

# 模糊控制

刘山

浙江大学控制科学与工程学院

### 3、模糊模型

# 输入输出模型

$R_i$  : 如果  $y$  是  $A_0^i$  and  $\cdots$  and  $y^{(n-1)}$  是  $A_{n-1}^i$  and  $u$  是  $B_0^i$  and  $\cdots$   
and  $u^{(m)}$  是  $B_m^i$ , 则  $y^{(n)}$  是  $C^i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, N$

写成向量形式

$R_i$  : 如果  $\bar{y}$  是  $A^i$  and  $\bar{u}$  是  $B^i$ , 则  $y^{(n)}$  是  $C^i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, N$

其中,  $\bar{y} = [y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}]^T$ ,  $\bar{u} = [u, \dot{u}, \cdots, u^{(n-1)}]^T$ ,

$$A^i = A_0^i \times A_1^i \times \cdots \times A_{n-1}^i, B^i = B_0^i \times B_1^i \times \cdots \times B_{n-1}^i$$

模糊模型表示:  $R_p = (\bar{y} \times \bar{u}) \rightarrow y^{(n)}$

$$y^{(n)} = (\bar{y} \times \bar{u}) \circ R_p$$

亦可离散化表示

**Mamdani Fuzzy models**

# 状态空间模型

状态: 如果 $x$ 是 $A^i$  and  $u$ 是 $B^i$ , 则 $\dot{x}$ 是 $C^i$ ,

输出: 如果 $x$ 是 $A^i$ , 则 $y$ 是 $D^i$

$$\begin{cases} \dot{x} = (x \times u) \circ R_s \\ y = x \circ R_o \end{cases}$$

其中 $R_s = x \times u \rightarrow \dot{x}$ ,  $R_o = x \rightarrow y$

# T-S模型（Takagi-Sugeno模糊模型）

- 一般模糊蕴含条件句：“若 $x$ 是 $A$ ，则 $y$ 是 $B$ ”
- T-S模糊模型的模糊蕴含条件句：“若 $x$ 是 $A$ ，则  $y = f(x)$  ”  
其中 $f(x)$ 是 $x$ 的线性函数。

假定有如下两条控制规则

$R_1$  : 如果 $x$ 是 $A_1$  and  $y$ 是 $B_1$  则 $z = f_1(x, y)$

$R_2$  : 如果 $x$ 是 $A_2$  and  $y$ 是 $B_2$  则 $z = f_2(x, y)$

对于任一模糊输入，首先分别求出上述规则的适应度为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  ，  
则模糊推理采用加权组合的方式

$$Z_0 = \frac{\alpha_1 f_1(x_0, y_0) + \alpha_2 f_2(x_0, y_0)}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

**注意：**（1）T-S模型的模糊规则的输出语言变量没有采用一般的基于隶属度函数的模糊子集表示，而是采用一个函数表示，因此，T-S模型又称为“泛函模糊系统”。（2）函数也可不限于线性函数。（3）规则的后件也可动态方程。

# T-S模型

离散系统模型：

$L^i$  : 若  $y(k)$  是  $A_1^i$  and  $\cdots$  and  $y(k-n+1)$  是  $A_n^i$  and  $u(k)$  是  $B_1^i$  and  $\cdots$  and  $u(k-m+1)$  是  $B_m^i$ , 则

$$y^i(k+1) = a_1^i y(k) + \cdots + a_n^i y(k-n+1) + b_1^i u(k) + \cdots + b_m^i u(k-m+1)$$

综合  $l$  条模糊蕴含条件句的输出为：

$$y(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^l w^i y^i(k+1)}{\sum_{i=1}^l w^i}$$

其中  $w^i$  是第  $i$  条模糊语言规则的适用度

# T-S模型

连续系统模型：

$L^i$  : 若  $y(t)$  是  $A_1^i$  and  $\cdots$  and  $y^{(n-1)}(t)$  是  $A_n^i$  and  $u(t)$  是  $B_1^i$  and  $\cdots$  and  $u^{(m-1)}(t)$  是  $B_m^i$ , 则

$$y_i^{(n)}(t) = a_1^i y(t) + \cdots + a_n^i y^{(n-1)}(t) + b_1^i u(t) + \cdots + b_m^i u^{(m-1)}(t)$$

综合  $l$  条模糊蕴含条件句的输出为：

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^l w^i y_i^{(n)}(t) / \sum_{i=1}^l w^i$$

其中  $w^i$  是第  $i$  条模糊语言规则的适用度

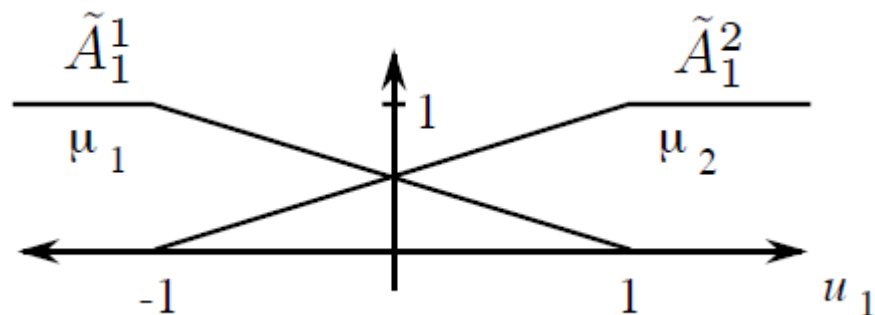
# 规则为线性映射的T-S模型（例）

## ■ 模糊规则

If  $\tilde{u}_1$  is  $\tilde{A}_1^1$  Then  $b_1 = 2 + u_1$

If  $\tilde{u}_1$  is  $\tilde{A}_1^2$  Then  $b_2 = 1 + u_1$

$$y = \frac{b_1\mu_1 + b_2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = b_1\mu_1 + b_2\mu_2$$



## ■ 因此，单点模糊化后

$$u_1 > 1, \mu_1 = 0 \quad y = 1 + u_1$$

$$u_1 < -1, \mu_2 = 0 \quad y = 2 + u_1$$

$$-1 \leq u_1 \leq 1$$

$$y = \frac{(1-u_1)}{2}b_1 + \frac{(u_1+1)}{2}b_2$$

$$y = \begin{cases} 2 + u_1, & u_1 < -1 \\ \frac{3 + u_1}{2}, & -1 \leq u_1 \leq 1 \\ 1 + u_1, & u_1 > 1 \end{cases}$$

(1) T-S模型可以表示常规的系统

(2) 线性模糊规则，最终表示的是非线性模型



# 规则为线性系统的T-S模型（例）

## ■ 模糊规则

If  $\tilde{z}_1$  is  $\tilde{A}_1^j$  and  $\tilde{z}_2$  is  $\tilde{A}_2^k$  and, ..., and  $\tilde{z}_p$  is  $\tilde{A}_p^l$  Then  $\dot{x}^i(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$

## ■ 系统输出

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^R (A_i x(t) + B_i u(t)) \mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^R \mu_i(z(t))} \quad \text{或} \quad \dot{x}(t) = \left( \sum_{i=1}^R A_i \xi_i(z(t)) \right) x(t) + \left( \sum_{i=1}^R B_i \xi_i(z(t)) \right) u(t)$$

这里  $\xi^\top = [\xi_1, \dots, \xi_R] = \left[ \frac{1}{\sum_{i=1}^R \mu_i} \right] [\mu_1, \dots, \mu_R]$

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^\top \quad \text{是后件模型状态}$$

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^\top \quad \text{是后件模型输入}$$

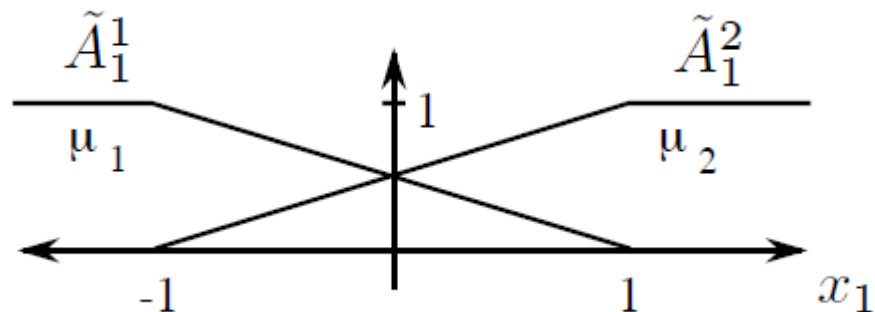
$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)]^\top \quad \text{是模糊系统输入}$$

# 规则为线性系统的T-S模型（例）

## ■ 模糊规则

If  $\tilde{x}_1$  is  $\tilde{A}_1^1$  Then  $\dot{x}^1 = -x_1 + 2u_1$

If  $\tilde{x}_1$  is  $\tilde{A}_1^2$  Then  $\dot{x}^2 = -2x_1 + u_1$



## ■ 系统输入单点模糊化后，系统输出

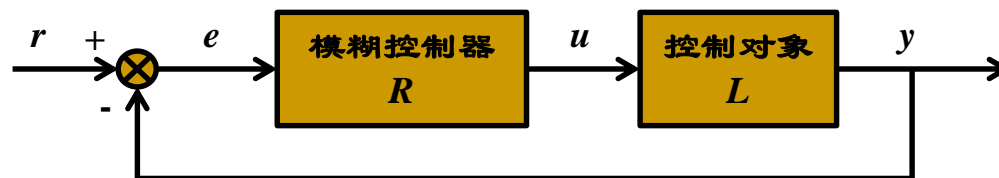
$$\dot{x}_1(t) = (-\mu_1 - 2\mu_2) x_1(t) + (2\mu_1 + \mu_2) u_1(t)$$

## ■ 基于上例同样分析

一个整体非线性的动力学模型可以看成是许多个局部线性模型的模糊逼近

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} -x_1(t) + 2u_1(t), & x_1(t) < -1 \\ -\frac{1+3x_1}{2} x_1 + \frac{3-x_1}{2} u_1, & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -2x_1(t) + u_1(t), & x_1(t) > 1 \end{cases}$$

# T-S模型的组合



定理： 如果控制对象和模糊控制器用如下的离散模糊模型表示

$$L^i : \text{若 } \mathbf{x}(k) \text{ 是 } \mathbf{A}^i, \text{ 则 } y^i(k+1) = \sum_{p=1}^n a_p^i y(k-p+1) + b^i u(k)$$

$$R^j : \text{若 } \mathbf{x}(k) \text{ 是 } \mathbf{C}^j, \text{ 则 } u^j(k) = \sum_{p=1}^m c_p^j y(k-p+1)$$

则等效的闭环系统可以用如下的离散模糊模型表示

$$S^{ij} : \text{若 } \mathbf{x}(k) \text{ 是 } (\mathbf{A}^i \text{ and } \mathbf{C}^j), \text{ 则 } y^{ij}(k+1) = \sum_{p=1}^n (a_p^i + b^i c_p^j) y(k-p+1)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, l$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , 且当  $m < p \leq n$  时, 取  $c_p^j = 0$

# 模糊系统的函数逼近能力

对于模糊系统，假设模糊规则如下：

如果 $x_1$ 为 $A_1^j$ ， $x_2$ 为 $A_2^j$ ， $\dots$ ，和 $x_n$ 为 $A_n^j$ ，则 $y$ 为 $\theta_j$ ， $j = 1, 2, \dots, m$

模糊系统的输出由下式给出：

$$y = g(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=1}^m \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i) \right) \theta_j}{\sum_{j=1}^m \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i) \right)} = \sum_{j=1}^m P_j(x) \theta_j$$

其中

$$P_j(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^m \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i) \right)}$$

# 模糊系统的函数逼近能力

模糊系统的存在定理

假设隶属度函数取为

$$\mu_{A_i^j}(x_i) = a_i^j \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - \bar{x}_i^j}{\sigma_i^j} \right)^2 \right] \quad (0 < a_i^j \leq 1)$$

定理：给定任一连续函数  $f : U^n \rightarrow R$  和任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $g(x)$  使

$$\sup_{x \in U^n} |g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- 这是模糊系统的万能逼近性质。（万能逼近器）
- 原则上，
  - 模糊系统可用等价的神经网络表示，
  - 神经网络亦可用等价的模糊系统表示。

# 模糊系统的函数逼近能力

## ■ 万能逼近定理的作用

- 给出了模糊系统可用于几乎所有的非线性建模问题的理论依据。
- 从根本上解释了模糊系统在工程问题中得到成功应用的原因。

## ■ 万能逼近定理的注意点

- 万能逼近定理是存在性定理，表明存在能以任意精度逼近任意给定函数的模糊系统，而不能回答如何得到这样的一个模糊系统；
- 模糊系统拥有其他形式的万能逼近器（包括多项式逼近器和神经网络逼近器）所不具备的能力，就是能够系统而有效地利用语言信息。
- 随着输入变量论域的模糊集划分数目的增加，模糊系统的分辨力会增强，从而达到更高的逼近精度。随着模糊系统的分辨力的增加，模糊规则基的规模将变得相当庞大和复杂。因此，在进行模糊系统设计时必须在分辨力和复杂性之间取得折衷。

# 模糊模型的设计与建立

- “IF-THEN”规则可转化为模糊规则基。
- 隶属度函数选取，模糊化、模糊推理和解模糊化的不同算法决定模糊模型的类型。
- 模糊模型设计与建立原则
  - 符合经验：
    - 充分利用语言信息，反映系统的特性。
  - 满足判定定理：
    - 尽量满足各种直观推理准则，并符合万能逼近定理条件。
  - 易于计算：
    - 应尽量选用计算较简单的模糊系统。
  - 自适应性：
    - 若为模糊系统提供一套学习算法，应尽量使模糊系统与其调节参数呈简单关系，如线性关系。

# 模糊模型辨识

- 采用重心法解模糊化的标准模糊模型形式

**隶属度为三角型函数**

$$y = f(x|\theta) = \frac{\sum_{i=1}^R b_i \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} \quad f(x|\theta) = \frac{b_1 \mu_1(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \frac{b_2 \mu_2(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \cdots + \frac{b_R \mu_R(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}$$

- 定义  $\xi_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}$

- 则

$$f(x|\theta) = b_1 \xi_1(x) + b_2 \xi_2(x) + \cdots + b_R \xi_R(x)$$

- 令  $\xi(x) = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_R]^\top$        $\theta = [b_1, b_2, \dots, b_R]^\top$

- 有

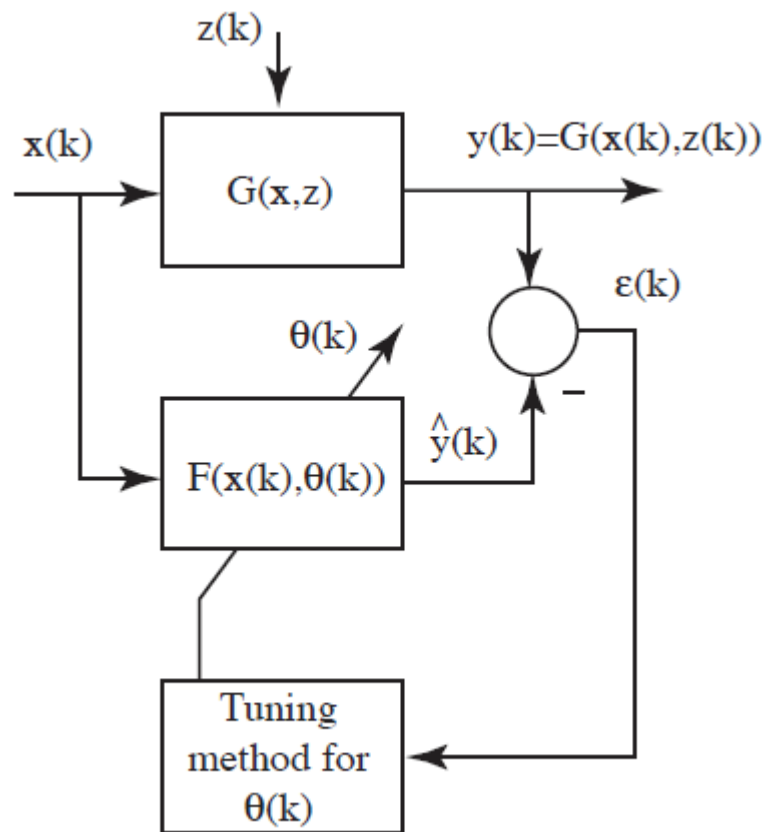
$$y = f(x|\theta) = \theta^\top \xi(x)$$

- 此与常规的系统辨识的方程一致。
- 针对T-S模型，可以相同处理。
- 对于万能逼近器，还可以用非线性优化方法决定高斯函数形式隶属度函数的相关参数。



# 模糊模型辨识

- 由一组实际系统的输入输出样本对模型进行辨识。
  - 选择合适的数据集
  - 选择含待定参数的模糊模型结构
  - 参数辨识
    - 最小二乘法
    - 梯度下降法
    - 聚类法



一种在线模糊模型辨识结构

# 模糊模型辨识

## ■ 考虑T-S模糊模型

隶属度为高斯型函数

$$y = F_{ts}(x, \theta) = \frac{\sum_{i=1}^R g_i(x) \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}$$

■ 其中,  $g_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n$        $\mu_i(x) = \prod_{j=1}^n \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x_j - c_j^i}{\sigma_j^i} \right)^2 \right)$

■ 展开为: 
$$y = \frac{\sum_{i=1}^R a_{i,0} \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \frac{\sum_{i=1}^R a_{i,1} x_1 \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} + \cdots + \frac{\sum_{i=1}^R a_{i,n} x_n \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)}$$

## ■ 转化为线性模型, 令

$$\xi_j = \frac{\mu_j(x)}{\sum_{i=1}^R \mu_i(x)} \quad \phi = \begin{bmatrix} \xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_R(x), x_1 \xi_1(x), x_1 \xi_2(x), \dots, x_1 \xi_R(x), \dots, \\ x_n \xi_1(x), x_n \xi_2(x), \dots, x_n \xi_R(x) \end{bmatrix}^\top$$

$$\theta = [a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{R,0}, a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{R,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{R,n}]^\top$$

■ 得到T-S系统的表示:  $y = F_{ts}(x, \theta) = \theta^\top \phi(x)$

# 模糊模型辨识（例）

- 针对单入单出的T-S模型，采用四条规则，选定隶属度函数（即相关参数  $c_1^i$  和  $\sigma_1^i$  给定）：

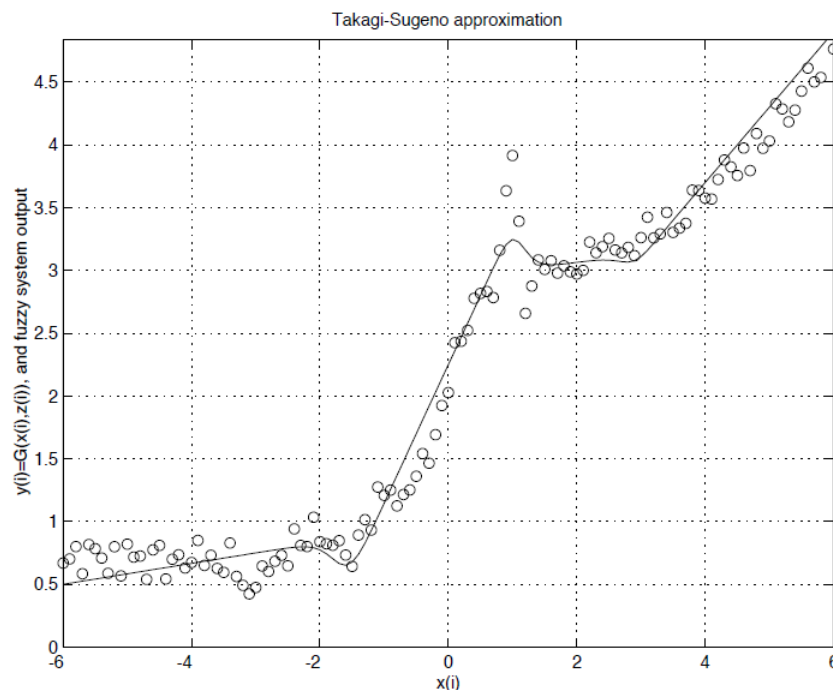
$$\mu_i(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - c_1^i}{\sigma_1^i}\right)^2\right)$$

- $g_i$  为待定线性函数（即需通过辨识得到相关参数  $a_{i,0}$  和  $a_{i,1}$ ）：

$$g_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}x_1$$

- 采用最小二乘方法可以得到辨识结果。

$$\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$



# 模糊模型辨识（例）

- 若T-S模型转化为非线性模型，可令

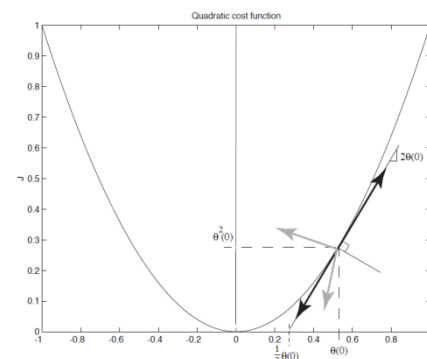
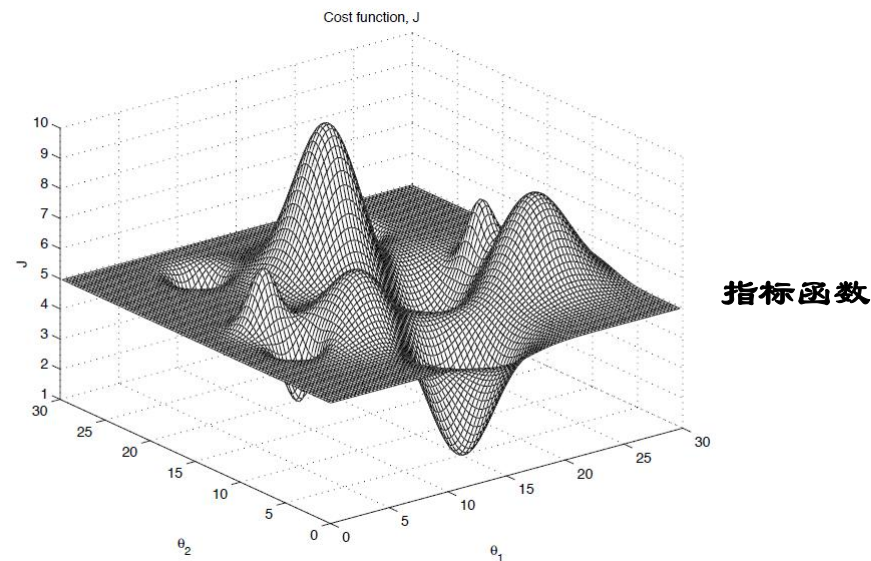
$$\theta = [c_1^1, \dots, c_n^R, \sigma_1^1, \dots, \sigma_n^R, \\ a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{R,0}, a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, \\ a_{R,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{R,n}]^T$$

- 此时，需同时优化求解隶属度函数的参数。优化目标为使下面的指标最小：

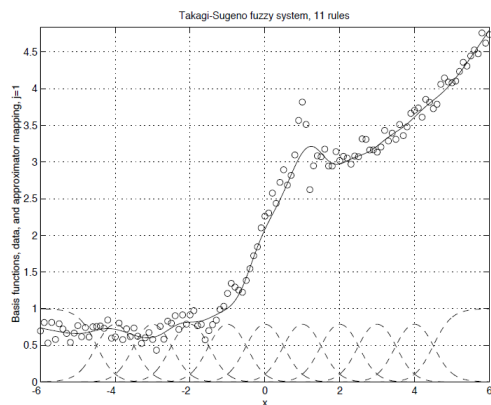
$$J(\theta, G) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M |y(i) - F(x(i), \theta)|^2$$

- 可采用梯度法求解：

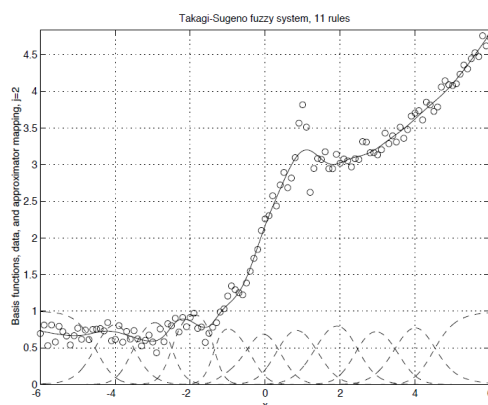
$$\theta(j+1) = \theta(j) - \lambda_j \left. \frac{\partial J(\theta, G)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta(j)}$$



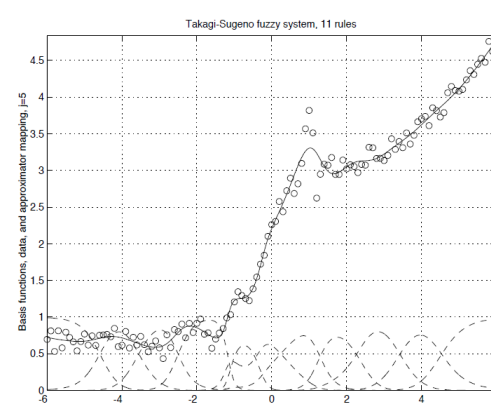
# 模糊模型辨识（例）



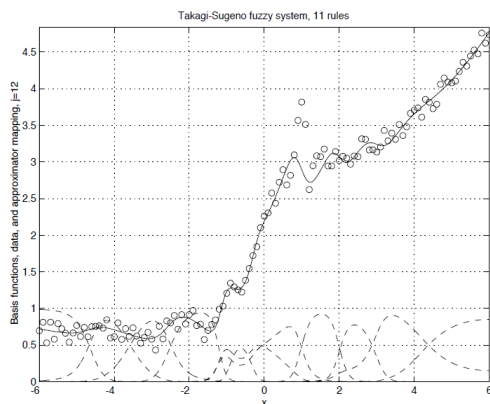
第1次迭代计算



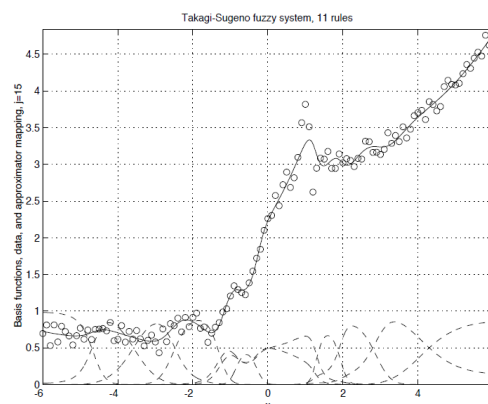
第2次迭代计算



第5次迭代计算



第12次迭代计算

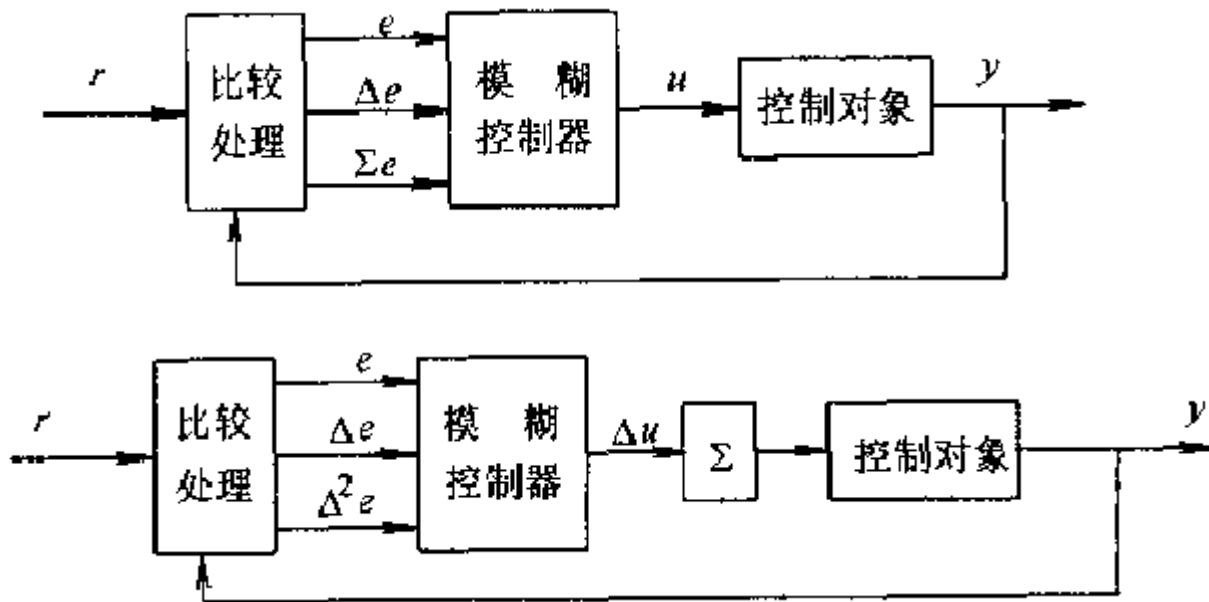


第15次迭代计算

注意隶属函数的变化

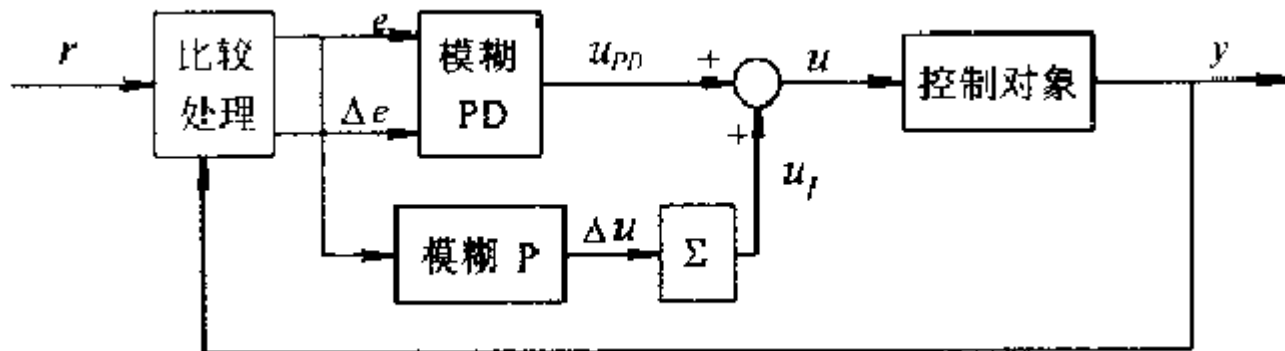
## 4、模糊PID控制

# PID型模糊控制器



- 依赖误差和误差导数的简单模糊控制器本质上是一种非线性PD控制。
- 简单模糊控制器由于不具有积分环节，因而很难消除稳态误差，尤其在变量分级不够多的情况下，常常在平衡点附近产生小幅振荡。
- 为此在模糊控制器中引入积分环节，构成模糊PID控制。

# 双模态PID模糊控制



- **PID型模糊控制器的模糊规则数远大于PD型的模糊控制器**，为此引入两个模糊控制器，分别实现模糊**PD**控制和模糊积分控制。



# PID型模糊控制器的一种结构

- 为减少模糊规则数，提出一种结构。
- 离散型PID控制器的输出

$$u_{PID}(k) = K_c \left\{ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\}$$

$$u_{PID}(k) = u_{PD}(k) + u_{PI}(k)$$

- 其中， $u_{PD}(k) = K'_c e(k) + K_c \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)]$   $u_{PI}(k) = K''_c e(k) + K_c \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k e(i)$

$$K_c = K'_c + K''_c$$

- 由于  $u_{PI}(k) = \sum_{i=0}^k \left\{ K_c \frac{T}{T_i} e(i) + K''_c [e(i) - e(i-1)] \right\}$  其中， $e(-1) = 0$

- 令  $K'_c = \frac{K_c}{T_i \varphi}$ ,  $K''_c = \varphi K_c T_d$  其中  $\varphi$  为待定系数，则  $u_{PI}(k) = \varphi T \sum_{i=0}^k u_{PD}(i)$

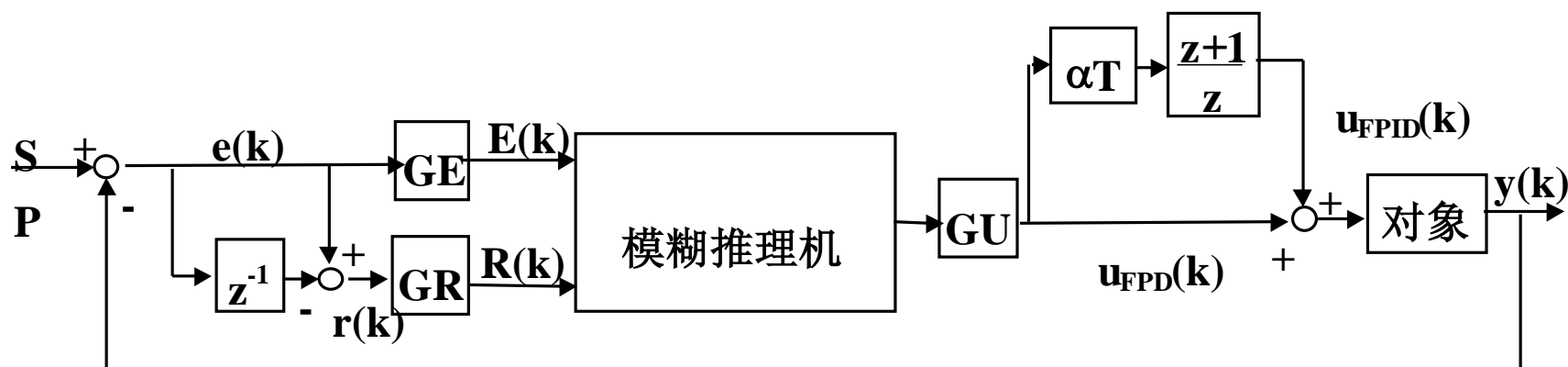
- 因此，离散型PID控制器的输出可表示为

$$u_{PID}(k) = u_{PD}(k) + \varphi T \sum_{i=0}^k u_{PD}(i)$$

# PID型模糊控制器的一种结构

- 因此，可构造模糊PID型模糊控制器

$$u_{FPID}(k) = u_{FPD}(k) + \alpha T \sum_{i=0}^k u_{FPD}(i)$$



- 上述结构的优点是，其模糊规则数与PD型结构一样。

## 5、自适应模糊控制

# 自适应模糊控制的应用背景

- 模糊控制的优势是能够比较容易地将专家的控制经验融入到控制器中，这一点对具有高度不确定因素的系统尤其重要。若缺乏专家的控制经验，或面临一个新的控制工况，很难设计出高水平的模糊控制器。
- 参数难确定
  - 简单模糊控制的隶属度函数和模糊规则预先给定，相关参数的合理性存疑。
  - 模糊控制器的设计依赖于控制经验，若无实际经验可用，可采用自适应控制的方法进行学习。
- 系统和环境存在不确定性和噪声
  - 简单模糊控制器一般基于标称系统设计。
  - 对象过程不超出操作者经验范围内变化时可有效使用。
  - 当过程结构或参数发生持续变化时，模糊控制的性能就无法保证。为了使模糊控制器具有适应过程持续变化的能力，就必须采用具有自适应和自学习功能的模糊控制器。
- 由于模糊控制器采用了IF-THEN控制规则，不便于控制参数的学习和调整，使得构造具有自适应的模糊控制器较困难。

# 自适应模糊控制的目标

## ■ 控制功能

- 根据被控过程的运行状态给出合适的控制规则。

## ■ 学习能力

- 根据给出的控制规则的控制效果，对控制器的控制决策进一步改善，以获得更好的控制效果。

# 模糊控制器可自适应调整部分

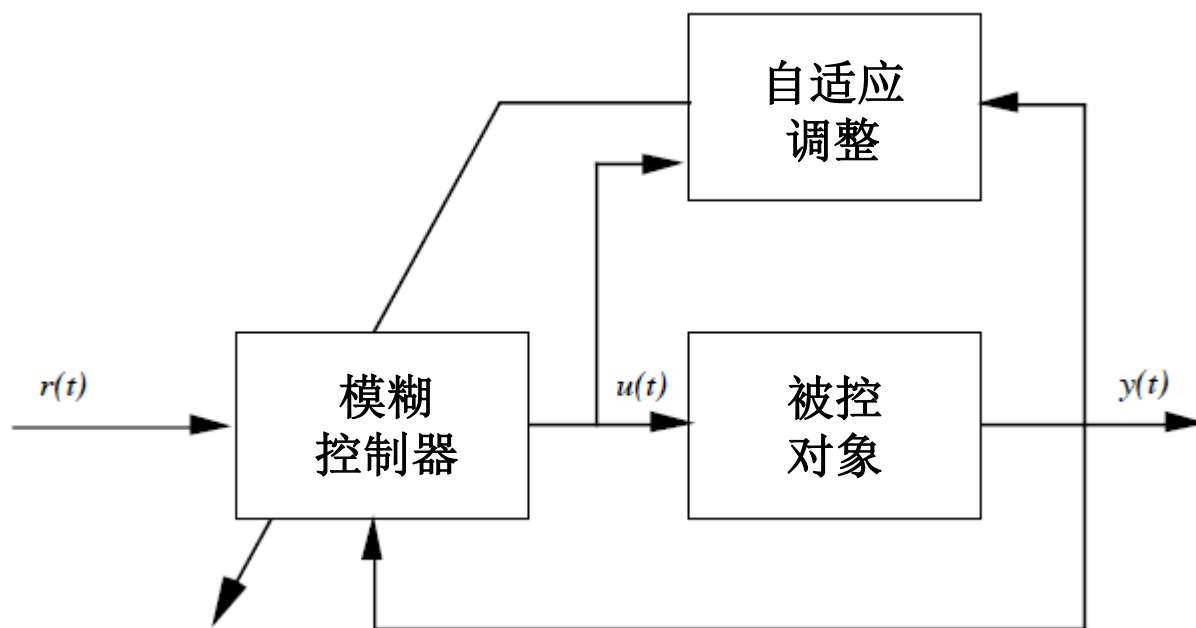
- 控制规则
  - 修改模糊控制规则
- 隶属度函数
  - 调整输入输出论域的模糊集的隶属度函数
- 量化因子
  - 改变输入输出量的量化系数（如偏差，偏差变化率和控制量）

# 自适应模糊控制的结构形式

- 直接自适应模糊控制
- 间接自适应模糊控制

# 直接自适应模糊控制

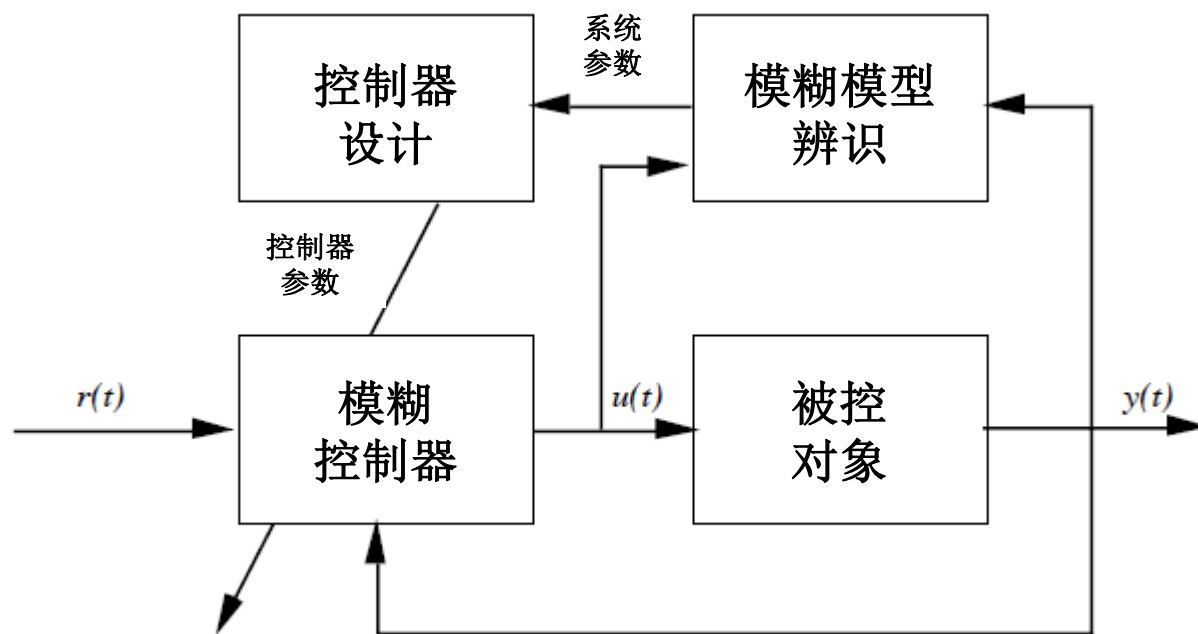
- 根据实际系统性能与要求性能之间的偏差，通过一定的方法来直接调整控制器参数。





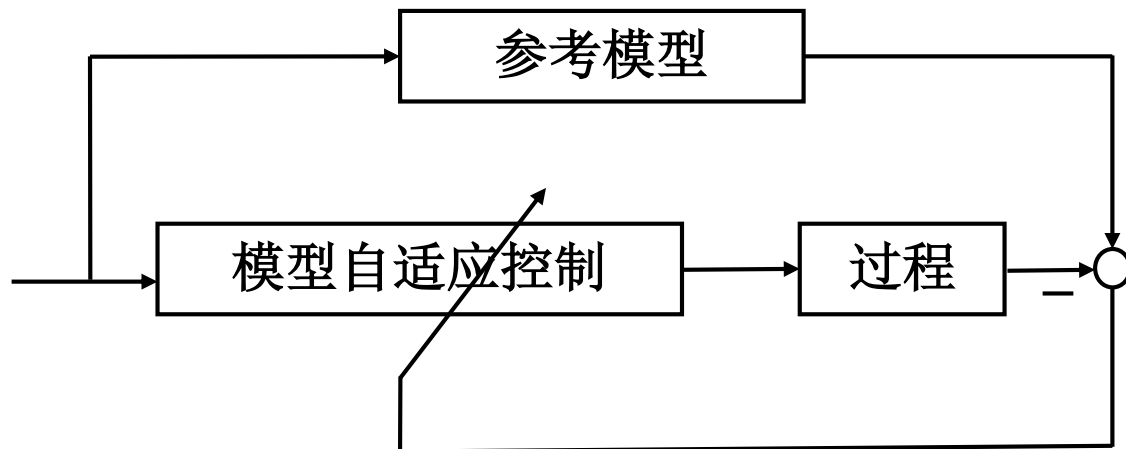
# 间接自适应模糊控制

- 通过在线地进行模糊系统辨识得到控制对象的模型，然后根据所得模型在线地设计模糊控制器。



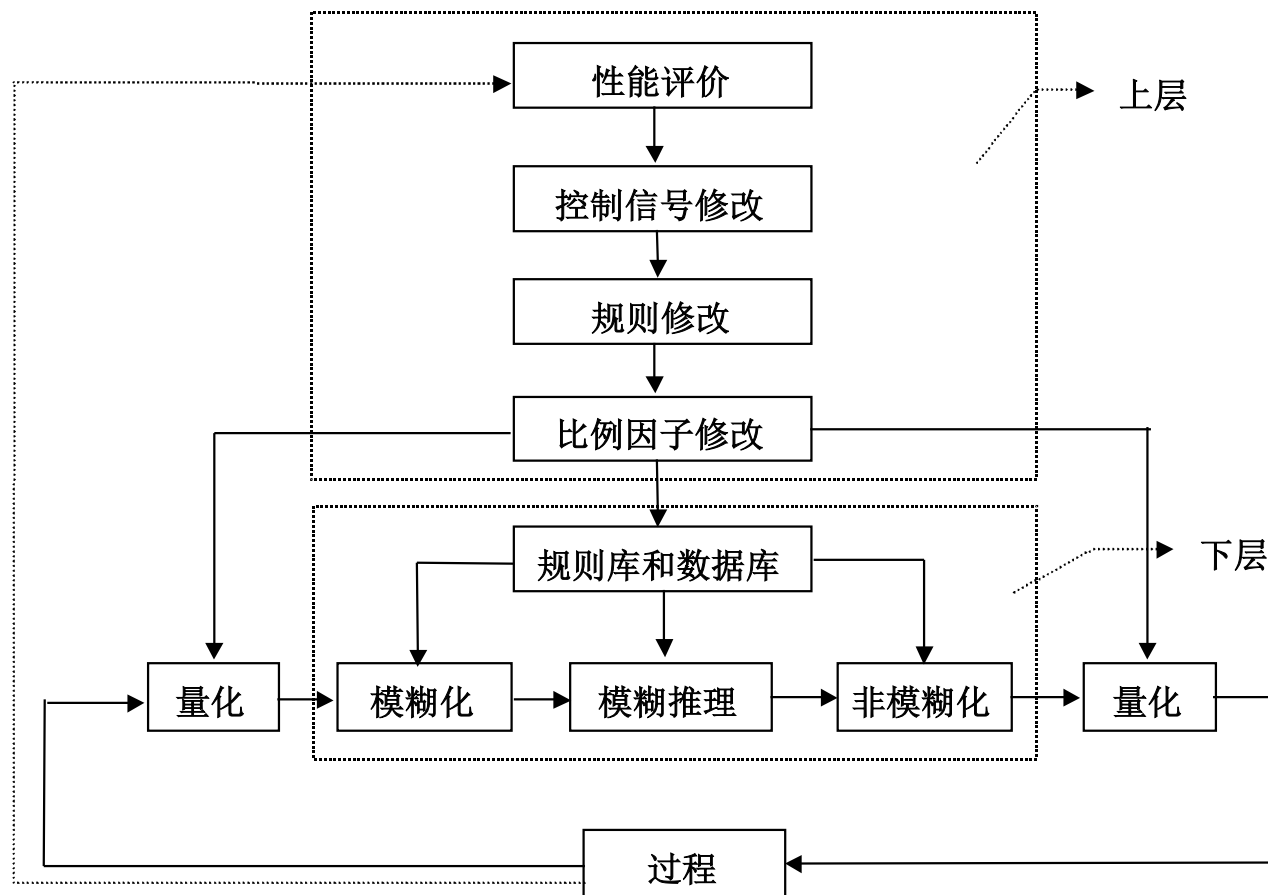
# 模糊模型参考自适应控制

- 控制系统使过程输出跟踪参考模型的输出。
- 选择稳定的参考模型，并确保上述跟踪性能，可获得闭环稳定的控制效果，从而简化了模糊控制的稳定性问题。



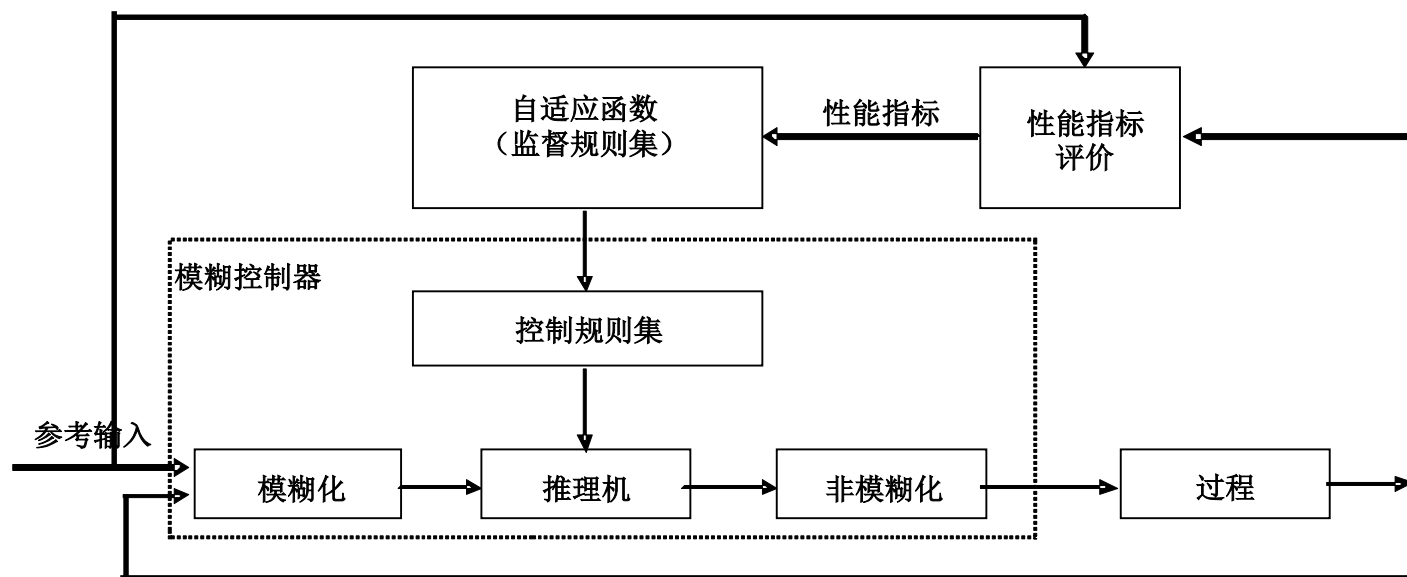
# 自适应模糊控制的递阶结构

- 上层是自适应机构，其下层是基本模糊控制器。



# 自组织模糊控制

- 采用分层递阶结构。
  - 第一层为常规模糊控制器。
  - 第二层采用一些模糊变量来衡量和表达系统的性能，构造监督模糊规则集，用来调整递阶规则基控制器的参数，使系统对过程参数的变化具有适应能力。
- 采用递阶结构后，可使完备规则集中规则的数目减少至系统变量数的线性函数，便于实现多维系统的模糊控制。



# 基于性能反馈的直接自适应模糊控制

- 由基础层和自适应层构成。
  - 基础层完成普通模糊控制器的功能。
  - 自适应完成控制规则修改。
- 自适应部分
  - 性能测量
  - 控制量校正
  - 控制规则修改

# 自适应部分

## ■ 性能测量

- 利用实际响应与期望响应之间的偏差及偏差变化率等作为性能测量的性能指标计算的基础。
- 由性能测量值计算出对应系统性能的校正量。
- 性能参数与性能校正量之间的关系可用模糊规则的形式表示。

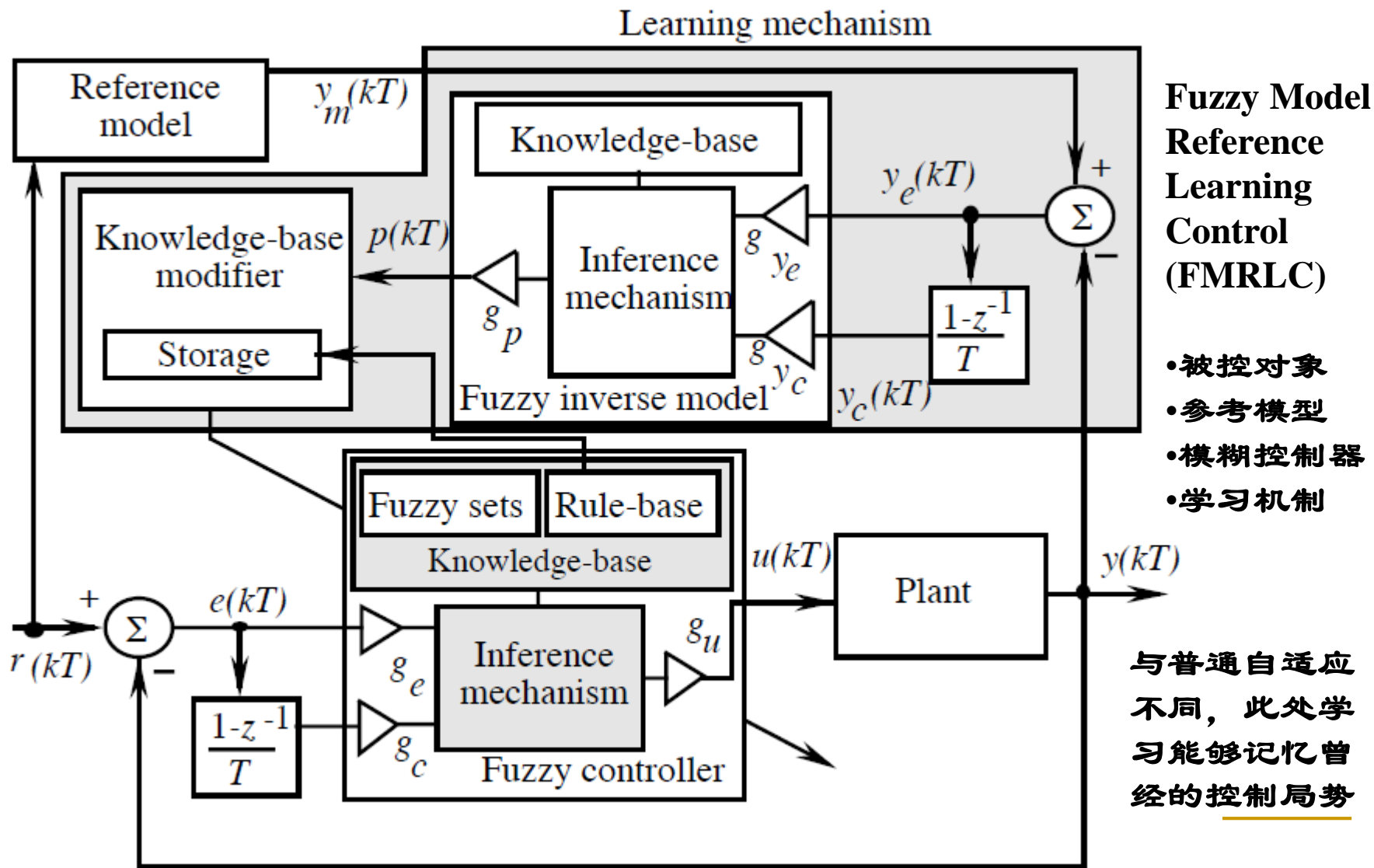
## ■ 控制量校正

- 由性能校正量变化为控制校正量。要考虑
  - 对过去的哪个采样周期进行校正，即哪一时刻的控制作用对现在的较差性能负责。
  - 对于多变量系统，哪些输入量应被校正。
  - 如何根据性能修正量计算控制校正量。

## ■ 控制规则的修改

- 一般以模糊规则方式表示对基础模糊控制器的模糊规则进行修改。

# 模糊模型参考学习控制（例）



# 参考模型（例）

## ■ 期望信号平滑化

- 如阶跃和方波等不可实现的信号通过滤波得到合理的参考信号，否则，模糊控制的增益随自适应调整将变得巨大
- 选择参考模型，例如：

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$



# 模糊控制器（例）

## ■ 模糊PD控制器

□ 输入  $e(kT) = r(kT) - y(kT)$        $c(kT) = \frac{e(kT) - e(kT - T)}{T}$

□ 输出  $u(kT)$

□ 量化因子  $g_e, g_c$ , and  $g_u$

□ 量化因子要通过试验选择，保证能涵盖误差和控制输入的绝大部分范围。

□ 隶属度函数采用标准三角型

■ 输入 $c$ 和 $e$ 一致，仅支集有缩放

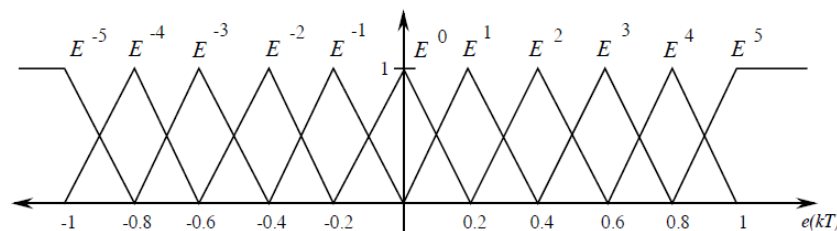
■ 输出的隶属度函数也可类似取

■ 由于输出隶属度函数需自适应调整，因此，亦可在初始时假设为未知。

□ 模糊规则基取完整的常规形式（总共 $11^2 = 121$ 条的模糊规则基）

If  $\tilde{e}$  is  $\tilde{E}^j$  and  $\tilde{c}$  is  $\tilde{C}^l$  Then  $\tilde{u}$  is  $\tilde{U}^m$

□ 例子中：输入采用单点模糊化，推理采用最大-最小合成或最大-乘合成，解模糊化采用重心法。



# 模糊规则基的初始化（例）

- 自适应学习可调整
  - 输入和输出隶属度函数
  - 量化因子
  - 模糊规则基
- 例：一种策略是在学习过程中，作为模糊规则前件的输入隶属度函数保持不变，而后件的输出隶属度函数自适应调整，因此，输出隶属度函数必须初始化
  - 若已有充分的先验知识，可根据这些知识取输出隶属度函数
  - 若存在标称系统，可根据标称系统的控制工程知识取隶属度函数
  - 若对系统未知，可按常规的方法取隶属度函数，要求隶属度函数的中心为零，该方法的效果为初始的控制输入为零。（因为没有任何的先验知识，所以，没有初始控制）

**当然，在线调整量化因子也是自适应的一种很常用的方式。**

# 模糊规则基的调整思路（例）

- 模糊规则基的数量和形式不改变。
- 输入模糊子集的隶属度函数不变。
- 需要调整模糊控制器的输出，应该改变模糊规则结论（后件），即输出模糊子集的隶属度函数。

# 模糊规则基的调整思路（例）

- 注意：
- （1）通过模糊规则基的输出隶属度函数的调整，当系统再次经历相同的工况（控制局势）时，会获得更好的控制效果。
- （2）为保留尽可能多的工况下的控制，模糊规则基需要“精细化”，即需要更多的模糊规则，也就是输入模糊子集数和输出模糊子集数要增加，但这又使得模糊计算的复杂性增加。
- （3）为解决上述矛盾，一种可行方法是用多个模糊控制器代替一个模糊控制器，实际控制器输出为多个模糊控制器的输出和。
  - 例如：将原模糊规则基适当分块，构造相应的子模糊控制器，其模糊规则基为相应的子块。

# 学习和自适应（例）

- 学习和自适应机制包括两部分：
  - 模糊逆模型
    - 由被控对象的输出误差 $y_e(kT)$ 映射到消除该误差所需的被控对象的控制输入的调整值 $p(kT)$ 的模糊模型
  - 知识库调节器
    - 修改模糊控制器的模糊规则基，使模糊控制器的输出的变化值与需调整值 $p(kT)$ 一致

# 模糊逆模型（例）

- 输入:  $y_e(kT) = y_m(kT) - y(kT)$        $y_c(kT) = \frac{1}{T}(y_e(kT) - y_e(kT - T))$
- 输出: 可减小控制误差的控制输入的变化量  $p(kT)$
- 量化因子:  $g_{y_e}$ ,  $g_{y_c}$ , and  $g_p$
- 选定输入和输出的论域, 隶属度函数采用标准三角型
- 模糊规则基采用常规的标准形式

If  $\tilde{y}_e$  is  $\tilde{Y}_e^j$  and  $\tilde{y}_c$  is  $\tilde{Y}_c^l$  Then  $\tilde{p}$  is  $\tilde{P}^m$

- 输入采用单点模糊化, 推理采用最大最小合成, 解模糊化采用重心法。
- 注意:
  - 模糊逆模型的模糊规则基一般来自于控制工程师的经验, 即根据系统的输出情况给出系统输入应该变化的趋势, 因此是逆模型。
  - 上述定性的经验不足以构造一个合适的模糊控制器。

# 知识库调节器（例）

- 目标为修改模糊控制器的模糊规则基，使模糊控制器的输出的变化值与需调整值一致  $u(kT - T) \longrightarrow u(kT - T) + p(kT)$

- 修改方式通过调整输出模糊子集的隶属度函数实现

- （1）选定“活跃的输出模糊子集”。

- 首先根据上一步的模糊控制器输入  $e(kT - T)$  和  $c(kT - T)$  选出模糊规则基的所有模糊规则中满足适应度（相似度）大于零的模糊规则，即

$$\mu_i(e(kT - T), c(kT - T)) > 0$$

- 这些选出的模糊规则的结论（后件）对应的输出模糊子集即为“活跃集”

- （2）调整相应输出模糊子集的隶属度函数中心。

- 令  $b_m(kT)$  为输出模糊子集的隶属度函数中心，调整公式为

$$b_m(kT) = b_m(kT - T) + p(kT)$$

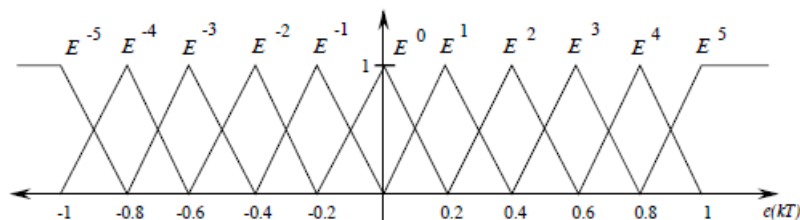
- 注意：由于采用标准三角型隶属度，重心法解模糊化公式为

$$u^{crisp} = \frac{\sum_i b_i \int \mu(i)}{\sum_i \int \mu(i)}$$

其中， $b_i$  为隶属度函数中心，因此，上述调整公式满足要求

# 知识库调节器（数值例）

- 模糊控制器的输入 $e(kT)$ 和 $c(kT)$ 的隶属度函数都如下图形式



- 若由模糊逆模型得到需调整模糊控制器输出的变化值为 $p(kT)=0.5$ ，同时， $e(kT-T)=0.75$ ， $c(kT-T)=-0.2$ ，由此可以得出在模糊规则基中只有如下两条模糊规则的前件的适应度  $\mu_i(e(kT-T), c(kT-T)) > 0$

$\mathcal{R}_1$ : If  $E^3$  and  $C^{-1}$  Then  $U^1$

$\mathcal{R}_2$ : If  $E^4$  and  $C^{-1}$  Then  $U^2$

- 且  $\mu_1 = 0.25$   $\mu_2 = 0.75$ ，因此，输出模糊子集 $U^1$ 和 $U^2$ 为活跃集
- 假设输出模糊子集 $U^1$ 和 $U^2$ 在 $kT-T$ 时刻的中心分别为

$$b_1(kT-T) = 1 \quad b_2(kT-T) = 3$$

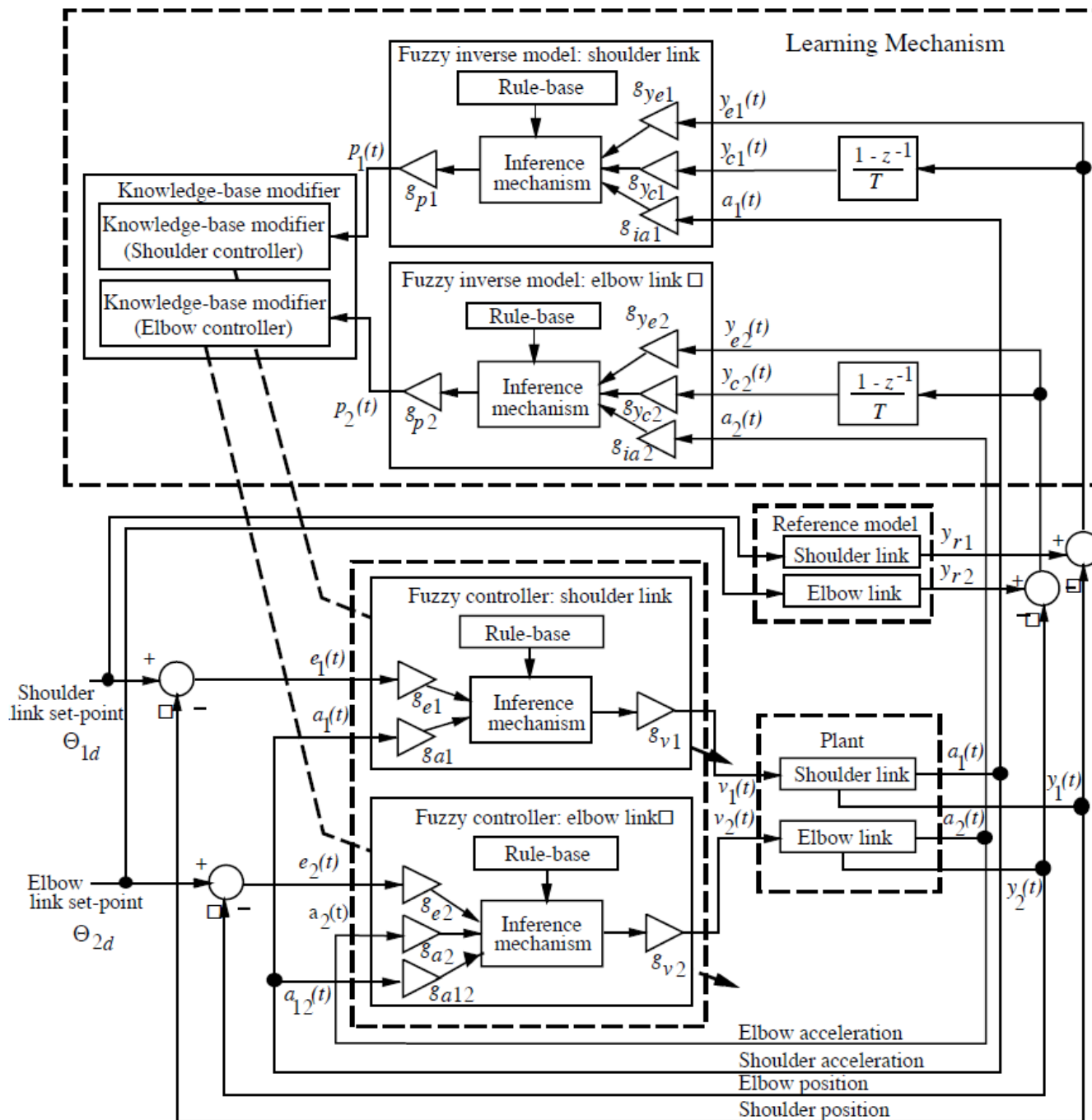
- 则隶属度中心如下调整
- $$b_1(kT) = b_1(kT-T) + p(kT) = 1 + 0.5 = 1.5$$
- $$b_2(kT) = b_2(kT-T) + p(kT) = 3 + 0.5 = 3.5$$



# 柔性臂减振的自适应模糊控制

- 前述柔性臂减振的模糊控制在末端增加负载时，控制性能下降。
- 由于负载对柔性臂的模态频率影响很大，将负载大小作为模糊控制器的又一个输入是可行的，但导致模糊规则基太庞大。
- 由于柔性臂是时变的系统，负载大小、转角位置、连杆加速度和控制力矩的关系复杂，很难凭经验构造合适的模糊规则。
- 根据柔性臂运行的经验，可以得到不同的运行情况下，控制输入的定性调整原则。

# 模糊模型参考学习控制方案



# 模糊控制器和参考模型

- 模糊控制器的结构与前面一致
  - 肩连杆控制器输入  $e_1$  的范围为  $[-100, +100]$  度
  - 肩连杆末端的加速度  $a_1$  的范围为  $[-10, +10]$  g
  - 肘连杆控制器输入  $e_2$  的范围为  $[-80, +80]$  度
  - 肘连杆末端的加速度  $a_2$  的范围为  $[-10, +10]$  g
  - 输出范围与前面一致
- 肩连杆与肘连杆的参考模型相同： $\frac{3}{s+3}$
- 控制目标：

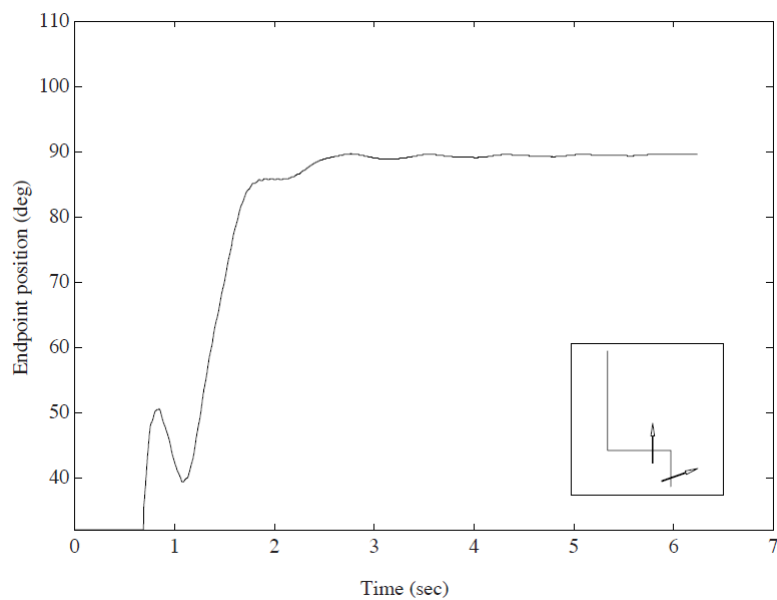
$$y_{e1}(kT) \approx 0, \quad y_{e2}(kT) \approx 0$$

# 模糊逆模型和知识库调节

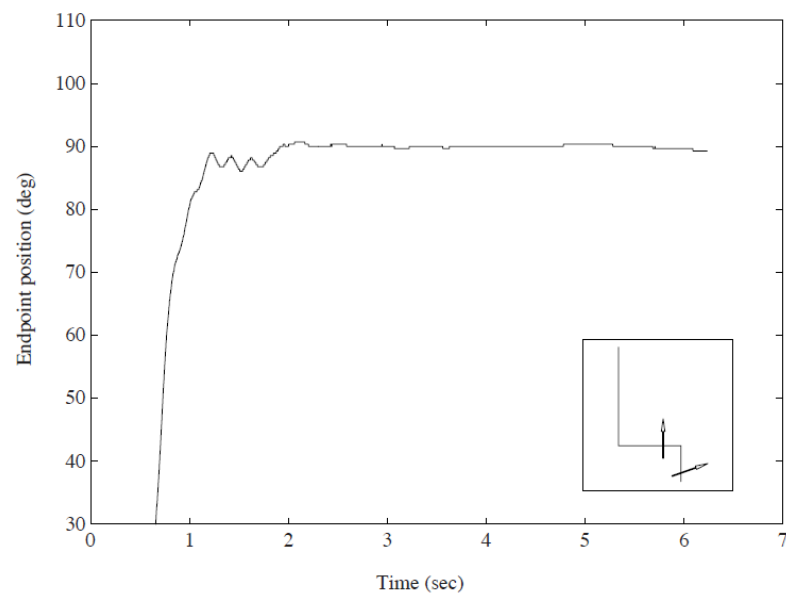
- 肩连杆与肘连杆的模糊逆模型的形式相同
  - 输入:  $y_{ej}(t)$ ,  $y_{cj}(t)$ , and  $a_j(t)$
  - 输出: 电机电压应该变化的值  $p_i$
  - 模糊规则基
    - 与耦合的肘连杆模糊控制的模糊规则基形式类似
    - 例: 如果转角位置误差大, 加速度中等, 连杆运动方向正确时 (即位置误差减小), 电压的变化应该比运动方向错误时电压的变化小。
    - 例: 如果转角位置误差小, 转角速度大, 加速度大, 应调整电压以避免超调。
- 知识库调节的方式与前面的例子相同
  - 注意: 模糊控制器的模糊规则基的中心的三个输出模糊子集 (即三个零)不修改, 以保证针对测量噪声的鲁棒性。

$A_1^0$ $V_2^m$		$A_2^k$						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
$E_2^j$	-3	-5	-4	-4	-3	-3	-2	0
	-2	-4	-4	-3	-2	-1	0	1
	-1	-4	-3	-2	-1	0	1	2
	0	-2	-1	0	0	0	1	2
	1	-2	-1	0	1	2	3	4
	2	-1	0	2	2	3	4	4
	3	0	1	2	3	4	4	5

# 无负载的运行结果

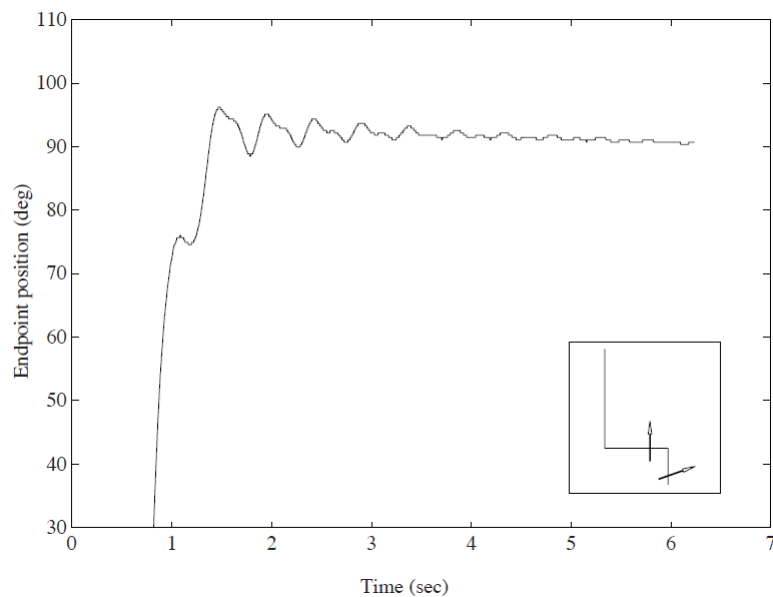


无自适应的情况

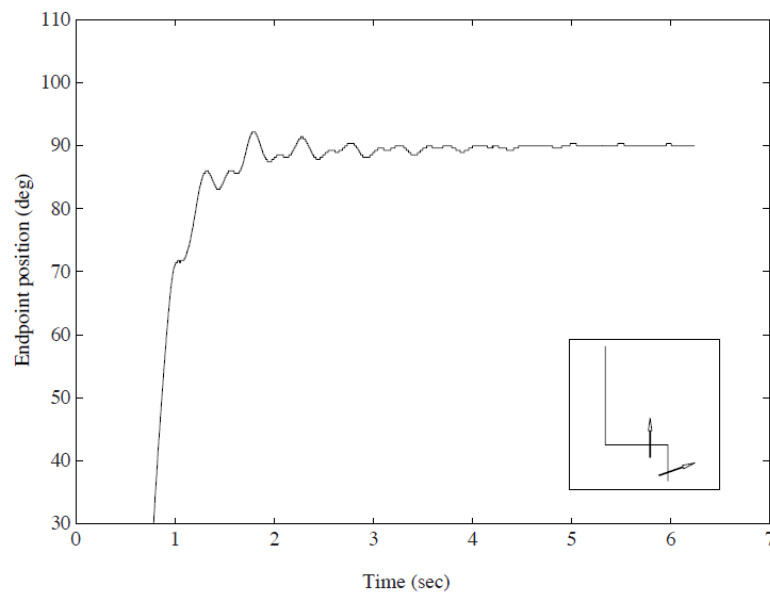


有自适应的情况

# 有负载的运行结果



无自适应的情况



有自适应的情况

# 仿射非线性系统的自适应模糊控制

# 间接自适应形式

- 考虑  $n$  阶仿射非线性系统

$$\dot{x}^{(n)} = f\left(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\right) + g\left(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\right)u; \quad y = x \quad (1)$$

- 其中  $f$  和  $g$  为未知非线性函数,  $u \in R^n$  和  $y \in R^n$  分别为系统的输入和输出。

- 设位置指令为  $y_m$ , 令  $e = y_m - y = y_m - x$

$$\mathbf{e} = \left(e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}\right)^T \quad (2)$$

- 选择  $\mathbf{K} = (k_n, \dots, k_1)^T$ , 使多项式  $s^n + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n$  的所有根都在复平面左半开平面上。

- 取控制律为 (反馈线性化)

$$u^* = \frac{1}{g(\mathbf{x})} \left[ -f(\mathbf{x}) + y_m^{(n)} + \mathbf{K}^T \mathbf{e} \right] \quad (3)$$



# 控制器设计

- 将(3)代入(1)，得到闭环控制系统的方程：

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \cdots + k_n e = 0 \quad (4)$$

- 由  $\mathbf{K}$  的选取，可得  $t \rightarrow \infty$  时  $e(t) \rightarrow 0$ ，即系统的输出  $y$  渐近地收敛于理想输出  $y_m$
- 如果非线性函数  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$  是已知的，则可以选择控制  $u$  来消除其非线性的性质，然后再根据线性控制理论设计控制器。
- 如果  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$  未知，控制律 (3) 则难以实现。此时，可采用模糊系统  $\hat{f}(\mathbf{x})$  和  $\hat{g}(\mathbf{x})$  代替  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$ ，实现自适应模糊控制。

# 控制器设计-模糊系统

- 用两步构造模糊系统：（以  $\hat{f}(x|\theta_f)$  来逼近  $f(x)$  为例）
  - 1、对变量  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ )，定义  $p_i$  个模糊集合  $A_i^{l_i}$  ( $l_i=1,2,\dots,p_i$ )， $\mu_{A_i^{l_i}}(x_i)$  为  $x_i$  的隶属度函数。

- 2、采用以下  $\prod_{i=1}^n p_i$  条模糊规则来构造模糊系统

$$\begin{aligned} R^{(j)} : \quad & IF \quad x_1 \text{ is } A_1^{l_1}, \quad \dots, \quad x_i \text{ is } A_i^{l_i}, \quad \dots, \quad x_n \text{ is } A_n^{l_n} \\ & THEN \quad \hat{f} \text{ is } F^{l_1, \dots, l_n} \end{aligned} \quad (5)$$

- 其中，模糊集  $F^{l_1, \dots, l_n}$  的中心用  $\bar{y}_f^{l_1, \dots, l_n}$  表示。
- 3、采用乘积推理机、单值模糊器和中心平均解模糊器，则模糊系统的输出为

$$\hat{f}(x|\theta_f) = \frac{\sum_{l_1=1}^{p_1} \dots \sum_{l_n=1}^{p_n} \bar{y}_f^{l_1, \dots, l_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \dots \sum_{l_n=1}^{p_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)} \quad (6)$$

# 控制器设计-模糊系统参数化

- 令  $\theta_f \in R^{\prod_{i=1}^n p_i}$  为参数  $\bar{y}_f^{l_1 \cdots l_n}$  的组合, 令  $\xi(\mathbf{x})$  为  $\prod_{i=1}^n p_i$  维向量, 其中,

$$\xi_{l_1 \cdots l_n}(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{p_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)}$$

- 则(6)式变为

$$\hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) = \theta_f^T \xi(\mathbf{x}) \quad (7)$$

- 同理, 可构造模糊参数化系统  $\hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g)$  逼近  $g(\mathbf{x})$

# 控制器设计-自适应律

- 采用模糊系统逼近  $f$  和  $g$ ，则控制律 (3) 可写为

$$u = \frac{1}{\hat{g}(\mathbf{x}|\theta_g)} \left[ -\hat{f}(\mathbf{x}|\theta_f) + y_m^{(n)} + \mathbf{K}^T \mathbf{e} \right] \quad (8)$$

$$\hat{f}(\mathbf{x}|\theta_f) = \theta_f^T \xi(\mathbf{x}); \quad \hat{g}(\mathbf{x}|\theta_g) = \theta_g^T \eta(\mathbf{x}) \quad (9)$$

- 其中，参数  $\theta_f^T$  和  $\theta_g^T$  根据自适应律而变化。

- 设计自适应律为：

$$\dot{\theta}_f = -\gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \xi(\mathbf{x}) \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_g = -\gamma_2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \eta(\mathbf{x}) u \quad (11)$$

- 式中， $\gamma_1, \gamma_2$  为正常数，其它参数的设定见下页。

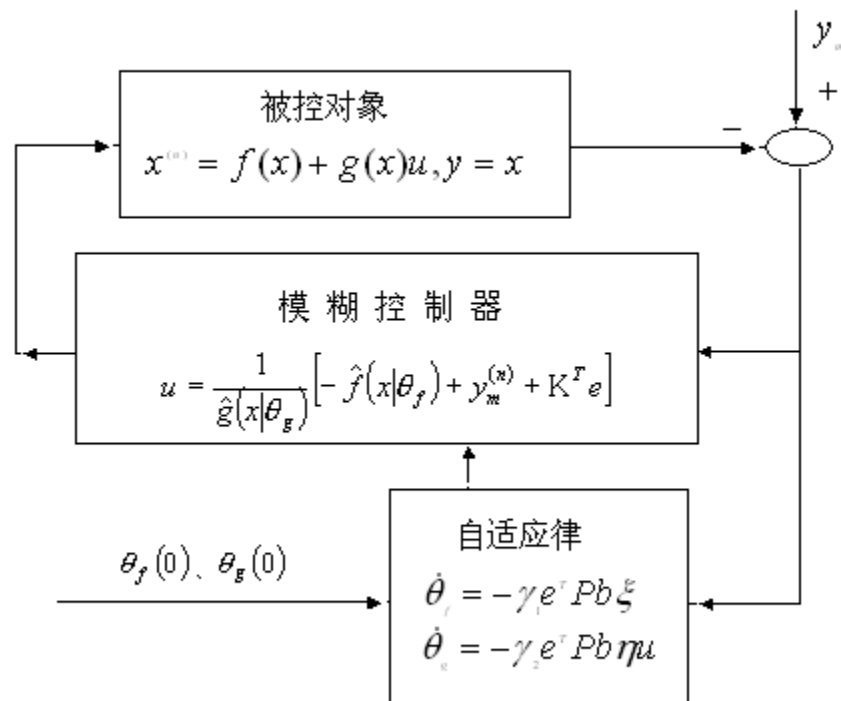
# 自适应模糊控制系统

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **P** 为一个正定矩阵且满足 Lyapunov 方程

$$\Lambda^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Lambda = -\mathbf{Q} \quad (12)$$

**Q** 为是一个任意的  $n \times n$  正定矩阵。



# 自适应模糊控制系统稳定性分析

- 将式（8）代入式（1）可得模糊控制系统的闭环动态：

$$e^{(n)} = -\mathbf{K}^T \mathbf{e} + \left[ \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) - f(\mathbf{x}) \right] + \left[ \hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g) - g(\mathbf{x}) \right] u \quad (13)$$

- 写成向量形式：

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left\{ \left[ \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) - f(\mathbf{x}) \right] + \left[ \hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g) - g(\mathbf{x}) \right] u \right\} \quad (14)$$

- 设最优参数为

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left[ \sup_{x \in R^n} \left| \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) - f(\mathbf{x}) \right| \right] \quad (15)$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left[ \sup_{x \in R^n} \left| \hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g) - g(\mathbf{x}) \right| \right] \quad (16)$$

- 其中  $\Omega_f$  和  $\Omega_g$  分别为  $\theta_f$  和  $\theta_g$  的集合。

# 自适应模糊控制系统稳定性分析

- 定义最小逼近误差为

$$\omega = \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f^*) - f(\mathbf{x}) + (\hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g^*) - g(\mathbf{x}))u \quad (17)$$

- 式(14)可写为:

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left[ (\theta_f - \theta_f^*)^T \xi(\mathbf{x}) + (\theta_g - \theta_g^*)^T \eta(\mathbf{x})u + \omega \right] \quad (18)$$

- 将式(9) (即模糊逼近)代入式(18),可得闭环动态方程:

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left\{ \left[ \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) - \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f^*) \right] + \left[ \hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g) - \hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g^*) \right] u + \omega \right\} \quad (19)$$

- 方程(19)描述了跟踪误差  $\mathbf{e}$  和控制参数  $\theta_f$ 、 $\theta_g$  之间的关系。
- 自适应律的任务是为  $\theta_f$ 、 $\theta_g$  确定一个调节机理,使得跟踪误差  $\mathbf{e}$  和参数误差  $\theta_f - \theta_f^*$ 、 $\theta_g - \theta_g^*$  达到最小。
- 定义Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T (\theta_f - \theta_f^*) + \frac{1}{2\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T (\theta_g - \theta_g^*) \quad (20)$$

# 自适应模糊控制系统稳定性分析

■ 令  $V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ ,  $V_2 = \frac{1}{2\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T (\theta_f - \theta_f^*)$ ,  $V_3 = \frac{1}{2\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T (\theta_g - \theta_g^*)$

$$M = b \left[ (\theta_f - \theta_f^*)^T \xi(x) + (\theta_g - \theta_g^*)^T \eta(x) u + \omega \right]$$

■ 则式 (18) 变为:  $\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + M$

■ 且有:

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \Lambda^T + M^T) \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\Lambda \mathbf{e} + M)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\Lambda^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Lambda) \mathbf{e} + \frac{1}{2} M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} M$$

$$= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{2} (M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M) = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M$$

■ 即  $\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} b \omega + (\theta_f - \theta_f^*)^T \mathbf{e}^T \mathbf{P} b \xi(x) + (\theta_g - \theta_g^*)^T \mathbf{e}^T \mathbf{P} b \eta(x) u$

■ 同时:

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T \dot{\theta}_f$$

$$\dot{V}_3 = \frac{1}{\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T \dot{\theta}_g$$



# 自适应模糊控制系统稳定性分析

- 则  $V$  的导数

$$\begin{aligned}\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \omega + \frac{1}{\gamma_1}(\theta_f - \theta_f^*)^T \left[ \dot{\theta}_f + \gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \xi(\mathbf{x}) \right] \\ & + \frac{1}{\gamma_2}(\theta_g - \theta_g^*)^T \left[ \dot{\theta}_g + \gamma_2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \eta(\mathbf{x}) u \right]\end{aligned}\quad (21)$$

- 将自适应律 (10) 和 (11) 代入上式, 得:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \omega \quad (22)$$

- 由于  $-\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \leq 0$ , 通过选取最小逼近误差  $\omega$  非常小的模糊系统, 可实现:
$$\dot{V} \leq 0$$

- 由此证明稳定性。

- 备注: 最小逼近误差小的模糊系统取决于模糊集和隶属度函数的选择。

# 单级倒立摆间接自适应

- 单级倒立摆动态方程:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1 / (m_c + m)}{l (4/3 - m \cos^2 x_1 / (m_c + m))} + \frac{\cos x_1 / (m_c + m)}{l (4/3 - m \cos^2 x_1 / (m_c + m))} u$$

- 其中  $x_1$  和  $x_2$  分别为摆角和摆速,

$$g = 9.8m/s^2$$

$m_c = 1kg$  为小车质量,

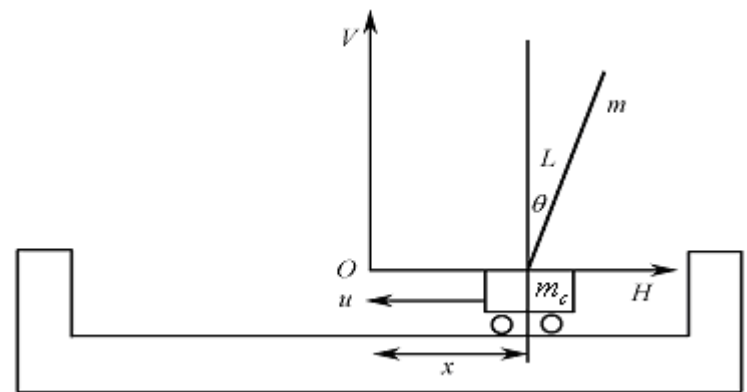
$m = 0.1kg$  为摆杆质量,

$l = 0.5m$  为摆长的一半,

$u$  为控制输入。

- 位置指令为  $x_d(t) = 0.1 \sin(\pi t)$

- 倒立摆初始状态为  $[\pi/60, 0]$



# 隶属函数设计和自适应律参数选择

- 取以下5种隶属函数：

$$\mu_{NM}(x_i) = \exp\left[-\left((x_i + \pi/6)/(\pi/24)\right)^2\right]$$

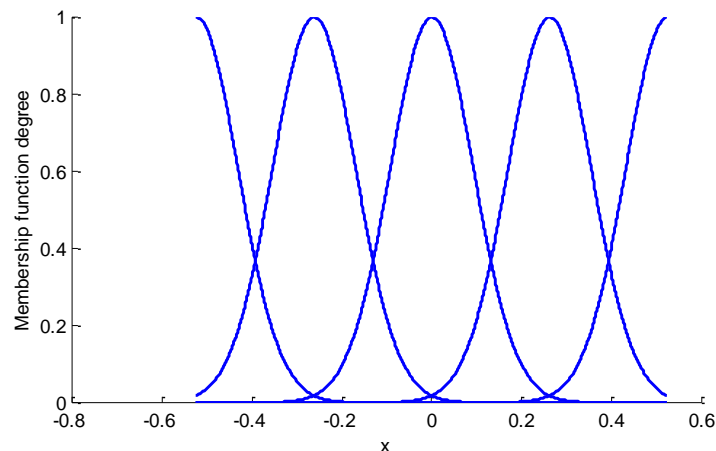
$$\mu_{NS}(x_i) = \exp\left[-\left((x_i + \pi/12)/(\pi/24)\right)^2\right]$$

$$\mu_Z(x_i) = \exp\left[-\left(x_i/(\pi/24)\right)^2\right]$$

$$\mu_{PS}(x_i) = \exp\left[-\left((x_i - \pi/12)/(\pi/24)\right)^2\right]$$

$$\mu_{PM}(x_i) = \exp\left[-\left((x_i - \pi/6)/(\pi/24)\right)^2\right]$$

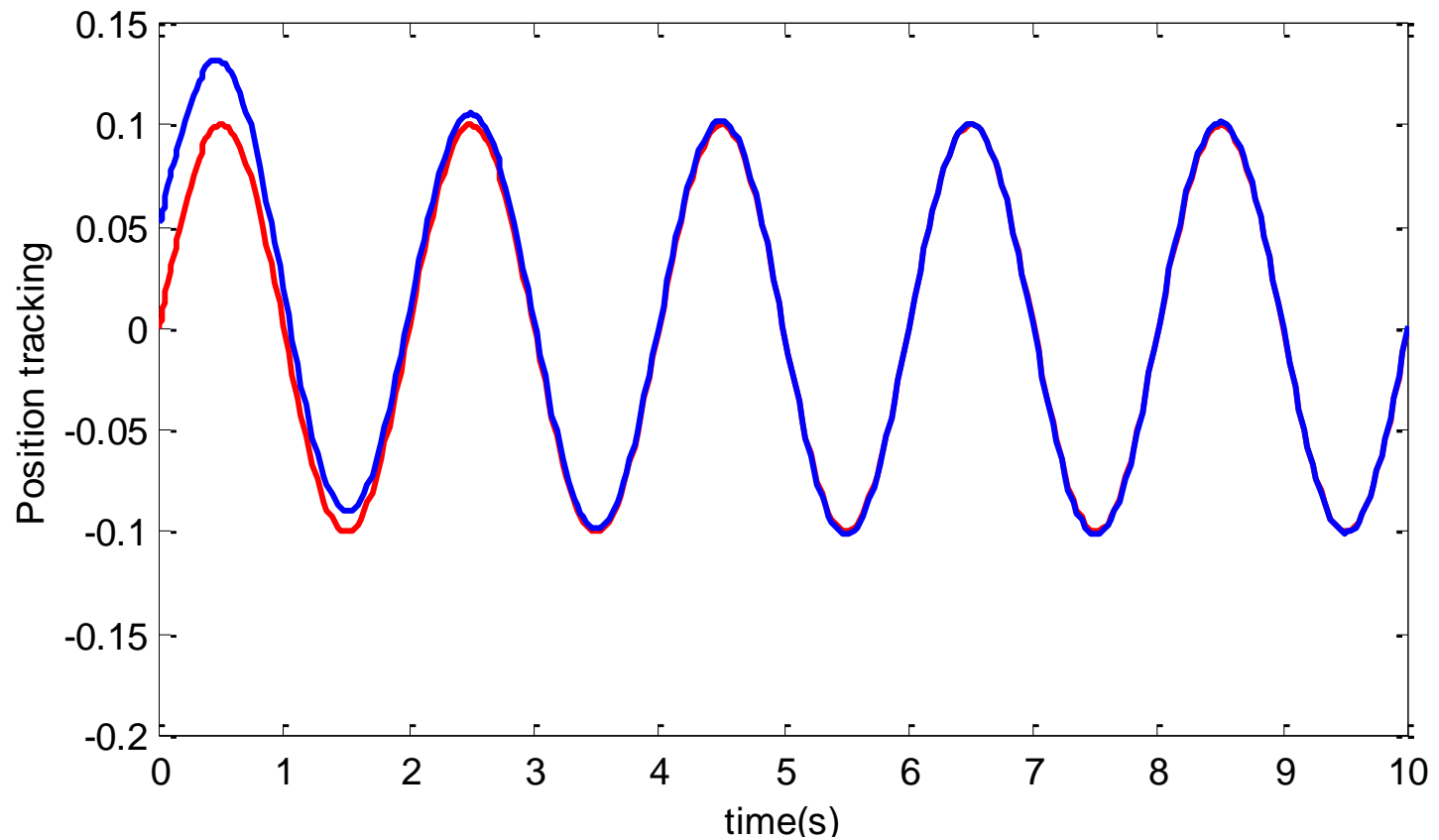
- 由于 $i=1,2$ ，则用于逼近 $f$ 和 $g$ 的模糊规则分别有 $5 \times 5 = 25$ 条。
- 因此， $\xi(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})$
- 选择自适应控制律 (8) - (11) ；



- $\theta_g$  和  $\theta_f$  中各元素的初始值取 **0.10**,  
$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1$$
- 由于 $f$ 的取值范围比 $g$ 的取值范围大，自适应参数选为  
$$\gamma_1 = 50 \quad \gamma_2 = 1$$

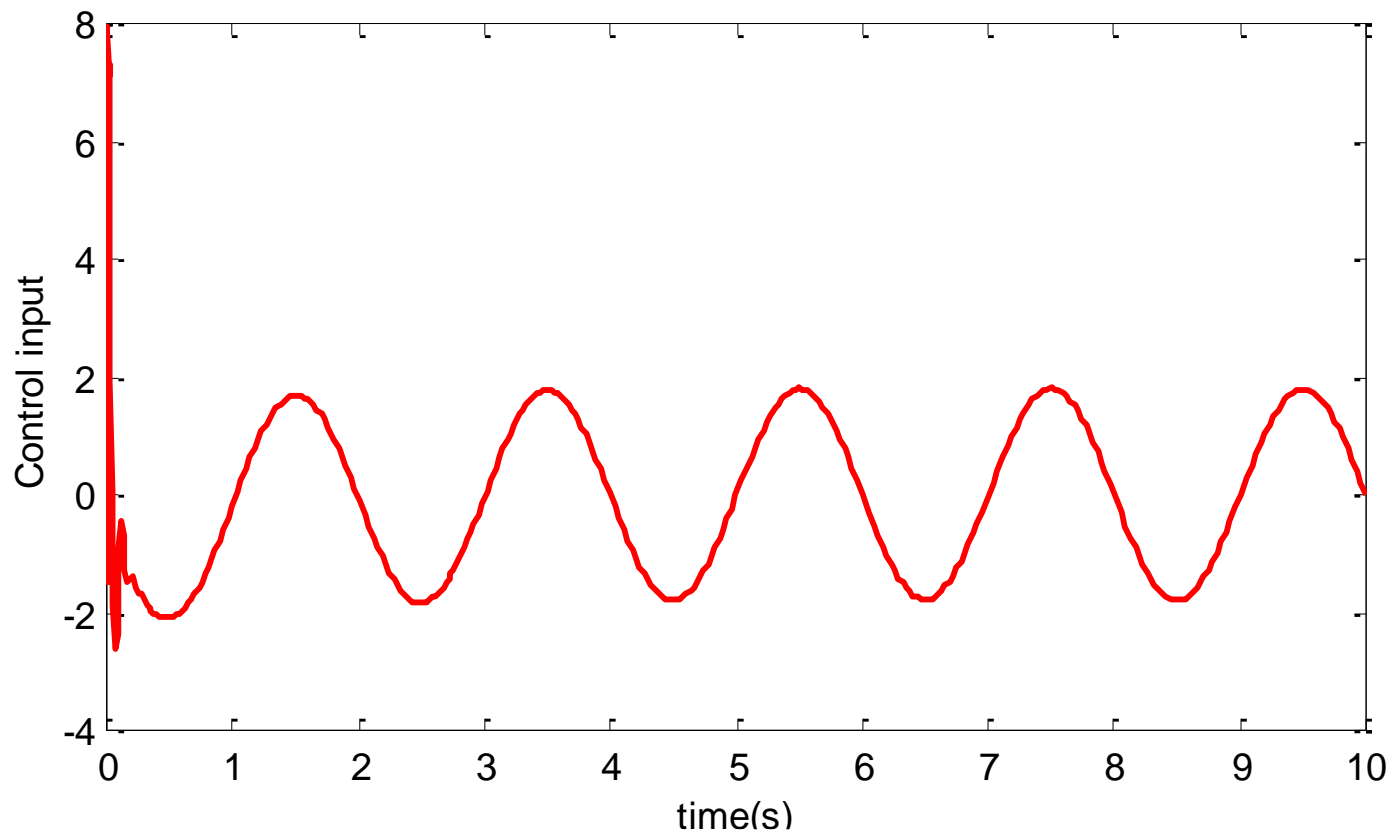
# 仿真结果

## ■ 位置跟踪



# 仿真结果

## ■ 控制输入信号



# 直接自适应形式

- 间接自适应模糊控制利用的是被控对象的知识，而直接自适应模糊控制采用的是控制知识。
- 考虑如下研究对象

$$\dot{x}^{(n)} = f\left(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\right) + bu \quad (23)$$

$$y = x \quad (24)$$

- 其中， $f$ 为未知函数， $b$ 为未知的正常数。
- 直接自适应模糊控制采用下面IF-THEN模糊规则来描述控制知识：

$$\text{IF } x_1 \text{ is } P_1^r \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } P_n^r, \text{ THEN } u \text{ is } Q^r \quad (25)$$

- 式中， $P_i^r$ ， $Q^r$ 为 $R$ 中模糊集合，且  $r = 1, 2, \dots, L_u$
- 设位置指令为 $y_m$ ，令  $e = y_m - y = y_m - x$ ； $\mathbf{e} = \left(e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}\right)^T$
- 选择  $\mathbf{K} = (k_n, \dots, k_1)^T$ ，使多项式  $s^n + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n$  的所有根都在复平面左半开平面上。取控制律为：（形式类似，均为反馈线性化手段）

$$u^* = \frac{1}{b} \left[ -f(\mathbf{x}) + y_m^{(n)} + \mathbf{K}^T \mathbf{e} \right] \quad (26)$$

# 控制器设计

- 将(26)式代入(23)式，得到闭环控制系统的方程：

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \cdots + k_n e = 0$$

- 由K的选取，可得  $t \rightarrow \infty$  时  $e(t) \rightarrow 0$ ，即系统的输出y渐近地收敛于理想输出 $y_m$
- 直接型模糊自适应控制是基于模糊系统设计一个反馈控制器  $u = u(\mathbf{x}|\theta)$  和一个调整参数向量 $\theta$ 的自适应律，使得系统输出y尽可能地跟踪理想输出 $y_m$
- 直接自适应模糊控制器为

$$u = u_D(\mathbf{x}|\theta) \quad (27)$$

- 式中， $u_D$ 是一个模糊系统， $\theta$ 是可调参数集合。

# 控制器设计-模糊系统

- 模糊系统 $u_D$ 由以下两步来构造：

- 1、对变量  $x_i (i=1,2,\cdots,n)$ ，定义 $m_i$ 个模糊集合  $A_i^{l_i} (l_i=1,2,\cdots,m_i)$

- 2、用以下  $\prod_{i=1}^n m_i$ 条模糊规则来构造模糊系统  $u_D(x|\theta)$

*IF*  $x_1$  is  $A_1^{l_1}$ ,  $\cdots$ ,  $x_i$  is  $A_i^{l_i}$ ,  $\cdots$ ,  $x_n$  is  $A_n^{l_n}$  *THEN*  $u_D$  is  $S^{l_1,\cdots,l_n}$

- 其中，  $l_i=1,2,\cdots,m_i$   $i=1,2,\cdots,n$

- 模糊集  $S^{l_1,\cdots,l_n}$  的中心用  $\bar{y}_u^{l_1,\cdots,l_n}$ 表示。

- 采用乘积推理机、单值模糊器和中心平均解模糊器来计算模糊系统

$$u_D(\mathbf{x}|\theta) = \frac{\sum_{l_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{m_n} \bar{y}_u^{l_1,\cdots,l_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i) \right)}{\sum_{l_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{m_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i) \right)} \quad (28)$$



# 控制器设计-模糊系统参数化

- 令  $\theta \in R^{\prod_{i=1}^n m_i}$  为参数  $\bar{y}_u^{l_1 \cdots l_n}$  的组合, 令  $\xi(\mathbf{x})$  为  $\prod_{i=1}^n m_i$  维向量, 其中,

$$\xi_{l_1 \cdots l_n}(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{m_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)}$$

- 则模糊控制器为

$$u_D(\mathbf{x}|\theta) = \theta^T \xi(\mathbf{x})$$

- 模糊控制规则是通过设置其初始参数而被嵌入到模糊控制器中的。

# 控制器设计-自适应律

- 将式 (27) 代入式 (23)，并通过式 (26) 整理得：

$$e^{(n)} = -\mathbf{K}^T \mathbf{e} + b[u^* - u_D(\mathbf{x}|\theta)] \quad (29)$$

- 令

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

- 则闭环系统动态方程 (29) 可写成向量形式：

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{b}[u^* - u_D(\mathbf{x}|\theta)] \quad (30)$$

- 定义最优参数为：

$$\theta^* = \arg \min_{\substack{\theta \in R^{i=1} \\ \prod_{i=1}^n m_i}} \left[ \sup_{x \in R^n} |u_D(\mathbf{x}|\theta) - u^*| \right] \quad (31)$$

# 控制器设计-自适应律

- 定义最小逼近误差为：

$$\omega = u_D(\mathbf{x}|\theta^*) - u^* \quad (32)$$

- 由式 (30) 可得 (重组)

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left( u_D(\mathbf{x}|\theta^*) - u_D(\mathbf{x}|\theta) \right) - \mathbf{b} \left( u_D(\mathbf{x}|\theta^*) - u^* \right) \quad (33)$$

- 将参数化模糊控制器代入上式，可得：

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left( \theta^* - \theta \right)^T \xi(\mathbf{x}) - \mathbf{b} \omega \quad (34)$$

- 定义Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{b}{2\gamma} \left( \theta^* - \theta \right)^T \left( \theta^* - \theta \right) \quad (35)$$

- 其中参数 $\gamma$ 是正的常数。 $\mathbf{P}$ 为一个正定矩阵且满足Lyapunov方程

$$\Lambda^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Lambda = -\mathbf{Q} \quad (36)$$

- 其中 $\mathbf{Q}$ 是一个任意的正定矩阵。

# 控制器设计-自适应律

- 取  $V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$        $V_2 = \frac{b}{2\gamma} (\theta^* - \theta)^T (\theta^* - \theta)$

- 令  $M = \mathbf{b}(\theta^* - \theta)^T \xi(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\omega$

- 则 (34) 式变为:  $\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + M$

- 因此 
$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \Lambda^T + M^T) \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\Lambda \mathbf{e} + M) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\Lambda^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Lambda) \mathbf{e} + \frac{1}{2} M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} M \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{2} (M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M) = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M \end{aligned}$$

- 故: 
$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \left( (\theta^* - \theta)^T \xi(\mathbf{x}) - \omega \right) \\ \dot{V}_2 &= -\frac{b}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T \dot{\theta} \end{aligned}$$

# 控制器设计-自适应律

- $V$ 的导数为:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \left[ (\theta^* - \theta)^T \xi(x) - \omega \right] - \frac{b}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T \dot{\theta} \quad (37)$$

- 令 $\mathbf{p}_n$ 为 $\mathbf{P}$ 的最后一列, 由  $\mathbf{b} = [0, \dots, 0, b]^T$  可知  $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n b$
- 则式 (37) 为:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{b}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T \left[ \gamma \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n \xi(\mathbf{x}) - \dot{\theta} \right] - \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n b \omega \quad (38)$$

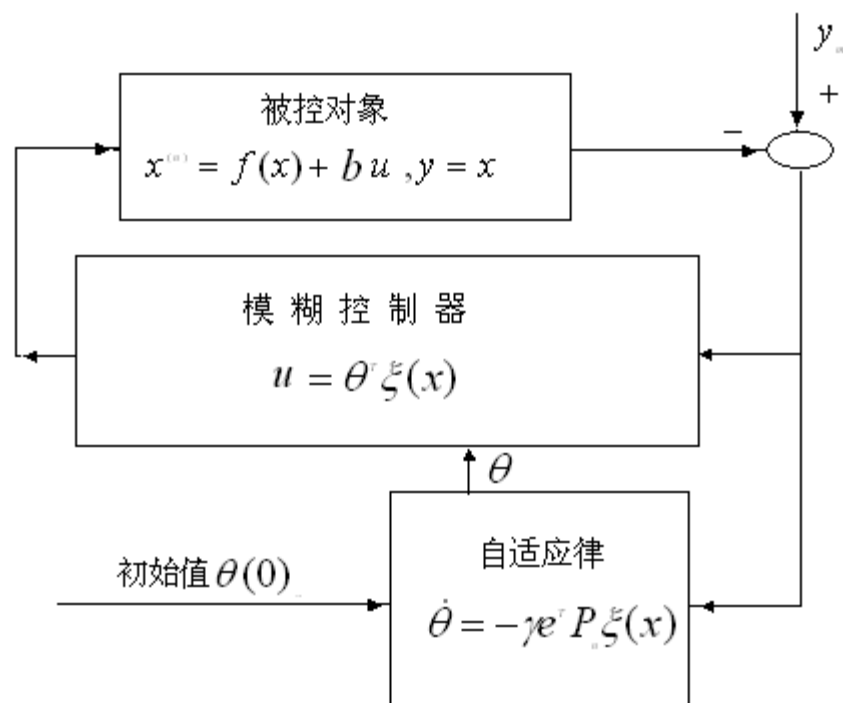
- 取自适应律:

$$\dot{\theta} = \gamma \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n \xi(\mathbf{x}) \quad (39)$$

- 采用上述自适应律, 则 $V$ 的导数为: 
$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n b \omega$$

- 由于 $\mathbf{Q} > 0$ ,  $\omega$ 是最小逼近误差, 通过设计足够多规则的模糊系统  $u_D(\mathbf{x}|\theta)$  可使 $\omega$ 充分小, 从而使得  $\dot{V} < 0$

# 直接自适应模糊控制系统



# 直接自适应模糊控制仿真

- 被控对象为二阶系统:

$$\ddot{x} = -25\dot{x} + 133u$$

- 位置指令为

$$x_d(t) = \sin(\pi t)$$

- 取以下**6**种隶属函数:

$$\mu_{N3}(x) = 1 / (1 + \exp(5(x+2)))$$

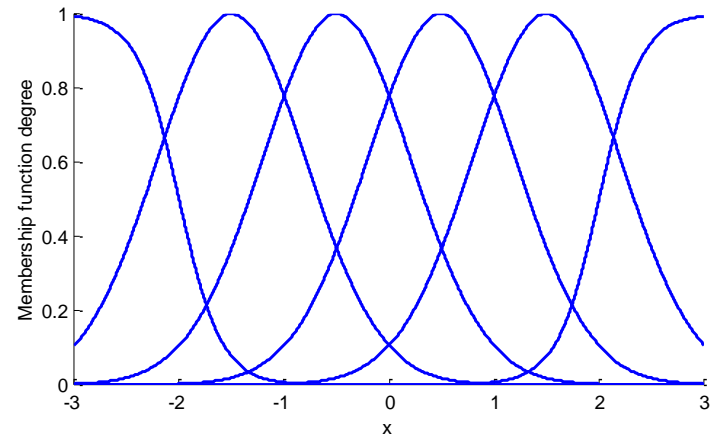
$$\mu_{N2}(x) = \exp(-(x+1.5)^2)$$

$$\mu_{N1}(x) = \exp(-(x+0.5)^2)$$

$$\mu_{P1}(x) = \exp(-(x-0.5)^2)$$

$$\mu_{P2}(x) = \exp(-(x-1.5)^2)$$

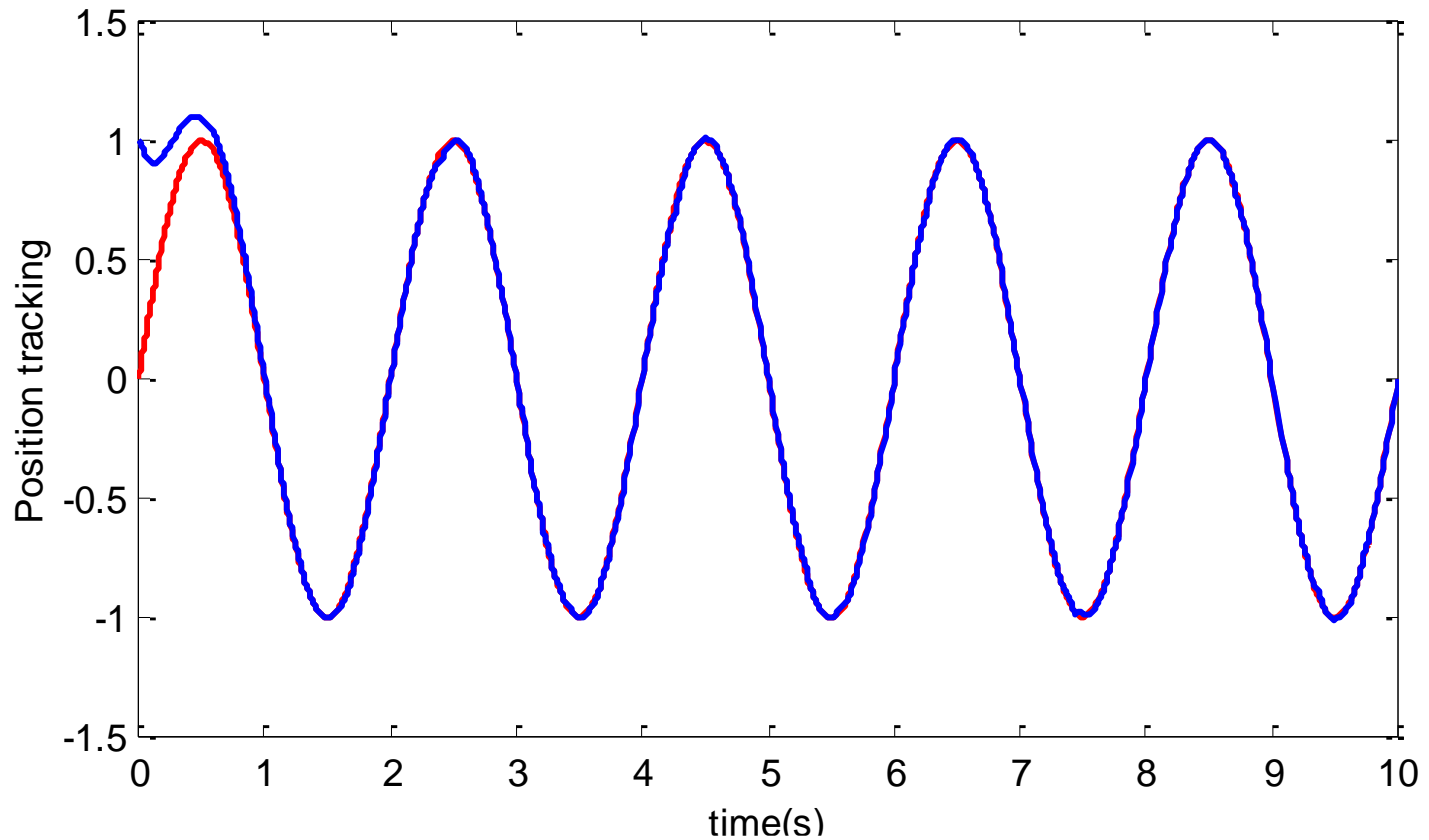
$$\mu_{P3}(x) = 1 / (1 + \exp(-5(x-2)))$$



- 系统初始状态为[1,0],  $\theta$ 中各元素的初始值取0,
- 自适应律中, 取
$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = 10 \end{matrix}$$
- 自适应参数取
$$\gamma = 50$$

# 仿真结果

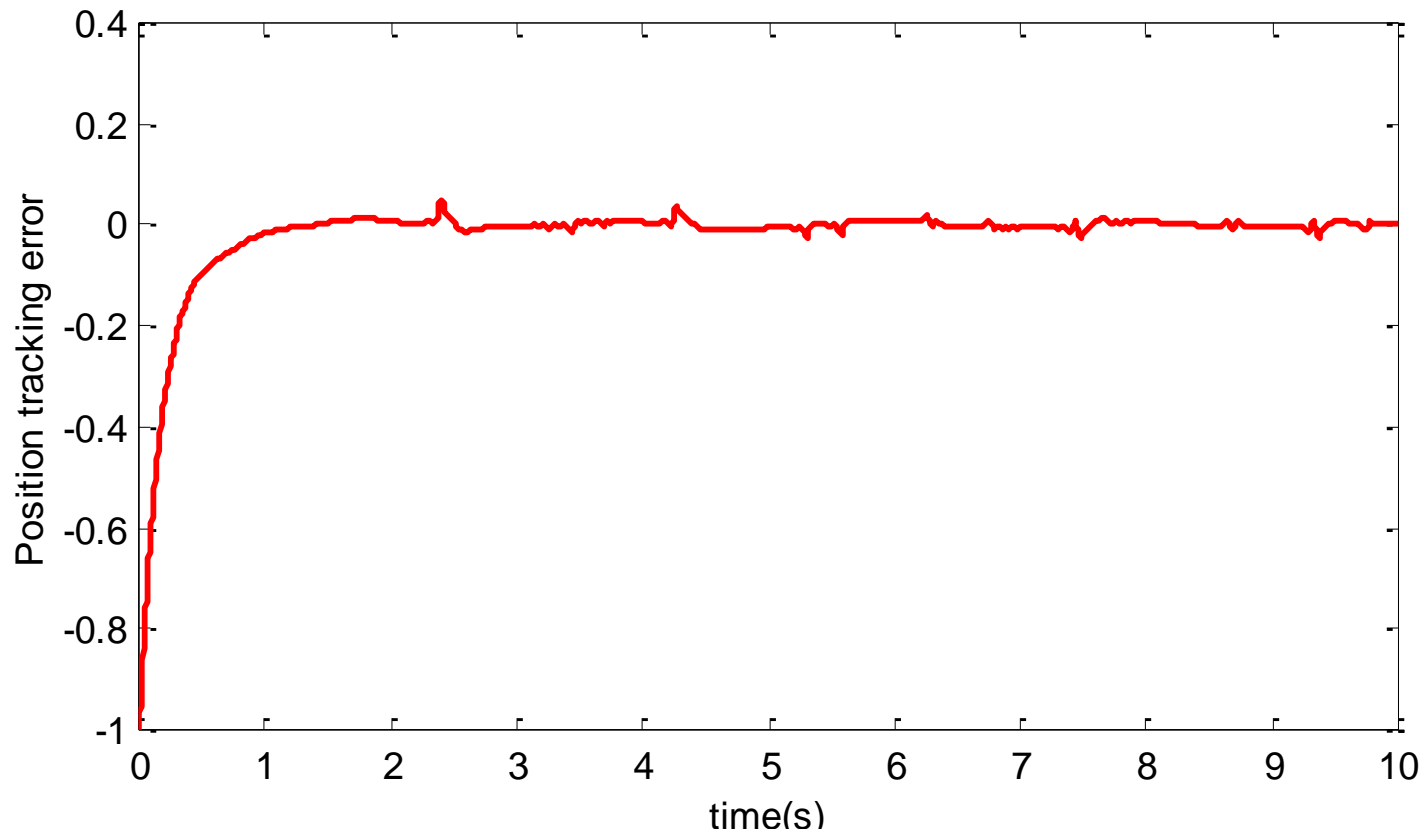
## ■ 位置跟踪





# 仿真结果

## ■ 位置跟踪误差



# 模糊控制小结

- 模糊语言变量和语言值的定义、模糊运算、模糊推理
- 模糊控制器的组成，模糊控制系统设计和分析的基本方法和步骤
- 模糊模型、T-S模糊模型
- 模糊PID控制
- 自适应模糊控制