فصل سوم:

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با استفاده از سری های توانی

مونا نژند فومنی

تعریف سری توانی:

سری‌هایی به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ به ترتیب سری‌های توانی از x و $x-x_0$ نامیده می‌شوند.

سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ را همگرا می‌نامیم هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{r} < 1$$

که در آن $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

r را شعاع همگرایی و فاصله $|x|<r$ را فاصله همگرایی سری می‌گوییم.

جبر سری‌های توانی:

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n$ سری‌های همگرا در فاصله $|x|<r$ باشند، آنگاه داریم

$$1.\ \alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

$$2.\ y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \ \to\ y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} \ \to\ y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \quad \to \quad \forall\, n\geq 0 \text{، } a_n=b_n$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0 \quad \to \quad \forall\, n\geq 0 \text{، } a_n=0$$

$$5. \sum_{n=a}^{b} a_n\, x^n = \sum_{n=a-k}^{b-k} a_{n+k}\, x^{n+k} \to \sum_{n=a+k}^{b+k} a_{n-k}\, x^{n-k} = \sum_{n=a}^{b} a_n\, x^n$$

6. $if\ \ s<k$:

$$\sum_{n=s}^{b} a_n\, x^n = a_s x^s + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, x^n$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n\, x^n = -a_{k-1}x^{k-1} - \cdots - a_s x^s + \sum_{n=s}^{\infty} a_n\, x^n$$

بسط توابع به سری توانی:

اگر تابع f و تمام مشتقات آن در $x = x_0$ تعریف شده باشند، در این صورت بسط تابع f در سری توانی در $x = x_0$ از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

که آن را بسط تیلور و اگر $x_0 = 0$ باشد ، آن را بسط مک لورن می‌نامند .

به عنوان مثال بسط توابع e^x، $\sin x$ و $\cos x$ در $x = 0$ به صورت زیر است:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} , \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} , \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

تابع تحلیلی:

تابع $\mathrm{f}(x)$ را در $x = x_0$ تحلیلی گوییم اگر در $x = x_0$ قابل بسط به سری توانی باشد، یعنی داشته باشیم

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

به عنوان مثال توابع e^x ، $\sin x$ و $\cos x$ در $x = 0$ تحلیلی هستند.

نقطه عادی (معمولی) و غیرعادی (تکین-منفرد):

نقطه $x = x_0$ را نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ می‌نامیم، اگر هر سه عبارت $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ در $x = x_0$ تحلیلی باشند.

در غیر این صورت $x = x_0$ را نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل فوق می‌نامیم.

مثال:

نوع نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 1$ را برای معادله دیفرانسیل $xy'' + 2xy' + x^2y = e^x$ بیابید.

پاسخ:

$$\xrightarrow{\div x} \quad y'' + \underbrace{2}_{p(x)} y' + \underbrace{x}_{Q(x)} y = \frac{e^x}{\underbrace{x}_{R(x)}}$$

$$x_0 = 0 \text{ بررسی نقطه } \rightarrow \begin{cases} P(0) = 2 \text{ تحلیلی} \\ Q(0) = 0 \text{ تحلیلی} \\ R(0) = \frac{1}{0} \text{ غیر تحلیلی} \end{cases} \longrightarrow \quad x_0 = 0 \text{ نقطه غیر عادی}$$

$$x_0 = 1 \text{ بررسی نقطه } \rightarrow \begin{cases} P(1) = 2 \text{ تحلیلی} \\ Q(1) = 1 \text{ تحلیلی} \\ R(1) = e \text{ تحلیلی} \end{cases} \longrightarrow \quad x_0 = 1 \text{ نقطه عادی}$$

تمرین:

نوع نقطه $x_0 = 0$ را برای معادلات دیفرانسیل زیر بررسی کنید.

1. $e^x y'' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$

قضیه:

فرض کنید $x = x_0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل باشند، در این صورت معادله دارای جوابی به شکل زیر است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$if\ x_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

مثال:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به صورت سری توانی در نقاط داده شده به دست آورید.

$$1.\, y'' + xy = 0\,, \qquad x_0 = 0$$

پاسخ: $x = 0$ نقطه عادی معادله دیفرانسیل است پس جواب به صورت زیر است

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

حال باید a_n را محاسبه کنیم

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2}$$

این مقادیر را در معادله دیفرانسیل جایگذاری می‌کنیم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+1} = 0$$

می‌خواهیم دو سیگما را تحت یک سیگما بنویسیم برای این کار ابتدا توان x ها و سپس نقطه شروع سیگماها را یکی می‌کنیم.

در سیگمای دوم به جای n، $n-3$ قرار می دهیم تا توان x ها یکی شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2} + \sum_{\underbrace{n-3=0}_{n=3}}^{\infty} a_{n-3}\, x^{n-2} = 0$$

برای یکی کردن شروع سیگما ها باید جمله $n = 2$ را از سیگمای اول بیرون می‌آوریم

$$2(2-1) a_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}\, x^{n-2} = 0$$

$$\underbrace{2a_2}_{0} + \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{[n(n-1) a_n + a_{n-3}]}_{0}\, x^{n-2} = 0$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ n(n-1) a_n + a_{n-3} = 0 \Rightarrow\; a_n = \dfrac{-1}{n(n-1)}\, a_{n-3}\,, \qquad n \geq 3 \end{cases}$$

رابطه بالا را، رابطه بازگشتی می‌نامیم.

حال چند تا a_n را به ازای nهای مختلف به دست می‌آوریم

$$n=3 \quad \rightarrow \quad a_3=-\frac{1}{3(2)}a_0=-\frac{1}{6}a_0$$

$$n=4 \quad \rightarrow \quad a_4=-\frac{1}{4(3)}a_1=-\frac{1}{12}a_1$$

$$n=5 \quad \rightarrow \quad a_5=-\frac{1}{5(4)}a_2=0$$

$$n=6 \quad \rightarrow \quad a_6=-\frac{1}{6(5)}a_3=\frac{1}{180}a_0$$

$$\vdots$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\cdots$$

$$=a_0+a_1x-\frac{1}{6}a_0x^3-\frac{1}{12}a_1x^4+\frac{1}{180}a_0x^6+\cdots$$

$$=a_0\underbrace{\left(1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}+\cdots\right)}_{y_1}+a_1\underbrace{\left(x-\frac{x^4}{12}+\cdots\right)}_{y_2}$$

2. $y''-(x-1)y'-y=e^{x-1} \qquad x_0=1$

پاسخ: $x=1$ نقطه عادی معادله دیفرانسیل است پس جواب به صورت زیر است

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

در نقطه $x_0=0$ محاسبات راحت‌تر انجام می‌شود، لذا می‌توان با تغییر متغیر $t=x-1$ این کار را انجام داد.
بنابراین معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$y''-ty'-y=e^t\,, \qquad t_0=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n, \qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}, \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}, \quad e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

حال این مقادیر را در معادله دیفرانسیل جایگذاری می‌کنیم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

می‌خواهیم چهار سیگما را تحت یک سیگما بنویسیم برای این کار ابتدا توان tها و سپس نقطه شروع سیگما ها را یکی می‌کنیم.

در سیگمای اول به جای n، $n+2$ قرار می‌دهیم تا توان tها یکی شود

$$\sum_{\underbrace{n+2=2}_{n=0}}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 0$$

برای یکی کردن شروع سیگماها به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n - \left(-0a_0 t^0 + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n - \frac{1}{n!}\right]}_{0} t^n = 0$$

$$\forall n \geq 0; \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} a_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{n+2} a_n + \frac{1}{(n+2)!}$$

حال چند تا a_n را به ازای nهای مختلف به دست می‌آوریم.

$$n = 0 \quad \to \quad a_2 = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2!}$$

$$n = 1 \quad \to \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3!}$$

$$n = 2 \quad \to \quad a_4 = \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{4!} = \frac{1}{8} a_0 + \frac{1}{3!}$$

$$\vdots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 t + \left(\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2!}\right) t^2 + \left(\frac{a_1}{3} + \frac{1}{3!}\right) t^3 + \cdots$$

$$= a_0 \underbrace{\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \cdots\right)}_{y_1} + a_1 \underbrace{\left(t + \frac{t^3}{3} + \cdots\right)}_{y_2} + \underbrace{\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{3!} + \cdots\right)}_{y_p}$$

معادله دیفرانسیل لژاندر:

فرم کلی این معادله دیفرانسیل به صورت $(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0$ می‌باشد که در آن m یک عدد ثابت است.

نقطه $x=0$ یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل لژاندر است و لذا معادله دیفرانسیل دارای جوابی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد. با قرار دادن y و مشتقات آن در معادله دیفرانسیل و مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف x رابطه بازگشتی به صورت زیر به دست می‌آید

$$a_{n+2}=-\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n\ , \qquad \forall n\geq 0$$

و جواب عمومی معادله به فرم زیر خواهد بود:

$$y=a_0\left(1-\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}x^4+\cdots\right)$$
$$+a_1\left(x-\frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3+\cdots\right)$$

شعاع همگرایی جواب برابر یک و فاصله همگرایی $(-1,1)$ می‌باشد.

از جواب‌های معادله دیفرانسیل لژاندر در حل مسائل مهندسی از جمله حل معادله لاپلاس برای یک کره استفاده می‌شود.

تمرین:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به صورت سری توانی در نقاط داده شده به دست آورید.

1. $y''-2xy+2py=0\ , \qquad x_0=0$
2. $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0\ , \qquad x_0=0$
3. $(1+2x^2)y''+3xy'-3y=0\ , \qquad x_0=0$
4. $y''+xy'+y=0, \qquad x_0=0$
5. $y''+(x-1)y'=e^x, \qquad x_0=1$
6. $y''-2(x+3)y'-3y=0\ , \qquad x_0=-3$

نقاط غیرعادی منظم و نامنظم:

نقطه غیرعادی $x = x_0$ از معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ را نقطه منظم آن می‌نامیم اگر هر دو عبارت $P_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)P(x)$ و $q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x)$ عدد باشند.

در غیر این صورت $x = x_0$ را نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل فوق می‌نامیم.

در صورت منظم بودن نقطه $x = x_0$ چون $P(x)$ و $Q(x)$ در نقطه $x = x_0$ تعریف نشده‌اند، برای حل چنین مشکلی سری توانی را به صورت

$$y = (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+m}$$

تعریف می‌کنیم که سری فوق سری فروبنیوس نامیده می‌شود.

سری فروبنیوس دارای خواص زیر است:

1. $a_0 \neq 0$

2. $\forall\, n < 0, \;\; a_n = 0$

3. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+m}$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + m) a_n (x - x_0)^{n+m-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + m)(n + m - 1) a_n (x - x_0)^{n+m-2}$$

مثال:

نقاط عادی، غیرعادی منظم و نامنظم معادله دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

$$2x^4(1-x)y'' + 2xy' + 3x^2y = 0$$

پاسخ: ابتدا معادله را بر $2x^4(1-x)$ تقسیم می‌کنیم.

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x^3(1-x)}}_{P(x)}y' + \underbrace{\frac{3}{2x^2(1-x)}}_{Q(x)}y = 0$$

نقاط عادی $= \mathbb{R} - \{0,1\}$ و نقاط غیر عادی $= \{0,1\}$

بررسی منظم یا نامنظم بودن نقطه $x_0 = 0$

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 0} xP(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2(1-x)} = \infty \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2Q(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2(1-x)} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$x_0 = 0$ نقطه غیر عادی نامنظم

بررسی منظم یا نامنظم بودن نقطه $x_0 = 1$

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)P(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{x^3} = -1 \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2Q(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(1-x)}{2x^2} = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 1$ نقطه غیر عادی منظم

تمرین:

نقاط عادی، غیرعادی منظم و نامنظم معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

1. $x^3(1-x^2)y'' + 2y' + 4xy = 0$
2. $x^2(x-2)y'' - x^2y' + xy = 0$
3. $(\sin x)y'' + xy' + 4y = 0$
4. $(\sin x)y'' - y = 0$

روش حل معادله دیفرانسیل در نقطه غیرعادی منظم:

اگر $x = x_0$ یک نقطه غیرعادی منظم برای معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد برای نوشتن جواب معادله حول نقطه $x = x_0$ باید از روش سری فروبنیوس استفاده کنیم.

معادله مشخصه ای به صورت $m(m-1) + p_0 m + q_0 = 0$ تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم سه حالت وجود دارد:

- اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز m_1 و m_2 بوده و $m_1 - m_2$ عددی صحیح نباشد، در این صورت پایه‌های جواب به صورت زیر خواهند بود:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+m_1} \quad , \qquad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+m_2}$$

- اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف m باشد، در این صورت پایه‌های جواب به صورت زیر خواهند بود:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+m} \quad , \qquad y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+m}$$

برای محاسبه جواب دوم از فرمول $y_2 = v y_1$ استفاده می‌کنیم.

- اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز m_1 و m_2 بوده $(m_1 > m_2)$ و $m_1 - m_2$ عددی صحیح باشد، در این صورت پایه‌های جواب به صورت زیر خواهند بود:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+m_1} \quad , \qquad y_2 = k y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+m_2}$$

که مقدار ثابت k در ضمن حل مسئله پیدا می‌شود و برای محاسبه جواب دوم از فرمول $y_2 = v y_1$ استفاده می‌کنیم.

در هر سه حالت جواب عمومی معادله دیفرانسیل برابر است با

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال۱:

مقدار A را چنان بیابید که معادله دیفرانسیل زیر حول نقطه $x = 0$ حتما دارای یک جواب لگاریتمی باشد.

$$xy'' + (A - x)y' + y = 0$$

پاسخ: زمانی که معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف باشد آنگاه یکی از جواب‌های معادله دیفرانسیل به صورت لگاریتمی است.

$$\xrightarrow{\div x}\ y'' + \underbrace{\frac{A-x}{x}}_{P(x)}y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{Q(x)}\ y = 0$$

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 0} xP(x) = \lim\limits_{x\to 0}(A-x) = A \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2Q(x) = \lim\limits_{x\to 0}\ x = 0 \end{cases}$$

$$m(m-1) + p_0m + q_0 = 0 \quad\longrightarrow\quad m(m-1) + A\,m = 0 \quad\longrightarrow\quad \underbrace{m^2 + (A-1)m = 0}_{\text{معادله مشخصه}}$$

ریشه مضاعف $\quad\longrightarrow\quad \Delta = 0 \quad\longrightarrow\quad (A-1)^2 = 0 \quad\longrightarrow\quad A = 1$

$$\longrightarrow\quad xy'' + (1-x)y' + y = 0$$

مثال۲:

نقطه غیرعادی منظم معادلات زیر را تعیین نموده ، سپس جواب‌های آن را به صورت سری در نقاط منظم به دست آورید.

1. $4xy'' + 2y' + y = 0$

پاسخ:

$$\xrightarrow{\div x}\ y'' + \underbrace{\frac{1}{2x}}_{P(x)}y' + \underbrace{\frac{1}{4x}}_{Q(x)}y = 0\,,$$

نقطه غیر عادی $x = 0$

حال منظم یا نامنظم بودن نقطه $x = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 0} xP(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2Q(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{4} = 0 \end{cases}$$

نقطه غیر عادی منظم $x = 0$

حال وضعیت جواب‌ها را برای این معادله مشخص می‌کنیم، ابتدا باید معادله مشخصه را بنویسیم.

$$m(m-1)+p_0m+q_0=0 \;\longrightarrow\; m(m-1)+\frac{1}{2}m=0 \;\longrightarrow\; m(m-\frac{1}{2})=0$$

$$\begin{cases} m_1=0 \\ m_2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \quad m_1-m_2=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m},\; y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_nx^{n+m-1} \quad ,y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_nx^{n+m-2}$$

این مقادیر را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+m)\,a_nx^{n+m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m}=0$$

می‌خواهیم سه سیگما را تحت یک سیگما بنویسیم برای این کار ابتدا توان xها و سپس نقطه شروع سیگماها را یکی می‌کنیم.

در سیگمای سوم به جای n، $n-1$ قرار می‌دهیم تا توان xها یکی شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+m)\,a_nx^{n+m-1}$$

$$+\sum_{\underbrace{n-1=0}_{n=1}}^{\infty}a_{n-1}x^{n+m-1}=0$$

حال شروع سیگماها را یکی می‌کنیم، در سری فروبنیوس بهتر است شروع سیگماها از ۱ باشد

$$4m(m-1)a_0x^{m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}4(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m-1}$$

$$+2ma_0x^{m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+m)\,a_nx^{n+m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+m-1}=0$$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{2m(2m-1)a_0}_{0}\,x^{m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{[2(n+m)(2n+2m-1)a_n+a_{n-1}]}_{0}\,x^{n+m-1}=0$$

$$\begin{cases} m(2m-1)a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} \underbrace{m(2m-1) = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \longrightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow m_1 - m_2 = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \forall\, n \geq 1\,;\ a_n = -\frac{1}{2(n+m)(2n+2m-1)} a_{n-1} \qquad \text{بازگشتی} \end{cases}$$

حال با جایگذاری m_1 و m_2 در رابطه بازگشتی، y_1 و y_2 را به دست می‌آوریم.

$$m = m_1 = 0 \longrightarrow a_n = -\frac{1}{2n(2n-1)} a_{n-1} \qquad \forall\, n \geq 1$$

حال چند تا a_n را به ازای nهای مختلف به دست می‌آوریم.

$$n = 1 \;\rightarrow\; a_1 = -\frac{1}{2(1)} a_0 = -\frac{1}{2!} a_0$$

$$n = 2 \;\rightarrow\; a_2 = -\frac{1}{4(3)} a_1 = \frac{1}{4!} a_0$$

$$n = 3 \;\rightarrow\; a_3 = -\frac{1}{6(5)} a_2 = -\frac{1}{6!} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 x^n = a_0 \cos\sqrt{x}$$

$$m = m_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)(2n)} = -\frac{1}{2n(2n+1)} a_{n-1} \qquad \forall\, n \geq 1$$

حال چند تا a_n را به ازای nهای مختلف به دست می‌آوریم.

$$n = 1 \;\rightarrow\; a_1 = -\frac{1}{2(3)} a_0 = -\frac{1}{3!} a_0$$

$$n = 2 \;\rightarrow\; a_2 = -\frac{1}{4(5)} a_1 = \frac{1}{5!} a_0$$

$$n = 3 \;\rightarrow\; a_3 = -\frac{1}{6(7)} a_2 = -\frac{1}{7!} a_0$$

$$\vdots$$

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m_2}=a_0x^{\frac{1}{2}}+a_1x^{\frac{3}{2}}+a_2x^{\frac{5}{2}}+a_3x^{\frac{7}{2}}+\cdots$$

$$=a_0x^{\frac{1}{2}}-\frac{a_0}{3!}x^{\frac{3}{2}}+\frac{a_0}{5!}x^{\frac{5}{2}}-\frac{a_0}{7!}x^{\frac{7}{2}}+\cdots=a_0(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5!}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7!}+\cdots)$$

و جواب عمومی معادله دیفرانسیل برابر است با

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

2. $4x^2y''-8x^2y'+(4x^2+1)y=0$

پاسخ:

$$y''\underbrace{-2}_{P(x)}y'+\underbrace{\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}_{Q(x)}y=0,\qquad x=0$$ نقطه غیر عادی

حال منظم یا نامنظم بودن نقطه $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to 0}xP(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-2x)=0\\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=0\end{cases}$$ $x=0$ نقطه غیر عادی منظم

حال وضعیت جواب ها را برای این معادله مشخص می کنیم، ابتدا باید معادله مشخصه را بنویسیم.

$$m(m-1)+p_0m+q_0=0\ \longrightarrow\ m^2-m+\frac{1}{4}=0\ \longrightarrow\ \left(m-\frac{1}{2}\right)^2=0\longrightarrow\ m=\frac{1}{2}$$ مضاعف

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m},\ \ y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_nx^{n+m-1}\ \ ,y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_nx^{n+m-2}$$

این مقادیر را در معادله جایگذاری می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m}-\sum_{n=0}^{\infty}8(n+m)\,a_nx^{n+m+1}+\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^{n+m+2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m}=0$$

می‌خواهیم چهار سیگما را تحت یک سیگما بنویسیم برای این کار ابتدا توان xها و سپس نقطه شروع سیگماها را یکی می‌کنیم.

در سیگمای دوم به جای n، $n-1$ و در سیگمای سوم به جای n، $n-2$ قرار می‌دهیم تا توان xها یکی شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+m)(n+m-1)\,a_n x^{n+m} - \sum_{\underbrace{n-1=0}_{n=1}}^{\infty} 8(n+m-1)\,a_n x^{n+m}$$
$$+\sum_{\underbrace{n-2=0}_{n=2}}^{\infty} 4a_{n-2}x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = 0$$

حال شروع سیگماها را یکی می‌کنیم، در سری فروبنیوس بهتر است شروع سیگماها از ۱ باشد.

$$4m(m-1)a_0x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4(n+m)(n+m-1)a_n x^{n+m} - \sum_{n=1}^{\infty} 8(n+m-1)a_{n-1}x^{n+m}$$
$$+(-4a_{-1}x^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-2}x^{n+m}) + a_0x^m + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+m} = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{4\left(m^2-m+\frac{1}{4}\right)a_0}_{0}\,x^m$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{[4(n+m)(n+m-1)+1]a_n - 8(n+m-1)a_{n-1} + 4a_{n-2}\}}_{0}\,x^{n+m} = 0$$

$$\begin{cases} (m-\frac{1}{2})^2 a_0 = 0 \xrightarrow{a_0\neq 0} \underbrace{(m-\frac{1}{2})^2 = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \longrightarrow m = \frac{1}{2} \quad \text{مضاعف} \\ \forall\, n \geq 1\,;\; a_n = \dfrac{8(n+m-1)}{4(n+m)(n+m-1)+1}a_{n-1} - \dfrac{4}{4(n+m)(n+m-1)+1}a_{n-2} \end{cases}$$

حال با جایگذاری m در رابطه بازگشتی، y_1 را به دست می‌آوریم.

$$m=\frac{1}{2} \longrightarrow a_n = \frac{2n-1}{n^2}a_{n-1} - \frac{1}{n^2}a_{n-2} \quad , \qquad \forall\, n \geq 1$$

حال چند تا a_n را به ازای n های مختلف به دست می‌آوریم.

$$n=1 \longrightarrow a_1 = a_0 - a_{-1} = a_0$$

$$n=2 \longrightarrow a_2=\frac{3}{4}a_1-\frac{1}{4}a_0=\frac{1}{2!}a_0$$

$$n=3 \longrightarrow a_3=\frac{5}{9}a_2-\frac{1}{9}a_1=\frac{1}{3!}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{1}{n!}a_0$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a_0 x^{n+\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=a_0\sqrt{x}\,e^x$$

$$y_2=vy_1 \longrightarrow v=\int y_1^{-2}e^{-\int p(x)dx}dx=\int\frac{1}{a_0^2xe^{2x}}\underbrace{e^{\int 2dx}}_{e^{2x}}dx=\frac{1}{a_0^2}\ln x$$

$$y_2=\frac{1}{a_0^2}\ln x\ .a_0\sqrt{x}\,e^x=\frac{1}{a_0}\sqrt{x}\,e^x\ln x$$

و جواب عمومی معادله دیفرانسیل برابر است با

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

مثال ۳:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به صورت سری توانی حول نقطه $x=0$ بیابید.

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0$$

پاسخ:

$$y''\underbrace{-\frac{1}{x-1}}_{P(x)}y'+\underbrace{\frac{1}{x^2-x}}_{Q(x)}y=0,\qquad x=0 \quad \text{نقطه غیر عادی}$$

حال منظم یا نامنظم بودن نقطه $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to0}xP(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{x}{x-1}\right)=0\\ q_0=\lim\limits_{x\to0}x^2Q(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{x-1}\right)=0\end{cases}\qquad x=0 \ \text{نقطه غیر عادی منظم}$$

حال وضعیت جواب ها را برای این معادله مشخص می کنیم، ابتدا باید معادله مشخصه را بنویسیم.

$$m(m-1)+p_0m+q_0=0 \quad \longrightarrow \quad m(m-1)+0+0=0 \quad \longrightarrow \quad m(m-1)=0$$

$$\begin{cases} m_1=1 \\ m_2=0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad m_1-m_2=1\in\mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m},\ \ y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_nx^{n+m-1} \quad ,y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_nx^{n+m-2}$$

این مقادیر را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)\,a_nx^{n+m}\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m}=0$$

می خواهیم چهار سیگما را تحت یک سیگما بنویسیم برای این کار ابتدا توان xها و سپس نقطه شروع سیگماها را یکی می‌کنیم.

در سیگمای دوم به جای n، $n+1$ قرار می‌دهیم تا توان x ها یکی شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m}-\sum_{\underbrace{n+1=0}_{n=-1}}^{\infty}(n+m+1)(n+m)\,a_{n+1}x^{n+m}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)\,a_nx^{n+m}\ +\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m}=0$$

حال شروع سیگماها را یکی می کنیم، در سری فروبنیوس بهتر است شروع سیگماها از ۱ باشد اما اگر در ابتدا معادله مشخصه را به دست آورده باشیم فرقی نمی‌کند شروع سیگماها از چه مقداری باشد.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\,a_nx^{n+m}-m(m-1)a_0x^{m-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+m+1)(n+m)\,a_{n+1}x^{n+m}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)\,a_nx^{n+m}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+m}=0$$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{-m(m-1)a_0}_{0}\, x^{m-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\{[(n+m)(n+m-2)+1]a_n-(n+m+1)(n+m)a_{n+1}\}}_{0} x^{n+m}=0$$

$$\begin{cases} m(m-1)a_0=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} \underbrace{m(m-1)=0}_{\text{معادله مشخصه}} \longrightarrow \begin{cases} m_1=1 \\ m_2=0 \end{cases} \longrightarrow m_1-m_2=1\in\mathbb{Z} \\ \forall\, n\geq 0\,;\ a_{n+1}=\dfrac{(n+m)(n+m-2)+1}{(n+m+1)(n+m)}a_n \end{cases}$$

حال با جایگذاری m_1 در رابطه بازگشتی، y_1 را به دست می‌آوریم.

$$m=m_1=1 \quad\longrightarrow\quad a_{n+1}=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}a_n\ , \qquad \forall\, n\geq 0$$

حال چند تا a_n را به ازای n های مختلف به دست می آوریم.

$$n=0\longrightarrow a_1=0$$

$$n=1\longrightarrow a_2=\frac{1}{(2)(3)}a_1=0$$

$$\vdots$$

$$\forall\, n\geq 1, \qquad a_n=0$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+m_1}= a_0x+a_1\,x^2+a_2x^3+\cdots=a_0x$$

$$y_2=vy_1 \ \longrightarrow\ v=\int y_1^{-2}e^{-\int p(x)dx}dx=\int\frac{1}{a_0^2x^2}e^{\int\frac{dx}{x-1}}dx=\int\frac{1}{a_0^2x^2}\underbrace{e^{\ln(x-1)}}_{x-1}dx$$

$$=\frac{1}{a_0^2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{a_0^2}(\ln x+\frac{1}{x})$$

$$y_2=\frac{1}{a_0^2}(\ln x+\frac{1}{x})\,.\,a_0x=\frac{1}{a_0}(xlnx+1)$$

و جواب عمومی معادله دیفرانسیل برابر است با

$$y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

تمرین۱:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به صورت سری توانی حول نقطه $x = 0$ بیابید.

1. $4xy'' + 3y' + 3y = 0$
2. $xy'' + \frac{1}{2}(1 + x)y' - y = 0$
3. $x(x - 1)y'' + (\frac{1}{2} - x)y' + y = 0$
4. $xy'' - (2x - 1)\mathrm{y}' + (x - 1)y = 0$
5. $x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + 2y = 0$
6. $x^2y'' - (x^2 + 3x)y' + 3y = 0$
7. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$

تمرین۲:

معادله دیفرانسیل لاگر $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0$ را درنظر بگیرید. (λ عددی ثابت است.)

الف. نشان دهید $x = 0$ نقطه غیرعادی منظم آن است سپس یک جواب معادله دیفرانسیل لاگر را به صورت سری توانی حول نقطه $x = 0$ بیابید.

ب. نشان دهید اگر $\lambda = k$، k یک عدد طبیعی، باشد جواب به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود.

ج. اگر $\lambda = 1$ باشد آنگاه جواب عمومی معادله دیفرانسیل لاگر را به دست آورید.

معادله دیفرانسیل بسل:

صورت کلی چنین معادله دیفرانسیلی به صورت $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\,y = 0$ می‌باشد که در آن p یک عدد حقیقی است.

نقطه $x_0 = 0$ نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل بسل است، لذا برای حل از سری فروبنیوس $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$ استفاده می‌کنیم. آنگاه داریم :

معادله مشخصه $\qquad m^2 + p^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad m = \pm p$

رابطه بازگشتی $\qquad \forall\, n \geq 1\,; \qquad a_n = \dfrac{1}{(m+n)^2 - p^2}\, a_{n-2}$

با اختیار $a_0 = \frac{1}{2^p p!}$ داریم:

تابع نوع اول بسل با توان p

$$y_1(x) = \mathrm{J}_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!\,(n+p)!}$$

تابع نوع اول بسل با توان $-p$

$$y_2(x) = \mathrm{J}_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}}{n!\,(n-p)!}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل به صورت زیر به دست می‌آید:

- اگر $p \notin \mathbb{Z}$ باشد آنگاه J_p و J_{-P} نسبت به هم مستقل خطی هستند و داریم

$$y_g = c_1 \mathrm{J}_p(x) + c_2 \mathrm{J}_{-P}(x)$$

- اگر $p \in \mathbb{Z}$ باشد آنگاه J_p و J_{-P} نسبت به هم وابسته خطی هستند و داریم

$$y_g = c_1 \mathrm{J}_p(x) + c_2 Y_P(x)$$

که در آن $Y_p(x) = \frac{\mathrm{J}_P(x)\cos(P\pi) - \mathrm{J}_{-p}(x)}{\sin\,(p\pi)}$ تابع نوع دوم بسل است.

مثال:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را با توجه به تغیر متغیر داده شده به دست آورید.

$$1. x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0\,; \qquad z = 2x$$

پاسخ:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(2\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(2\frac{dy}{dz}\right).\frac{dz}{dx} = 4\frac{d^2y}{dz^2}$$

این مقادیر را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\longrightarrow \quad \frac{z^2}{4}.4\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z}{2}.2\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad \longrightarrow \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

معادله بسل با $p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ است. در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با

$$y_g = c_1\mathrm{J}_p(z) + c_2\mathrm{J}_{-P}(z) = c_1\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(2x) + c_2\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$2.\ y'' + e^xy = 0\,; \qquad z^2 = 4e^x$$

پاسخ:

$$z = 2e^{\frac{x}{2}} \longrightarrow \frac{dz}{dx} = e^{\frac{x}{2}} = \frac{z}{2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{z}{2}\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{2}.\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{2}.\frac{dy}{dz}\right).\frac{dz}{dx} = \frac{z}{2}(\frac{1}{2}.\frac{dy}{dz} + \frac{z}{2}.\frac{d^2y}{dz^2})$$

این مقادیر را در معادله جایگذاری می کنیم.

$$\longrightarrow \quad \frac{z^2}{4}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z}{4}\frac{dy}{dz} + \frac{z^2}{4}y = 0 \quad \xrightarrow{\times 4} \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + z^2y = 0$$

معادله بسل با $p = 0 \in \mathbb{Z}$ است. در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با

$$y_g = c_1\mathrm{J}_p(z) + c_2\mathrm{Y}_P(z) = c_1\mathrm{J}_0\left(2e^{\frac{x}{2}}\right) + c_2Y_0(2e^{\frac{x}{2}})$$

3. $y'' + \left(1 + \dfrac{1-4k^2}{4x^2}\right) y = 0\,;$ $\qquad y(x) = x^{\frac{1}{2}} u(x)$ $\qquad$ k ثابت حقیقی

پاسخ:

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} u + x^{\frac{1}{2}} u'$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} u + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} u' + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} u' + x^{\frac{1}{2}} u''$$

این مقادیر را در معادله جایگذاری می کنیم.

$$-\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} u + x^{-\frac{1}{2}} u' + x^{\frac{1}{2}} u'' + \left(1 + \frac{1-4k^2}{4x^2}\right) x^{\frac{1}{2}} u = 0$$

$$\longrightarrow \quad x^{\frac{1}{2}} u'' + x^{-\frac{1}{2}} u' + x^{-\frac{3}{2}} (x^2 - k^2) u = 0 \quad \xrightarrow{\times x^{\frac{3}{2}}} \quad x^2 u'' + x u' + (x^2 - k^2) u = 0$$

معادله بسل با $p = k \in \mathbb{R}$ است. در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با

$$\text{if} \quad k \notin \mathbb{Z} \quad \longrightarrow \quad u_g = c_1 \mathrm{J}_k(x) + c_2 \mathrm{J}_{-k}(x) \quad \longrightarrow \quad y_g = x^{\frac{1}{2}} \left[c_1 \mathrm{J}_k(x) + c_2 \mathrm{J}_{-k}(x)\right]$$

$$\text{if} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \longrightarrow \quad u_g = c_1 \mathrm{J}_k(x) + c_2 Y_k(x) \quad \longrightarrow \quad y_g = x^{\frac{1}{2}} \left[c_1 \mathrm{J}_k(x) + c_2 \mathrm{Y}_k(x)\right]$$

تمرین:

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را با توجه به تغیر متغیر داده شده به دست آورید.

1. $y'' + \dfrac{1}{x} y' - \left(\dfrac{1}{4x^2} - 9\right) y = 0\,;$ $\qquad z = 3x$
2. $xy'' + y' + \dfrac{1}{4} y = 0\,;$ $\qquad z = \sqrt{x}$
3. $x^2 y'' + xy' + 4(x^4 - 1) y = 0\,;$ $\qquad z = x^2$
4. $y'' + (e^{2x} - \dfrac{1}{9}) y = 0\,;$ $\qquad z = e^x$
5. $9x^2 y'' + 9xy' + x^{\frac{2}{3}} y = 0\,;$ $\qquad x = t^3$
6. $x^2 y'' + \left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right) y = 0\,;$ $\qquad y(x) = x^{\frac{1}{2}} u(x)$
7. $xy'' + 4y' + xy = 0\,;$ $\qquad y(x) = x^{-\frac{3}{2}} u(x)$
8. $xy'' + 5y' + xy = 0\,;$ $\qquad y(x) = x^{-2} u(x)$

تابع گاما:

تابع گاما تعمیم تعریف فاکتوریل برای اعداد غیر طبیعی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$$

نکته۱:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

رابطه تابع گاما و فاکتوریل:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \underbrace{t^{1-1}}_{1} dt = -e^{-t}|_0^\infty = -(e^{-\infty} - e^0) = 1 = 0!$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2!$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می‌توان گفت:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(\mathrm{n}) = n(n-1)! = n! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

گامای اعداد منفی:

اگر p منفی باشد، آنگاه داریم:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}\ ; \qquad p \neq \{0\,, -1\,, -2\,, \dots\}$$

نکته۲:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال۱:

حاصل عبارات $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ و $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$$

مثال۲:

حاصل انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-lnx}}$ را به دست آورید.

پاسخ: از تغییر متغیر $u=-lnx$ استفاده می‌کنیم. درنتیجه

$$x=e^{-u} \quad \longrightarrow \quad dx=-e^{-u}\,du \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \longrightarrow u=\infty \\ x=1 \longrightarrow u=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-lnx}}=\int_\infty^0 \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\int_0^\infty e^{-u}.u^{\overbrace{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-1}}du=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

تمرین۱:

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right), \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$$

تمرین۲:

حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

1. $\int_0^\infty 3^{-4x^2}\,dx$
2. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$
3. $\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$

خلاصه فصل سوم:

برای به دست آوردن جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توانی حول نقطه $x = x_0$، چه کاری باید انجام بدهیم؟

مرحله اول:

ابتدا نوع نقطه $x = x_0$ را مشخص می‌کنیم.

نقطه عادی ← $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

نقطه غیرعادی منظم ← $\left.\begin{array}{ll} m(m-1) + p_0 m + q_0 = 0 & .\mathrm{I} \\ y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+m} & .\mathrm{II} \end{array}\right\}$

مرحله دوم:

مشتقات y را به دست می‌آوریم و در معادله جایگذاری می‌کنیم. می‌توایم مشتق‌گیری را داخل سیگما ببریم و داخل سیگما نسبت به مشتق بگیریم.

نقطه عادی ← به ازای هر بار مشتق‌گیری یکی به شروع اضافه می‌شود.

نقطه غیرعادی منظم ← به ازای هر بار مشتق‌گیری شروع تغییری نمی‌کند.

مرحله سوم:

توان xها را در تمام سیگماها را یکی می‌کنیم، فرقی نمی‌کند xها به چه توانی برسانیم.

مرحله چهارم:

شروع سیگماها رو یکی می‌کنیم.

نقطه عادی ← فرقی نمی‌کند شروع سیگماها از چه عددی باشد.

نقطه غیرعادی منظم ← شروع سیگماها باید از ۱ باشد اما اگر در ابتدا، معادله مشخصه را به دست آورده باشیم فرقی نمی‌کند شروع سیگماها از چه مقداری باشد.

مرحله پنجم:

همه سیگماهای موجود در معادله را تحت یک سیگما نوشته سپس جمله عمومی سیگما و جملات کشیده شده از سیگماها (در صورت وجود) را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

مرحله ششم:

با استفاده از جمله عمومی سیگما، رابطه بازگشتی را به دست می‌آوریم که در رابطه بازگشتی اندیس بزرگتر را برحسب اندیس کوچکتر به دست می‌آوریم.

نقطه عادی ← با استفاده جملات کشیده شده از سیگماها (در صورت وجود) می‌توان چند a_n یا رابطه‌ای بین a_nها به دست آورد.

نقطه غیرعادی منظم ← با استفاده جملات کشیده شده از سیگماها (در صورت وجود) و شرط $a_0 \neq 0$ می‌توان معادله مشخصه را به دست آورد.

مرحله هفتم:

نقطه عادی ← در رابطه بازگشتی بجای nها، چند عدد قرار می‌دهیم و چند a_n را به دست می‌آوریم.
همه‌ی a_nهای به دست آمده برحسب دو ثابت a_0 و a_1 باید باشند.

نقطه غیرعادی منظم ← در رابطه بازگشتی بجای m، m_1 قرار می‌دهیم سپس بجای nها، چند قرار می‌دهیم و چند a_n را به دست می‌آوریم.

همه‌ی a_nهای به دست آمده برحسب ثابت a_0 باید باشند.

مرحله هشتم:

نقطه عادی ← در $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ به جای a_nهای به دست آمده از مرحله هفتم، مقادیرشان را جایگذاری کرده و جواب عمومی معادله دیفرانسیل را به صورت $y_g = a_0 y_1 + a_1 y_2$ به دست می‌آوریم.

نقطه غیرعادی منظم ← در $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + a_3 x^{m+3} + \cdots$ به جای a_nهای به دست آمده از مرحله هفتم، مقادیرشان را جایگذاری کرده و جواب y_1 معادله دیفرانسیل را به صورت $y_1 = a_0 y$ به دست می‌آوریم.

- با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه، جواب دوم به یکی از فرم‌های زیر است:

$1.\text{ if } m_1 - m_2 \notin \mathbb{Z}$

تمام مراحل هفتم و هشتم را برای به دست آوردن جواب y_2 در حالت $m = m_2$ انجام می‌دهیم.

$2.\text{ if } m$ مضاعف

برای به دست آوردن جواب دوم از فرمول $y_2 = vy_1$ استفاده می‌کنیم.

$3.\text{ if } m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$

برای به دست آوردن جواب دوم از فرمول $y_2 = vy_1$ استفاده می‌کنیم.

چه زمانی a_n کلی رو باید حدس بزنیم و بسط تابع را باید به دست بیاوریم؟

نقطه عادی:

نیازی به حدس بسط تابع نیست.

نقطه غیرعادی منظم:

۱. اگر سوال فقط یک جواب از معادله را خواست، در هر سه حالت نیازی به حدس بسط تابع نیست.

۲. اگر سوال هر دو جواب معادله (جواب عمومی) را خواست، در حالت اول نیازی به حدس تابع نیست اما در حالات دوم و سوم حتما باید بسط تابع y_1 را حدس بزنیم.