MATEMATIKA TEKNIK

TURUNAN

Dosen Pengampu:

Tahap Persiapan Bersama

Fakultas Teknik dan Kejuruan

Semester Ganjil 2024/2025

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

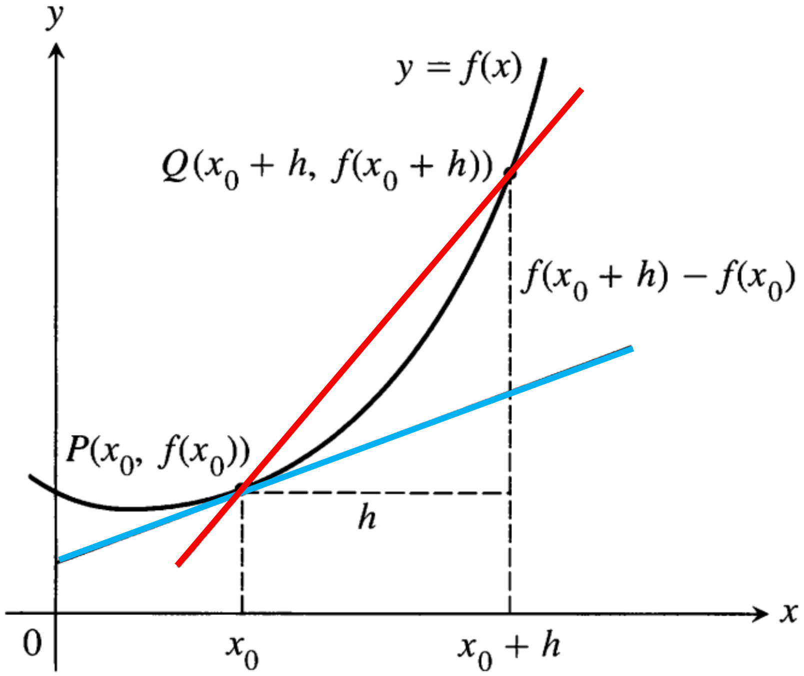
Mahasiswa mampu menerapkan turunan dalam **analisis laju perubahan dan optimasi fungsi dalam konteks permasalahan teknik.**

INDIKATOR

1. Mahasiswa mampu mendefinisikan turunan.
2. Mahasiswa memahami aturan dasar diferensiasi, termasuk aturan rantai.
3. Mahasiswa mampu menerapkan turunan dalam menyelesaikan masalah optimasi dan analisis laju perubahan (rate of change).

Bentuk Limit Khusus: Pengenalan Turunan

Perhatikan ilustrasi berikut:



Perhatikan garis yang berwarna merah

Garis berwarna merah melalui dua buah titik yaitu titik $P\ (x_0, f(x_0))$ dan titik $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Persamaan garis berwarna merah dapat dihitung dengan:

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0}$$

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0) \ldots Eq(1)$$

Perhatikan garis yang berwarna biru

Persamaan garis yang biru dapat dituliskan dengan:

$$y = m(x - x_0) + f(x_0) \ldots Eq(2)$$

Bila kita ingin mendapatkan nilai *slope, m,* maka kita akan mencoba mendekatkan titik $(x_0 + h)$ ke titik x_0 dengan mengasumsikan $h \to 0$. Maka dengan asumsi tersebut dan dari Eq (1) & Eq (2) kita akan mendapatkan bentuk:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ldots Eq(3)$$

Persamaan *slope* garis, *m*, yang ditunjukkan pada Eq(3) (bila limit tersebut ada) disebut dengan **turunan dari fungsi $f(x)$ di titik x_0**

Definisi Formal dan Aturan-aturan pada Turunan

Definisi Formal Turunan Fungsi

Bila $f(x)$ adalah fungsi yang terdefinisi pada sebuah interval I, dan kita asumsikan interval I merupakan sebuah interval terbuka, kemudian $\Delta x \in I$, maka fungsi $f(x)$ kita katakan memiliki turunan ($differentiable$), jika:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots ada\ (exist)$$

Bila limit di atas ada, kita dapat menuliskan persamaan turunan sbb:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Syarat perlu untuk fungsi bisa memiliki turunan: **fungsi HARUS kontinu.**

Perhatikan!

Fungsi tidak kontinu → fungsi tidak memiliki turunan

Fungsi kontinu → fungsi ***mungkin*** memiliki turunan

Fungsi yang memiliki turunan → ***pasti*** fungsi yang kontinu

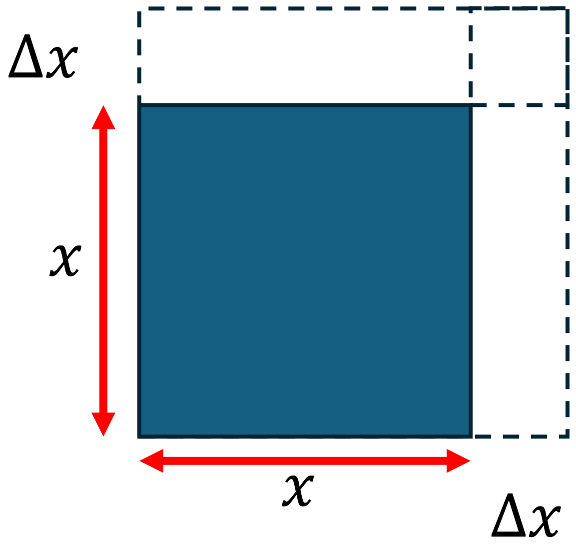
Notasi Turunan

There are many ways to denote the derivative of a function $y = f(x)$. Besides $f'(x)$, the most common notations are these:

y'	"y prime"	Nice and brief but does not name the independent variable
$\dfrac{dy}{dx}$	"$dy \quad dx$"	Names the variables and uses d for derivative
$\dfrac{df}{dx}$	"$df \quad dx$"	Emphasizes the function's name
$\dfrac{d}{dx}f(x)$	"ddx of $f(x)$"	Emphasizes the idea that differentiation is an operation performed on f (Fig. 2.1)
$D_x f$	"dx of f"	A common operator notation
$\dot{y}$	"y dot"	One of Newton's notations, now common for time derivatives

We also read dy/dx as "the derivative of y with respect to x," and df/dx and $(d/dx)f(x)$ as "the derivative of f with respect to x."

Ilustrasi Turunan dari Definisi Formal



Misalkan fungsi f merupakan fungsi yang mendefinisikan luas sebuah persegi dengan panjang sisi x:

$$L(x) = x^2$$

Asumsikan persegi kita mengalami perubahan perluasan. Jika kita ingin mengetahui besarnya perubahan perluasan yang terjadi pada persegi kita, maka:

$$L(x + \Delta x) - L(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$$

$$L(x + \Delta x) - L(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Turunan pada dasarnya menggambarkan besarnya perubahan luas terhadap perubahan panjang:

$$\frac{L(x + \Delta x) - L(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Dan bila $\Delta x \to 0$, maka kita akan dapatkan hasil akhirnya adalah $2x$

(***seem familiar?***): $L(x) = x^2; \;\; L'(x) = 2x$

Contoh Lain:

$f(x) = x^3; \qquad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$f'^{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x - x)\left((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(x) + (x)^2\right)}{\Delta x} \ldots \textit{lihat kotak biru}$$

$$f'^{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right)}{\Delta x}$$

$$f'^{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right) = 3x^2$$

Reminder! Bentuk polynomial:

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Bila kita mencoba untuk membuat persamaan umum dari dua contoh sebelumnya, kita akan mendapatkan, untuk:

$$f(x) = x^n$$

maka turunannya adalah:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

(kamu bisa buktikan dengan langkah yang sama pada contoh ☺☺☺)

Contoh Lain (Trigonometri):

$f(x) = \cos x\,; \qquad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \ldots \textit{lihat kotak biru}$$

$$f'^{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \ldots \textit{lihat kotak ungu}$$

$$f'^{(x)} = (\cos x\,(0) - \sin x\,(1))$$

$$f'^{(x)} = -\sin x$$

Dari sini lah tanda minus muncul pada turunan $\cos x$

Reminder! Identitas trigonometri:

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

Reminder! Teorema nilai apit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Contoh Lain (Trigonometri):

$f(x) = \sin x\,; \qquad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \ldots \textit{lihat kotak biru}$$

$$f'^{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin x \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \ldots \textit{lihat kotak ungu}$$

$$f'^{(x)} = (\sin x\,(0) + \cos x\,(1))$$

$$f'^{(x)} = \cos x$$

Reminder! Identitas trigonometri:

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

Reminder! Teorema nilai apit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Summary:

$f(x) = \cos x\,; \qquad f'^{(x)} = -\sin \mathrm{x}$

$f(x) = \sin x\,; \qquad f'(x) = \cos x$

Bagaimana turunan dari penjumlahan fungsi?

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua fungsi yang memiliki turunan:

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big((f+g)(x+\Delta x)\big) - (f+g)(x)}{\Delta x}$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)}{\Delta x} \ldots \textit{gunakan aturan penjumlahan limit}$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \ldots \textit{kelompokkan fungsi } f \textit{ dan } g$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Cara ini berlaku juga pada kasus turunan dari pengurangan fungsi.
Summary:
Turunan dari penjumlahan/pengurangan fungsi merupakan hasil penjumlahan/pengurangan dari turunan masing-masing fungsi:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Turunan dari perkalian fungsi

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua fungsi yang memiliki turunan:

$$(f.g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big((f.g)(x+\Delta x)\big) - (f.g)(x)}{\Delta x}$$

$$(f.g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)\big) - \big(f(x).g(x)\big)}{\Delta x} \ldots \textit{gunakan aturan perkalian limit}$$

Kita akan menggunakan sedikit "trick" pada bagian ini:

$$(f.g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\big(f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)\big) - f(x).g(x+\Delta x)\right] + \left[f(x).g(x+\Delta x) - \big(f(x).g(x)\big)\right]}{\Delta x}$$

$$(f.g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} f(x)\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$(f.g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

Summary:

$$(f.g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

Atau di SMA/SMK sering dituliskan:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = uv' + vu'$$

Turunan dari pembagian fungsi (1/2)

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua fungsi yang memiliki turunan:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) \dots \mathit{kita\ akan\ menyamakan\ penyebut}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)}\right)$$

Kembali kita akan menggunakan "trick" pada bagian ini:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)}\right)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{g(x)\big(f(x + \Delta x) - f(x)\big) - f(x)\big(g(x + \Delta x) - g(x)\big)}{g(x + \Delta x)g(x)}\right)$$

Turunan dari pembagian fungsi (2/2)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{g(x)\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x+\Delta x)g(x)}\right)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left(g(x)\frac{\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)}{\Delta x} - f(x)\frac{(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x}\right)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g(x)^2}[g(x)f'(x) - f(x)g'(x)]$$

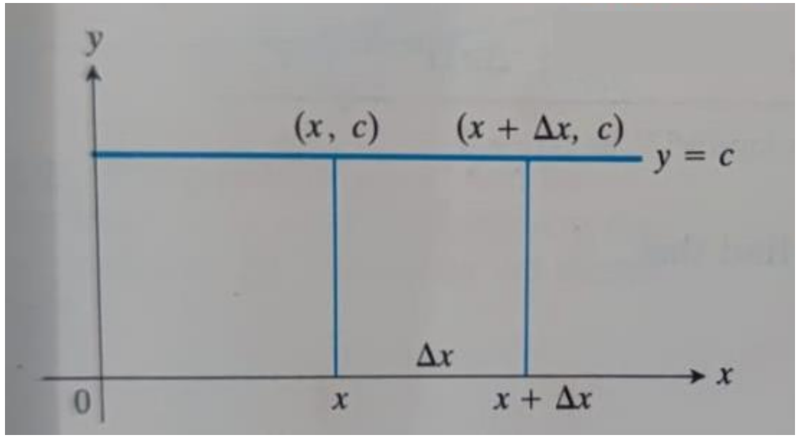
Summary:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Atau di SMA/SMK sering dituliskan:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx}}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Bagaimana bila Anda memiliki fungsi yang konstan?



Bila $y = f(x)$ adalah sebuah fungsi konstan dengan nilai konstan c, maka:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 0$$

nilainya akan selalu nol.

Fungsi dengan pengali konstan

Bila c adalah pengali konstan, maka:

$$(cf)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$(cf)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

Rekapitulasi Aturan-aturan dalam Turunan

Turunan fungsi konstan:

Jika $f(x) = c$ dengan c adalah konstanta, maka untuk setiap x:

$$f'(x) = 0$$

Turunan fungsi dengan pengali konstan:

Jika c adalah pengali konstan:

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

Turunan fungsi dengan x pangkat bilangan riil positif:

$$f'(x^n) = nx^{n-1}$$

Turunan dari penjumlahan/pengurangan fungsi (disebut juga turunan bersifat linier):

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Turunan dari perkalian fungsi

(disebut juga Aturan Leibniz):

$$(f.g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

Turunan dari pembagian fungsi:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Rekapitulasi Turunan Fungsi Trigonometri

Fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ terdeferensialkan di seluruh bilangan riil dengan:

$D_x(\sin x) = \cos x$

$D_x(\cos x) = -\sin x$

Dengan memanfaatkan aturan-aturan dalam turunan dan turunan dasar trigonometri akan diperoleh:

$D_x(\tan x) = \sec^2 x$

$D_x(\cot x) = -\csc^2 x$

$D_x(\sec x) = \sec x \tan x$

$D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$

Penting untuk diingat bahwa rumus turunan dari $\sin x$ dan $\cos x$ diperoleh dengan asumsi bahwa **x diukur dalam radian, bukan derajat.**

Sebagai Latihan Anda, buktikanlah turunan dari 4 fungsi trigonometri lanjutan di atas.

Latihan #1

Tentukan turunan-turunan dari fungsi:

1. $2x^3 + 3x$

2. $(4x^3 + x - 5)(x^2 + 2x)$

3. $\frac{x^2+1}{2x-1}$

Aturan Rantai (The Chain Rule) pada Turunan Fungsi Komposit

Aturan Rantai (The Chain Rule)

Aturan rantai bisa kita gunakan untuk mencari fungsi turunan yang merupakan komposit dari dua fungsi turunan yang berbeda.

Misalkan, $y = f(u)$ dan $u = g(x)$:

$$\boxed{(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c)}$$

atau:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Contoh:

Tentukan turunan dari:

$y = (x^2 + 3x)^5$

Penyelesaian:

Kita asumsikan:

$y = u^5$ dimana $u = x^2 + 3x$

Dengan aturan rantai:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^5)}{du} \cdot \frac{d(x^2 + 3x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4 \cdot 2x \;\; \ldots substitusi\ kembali\ nilai\ u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^5)}{du} \cdot \frac{d(x^2 + 3x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^2 + 3x)^4 \cdot 2x$$

Try it yourself:

Cobalah aturan rantai untuk menentukan turunan dari fungsi trigonometri berikut:

$$y = \sin(x^2 + 1)$$

Latihan #2:

1. Tentukan nilai $\frac{dy}{dt}$ saat $t = -1$ bila $y = x^3 + 5x - 4$ dan $x = t^2 - 1$
2. Tentukan persamaan $\frac{dy}{d\text{t}}$ dalam fungsi t, bila $y = x^3 - 3$ dan $x = t^2 - 1$
3. **Kasus pendulum sederhana dan variasi suhu:** Untuk osilasi pendulum pada amplitudo kecil diketahui nilai periode pendulum (T) ditentukan dari:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dimana L adalah panjang pendulum, dan g adalah nilai konstan percepatan gravitasi.

Diketahui pula bahwa saat terjadi perubahan suhu, C, panjang pendulum dapat memanjang dan memendek dengan laju perubahan:

$$\frac{dL}{dC} = kL$$

Dimana k adalah sebuah nilai konstanta. Tentukanlah persamaan yang menunjukkan laju perubahan periode terhadap perubahan suhu.

Turunan Implisit

Turunan implisit y terhadap x

Misalkan diberikan fungsi dua variable, f, g, dengan persamaan kurva:

$$f(x, y) = g(x, y)$$

Bisakah kita menentukan turunan y terhadap x?

Kita bisa melakukannya dengan menganggap y sebagai fungsi dari x (dengan kata lain, $y(x)$), dan menurunkan kedua ruas persamaan ini terhadap x. Cara ini disebut sebagai **turunan implisit**.

Contoh:

Misalkan kita diminta untuk menentukan dy/dx dari persamaan berikut:

$$xy = x^2 + y^2$$

Kita bisa menurunkan kedua ruas persamaan ini terhadap x:

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right)$$

Kemudian kita terapkan aturan perkalian untuk ruas kiri, dan aturan penjumlahan untuk ruas kanan:

$$\frac{dx}{dx} \cdot y + \frac{dy}{dx} \cdot x = \frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx}$$

Karena kita mengganggap y sebagai sebuah fungsi dari x, kita perlu menerapkan aturan rantai untuk $\frac{dy^2}{dx}$:

$$1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Selanjutnya kita kelompokkan dy/dx pada ruas kiri:

$$(x - 2y)\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Aplikasi dari Turunan Implisit (1)

Turunan Invers Fungsi Trigonometri: $\boldsymbol{arcsin(x)}$

Bila $y = \arcsin(x)$ berapakah dy/dx?

$y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin y$

Dengan turunan implisit dan aturan rantai:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

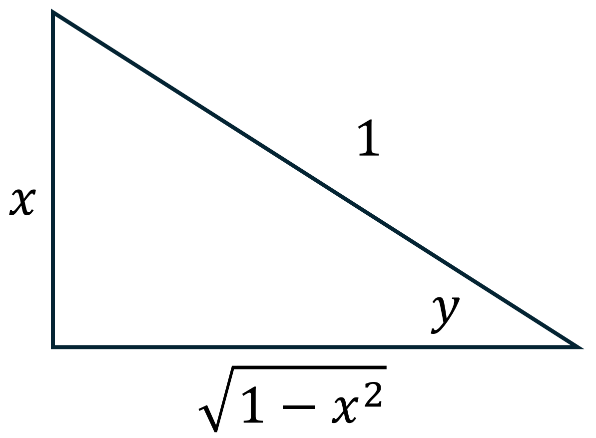
$$1 = \frac{d}{dy}(\sin y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = (\cos y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Kemudian kita eksplorasi sifat trigonometri dengan segitiga siku-siku:

$x = \sin y$ pada segitiga siku-siku:



$$\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aplikasi dari Turunan Implisit (2)

Turunan Invers Fungsi Trigonometri: $\boldsymbol{arccos(x)}$

Bila $y = \arccos(x)$ berapakah dy/dx?

$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos y$

Dengan turunan implisit dan aturan rantai:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\cos y)$$

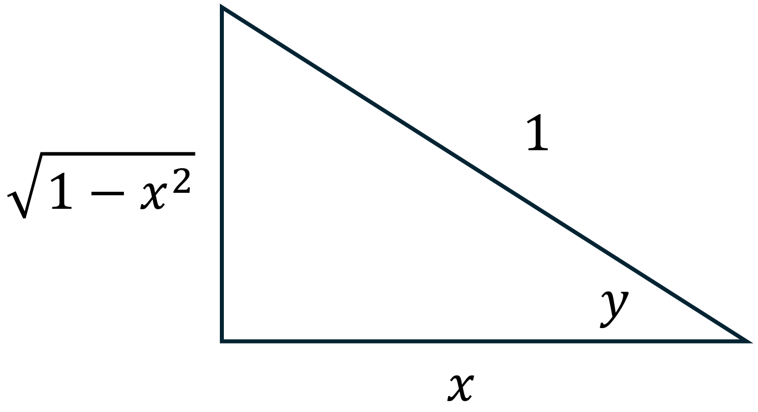
$$1 = \frac{d}{dy}(\cos y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = (-\sin y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

Kemudian kita eksplorasi sifat trigonometri dengan segitiga siku-siku:

$x = \cos y$ pada segitiga siku-siku:



$$\sin y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aplikasi dari Turunan Implisit (3)

Turunan Fungsi Pangkat Rasional

Bila

$$y = f(x) = x^{\frac{p}{q}}, \qquad p, q \in Z$$

Bagaimana bentuk dari $f'(x)$?

$$y = x^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow y^q = x^p$$

lakukan turunan implisit:

$$\frac{d}{dx}(y^q) = \frac{d}{dx}(x^p)$$

gunakan aturan rantai:

$$\frac{d}{dy}(y^q) \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1}$$

$$q(y^{q-1}) \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

substitusikan kembali $y = x^{\frac{p}{q}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-\frac{p}{q}(q-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-p+\frac{p}{q})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot x^{\left(\frac{p}{q}-1\right)}$$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa sifat turunan pada fungsi dengan pangkat rasional sama dengan turunan pada fungsi dengan pangkat bilangan bulat

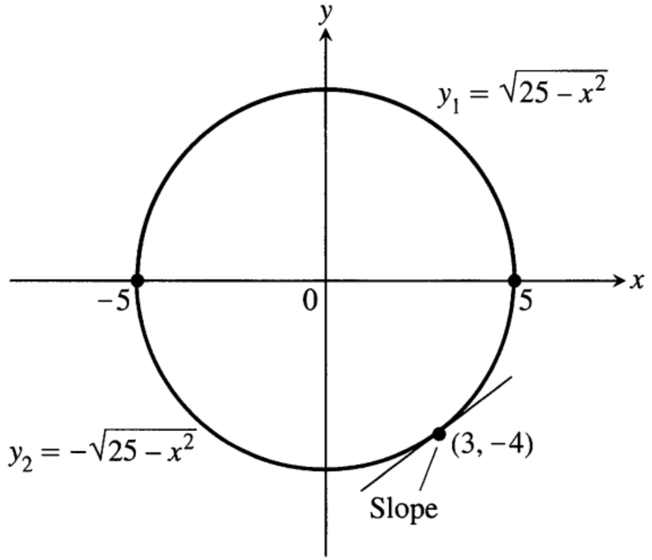
Summary:

$$(f)'\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} \cdot x^{\left(\frac{p}{q}-1\right)}, \qquad p, q \in Z$$

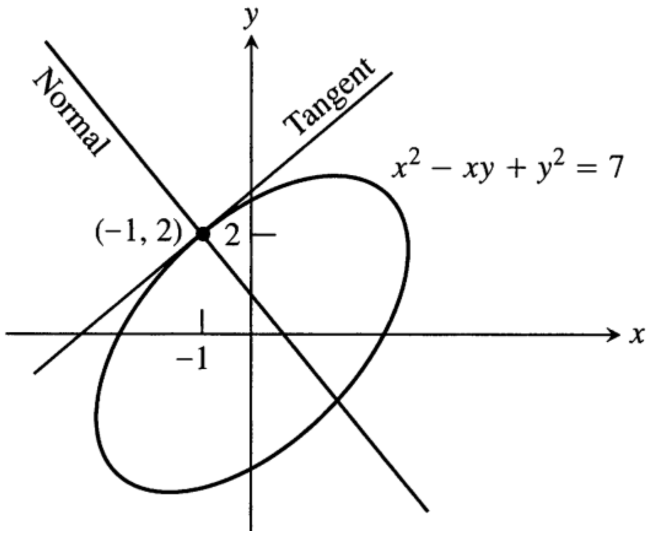
Latihan #3

1. Tentukan nilai dy/dx bila $2y = x^2 + \sin y$
2. Tentukan nilai *slope* dari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 25$ pada titik $(3, -4)$. Lihat gambar 1.

3. Tentukan *tangent* dan normal dari kurva $x^2 - xy + y^2 = 7$ pada titik $(-1,2)$. Lihat gambar 2.



Gambar 1



Gambar 2

Turunan Ordo Tinggi

Turunan Orde Tinggi

Turunan kedua dan ketiga dari fungsi f di titik x beruturut-turut ditulis $f''(x)$ dan $f'''(x)$ dimana $f''(x)$ didapat dengan menurunkan $f'(x)$ sebanyak sekali dan $f'''(x)$ didapat dengan menurunkan $f''(x)$ sekali lagi. Turunan ke n dari fungsi f di titik x ditulis dalam bentuk $f^n(x)$

Misalkan: Pada kasus pergerakan partikel, bila $s(t)$ adalah posisi partikel pada saat t, maka kecepatan partikel, $v(t)$, yang merupakan perubahan posisi terhadap waktu dituliskan dengan $s'(t) = \frac{ds}{dt}$, dan percepatan, $a(t)$, yang merupakan perubahan kecepatan terhadap waktu dapat dituliskan dengan $s''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2(s)}{dt^2}$

Next week

Great job! Today, we’ve successfully completed the discussion on the concept of derivatives. Don’t forget to keep practicing to deepen your understanding, because next week we’ll dive into an even more exciting topic: **applications of derivatives!** Stay motivated, and see you next week