$(\exists\alpha)\varphi_\alpha$

φ_β فرض

$\vdots$

ψ

$\therefore \psi$

حالت (∃ح)

۱) β باید یک متغیر باشد.

۲) β نباید در ψ آزاد باشد.

مثال نادرست.

1- $(\exists x)(Fx \wedge Gy)$ مقدمه

2- $Fx \wedge Gy$ ف

3- Fx (۲)(∧ح)

4- Fx (۲-۴)(۱)(∃ح)

$\alpha = x$

$\beta = x$

از خط ۲ متوجه می‌شویم $\beta = x$ چون β جایگزین α می‌شود. ولی $\beta = x$ در $\psi = Fx$ (خط ۳) آزاد است. این طبق شرط اختصاصی ۲ (∃ح) درست نیست.

۳) β نباید در سطرهای قبل از φ_β آزاد باشد.

مثال نادرست.

1- $(\forall x)(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$ مقدمه

2- $(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$ ۱(∀ح)

3- $Fx \equiv \sim Fx$ ف

4- $(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$ ۳(∃م)

5- $(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$ (۳-۴)(۲)(∃ح)

$\alpha = y$ طبق خط ۲

$\beta = x$ طبق خط ۳

$\psi =$ خط ۴

شرط اختصاصی ۳ برقرار نیست چون φ_β خط سوم است و $\beta = x$ در خط ۲ که قبل از φ_β است آزاد است.

تمرین‌های صفحه ۱۰۱ تا صفحه ۱۰۶.

قواعد فرعی استنتاج در PN

شامل ۳ دسته قاعده می‌شود که همه آنها دوطرفه هستند. بنابراین هم در کل و هم در بخشی از یک فرمول قابل اجرا هستند.

۳_ Bz	ف
۴_ $(\forall y)(Axz \supset \sim By)$	(ح $\forall$)(۱)
۵_ $Axz \supset \sim Bz$	(ح $\forall$)(۴)
۶_ $\sim Axz$	(ر.ت)(۵)(۳)
۷_ $(\forall y)(\sim Cx \supset Axy)$	(ح $\forall$)(۲)
۸_ $\sim Cx \supset Axz$	(ح $\forall$)(۷)
۹_ Cx	(ر.ت)(۸)(۶)
۱۰ $Bz \supset Cx$	(م $\supset$)(۹،۳)
۱۱_ $(\exists y)By \supset Cx$	(م $\exists$)(۱۰)
۱۲_ $(\forall x)[(\exists y)By \supset Cx]$	(م $\forall$)(۱۱)

۲_۳_۵ قواعد فرعی استنتاج در P_N

اینها قواعدی هستند که خود بر اساس قواعد اصلی قابل اثباتند. قواعد مزبور در واقع برخی از استدلالهای درست در P_N محسوب می‌شوند که نظر به کاربرد وسیعی که در منطق محمولات دارند به عنوان قاعده مورد استفاده قرار می‌گیرند. جدول ۵ سه نوع از قواعد فرعی مهم را معرفی می‌کند.

جدول ۵ قواعد فرعی P_N

جابه‌جایی سور (ج.س) :	$\dfrac{\therefore (\forall\alpha)(\forall\beta)\,\phi}{\therefore (\forall\beta)(\forall\alpha)\,\phi}$ $\dfrac{\therefore (\exists\alpha)(\exists\beta)\phi}{\therefore (\exists\beta)(\exists\alpha)\phi}$	نقض سور (ن.س) :	$\dfrac{\therefore \sim(\forall\alpha)\,\phi_\alpha}{\therefore (\exists\alpha)\sim\phi_\alpha}$ $\dfrac{\therefore \sim(\forall\alpha)\sim\phi_\alpha}{\therefore (\exists\alpha)\,\phi_\alpha}$ $\dfrac{\therefore \sim(\exists\alpha)\,\phi_\alpha}{\therefore (\forall\alpha)\sim\phi_\alpha}$ $\dfrac{\therefore \sim(\exists\alpha)\sim\phi_\alpha}{\therefore (\forall\alpha)\,\phi_\alpha}$
پخش سور (پ.س) :	$\dfrac{\therefore (\forall\alpha)(\phi_\alpha \wedge \psi_\alpha)}{\therefore (\forall\alpha)\phi_\alpha \wedge (\forall\alpha)\psi_\alpha}$ $\dfrac{\therefore (\exists\alpha)(\phi_\alpha \vee \psi_\alpha)}{\therefore (\exists\alpha)\,\phi_\alpha \vee (\exists\alpha)\psi_\alpha}$		

انگونه که مشاهده می‌شود قواعد فرعی در جدول ۵ همگی قواعد دو طرفه هستند و

تمرین - استدلال‌های زیر را اثبات کنید.

(۱)

۱. $(\forall x)(Ax \rightarrow Bx)$

۲. $\sim Bd$

$\therefore \sim Ad$

۳. $Ad \rightarrow Bd$ — ۱ (∀ح)

۴. $\sim Ad$ — ۳، ۲ (ر.ت)

---

(۲)

۱. $(\forall x)(Cx \rightarrow Dx)$

۲. $(\forall x)(Ex \rightarrow \sim Dx)$

$\therefore (\forall x)(Ex \rightarrow \sim Cx)$

۳. $Cx \rightarrow Dx$ — ۱ (∀ح)

۴. $Ex \rightarrow \sim Dx$ — ۲ (∀ح)

۵. $\sim Dx \rightarrow \sim Cx$ — عکس ۳

۶. $Ex \rightarrow \sim Cx$ — ۵، ۴ (ق.ش)

۷. $(\forall x)(Ex \rightarrow \sim Cx)$ — ۶ (∀م)

---

(۳)

۱. $(\forall x)(Fx \rightarrow \sim Gx)$

۲. $(\exists x)(Hx \wedge Gx)$

$\therefore (\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$

۳. $Hx \wedge Gx$ — ف

۴. Hx — ۳ (∧ح)

۵. Gx — ۳ (∧ح)

۶. $Fx \rightarrow \sim Gx$ — ۱ (∀ح)

۷. $\sim\sim Gx$ — ۵ (ن.م.ن)

۸. $\sim Fx$ — ۷، ۶ (ر.ت)

۹. $Hx \wedge \sim Fx$ — ۸، ۴ (∧م)

۱۰. $(\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$ — ۹ (∃م)

۱۱. $(\exists x)(Hx \wedge \sim Fx)$ — ۱۰ تا ۲ (∃ح)

---

(۴)

۱. $(\forall x)(Kx \rightarrow Lx)$

۲. $(\forall x)[(Kx \wedge Lx) \rightarrow Mx]$

$\therefore (\forall x)(Kx \rightarrow Mx)$

۳. $Kx \rightarrow Lx$ — ۱ (∀ح)

۴. $(Kx \wedge Lx) \rightarrow Mx$ — ۲ (∀ح)

۵. Kx — ف

۶. Lx — ۵، ۳ (→ح)

۷. $Kx \wedge Lx$ — ۶، ۵ (∧م)

۸. Mx — ۷، ۴ (→ح)

۹. $Kx \rightarrow Mx$ — ۸ تا ۵ (→م)

۱۰. $(\forall x)(Kx \rightarrow Mx)$ — ۹ (∀م)

---

(۵)

۱. $(\forall x)(Ax \rightarrow Cx)$

۲. $(\forall x)(Bx \rightarrow Cx)$

$\therefore (\forall x)[(Ax \vee Bx) \rightarrow Cx]$

۳. $Ax \vee Bx$ — ف

۴. $Ax \rightarrow Cx$ — ۱ (∀ح)

۵. $Bx \rightarrow Cx$ — ۲ (∀ح)

۶. $(Ax \rightarrow Cx) \wedge (Bx \rightarrow Cx)$ — ۵، ۴ (∧م)

۷. $Cx \vee Cx$ — ۶، ۳ (ذ.م.)

۸. Cx — تکرار ۷

۹. $(Ax \vee Bx) \rightarrow Cx$ — ۸، ۳ (→م)

۱۰. $(\forall x)[(Ax \vee Bx) \rightarrow Cx]$ — ۹ (∀م)

۴۶

۶

روش اول

1. $\sim(\forall x)Fx$

$\therefore (\exists x)\sim Fx$

2. $\sim(\exists x)\sim Fx$ — ف
3. $\sim Fx$ — ف
4. $(\exists x)\sim Fx$ — ۳ (∃م)
5. $(\sim(\exists x)\sim Fx) \wedge ((\exists x)\sim Fx)$ — ۴،۲ (∧م) تناقض
6. Fx — ۵تا۳ (~م)
7. $(\forall x)Fx$ — ۶ (∀م)
8. $(\sim(\forall x)Fx) \wedge ((\forall x)Fx)$ — ۷،۱ (∧م) تناقض
9. $(\exists x)\sim Fx$ — ۸تا۲ (~م)

روش دوم

1. $\sim(\forall x)Fx$ — مقدمه
2. $\sim(\exists x)\sim Fx$ — ف
3. $\sim Fx$ — ف
4. $(\exists x)\sim Fx$ — ۳ (∃م)
5. $\sim Fx \to (\exists x)\sim Fx$ — ۴،۳ (→م)
6. $\sim\sim Fx$ — ۵،۲ (رفع تالی)
7. Fx — ۶ (~ح)
8. $(\forall x)Fx$ — ۷ (∀م)
9. $(\forall x)Fx \wedge \sim(\forall x)Fx$ — ۸،۱ (∧م)
10. $\sim\sim(\exists x)\sim Fx$ — ۹تا۲ (~م)
11. $(\exists x)\sim Fx$ — ۱۰ (~ح)

۷

1. $\sim(\exists x)\sim Fx$

$\therefore (\forall x)Fx$

2. $\sim Fx$ — ف
3. $(\exists x)\sim Fx$ — ۲ (∃م)
4. $\sim Fx \to (\exists x)\sim Fx$ — ۳،۲ (→م)
5. $\sim\sim Fx$ — ۴،۱ (رفع تالی)
6. Fx — ۵ (~ح)
7. $(\forall x)Fx$ — ۶ (∀م)

۸

1. $(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$

$\therefore \sim(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$

2. $(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ف
3. $(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ف
4. $(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ف
5. $\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ۴ (∀ح)
6. $((\exists y)(Fx \vee Gy)) \wedge (\sim(\exists y)(Fx \vee Gy))$ — ۵،۳ (∧م)
7. $\sim(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ۶تا۴ (~م)
8. $\sim(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — (۷تا۳)،۲ (∃ح)
9. $(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy) \to \sim(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ۸تا۲ (→م)
10. $\sim\sim(\forall x)\sim(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ۱ (~~م)
11. $\sim(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy)$ — ۱۰،۹ (رفع تالی)

(۹)

1. $(\exists x)\,Hx \vee (\exists y)\,Ky$
2. $(\forall x)(Hx \to Ky)$

$\therefore (\exists y)\,Ky$

3. $(\exists x)\,Hx$ — ف
4. Hx — ف
5. $Hx \to Kx$ — ۲ (∀ح)
6. Kx — ۵،۴ (→ح)
7. $(\exists y)\,Ky$ — ۶ (∃م)
8. $(\exists y)\,Ky$ — ۷ ت ۳ (∃ح)
9. $(\exists y)\,Ky$ — ف
10. $((\exists y)\,Ky) \wedge ((\forall x)(Hx \to Kx))$ — ۹،۲ (∧م)
11. $(\exists y)\,Ky$ — ۱۰ (∧ح)
12. $(\exists y)(Ky)$ — ۱۲ ت ۳، ۱ (∨ح)

(۱۰)

1. $(\exists x)\,Hx \vee (\exists y)\,Ky$
2. $(\forall x)(Hx \to Kx)$

$\therefore (\exists y)\,Ky$

3. $(\exists x)\,Hx$ — ف
4. Hy — ف
5. $Hy \to Ky$ — ۲ (∀ح)
6. Ky — ۵،۴ (→ح)
7. $(\exists y)\,Ky$ — ۶ (∃م)
8. $(\exists y)\,Ky$ — ۷ ت ۳ (∃ح)
9. $(\exists y)\,Ky$ — ف
10. $\sim\sim(\exists y)\,Ky$ — ۹ (ن.م.ن) نقیض مضاعف
11. $\sim(\forall y)\sim Ky$ — ۱۰ (ن.س.ن) نقض سور
12. $(\exists y)\,Ky$ — ۱۱ (ن.س.ن)
13. $(\exists y)\,Ky$ — ۱۲ ت ۳، ۱ (∨ح)

(۱۱)

1. $(\exists x)(Fx \vee Gx)$

$\therefore (\exists x)\,Fx \vee (\exists x)\,Gx$

2. $Fx \vee Gx$ — ف
3. Fx — ف
4. $(\exists x)\,Fx$ — ۳ (∃م)
5. $(\exists x)\,Fx \vee (\exists x)\,Gx$ — ۴ (∨م)
6. Gx — ف
7. $(\exists x)\,Gx$ — ۶ (∃م)
8. $(\exists x)\,Fx \vee (\exists x)\,Gx$ — ۷ (∨م)
9. $(\exists x)\,Fx \vee (\exists x)\,Gx$ — ۸ ت ۲ (∨ح)
10. $(\exists x)\,Fx \vee (\exists x)\,Gx$ — ۹ ت ۱ (∃ح)

۱۲. بعضی اشکال، ۳ ضلعی نیستند. هر مثلث سه ضلعی است. پس بعضی اشکال، مثلث نیستند.

Ax = x شکل است ، Bx = x ۳ ضلعی است

Cx = x مثلث است

$(\exists x)(Ax \wedge \sim Bx)$

$(\forall x)(Cx \to Bx)$

$\therefore (\exists x)(Ax \wedge \sim Cx)$

در تمرین ۳ حل شده است.

۳۸

۱۳- هیچ ایرانی چینی نیست. هر اصفهانی ایرانی است. بعضی آسیایی‌ها چینی هستند. پس بعضی غیر اصفهانی‌ها آسیایی هستند.

Hx = x ایرانی است Ix = x چینی است

Jx = x اصفهانی است Kx = x آسیایی است

1. $(\forall x)(Hx \rightarrow \sim Ix)$
2. $(\forall x)(Jx \rightarrow Hx)$
3. $(\exists x)(Kx \wedge Ix)$

$\therefore (\exists x)(\sim Jx \wedge Kx)$

4. $Kx \wedge Ix$ — ف
5. $Hx \rightarrow \sim Ix$ — ۱ (∀ح)
6. $Jx \rightarrow Hx$ — ۲ (∀ح)
7. $Jx \rightarrow \sim Ix$ — ۶,۵ (ق.ش.)
8. Ix — ۴ (∧ح)
9. Kx — ۴ (∧ح)
10. $\sim\sim Ix$ — ۸ (ن.ن.)
11. $\sim Jx$ — ۱۰و۷ (ر.ت.)
12. $\sim Jx \wedge Kx$ — ۱۱و۹ (∧م)
13. $(\exists x)(\sim Jx \wedge Kx)$ — ۱۲ (∃م)
14. $(\exists x)(\sim Jx \wedge Kx)$ — ۱۳-۳ (∃ح)

۱۴- مارهای کبری و مارهای زنگی در صورتی که عصبانی باشند یا بترسند، نیش می‌زنند. پس مار کبری اگر بترسد نیش می‌زند.

Lx = x مار کبری است Mx = x مار زنگی است

Nx = x عصبانی است Dx = x می‌ترسد

Ax = x نیش می‌زند

1. $(\forall x)(((Lx \vee Mx) \wedge (Nx \vee Dx)) \rightarrow Ax)$

$\therefore (\forall x)((Lx \wedge Dx) \rightarrow Ax)$

2. $[(Lx \vee Mx) \wedge (Nx \vee Dx)] \rightarrow Ax$ — ۱ (∀ح)
3. $\sim[(Lx \vee Mx) \wedge (Nx \vee Dx)] \vee Ax$ — استلزام ۲
4. $\sim(Lx \vee Mx) \vee \sim(Nx \vee Dx) \vee Ax$ — دمرگان ۳
5. $(\sim Lx \wedge \sim Mx) \vee (\sim Nx \wedge \sim Dx) \vee Ax$ — دمرگان ۴
6. $[(\sim Lx \vee \sim Nx) \wedge (\sim Lx \vee \sim Dx) \wedge (\sim Mx \vee \sim Nx) \wedge (\sim Mx \vee \sim Dx)] \vee Ax$ — پخش‌پذیری ۵
7. $(\sim Lx \vee \sim Nx \vee Ax) \wedge (\sim Lx \vee \sim Dx \vee Ax) \wedge (\sim Mx \vee \sim Nx \vee Ax) \wedge (\sim Mx \vee \sim Dx \vee Ax)$ — پخش‌پذیری ۶
8. $\sim Lx \vee \sim Dx \vee Ax$ — ۷ (∧ح)
9. $\sim(Lx \wedge Dx) \vee Ax$ — دمرگان ۸
10. $(Lx \wedge Dx) \rightarrow Ax$ — استلزام ۹
11. $(\forall x)((Lx \wedge Dx) \rightarrow Ax)$ — ۱۰ (∀م)

قضیه در P_N. فرمول φ قضیه‌ای در P_N است اگر و تنها اگر φ بدون هیچ مقدمه‌ای و تنها با استفاده از قواعد استنتاج اثبات شود. به این صورت نوشته می‌شود: $\vdash_{P_N} \varphi$

مثال. قضیه $\vdash_{P_N} \sim[(\forall x)Fx \wedge (\exists x)\sim Fx]$ را اثبات کنید.

۱. $(\forall x)Fx \wedge (\exists x)\sim Fx$	ف	فرض برهان
۲. $(\forall x)Fx$	۱ ($\wedge$ح)	
۳. $(\exists x)\sim Fx$	۱ ($\wedge$ح)	
۴. $\sim(\forall x)Fx$	۳ (ان‌س)	
۵. $(\forall x)Fx \wedge \sim(\forall x)Fx$	۲،۴ ($\wedge$م)	
۶. $\sim[(\forall x)Fx \wedge (\exists x)\sim Fx]$	۱ تا ۵ ($\sim$م)	

انعکاس، تقارن و تعدی.

• یک نسبت در صورتی انعکاسی است که هر شیئی بتواند با خودش نیز آن نسبت را داشته باشد. مانند مساوی بودن. اگر هیچ شیئی نتواند با خود نسبت مذکور را داشته باشد، نسبت نا انعکاسی نامیده می‌شود. نسبتی که نه انعکاسی باشد و نه نا انعکاسی، غیرانعکاسی نامیده می‌شود. بنابراین

Rxy انعکاسی است اگر و تنها اگر $(\forall x)\, Rxx$ مانند رابطه مساوی

Rxy نا انعکاسی است اگر و تنها اگر $(\forall x) \sim Rxx$ مانند رابطه کوچکتر بودن از

Rxy غیر انعکاسی است اگر و تنها اگر $(\exists x)\, Rxx \wedge (\exists y) \sim Ryy$ مانند رابطه کوچکتر مساوی

• نسبت تقارن

Rxy متقارن است اگر و تنها اگر $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx)$

Rxy نامتقارن است اگر و تنها اگر $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow \sim Ryx)$ مثل نسبت کوچکتر بودن

Rxy غیرمتقارن است اگر و تنها اگر متقارن یا نامتقارن نباشد. مثل نسبت برادر بودن x با y.

• نسبت تعدی

Rxy متعدی است اگر و تنها اگر $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz]$

Rxy نا متعدی است اگر و تنها اگر $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \sim Rxz]$

Rxy غیرمتعدی است اگر و تنها اگر متعدی یا نامتعدی نباشد.

مثال. نشان دهید هر نسبت نامتقارن، نا انعکاسی است.

1. $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow \sim Ryx) \therefore (\forall x) \sim Rxx$
2. $(\forall y)(Rxy \rightarrow \sim Ryx)$ ۱ (ح ک)
3. $Rxx \rightarrow \sim Rxx$ ۲ (ح ک)
4. $\sim Rxx \lor \sim Rxx$ ۳ (اس)
5. $\sim Rxx$ ۴ (تک)
6. $(\forall x) \sim Rxx$ ۵ (ح م)

نسبت اینهمانی (=)

با افزودن نماد اینهمانی (=) به L_p، زبان منطق محمولات به زبان جدید گسترش می‌یابد. این زبان جدید، «زبان منطق محمولات و اینهمانی» نامیده می‌شود و با L_{pI} نمایش داده می‌شود.

نسبت اینهمانی یک نسبت دوموضعی است و آن را با I نشان می‌دهیم.

Ixy یعنی $x=y$. به عبارت دیگر x همان y است.

$\sim Ixy$ یعنی $\sim(x=y)$. یعنی x همان y نیست.

- نسبت اینهمانی دارای اوصاف «انعکاس»، «تقارن» و «تعدی» است.

$(\forall x)(x=x)$

$(\forall x)(\forall y)(x=y \rightarrow y=x)$

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x=y \land y=z) \rightarrow (x=z))$

با استفاده از مفهوم اینهمانی، مفاهیمی مانند «حداقل»، «حداکثر» و «دقیقاً» را می‌توان نشان داد.

مثال. حداقل یک شی، صفت F را دارد.

$(\exists x)(Fx \land x=x)$

حداکثر یک شی، صفت F را دارد.

$(\forall x)(\forall y)[(Fx \land Fy) \rightarrow x=y]$

دقیقاً یک شی، صفت F را دارد.
(حداقل و حداکثر)

$(\exists x)[Fx \land (\forall y)(Fy \rightarrow x=y)]$

حداقل دو شی صفت F را دارند.

$$(\exists x)(\exists y)(Fx \wedge Fy \wedge x \neq y)$$

حداکثر دو شی صفت F را دارند.

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(Fx \wedge Fy \wedge Fz) \rightarrow (x = z \vee z = y \vee x = y)]$$

دقیقا دو شی صفت F را دارند.

$$(\exists x)(\exists y)\{Fx \wedge Fy \wedge x \neq y \wedge (\forall z)[Fz \rightarrow (z = x \vee z = y)]\}$$

سیستم نموداری منطق محمولات P_T

• زبان صوری P_T. زبان صوری P_T (واژگان، قواعد ساخت، تعاریف) همان زبان صوری P_N است.

• دستگاه استنتاج P_T. اصول موضوعه P_T تهی است.

قواعد اشتقاق P_T. قواعد DR_1 تا DR_9 در P_T مانند قبل است و قواعد اشتقاق سورها در جدول آمده است.

$(DR10)$	$(\forall\alpha)\varphi\alpha$ $\mid$ $\varphi\beta$	$(DR11)$	$\sim(\forall\alpha)\varphi\alpha$ $\mid$ $(\exists\alpha)\sim\varphi\alpha$
$(DR12)$	$(\exists\alpha)\varphi\alpha$ $\mid$ $\varphi\beta$ β باید متغیر باشد و در مراحل قبل آن متغیر آزاد نباشد.	$(DR13)$	$\sim(\exists\alpha)\varphi\alpha$ $\mid$ $(\forall\alpha)\sim\varphi\alpha$

بررسی درستی یک استدلال مانند سابق است. تنها تفاوت در این است که از این روش فقط می‌توان درستی یک استدلال را نشان داد و برخلاف منطق گزاره‌ها، نمی‌توان نادرستی آن‌ها را نشان داد.

مثال

$$
\begin{array}{ll}
\checkmark\ (\forall x)(Fx \to Gx) & \\
\checkmark\ \sim(\exists x)Gx & \therefore \sim Fa \\
\quad\mid & \\
\sim\sim Fa & \\
\quad\mid & \\
\checkmark\ (\forall x)\sim Gx & \\
\sim Ga & \\
\quad\mid & \\
\checkmark\ Fa \to Ga & \\
\diagup \quad \diagdown & \\
\underline{\sim Fa} \qquad \underline{Ga} &
\end{array}
$$

٥٣

$$(\exists x)[Ax \wedge (\forall y)(By \to Gxy)]$$

$$\therefore (\forall y)[By \to (\exists x)(Ax \wedge Gxy)]$$

$$\sim(\forall y)[By \to (\exists x)(Ax \wedge Gxy)]$$

$$(\exists y)\sim[By \to (\exists x)(Ax \wedge Gxy)]$$

$$\sim[By \to (\exists x)(Ax \wedge Gxy)]$$

$$By$$

$$\sim(\exists x)(Ax \wedge Gxy)$$

$$(\forall x)\sim(Ax \wedge Gxy)$$

$$Ax \wedge (\forall y)(By \to Gxy)$$

$$Ax$$

$$(\forall y)(By \to Gxy)$$

$$By \to Gxy$$

$$\sim By \qquad Gxy$$

$$\sim(Ax \wedge Gxy)$$

$$\sim Ax \qquad \sim Gxy$$

Scanned by CamScanner

ساختار معنایی منطق محمولات

تعبیر L_P. تعبیر I از زبان L_P، با دو جزء ترکیبی مرتب D، V به صورت $I = \langle D, V \rangle$ نمایش داده می‌شود.

۱. D یا دامنه تعبیر که مجموعه‌ای از اشیاء است مثل مجموعه اعداد طبیعی $D = \{1, 2, 3, \dots\}$.

به دامنه تعبیر، عالم سخن نیز گفته می‌شود. شرط لازم هر تعبیر، تهی نبودن دامنه تعبیرات است.

۲. V یا تابع ارزش‌دهی که:

الف) یکی از دو ارزش T یا F را به هر جمله نشانه اسناد می‌دهد.

ب) شیء معینی از دامنه تعبیر را به هر نام جزئی (ثابت یا فردی) اسناد می‌دهد. $V(\overset{\text{نام جزئی}}{B}) \in D$

ج) مجموعه‌ای از اشیاء دامنه تعبیر را به هر محمول نشانه یک‌موضعی و مجموعه‌ای از n تایی‌های مرتب را به هر محمول نشانه n-موضعی اسناد می‌دهد.

مثال. محمول‌های A_1، B_2، C_3 را به ترتیب «زوج بودن»، «بزرگتر بودن از»، و «بین دو چیز بودن» در نظر بگیرید.

اگر D مجموعه اعداد طبیعی اجتماع با $\{0\}$ باشد آنگاه

$$V(A_1) = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$
$$V(B_2) = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots\}$$
$$V(C_3) = \{\langle 1, 0, 2 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \dots\}$$

صدق در یک تعبیر. اگر φ فرمولی از L_P، I تعبیری از این زبان و $\models_I \varphi$ به معنای «در I، φ را صدق‌پذیر می‌کند» باشد، تعبیر I فرمول φ را بر طبق شرایط و قواعد معناشناسی زیر صدق‌پذیر می‌کند.

قواعد معناشناسی L_P.

RS_1. اگر φ یک جمله نشانه باشد، $\models_I \varphi$ اگر و تنها اگر $V(\varphi) = T$.

(تعبیر I فرمول φ را صدق‌پذیر می‌کند اگر و تنها اگر تابع V در تعبیر I ارزش T را به φ اسناد می‌دهد.)

RS_2. $\models_I \varphi_{B_1, \dots, B_n}$ اگر و تنها اگر $\langle V(B_1), \dots, V(B_n) \rangle \in V(\varphi_n)$

(تعبیر I، فرمول اتمی $\varphi_{B_1, \dots, B_n}$ را صدق‌پذیر می‌کند اگر و تنها اگر مجموعه n-تایی مرتب از اشیای دامنه که تابع V به B_1 تا B_n اسناد می‌دهد عضوی از مجموعه n تایی‌های مرتب باشد که تابع به محمول نشانه n-موضعی φ_n اسناد می‌دهد.)

RS۳. $\models_I \sim\varphi$ اگر و تنها اگر $\not\models_I \varphi$.

RS۴. $\models_I (\varphi \wedge \psi)$ اگر و تنها اگر هم $\models_I \varphi$ و هم $\models_I \psi$.

RS۵. $\models_I (\varphi \vee \psi)$ اگر و تنها اگر $\models_I \varphi$ یا $\models_I \psi$.

RS۶. $\models_I (\varphi \rightarrow \psi)$ اگر و تنها اگر $\not\models_I \varphi$ یا $\models_I \psi$.

RS۷. $\models_I (\varphi \equiv \psi)$ اگر و تنها اگر یا $\models_I \varphi$ و $\models_I \psi$ یا $\not\models_I \varphi$ و $\not\models_I \psi$.

RS۸. $\models_I (\forall\alpha)\varphi_\alpha$ اگر و تنها اگر به ازای هر شیء از دامنه تعبیر که به β اسناد داده شود $\models_I \varphi_\beta$.

RS۹. $\models_I (\exists\alpha)\varphi_\alpha$ اگر و تنها اگر به ازای حداقل یک شیء از دامنه تعبیر که به β اسناد داده می‌شود $\models_I \varphi_\beta$.

مثال ۱. شرایط صدق فرمول $(\forall x)(\exists y)Fxy$ را در تعبیر زیر مشخص کنید.

$I = \langle D, V \rangle$

$D = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$V(Fxy) = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$ (مجموعه زوج‌های مرتبی که عضو اول آنها کوچکتر از عضو دوم است.)

RS۸: $\models_I (\forall x)(\exists y)Fxy \iff$ به ازای هر شیء از دامنه D که به x اسناد داده می‌شود $\models_I (\exists y)Fxy$.

RS۹: $\models_I (\exists y)Fxy \iff$ به ازای حداقل یک شیء از اشیای دامنه تعبیر که به y اسناد داده شود $\models_I Fxy$

RS۲: $\models_I Fxy \iff \langle V(x), V(y)\rangle \in V(Fxy)$
$= \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$

بنابراین شرط صدق فرمول $(\forall x)(\exists y)Fxy$ این است: اگر و تنها اگر به ازای هر شیء از اشیای دامنه که به x اسناد داده شود، حداقل یک شیء از اشیای دامنه به y اسناد داده شود که
$\langle V(x), V(y)\rangle \in \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$

• فرض کنید دامنه تعبیر شامل اعضای $\{a, b, \ldots, c\}$ باشد. در این حالت که دامنه متناهی است می‌توان به صورت زیر، سورها را حذف کرد:

$$(\forall\alpha)\varphi_\alpha = \varphi_a \wedge \varphi_b \wedge \cdots \wedge \varphi_c$$

$$(\exists\alpha)\varphi_\alpha = \varphi_a \vee \varphi_b \vee \cdots \vee \varphi_c$$

در صورت تعدد سورها، به ترتیب آنها را یکی یکی حذف کنیم.

ساختار معنایی منطق محمولات و نشان دادن عدم اعتبار استدلال‌ها در منطق محمولات.

در منطق محمولات برخلاف منطق گزاره‌ها، نمی‌توان همیشه عدم اعتبار یک استدلال را نشان داد.

در منطق گزاره‌ها، با ارائه حداقل یک تعبیر که در آن مقدمات استدلال صادق و نتیجه کاذب باشد می‌شد عدم اعتبار یک استدلال را نشان دهیم ولی در منطق محمولات همیشه اینچنین نیست.

استدلال

$(\forall x)(Ax \to Bx)$

$(\forall x)(Cx \to Bx)$

$\therefore (\forall x)(Ax \to Cx)$

را در نظر بگیرید. اگر تعبیری با یک عضو مثل $\{a\}$ در نظر بگیریم می‌توان

$Aa \to Ba$

$Ca \to Ba$

$\therefore Aa \to Ca$

Aa	Ba	Ca
1	1	0

عدم اعتبار این استدلال را نشان داد.

در استدلال

$(\forall x)(Ax \to Bx)$

$(\exists x)(Cx \wedge Bx)$

$\therefore (\forall x)(Ax \to Cx)$

، حالتی با یک عضو $\{a\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$Aa \to Ba$

$Ca \wedge Ba$

$\therefore Aa \to Ca$

معتبر است. ولی در عالم با دو عضو $\{a, b\}$ نامعتبر است.

$(Aa \to Ba) \wedge (Ab \to Bb)$

$(Ca \wedge Ba) \vee (Cb \wedge Bb)$

$\therefore (Aa \to Ca) \wedge (Ab \to Cb)$

Aa	Ab	Ba	Bb	Ca	Cb
1	1	1	1	0	1

بنابراین در کل نامعتبر است.

سوال این است که برای نشان دادن عدم اعتبار یا اعتبار یک استدلال تا کجا باید پیش رفت.

جواب. اگر استدلال دارای n محمول نشانه یک موضعی باشد و در تعبیری با 2^n عضو معتبر باشد، در هر تعبیر دیگری نیز معتبر است.

تمرین ص ۱۴۵ و ص ۱۴۶

تعابیر n موضعی مانند تعابیر یک موضعی نیستند و گاهی یک استدلال ممکن است با وجود سازگار بودن، در هیچ تعبیر متناهی صادق نباشد.

مثال. فرض کنید نسبت دو موضعی H، متعدی، نامتقارن و ناانعکاسی باشد. آنگاه فرمول زیر در هیچ تعبیر متناهی صادق نیست.

$(\forall x)(\exists y)Hxy \qquad (*)$

فرض کنید تعبیر (*) یک عضوی باشد. بنابراین داریم $(\exists y)Hay$. چون H ناانعکاسی است، از فرمول اخیر نمی‌توان Haa را نتیجه گرفت. بنابراین برای صدق این فرمول باید عضو دیگری مانند b موجود باشد.

اگر تعبیر دارای عضو b هم باشد آنگاه از (*) می‌توان $(\exists y)Hby$ را نتیجه گرفت. چون H ناانعکاسی است، از فرمول اخیر نمی‌توان Hbb را نمی‌توان نتیجه گرفت و با داشتن Hab از یک طرف و نامتقارن بودن H از طرف دیگر، Hba را نیز نمی‌توان استنتاج کرد. پس فرمول اخیر باید عضو دیگری مانند c را داشته باشد. در این صورت با داشتن H_{ab} و H_{bc} و متعدی بودن H، می‌توان Hac را نتیجه گرفت. با داشتن عضو c می‌توان از (*)، فرمول $(\exists y)H_{cy}$ را نتیجه گرفت.

با داشتن Hac و H_{bc} از یک طرف و نامتقارن و ناانعکاسی بودن H از طرف دیگر، هیچ کدام از H_{ca}، H_{cb} و H_{cc} را نمی‌توان نتیجه گرفت. بنابراین فرمول اخیر باید عضو چهارمی چون d در تعبیر داشته باشد و ...

بنابراین تعبیری صادق با تعداد متناهی عضو برای فرمول (*) موجود نیست. حال اگر فرمول در زنجیره اعداد طبیعی $\{0,1,2,\ldots\}$ در نظر گرفته شود می‌توان سازگاری آن را نشان داد. تابع گزاره‌ای Hxy را می‌توان «x کوچکتر از y» معنا کرد.

فراقضایای منطق محمولات

- فراقضیه استنتاجی (صحت). در منطق محمولات، هر استدلال درست، یک استدلال معتبر است.

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$$

- فراقضیه سازگاری. منطق محمولات سازگار است.

- فراقضیه تمامیت. هر استدلال معتبر، استدلالی درست است.

- فراقضیه تصمیم ناپذیری. منطق محمولات مرتبه اول تصمیم ناپذیر است.

منطق محمولات مرتبه اول یک موضعی، تصمیم پذیر است و عدم اعتبار فرمول هایی را که دارای n محمول یک موضعی هستند حداکثر با عالمی شامل 2^n عضو می توان ارزیابی کرد.
ولی تصمیم پذیری کلاس سایر فرمول ها با محمول های چندموضعی که تعداد مواضع بیشتر از ۱ است قابل تصمیم نیست. این حکم اولین بار توسط آلونزو چرچ در ۱۹۳۶ اثبات شده و قضیه چرچ معروف است.