

分类号: TM888

单位代码: 10335

密 级:

学 号: 21935006

浙江大学

硕士学位论文



中文论文题目: \*\*\*\*\*

英文论文题目: \*\*\*\*\*

申请人姓名: 袁淳

指导教师: 杨勋年

专业名称: 应用数学

研究方向: 物理模拟

所在学院: 数学科学学院

论文提交日期: 二〇一九年四月

\*\*\*\*\*



论文作者签名: \_\_\_\_\_

指导教师签名: \_\_\_\_\_

论文评阅人 1:	陈某某	教授	XX 大学
评阅人 2:	张某某	教授	XX 大学
评阅人 3:	李某某	教授	XX 大学
评阅人 4:	吴某某	教授	XX 大学
评阅人 5:	杨某某	教授	XX 大学

答辩委员会主席:	郑某某	教授	浙江大学
委员 1:	郑某某	教授	浙江大学
委员 2:	刘某某	教授	浙江大学
委员 3:	程某某	教授	浙江大学
委员 4:	杨某某	教授	浙江大学
委员 5:	吴某某	教授	浙江大学

答辩日期: \_\_\_\_\_ 二〇一九年六月

\*\*\*\*\*



**Author's signature:** \_\_\_\_\_

**Supervisor's signature:** \_\_\_\_\_

External Reviewers: \_\_\_\_\_  
Moumou Chen Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Zhang Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Li Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Wu Prof. XX University  
\_\_\_\_\_ Moumou Yang Prof. XX University  
\_\_\_\_\_

Examining Committee Chairperson:  
\_\_\_\_\_ Moumou Zheng Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_

Examining Committee Members:  
\_\_\_\_\_ Moumou Zheng Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Liu Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Chen Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Yang Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_ Moumou Wu Prof. Zhejiang University  
\_\_\_\_\_

Date of oral defence: \_\_\_\_\_ June 2019 \_\_\_\_\_

## 浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得浙江大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：

签字日期：

年

月

日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解浙江大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权浙江大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：

导师签名：

签字日期：

年

月

日

签字日期：

年

月

日

## 致 谢

感谢我的爹，感谢我的妈，感谢那个亲爱的他。

## 摘 要

近年来,物质点法在物理仿真领域取得了巨大的进步,从电影行业,地球物理,化学模拟都带来了巨大的革新,展现出其强大的生命力。得益于其算法框架的包容性,多种物理现象能够同时在一个系统里求解,带来一些过去从未成功模拟过的结果。然而,物质点法相较于其他算法,在流体解算上面带来许多不真实的现象,尤其是在流体粘性和表面张力的部分。由于物质点法对于物质的表示形式是粒子,难以定义表面,这给表面张力的模拟带来了巨大的困难,同时因为物质点法本身对时间步长要求严格,为了得到和表面张力耦合稳定的结果,经常在方程中加入阻尼项以及使用隐式格式,而这更加剧了物质点法本身数值粘性,往往使最后的模拟结果不尽如人意。

本文研究了一种在物质点法框架下计算流体表面张力的方法,其主要思想是利用点云重构流体表面用于计算表面张力,同时改进了表面粒子和内部粒子插值格式以及表面张力项的离散格式,提高了辛积分的稳定性,其相比于纯隐式格式降低了数值耗散,缓解流体粘性問題。本文的主要工作如下:

(一)结合物质点法的计算流水线,提出了新的基于几何迭代法的流体表面重构方法。利用物质点法本身的数据结构,在不增大内存负担的情况下,做到高速并行,并在理论上证明了该迭代格式的收敛性。同时给出相应的法向估计算法,相比于直接通过梯度或者网格求解法向,计算效率更高。

(二)基于工作(一)改进了表面张力数值计算格式。通过采样重建得到的表面网格,获取表面积分粒子用于计算表面张力,并通过新的数值离散方式,给出的表面张力项易于实现。同时给出新的插值格式,让表面张力能够更快的传导到内部粒子,提高了辛积分格式的稳定性。

**关键词:** 物质点法; 流体模拟; 表面张力; 表面重构

## Abstract

Since 2001, with the implementation of Basic Education Curriculum Reform, in our reform process, the policy of "many editions under one standard" makes our country's math education a deep-going transformation. So study textbooks become focal point in theory and practice math education. Internal research on American math education contains: studying for standards, the actual class local studies, lack of total and complete analyzing the American school math textbook.

**Keywords:** Education; Chinese; American; Mathematics in Primary School; Text-book

## 图 目 录

2.1	区域符号示例 . . . . .	2
2.2	形变与形变梯度 . . . . .	4
3.1	二维情况 $\mathcal{S}(v)$ (左) 与 $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ (右) . . . . .	11
3.2	二维点云轮廓提取图示 . . . . .	12
3.3	二维情况的 $r$ 与 $h$ 的关系 . . . . .	12
3.4	Marching cube 列表 . . . . .	13
3.5	二次标准 B-样条基函数 . . . . .	15
3.6	蓝色正方形为其紧支集能够覆盖 $x$ 的自由度, $x_{i_0j_0}$ 为左下角格点坐标 . . . . .	17
4.1	连续体离散化成点云 . . . . .	26
4.2	红色点 $s$ 为采样获得的表面点集 $\mathcal{S}$ . . . . .	27
4.3	粒子上的信息 . . . . .	28
4.4	格点上的信息 . . . . .	29
4.5	箭头为偏移方向, 红色点为表面粒子 $s \in \mathcal{S}$ , 箭头起始端为 $p_s \in \mathcal{V}$ . . . . .	29
4.6	红色点为表面粒子 $s \in \mathcal{S}$ , 红色点通过虚线所连的蓝色点为离 $s$ 最近的内部点 $p_s \in \mathcal{V}$ , 橙色点 $o_s \in \mathcal{O}$ 为新嵌入内部点 . . . . .	30
4.7	计算流水线 . . . . .	33



## 表 目 录

## 目 录

致谢 . . . . .	I
摘要 . . . . .	II
Abstract . . . . .	III
图目录 . . . . .	IV
表目录 . . . . .	V
目录	
1 绪论 . . . . .	1
1.1 问题背景 . . . . .	1
1.2 相关工作 . . . . .	1
1.3 研究内容 . . . . .	1
1.4 本章小结 . . . . .	1
2 连续介质力学 . . . . .	2
2.1 引言 . . . . .	2
2.2 欧拉视角下的动力学 . . . . .	2
2.2.1 欧拉视角下的质量守恒定律 . . . . .	2
2.2.2 欧拉视角下的动量守恒定律 . . . . .	2
2.3 拉格朗日视角下的动力学 . . . . .	3
2.3.1 形变映射, 形变梯度, 速度 . . . . .	3
2.3.2 拉格朗日视角下的质量守恒 . . . . .	5
2.3.3 拉格朗日视角下的动量守恒 . . . . .	5
2.4 本构关系 . . . . .	7
2.5 本章小结 . . . . .	10
3 表面重建 . . . . .	11
3.1 引言 . . . . .	11
3.2 粒子水平集方法 . . . . .	11
3.3 水平集网格提取 . . . . .	12
3.4 LSIPIA . . . . .	14
3.4.1 隐式曲面的渐进迭代逼近 . . . . .	14
3.4.2 快速法向计算 . . . . .	17

3.5 本章小结 . . . . .	22
4 数值方法 . . . . .	23
4.1 引言 . . . . .	23
4.2 离散控制方程 . . . . .	23
4.2.1 时间离散化 . . . . .	23
4.2.2 弱形式 . . . . .	24
4.2.3 空间离散化 . . . . .	26
4.2.4 数据表示与储存 . . . . .	28
4.3 数值修正 . . . . .	28
4.3.1 表面重建与粒子属性调整 . . . . .	29
4.3.2 粒子网格信息转换 . . . . .	30
4.3.3 网格上力的计算 . . . . .	31
4.4 计算流程 . . . . .	32
4.5 实验结果 . . . . .	32
5 总结与展望 . . . . .	34
5.1 本文工作总结 . . . . .	34
5.2 未来工作展望 . . . . .	34
参考文献 . . . . .	35
作者简历 . . . . .	36

# 1 绪论

## 1.1 问题背景

## 1.2 相关工作

## 1.3 研究内容

## 1.4 本章小结

## 2 连续介质力学

### 2.1 引言

连续介质力学是本文构建控制方程的理论基础。基于连续介质力学，我们刻画流体以及流体表面，并从两个视角来描述物体运动，以此构建动力学方程。为了构建完整的控制方程，我们还需要给出本构模型，即形变与应力的关系，这里我们给出对应的流体的弱可压缩模型以及表面张力模型。

### 2.2 欧拉视角下的动力学

欧拉视角，即物理量的定义域为  $\mathbb{R}^3$ ，对物体的刻画由空间中的密度场给出。与拉格朗日视角的区别我们将在 2.3 小节中给出。

#### 2.2.1 欧拉视角下的质量守恒定律

记  $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为空间中随时间变化的密度场， $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  为空间中随时间变化的速度场，此处默认向量为列向量。

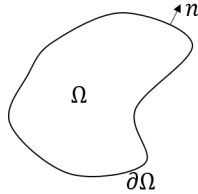


图 2.1 区域符号示例

现在考虑一个闭区域  $\Omega$ ， $\Omega$  的边界记为  $\partial\Omega$ ，边界上的外法向记为  $n$ ，同时假定  $\rho$  和  $v$  在  $\Omega$  的一个开邻域内足够光滑。根据质量守恒，我们有  $\Omega$  上质量的变化率为  $\partial\Omega$  上质量的流出率和流入率之和。即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dx &= - \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot n ds \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx &= - \int_{\partial\Omega} \text{div}(\rho v) dx \end{aligned}$$

如果  $\rho$  在  $\mathbb{R}^3$  上都能达到足够光滑，那么由  $\Omega$  的任意性，可知

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

#### 2.2.2 欧拉视角下的动量守恒定律

现在考虑闭区域  $\Omega$  上的动量变化。根据连续介质力学中的牛顿运动定律 [\*\*]，闭区域  $\Omega$  上的动量变化可以分为三部分，第一部分为物质流入流出  $\Omega$  导致的动量变

化, 第二部分为作用在  $\Omega$  边界上的力导致的动量变化, 第三部分为作用在  $\Omega$  内部物质上的力 (一般为重力) 产生的作用变化。即

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \int_{\Omega} \rho v dx = - \int_{\partial\Omega} \rho v (v \cdot n) ds + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n ds + \int_{\Omega} \rho g dx \quad (2.2)$$

在 (2.2) 式中,  $g$  为重力加速度,  $\sigma$  为 **Cauchy** 应力 [\*\*]。特别的,  $\sigma$  是一个三阶对称矩阵, 其对称性来源于角动量守恒 [\*\*], 我们将在 2.4 节中从另一个角度说明其对称性。

由于 (2.2) 式中  $\Omega$  选择的任意性, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} (\rho v) = -\operatorname{div}(\rho v^T v) + \operatorname{div}(\sigma) + \rho g \quad (2.3)$$

矩阵函数散度  $\operatorname{div}$  定义如下:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} : C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3 \times 3}) &\rightarrow C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \\ \operatorname{div}(A)_i &:= \sum_j \partial_j A_{ij} \end{aligned}$$

(2.2) 式变形为

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} (\rho v) + \operatorname{div}(\rho v^T v) = \operatorname{div}(\sigma) + \rho g \quad (2.4)$$

## 2.3 拉格朗日视角下的动力学

在上一节中, 我们根据质量守恒和动量守恒得到了两个方程 (方程 (2.1) 与方程 (2.4)), 非常重要的一点是, 上述方程并没有使用任何有关自然状态-材料在不施加外力的静止状态-的信息。在之后的章节中, 我们将假定,  $t = 0$  是处于自然状态, 并且只考虑  $t \geq 0$  的情况。

假定在自然状态下 ( $t = 0$ ), 材料占据的空间为  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ , 此时也称  $\Omega_0$  为参考构型。对于任意给定的  $t \in (0, +\infty)$ , 此时材料占据的空间为  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ , 相对于参考构型  $\Omega_0$ , 称  $\Omega_t$  为当前构型。

拉格朗日视角和欧拉视角的区别主要是函数的定义域。在上一节中, 我们所有函数的定义域都在  $\mathbb{R}^3$  上, 而本节我们将把视角限制在材料上, 例如对于任意时刻  $t$ , 有  $\Omega_t$  上的实值函数,  $f(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ 。

### 2.3.1 形变映射, 形变梯度, 速度

为了描述材料相对于参考构型发生的形变, 我们引入形变映射

$$\phi : \Omega_0 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

, 形變映射同時也給出了物體的運動軌跡。為了方便, 我們記  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ , 實際上我們還假定  $\{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$  構成了一個單參數變換群, 並且關於  $t$  至少二階光滑, 關於  $X$  至少有連續的一階導數。

有了形變映射, 我們可以引入對局部形變的刻画, 即形變梯度  $F(X, t) := \frac{\partial \phi_t(X)}{\partial X}$ 。實際上, 形變梯度  $F(X, t)$  還可以視為  $X$  處切空間的映射, 即

$$F(X, t) : T_X \Omega_0 \rightarrow T_x \Omega_t$$

對於任意的  $\partial_X \in T_X \Omega_0$ ,  $\partial_x = F(X, t)[\partial_X] \in T_x \Omega_t$ , 即形變梯度將  $X$  點的切向量  $\partial_X$  經過平移起始點, 旋轉方向, 拉伸長度後得到  $x$  點的切向量  $\partial_x$ , 如圖 2.2 所示。

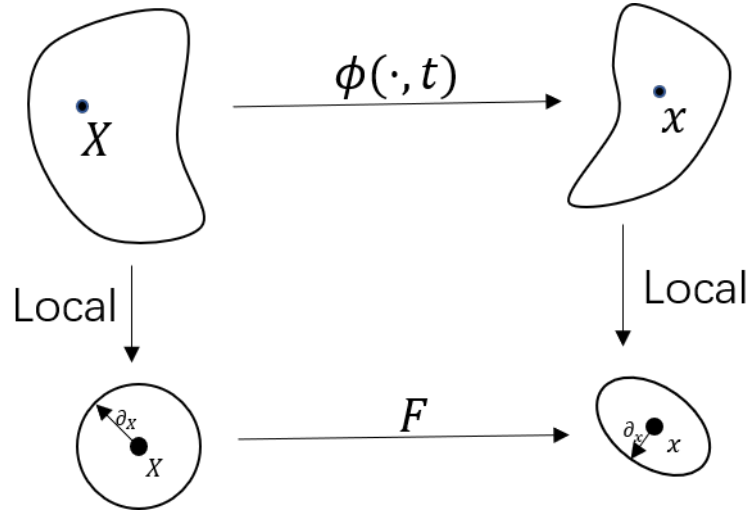


圖 2.2 形變與形變梯度

同樣的, 形變映射作為單參數變換群, 自然的導出速度的定義  $V(X, t) := \frac{\partial \phi_t(X)}{\partial t}$ 。值得注意的是,  $V(X, t)$  的定義域是在  $\Omega_0$  上, 其值域是一個起始點在  $\Omega_t$  上的一個三維列向量, 其與歐拉視角下定義的速度關係為  $V(X, t) = v(\phi_t(X), t)$ , 如果記  $x = \phi_t(X)$ , 則  $V(X, t) = v(x, t)$ 。

考察  $F$  關於時間的一階導

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(X, t) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial X} \phi_t \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \frac{d}{dt} \phi_t \\ &= \frac{\partial}{\partial X} V(X, t) \\ &= \frac{\partial v(\phi_t(X), t)}{\partial x} \frac{\partial \phi_t}{\partial X} \\ &= \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \phi_t}{\partial X} \\ &= \nabla v \cdot F \end{aligned}$$

整理后我们得到  $F$  和  $v$  的关系

$$\dot{F} = \nabla v \cdot F \quad (2.5)$$

### 2.3.2 拉格朗日视角下的质量守恒

在引入了形变  $\phi_t$  之后,很自然的有  $\hat{\Omega}_t = \{\phi_t(X) : X \in \hat{\Omega}_0 \subset \Omega_0\}$ (简记为  $\phi_t(\hat{\Omega}_0)$ ), 且  $\hat{\Omega}_t \subset \Omega_t$ , 根据质量守恒, 形变不会影响质量, 即

$$\int_{\hat{\Omega}_0} \rho(x, 0) dx = \int_{\hat{\Omega}_t} \rho(x, t) dx = \int_{\phi_t(\hat{\Omega}_0)} \rho(x, t) dx$$

如果我们将  $\hat{\Omega}_t$  的质量记为  $M[\hat{\Omega}_t]$ , 则有  $\frac{d}{dt} M[\hat{\Omega}_t] = 0$ 。而

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{\Omega}_0)} \rho(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}_0} \rho(\phi_t(X), t) \det(F(X, t)) dX \\ &= \int_{\hat{\Omega}_0} \frac{d}{dt} [\rho(\phi_t(X), t) \det(F(X, t))] dX \\ &= 0 \end{aligned}$$

记  $R(X, t) := \rho(\phi_t(X), t)$ ,  $J(X, t) := \det(F(X, t))$ , 则根据  $\hat{\Omega}_0$  的任意性, 有  $\frac{d}{dt} [R(X, t) J(X, t)] = 0$ , 即

$$R(X, t) J(X, t) = R(X, 0) \quad (2.6)$$

(2.6) 式即为拉格朗日视角下的质量守恒方程。

### 2.3.3 拉格朗日视角下的动量守恒

在拉格朗日视角下,  $\hat{\Omega}_0$  的动量变化可以表示为作用在  $\hat{\Omega}_0$  边界上的力以及作用在  $\hat{\Omega}_0$  内部的力之和。即

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \int_{\hat{\Omega}_0} R(X, 0) V(x, t) dX = \int_{\partial \hat{\Omega}_0} P \cdot N dS + \int_{\hat{\Omega}_0} R(X, 0) g dX \quad (2.7)$$

上式实际上对于任意的  $\hat{\Omega}_0$  成立, 因此有以下

$$R(X, 0) \frac{\partial}{\partial t} V(X, t) = \text{DIV}(P) + Rg \quad (2.8)$$

此处  $\text{DIV}$  是  $\Omega_0$  上的散度算子, 为了与  $\Omega_t$  上进行区分记为大写。其中  $P$  是应力的另一种表述形式, 称为 **First Piola-Kirchhoff** 应力  $[**]$ , 其满足  $\int_{\partial \hat{\Omega}_0} P \cdot N dS = \int_{\partial \hat{\Omega}_t} \sigma \cdot n ds$  我们将在下一节本构关系中更详细的给出  $P$  的计算方式以及与  $\sigma$  的关系。

下面我们再次从拉格朗日视角推导欧拉视角下的动量守恒, 来证明两者的等价



性。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \int_{\hat{\Omega}_0} R(X, 0) V(x, t) dX &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \int_{\hat{\Omega}_0} R(X, t) v(\phi_t(X), t) J(X, t) dX \\
&= \int_{\hat{\Omega}_0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} [\rho(\phi_t(X), t) v(\phi_t(X), t) J(X, t)] dX \\
&= \int_{\hat{\Omega}_0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} [\rho(\phi_t(X), t) v(\phi_t(X), t) J(X, t)] dX \\
&= \int_{\hat{\Omega}_0} v(\phi_{t_0}(X), t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} [\rho(\phi_t(X), t) J(X, t)] \\
&\quad + \rho(\phi_{t_0}(X), t_0) J(X, t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} v(\phi_{t_0}(X), t_0) dX \\
&= \int_{\hat{\Omega}_0} v(\phi_{t_0}(X), t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} R(X, 0) \\
&\quad + \rho(\phi_{t_0}(X), t_0) J(X, t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} v(\phi_t(X), t) dX \\
&= \int_{\hat{\Omega}_0} \rho(\phi_{t_0}(X), t_0) J(X, t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} v(\phi_t(X), t) dX \\
&= \int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \rho(x, t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} v(\phi_{t,t_0}(x), t) dx
\end{aligned}$$

这里  $\phi_{t,t_0} = \phi_t \cdot \phi_{t_0}^{-1}$ ，带入 (2.6) 中就有

$$\int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \rho(x, t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} v(\phi_{t,t_0}(x), t) dx = \int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \operatorname{div}(\sigma) dx + \int_{\hat{\Omega}_{t_0}} \rho g dx$$

这里由于  $\hat{\Omega}_{t_0}$  为  $\Omega_t$  内的任意闭区域，因此

$$\rho(x, t_0) \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} v(\phi_{t,t_0}(x), t) = \operatorname{div}(\sigma) + \rho g$$

其中

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} v(\phi_{t,t_0}(x), t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} v(x, t) + \sum_i \frac{\partial \phi_{t,t_0}^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} v(x, t_0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} v(x, t) + v^T \nabla v$$

这里  $\phi_{t,t_0}^i$  为  $\phi_{t,t_0}$  的第  $i$  个分量。此处引入材料时间导数  $\frac{D}{Dt} f := \frac{\partial}{\partial t} f + v \nabla f$ ，将其代入上式中整理得

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div}(\sigma) + \rho g \tag{2.9}$$

该方程实际与 (2.4) 式等价，由于其更简洁的表述形式，我们之后将称 (2.9) 式为欧拉视角下的动量守恒。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v^T v) = \operatorname{div}(\sigma) + \rho g$$

可考察方程的左端项

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v^T v) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} v + v \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho v^T \nabla v + v \operatorname{div}(\rho v) \\
 &= \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} v + v^T \nabla v \right) + v \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho v) \right) \quad \text{第二项为质量守恒} \\
 &= \rho \frac{Dv}{Dt}
 \end{aligned}$$

带入即知, (2.4) 式是 (2.8) 式的展开。

## 2.4 本构关系

在前两节中, 我们在动量守恒方程中引入了应力项, 其决定了速度如何随着时间变化。本节我们将给出如何通过形变来给出应变张量, 其中应变张量和形变的函数关系被称为本构关系。事实上, 本构关系直接决定了我们模拟的物体会表现出何种特质。

流体被认为是一种不可压缩的物质, 用数学的语言就是说其形变梯度  $F$  满足  $\det(F) \equiv 1$ , 然而在实践中, 为了更好的配合物质点法的使用, 我们从要求  $\det(F) \equiv 1$  转变为使用形变能量密度来惩罚形变对体积的影响,  $W(F) := \frac{\lambda}{2}(\det(F) - 1)^2$ 。可以发现, 对任意的  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, U \in SO_3$ , 始终有  $W(UF) = W(F)$ , 该特性被称为旋转不变性, 根据诺特定理 [\*\*], 如果能量密度是旋转不变的, 那么所得到的系统是角动量守恒的。

在有了能量密度函数, 我们推导能量密度变化量和形变梯度的变化量之间的关系

$$\begin{aligned}
 \delta W(F) &= \frac{\lambda}{2} \delta(\det(F) - 1)^2 \\
 &= \lambda(\det(F) - 1) \delta(\det(F) - 1) \\
 &= \lambda(\det(F) - 1) \delta(\det(F))
 \end{aligned}$$

为了计算  $\delta \det(F)$ , 首先考察  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(F + tI)$ , 由矩阵的特征多项式得

$$\det(F + \epsilon I) = \epsilon^n + \epsilon^{n-1} \operatorname{Tr}(F) + \dots + \det(F)$$

则等式两边同时除  $\epsilon^n$  得

$$\det\left(\frac{1}{\epsilon} F + I\right) = 1 + \frac{1}{\epsilon} * \operatorname{Tr}(F) + \dots + \frac{1}{\epsilon^n} \det(F)$$

此时将  $t \neq 0$  代入有

$$\det(tF + I) = 1 + t \operatorname{Tr}(F) + \dots + t^n \det(F)$$

同时验证  $t = 0$  可知上式恒成立。因此  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \det(tF + I) = \text{tr}(F)$ ，现在对于任意的  $t_0$  以及  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  中通过  $A(t_0)$  (假设  $A(t_0)$  可逆) 的一条光滑路径  $A(t)$ ，我们有对应的通过  $I$  的路径  $A(t_0)^{-1}A(t)$ ，其对应的切向量为  $A(t_0)^{-1}\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0} A(t)$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big|_{t=t_0} \det(A(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A(t_0 + h)) - \det(A(t_0))}{h} \\ &= \det(A(t_0)) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(A(t_0)^{-1}A(t_0 + h)) - 1}{h} \\ &= \det(A(t_0)) \text{tr}(A(t_0)^{-1} \frac{d}{dt}\big|_{t=t_0} A(t)) \\ &= \det(A(t_0)) A(t_0)^{-T} : \frac{d}{dt}\big|_{t=t_0} A(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

这里  $A : B := \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ 。

故  $\delta \det(F) = \det(F) F^{-T} : \delta F$ ，代入  $\delta W(F)$  之中即有

$$\delta W(F) = \lambda(\det(F) - 1) \det(F) F^{-T} : \delta F$$

，其中  $P = \lambda(\det(F) - 1) \det(F) F^{-T}$  被称为 First Piola-Kirchhoff 应力，其与 Cauchy 应力  $\sigma$  的关系 [\*\*] 为

$$J\sigma = PF^T$$

我们将在本小节最后给出该关系式的证明，代入可知柯西应力  $\sigma = \lambda(\det(F) - 1)I$ 。

这里的  $W(F)$  实际上只给出了物体的抗压缩性的性质，我们还需要给出表面张力的能量密度函数。根据 [\*\*]，表面能实际和物体表面积成正比，表面张力为表面能的梯度。那么我们首先可以形变和表面能量的关系

$$S(\phi_t) = k \int_{\phi_t(\partial\Omega_0)} ds \quad (2.11)$$

为了更好的计算其梯度，我们对 (2.10) 式做一些处理。此处引入一些微分流形的记号 [\*\*]，记  $f^*$  为  $f$  导出的拉回映射， $f_*$  为推前映射， $ds, d\tilde{s}$  分别为曲面  $\partial\Omega_{t_0}, \partial\Omega_t$  上的面积二形式，其为空间体积形式  $dv$  内乘法向的结果，即  $ds(X, Y) = dv(n, X, Y)$ ，我们记  $ds = dv \odot n$ ， $\tilde{p} = \phi_{t_0, t}(p)$ ，则对任意的  $t \in [0, t_0)$ ， $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_{\tilde{p}}\Omega_t$  有如下

$$\begin{aligned} (\phi_{t_0, t}^* ds)(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= (\phi_{t_0, t}^*(dv \odot n))(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= ((\phi_{t_0, t}^* dv) \odot (\phi_{t_0, t}^* n))(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \det(F(x; t_0, t)) dv(\langle F^{-1}(x; t_0, t)n, \tilde{n} \rangle \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \det(F(x; t_0, t)) \langle F^{-1}(x; t_0, t)n, \tilde{n} \rangle dv(\tilde{n}, \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= \det(F(x; t_0, t)) \langle n, F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n} \rangle dv(\tilde{n}, \tilde{X}, \tilde{Y}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

上式中  $F(x; t_0, t) = \frac{\partial \phi_{t_0, t}(x)}{\partial x}$ ,  $\tilde{n}$  为  $T_p \Omega_t$  单位法向,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为空间内积, 容易验证  $F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n}$  与  $T_p \Omega_0$  垂直, 故  $\langle n, F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n} \rangle = \|F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n}\|$ , 即  $\|F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n}\| = F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n}$ , 那么有

$$(\phi_{t_0, t}^* ds) = \det(F(x; t_0, t)) \|F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n}\| d\tilde{s}$$

则代入表面能表达式有

$$\begin{aligned} S(\phi_{t_0}) &= k \int_{\partial \Omega_{t_0}} ds \\ &= k \int_{\phi_{t_0, t}(\partial \Omega_t)} ds \\ &= k \int_{\partial \Omega_t} \phi_{t_0, t}^* ds \\ &= k \int_{\partial \Omega_t} \det(F(x; t_0, t)) \|F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n}\| d\tilde{s} \end{aligned}$$

至此, 我们得到表面能的另一个表达形式

$$S(\phi_{t_0}) = k \int_{\partial \Omega_t} \det(F(x; t_0, t)) \|F^{-T}(x; t_0, t)\tilde{n}\| d\tilde{s} \quad (2.13)$$

(2.21) 式将是表面张力离散化的基础。

最后, 我们给出  $J\sigma = PF^T$  的证明,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \hat{\Omega}_t} \sigma \cdot n ds &= \int_{\phi_t(\partial \hat{\Omega}_0)} \sigma \cdot n ds \\ &= \int_{\partial \hat{\Omega}_0} \phi_t^*(\sigma \cdot n)(\phi_t^* ds) \\ &= \int_{\partial \hat{\Omega}_0} \sigma \cdot n J \|F^{-T} N\| dS \\ &= \int_{\partial \hat{\Omega}_0} \sigma F^{-T} \cdot F^T n J \|F^{-T} N\| dS \\ &= \int_{\partial \hat{\Omega}_0} J \|F^{-T} N\| \sigma F^{-T} \cdot \frac{1}{\|F^{-T} N\|} N dS \\ &= \int_{\partial \hat{\Omega}_0} J \sigma F^{-T} \cdot N dS \end{aligned}$$

而  $\int_{\partial \hat{\Omega}_0} P \cdot N dS = \int_{\partial \hat{\Omega}_t} \sigma \cdot n ds$ , 因此  $\int_{\partial \hat{\Omega}_0} J \sigma F^{-T} \cdot N dS = \int_{\partial \hat{\Omega}_0} P \cdot N dS$ , 由于上式对任意  $\partial \hat{\Omega}_0$  成立, 则  $J \sigma F^{-T} = P$  得  $J \sigma = PF^T$ 。

## 2.5 本章小结

本章基于连续介质力学得到了一系列的控制方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad \text{欧拉视角下的质量守恒方程}$$

$$R(X, t)J(X, t) = R(X, 0) \quad \text{拉格朗日视角下的质量守恒方程}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \operatorname{div}(\sigma) + \rho g \quad \text{欧拉视角下的动量守恒方程}$$

$$R(X, 0) \frac{\partial}{\partial t} V(X, t) = \operatorname{DIV}(P) + Rg \quad \text{拉格朗日视角下的质量守恒方程}$$

以上四个方程分别从两种视角分别等价的刻画了质量守恒和动量守恒，这两种视角也会在物质点法离散化的过程中体现出来。其次，我们还给出了形变梯度与速度的关系

$$\dot{F} = \nabla v \cdot F$$

该方程将会在物质点法如何获得下一时刻的形变梯度中起到关键作用。最后，我们给出了弱可压缩能量  $W(F) = \lambda(J - 1)^2$  来刻画流体的特性，该能量也给出了 **First Piola-Kirchhoff** 应力和 **Cauchy** 应力的计算方式。其次我们给出了表面能的计算方法

$$S(\phi_{t_0}) = k \int_{\partial\Omega_{t_1}} \det(F(x; t_0, t_1)) \|F^{-T}(x; t_0, t_1) \tilde{n}\| d\tilde{s}$$

该计算形式下，积分域不随着  $\phi_{t_0}$  变化而变化，为我们离散计算以及变分都带来了便利，而表面张力将由表面能变分获得，这一步我们将在离散化的过程中来计算。

### 3 表面重建

#### 3.1 引言

为了计算表面张力，我们需要一种能够从点云中获取表面和表面法向的方法。本文使用的方法是使用粒子水平集方法[\*\*]获得一个粗糙的一阶连续隐式曲面，并使用 MarchingCube[\*\*] 算法重构表面网格。然而该网格的质量只能做到一阶连续，计算得到的法向在面片之间并不连续，难以应用在表面张力所需的法向计算。本文在该网格上进行泊松圆盘采样，然后结合已经存在的 IPIA 算法，提出一种新的快速重建算法以此获得一个二阶光滑的隐式曲面，然后基于该隐式曲面来计算表面点云的法向。

#### 3.2 粒子水平集方法

记  $\mathcal{V}$  为点云集合， $v \in \mathcal{V}$  为粒子，记  $d(x, v) \in \mathbb{R}$  为空间上  $x$  的点到粒子  $v$  的距离，则  $\mathcal{S}(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, v) = r\}$  为半径为  $r$ ，圆心在  $v$  的球，如图 3.1 左所示，蓝色圆圈为二位情况的  $\mathcal{S}(v)$ 。

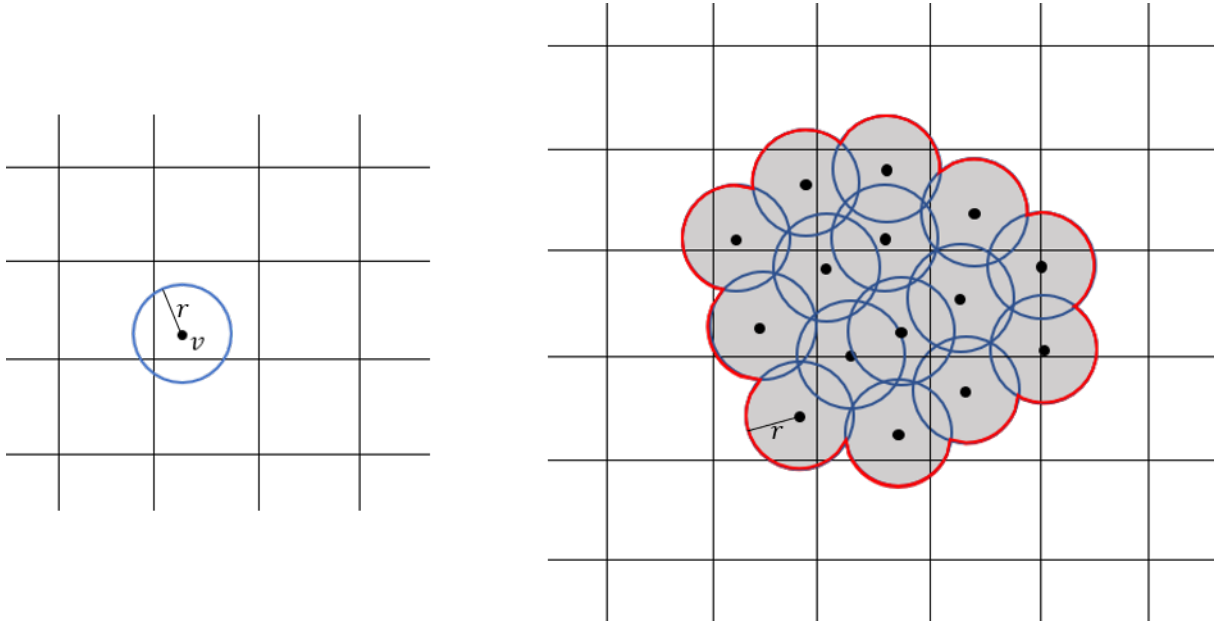


图 3.1 二维情况  $\mathcal{S}(v)$  (左) 与  $\mathcal{S}(\mathcal{V})$  (右)

记  $d(x, \mathcal{V}) := \min\{d(x, v) : v \in \mathcal{V}\}$ ，则  $\mathcal{S}(\mathcal{V}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, \mathcal{V}) = r\}$  为点云的球外延边界。

如图 3.1 右所示，红色的外延边界为所求  $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ 。该红色边界初步确定了该点云

的边界，灰色部分界定了物体内部。下一步我们将从利用红色边界和背景网格提取出一个粗糙的网格。

### 3.3 水平集网格提取

Marching cube 通常用于三维标量场的水平集的可视化，本文使用 Marching cube 算法来获取水平集的三角网格，在本文中我们的水平集为  $\mathcal{S}(\mathcal{V}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, \mathcal{V}) = r\}$ 。

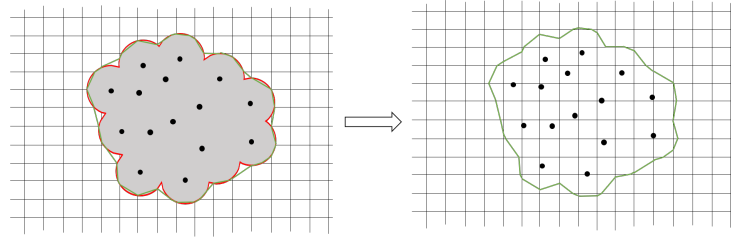


图 3.2 二维点云轮廓提取图示

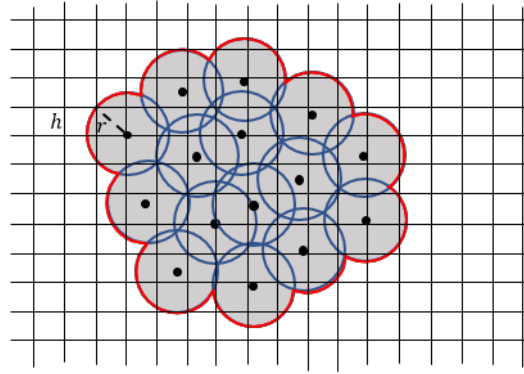


图 3.3 二维情况的  $r$  与  $h$  的关系

本小节我们的目标只是提取出一个大致的点云的表面轮廓，如图 3.2 所示。我们首先将空间离散化成一个均匀的立方体，我们称之为背景网格，并对每一个正方体格点放置一个标志符，默认为 0，此处记立方体宽度为  $h$ ，为了保证球能够覆盖到一个足够大的面积，此处我们选择  $r = \sqrt{3}h$ ，二维情况为  $r = \sqrt{2}h$ ，具体如图 3.3 所示。本文为了节省内存，具体实现使用了八叉树数据结构。之后对每一个粒子操作，将粒子周围的格点做标记，如果格点距离该粒子半径不超过  $r$ ，则将格点标记为 1，如此下来，所有的正方体格点都被标记为两种状态。之后我们对正方体按格点状态进行分类，由于每个格点有两种状态，每个正方体有 8 个格点，如此一来便有  $2^8 = 256$  种状态，在合并旋转和对称的情况后，可以简化成 15 种，可以分类成如图 3.4 所示。之后我们再将网格顶点位置调整到合适的位置，并建立三角网格数据结构。具体的算法描述见 **Algorithm 1**。

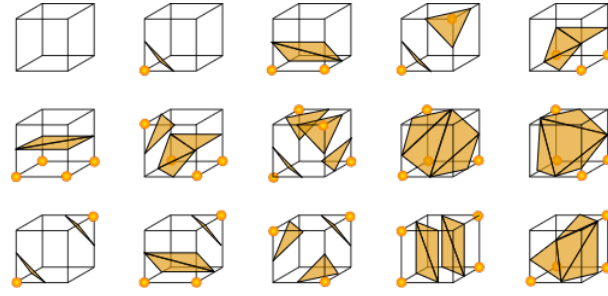


图 3.4 Marching cube 列表

**Algorithm 1** Marching cube**Input:** 点云集合  $\mathcal{V}$ , 立方体宽度  $h$ **Output:** 三角网格位置集合  $V$ , 面片集合  $F$ 

- 1: 准备空间网格数据结构 (八叉树), 并记  $\mathcal{G}$  为格点集合,  $\mathcal{E}$  为立方体的边集合,  $\mathcal{C}$  为立方体集合
- 2:  $state(g) \in \{0, 1\}$  为格点  $g \in \mathcal{G}$  的状态, 初始化为 0
- 3:  $P(e) \in \mathbb{R}^3$  为边  $e \in \mathcal{E}$  上的一个顶点
- 4:  $r = \sqrt{3}h$
- 5: **for**  $v \in \mathcal{V}$  **do**
- 6:     **for**  $g \in \{g \in \mathcal{G} : \|g - v\| < r\}$  **do**
- 7:          $state(g)$  标记为 1
- 8:     **end for**
- 9: **end for**
- 10: **for**  $e \in \{e \in \mathcal{E} : e \text{ 两端格点状态相异}\}$  **do**
- 11:     取  $e$  状态为 1 的顶点记为  $g_1$ , 状态为 0 的记为  $g_0$
- 12:     申请栈空间  $p_{stack}$
- 13:     **for**  $v \in \{v \in \mathcal{V} : \|g_1 - v\| < r\}$  **do**
- 14:         计算  $S(v)$  与  $e$  的交点并压入  $p_{stack}$  中
- 15:     **end for**
- 16:     在  $p_{stack}$  中选取离  $g_0$  最近的点, 并赋值给  $P(e)$ , 同时将  $P(e)$  压入  $V$  中
- 17: **end for**
- 18: **for**  $c \in \mathcal{C}$  **do**
- 19:     匹配  $c$  所对应的 Marching cube 列表中的状态
- 20:     构造相应的三角面表  $f_s$ , 顶点选为对应  $P(e)$  在  $V$  中得索引
- 21:     将  $f_s$  其压入  $F$  中
- 22: **end for**



### 在这里补点三维图，说明网格质量不行，只能一阶连续，法向不连续

从实验结果的图中可以发现，Marching cube 算法确实提取出了一个点云的边界轮廓，但是轮廓只能做到一阶连续，法向明显不连续，同时其三角网格质量无法无法保证，甚至可以明显看出在一些尖锐地方，网格质量极差，上述的问题给我们计算表面张力带来了很大的阻碍。

## 3.4 LSIPIA

为了解决法向不连续的问题以及网格质量差的问题，我们使用二阶连续的隐式曲面来逼近三角网格，因此隐式曲面的法向一阶连续。

### 3.4.1 隐式曲面的渐进迭代逼近

我们首先给出隐式曲面重建问题，给定一个无序点集  $\mathcal{V} = \{v_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3)\}_{i=1}^n$  以及点上的单位法向量  $\mathcal{N} = \{n_i = (n_i^1, n_i^2, n_i^3)\}_{i=1}^n$ ，寻找一个函数  $f(x^1, x^2, x^3)$  使得  $f(x^1, x^2, x^3)$  的 0 水平集拟合该组无序点集  $\mathcal{V}$ 。以数学的表达形式即为

$$\min_f \sum_{i=1}^n f(v_i^1, v_i^2, v_i^3)^2 \quad (3.1)$$

为了让问题可解，我们选择  $f$  为有限个张量积 B-样条基函数的线性组合，即

$$f(x^1, x^2, x^3) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} C_{ijk} B_i(x^1) B_j(x^2) B_k(x^3)$$

这里我们选择二阶 B-样条基函数，其中二阶标准 B-样条函数

$$B(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - |x|^2 & 0 \leq |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - |x|)^2 & \frac{1}{2} \leq |x| < \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \leq |x| \end{cases}$$

如图 3.5 所示，这里  $B_i(x) := B(\frac{1}{h}(x - x_i))$ ，这里的  $x_i$  本文选取为空间立方体网格格点坐标的一个分量， $h$  为立方体宽度。则最小化问题 (3.2) 转化成

$$\min_{C_{ijk}} E(C_{111}, C_{112}, \dots, C_{N_x N_y N_z}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f(v_i^1, v_i^2, v_i^3)^2 \quad (3.2)$$

这里  $C_{ijk}$  张量积 B-样条系数。

我们记三变量 B-样条基函数为  $B_{ijk}(x^1, x^2, x^3) = B_i(x^1) B_j(x^2) B_k(x^3)$ ，则上述

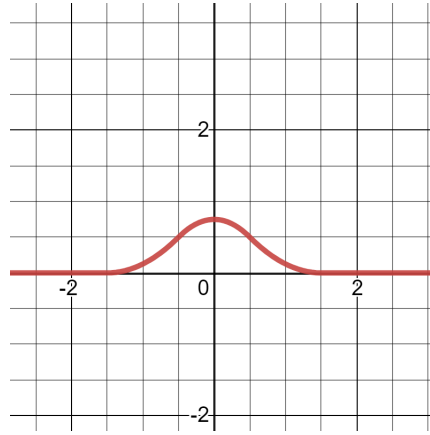


图 3.5 二次标准 B-样条基函数

问题变为

$$\begin{aligned}
 \min_{C_{ijk}} E(C_{111}, C_{112}, \dots, C_{N_x N_y N_z}) &:= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left( \sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) \right)^2 \\
 \Leftrightarrow \delta E(\{C_{ijk}\}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \delta \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left( \sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) \right)^2 \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sum_{r=1}^n \sum_{ijk} \sum_{uvw} C_{ijk} B_{ijk}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) B_{uvw}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) \delta C_{uvw} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sum_{r=1}^n \sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) B_{uvw}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

我们将  $\{B_{111}, B_{112}, \dots, B_{11N_z}, \dots, B_{1N_y1}, \dots, B_{N_x N_y N_z}\}$  以字典序排列，这样我们可配置如下矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{111}(v_1^1, v_1^2, v_1^3) & B_{112}(v_1^1, v_1^2, v_1^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(v_1^1, v_1^2, v_1^3) \\ B_{111}(v_2^1, v_2^2, v_2^3) & B_{112}(v_2^1, v_2^2, v_2^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(v_2^1, v_2^2, v_2^3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{111}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) & B_{112}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) \end{bmatrix}$$

同样对于  $\{C_{111}, \dots, C_{N_x N_y N_z}\}$  我们有

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{111} \\ \vdots \\ C_{N_x N_y N_z} \end{bmatrix}$$

代入 (3.3) 最后一个式子中，我们可以得到一个紧凑的形式

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{C} = 0$$

然而，在实践中以上线性系统并非有唯一解，并且有平凡解 ( $\mathbf{C} = 0$ )。为了避免陷入平凡解，我们添加法向扰动。我们利用本小节开头提到的每一点上的法向信息  $\mathcal{N}$ ，我们利用法向取一些偏移点  $\mathcal{Q} = \{q_i = v_i + \epsilon n_i : v_i \in \mathcal{V}, n_i \in \mathcal{N}\}$ 。然后尽可能要求  $f(q_i) = \epsilon, i = 1, 2, 3, \dots n$ 。据此我们修改 (3.3) 中的优化问题，

$$\begin{aligned} \min_{C_{ijk}} E(C_{111}, C_{112}, \dots, C_{N_x N_y N_z}) &:= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n [(\sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(v_r^1, v_r^2, v_r^3))^2 + (\epsilon - \sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(q_r^1, q_r^2, q_r^3))^2] \\ \Leftrightarrow \sum_{r=1}^n (\sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) B_{uvw}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) - (\epsilon - \sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(q_r^1, q_r^2, q_r^3)) B_{uvw}(q_r^1, q_r^2, q_r^3)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{111}(v_1^1, v_1^2, v_1^3) & B_{112}(v_1^1, v_1^2, v_1^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(v_1^1, v_1^2, v_1^3) \\ B_{111}(v_2^1, v_2^2, v_2^3) & B_{112}(v_2^1, v_2^2, v_2^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(v_2^1, v_2^2, v_2^3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{111}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) & B_{112}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(v_r^1, v_r^2, v_r^3) \\ B_{111}(q_1^1, q_1^2, q_1^3) & B_{112}(q_1^1, q_1^2, q_1^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(q_1^1, q_1^2, q_1^3) \\ B_{111}(q_2^1, q_2^2, q_2^3) & B_{112}(q_2^1, q_2^2, q_2^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(q_2^1, q_2^2, q_2^3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{111}(q_r^1, q_r^2, q_r^3) & B_{112}(q_r^1, q_r^2, q_r^3) & \dots & B_{N_x N_y N_z}(q_r^1, q_r^2, q_r^3) \end{bmatrix}$$

如果再记

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{b}$  的前  $n$  项为 0，后  $n$  项为  $\epsilon$ 。则 (3.4) 式可以写成紧凑的形式

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{b} - \mathbf{BC}) = 0 \quad (3.5)$$

求解该线性系统，我们使用迭代法求解，与 IPIA[\*\*] 不同，我们的迭代格式为

$$\mathbf{C}^{\alpha+1} = \mathbf{C}^\alpha + \Lambda \mathbf{B}^T(\mathbf{b} - \mathbf{BC}^\alpha), \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

这里  $\Lambda$  为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_{r=1}^n B_{111}(v_r) + B_{111}(q_r)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_{r=1}^n B_{112}(v_r) + B_{112}(q_r)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sum_{r=1}^n B_{N_x N_y N_z}(v_r) + B_{N_x N_y N_z}(q_r)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

这里  $B_{ijk}(x) = B_{ijk}(x^1, x^2, x^3)$ , 并假设  $\Lambda$  可逆 (即  $\forall ijk, \sum_{r=1}^n B_{ijk}(v_r) + B_{ijk}(q_r) \neq 0$ ), 否则认为有某个节点  $ijk$  满足  $\sum_{r=1}^n B_{ijk}(v_r) + B_{ijk}(q_r) = 0$ , 由于  $\mathbf{B}$ -样条基函数非负, 则  $B_{ijk}(v_r) = B_{ijk}(q_r) = 0$ , 我们可以去掉该节点, 同时去掉对应的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  对应的行, 其并不影响点云附近的隐式曲面构建。所以我们不妨假定  $\Lambda$  可逆。有关收敛性的证明, 详见 [\*\*]。本迭代格式相较于  $\text{IPIA}$  格式最大的优势就是内存占用少, 可高度并行, 我们从 **Algorithm 2** 来分析这一点。

我们可以发现 **Algorithm 2** 在第 4 行, 第 15 行, 第 22 行对应的循环可高度并行。同时需要的额外内存为储存在每个格点  $\mathcal{G}$  上的  $C_{ijk}$ ,  $\lambda_{ijk}$ ,  $\Delta_{ijk}$ 。而这一点, 我们将在下一节中说明里所需的额外内存可以借用物质点法中的数据结构完成, 也就是说 **LSPIA** 的优势为可复用物质点法的数据结构, 同时可以高度并行。

[\*\*\*\*\* 补充实验数据说明速度快 \*\*\*\*\*]

### 3.4.2 快速法向计算

在完成 **Algorithm 2** 之后, 我们获得了一个二阶连续的隐式曲面。即

$$f(x) = \sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(x) \quad (3.8)$$

获取法向我们可以直接计算其梯度  $\nabla f$ , 我们首先分析计算一个点上的梯度所需要的代价。首先根据张量积  $\mathbf{B}$ -样条函数的定义  $B_{ijk}(x) = B_i(x^1) * B_j(x^2) * B_k(x^3)$ , 如果选取的为二次样条, 则在二维情况下其能够覆盖到点  $x$  的基函数如图 3.6, 所以能够覆盖到点  $x$  的坐标个点为  $I = \{ij : i = i_0 + k, j = i_0 + l, \text{其中 } k, l \in \{0, 1, 2\}\}$ 。

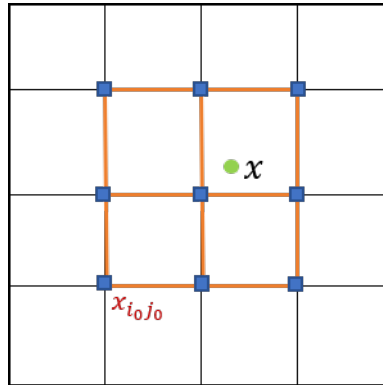


图 3.6 蓝色正方形为其紧支集能够覆盖  $x$  的自由度,  $x_{i_0 j_0}$  为左下角格点坐标

**Algorithm 2** LSIPIA**Input:** 点云位置  $\mathcal{V}$ , 点云法向  $\mathcal{N}$ , 背景网格格点集合  $\mathcal{G}$ , 指定迭代次数  $LoopTimes$ **Output:** 隐式曲面  $f(x) = \sum_{ijk} C_{ijk} B_{ijk}(x)$ , 即输出参数值  $C_{ijk}$ 

```

1: 初始化  $\forall ijk, C_{ijk} = 0$ 
2: 初始化  $\forall ijk, \lambda_{ijk} = 0$ 
3: 初始化偏移量  $\epsilon$ 
4: for  $r \in \#\mathcal{V}$  do
5:   预计算下标为  $I = \{ijk : v_r \in \text{supp}(B_{ijk})\}$  的张量积 B-样条函数, 储存为  $B_{ijk}(v_r)$ 
6:   for  $ijk \in I$  do
7:      $\lambda_{ijk} \leftarrow \lambda_{ijk} + B_{ijk}(v_r)$ 
8:   end for
9:    $v_{\epsilon r} \leftarrow v_r + \epsilon n_r$ 
10:  预计算下标为  $I_\epsilon = \{ijk : v_{\epsilon r} \in \text{supp}(B_{ijk})\}$  的张量积 B-样条函数, 储存为  $B_{ijk}(v_{\epsilon r})$ 
11:  for  $ijk \in I_\epsilon$  do
12:     $\lambda_{ijk} \leftarrow \lambda_{ijk} + B_{ijk}(v_{\epsilon r})$ 
13:  end for
14: end for
15: for  $ijk \in \mathcal{G}$  do
16:  if  $\lambda_{ijk} \neq 0$  then
17:     $\lambda_{ijk} \leftarrow \frac{1}{\lambda_{ijk}}$ 
18:  end if
19: end for
20: 初始化  $\forall ijk, \Delta_{ijk} = 0$ 
21: for  $i = 1, \dots, LoopTimes$  do
22:  for  $r \in \#\mathcal{V}$  do
23:    预计算下标为  $I = \{ijk : v_r \in \text{supp}(B_{ijk})\}$  的张量积 B-样条函数, 储存为  $B_{ijk}(v_r)$ 
24:     $res = 0$ 
25:    for  $ijk \in I$  do
26:       $res \leftarrow res + B_{ijk}(v_r)$ 
27:    end for
28:     $\delta_r = 0 - res$ 
29:    for  $ijk \in I$  do
30:       $\Delta_{ijk} \leftarrow \Delta_{ijk} + \delta_r \cdot B_{ijk}(v_r)$ 
31:      重置  $\Delta_{ijk}$  为 0
32:    end for
33:  end for
34: end for

```

而

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \sum_{ijk} C_{ijk} \nabla B_{ijk}(x) \\
&= \sum_{ijk} C_{ijk} \nabla (B_i(x^1) B_j(x^2) B_k(x^3)) \\
&= \sum_{ijk} C_{ijk} (\partial_i B_i(x^1) \cdot B_j(x^2) B_k(x^3), B_i(x^1) \partial_2 B_j(x^2) \cdot B_k(x^3), B_i(x^1) B_j(x^2) \partial_3 B_k(x^3))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

可以发现要计算  $x$  点的梯度  $\nabla f$ , 我们需要计算的有  $B_i(x^r), \partial_r B_i(x^r), i \in \{0, 1, 2\}, r \in \{1, 2, 3\}$ , 其中样条阶数越高, 计算  $\partial_r B_i(x^r)$  代价越大, 并且  $\partial_r B_i(x^r)$  为分段函数, 故在不同的  $r$  之间不可能做到单指令多数据流并行, 同样在拼装  $\nabla B_{ijk}(x)$  时每一个维度需要单独的计算。基于这些缺点, 我们提出另一个近似法向的计算方法。这里我们使用移动加权最小二乘来逼近格点系数, 我们将会看到在格点张量积 **B**-样条基下, 移动加权最小二乘将有惊人的简单形式。

我们寻求的近似目标函数为

$$f_y(x; c) = f(y) + c^T(x - y) \tag{3.10}$$

能量函数设计如下

$$E_y(c) = \frac{1}{2} \sum_{ijk} B_{ijk}(y) (f_y(x_{ijk}; c) - C_{ijk})^2 \tag{3.11}$$

对上式取极小我们得到

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial c} E_y(c) \\
&= \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{2} \sum_{ijk} B_{ijk}(y) (f(y) + c^T(x_{ijk} - y) - C_{ijk})^2 \\
&= \sum_{ijk} B_{ijk}(y) (f(y) + c^T(x_{ijk} - y) - C_{ijk})(x_{ijk} - y)^T \\
&= \sum_{ijk} B_{ijk}(y) (f(y) - C_{ijk})(x_{ijk} - y)^T + c^T \sum_{ijk} B_{ijk}(y) (x_{ijk} - y)(x_{ijk} - y)^T
\end{aligned} \tag{3.12}$$

则

$$\sum_{ijk} B_{ijk}(y) (C_{ijk} - f(y))(x_{ijk} - y) = [\sum_{ijk} B_{ijk}(y) (x_{ijk} - y)(x_{ijk} - y)^T] c$$

当然我们要计算  $c$  我们得到如下式子

$$c = [\sum_{ijk} B_{ijk}(y) (x_{ijk} - y)(x_{ijk} - y)^T]^{-1} \cdot \sum_{ijk} B_{ijk}(y) (C_{ijk} - f(y))(x_{ijk} - y) \tag{3.13}$$

这里 (3.12) 式要成立的条件为  $[\sum_{ijk} B_{ijk}(y)(x_{ijk} - y)(x_{ijk} - y)^T]$  可逆, 我们接下来证明该矩阵可逆。

此处我们记  $A = \sum_{ijk} B_{ijk}(y)(x_{ijk} - y)(x_{ijk} - y)^T$ 。首先我们计算  $A$  的非对角项即  $A_{uv}, u \neq v$  其中  $u, v \in \{1, 2, 3\}$ , 这里再记  $w \in \{1, 2, 3\}$  且  $w \notin \{u, v\}$ 。即

$$\begin{aligned}
 A_{uv} &= \sum_{i_1 i_2 i_3} B_{i_1 i_2 i_3}(y)(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)(x_{i_1 i_2 i_3}^v - y^v) \\
 &= \sum_{i_u i_v i_w} B_{i_u}(y^u) B_{i_v}(y^v) B_{i_w}(y^w)(x_{i_u i_v i_w}^u - y^u)(x_{i_u i_v i_w}^v - y^v) \\
 &= \sum_{i_w} B_{i_w}(y^w) \left( \sum_{i_u} B_{i_u}(y^u)(x_{i_u i_v i_w}^u - y^u) \right) \left( \sum_{i_v} B_{i_v}(y^v)(x_{i_u i_v i_w}^v - y^v) \right) \\
 &= \sum_{i_w} B_{i_w}(y^w) \left( \sum_{i_u} B_{i_u}(y^u) x_{i_u i_v i_w}^u - y^u \sum_{i_u} B_{i_u}(y^u) \right) \left( \sum_{i_v} B_{i_v}(y^v) x_{i_u i_v i_w}^v - y^v \sum_{i_v} B_{i_v}(y^v) \right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

这里我们注意到 **B**-样条基函数的单位分解性  $\sum_i B_i(x) = 1$  以及线性还原性  $\sum_i x_i B_i(x) = x$ , 带入到 (3.13) 式中我们有

$$\sum_{i_w} B_{i_w}(y^w) \left( \sum_{i_u} B_{i_u}(y^u) x_{i_u i_v i_w}^u - y^u \sum_{i_u} B_{i_u}(y^u) \right) \left( \sum_{i_v} B_{i_v}(y^v) x_{i_u i_v i_w}^v - y^v \sum_{i_v} B_{i_v}(y^v) \right) = 0$$

因此  $u \neq v$  时  $A_{uv} = 0$ , 即  $A$  为对角阵。

接下来考察  $u = v$  时  $A_{uv}$  的值, 而

$$\begin{aligned}
 A_{uu} &= \sum_{i_1 i_2 i_3} B_{i_1 i_2 i_3}(y)(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2 \\
 &= \sum_{i_u i_v i_w} B_{i_u}(y^u) B_{i_v}(y^v) B_{i_w}(y^w)(x_{i_u i_v i_w}^u - y^u)^2 \\
 &= \sum_{i_u} B_{i_u}(y^u)(x_{i_u i_v i_w}^u - y^u)^2 \sum_{i_v} B_{i_v}(y^v) \sum_{i_w} B_{i_w}(y^w) \\
 &= \sum_{i_u} B_{i_u}(y^u)(x_{i_u i_v i_w}^u - y^u)^2
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

我们将说明  $\sum_{i_u} B_{i_u}(y^u)(x_{i_u i_v i_w}^u - y^u)$  恒为常数。这里我们注意到均匀  $n$  阶 **B**-样条导数公式为  $\frac{d}{dy} B_i^n(y) = B_i^{n-1}(y + \frac{1}{2}) - B_i^{n-1}(y - \frac{1}{2})$ , 此处假定样条阶数为  $n$ , 同时再记

$B_{i_u}(y^u)$  为  $B_{i_u}^n(y^u)$ , 现在考察  $\sum_{i_u} B_{i_u}(y^u)(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)$  导数

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dy^u} \sum_{i_u} B_{i_u}^n(y^u)(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2 \\
&= \sum_{i_u} \frac{d}{dy^u} B_{i_u}^n(y^u)(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2 \\
&= \sum_{i_u} \left[ \frac{d}{dy^u} B_{i_u}^n(y^u) \right] (x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2 + B_{i_u}^n(y^u) \frac{d}{dy^u} [(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2] \\
&= \sum_{i_u} \left[ \frac{d}{dy^u} B_{i_u}^n(y^u) \right] (x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2 + 2B_{i_u}^n(y^u)(y^u - x_{i_1 i_2 i_3}^u) \\
&= \sum_{i_u} \left[ \frac{d}{dy^u} B_{i_u}^n(y^u) \right] (x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2 \\
&= \sum_{i_u} (B_{i_u}^{n-1}(y^u + \frac{h}{2}) - B_{i_u}^{n-1}(y^u - \frac{h}{2}))(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2 \\
&= \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u + \frac{h}{2})(y^u - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2 - \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u - \frac{h}{2})(y^u - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2 \\
&= \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u + \frac{h}{2})(y^u + \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u - \frac{h}{2})^2 - \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u - \frac{h}{2})(y^u - \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u + \frac{h}{2})^2 \\
&= \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u + \frac{h}{2})[(y^u + \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2 + \frac{h^2}{4} - h(y^u + \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u)] \\
&\quad - \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u - \frac{h}{2})[(y^u - \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2 + \frac{h^2}{4} + h(y^u - \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u)] \\
&= \{ [\sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u + \frac{h}{2})(y^u + \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2] + \frac{h^2}{4} - h \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u + \frac{h}{2})(y^u + \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u) \} \\
&\quad - \{ [\sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u - \frac{h}{2})(y^u - \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2] + \frac{h^2}{4} - h \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(y^u - \frac{h}{2})(y^u - \frac{h}{2} - x_{i_1 i_2 i_3}^u) \} \\
&= \{ [\sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(a)(a - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2] - h \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(a)(a - x_{i_1 i_2 i_3}^u) \} \\
&\quad - \{ [\sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(a - h)(a - h - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2] - h \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(a - h)(a - h - x_{i_1 i_2 i_3}^u) \} \\
&= \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(a)(a - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2 - \sum_{i_u} B_{i_u}^{n-1}(a - h)(a - h - x_{i_1 i_2 i_3}^u)^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

从式 (3.15) 的推导中可以看出, 其导数恒为 0, 因此  $A_{uu} = \sum_{i_u} B_{i_u}^n(y^u)(x_{i_1 i_2 i_3}^u - y^u)^2$  恒为常数. 事实上, 在本文中, B-样条阶数为 2, 可以计算得到  $A_{uu} = \frac{h^2}{4}$ , 因



此  $A = \frac{h^2}{4}I$ ，代入到 (3.12) 式中有如下

$$c = \frac{4}{h^2} \sum_{ijk} B_{ijk}(y)(C_{ijk} - f(y))(x_{ijk} - y) \quad (3.17)$$

$$f_y(x; c) = f(y) + \frac{4}{h^2} \sum_{ijk} B_{ijk}(y)(C_{ijk} - f(y))(x_{ijk} - y)^T(x - y) \quad (3.18)$$

继续观察 (3.18) 式，再利用 B-样条的线性还原性，可以得到

$$f_y(x; c) = f(y) + \frac{4}{h^2} \sum_{ijk} B_{ijk}(y)C_{ijk}(x_{ijk} - y)^T(x - y) \quad (3.19)$$

故近似法向选取为  $n = \frac{c}{\|c\|}$ 。可以发现，在计算  $c$  时，我们只要预计算  $B_i(y^u), i, u \in \{1, 2, 3\}$ ，这表明该算法有着更低的内存消耗，在组合法向时，同时向量值  $x_{ijk} - y$  的计算远比  $(\partial_i B_i(x^1) \cdot B_j(x^2) B_k(x^3), B_i(x^1) \partial_2 B_j(x^2) \cdot B_k(x^3), B_i(x^1) B_j(x^2) \partial_3 B_k(x^3))$  计算有更高的效率。

【\*\*\*\*\* 补图说明估计的很好 \*\*\*\*\*】

### 3.5 本章小结

本章给出了点云表面重建的方法，首先我们建立了点云的距离场，并使用合适的阈值  $r$  探查点云大致轮廓，并使用 **Marching cube** 算法来构造一阶连续曲面。为了得到更光滑的结果来获得更光滑的法向，本文使用 **LSPIA** 方法处理，而实际上我们看到 **LSPIA** 需要粒子上的法向作为输入，而实际上该法向仅仅是为了 **LSPIA** 算法陷入平凡解，因此我们只需要估计出大致方向作为输入即可，其估计大致法向的办法将在下一节给出。在得到一个二阶光滑曲面之后，我们将基于此来计算法向，当然这个法向至少是一阶连续的，为了更少的计算代价，我们结合 B-样条基函数的特性，使用移动最小二乘方法给出了一个相比于直接计算梯度更高效的估计办法。

## 4 数值方法

### 4.1 引言

在前文给出连续的控制方程，以及表面重建方法后，本章将离散化连续控制方程，以及针对流体表面张力给出一个物质的离散化方式，同时给出一个计算流水线将表面重建方法整合到物质点法中来完成我们的模拟。

### 4.2 离散控制方程

我们将使用伽辽金方法离散化控制方程，首先我们先将第一章中的动量强形式方程转换成弱形式，然后根据弱形式选取基函数以及对应的离散方法用于数值计算。此处我们回顾动量守恒方程的欧拉形式和拉格朗日形式，

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \text{div}(\sigma) + \rho g \quad \text{欧拉视角}$$

$$R(X, 0) \frac{\partial}{\partial t} V(X, t) = \text{DIV}(P) + Rg \quad \text{拉格朗日视角}$$

其中  $v(x, t) = V(X, t)$ ,  $x = \phi(X, t)$ 。如果从拉格朗日视角来观察方程的左侧(时间变化项)，从欧拉视角来观察方程的右侧(空间变化项)，那么我们有如下混合欧拉拉格朗日形式的方程

$$R(X, 0) \frac{\partial}{\partial t} V(X, t) = \text{div}(\sigma) + \rho g \quad \text{混合欧拉拉格朗日视角}$$

#### 4.2.1 时间离散化

在混合欧拉拉格朗日视角中，左端项为  $R(X, 0) \frac{\partial}{\partial t} V(X, t)$ ，相对于欧拉视角下  $\rho \frac{Dv}{Dt}$  中的材料时间导数  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$ ，显然有更容易的离散方式，这也是时间变化项选择拉格朗日描述的原因。此处我们使用有限差分来离散速度有关时间的变化。

$$\frac{\partial}{\partial t} V(X, t) \approx \frac{V(X, t^{n+1}) - V(X, t^n)}{\Delta t}$$

同样的，在拉格朗日视角下的离散化可以转换为欧拉视角下的离散化，这里记  $x^n := \phi_{t^n}(X)$ ,  $\hat{x}^{n+1} := \phi_{t^{n+1}, t^n}(x^n)$ ，同时  $v^n(x^n) := v(x^n, t^n)$ ,  $\hat{v}^{n+1}(x^n) := v(\phi_{t^{n+1}, t^n}(x^n))$ ，因此以上差分格式可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t} V(X, t) \approx \frac{\hat{v}^{n+1}(x^n) - v^n(x^n)}{\Delta t}$$

值得注意的是， $\hat{v}^{n+1}(x^n)$  与  $v^n(x^n)$  都是在  $\Omega^{t^n} = \phi_{t^n}(\Omega^0)$  上定义的，因此该离散形式既可在欧拉视角下表示，同时也可以在拉格朗日视角下表示。

### 4.2.2 弱形式

将左端形式带入欧拉视角中，我们有如下

$$\rho(x^n, t^n) \frac{\hat{v}^{n+1}(x^n) - v^n(x^n)}{\Delta t} = \operatorname{div}(\sigma) + \rho g$$

为了将表面张力融入方程中，我们补充边界条件如下

$$\begin{aligned} \rho(x^n, t^n) \frac{\hat{v}^{n+1}(x^n) - v^n(x^n)}{\Delta t} &= \operatorname{div}(\sigma) + \rho g \\ \sigma n &= t, x^n \in \partial\Omega^{t^n} \end{aligned}$$

上述方程以弱形式表示我们有，这里  $w$  选取为空间上具有紧支集的测试函数

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{t^n}} \rho(x, t^n) \frac{\hat{v}^{n+1}(x) - v^n(x)}{\Delta t} \cdot w dx &= \int_{\Omega^{t^n}} \operatorname{div}(\sigma) \cdot w dx + \int_{\Omega^{t^n}} \rho g \cdot w dx \\ \sigma n &= t, x \in \partial\Omega^{t^n} \end{aligned}$$

现在我们处理右端的散度项，由格林公式 [\*\*] 得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{t^n}} \operatorname{div}(\sigma) \cdot w dx &= \int_{\partial\Omega^{t^n}} w \cdot (\sigma n) ds - \int_{\Omega^{t^n}} \sigma : \nabla w dx \\ &= \int_{\partial\Omega^{t^n}} w \cdot t ds - \int_{\Omega^{t^n}} \sigma : \nabla w dx \end{aligned}$$

我们先计算  $\int_{\partial\Omega^{t^n}} \sigma : \nabla w dx$  部分。回顾流体弱可压缩模型获得的柯西应力

$$\sigma = \lambda(\det(F) - 1)I$$

带入可得  $\int_{\partial\Omega^{t^n}} \lambda(\det(F) - 1)I : \nabla w dx$ 。将上式整合我们得到

$$\int_{\Omega^{t^n}} \rho(x, t^n) \frac{\hat{v}^{n+1}(x) - v^n(x)}{\Delta t} \cdot w dx = \int_{\partial\Omega^{t^n}} w \cdot t ds - \int_{\Omega^{t^n}} \sigma : \nabla w dx$$

为了计算表面张力项，回顾我们在第一章得到的表面张力计算公式

$$S(\phi_t) = k \int_{\partial\Omega_{t^n}} \det(F(x; t, t^n)) \|F^{-T}(x; t, t^n) \tilde{n}\| d\tilde{s}$$

我们对其变分将获得流体表面上的表面张力场。为了方便，我们先记  $\tilde{F} = F(x; t, t^n)$ ，以及  $\Psi(\tilde{F}) = \det(\tilde{F}) \|\tilde{F}^{-T} \tilde{n}\|$ ，则

$$\begin{aligned} \delta\Psi(\tilde{F}) &= \delta(\det(\tilde{F}) \|\tilde{F}^{-T} \tilde{n}\|) \\ &= \delta[\det(\tilde{F})] \|\tilde{F}^{-T} \tilde{n}\| + \det(\tilde{F}) \delta\|\tilde{F}^{-T} \tilde{n}\| \\ &= \det(\tilde{F}) \tilde{F}^{-T} : \delta\tilde{F} \cdot \|\tilde{F}^{-T} \tilde{n}\| + \det(\tilde{F}) \delta\|\tilde{F}^{-T} \tilde{n}\| \end{aligned} \tag{4.1}$$

这里第三行我们使用了第二章提到的行列式求导结果  $\delta \det(F) = \det(F)F^{-T} : \delta F$ , 接下来我们处理上述等式的右端项  $\delta \|\tilde{F}^{-T}\tilde{n}\|$ 。这里注意到  $\|V\|^2 = V^T V$ , 因此我们有  $2\|V\|\delta\|V\| = 2V^T\delta V$ 。同时  $A^{-1}A = I$ , 从这里我们由  $\delta A^{-1}A + A^{-1}\delta A = 0$ , 整理得到  $\delta(A^{-1}) = -A^{-1}\delta A A^{-1}$ 。那么我们有

$$\begin{aligned}\delta\|\tilde{F}^{-T}\tilde{n}\| &= \frac{\tilde{n}^T\delta(\tilde{F}^{-1})\tilde{F}^{-T}\tilde{n}}{\|\tilde{F}^{-T}\tilde{n}\|} \\ &= \frac{-\tilde{n}\tilde{F}^{-1}(\delta\tilde{F})\tilde{F}^{-1}\tilde{F}^{-T}\tilde{n}}{\|\tilde{F}^{-T}\tilde{n}\|}\end{aligned}$$

将上式带入 (4.1) 式得

$$\delta\Psi(\tilde{F}) = \det(\tilde{F})\tilde{F}^{-T} : \delta\tilde{F} \cdot \|\tilde{F}^{-T}\tilde{n}\| - \frac{\tilde{n}^T\tilde{F}^{-1}(\delta\tilde{F})\tilde{F}^{-1}\tilde{F}^{-T}\tilde{n}}{\|\tilde{F}^{-T}\tilde{n}\|}$$

则

$$\begin{aligned}\delta\Psi(F(x_0; t_0, t_0)) &= \delta\Psi(I) \\ &= I : \delta\tilde{F} - \tilde{n}^T\delta\tilde{F}\tilde{n} \\ &= I : \delta\tilde{F} - \tilde{n}\tilde{n}^T : \delta\tilde{F} \\ &= (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) : \delta\tilde{F}\end{aligned}$$

而表面能量变化等于表面张力沿位移做的功, 这里  $\delta\phi_{t^n}(X) = w \circ \phi_{t^n}(X)$ , 即

$$\delta S(\phi_{t^n}) = \int_{\partial\Omega^{t^n}} w \cdot t ds$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega^{t^n}} w \cdot t ds &= \delta S(\phi_{t^n}) \\ &= k \int_{\partial\Omega^{t^n}} (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) : \delta\tilde{F} ds \\ &= k \int_{\partial\Omega^{t^n}} (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) : \nabla w ds\end{aligned}$$

因此我们可以得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^{t^n}} \rho(x, t^n) \frac{\hat{v}^{n+1}(x) - v^n(x)}{\Delta t} \cdot w dx &= k \int_{\partial\Omega^{t^n}} (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) : \nabla w ds \\ &\quad - \int_{\Omega^{t^n}} \lambda(\det(F \circ \phi_t^{-1}) - 1) I : \nabla w dx \quad (4.2)\end{aligned}$$

### 4.2.3 空间离散化

在得到 (4.2) 式后我们将积分离散化, 首先我们假设  $\Omega^{t^n}$  被离散为点云  $\mathcal{V}$ , 如图 4.1 所示。

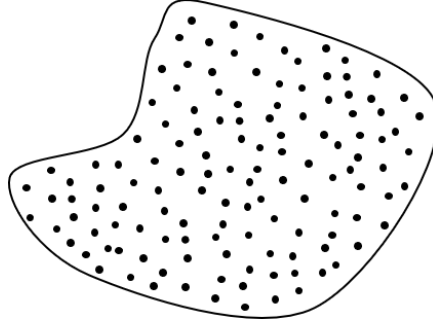


图 4.1 连续体离散化成点云

其次假设有限元函数空间为

$$\{f : f(x) = \sum_{\mathbf{i}} f_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}(x), \mathbf{i} = ijk, i, j, k \in 1, 2, 3\}$$

因此  $\hat{v}^{n+1}(x) = \sum_{\mathbf{i}} \hat{v}_{\mathbf{i}}^{n+1} B_{\mathbf{i}}(x)$ ,  $v^n(x) = \sum_{\mathbf{i}} v_{\mathbf{i}}^n B_{\mathbf{i}}(x)$ , 测试函数  $w(x) = e_{\alpha} B_{\mathbf{i}}(x)$ , 这里  $e_{\alpha}$  为三维空间的第  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  个标准基。带入 (4.2) 式左边有

$$\int_{\Omega^{t^n}} \rho(x, t^n) \frac{\hat{v}^{n+1}(x) - v^n(x)}{\Delta t} \cdot w dx = \int_{\Omega^{t^n}} \rho(x, t^n) \sum_{\mathbf{i}} \frac{\hat{v}_{\mathbf{i}}^{n+1} - v_{\mathbf{i}}^n}{\Delta t} B_{\mathbf{i}}(x) \cdot e_{\alpha} B_{\mathbf{j}}(x) dx$$

右边为

$$\int_{\partial\Omega^{t^n}} (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) : e_{\alpha} \nabla B_{\mathbf{j}}(x) ds - \int_{\Omega^{t^n}} \lambda(\det(F \circ \phi_t^{-1}) - 1) I : e_{\alpha} \nabla B_{\mathbf{j}}(x) dx \quad (4.3)$$

如果我们同时考虑  $e_{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3$ , 这样上式即在三个维度统一表示为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{t^n}} \rho(x, t^n) \sum_{\mathbf{i}} \frac{\hat{v}_{\mathbf{i}}^{n+1} - v_{\mathbf{i}}^n}{\Delta t} B_{\mathbf{i}}(x) B_{\mathbf{j}}(x) dx &= \int_{\partial\Omega^{t^n}} (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) \nabla B_{\mathbf{i}}(x)^T ds \\ &\quad - \int_{\Omega^{t^n}} \lambda(\det(F \circ \phi_t^{-1}) - 1) \nabla B_{\mathbf{i}}(x)^T dx \end{aligned}$$

对积分离散化我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{i}} \int_{\Omega^{t^n}} \rho(x, t^n) \frac{\hat{v}_{\mathbf{i}}^{n+1} - v_{\mathbf{i}}^n}{\Delta t} B_{\mathbf{i}}(x) B_{\mathbf{j}}(x) dx &\approx \sum_{\mathbf{i}, p} B_{\mathbf{i}}(x_p^n) B_{\mathbf{j}}(x_p^n) \frac{\hat{v}_{\mathbf{i}}^{n+1} - v_{\mathbf{i}}^n}{\Delta t} \int_{\Omega_p^{t^n}} \rho(x, t) dx \\ &= \sum_{\mathbf{i}, p} B_{\mathbf{i}}(x_p^n) B_{\mathbf{j}}(x_p^n) \frac{\hat{v}_{\mathbf{i}}^{n+1} - v_{\mathbf{i}}^n}{\Delta t} m_p \end{aligned} \quad (4.4)$$

此处  $p \in \mathcal{V}$  为离散点云上的点,  $x_p^n \in \mathbb{R}^3$  为  $t^n$  时刻点  $p$  的位置,  $m_p = \int_{\Omega_p^{t^n}} \rho(x, t) dx$ , 这里  $m_p$  为粒子  $p$  周围的质量, 根据质量守恒,  $m_p$  与时间无关。再记  $\hat{M}_{\mathbf{j}\mathbf{i}} = \sum_p B_{\mathbf{j}}(x_p^n) B_{\mathbf{i}}(x_p^n) m_p$ , 通常我们会牺牲精度, 使用矩阵行求和的方式  $[**]$  来简化矩阵  $\hat{M}$ 。即  $M_{\mathbf{j}\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}} \hat{M}_{\mathbf{j}\mathbf{i}}$ ,  $M$  的非对角项为 0。同时注意到, B-样条的单位分解性, 我们有

$$M_{\mathbf{j}\mathbf{i}} = \sum_p m_p B_{\mathbf{j}}(x_p^n) \sum_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}(x_p^n) = \sum_p m_p B_{\mathbf{j}}(x_p^n)$$

同理我们可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{t^n}} \lambda(\det(F \circ \phi_t^{-1}) - 1) \nabla B_{\mathbf{j}}(x)^T dx &\approx \sum_p \lambda(\det(F_p^n) - 1) \nabla B_{\mathbf{j}}(x_p^n)^T \int_{\Omega_p^{t^n}} dx \\ &= \sum_p \lambda(\det(F_p^n) - 1) \nabla B_{\mathbf{j}}(x_p^n)^T V_p^n \\ &\approx \sum_p \lambda(\det(F_p^n) - 1) \nabla B_{\mathbf{j}}(x_p^n)^T V_p^0 \end{aligned}$$

这里  $F_p^n$  为粒子  $p$  在  $t^n$  时刻的形变梯度,  $V_p^n$  为时刻  $t^n$  时  $p$  邻域小块  $\Omega_p^{t^n}$  的体积, 由于我们将使用较大的体积惩罚来减小体积变化, 因此我们可以近似  $V_p^n$  为初始时刻的体积  $V_p^0$ 。

最后我们来处理表面积分项  $\int_{\partial\Omega^{t^n}} (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) \nabla B_{\mathbf{i}}(x)^T ds$ , 假定我们已经获取了点云在  $t^n$  时刻的表面, 总表面积为  $Area$ , 且已在表面上均匀的采点, 每个点分配面积为  $A_s = \frac{Area}{\#\mathcal{S}}$ , 表面点集为  $\mathcal{S}$ 。

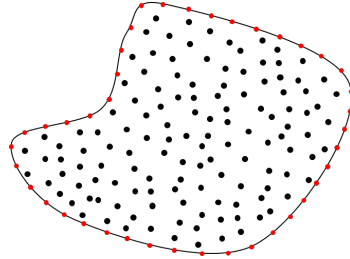


图 4.2 红色点  $s$  为采样获得的表面点集  $\mathcal{S}$

那么我们有

$$\int_{\partial\Omega^{t^n}} (I - \tilde{n}\tilde{n}^T) \nabla B_{\mathbf{j}}(x)^T ds \approx \sum_{s \in \mathcal{S}} (I - \tilde{n}_s \tilde{n}_s^T) \nabla B_{\mathbf{j}}(x_s^n)^T A_s \quad (4.5)$$

将上述离散化结果整理我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{V}} \frac{\hat{v}_{\mathbf{j}}^{n+1} - v_{\mathbf{j}}^n}{\Delta t} m_p B_{\mathbf{j}}(x_p^n) &= k \sum_{s \in \mathcal{S}} (I - \tilde{n}_s \tilde{n}_s^T) \nabla B_{\mathbf{j}}(x_s^n)^T A_s \\ &\quad - \lambda \sum_{p \in \mathcal{V}} (\det(F_p^n) - 1) \nabla B_{\mathbf{j}}(x_p^n)^T V_p^0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

如果记  $m_j^n = \sum_p m_p B_j(x_p^n)$ , 则上述问题变为

$$m_j^n \frac{\hat{v}_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = k \sum_{s \in \mathcal{S}} (I - \tilde{n}_s \tilde{n}_s^T) \nabla B_j(x_s^n)^T A_s - \lambda \sum_{p \in \mathcal{V}} (\det(F_p^n) - 1) \nabla B_j(x_p^n)^T \quad (4.7)$$

自然我们给出  $p$  的位置  $x_p^n$  更新公式

$$x_p^{n+1} = x_p^n + \Delta t \tilde{v}_p^{n+1} \quad (4.8)$$

同时回顾第二章的  $\dot{F} = \nabla v \cdot F$ , 我们得到

$$F_p^{n+1} = (I + \Delta t \cdot \nabla v_p^{n+1}) F_p^n \quad (4.9)$$

#### 4.2.4 数据表示与储存

从式 (4.7), (4.8), (4.9) 可以看到, 我们需要的变量有  $x_p^n \in \mathbb{R}^3, v_p^n \in \mathbb{R}^3, F_p^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 这些变量我们都储存在粒子上, 由于粒子上储存质量信息不会随着时间改变, 因此该数据表示方式自然的满足了质量守恒方程。如图 4.3 所示

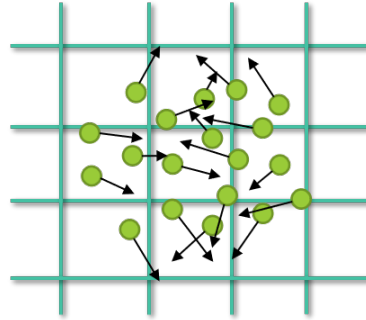


图 4.3 粒子上的信息

同时注意到这里在  $t^n$  时刻需要参与计算的信息还有  $v_j^n \in \mathbb{R}^3$  和  $m_j^n \in \mathbb{R}$ , 这里的信息我们储存在格点上。如图 4.4 所示, 这里我们注意到  $m_j^n = \sum_p m_p B_j(x_p^n)$ , 此处实际上我们把粒子上的数据分散到了网格上, 同时注意到  $\sum_j m_j^n = \sum_j \sum_p m_p B_j(x_p^n)$ , 这里再使用 B-样条的单位分解性, 我们有  $\sum_j m_j = \sum_p m_p$ , 因此该分配方式依然是质量守恒的过程。

### 4.3 数值修正

在上一节得到连续方程的离散化之后, 我们接下来给出该离散方程的计算策略以及一些工程实践上的修正。

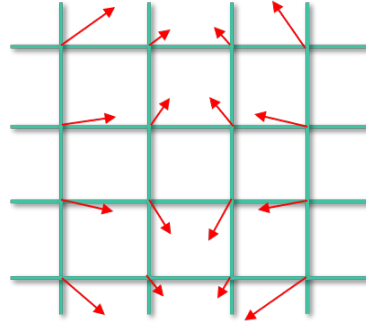
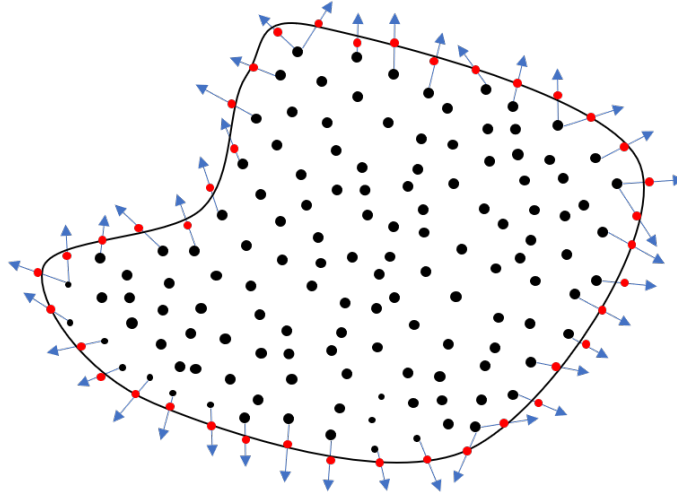


图 4.4 格点上的信息

#### 4.3.1 表面重建与粒子属性调整

在给定的粒子集合  $\mathcal{V}$  以及  $t^n$  时刻每个粒子  $p \in \mathcal{V}$  的位置  $x_p$  时，我们可以使用第 3 章提到的方法重建表面网格，然后使用泊松圆盘采样获取表面的粒子  $\mathcal{S}$ 。在构造隐式曲面时，我们需要额外的偏移量，此处我们对每一个  $s \in \mathcal{S}$ ，在  $\mathcal{V}$  中寻找距离  $s$  最近的粒子  $p_s \in \mathcal{V}$ ，偏移方向为  $n_s = \frac{x_s - x_{p_s}}{\|x_s - x_{p_s}\|}$ ，如图 4.5 所示。我们将  $\mathcal{S}$  和  $\mathcal{N}$  作为输入可以得到逼近的隐式曲面，然后估计  $\mathcal{S}$  中表面粒子的法向  $\tilde{n}_s$ 。

图 4.5 箭头为偏移方向，红色点为表面粒子  $s \in \mathcal{S}$ ，箭头起始端为  $p_s \in \mathcal{V}$ 

在实践中，表面张力项  $f^{surface} = k \sum_{s \in \mathcal{S}} (I - \tilde{n}_s \tilde{n}_s^T) \nabla B_j(x_s^n)^T A_s$  需要传导到内部粒子，与液体压力共同影响形变结果，如果表面粒子离内部粒子最短距离大于  $\sqrt{3}h$  (即在  $s$  所占的一个格子之外)，那么该表面粒子  $s \in \mathcal{S}$  将难以通过网格把表面张力传导到内部粒子。为了解决这一问题，我们对每一个表面粒子  $s \in \mathcal{S}$  寻找其在内部的最近的点  $p_s \in \mathcal{V}$ ，然后生成一个嵌入点  $o_s$ ，嵌入点  $o_s$  的位置我们选取为  $x_{o_s} = 2x_{p_s} - x_s$ ，嵌入点集合我们记为  $\mathcal{O}$ 。显然， $\mathcal{O}$  与  $\mathcal{S}$  有一一对应关系，而



内部点  $p \in \mathcal{V}$  与表面点集可能是多对一，因此我们记录每一个内部点  $v$  所相关的表面点个数  $C_v$ ，同时我们将内部点的质量均匀的分布给表面粒子和嵌入粒子，即  $m_s = m_{o_s} = \frac{m_{p_s}}{2C_{p_s}+1}$ ，其中内部粒子  $p_s$  的质量  $m_{p_s}$  重新赋值为  $m_s$ 。同样的，我们赋予当前时刻表面粒子速度  $v_s^n = v_{p_s}^n$  以及嵌入粒子  $o_s$  的速度  $v_{o_s}^n = v_{p_s}^n$ 。

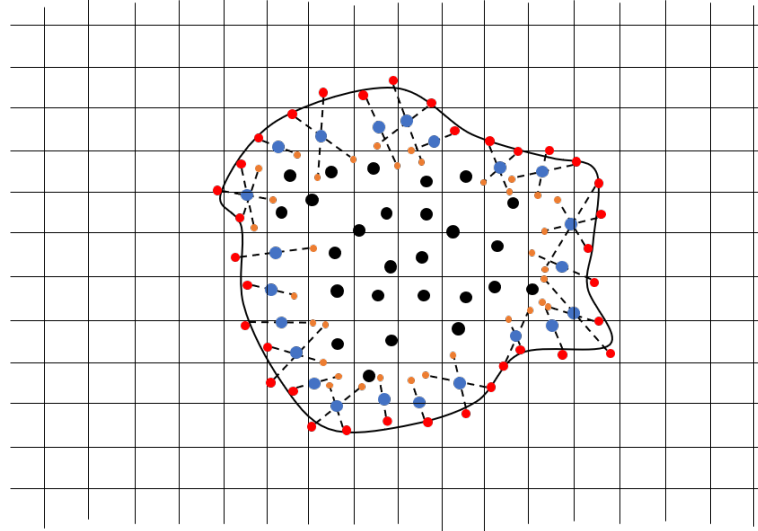


图 4.6 红色点为表面粒子  $s \in \mathcal{S}$ ，红色点通过虚线所连的蓝色点为离  $s$  最近的内部点  $p_s \in \mathcal{V}$ ，橙色点  $o_s \in \mathcal{O}$  为新嵌入内部点

#### 4.3.2 粒子网格信息转换

实际上在上一节中，我们已经给出了把粒子上的质量信息传递到网格上的计算公式，即  $\tilde{m}_j^n = \sum_p \tilde{m}_p B_j(x_p^n)$ 。除了质量信息之外，我们仍然需要速度信息  $v_j^n$ ，基于动量守恒的考虑[\*\*]，我们采用的传递方式为将粒子的动量信息传递到网格上，再通过动量和质量的关系获取网格上的速度，即

$$(mv)_j^n = \sum_p \tilde{m}_p v_p^n B_j(x_p^n) \quad (4.10)$$

$$v_j^n = \frac{(mv)_j^n}{m_j^n} \quad (4.11)$$

和质量守恒的证明方式类似，我们也可以证明该过程是动量守恒的，详细证明见[\*\*]。其中质量和动量的传递到网格过程我们称之为粒子转网格 (Particle to Grid, 简记为 P2G)。

为了将网格速度信息转换到内部粒子 (Grid to Particle, 简记为 G2P) 上，最直观的办法是在粒子上采样空间网格上的速度场，即

$$v_p^n = \sum_i v_i^n B_i(x_p^n) \quad (4.12)$$

然而实际上, 这样的采样办法只取得了速度的零阶信息, 在实践中表现出来过粘的结果 [\*\*], 其中一种解决方案为保存空间速度场一阶速度信息, 该方式被称为 APIC[\*\*]。即对每个粒子额外添加  $A_p^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 一般而言  $A_p^n$  选取为速度场在  $x_p^n$  处的梯度, 在 APIC 方法中选择为梯度的近似量。

$$A_p^n = \sum_{\mathbf{i}} \frac{4}{h^2} B_{\mathbf{i}}(x_p^n) v_{\mathbf{i}}^n (x_{\mathbf{i}} - x_p^n)^T \quad (4.13)$$

对于接近表面的内部粒子  $\mathcal{V}_S = \{p_s \in \mathcal{V} : p_s = \arg \min_{p \in \mathcal{V}} \|p - s\|, s \in \mathcal{S}\}$ , 每一个  $p \in \mathcal{V}_S$  记  $\mathcal{N}_p = \{s \in \mathcal{S} : s = \arg \min_{s \in \mathcal{S}} \|p - s\|\} \cup \{o_s \in \mathcal{O} : s = \arg \min_{s \in \mathcal{S}} \|p - s\|\}$  为其相关的表面粒子集合。这里  $p_s \in \mathcal{V}_S$  的近似梯度计算方式修正为

$$A_{p_s}^n = \frac{1}{2C_{p_s} + 1} \sum_{q \in \mathcal{N}_{p_s} \cup \{p_s\}} \sum_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}(x_q^n) \frac{4}{h^2} v_{\mathbf{i}}^n (x_{\mathbf{i}} - x_{p_s}^n)^T \quad (4.14)$$

在网格转粒子的步骤中添加了梯度信息的传递之后, 我们修正 P2G 的过程。在每一个粒子上, 我们使用仿射函数来近似粒子所携带的速度  $v_p^n(x) = v_p^n + A_p^n(x - x_p^n)$ , 这里动量传递据此修改为

$$(mv)_{\mathbf{j}}^n = \sum_p m_p v_p^n(x_{\mathbf{j}}) B_{\mathbf{j}}(x_p^n) \quad (4.15)$$

同样的, 表面粒子  $s \in \mathcal{S}$  与对应的嵌入粒子  $o_s \in \mathcal{O}$  也赋予对应的梯度信息,  $A_s = A_{o_s} = A_{p_s}$ , 这里  $p_s$  为  $\mathcal{V}$  中距离  $s$  最近的内部粒子, 同样使用 (4.15) 式来传递到网格上。

在计算过程中, 我们使用了  $A_p^n$  在近似替代  $t^n$  时刻速度场在位置  $x_p^n$  处的梯度, 因此我们在更新形变梯度  $F_p^n$  时, 为了节省计算量, 我们也直接将  $\nabla v_p^n$  替代为  $A_p^n$ , 即

$$F_p^{n+1} = (I + A_p^{n+1}) F_p^n \quad (4.16)$$

### 4.3.3 网格上力的计算

网格上由弱可压缩模型带来的力如下

$$f_{\mathbf{j}}^{liquid} = -\lambda \sum_p (det(F_p^n) - 1) \nabla B_{\mathbf{j}}^T(x_p^n) \quad (4.17)$$

由表面张力带来的效果为

$$f_{\mathbf{j}}^{surface} = k \sum_{s \in \mathcal{S}} (I - \tilde{n}_s \tilde{n}_s^T) \nabla B_{\mathbf{j}}(x_s^n)^T A_s \quad (4.18)$$

因此网格上的速度场更新为

$$\hat{v}_j^{n+1} = \frac{1}{m_j^n} (m_j^n v_j^n + \Delta t f_j^{liquid} + \Delta t f_j^{surface} + \Delta t m_j^n g) \quad (4.19)$$

此处  $g$  为重力加速度。

#### 4.4 计算流程

在前文给出了每一个步骤的计算细节之后，我们在本节总结算法的计算流程。首先我们的输入为粒子集合  $\mathcal{V}$  及每个粒子  $p \in \mathcal{V}$  的预置位置  $x_p^0$  以及质量  $m_p$ 。默认初始化速度  $v_p^0 = 0$ ，形变梯度与速度梯度为单位阵  $I$ 。之后根据粒子的位置  $x_p^n$  激活相邻的空间网格，并在激活网格上初始化  $m_i$  与  $v_i$  的内存，同时生成 **Marching cube** 所需的距离场。接下来，在激活的稀疏网格使用 **Marching Cube** 算法提取距离场的水平集网格，并使用泊松圆盘采样在网格面上均匀采取表面粒子  $\mathcal{S}$ 。然后我们估计表面粒子  $s \in \mathcal{S}$  的偏移量以及生成嵌入粒子  $\mathcal{O}$ ，该过程用到的临近粒子搜索依然可以利用稀疏网格  $\mathcal{G}$  做空间哈希。在有了偏移量之后，将偏移量和粒子位置作为输入，利用 **LSPIA** 拟合隐式曲面，并获得连续的法向。在这之后进行 **P2G**, **GOP**, **G2P** 三个步骤并更新粒子状态获得  $x_p^{n+1}, v_p^{n+1}, F_p^{n+1}, A_p^{n+1}$ ，并作为下一帧的输入。同时我们输出当前时刻的  $x_p^{n+1}$  用作渲染。流程图见 4.7。

#### 4.5 实验结果

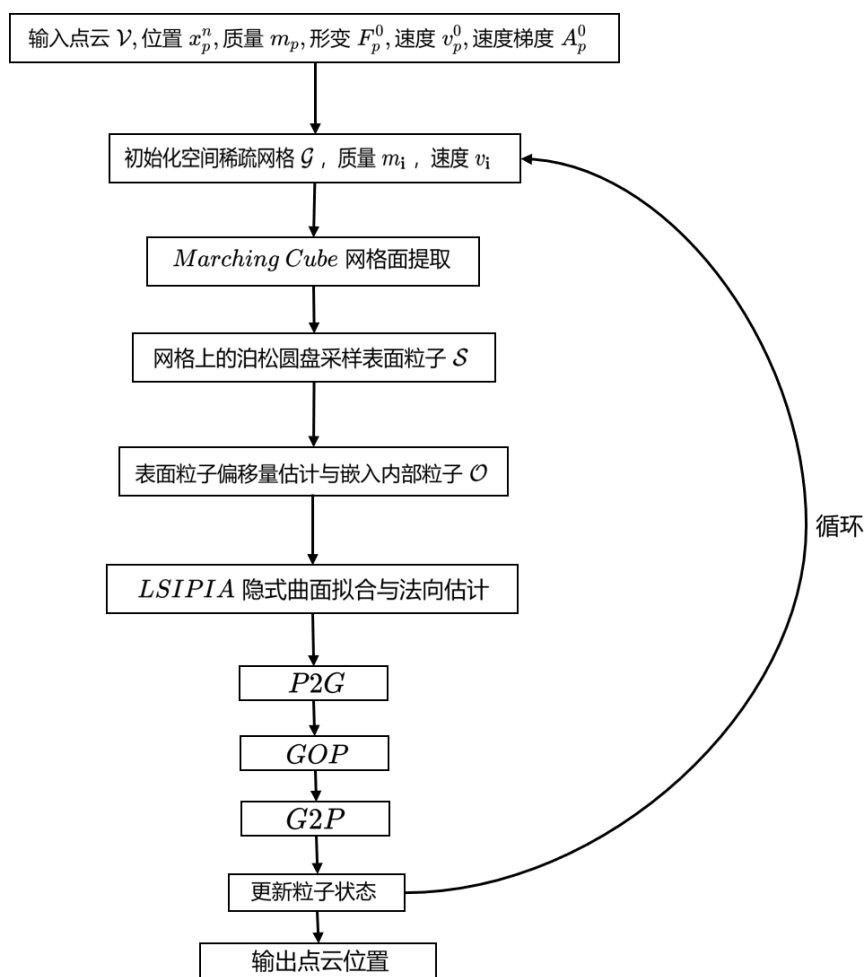


图 4.7 计算流水线

## 5 总结与展望

### 5.1 本文工作总结

### 5.2 未来工作展望

## 参考文献

- [1] Ernest P . The philosophy of mathematics education by Paul Ernest[J]. Social Epistemology.
- [2] Bishop A J. Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1988, 20(4):195.

## 作者简历

张某某，男，19XX 年，汉族，浙江杭州人。20XX 年考入浙江大学数学科学学院（信息与计算科学专业），20XX 年本科毕业，获得理学学士学位。20XX 年进入浙江大学数学科学学院计算数学专业研究生学习至今。

### 1. 工作经历

- 20XX-20XX 年，在 XX 公司 XX 部门 XX 岗位
- 20XX-20XX 年，在 XX 公司 XX 部门 XX 岗位

### 2. 参与的项目

- 20XX-20XX 年，参与 XXXX 项目
- 20XX-20XX 年，负责 XXXX 项目

### 3. 攻读学位期间发表的论文

- 猪八戒, 猪悟能, 天蓬元帅, 等. 论流体食物的持久保存 [D]. 硕士学位论文. 北京: 广寒宫大学, 2005