

قواعد التكامل الأساسية :

$$\textcircled{1} \int a \, dx = ax + c$$

$$\textcircled{2} \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\textcircled{3} \int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\textcircled{5} \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\textcircled{6} \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\textcircled{7} \int \sec^r x \, dx = \tan x + c$$

$$\textcircled{8} \int \csc^r x \, dx = -\cot x + c$$

$$\textcircled{9} \int \frac{dx}{x^{r+1}} = \tan^{-1} x + c = -\cot^{-1} x + c$$

$$\textcircled{10} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^r}} = \ln(x + \sqrt{1+x^r}) + c$$

$$\textcircled{11} \int \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) + c$$

$$\textcircled{12} \int \csc x \, dx = -\ln(\csc x + \cot x) + c$$

$$\textcircled{13} \int \sin^r x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{r} \, dx = \frac{1}{r} (x - \frac{1}{r} \sin^r x) + c$$

$$\textcircled{14} \int \cos^r x \, dx = \int \frac{1 + \sin^2 x}{r} \, dx = \frac{1}{r} (x + \frac{1}{r} \sin^r x) + c$$

روش تغییر متغیر :

از این روش بیشتر زمانی استفاده می‌کنیم که مشتق عبارت مورد تغییر متغیر در انتگرال وجود داشته باشد.

$$\int f(g(x)) g'(x) dx \xrightarrow[\substack{g(x)=u \\ du=g'(x)dx}]{\substack{g(x)=u \\ du=g'(x)dx}} \int f(u) du$$

برخی از انتگرال‌های پرکاربرد که با تغییر متغیر بدست می‌آیند :

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C \quad , \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2x^2+b^2} dx = \frac{1}{ab} \tan^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right) + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \xrightarrow[\substack{u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x}}]{\substack{u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x}}} \int u du = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

روش جزء به جزء :

از این روش بیشتر زمانی استفاده می‌کنیم که ضرب دو تابع غیر هم جنس و غیر قابل ضرب را داشته باشیم مثل

$$\int x e^x dx, \int x^2 \sin x dx, \int x \ln x dx, \dots$$

که تابع را u و تابع دیگر را dv انتخاب می‌کنیم و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$I = \int x^n \ln x \, dx \quad n \neq -1 \rightarrow \begin{matrix} u = \ln x \\ dv = x^n \, dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{matrix}$$

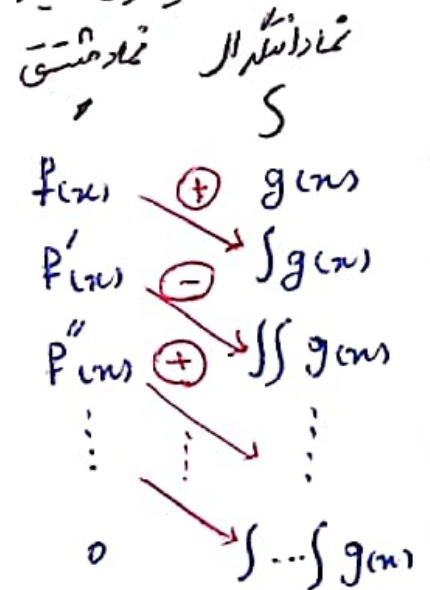
$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int \underbrace{x^{n+1} \cdot \frac{dx}{x}}_{x^n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

روش جدول استلار گیری:

در روش استلار جدولی که می‌آوریم، با توجه به نوع تابع‌ها، می‌توانیم از روش سری‌بندی یا جواب استلار استفاده کنیم.

$$I = \int \underbrace{f(x)}_{\text{تابع‌های درجه‌n}} \underbrace{g(x)}_{e^{ax}, \sin ax, \cos ax} \, dx$$

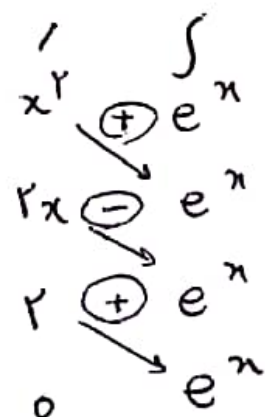


$$I = f(x) \int g(x) - f'(x) \int \int g(x) + \dots$$

بعضی مثال:

$$I = \int x^r e^x \, dx$$

$$I = x^r e^x - r x e^x + r e^x + C$$



روش تجزیه کسرها :

از این روش برای حل انتگرال توابع کسری لویضیم استفاده $\frac{f(x)}{g(x)}$ استفاده می کنیم که $f(x)$ و $g(x)$ هر دو چند جمله ای باشند .

برای استفاده از این روش ابتدا ضرایب به عامل های درجه اول و دوم ($\Delta < 0$) تجزیه کرده و با توجه به عامل های موجود در ضرایب می توان $\frac{f(x)}{g(x)}$ را به مجموع چند کسر تبدیل نمود

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = I$$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{(A+B)x + (A-B)a}{x^2 - a^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ a(A-B)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln(x-a) - \ln(x+a))$$

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{x-a}{x+a} + C = -\frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} + C$$