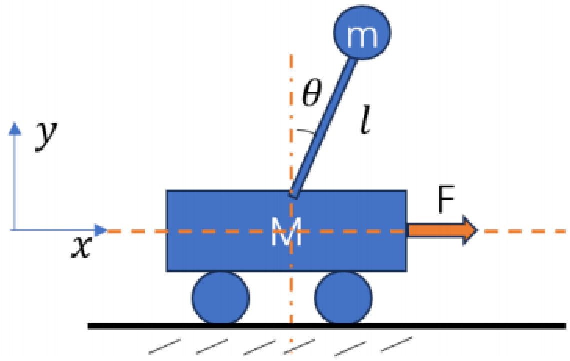
智能控制技术
实验报告

实验名称	专家控制
姓　名	
学　号	
提交日期	November 28, 2024
指导老师	刘山

1 题目



如图所示为车载倒立摆系统，一辆小车在水平轨道上移动，小车上有一个可绕固定点转动的倒立摆。控制小车在水平方向的移动可使摆杆维持直立不倒，这和手掌移动可使直立木棒不倒的现象类似。

忽略车轮与地面的摩擦力等阻力，可推导出车载倒立摆的动力学方程如下：

$$
\begin{aligned}
(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta &= F, \\
ml\ddot{x}\cos\theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta &= 0.
\end{aligned}
$$

其中的参数如表所示：

参数	大小
摆杆质量 m	0.5 kg
小车质量 M	1 kg
摆杆转动轴心到摆杆质心的长度 l	0.5 m
摆杆与垂直向上方向的夹角 θ	$[0, \pi]$ rad
重力加速度 g	9.8 m/s^2
施加在小车上的水平外力 F	$[-F_m, F_m]$ N
小车在水平方向的位移 x	不限制

增量型离散 PID 控制算法如下：

$$
F(k) = F(k-1) + K[K_p\Delta\theta(k) + \frac{T}{T_i}\theta(k) + \frac{T_d}{T}(\Delta\theta(k) - \Delta\theta(k-1))]
$$

其中 T 为采样时间，$\Delta\theta(k) = \theta(k) - \theta(k-1)$。

若 $F_m = 25$ N, 取 $T = 0.0001$, $K_p = 200$, $T_i = 0.001$, $T_d = 10$, 设计 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_m$, $0 < K_s < 1 < K_b$，在离散 PID 控制基础上，采用专家 PID 控制方案，规则如下：

(1). 若 $|\theta(k)| \geq \theta_m$ 时，则 $F(k) = \mathrm{sgn}(\theta_m)F_m$；

(2). 若 $\theta_2 \le |\theta(k)| < \theta_m$ 时，

- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) > 0$ 时，则 $K = K_b$；
- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) < 0$ 时，
  - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) > 0$ 时，则 $K = 1$；
  - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) < 0$ 时，则 $K = K_b$。

(3). 若 $\theta_1 \le |\theta(k)| < \theta_2$ 时，

- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) > 0$ 时，则 $K = 1$；
- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) < 0$ 时，
  - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) > 0$ 时，则 $K = K_s$；
  - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) < 0$ 时，则 $K = 1$。

(4). 若 $|\theta(k)| < \theta_1$ 时，则 $K = 1$。

若小车和摆杆静止，摆杆与垂直向上方向的初始夹角 $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ rad，请：

2 问题求解

Question.1. 给出上述专家 PID 控制方案的合适参数 θ_1, θ_2, θ_m 和 K_s, K_b，通过调节 F 使倒立摆的摆杆夹角 θ 恢复并维持在期望值（$\theta_d = 0$），在 MATLAB 中进行仿真，给出位移 x、夹角 θ 和水平力 F 的变化曲线，并比较专家 PID 控制与常规 PID 控制的结果（可尝试参数 $\theta_m = 0.5$, $\theta_1 = 0.1$, $\theta_2 = 0.3$ 和 $K_s = 1$, $K_b = 1.3$，并寻找能够优化过渡过程的专家 PID 参数)。

2.1 问题分析

2.1.1 状态方程求解

倒立摆的动力学方程为：

$$(M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta + ml(\dot{\theta})^2\sin\theta) = F, \tag{1}$$

$$ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta + ml^2\ddot{\theta} = 0. \tag{2}$$

引入状态变量：

- $x_1 = x$（小车的水平位移）
- $x_2 = \dot{x}$（小车的速度）
- $x_3 = \theta$（摆杆的偏转角度）
- $x_4 = \dot{\theta}$（摆杆的角速度）

状态变量的一阶导数为：

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_3 = x_4.$$

从动力学方程中解出 $\ddot{x}$ 和 $\ddot{\theta}$：

(1). $\ddot{x}$：

$$\ddot{x} = \frac{F - m^2l^2\dot{\theta}^2\sin(\theta) - mg\sin(\theta)\cos(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)}$$

(2). $\ddot{\theta}$：

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl\sin(\theta) - ml\cos(\theta)\ddot{x}}{ml^2}$$

将以上关系代入状态空间形式：

- 状态向量：$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$
- 状态方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{F - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - mg\sin(\theta)\cos(\theta)}{M + m\sin^2(\theta)} \\ x_4 \\ \frac{mgl\sin(\theta) - ml\cos(\theta)\ddot{x}}{ml^2} \end{bmatrix}.$$

其中，控制输入 F 可由 PID 或专家 PID 控制算法计算。

然后将其写入 S-Function 模块当中去，其中我们选取连续变量，在求导的过程中会使得结果更加准确。

2.1.2 专家控制模块

在实现了 S-Function 的设计之后，我们需要实现专家控制的模块设计来实现对于系统输出力 F 的控制，因此我们可以采用 **Matlab Function** 模块来实现这个功能。

根据增量型离散 PID 控制算法：

$$F(k) = F(k-1) + K[K_p\Delta\theta(k) + \frac{T}{T_i}\theta(k) + \frac{T_d}{T}(\Delta\theta(k) - \Delta\theta(k-1))]$$

因此需要对 S-Function 的输出进行处理得到 $\Delta\theta(k)$、$\Delta\theta(k-1)$。可以通过延时模块的方法实现这个要求。

考虑专家控制规则：

(1). 若 $|\theta(k)| \geq \theta_m$ 时，则 $F(k) = \mathrm{sgn}(\theta_m)F_m$；

(2). 若 $\theta_2 \leq |\theta(k)| < \theta_m$ 时，

- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) > 0$ 时，则 $K = K_b$；
- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) < 0$ 时，
  - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) > 0$ 时，则 $K = 1$；
  - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) < 0$ 时，则 $K = K_b$。

(3). 若 $\theta_1 \leq |\theta(k)| < \theta_2$ 时，

- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) > 0$ 时，则 $K = 1$；
- 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) < 0$ 时，
  - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) > 0$ 时，则 $K = K_s$；

   - 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1)<0$ 时，则 $K=1$。

(4). 若 $|\theta(k)|<\theta_1$ 时，则 $K=1$。

我们需要思考 θ_1、θ_2、θ_m 的含义，即当 $\theta>\theta_m$ 时，偏离目标预期位置较远，因此要以最大力进行输出。当 $\theta<\theta_1$ 时，此时认为即将接近预期位置，因此此时的 K**最小**，为 1，即减少 PID 的控制量，使得其进入稳定状态。

2.2 算法设计

在得到状态方程之后，可以进行 S-Function 模块的设计。其中，模块的输入变量为 F，输出变量为小车的水平位移和摆杆的偏转角度。状态变量有四个，为 $[x;\dot{x};\theta;\dot{\theta}]$。由于控制输入 F 是用于影响系统动力学的力，而不是直接作为状态的组成部分。因此直馈量 **sizes.DirFeedthrough** $=0$。

函数的输入输出如下表所示

类型	**变量名**	**说明**
输入	u	控制输入：对小车施加的水平力
输出	sys	小车的水平位置以及摆杆的偏转角度
状态变量	x(1)	小车的水平位置
状态变量	x(2)	小车的速度
状态变量	x(3)	摆杆的偏转角度
状态变量	x(4)	摆杆的角速度

Table 1: 函数 demo 的输入、输出及状态变量说明

SFunction 的代码如下所示（部分注释省略，详细请见附件代码）

Listing 1: SFunction 代码

```
function [sys,x0,str,ts,simStateCompliance] = demo(t,x,u,flag)
    switch flag,
      case 0,
          [sys,x0,str,ts,simStateCompliance]=mdlInitializeSizes;
      case 1,
        sys=mdlDerivatives(t,x,u);
      case 2,
        sys=mdlUpdate(t,x,u);
      case 3,
        sys=mdlOutputs(t,x,u);
```

```
      case 4,
        sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u);
      case 9,
        sys=mdlTerminate(t,x,u);
      otherwise
        DAStudio.error('Simulink:blocks:unhandledFlag', num2str(flag));
    end

function [sys,x0,str,ts,simStateCompliance]=mdlInitializeSizes
    sizes = simsizes;           %生成sizes数据结构，信息被包含在其中
    sizes.NumContStates = 4;    %连续状态数，缺省为0
    sizes.NumDiscStates = 0;    %离散状态数，缺省为0
    sizes.NumOutputs   = 2;     %输出个数，缺省为0
    sizes.NumInputs    = 1;     %输入个数，缺省为0
    sizes.DirFeedthrough = 0;   %是否存在直馈通道，1表示存在，0表示不存在
    sizes.NumSampleTimes = 1;   %采样时间个数，至少是一个
    sys = simsizes(sizes);      %返回size数据结构所包含的信息
    x0  = [0 0 pi/4 0];         %设置初始状态
    str = [];                   %保留变量置空
    ts  = [0 0];                %设置采样时间
    simStateCompliance = 'UnknownSimState';

function sys=mdlDerivatives(t,x,u)
    M = 1; % 小车质量
    m = 0.5; % 摆杆质量
    l = 0.5; % 摆杆长度
    g = 9.8; % 重力加速度

    x1 = x(1); x2 = x(2); x3 = x(3); x4 = x(4);

    ddx = (u - m^2*l^2*x4^2*sin(x3) - m*g*sin(x3)*cos(x3)) / (M + m*sin(x3)^2);
    ddtheta = ( m*g*l*sin(x3) - m*l*cos(x3)*ddx) / (m*l^2);

    % 状态导数
    dx1 = x2;
    dx2 = ddx;
    dx3 = x4;
```

```
    dx4 = ddtheta;
    sys = [dx1; dx2; dx3; dx4];

function sys=mdlUpdate(t,x,u)
    sys = [];                       %sys表示下一个离散状态，即x(k+1)

function sys=mdlOutputs(t,x,u)
    sys = [x(1);x(3)];                      %sys表示输出，即y

function sys=mdlGetTimeOfNextVarHit(t,x,u)
    sampleTime = 1;             %设置下一次采样时间是在1s以后
    sys = t + sampleTime;       %sys表示下一个采样时间点

function sys=mdlTerminate(t,x,u)
    sys = [];
```

构建完 S-Function 模块之后，由于其输入为控制力 F，需要进行专家控制的设置来控制力 F 的大小，通过 Matlab Function 进行代码编写实现。其输入有四个，分别为当前时刻的偏转角度 *theta*，上一时刻的偏转角度 *theta_P*，上一时刻的角度偏差 *d_theta_p*，上一时刻的力 *F_p*

类型	**变量名**	**说明**
输入	theta	当前摆杆偏转角度（弧度）
输入	theta_p	前一个采样时刻的摆杆偏转角度（弧度）
输入	d_theta_p	前一个采样时刻的角速度（弧度/秒）
输入	F_prev	前一个采样时刻的控制力（牛顿）
输出	F	当前计算得到的控制力（牛顿）

Table 2: 函数 `expert_control` 的输入与输出说明

根据题目给出的专家控制的策略，编写的代码如下所示 (详细注释见代码)

Listing 2: 专家控制代码

```
function F = expert_control(theta, theta_p, d_theta_p, F_prev)
    % 定义常数
    Kp = 200;  % 比例增益
    Ti = 0.001;
    Td = 10;
    T = 0.0001; % 采样时间
```

```

    theta1 = 0.1; % 阈值  1
    theta2 = 0.3; % 阈值  2
    thetam = 0.5; % 阈值  m

    Ks = 1;   % 专家控制增益 Ks
    Kb = 1.3; % 专家控制增益 Kb
    Fm = 25;  % 最大控制力 Fm

    K = 0;

    % 计算当前增量
    delta_theta = theta - theta_p;
    abs_theta = abs(theta); % 计算  | (k)|

    % 初始化增益 K
    if abs_theta >= thetam
        % 规则 1: | (k)|    m
        F = sign(theta) * Fm; % 按方向直接输出最大力
        return;
    elseif abs_theta >= theta2 && abs_theta < thetam
        % 规则 2: 2    | (k)| <  m
        if theta*delta_theta > 0
            K = Kb; % 规则 2-1
        elseif theta*delta_theta < 0
            if delta_theta * d_theta_p > 0
                K = 1; % 规则 2-2a
            elseif delta_theta * d_theta_p < 0
                K = Kb; % 规则 2-2b
            end
        end
    elseif abs_theta >= theta1 && abs_theta < theta2
        % 规则 3: 1    | (k)| <  2
        if theta*delta_theta > 0
            K = 1; % 规则 3-1
        elseif theta*delta_theta < 0
            if delta_theta * d_theta_p > 0
                K = Ks; % 规则 3-2a
```

```
            elseif delta_theta * d_theta_p < 0
                K = 1; % 规则 3-2b
            end
        end
    elseif abs_theta < theta1
        % 规则 4: | (k)| < 1
        K = 1;
    end

    % 增量型离散PID计算
    F = F_prev + K*(Kp * delta_theta +T / Ti * theta + Td / T * (
       delta_theta - d_theta_p) );
end
```

2.3 结果展示

根据两个模块的输入输出，在 Simulink 中进行连线，连线图如下图所示

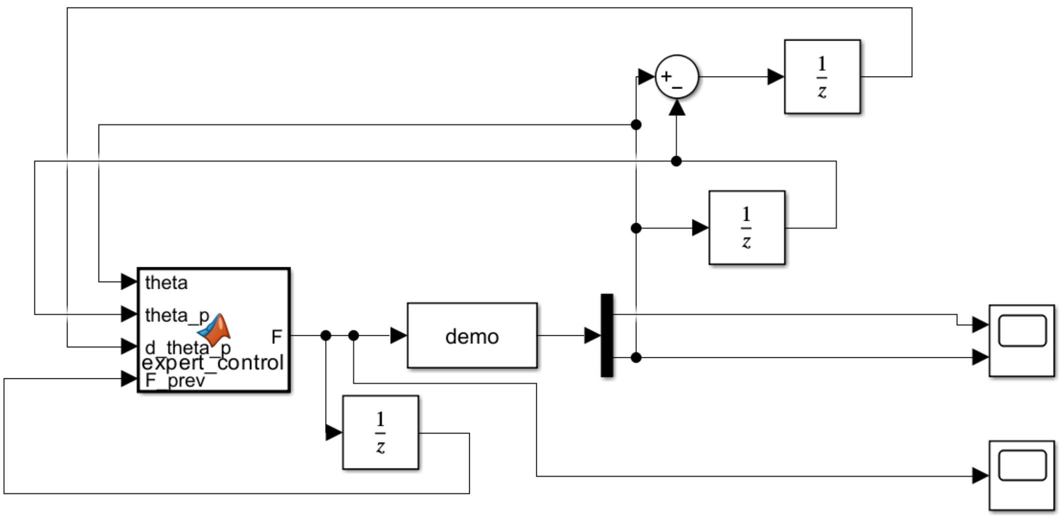


Figure 1: 专家控制连线图

仿真得到的结果如下图所示

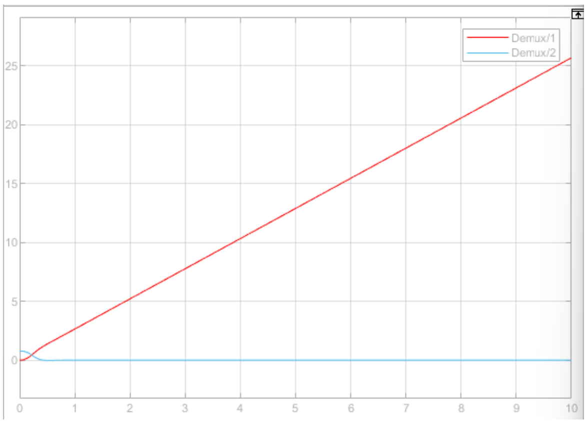


Figure 2: 位移 (红) 与夹角 (蓝)

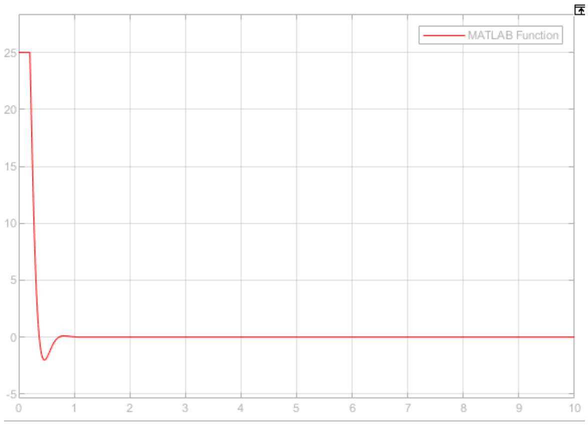


Figure 3: 水平力 F

然后设计常规 PID 控制器，保持 S-Function 模块不变，绘制的 Simulink 仿真图如下图所示

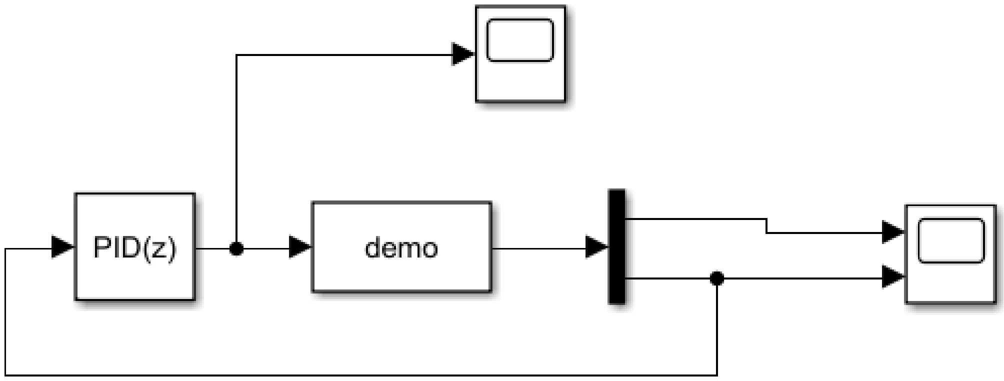


Figure 4: 常规 PID 控制连线图

结果如下图所示

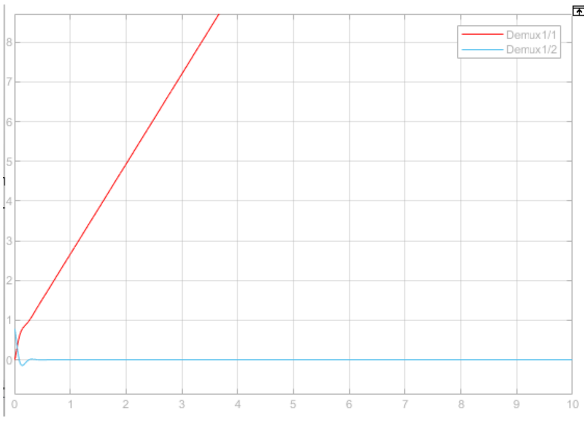


Figure 5: 位移 (红) 与夹角 (蓝)

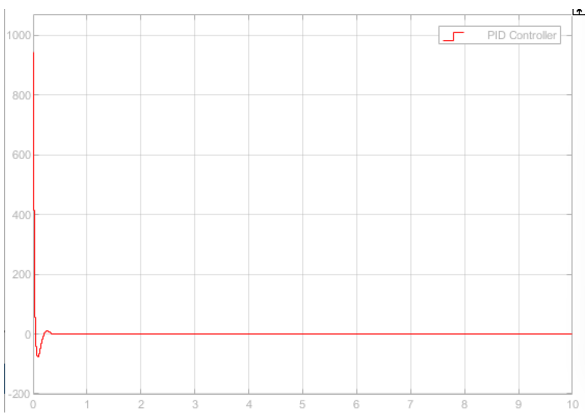


Figure 6: 水平力 F

2.4 结果分析

对比两者的结果图我们可以看出

(1). 两者的角度值最后都趋近于 0，即稳定在目标位置上。在这种情况下，小车必然以匀速运动向前行驶，从 X 的曲线是一条直线也可以证明这个结论。

(2). 将图片放大可以得到：专家控制的 θ 角稳定的时间比传统 PID 控制的时间短，而且不会出现 θ 角反向增大的情况。

(3). 从位移 X 的斜率可以看出，专家控制的速度会略大于传统控制的速度。

2.5 稳定点的 θ 不为 0

增量型离散 PID 控制算法如下：

$$F(k) = F(k-1) + K[K_p\Delta\theta(k) + \frac{T}{T_i}\theta(k) + \frac{T_d}{T}(\Delta\theta(k) - \Delta\theta(k-1))]$$

要使倒立摆的摆杆夹角 θ 稳定在一个目标值 $\theta_d \neq 0$，需要修改增量型离散 PID 控制算法中的偏差项，让控制目标为目标角度 θ_d。

在增量型离散 PID 控制算法中，$\Delta\theta(k)$ 反映当前角度与上一时刻角度的差异，而 $\theta(k)$ 表示当前的绝对偏差。如果希望系统在 $\theta_d \neq 0$ 时稳定，可以引入目标偏差修正。

修改后的增量型离散 PID 控制算法如下：

$$F(k) = F(k-1) + K[K_p(\Delta\theta(k) - \Delta\theta_d) + \frac{T}{T_i}(\theta(k) - \theta_d) + \frac{T_d}{T}((\Delta\theta(k) - \Delta\theta(k-1)))]$$

其中：

θ_d 是目标角度

$\Delta\theta_d = \theta_d - \theta_{d,\text{prev}}$（为 0，因为目标角度是常数）

因此在算法中作出以下修改：修改积分项中的 $\theta(k)$ 为 $\theta(k) - \theta_d$，使系统最终稳定在 $\theta = \theta_d$。

综上，修改后的增量型离散 PID 控制算法可以表示为：

$$F(k) = F(k-1) + K[K_p(\Delta\theta(k)) + \frac{T}{T_i}(\theta(k) - \theta_d) + \frac{T_d}{T}(\Delta\theta(k) - \Delta\theta(k-1))]$$

2.5.1 $\theta_d = 0.125\pi$

专家控制的结果如下所示

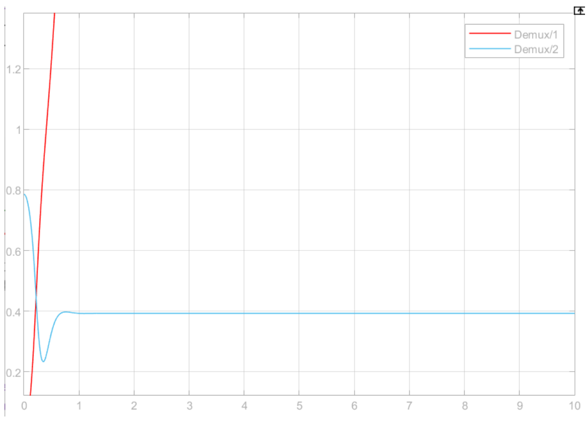


Figure 7: 位移 (红) 与夹角 (蓝)

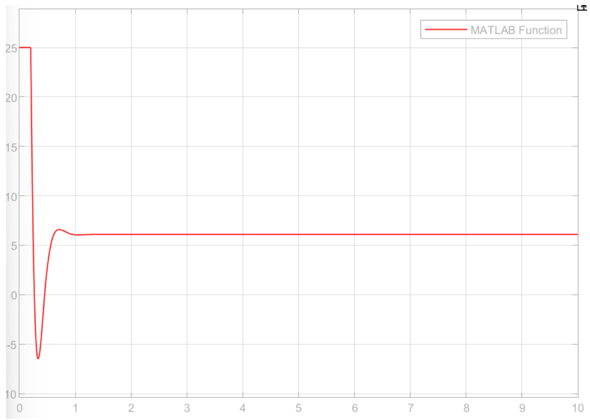


Figure 8: 水平力 F

可以发现 Figure 7 中 θ 的值不再稳定在 0 点，而是稳定在了 0.4 左右，即 0.125π 的值上。此时我们发现输出力 F 的反向最大值变大

2.5.2 $\theta_d = 0.25\pi$

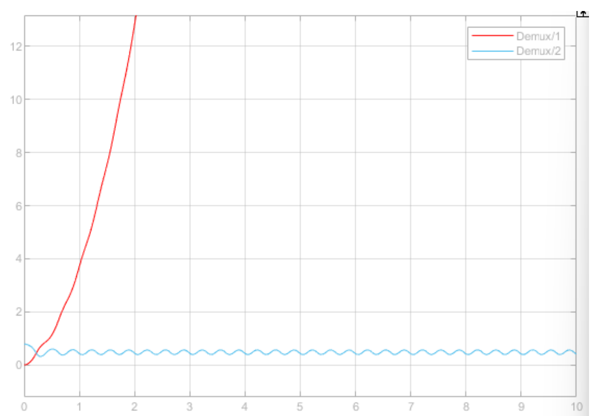


Figure 9: 位移 (红) 与夹角 (蓝)

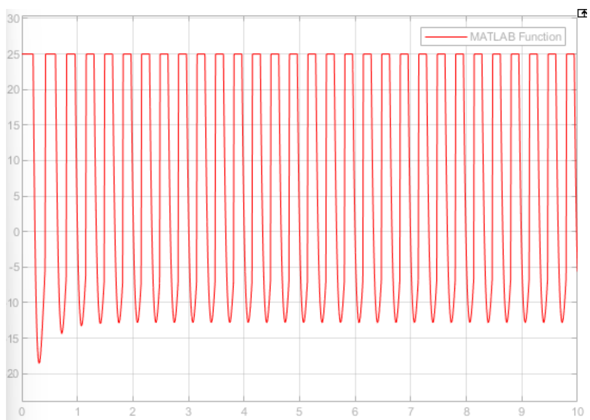


Figure 10: 水平力 F

从图中我们可以看出 θ 的值在稳定值周围振荡，因此我适当增大 T_i 的值，得到如下所示的结果，可以看到 θ 的值趋于稳定，输出力 F 的值也与之前形状保持一致

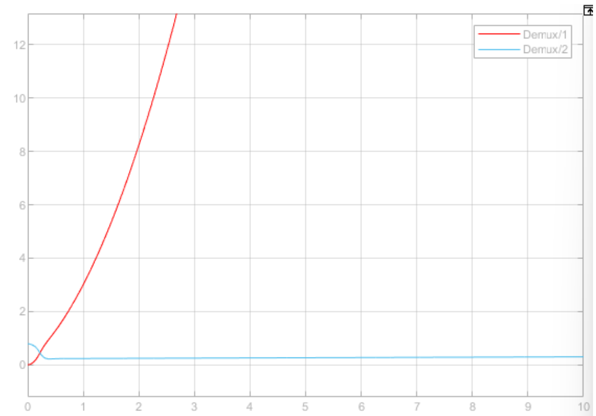


Figure 11: 位移 (红) 与夹角 (蓝)

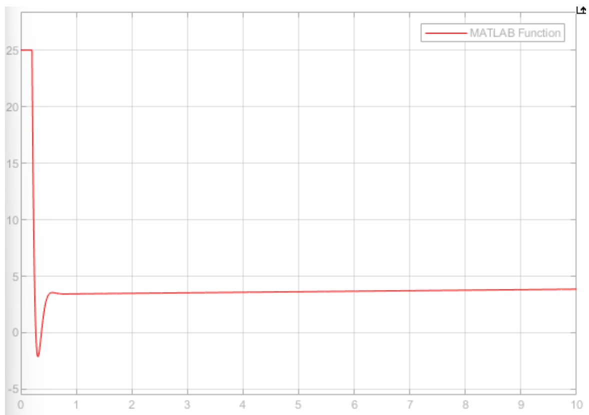


Figure 12: 水平力 F

从上面的实验中可以看出，我们可以实现在 θ 值不为 0 的点实现稳定。

Question.2. 针对不同的初始夹角 $\theta(0)$，给出专家 PID 控制的结果。(可能需要调整相关参数 θ_1, θ_2, θ_m 和 K_s, K_b)。

注：下面修改的 K 的值都是对于 $\theta < \theta_1$ 时的 K

2.6 初始角度变为 $\frac{\pi}{8}$

此时的结果如下图所示

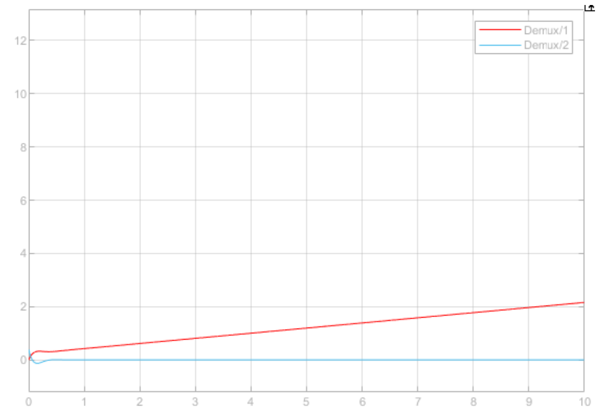


Figure 13: 位移 (红) 与夹角 (蓝)

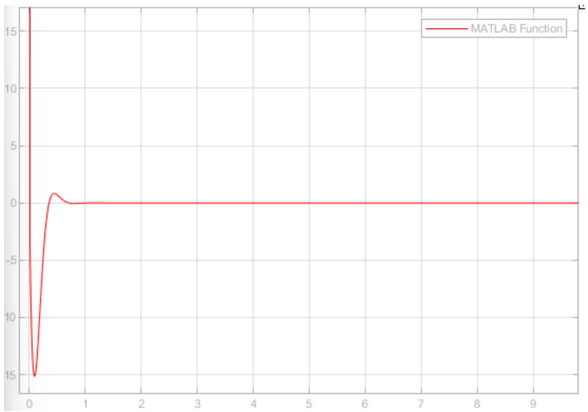


Figure 14: 水平力 F

可以看到，此时 θ 角基本保持稳定，但是发现输出力 F 出现超调，希望适当减少超调量来减小稳态时间。由于在最后时刻从 θ 曲线可以看出，其基本在预期值附近，因此此时对应的 K=1，为了使得减小超调量的目标，我们适当的增大 K 的值。将 $\theta < \theta_1$ 时的 K 值从 1 变为 1.2 的结果如下图所示:

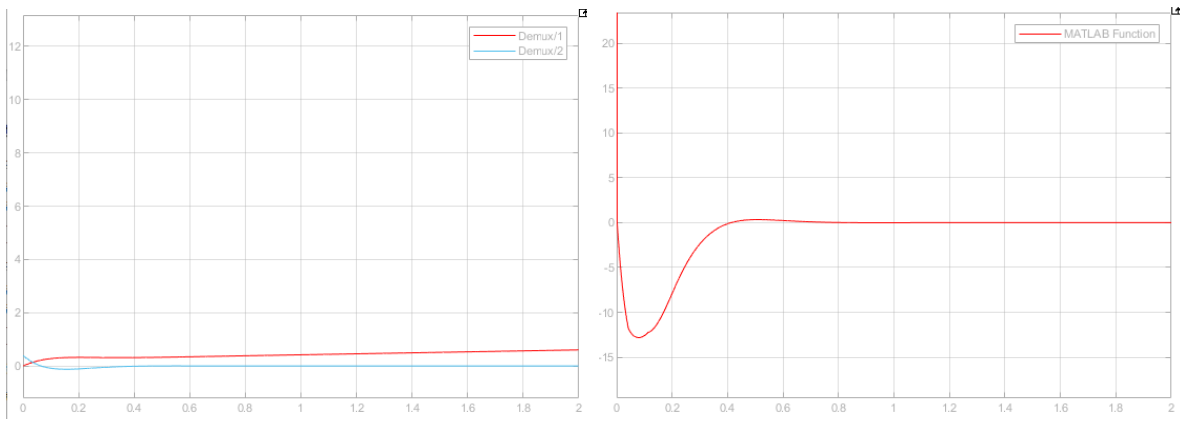


Figure 15: $\theta < \theta_1$ 时，K=1.2

从图中可以看出超调量有所减小，但是此时输出力 F 的曲线在 0-0.2 之间并不光滑；从位移曲线可以看出，此时小车的移动速度有所降低。

为了使得输出力 F 的曲线更加光滑，对 θ_1 的值进行修改使得其曲线更加光滑，在尝试之后，发现当 θ_1 的值从 0.1 稍微增加到 **1.3** 时，曲线变得较为光滑，处理后的曲线如下图所示

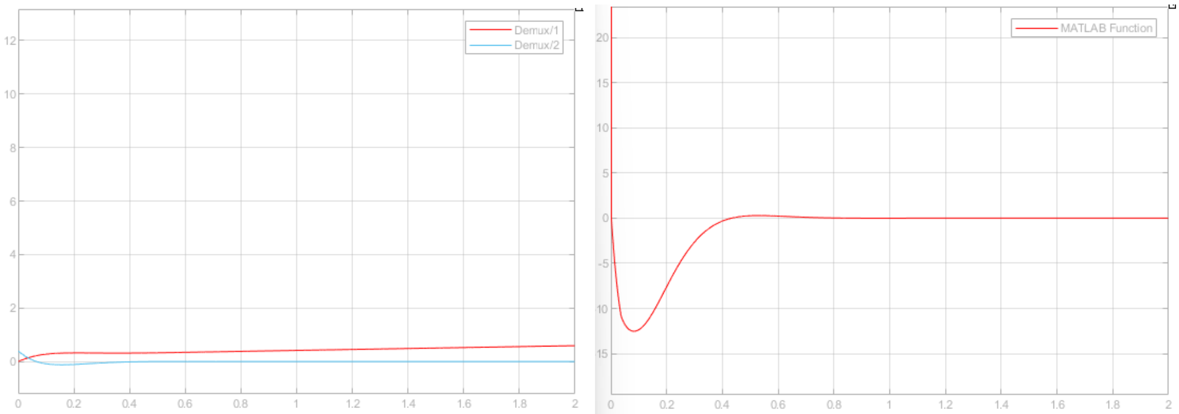


Figure 16: $\theta < \theta_1$ 时，K=1.2，$\theta_1 = 1.3$

2.7 初始角度变为 $\frac{\pi}{3}$

此时的结果如下图所示

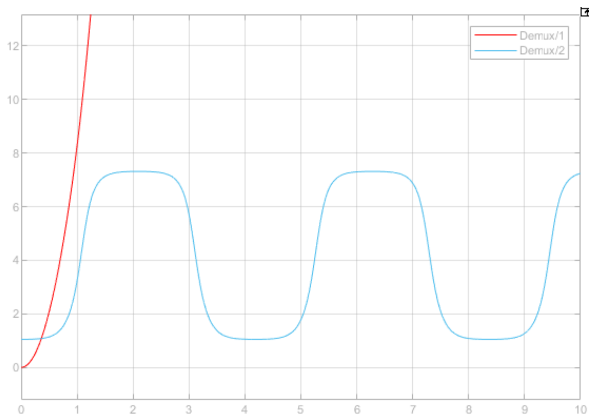


Figure 17: 位移 (红) 与夹角 (蓝)

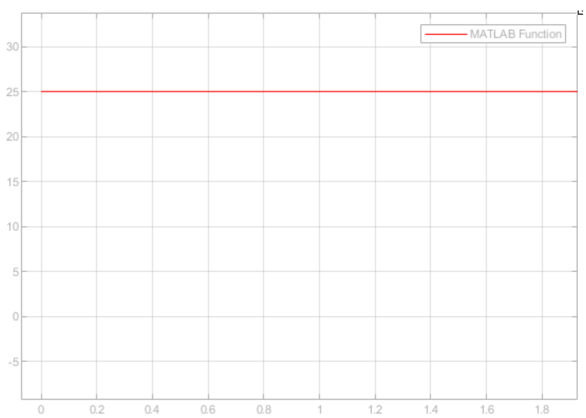


Figure 18: 水平力 F

可以看到输出力 F 始终保持在最大值，而且对于 θ 来说，可以看到其在两个值之间不断地转换，类似于一个正弦运动。猜想出现这种情况有两种原因：1、K 的值需要进行调整；2、可以看到 F 值始终维持在最大值，可能是力 F 的值不够，因此无法位置其固定在某个角度。

在调整 K 值发现没有太大的变化后，增大输出力 F 的最大值 F_m 为 30 时，其就稳定了下来，具体如下图所示

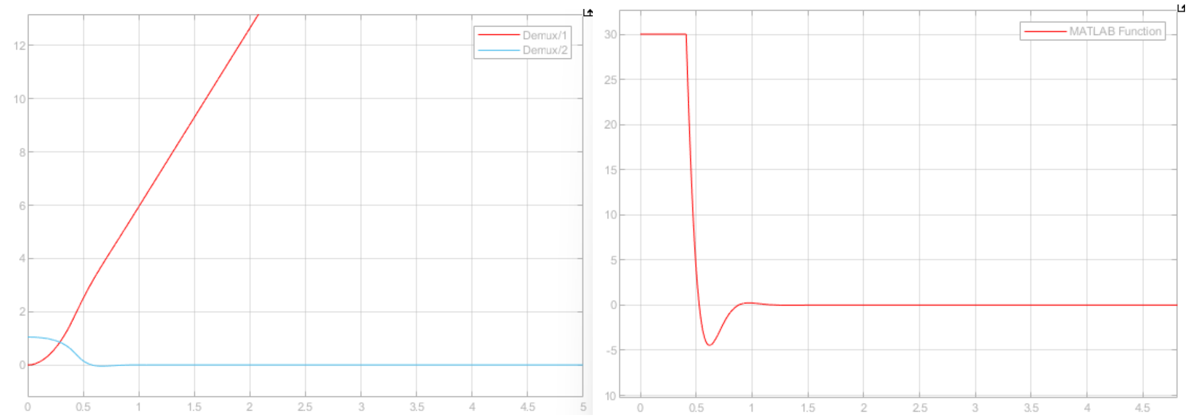


Figure 19: $F_m = 30$

发现当 F_m 逐渐增大的时候，会先出现振荡，过一段时间后才稳定，如下图所示。猜想可能是因为初始的力 F 太大，导致反向偏转角度过大，需要一段时间后才能稳定下来，图中 θ 值的曲线也证实了这一点。

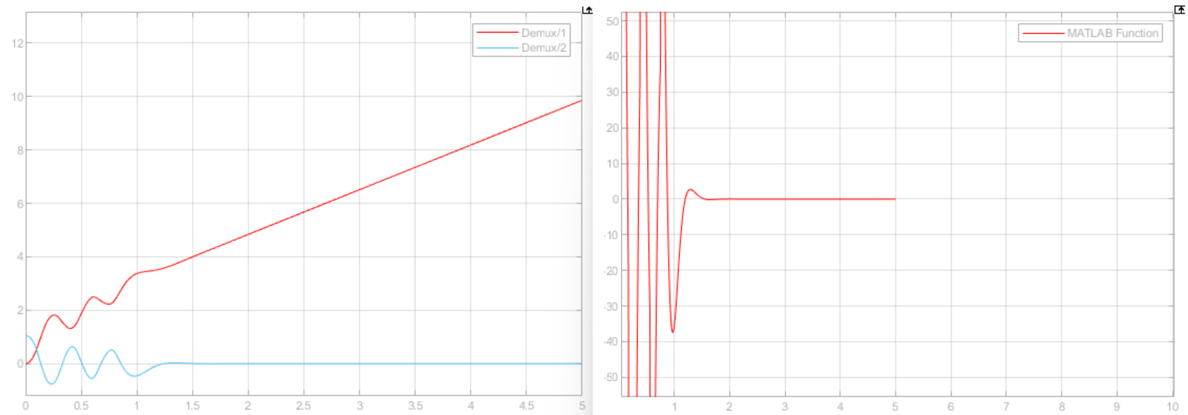


Figure 20: $F_m = 150$

当 F_m 继续加大后，到达稳定的时间需要的越长，目前仿真发现当 $F_m = 200$ 时，仿真时间为 100s 时其依然没法到达稳定，如下图所示

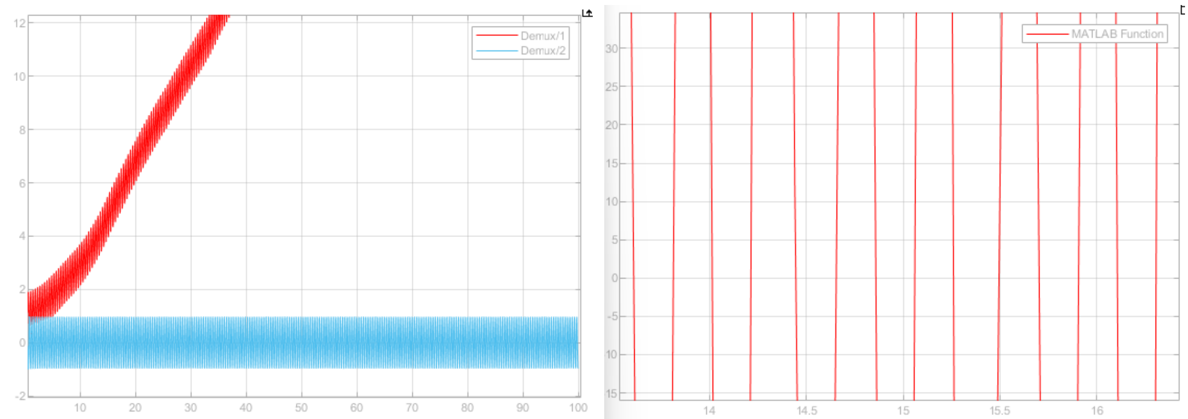


Figure 21: $F_m = 200$

现在对 $F_m = 200$ 的情况进行讨论，我们发现 θ 的曲线其最大值已经超过了我们设置的 θ_m，因此要对 θ_1 、θ_2 、θ_m 以及 K、K_s、K_b 进行调整。

发现当 $\theta_1 = 0.1$ 、$\theta_2 = 0.6$ 、$\theta_m = 0.8$ 以及 $K = 1.2$、$K_s = 1.5$、$K_b = 1.8$ 时，结果如下所示，对比上面可以发现 θ 成功稳定在 $0°$ 上。但是输出力 F 存在一定的超调量。

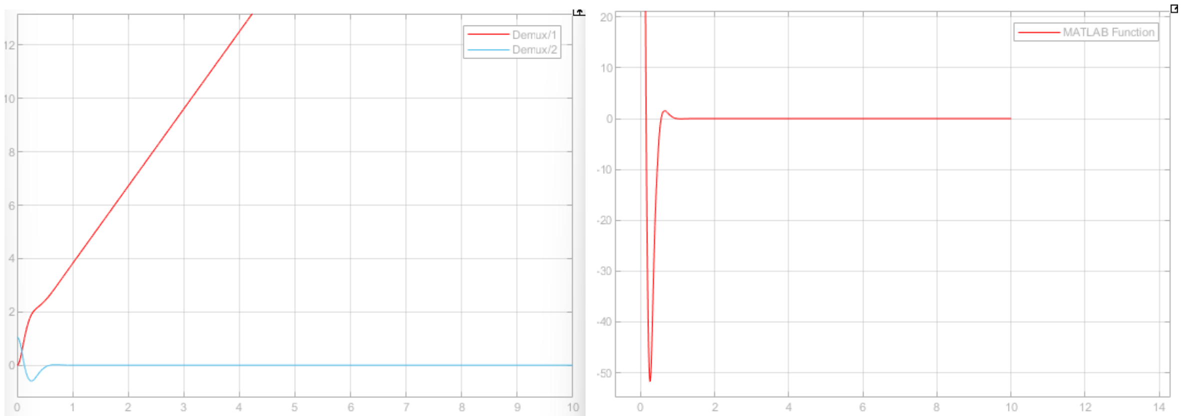


Figure 22: $F_m = 200$、$\theta_2 = 0.6$、$K = 1.2$、$K_s = 1.5$、$K_b = 1.8$

为了减小超调量，将 K 的值从 1.2 调整到 1.54，发现超调量有了明显的降低。如下图所示

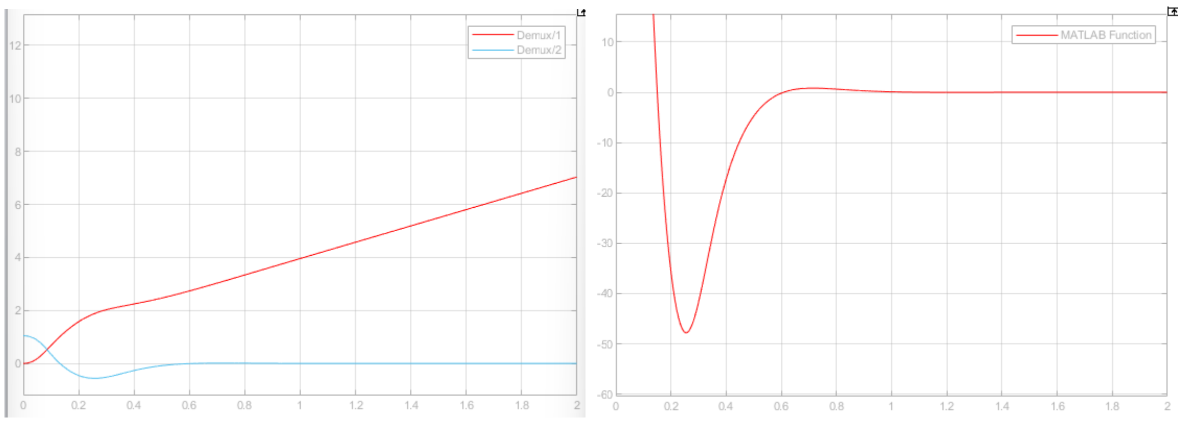


Figure 23: $F_m = 200$、$\theta_2 = 0.6$、$K = 1.5$、$K_s = 1.5$、$K_b = 1.8$