- هد نوار نماد a را می‌خواند، و
- بالاترین نماد در استک برابر A است، آنگاه
- اتوماتای پشته‌ای به حالت r' می‌رود،
- هد نوار بر طبق σ حرکت می‌کند: اگر $\sigma = R$ ، آنگاه یک سلول به راست حرکت می‌کند، اگر $\sigma = N$ ، آنگاه حرکتی نمی‌کند، و
- بالاترین نماد A در استک با رشته‌ی w جابه‌جا می‌شود.

حال گام محاسباتی را به فرم دستوری زیر می‌نویسیم:

$$raA \to r'\sigma w.$$

حالا محاسبات اتوماتای پشته‌ای $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q)$ را مشخص می‌کنیم.

ترکیب شروع: در آغاز اتوماتای پشته‌ای در حالت شروع q است، هد نوار در سمت چپ‌ترین نماد رشته‌ی ورودی $a_n \ldots a_2 a_1$ قرار دارد، و استک تنها شامل نماد خاص \$ است.

محاسبات و توقف: با ترکیب شروع، آغاز می‌کند. اتوماتای پشته‌ای دنباله‌ای از گام‌های محاسباتی توصیف شده در بالا اجرا می‌نماید. در لحظه‌ای متوقف می‌شود که استک تهی شود. (از این روی، اگر استک هرگز تهی نشود، متوقف نمی‌گردد).

پذیرش: اتوماتای پشته‌ای رشته‌ی ورودی $a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$ را می‌پذیرد، اگر

1. اتوماتا در این رشته متوقف می‌شود، و
2. در زمان توقف (یعنی، در لحظه‌ای که استک خالی می‌شود)، هد نوار بر روی سلولی قرار می‌گیرد که درست در سمت راست سلول شامل نماد a_n است (این سلول باید شامل نماد خالی یا □ باشد.

در همه حالات دیگر، اتوماتای پشته‌ای رشته ورودی را رد می‌کند. پس اتوماتای پشته‌ای این رشته را رد می‌کند، اگر

1. اتوماتا در این رشته متوقف نشود (یعنی محاسبات در حلقه تکراری قرار گیرد) یا
2. در زمان توقف، هد نوار بر روی سلولی قرار نگیرد که درست در سمت سلول شامل نماد a_n است.

زبان پذیرفته شده توسط اتوماتای پشته‌ای M را با $L(M)$ نشان می‌دهیم، پس

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{رشته‌ی } w \text{ را پذیرش کند } M\}$$

اتوماتای پشته‌ای که در بالا توصیف کردیم از نوع معین است. برای اتوماتای پشته‌ای نامعین، گام محاسباتی جاری ممکن است به طور یکتا تعریف نشود، اما اتوماتا بتواند یک انتخاب، خارج از تعداد حالات ممکن، داشته باشد. در این حالات تابع انتقال δ ، به صورت زیر است:

$$\delta : Q \times (\Sigma \bigcup \{\square\}) \times \Gamma \rightarrow P_f(Q \times \{N, R\} \times \Gamma^*)$$

که در آن $P_f(k)$ عبارتست از مجموعه‌ی همه زیر مجموعه‌های متناهی مجموعه‌ی k است. گوییم یک اتوماتای پشته‌ای نامعین M یک رشته را می‌پذیرد، اگر محاسبات قابل پذیرش وجود داشته باشد، به همان معنی که در اتوماتای پشته‌ای معین بیان گردید. گوییم M یک رشته را رد می‌کند (نمی‌پذیرد)، اگر هر محاسبه بر روی این رشته رد شود. مانند قبل، مجموعه‌ی همه رشته‌های موجود در Σ^* را که توسط M پذیرش می‌شوند با $L(M)$ نشان می‌دهیم.

7-11: مثال‌هایی از اتوماتای پشته‌ای

پرانتزهایی که به خوبی لانه‌ای (تو در تو) شده‌اند.

نشان می‌دهیم که چگونه یک اتوماتای پشته‌ای معین می‌توان ساخت که مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌هایی را بپذیرد که پرانتزهای به خوبی تو در تو هستند. مشاهده کنید که یک رشته‌ی w در $\{(,)\}^*$ به خوبی لانه‌ای (تو در تو) است اگر و تنها اگر

- در هر پیشوند w، تعداد ")" بزرگتر یا مساوی با تعداد "(" باشد، و
- در رشته‌ی کامل w تعداد ")" برابر با تعداد "(" باشد.

نماد نواری a را برای ")" و نماد نواری b را برای "(" به کار می‌بریم. ایده به صورت زیر است. یادآور می‌شویم که استک در آغاز تنها نماد مخصوص $ را دارد. تنها هدف از این نماد این است که با استفاده از آن بتوانیم تشخیص دهیم که استک خالی است یا خیر. اتوماتای پشته‌ای رشته‌ی ورودی را از چپ به راست می‌خواند. برای هر a ای که می‌خواند، نماد S را به داخل استک درج می‌کند، و برای هر b ای که می‌خواند، بالاترین نماد از استک را حذف می‌نماید. به این ترتیب تعداد نمادهای S بر روی استک همواره مساوی با تعداد a هایی است که خوانده شده، منهای تعداد b هایی که خوانده شده‌اند، به علاوه انتهای استک نماد خاص $ را در بر می‌گیرد. رشته‌ی ورودی به خوبی تو در تو است، اگر و تنها اگر (i) این تفاضل همواره نامنفی باشد و (ii) این تفاضل صفر است، وقتی که همه رشته‌ی ورودی خوانده شده باشد. از این روی رشته‌ی ورودی پذیرفته می‌شود، اگر و تنها اگر در طی این روند (i) استک همواره حداقل نماد خاص $ را در بر داشته باشد و (ii) در پایان، استک تنها شامل نماد خاص $ باشد (که در گام نهایی حذف خواهد شد).

با توجه به این موارد، اتوماتای پشته‌ای معین $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q)$ را بدست می‌آوریم، که $\Sigma = \{a, b\}$، $\Gamma = \{\$, S\}$، $Q = \{q\}$، و تابع انتقال δ با دستورات زیر مشخص می‌شود:

$qa\$ \rightarrow qR\$S$، زیرا a و S به داخل استک درج شده‌اند.

$qaS \rightarrow qRSS$، زیرا a و S به داخل استک درج شده‌اند.

$qbS \rightarrow qR\varepsilon$، زیرا b، بالاترین عضو از استک حذف شده است.

$qb\$ \rightarrow qN\varepsilon$، تعداد b های خوانده شده، بیشتر است از تعداد a های خوانده شده، استک خالی کرده است (از این روی، محاسبات پیش از خوانده شدن همه‌ی رشته متوقف می‌شود)، و رشته‌ی ورودی می‌گردد.

$q\square\$ \rightarrow qN\varepsilon$، همه رشته‌ی ورودی خوانده شده، استک خالی می‌شود، و رشته‌ی ورودی پذیرفته می‌گردد.

$q\square S \rightarrow qNS$، همه رشته‌ی ورودی خوانده شده، شامل a های بیشتر از b ها می‌باشد، هیچ تغییری انجام نشده (پس، اتوماتا متوقف نمی‌شود) و رشته‌ی ورودی پذیرش نمی‌گردد (رد می‌شود).

رشته‌های به فرم 0^n1^n

یک اتوماتای پشته‌ای معین می‌سازیم که زبان $\{0^n1^n : n \geq 0\}$ را بپذیرد. اتوماتا دو حالت q_0 و q_1 را بکار می‌گیرد که q_0 حالت شروع است. در آغاز اتوماتا در حالت q_0 می‌باشد.

- برای هر 0 که خوانده می‌شود، اتوماتا یک نماد S را به داخل استک درج می‌کند و در حالت q_0 می‌ماند.
- زمانی که اولین 1 خوانده شود، اتوماتا به حالت q_1 می‌رود. از آن لحظه:
  - برای هر 1 که خوانده می‌شود، اتوماتا بالاترین نماد استک را حذف کرده و در حالت q_1 می‌ماند.
  - اگر یک 0 خوانده شود، اتوماتا تغییری انجام نمی‌دهد و بنابراین متوقف نمی‌شود.

بر پایه بحث بالا، اتوماتای پشته‌ای معین $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0)$ را بدست می‌آوریم که در آن $\Sigma = \{0,1\}$ ، $\Gamma = \{\$, S\}$ ، $Q = \{q_0, q_1\}$ و q_0 حالت شروع است. تابع انتقال با دستورات زیر مشخص می‌شود:

$q 0 \$ \to q_0 R\$S$ درج S به روی استک.

$q 0 S \to q_0 RSS$ درج S به روی استک.

$q_0 1 \$ \to q_0 N\$$ اولین نماد در ورودی 1 است، حلقه‌ی تکراری

$q_0 1 S \to q_1 R\varepsilon$ اولین 1 وارد می‌شود.

$q_0 \square \$ \to q_0 N\varepsilon$ رشته‌ی ورودی تهی است، پذیرش می‌شود.

$q_0 \square S \to q_0 NS$ ورودی تنها شامل 0 ها است، حلقه‌ی تکراری

$q_1 0 \$ \to q_1 N\$$ 0 در سمت راست 1، حلقه‌ی تکراری

$q_1 0 S \to q_1 NS$ 0 در سمت راست 1، حلقه‌ی تکراری

$q_1 1 \$ \to q_1 N\$$ تعداد بیش از اندازه 1، حلقه‌ی تکراری

$q_1 1S \to q_1 R\varepsilon$ بالاترین نماد استک حذف شود

$q_1 \Box \$ \to q_1 N\varepsilon$ پذیرش

$q_1 \Box S \to q_1 NS$ تعداد بیش از اندازه ۵، حلقه‌ی تکراری

رشته‌هایی که b را در وسط دارند.

یک اتوماتای پشته‌ای نامعین می‌سازیم که مجموعه‌ی L شامل همه رشته‌های $\{a, b\}^*$ را پذیرش کند که طول فرد داشته و نماد وسط آن b باشد، یعنی:

$$L = \{vbw \mid v \in \{a, b\}^*,\ w \in \{a, b\}^*,\ |v| = |w|\}.$$

ایده به صورت زیر است. اتوماتا دو حالت q و q' را بکار می‌گیرد که q حالت شروع است. این حالت‌ها دارای معانی زیر اند:

- اگر اتوماتا در حالت q باشد، آنگاه به نماد وسطی رشته‌ی ورودی نخواهد رسید.
- اگر اتوماتا در حالت q' باشد، آنگاه به نماد وسطی می‌رسد و آن را می‌خواند.

مشاهده می‌شود که چون اتوماتا می‌تواند تنها یک عبور بر روی رشته‌ی ورودی داشته باشد، باید حدس بزند که چه زمانی به وسط رشته رسیده است (یعنی، از نامعین بودن استفاده می‌کند).

- اگر اتوماتا در حالت q قرار گیرد، آنگاه زمانی که نوار نمادهای جاری را می‌خواند:
  - یک نماد S را روی استک درج می‌کند و در حالت q می‌ایستد یا،
  - در حالتی که نماد نواری جاری b است، حدس می‌زند که شاید به وسط رشته‌ی ورودی رسیده باشد، با رفتن به حالت q'.
- اگر اتوماتا در حالت q' باشد، آنگاه زمانی که نماد نوار جاری را می‌خواند، بالاترین نماد از استک یعنی S را حذف کرده و در حالت q' می‌ایستد. رشته‌ی ورودی پذیرفته می‌شود اگر و تنها اگر، استک برای اولین بار خالی است، پس از خوانده شدن تمام رشته‌ی ورودی.

حال اتوماتای پشته‌ای نامعین $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q)$ را داریم که در آن $\Sigma = \{a, b\}$، $\Gamma = \{\$, S\}$، $Q = \{q, q'\}$، و q حالت شروع است و تابع انتقال با دستورات زیر مشخص می‌شود:

$qa\$ \rightarrow qR\$S$ درج S به روی استک

$qaS \rightarrow qRSS$ درج S به روی استک

$qb\$ \rightarrow q'R\$$ به وسط رسیده است

$qb\$ \rightarrow qR\$S$ به وسط نرسیده، S به روی استک درج شود

$qbS \rightarrow q'RS$ به وسط رسیده است

$qbS \rightarrow qRSS$ به وسط نرسیده، S به روی استک درج شود

$q\square\$ \rightarrow qN\$$ حلقه تکراری

$q\square S \rightarrow qNS$ حلقه تکراری

$q'a\$ \rightarrow q'N\varepsilon$ استک تهی است، توقف، اما رد می‌شود، زیرا همه‌ی رشته‌ی ورودی به طور کامل خوانده نشده است.

$q'aS \rightarrow q'R\varepsilon$ بالاترین نماد استک حذف شود

$q'b\$ \rightarrow q'N\varepsilon$ استک خالی است، توقف، اما رد می‌شود، زیرا همه‌ی رشته‌ی ورودی به طور کامل خوانده نشده است.

$q'bS \rightarrow q'R\varepsilon$ بالاترین نماد استک حذف شود.

$q'\square\$ \rightarrow q'N\varepsilon$ پذیرش

$q'\square S \rightarrow q'NS$ حلقه تکراری

تبصره: می‌توان نشان داد که یک اتوماتای پشته‌ای معین وجود ندارد که زبان L را به پذیرد. دلیل این است که یک اتوماتای پشته‌ای معین نمی‌تواند تعیین کند که چه زمانی به وسط رشته‌ی ورودی می‌رسد. بنابراین بر خلاف اتوماتای معین، اتوماتای پشته‌ای نامعین از همتای معین آن، خیلی قوی‌تر است.

7-12: لم تزریق برای زبان‌های مستقل از متن

پیش از این لم تزریق را برای زبان‌های منظم ثابت کردیم و نشان دادیم که از آن می‌توان برای اثبات نامنظم بودن برخی زبان‌ها استفاده نمود. در این بخش لم تزریق را برای زبان‌های مستقل از متن عمومیت می‌دهیم. ایده این است که درخت تجزیه را بررسی نماییم، درختی که اشتقاق یک رشته‌ی به اندازه کافی طولانی را در زبان مستقل از متن L، توصیف می‌کند.

چون تعداد متغیرها در گرامر مستقل از متن متناظر G، متناهی است، پس حداقل یک متغیر وجود دارد، آن را A_j می‌نامیم که بیش از یک بار در طولانی ترین مسیر ریشه‌ی متصل به برگ درخت ظاهر می‌شود. زیر درخت فشرده شده میان دو رخداد A_j در این مسیر، می‌تواند به هر تعداد بار کپی شود. این در یک درخت تجزیه قانون‌مند نتیجه می‌شود، پس در رشته‌ی تزریق شده‌ای که در زبان L است رخ می‌دهد.

قضیه 7-12-1: لم تزریق برای زبان‌های مستقل از متن

فرض کنیم L یک زبان مستقل از متن باشد. آنگاه یک عدد صحیح $p \geq ۱$ که طول تزریق نامیده می‌شود، وجود دارد به طوری که موارد زیر برقرار باشند:

هر رشته‌ی S در L، با $|S| \geq P$ می‌تواند به صورت $S = uvxyz$ نوشته شود، به طوری که

1. $|vy| \geq ۱$ (یعنی v و y هر دو با هم خالی نیستند)،
2. $|vxy| \leq P$، و
3. $uv^ixy^iz \in L$، به ازای هر $i \geq ۰$.

7-12-2: اثبات لم تزریق

در اثبات لم تزریق از نتیجه زیر، درباره درخت تجزیه، استفاده خواهد شد:

لم 7-12-3: فرض کنیم G یک گرامر مستقل از متن در فرم نرمال چامسکی باشد، و فرض کنیم S یک رشته‌ی غیر تهی در L(G) و T درخت تجزیه برای S باشد. گیریم ℓ ارتفاع T باشد، یعنی ℓ تعداد یال‌های روی طولانی ترین مسیر ریشه به برگ است. آنگاه $|S| \leq ۲^{\ell-۱}$.

اثبات: این لم به استقراء بر روی ℓ ثابت می‌شود. با در نظر گرفتن مقادیری کوچک از ℓ و بکارگیری این واقعیت که G در فرم نرمال چامسکی است، می‌شود این ادعا را ثابت کرد.

حال اثبات لم تزریق را شروع می‌کنیم. فرض کنیم L یک زبان مستقل از متن و Σ الفبای آن باشد. با توجه به قضیه 7-9-2 یک زبان مستقل از متن به فرم نرمال چامسکی وجود دارد، این زبان را $G = (v, \Sigma, R, S)$ می‌نامیم که $L = L(G)$. تعداد متغیرهای G را r می‌نامیم و تعریف می‌کنیم $P = ۲^{r}$. ثابت می‌کنیم که مقدار P می‌تواند به عنوان طول تزریق بکار رود. رشته‌ی دلخواه S را در L طوری انتخاب می‌کنیم که $|S| \geq P$ و فرض می‌کنیم L درخت تجزیه برای S باشد. گیریم ℓ ارتفاع T باشد. آنگاه با استفاده از لم 7-11-3 داریم:

$$|S| \leq ۲^{\ell-۱}.$$

به عبارت دیگر داریم:

$$|S| \geq P = ۲^{r}.$$

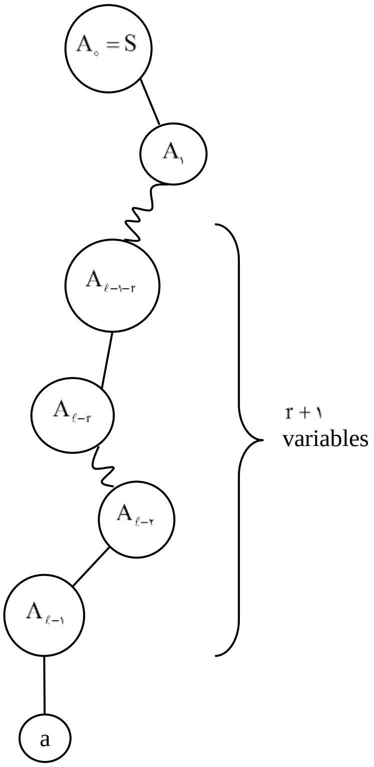
با ترکیب کردن این نامساوی‌ها، می‌بینیم که $۲^{r} \leq ۲^{\ell-۱}$ و می‌توانیم بنویسیم:

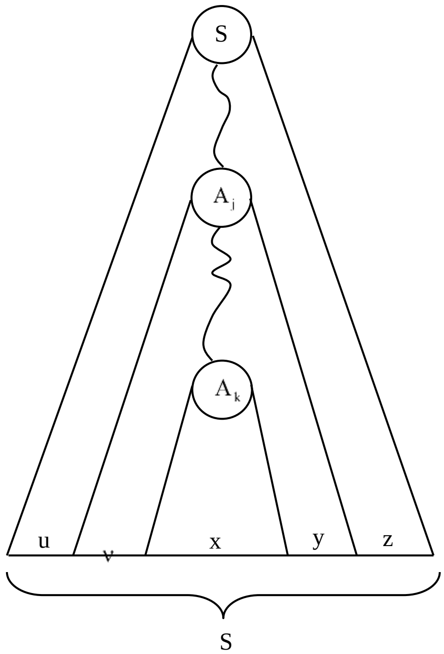
$$\ell \geq r + ۱.$$

گره‌های روی طولانی‌ترین مسیر ریشه به برگ را در T در نظر می‌گیریم. چون این مسیر شامل ℓ یال است، پس $\ell + ۱$ گره دارد. اولین ℓ از این گره‌ها متغیرها را ذخیره می‌کند، آنها را با $A_{\circ}, A_{۱}, \ldots, A_{\ell-۱}$ نشان می‌دهیم ($A_{\circ} = S$) و آخرین گره (که برگ است) یک پایانه را ذخیره می‌کند، آن را a می‌نامیم. چون $\ell - ۱ - r \geq \circ$، دنباله

$$A_{\ell-۱-r}, A_{\ell-r}, \ldots, A_{\ell-۱}$$

از متغیرها خوش تعریف هستند. مشاهده می‌کنیم که این دنباله شامل $r+۱$ متغیر است. چون تعداد متغیرها در گرامر G برابر r است، اصل لانه کبوتری نتیجه می‌دهد، یک متغیر وجود دارد که حداقل دو بار در این دنباله ظاهر می‌شود. به بیان دیگر اندیس‌های j و k طوری وجود دارند که $\ell-۱-r \le j < k \le \ell-۱$ و $A_j = A_k$. برای توضیح بیشتر به شکل زیر مراجعه نمایید.





یادآوری می‌کنیم که T یک درخت تجزیه برای رشته S است. بنابراین، پایانه‌هایی که در برگ‌های T ذخیره می‌شوند، با ترتیب چپ به راست، S را تشکیل می‌دهند. همان طور که در شکل بالا دیده می‌شود. گره‌هایی که متغیرهای A_j و A_k را ذخیره می‌کنند. رشته‌ی S را به پنج زیر رشته‌ی u، v ، x، y و z تقسیم می‌کنند، به طوری که $S = uvxyz$. آن چه از اثبات باقی می‌ماند آن است که نشان دهیم سه خاصیت بیان شده در لم تزریق برقرار اند. از خاصیت سوم شروع می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم:

$$uv^i xy^i z \in L \text{ به ازای هر } i \ge ۰ .$$

در گرامر G داریم:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uA_jz \qquad (7\text{-}2)$$

چون $A_j \overset{*}{\Rightarrow} \nu A_k y$ و $A_k = A_j$ ، داریم:

$$A_j \overset{*}{\Rightarrow} \nu A_j y \cdot \qquad (7\text{-}3)$$

سرانجام، چون $A_k \overset{*}{\Rightarrow} x$ و $A_k = A_j$ ، داریم:

$$A_j \overset{*}{\Rightarrow} x \cdot \qquad (7\text{-}4)$$

حال از (2-7) و (4-7) نتیجه می‌شود که،

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uA_jz \overset{*}{\Rightarrow} uxz \text{،}$$

و این بیان می‌کند که رشته‌ی uxz در زبان L قرار دارد. مشابهاً از (2-7)، (3-7) و (4-7) داریم:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uA_jz \overset{*}{\Rightarrow} u\nu A_jyz \overset{*}{\Rightarrow} u\nu\nu A_jyyz \overset{*}{\Rightarrow} u\nu\nu xyyz \cdot$$

از این روی، رشته‌ی $u\nu^2xy^2z$ در زبان L است. به طور کلی، به ازای هر $i \geq 0$ ، رشته‌ی $u\nu^ixy^iz$ در زبان L قرار دارد، زیرا

$$S \overset{*}{\Rightarrow} uA_jz \overset{*}{\Rightarrow} u\nu^iA_jy^iz \overset{*}{\Rightarrow} u\nu^ixy^iz \cdot$$

این ثابت می‌کند که خاصیت سوم در لم تزریق برقرار است.

حال نشان می‌دهیم که خاصیت دوم هم برقرار است. یعنی ثابت می‌کنیم که $|\nu xy| \leq P$. زیر درختی را در نظر می‌گیریم که ریشه‌اش گرهی باشد که متغیر A را ذخیره کرده است. مسیری که A_j در آن ذخیره شده است تا برگی که پایانه a را ذخیره کرده، طولانی‌ترین مسیر در این زیر درخت می‌باشد.

به علاوه، این مسیر شامل $j-\ell$ یال می‌باشد. چون $A_j \overset{*}{\Rightarrow} vxy$ ، این زیر درخت یک درخت تجزیه برای رشته‌ی vyz است (که A_j به عنوان متغیر شروع می‌باشد). بنابراین، با کمک لم 7-11-3 نتیجه می‌گیریم که $|vxy| \le ۲^{\ell-j-۱}$. می‌دانیم که $\ell-۱-r \le j$ ، که معادل است با $\ell-j-۱ \le r$. نتیجه می‌شود که

$$|vxy| \le ۲^{\ell-j-۱} \le ۲^r = P \cdot$$

در آخر نشان می‌دهیم که خاصیت اول در لم تزریق نیز برقرار است. یعنی ثابت می‌کنیم $|vy| \ge ۱$. یادآور می‌شویم که

$$A_j \overset{*}{\Rightarrow} vA_ky \cdot$$

فرض کنیم اولین قانون بکار رفته در این اشتقاق به صورت $A_j \to BC$ باشد. (چون متغیرهای A_j و A_k ، حتی اگر مساوی باشند، در گره‌های متفاوتی از درخت تجزیه ذخیره می‌شوند، و از آنجا که گرامر G در فرم نرمال چامسکی است، پس قانون بیان شده در بالا وجود دارد.) آنگاه

$$A_j \Rightarrow BC \overset{*}{\Rightarrow} vA_ky \cdot$$

مشاهده کنید که رشته‌ی BC دارای طول دو است. به علاوه با بکارگیری قوانین یک گرامر در فرم نرمال چامسکی، رشته‌ها نمی‌توانند کوتاه‌تر شوند. (در اینجا از این واقعیت استفاده می‌کنیم که متغیر شروع در سمت راست هیچ قانونی ظاهر نمی‌شود.) بنابراین داریم $|vA_ky| \ge ۲$. اما این برقرار می‌کند که $|vy| \ge ۱$. بدین ترتیب اثبات لم تزریق کامل می‌شود.

7-12-4: کابردهایی از لم تزریق

مثال اول: زبان زیر را در نظر می‌گیریم:

$A = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

به تناقض ثابت می‌کنیم که A یک زبان مستقل از متن نیست.

فرض می‌کنیم که A یک زبان مستقل از متن باشد. طول تزریق را $p \geq 1$ می‌گیریم. رشته‌ی $S = a^P b^P c^P$ را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌شود که $S \in A$ و $|S| = 3P \geq P$. حال بنابر لم تزریق S می‌تواند به صورت $S = uvxyz$ نوشته شود که در آن $|vy| \geq 1$، $|vxy| \leq P$ و $uv^i xy^i z \in A$ به ازای هر $i \geq 0$.

مشاهده می‌کنیم که لم تزریق مکان زیر رشته‌ی vxy را در رشته‌ی S مشخص نمی‌کند، تنها یک کران بالا برای طول این زیر رشته ارایه می‌دهد. پس باید سه حالت زیر را، با توجه به مکان vxy در S، بررسی کنیم.

حالت 1: زیر رشته‌ی vxy هیچ c ای را در بر ندارد.

رشته‌ی $uv^2xy^2z = uvvxyyz$ را در نظر می‌گیریم. چون $|xy| \geq 1$، این رشته شامل تعداد a هایی بیشتر از P و یا تعداد b هایی بیشتر از P، می‌باشد. چون دقیقاً دارای تعداد P تا c است، نتیجه می‌شود که این رشته در زبان A قرار ندارد. این تناقض است زیرا، بنابر لم تزریق، رشته‌ی uv^2xy^2z در A است.

حالت 2: رشته‌ی vxy هیچ a ای را در بر ندارد.

رشته‌ی $uv^2xy^2z = uvvxyyz$ را در نظر می‌گیریم. چون $|vy| \geq 1$، این رشته شامل تعداد b های بیشتر از P یا تعداد c های بیشتر از P، می‌باشد. چون دقیقاً تعداد P تا a دارد، پس این رشته در زبان A قرار ندارد. که این تناقض است زیرا، بنابر لم تزریق رشته‌ی uv^2xy^2z در A قرار دارد.

حالت 3: رشته vxy حداقل یک a و حداقل یک c دارد.

چون $S = a^P b^P c^P$ ، این نتیجه می‌دهد که $|vxy| > P$ ، که با لم تزریق در تناقض است. بنابراین در هر سه حالت یک تناقض بدست آورده‌ایم، پس نشان داده شد که زبان A یک زبان مستقل از متن نیست.

مثال دوم: زبان زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

که در آن w^R رشته‌ای است که با نوشتن w به صورت پسرو بدست آمده است و

$$B = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

اگرچه این زبان‌ها به نظر شبیه هم هستند، اما نشان می‌دهیم که A مستقل از متن است، ولی B مستقل از متن نیست.

گرامر مستقل از متن زیر را در نظر می‌گیریم، که در آن S متغیر شروع است:

$$S \to \varepsilon \mid aSa \mid bSb$$

به سادگی می‌توان نشان داد که زبان این گرامر دقیقاً زبان A است. بنابراین A مستقل از متن می‌باشد. با روش دیگر می‌توانیم نشان دهیم که A مستقل از متن است، بدین ترتیب که یک اتوماتای پشته‌ای نامعین می‌سازیم که A را پذیرش کند. این اتوماتا دارای دو حالت q و q' است، که q حالت شروع می‌باشد. اگر اتوماتا در حالت q قرار گیرد، آنگاه هنوز خواندن نیمه چپ رشته‌ی ورودی را تمام نکرده است، همه نمادهای خوانده شده را به داخل استک درج می‌کند. اگر اتوماتا در حالت q' قرار گیرد، آنگاه نیمه راست رشته ورودی را می‌خواند، به ازای هر نمادی که می‌خواند، بررسی می‌کند که آیا این نماد با بالاترین نماد استک برابر است و یا خیر، اگر برابر باشد، بالاترین نماد در استک را حذف می‌کند.

اتوماتای پشته‌ای از خاصیت نامعین بودن استفاده می‌کند تا حدس بزند که چه زمانی از حالت q به حالت q' تغییر می‌یابد (یعنی، چه زمانی خواندن نیمه چپ رشته‌ی ورودی را کامل کرده است).

در این جا، باید در نظر داشته باشید، دو بیان بالا که نشان دادند A مستقل از متن است، برای B بکار نمی‌رود. دلیل آن این است که آنها در جهت نشان دادن مستقل از متن نبودن B کار نکردند. این موضوع را حالا ثابت می‌کنیم. فرض کنیم که B یک زبان مستقل از متن باشد. طول تزریق را $P \geq ۱$ می‌گیریم، حال رشته‌ی S را در B با طول حداقل P اختیار می‌کنیم، به طوری که در سه خاصیت لم تزریق صدق نکند. رشته‌ی $S = a^P b a^P b$ را بررسی می‌کنیم. پس $S \in B$ ، $|S| = ۲P + ۲ \geq P$. از این روی بنابر لم تزریق S می‌تواند به صورت $S = uvxyz$ نوشته شود، که (i) $|vy| \geq ۱$، (ii) $|vxy| \leq P$ ، و (iii) $uv^i xy^i z \in B$ ، به ازای هر $i \geq ۰$. می‌شود چنین در نظر گرفت که $P \geq ۳$ ، $u = a^{P-۱}$ ، $v = a$ ، $x = b$ ، $y = a$ ، و $z = a^{P-۱} b$. اگر این حالت مورد نظر باشد، آنگاه خواص (i)، (ii)، و (iii) بر قرار اند، و با تناقضی مواجه نیستیم. به بیان دیگر رشته S را نادرست انتخاب کرده‌ایم. این رشته نادرست است، زیرا تنها یک b بین a ها وجود دارد. پس به این دلیل، v می‌تواند در سمت چپ‌ترین بلوک a ها باشد و y می‌تواند در سمت راست‌ترین بلوک a ها قرار گیرد. مشاهده کنید که اگر حداقل P تا b بین a ها قرار می‌داشتند، آنگاه این اتفاق نمی‌افتاد، زیرا $|vxy| \leq P$.

با توجه به بحث بالا رشته‌ی $S = a^P b^P a^P b^P$ را اختیار می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که $S \in B$ و $|S| = ۴P \geq P$. پس بنابر لم تزریق، S را می‌توان به صورت $S = uvxyz$ نوشت که $|vy| \geq ۱$، $|vxy| \leq P$ ، و $uv^i xy^i z \in B$ به ازای هر $i \geq ۰$ با توجه به مکان vxy در داخل رشته‌ی S، سه حالت متمایز زیر را می‌بینیم.

حالت 1: زیر رشته vxy هر دو نیمه‌های راست و چپ S را پوشانده است، چون $|vxy| \leq P$ ، زیر رشته‌ی vxy در قسمت وسط S قرار می‌گیرد، یعنی vxy در بلوک $b^P a^P$ واقع می‌شود. رشته‌ی $uv^\circ xy^\circ z = uxz$ ، چون $|xy| \geq ۱$ ، پس معلوم است که حداقل یکی از v و y غیر تهی است.

- اگر $v \neq \varepsilon$ ، آنگاه v حداقل یک b از بلوک سمت چپی b ها در S را دارد، در حالی که y هیچ b ای از بلوک سمت راستی b ها در S را در بر ندارد. بنابراین، در رشته‌ی uxz ، سمت چپ‌ترین بلوک b ها دارای تعداد کمتری b از سمت راست‌ترین بلوک b ها، است. بنابراین رشته‌ی uxz در B قرار ندارد.

- اگر $y \neq \varepsilon$ ، آنگاه y حداقل یک a، از سمت راست‌ترین بلوک a ها در S را شامل می‌شود، در حالی که v هیچ a ای از سمت چپ‌ترین بلوک a ها در S را در بر ندارد. بنابراین، در رشته‌ی uxz ، سمت چپ‌ترین بلوک a ها شامل a های بیشتری از سمت راست‌ترین بلوک a ها، است. از این روی رشته‌ی uxz در B قرار ندارد.

در هر دو حالت، نتیجه گرفتیم که uxz عضوی از زبان B نیست. اما بنابر لم تزریق، این رشته در B قرار دارد.

حالت 2: زیر رشته‌ی vxy در سمت چپ‌ترین نیمه‌ی S قرار دارد.

در این حال، هیچ یک از رشته‌های uxz ، uv^2xy^2z ، uv^3xy^3z ، uv^4xy^4z ، و غیره، در B قرار ندارند. اما، بنابر لم تزریق هر یک از این رشته‌ها در B واقع‌اند.

حالت 3: زیر رشته‌ی vxy در سمت راست‌ترین نیمه S قرار دارد.

این حالت با حالت 2 متقارن است: هیچ یک از رشته‌های uxz ، uv^2xy^2z ، uv^3xy^3z ، uv^4xy^4z ، و غیره در B قرار ندارند. اما، بنابر لم تزریق، هر یک از این رشته‌ها در B هستند.

به طور خلاصه، در هر یک از سه حالت بالا به تناقض رسیده‌ایم. پس زبان B مستقل از متن نیست.

مثال سوم: پیش از این دیدیم که زبان

$$\{a^m b^n c^{m+n} \mid m \geq 0, n \geq 0\}$$

مستقل از متن است. با استفاده از لم تزریق برای زبان‌های منظم، به آسانی می‌شود ثابت کرد که این زبان منظم نیست. به عبارت دیگر گرامرهای مستقل از متن می‌توانند جمع کردن را نتیجه بگیرند، در حالی که اتوماتای متناهی به اندازه کافی برای انجام این کار قوی نیستند. حال مسأله بررسی درستی ضرب را مورد نظر قرار می‌دهیم. فرض کنیم A زبان زیر باشد:

$$A = \{a^m b^n c^{mn} \mid m \geq 0, n \geq 0\}$$

با تناقض ثابت می‌کنیم که A یک زبان مستقل از متن نیست.

فرض می‌کنیم A مستقل از متن باشد. طول تزریق را $P \geq 1$ می‌گیریم. رشته‌ی $S = a^P b^P c^{P^2}$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است $|S| = 2P + P^2 \geq P$, $S \in A$، از این روی با توجه به لم تزریق، S را می‌توان به صورت $S = uvxyz$ نوشت که $|vy| \geq 1$، $|vxy| \leq P$ و $uv^i xy^i z \in A$، به ازای هر $i \geq 0$ با توجه به مکان vxy در رشته‌ی S، سه حالت ممکن است:

حالت 1: زیر رشته‌ی vxy به طور کامل در بلوک c ها در S قرار دارد.

رشته‌ی uv^2xy^2z را در نظر می‌گیریم. چون $|vy| \geq 1$، رشته‌ی uv^2xy^2z شامل P تا a و P تا b می‌باشد، اما تعداد بیش از P^2 تا c را دارد. بنابراین، این رشته در A قرار ندارد. اما بنابر لم تزریق در A است.

حالت 2: زیر رشته‌ی vxy شامل هیچ c ای نیست.

بار دیگر رشته‌ی uv^2xy^2z را در نظر می‌گیریم. این رشته شامل P^2 تا c می‌باشد. چون $|vy| \geq 1$، در رشته uv^2xy^2z تعداد a ها ضرب در تعداد b ها از P^2 بزرگتر است. بنابراین uv^2xy^2z در A قرار ندارد. اما بنابر لم تزریق این رشته در A است.

حالت 3: زیر رشته‌ی vxy حداقل یک b، حداقل یک c دارد و هیچ a ندارد. در این حال می‌نویسیم $vy = b^j c^k$، $j \geq 0$، $k \geq 0$ و $j + k \geq 1$. رشته‌ی uxz را در نظر می‌گیریم. این رشته را به صورت $uxz = a^P b^{P-j} c^{P^2-k}$ می‌توان نوشت. چون بنابر لم تزریق، این رشته در A قرار دارد، پس داریم $P(P-j) = P^2 - k$ و این بیان می‌کند که $jP = k$.

اگر $j=0$ ، آنگاه $k=0$ ، و این با $j+k\geq 1$ در تناقض است، پس $j\geq 1$. نتیجه می‌گیریم که $k=jP\geq P$ و $|vxy|\geq|vy|=j+k\geq 1+P$.

اما بنابر لم تزریق داریم $|vxy|\leq P$.

مشاهده می‌کنیم که چون $|vxy|\leq P$ ، پس سه حالت بالا همه امکانات قرار گرفتن vxy را در رشته‌ی S زیر پوشش قرار می‌دهد. در هر یک از این سه حالت، به یک تناقض رسیدیم. بنابراین، زبان A مستقل از متن نیست.

7-13: تمرینات فصل هفتم

1. گرامرهای مستقل از متن را برای تولید زبان‌های زیر بسازید. در همه حالات $\Sigma = \{0,1\}$.
   - $\{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$
   - $\{w \mid$ w حداقل شامل سه تا 1 است$\}$
   - $\{w \mid$ طول w فرد است و نماد وسطی آن 0 می‌باشد$\}$
   - $\{w \mid$ w با یک نماد شروع و پایان می‌یابد$\}$
   - $\{w \mid$ w با نمادهای مختلف شروع و پایان می‌یابد$\}$

2. فرض کنیم $G = (V, \Sigma, R, S)$ یک گرامر مستقل از متن باشد که $V = \{A, B, S\}$، $\Sigma = \{0,1\}$، S متغیر شروع است و R شامل قوانین زیر است.

$$S \to 0S \mid 1A1\varepsilon$$
$$A \to 0B \mid 1S$$

زبان L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid$ w یک عدد صحیح نامنفی را که بر سه قابل قسمت است به صورت دودویی نمایش می‌دهد $\} \cup \{\varepsilon\}$

ثابت کنید $L = L(G)$. (راهنمایی: متغیرهای S، A و B برای بیان باقیمانده پس از تقسیم بر سه بکار می‌روند).

3. فرض کنیم $G = (V, \Sigma, R, S)$ گرامر مستقل از متن باشد که $V = \{A, B, S\}$، $\Sigma = \{a, b\}$، S متغیر شروع، و R شامل قوانین زیر است:

$$S \to aB \mid bA$$
$$A \to a \mid as \mid BAA$$

- ثابت کنید $ababba \in L(G)$
- ثابت کنید $L(G)$ مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌های غیر تهی w بر روی الفبای $\{a, b\}$ است، به طوری که تعداد a ها در w برابر تعداد b ها در w است.

4. فرض کنیم A و B زبان‌های مستقل از متن بر روی الفبای Σ باشند.
   - ثابت کنید $A \cup B$ نیز مستقل از متن است.
   - ثابت کنید AB نیز مستقل از متن است.
   - ثابت کنید A^* نیز مستقل از متن است.

5. دو زبان زیر تعریف شده‌اند:

$$A = \{a^m b^n c^n \mid m \geq 0, n \geq 0\}$$

و

$$B = \{a^m b^m c^n \mid m \geq 0, n \geq 0\}$$

- ثابت کنید A و B هر دو مستقل از متن‌اند، با ساختن دو گرامر مستقل از متن، که یکی A و دیگری B را تولید کند.
- با استفاده از قانون دمورگان نتیجه بگیرید که مکمل یک زبان مستقل از متن ضروری نیست که حتماً مستقل از متن باشد.

6. فرض کنیم A یک زبان مستقل از متن و B یک زبان منظم باشند.
   - ثابت کنید $A \cap B$ مستقل از متن است.

- ثابت کنید $A \setminus B\{w \mid w \in A, w \notin B\}$ مستقل از متن است.

7. در هر یک از حالات زیر یک اتوماتای پشته‌ای (معین یا نامعین) بسازید که زبان‌های زیر را پذیرش کند.

1. $\{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$
2. $\{0^n 1^m 0^n \mid n \geq 1, m \geq 1\}$
3. $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ شامل 1 های بیشتر از 0 ها باشد $w\}$
4. $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ $(\text{If } w = w_1 w_2 \dots w_n \Rightarrow w^R = w_n \dots w_2 w_1)$

8. فرض کنیم L زبان زیر باشد.

$$L = \{a^m b^n \mid 0 \leq m \leq n \leq 2m\}$$

- ثابت کنید L مستقل از متن است، با ساختن یک گرامر مستقل از متن که زبان آن L باشد.
- ثابت کنید L مستقل از متن است، با ساختن یک اتوماتای پشته‌ای نامعین که L را پذیرش می‌کند.

9. فرض کنیم L زبانی شامل تعدادی متناهی رشته باشد. نشان دهید که L منظم است و بنابراین، مستقل از متن می‌باشد. اگر K ماکزیمم طول هر رشته در L باشد.

- ثابت کنید که هر گرامر مستقل از متن در فرم نرمال چامسکی که L را تولید نماید بیش از logK متغیر دارد (لگاریتم در پایه 2 است).