**雪花生长--《Novel Discretization and Numerical Solver for Non-Fourier Diffusion》**

诸如烟雾在空气中扩散、海绵在水中膨胀、油墨在纸上扩散、热致材料膨胀/收缩等扩散现象，是我们日常生活和自然不可或缺的一部分。与其他物理过程相比，扩散通常会影响材料的组成，因此可以驱动有趣的动力学，包括复杂的物理现象，如传热和传质、多孔混合物的动力学、热流固结构相互作用等。因此，为了准确地描述这类过程，扩散的基本模型，即扩散本构律起着至关重要的作用。最流行的扩散模型是基于菲克/傅里叶定律，这个模型已被公认能够描述大多数感兴趣的问题。毫无疑问，傅立叶型模型几十年来一直在计算机图形学中占据主导地位。然而，它可以通过严格的数学推导表明，扩散速度在基于傅里叶的模型是无限的，这与现实世界差距甚远。该文将C-F扩散模型引入计算机图形学，该模型首先从非均衡统计力学玻尔兹曼输运方程的角度从根本上解释了扩散，并扩散的无限传播速度问题，还捕捉扩散驱动物理的一些最具特征的视觉方面，如水凝胶膨胀、烟雾流动的有限扩散域、墨水在水中的分散、树突和雪花的生长等。为了模拟该模型对交错MAC网格的影响，文章提出了一种新的半隐式离散化方法，该方法可以得到比傅里叶系统更好的条件线性系统。这使得迭代的Krylov求解器，如预条件共轭梯度(PCG)在相对较少的迭代中收敛，而不是传统的傅立叶型扩散。为了更快地收敛，该文设计了一个适合共轭梯度跟随的几何多重网格预调节器。

文章的方法使用一种新的双场对流扩散公式来模拟扩散驱动效应使用广义本构模型。传统的傅立叶型扩散方程采用单场公式，主要未知量是扩散量，而在该文的框架中，扩散量及其相关通量都被视为主要未知量。这使我们能够分析扩散过程和背景物质动力学之间的相互作用/竞争。由于扩散的传播速度有限，该文定义了一个特定的扩散过程分类，并提供了扩散量的有效域和零域的数学预测。这些特殊现象是通过模拟一个理想的例子来说明的，在一个理想的例子中，源在均匀背景速度介质中释放扩散物质。所提出的扩散分类方法也表明，该模型能够较好地恢复传统的傅立叶类型的扩散效果。更现实的例子，包括墨水分散在水和烟流，这些都是非傅里叶效应在真实世界的扩散过程。

在模拟流体饱和度变化引起的孔隙弹性材料动力学时，文章通过数值实验证明了其提出方法的通用性。本文采用材料点法(MPM)模拟多孔材料。固体连续体包含“空隙”，流体在其中扩散，改变局部饱和度并驱动运动。当饱和度在波状传播中发生变化时，产生的运动是扩散波和应力波之间的相互作用。与传统的傅立叶模型相比，C-F模型得到的运动更具有动态性。与此同时，文章使用的孔隙力学运动学假设类似于Ding等人在2019的做法类似，当然这些人的做法仅仅考虑了傅里叶类型的扩散现象。文章也使用了一个水凝胶在水中膨胀的例子来说明，C-F模型在处理这类问题时比传统的傅里叶扩散问题能够达到更逼真的效果。

文章还利用其方法来研究自然界中树枝晶和雪花生长的各种模式，这类问题实际可以被表述为一个相变问题。文章用相场模型建立了该问题的控制方程，通过引入广义C-F扩散模型，修正了经典的基于傅里叶的相场模型；具体地说，将相方程和传热方程重新表述为广义形式，从而得到一个强耦合的非傅里叶系统。有关相变问题可以在 Kim 2006年，Kim and Lin 2003年，Yang 2017年的文章中找到。然而这些数学模型都有传统的傅里叶扩散定律主导，其对应的偏微分方程结果为抛物型。然而，使用C-F扩散模型时，其对应了一个双曲形扩散方程。文章同样将C-F模型推广用于模拟树脂，珊瑚礁，雪花生长。在数值求解方面，文章用于非傅里叶扩散求解而提出的一个多重网格求解器还可以用在相变参数方程和热传导方程上。总结起来，文章的贡献如下：

1）首次引入C-F扩散模型到计算机图形学中。

2）一个半隐式离散求解格式用于一般的扩散对流方程

3）一个几何多重网格预条件共轭梯度法求解器用于加速非傅里叶扩散。

4）使用C-F模型进行扩散分类，用于预测对流扩散效果中的有限扩散域。

5）使用该文提出的求解器进行多孔弹材料动力学的高分辨率模拟