

分类号: TM888

单位代码: 10335

密 级:

学 号: 21935006

浙江大学

硕士学位论文



中文论文题目: \*\*\*\*\*

英文论文题目: \*\*\*\*\*

申请人姓名: 袁淳

指导教师: 杨勋年

专业名称: 应用数学

研究方向: 物理模拟

所在学院: 数学科学学院

论文提交日期: 二〇一九年四月

\*\*\*\*\*



论文作者签名: \_\_\_\_\_

指导教师签名: \_\_\_\_\_

论文评阅人 1:	陈某某	教授	XX 大学
评阅人 2:	张某某	教授	XX 大学
评阅人 3:	李某某	教授	XX 大学
评阅人 4:	吴某某	教授	XX 大学
评阅人 5:	杨某某	教授	XX 大学

答辩委员会主席:	郑某某	教授	浙江大学
委员 1:	郑某某	教授	浙江大学
委员 2:	刘某某	教授	浙江大学
委员 3:	程某某	教授	浙江大学
委员 4:	杨某某	教授	浙江大学
委员 5:	吴某某	教授	浙江大学

答辩日期: \_\_\_\_\_ 二〇一九年六月

\*\*\*\*\*



**Author's signature:** \_\_\_\_\_

**Supervisor's signature:** \_\_\_\_\_

External Reviewers: \_\_\_\_\_  
Moumou Chen Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Zhang Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Li Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Wu Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Yang Prof. XX University  
\_\_\_\_\_

Examining Committee Chairperson:  
\_\_\_\_\_ Moumou Zheng Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_

Examining Committee Members:  
\_\_\_\_\_ Moumou Zheng Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Liu Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Chen Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Yang Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Wu Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_

Date of oral defence: \_\_\_\_\_ June 2019 \_\_\_\_\_

## 浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 浙江大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：

签字日期：        年        月        日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：

导师签名：

签字日期：        年        月        日        签字日期：        年        月        日

## 致 谢

感谢我的爹，感谢我的妈，感谢那个亲爱的他。

## 摘 要

近年来,物质点法在物理仿真领域取得了巨大的进步,从电影行业,地球物理,化学模拟都带来了巨大的革新,展现出其强大的生命力。得益于其算法框架的包容性,多种物理现象能够同时在一个系统里求解,带来一些过去从未成功模拟过的结果。然而,物质点法相较于其他算法,在流体解算上面带来许多不真实的现象,尤其是在流体粘性和表面张力的部分。由于物质点法对于物质的表示形式是粒子,难以定义表面,这给表面张力的模拟带来了巨大的困难,同时因为物质点法本身对时间步长要求严格,为了得到和表面张力耦合稳定的结果,经常在方程中加入阻尼项以及使用隐式格式,而这更加剧了物质点法本身数值粘性,往往使最后的模拟结果不尽如人意。

本文研究了一种在物质点法框架下计算流体表面张力的方法,其主要思想是利用点云重构流体表面用于计算表面张力,同时改进了表面粒子和内部粒子插值格式以及表面张力项的离散格式,提高了辛积分的稳定性,其相比于纯隐式格式降低了数值耗散,缓解流体粘性問題。本文的主要工作如下:

(一)结合物质点法的计算流水线,提出了新的基于几何迭代法的流体表面重构方法。利用物质点法本身的数据结构,在不增大内存负担的情况下,做到高速并行,并在理论上证明了该迭代格式的收敛性。同时给出相应的法向估计算法,相比于直接通过梯度或者网格求解法向,计算效率更高。

(二)基于工作(一)改进了表面张力数值计算格式。通过采样重建得到的表面网格,获取表面积分粒子用于计算表面张力,并通过新的数值离散方式,给出的表面张力项易于实现。同时给出新的插值格式,让表面张力能够更快的传导到内部粒子,提高了辛积分格式的稳定性。

**关键词:** 物质点法; 流体模拟; 表面张力; 表面重构

## Abstract

Since 2001, with the implementation of Basic Education Curriculum Reform, in our reform process, the policy of "many editions under one standard" makes our country's math education a deep-going transformation. So study textbooks become focal point in theory and practice math education. Internal research on American math education contains: studying for standards, the actual class local studies, lack of total and complete analyzing the American school math textbook.

**Keywords:** Education; Chinese; American; Mathematics in Primary School; Text-book

## 图 目 录

2.1	.....	2
2.2	形变与形变梯度 .....	4



表 目 录

## 目 录

致谢 . . . . .	I
摘要 . . . . .	II
Abstract . . . . .	III
图目录 . . . . .	IV
表目录 . . . . .	V
目录	
1 绪论 . . . . .	1
1.1 问题背景 . . . . .	1
1.2 相关工作 . . . . .	1
1.3 研究内容 . . . . .	1
1.4 本章小结 . . . . .	1
2 连续介质力学 . . . . .	2
2.1 引言 . . . . .	2
2.2 欧拉视角下的动力学 . . . . .	2
2.2.1 欧拉视角下的质量守恒定律 . . . . .	2
2.2.2 欧拉视角下的动量守恒 . . . . .	3
2.2.3 欧拉视角下的动量守恒定律 . . . . .	3
2.3 拉格朗日视角下的动力学 . . . . .	3
2.3.1 形变映射, 形变梯度, 速度 . . . . .	4
2.3.2 拉格朗日视角下的质量守恒 . . . . .	5
2.3.3 拉格朗日视角下的动量守恒 . . . . .	5
2.4 弱可压缩流体 . . . . .	6
2.5 表面张力 . . . . .	6
3 表面重建 . . . . .	7
3.1 Marching cubes . . . . .	7
3.2 LSIPIA . . . . .	7
3.2.1 收敛性证明 . . . . .	7
4 数值方法 . . . . .	8
4.1 离散控制方程 . . . . .	8

4.2 计算流水线 . . . . .	8
5 总结与展望 . . . . .	9
5.1 本文工作总结 . . . . .	9
5.2 未来工作展望 . . . . .	9
参考文献 . . . . .	10
作者简介 . . . . .	11

# **1 绪论**

## **1.1 问题背景**

## **1.2 相关工作**

## **1.3 研究内容**

## **1.4 本章小结**

## 2 连续介质力学

### 2.1 引言

连续介质力学是本文构建控制方程的理论基础。基于连续介质力学，我们刻画流体以及流体表面，并从两个视角来描述物体运动，以此构建动力学方程。为了构建完整的控制方程，我们还需要给出本构模型，即形变与应力的关系，这里我们给出对应的流体的弱可压缩模型以及表面张力模型。

### 2.2 欧拉视角下的动力学

欧拉视角，即物理量的定义域为  $\mathbb{R}^3$ ，对物体的刻画由空间中的密度场给出。与拉格朗日视角的区别我们将在 2.3 小节中给出。

#### 2.2.1 欧拉视角下的质量守恒定律

记  $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为空间中随时间变化的密度场， $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  为空间中随时间变化的速度场，此处默认向量为列向量。

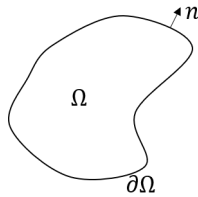


图 2.1

现在考虑一个闭区域  $\Omega$ ， $\Omega$  的边界记为  $\partial\Omega$ ，边界上的外法向记为  $n$ ，同时假定  $\rho$  和  $v$  在  $\Omega$  的一个开邻域内足够光滑。根据质量守恒，我们有  $\Omega$  上质量的变化率为  $\partial\Omega$  上质量的流出率和流入率之和。即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dx &= - \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot n ds \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx &= - \int_{\partial\Omega} \text{div}(\rho v) dx \end{aligned}$$

如果  $\rho$  在  $\mathbb{R}^3$  上都能达到足够光滑，那么由  $\Omega$  的任意性，可知

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

#### 2.2.2 欧拉视角下的动量守恒

由于  $\Omega$  的任意性，由上式可以得到

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \rho(x, t) + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (2.2)$$

### 2.2.3 欧拉视角下的动量守恒定律

现在考虑闭区域  $\Omega$  上的动量变化。根据连续介质力学中的牛顿运动定律 [\*\*], 闭区域  $\Omega$  上的动量变化可以分为三部分, 第一部分为物质流入流出  $\Omega$  导致的动量变化, 第二部分为作用在  $\Omega$  边界上的力导致的动量变化, 第三部分为作用在  $\Omega$  内部物质上的力 (一般为重力) 产生的作用变化。即

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \int_{\Omega} \rho v dx = - \int_{\partial\Omega} \rho v (v \cdot n) ds + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n ds + \int_{\Omega} \rho g dx \quad (2.3)$$

在 (2.2) 式中,  $g$  为重力加速度,  $\sigma$  为柯西应力 [\*\*]。特别的,  $\sigma$  是一个三阶对称矩阵, 其对称性来源于角动量守恒 [\*\*], 我们将在 2.4 节中从另一个角度说明其对称性。

由于 (2.2) 式中  $\Omega$  选择的任意性, 我们有

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} (\rho v) = -\operatorname{div}(\rho v^T v) + \operatorname{div}(\sigma) + \rho g \quad (2.4)$$

矩阵函数散度  $\operatorname{div}$  定义如下:

$$\operatorname{div}(A)_i := \sum_j \partial_j A_{ij}$$

(2.2) 式变形为

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} (\rho v) + \operatorname{div}(\rho v^T v) = \operatorname{div}(\sigma) + \rho g \quad (2.5)$$

## 2.3 拉格朗日视角下的动力学

在上一节中, 我们根据质量守恒和动量守恒得到了两个方程 (方程 (2.1) 与方程 (2.4)), 非常重要的一点是, 上述方程并没有使用任何有关自然状态—材料在不施加外力的静止状态—的信息。在之后的章节中, 我们将假定,  $t = 0$  是处于自然状态, 并且只考虑  $t \geq 0$  的情况。

假定在自然状态下 ( $t = 0$ ), 材料占据的空间为  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ , 此时也称  $\Omega_0$  为参考构型。对于任意给定的  $t \in (0, +\infty)$ , 此时材料占据的空间为  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ , 相对于参考构型  $\Omega_0$ , 称  $\Omega_t$  为当前构型。

拉格朗日视角和欧拉视角的区别主要是函数的定义域。在上一节中, 我们所有函数的定义域都在  $\mathbb{R}^3$  上, 而本节我们将把视角限制在材料上, 例如对于任意时刻  $t$ , 有  $\Omega_t$  上的实值函数,  $f(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ 。

### 2.3.1 形变映射，形变梯度，速度

为了描述材料相对于参考构型发生的形变，我们引入形变映射

$$\phi : \Omega_0 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

，形变映射同时也给出了物体的运动轨迹。为了方便，我们记  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ ，实际上我们还假定  $\{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$  构成了一个单参数变换群，并且关于  $t$  至少二阶光滑，关于  $X$  至少有连续的一阶导数。

有了形变映射，我们可以引入对局部形变的刻画，即形变梯度  $F(X, t) := \frac{\partial \phi_t(X)}{\partial X}$ 。实际上，形变梯度  $F(X, t)$  还可以视为  $X$  处切空间的映射，即

$$F(X, t) : T_X \Omega_0 \rightarrow T_x \Omega_t$$

对于任意的  $\partial_X \in T_X \Omega_0$ ,  $\partial_x = F(X, t)[\partial_X] \in T_x \Omega_t$ ，即形变梯度将  $X$  点的切向量  $\partial_X$  经过平移起始点，旋转方向，拉伸长度后得到  $x$  点的切向量  $\partial_x$ ，如图 2.2 所示。

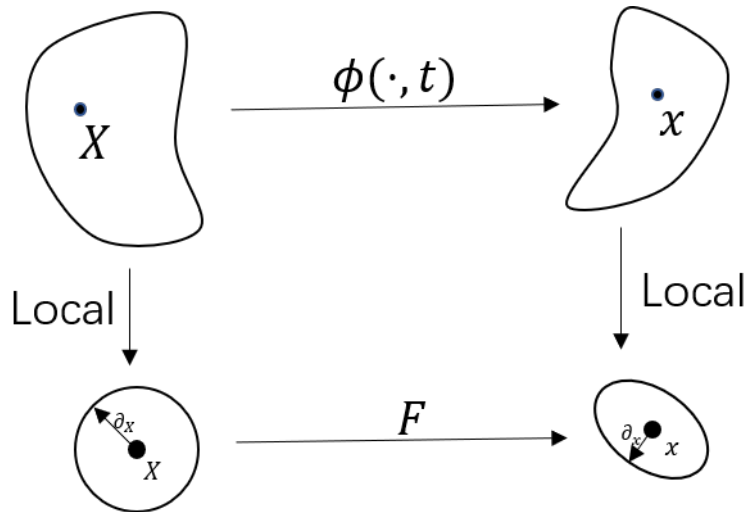


图 2.2 形变与形变梯度

同样的，形变映射作为单参数变换群，自然的导出速度的定义  $V(X, t) := \frac{\partial \phi_t(X)}{\partial t}$ 。值得注意的是， $V(X, t)$  的定义域是在  $\Omega_0$  上，其值域是一个起始点在  $\Omega_t$  上的一个三维列向量。

### 2.3.2 拉格朗日视角下的质量守恒

在引入了形变  $\phi_t$  之后，很自然的有  $\hat{\Omega}_t = \{\phi_t(X) : X \in \hat{\Omega}_0 \subset \Omega_0\}$  (简记为  $\phi_t(\hat{\Omega}_0)$ )，且  $\hat{\Omega}_t \subset \Omega_t$ ，根据质量守恒，形变不会影响质量，即

$$\int_{\hat{\Omega}_0} \rho(x, 0) dx = \int_{\hat{\Omega}_t} \rho(x, t) dx = \int_{\phi_t(\hat{\Omega}_0)} \rho(x, t) dx$$

如果我们将  $\hat{\Omega}_t$  的质量记为  $M[\hat{\Omega}_t]$ , 则有  $\frac{d}{dt}M[\hat{\Omega}_t] = 0$ 。而

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{\Omega}_0)} \rho(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}_0} \rho(\phi_t(X), t) \det(F(X, t)) dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_0} \frac{d}{dt} [\rho(\phi_t(X), t) \det(F(X, t))] dX \\ &= 0\end{aligned}$$

记  $R(X, t) := \rho(\phi_t(X), t)$ ,  $J(X, t) := \det(F(X, t))$ , 则根据  $\hat{\Omega}_0$  的任意性, 有  $\frac{d}{dt}[R(X, t)J(X, t)] = 0$ , 即

$$R(X, t)J(X, t) = R(X, 0) \quad (2.6)$$

### 2.3.3 拉格朗日视角下的动量守恒

在拉格朗日视角下,  $\hat{\Omega}_{t_0}$  的动量变化可以表示为作用在  $\hat{\Omega}_{t_0}$  边界上的力以及作用在  $\hat{\Omega}_{t_0}$  上的力之和。即

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \int_{\hat{\Omega}_t} \rho(x, t) v(x, t) dx = - \int_{\partial \hat{\Omega}_{t_0}} \rho v(v \cdot n) ds + \int_{\partial \hat{\Omega}_{t_0}} \sigma \cdot n ds + \int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \rho g dx \quad (2.7)$$

其中 (2.6) 式子的左边有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \int_{\hat{\Omega}_t} \rho(x, t) v(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \int_{\hat{\Omega}_0} \rho(\phi_t(X), t) v(\phi_t(X), t) J(X, t) dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} [\rho(\phi_t(X), t) v(\phi_t(X), t) J(X, t)] dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} [\rho(\phi_t(X), t) v(\phi_t(X), t) J(X, t)] dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_0} v(\phi_{t_0}(X), t_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} [\rho(\phi_t(X), t) J(X, t)] \\ &\quad + \rho(\phi_{t_0}(X), t_0) J(X, t_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} v(\phi_{t_0}(X), t_0) dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_0} v(\phi_{t_0}(X), t_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} R(X, 0) \\ &\quad + \rho(\phi_{t_0}(X), t_0) J(X, t_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} v(\phi_t(X), t) dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_0} \rho(\phi_{t_0}(X), t_0) J(X, t_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} v(\phi_t(X), t) dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \rho(x, t_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} v(\phi_{t,t_0}(x), t) dx\end{aligned}$$

这里  $\phi_{t,t_0} = \phi_t \cdot \phi_{t_0}^{-1}$ , 带入 (2.6) 中就有

$$\int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \rho(x, t_0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} v(\phi_{t,t_0}(x), t) dx = \int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \operatorname{div}(\sigma) dx + \int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \rho g dx$$



## 2.4 弱可压缩流体

## 2.5 表面张力

### **3 表面重建**

#### **3.1 Marching cubes**

#### **3.2 LSIPIA**

##### 3.2.1 收敛性证明

## 4 数值方法

### 4.1 离散控制方程

### 4.2 计算流水线

## **5 总结与展望**

### **5.1 本文工作总结**

### **5.2 未来工作展望**

## 参考文献

- [1] Ernest P . The philosophy of mathematics education by Paul Ernest[J]. Social Epistemology.
- [2] Bishop A J. Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1988, 20(4):195.

## 作者简历

张某某，男，19XX 年，汉族，浙江杭州人。20XX 年考入浙江大学数学科学学院（信息与计算科学专业），20XX 年本科毕业，获得理学学士学位。20XX 年进入浙江大学数学科学学院计算数学专业研究生学习至今。

### 1. 工作经历

- 20XX-20XX 年，在 XX 公司 XX 部门 XX 岗位
- 20XX-20XX 年，在 XX 公司 XX 部门 XX 岗位

### 2. 参与的项目

- 20XX-20XX 年，参与 XXXX 项目
- 20XX-20XX 年，负责 XXXX 项目

### 3. 攻读学位期间发表的论文

- 猪八戒, 猪悟能, 天蓬元帅, 等. 论流体食物的持久保存 [D]. 硕士学位论文. 北京: 广寒宫大学, 2005