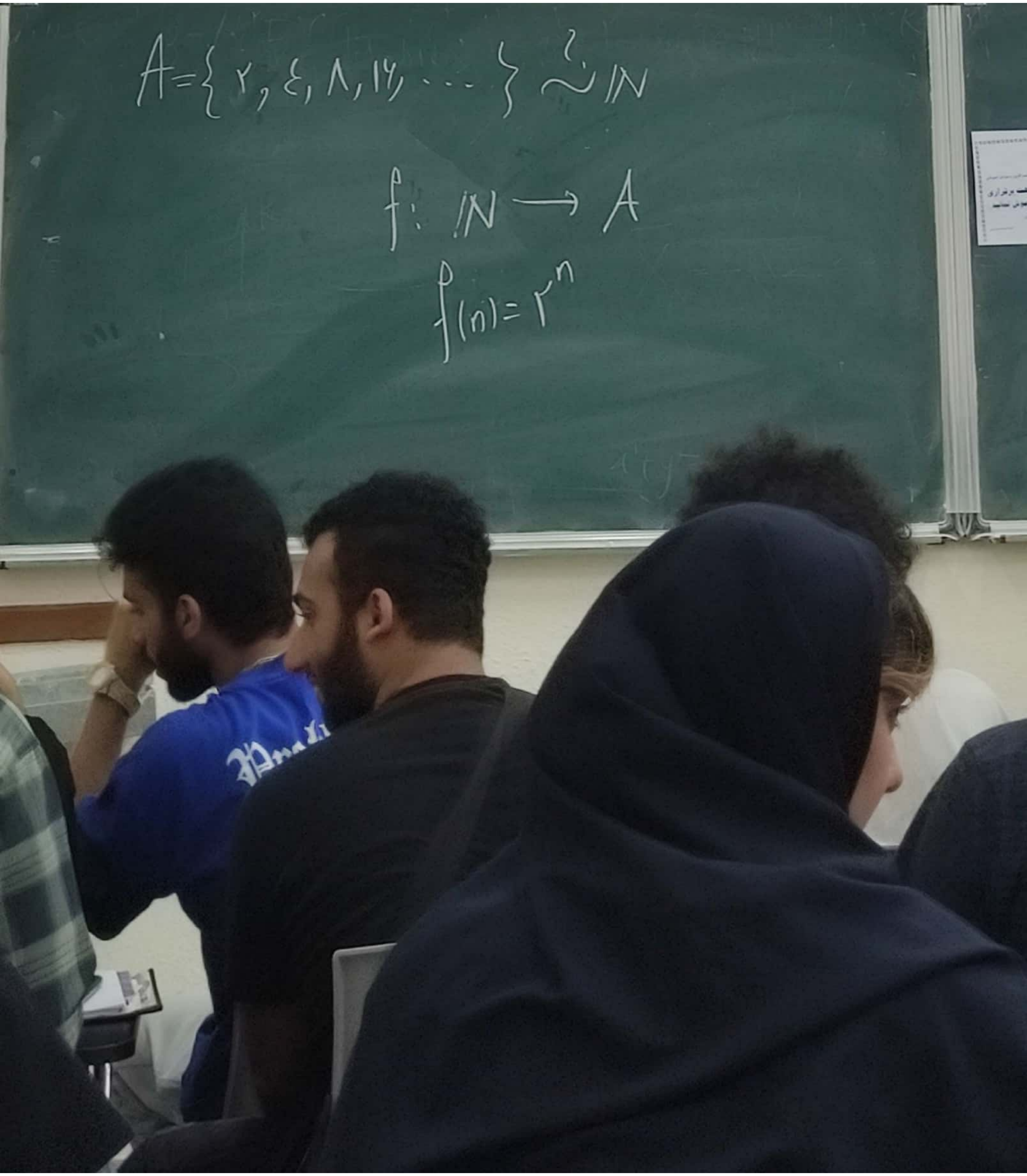
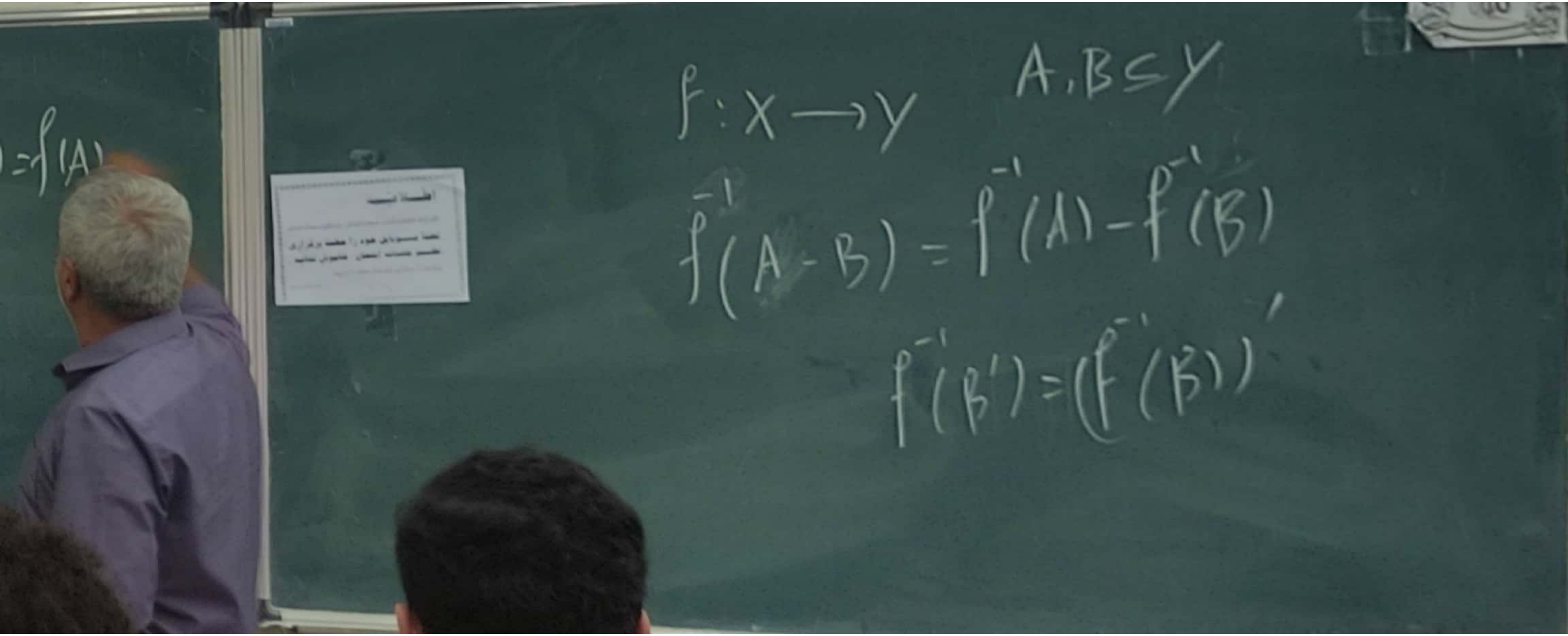

A={۲, ۴, ۸, ۱۶, ... } ~ IN
f: IN → A
f(n)= ۲^n


$= f(A)$
$f: X \longrightarrow Y \qquad A, B \subseteq Y$
$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$
$f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$

$f : X \longrightarrow Y$

f

$1-1$

[illegible] f

- $f(A - B) = f(A) - f(B)$
- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- $f^{-1}(f(A)) = A$


N
R
(0,1)

0,1

$f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

$\Sigma_r = \{ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \mid \quad f \}$

$$g(n) = \begin{cases} 0 & f_n(n) = 1 \\ 1 & f_n(n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|lll} f_1 & f_1(1) & f_1(2) & \cdots \\ f_2 & f_2(1) & f_2(2) & \cdots \\ \vdots & & & \\ f_n & & & \\ \vdots & & & \end{array}$$

$\{1,2\}$

$\underline{\underline{\mathbb{N}}}$

$\mathbb{R} \sim (0,1)$

$\Sigma_2 \sim \varphi(\Sigma_2) \subseteq (0,1)$

$\varphi: \Sigma_2 \xrightarrow{1-1} (0,1)$

$\varphi(f) = 0/f(1)\,f(2)\ldots$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} P(\mathbb{R})$$

یک به یک

$$x \longmapsto \{x\}$$

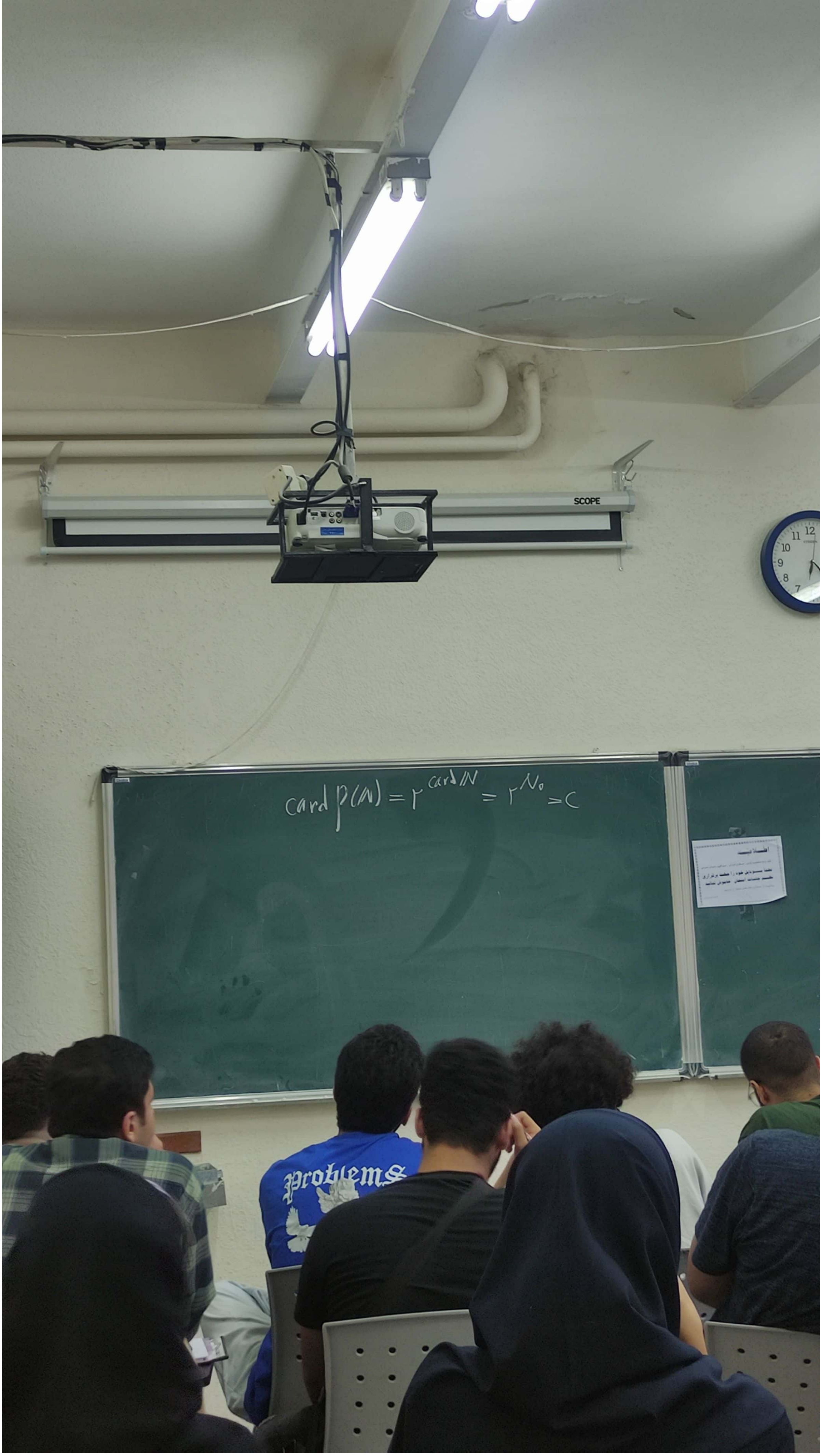
$$\mathbb{R} \sim \varphi(\mathbb{R}) \subseteq P(\mathbb{R})$$

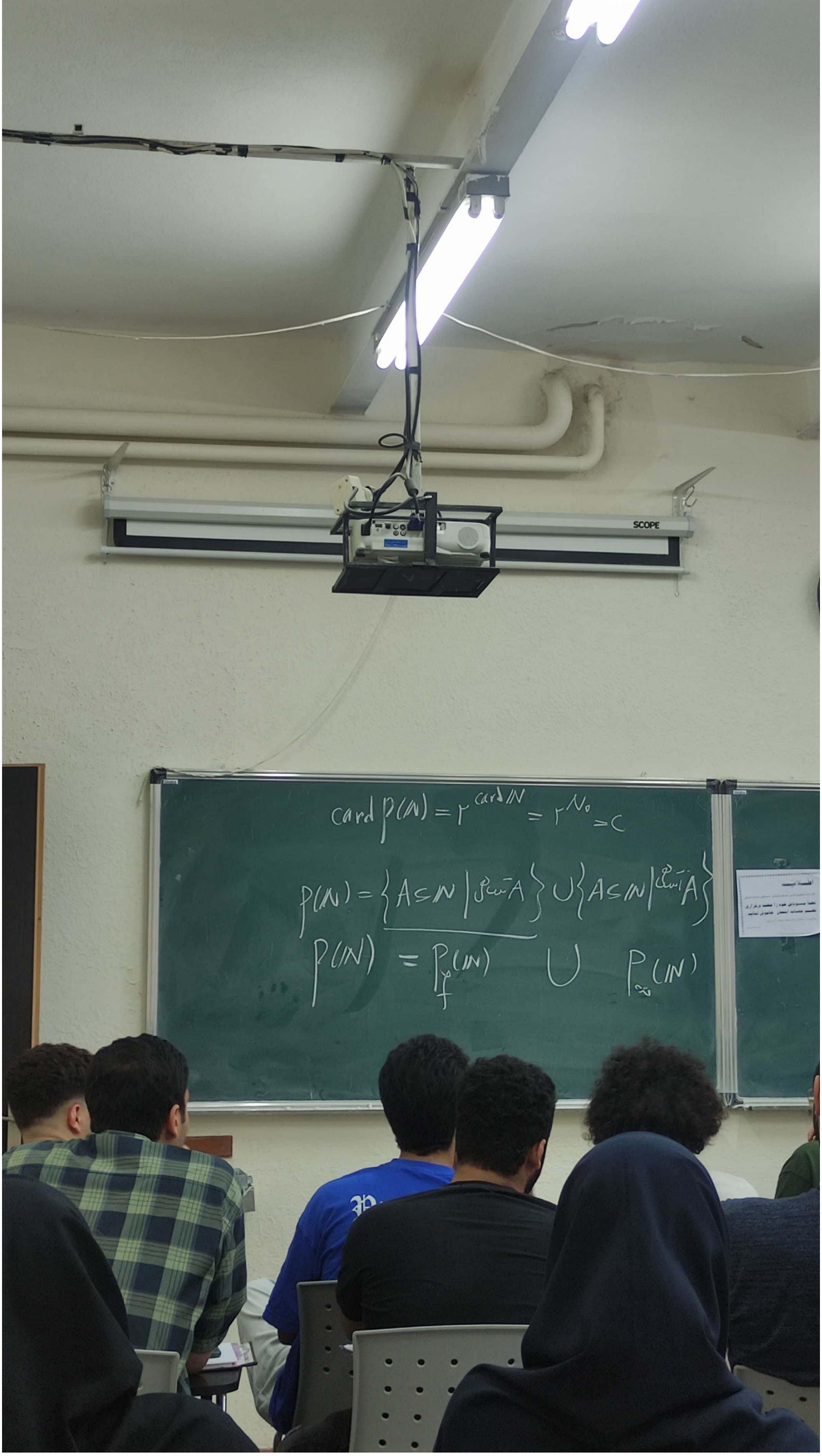
$P_f(\mathbb{R}) = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid$ A متناهی است $\}$

$\mathbb{N}$ $\qquad$ $P(\mathbb{N})$

$$P(X) \sim \{0,1\}^X \Longrightarrow$$

$$\operatorname{card} P(X) = \operatorname{card}\{0,1\}^X = 2^{\operatorname{card} X}$$


SCOPE
$\text{card}\, P(\mathbb{N}) = ۲^{\text{card}\, \mathbb{N}} = ۲^{\aleph_0} = c$
Problems


$\text{card}\, P(\mathbb{N}) = ۲^{\text{card}\,\mathbb{N}} = ۲^{\aleph_0} = c$
$P(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{A متناهی}\} \cup \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{A نامتناهی}\}$
$P(\mathbb{N}) = P_f(\mathbb{N}) \cup P_\infty(\mathbb{N})$
SCOPE

A_K

[illegible]

$$\mathcal{A}_K = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = K\}$$

$$\varphi : \mathcal{A}_K \longrightarrow \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{1!K}$$

$$\varphi(A) = (a_1, a_2, \cdots, a_K)$$

$$A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_K\}$$

$$\mathcal{A}_K \sim \varphi(\mathcal{A}_K) \subseteq \mathbb{N}^K$$ ۱,۲

A_k ها را

$$P_f(\mathbb{N}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$A_k \cap A_{k'} = \phi$$

$$P_\infty(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ نامتناهی}\}$$

A_k

$k' = \phi$

$\in \mathbb{N} \mid$ نامتناهی $A\}$

متناهی $A_k = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = k\}$

$$\underbrace{P(\mathbb{N})}_{\text{ناشمارا}} = \underbrace{P_f(\mathbb{N})}_{\text{شمارا}} \cup \underbrace{P_\infty(\mathbb{N})}_{?}$$


A_k = {A ⊆ N | |A| = k}
N = ∪ A_k

$$\left(c^{c}\right)^{N_0} \qquad\qquad c^{(N_0 c)} =$$

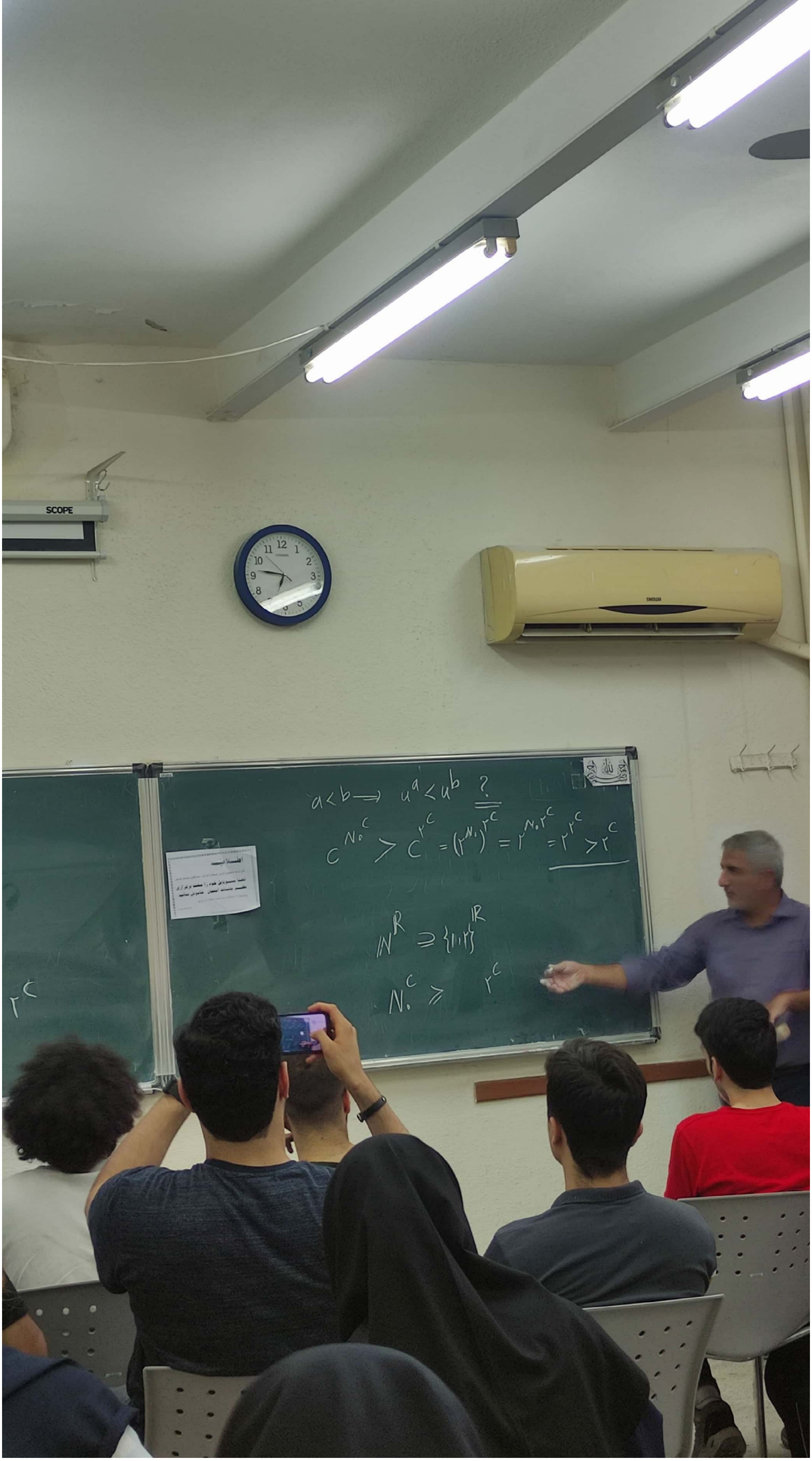
$$\|$$

$$c^{cN_0} = c^{c} = \left(2^{N_0}\right)^{c} = 2^{N_0 c} = 2^{c}$$

$= 2^c$

$$\aleph_0^c = \mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}})$$

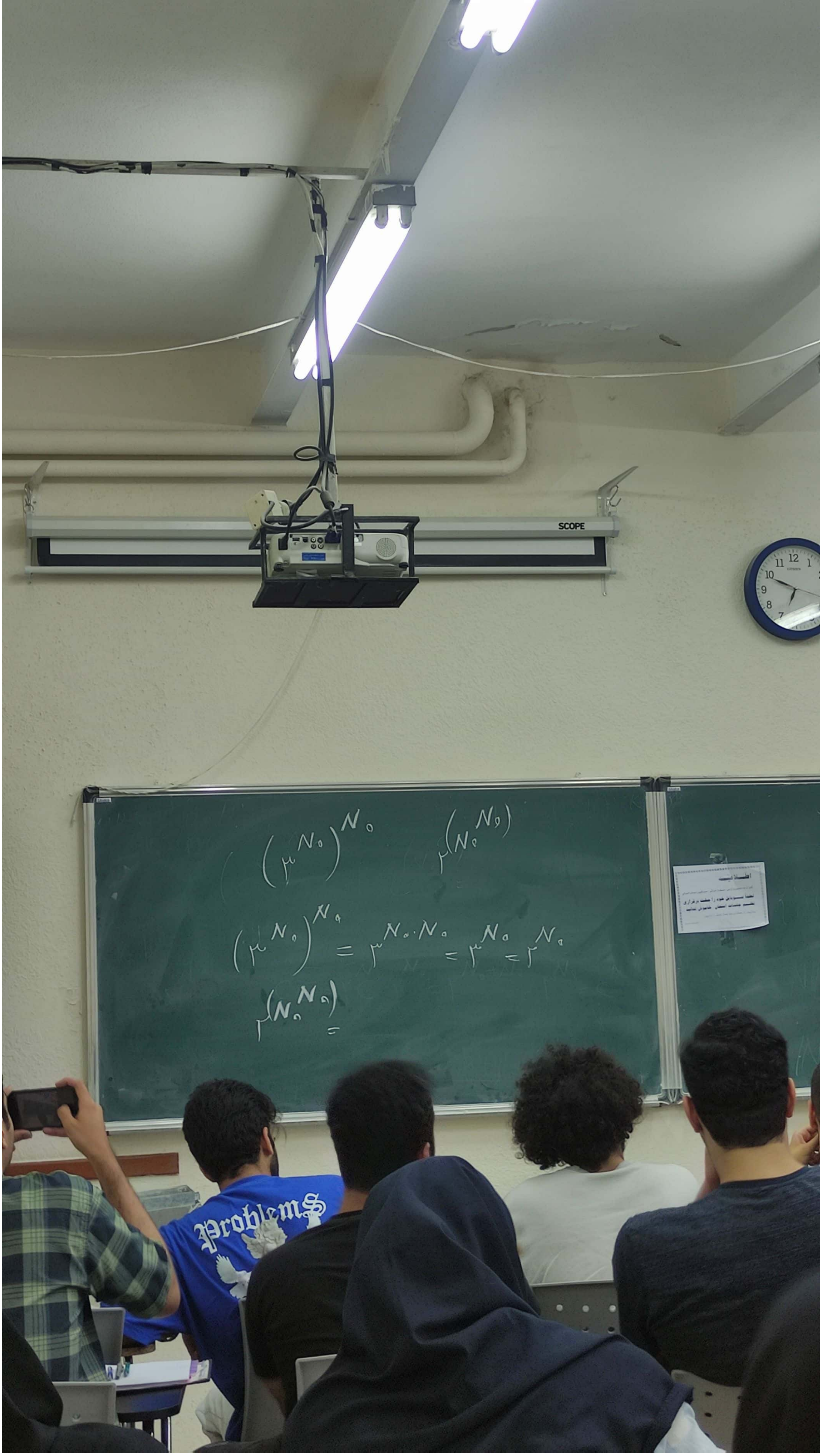
$\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$


SCOPE
$a<b \Longrightarrow u^a<u^b$?
$c^{\aleph_0^{c}} > c^{۲^c} = (۲^{\aleph_0})^{۲^c} = ۲^{\aleph_0 . ۲^c} = ۲^{۲^c} > ۲^c$
$\mathbb{N}^{\mathbb{R}} \supseteq \{۱,۲\}^{\mathbb{R}}$
$\aleph_0^{c} \geq ۲^c$

$$(c^{c})^{\aleph_0} < c^{(\aleph_0 c)} =$$

$$\|$$

$$c^{c\aleph_0} = c^{c} = (2^{\aleph_0})^{c} = 2^{\aleph_0 c} = 2^{c}$$


SCOPE
$(۳^{N_0})^{N_0}$
$۲^{(N_0^{N_0})}$
$(۳^{N_0})^{N_0} = ۳^{N_0 \cdot N_0} = ۳^{N_0} = ۲^{N_0}$
$۲^{(N_0^{N_0})} =$
Problems

$= 2^{\aleph_0}$

$a<b \Longrightarrow u^a < u^b$?

$c^{\aleph_0^c} > c^{2^c} = (2^{\aleph_0})^{2^c} = 2^{\aleph_0 2^c} = 2^{2^c} > 2^c$

$\aleph_0^{\aleph_0} = \operatorname{card} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \geq \operatorname{card}\{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$

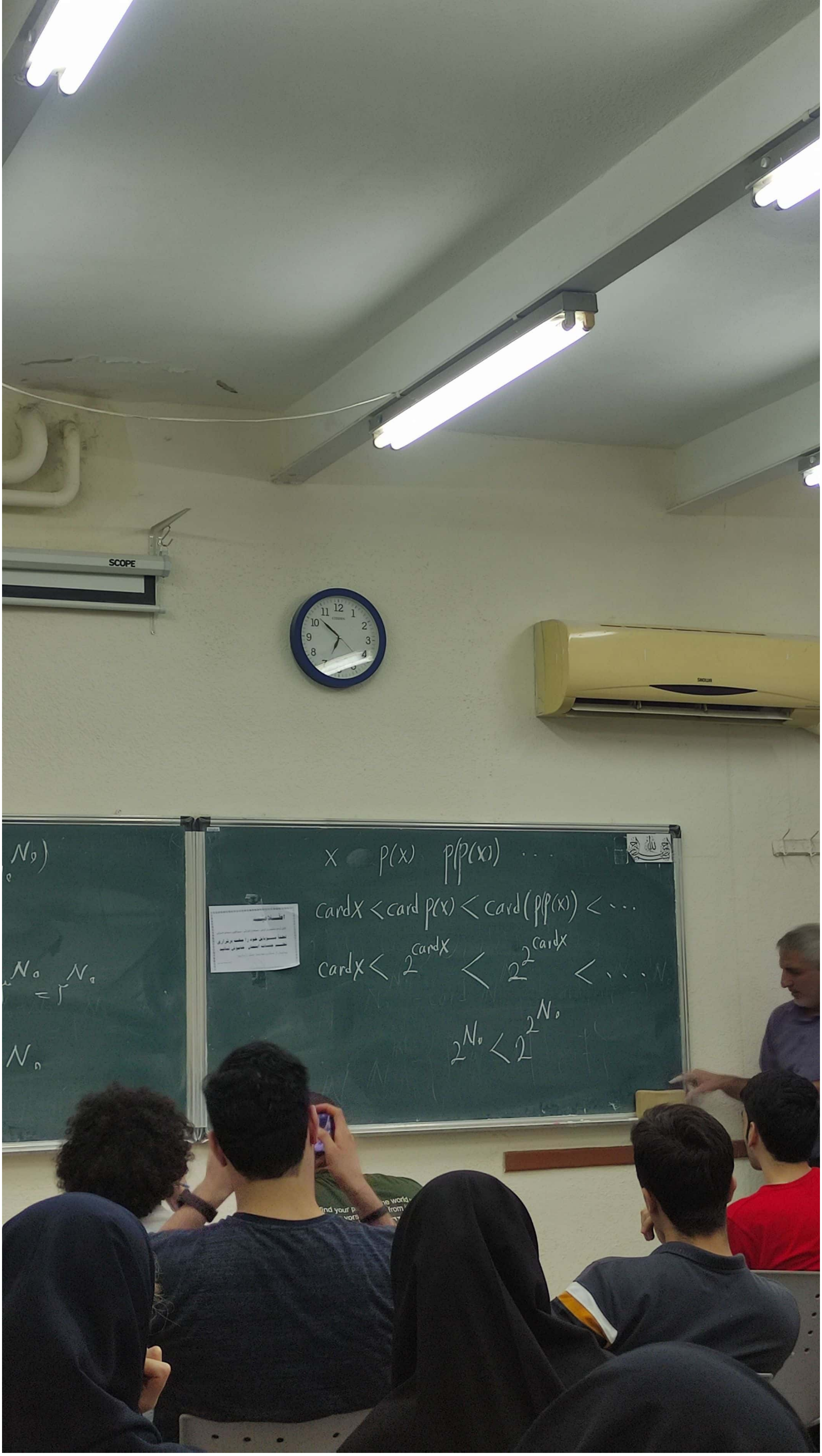
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid$ تابع $f \}$

$$(3^{N_0})^{N_0} \qquad 3^{(N_0^{N_0})}$$

$$(3^{N_0})^{N_0} = 3^{N_0 \cdot N_0} = 3^{N_0} = 2^{N_0}$$

$$3^{(N_0^{N_0})} > 2^{2^{N_0}} > 2^{N_0}$$

تعمیم کانتور


SCOPE
$X \quad P(X) \quad P(P(X)) \quad \ldots$
$\text{card}X < \text{card}\,P(X) < \text{card}(P(P(X)) < \ldots$
$\text{card}X < 2^{\text{card}X} < 2^{2^{\text{card}X}} < \ldots$
$2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}}$

A = عدد جبری = ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا

T = عدد متعالی

$$R = A \cup T$$

A: شمارا

T: ناشمارا ، π , e

A = عدد جبری = ریشه‌ی چند جمله‌ای با ضرایب گویا

T = عدد متعالی

$R = A \cup T$

گویا

ناگویا π , e

ثابت کنید مجموعه اعداد جبری شماراست.

فرض کنید $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$

، $a_n \neq 0$. در این صورت $\deg P = n$.

، $a_i \in \mathbb{Z}$ ،

$P_n = \{ p :$ یک چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب صحیح باشد $p \}$

$$P_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$a_n x^n + \cdots + a_0 \overset{\varphi}{\longmapsto} (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0)$$

$$P_n \sim \varphi(P_n) \subsetneq \mathbb{Z}^{n+1}$$

پوشا نیست

$\underline{a x^n}$ $a \in \mathbb{Z}$

$a \neq 0$

$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$

$\dfrac{a x^n}{\quad}$ $a \in \mathbb{Z}$

$a \neq 0$

اطلاعیه

مجموعه اعداد صحیح کارات

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ فرض کنید $2x^2 + 1 = 2x^2 + 0x + 1$

$\deg P = n$ = درآن صورت $a_n \neq 0$,

$a_i \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$

$P_n = \{ p :$ p یک چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب صحیح باشد $\}$

$$P_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$a_n x^n + \cdots + a_0 \overset{\varphi}{\longmapsto} (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0)$$

$$P_n \sim \varphi(P_n) \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$\underline{\qquad\qquad} \qquad \underline{a x^n} \qquad a \in \mathbb{Z}$$

شماراست

$$a \neq 0$$

همه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب صحیح $= P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ $\underline{\qquad\qquad}$

$$P_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$a_n x^n + \cdots + a_0 \xmapsto{\varphi} (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

$$P_n \sim \varphi(P_n) \subseteq \underline{\mathbb{Z}^{n+1}}$$

شماراست

$\underline{a x^n}$ $\quad a \in \mathbb{Z}$

$a \neq 0$

چندجمله‌ای‌ها
ضرایب صحیح
$$= P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$$

مجموعه ریشه‌های یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح،
مجموعه‌ای متناهی است و حداکثر به تعداد
درجه چندجمله‌ای ریشه خواهیم داشت.

حال با توجه به تمرینی از کتاب داریم:

اجتماع شمارا از مجموعه‌های متناهی، شمارا
هم نتیجه می‌شود.

اگر A متناهی باشد، آنگاه $P(A)$ متناهی است.

چون A متناهی است پس $k \in \mathbb{N}$ هست که $A \sim \mathbb{N}_k$.

لذا $P(A) \sim P(\mathbb{N}_k)$. (چرا؟)

با استقرا روی k حکم را ثابت می‌کنیم. برای $k=1$، حکم واضح است.

برای k فرض کنید $P(\mathbb{N}_k)$ متناهی باشد (فرض استقرا)

می‌خواهیم ثابت کنیم $P(\mathbb{N}_{k+1})$ متناهی است.

$$P(N_{k+1}) = \underline{P(N_k)} \cup \{A \cup \{k+1\} \mid A \in P(N_k)\}$$

$$P(N_k) \sim \{A \cup \{k+1\} \mid A \in P(N_k)\}$$