第三周作业参考答案

习题七

7-13、7-19、7-20、7-21、7-27、7-30

7-13　求解下列 $\boldsymbol{x}(k)$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.15 & -0.8\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(k),$$

初始条件：
$$x(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},u(k)\equiv 1,k=0,1,2,\cdots\cdots$$

解： $X(z)=(zI-A)^{-1}[zX(0)+Bu(z)]$；由已知条件：$u(z)=Z[1]=\dfrac{z}{z-1}$

$$(zI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}z & -1\\ 0.15 & z+0.8\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{z(z+0.8)+0.15}\begin{bmatrix}z+0.8 & 1\\ -0.15 & z\end{bmatrix}$$

$$zX(0)+Bu(z)=\begin{bmatrix}0\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\frac{z}{z-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{z}{z-1}\\ z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z-1}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$X(z)=(zI-A)^{-1}[zX(0)+Bu(z)]=\frac{z}{z(z+0.8)+0.15}\begin{bmatrix}z+0.8 & 1\\ -0.15 & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z-1}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{z}{(z+0.3)(z+0.5)}\begin{bmatrix}\dfrac{2z-0.2}{z-1}\\ \dfrac{z^2-z-0.15}{z-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{z(2z-0.2)}{(z-1)(z+0.3)(z+0.5)}\\ \dfrac{z(z^2-z-0.15)}{(z-1)(z+0.3)(z+0.5)}\end{bmatrix}$$

采用留数法求反 Z 变换，系统有三个单极点：1，－0.3，－0.5

最终结果：

$$x(k)=\begin{bmatrix}\dfrac{12}{13}+\dfrac{40}{13}(-0.3)^k-4(-0.5)^k\\ -\dfrac{1}{13}-\dfrac{12}{13}(-0.3)^k+2(-0.5)^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.923+3.07(-0.3)^k-4(-0.5)^k\\ -0.077-0.923(-0.3)^k+2(-0.5)^k\end{bmatrix}$$

7-19 如图 7-56 所示的采样系统，试求其单位阶跃响应，采样周期 $T=0.1$s。

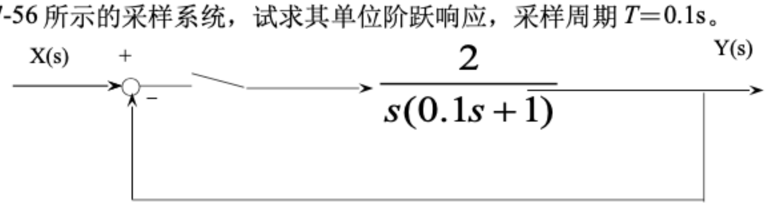


图 7-56　题 7-19 的采样系统图

解：开环脉冲传递函数：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

输出序列的 Z 变换：

$$Y(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}\cdot X(z)=\frac{2z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})+2z(1-e^{-1})}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{1.264z^2}{z^3-1.104z^2+0.472z-0.368}$$

单位阶跃响应：

$$y*(t)=Z^{-1}[Y(z)]=1.2648\delta(t-T)+1.396\delta(t-2T)+0.945\delta(t-3T)+\cdots$$

7-20 设系统如图 7-57 所示，试说明系统在下列条件下是稳定的（用劳斯判据）。

$$0<K<\frac{2(1+e^{-T/T_1})}{(1-e^{-T/T_1})},(T_1 \text{¿} 0,K>0)$$

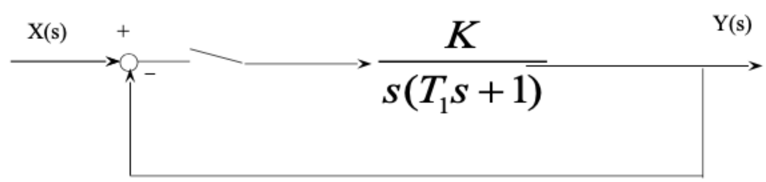


图 7-57 题 7-20 的采样系统图

解：系统的开环脉冲传递函数为：
$$G(z)=\frac{Kz(1-e^{-\frac{T}{T_1}})}{(z-1)(z-e^{-\frac{T}{T_1}})}$$

令 $b=1-e^{-\frac{T}{T_1}}$， 则 $e^{-\frac{T}{T_1}}=1-b$

系统的特征方程： $1+G(z)=0$

即 $(z-1)(z-1+b)+bKz=0$

整理得： $z^2+z(b-2+Kb)+1-b=0$

方法一：按题意应用劳斯判据，作双线性变换 $z=\frac{w+1}{w-1}$ 代入特征方程：

$$Kbw^2+2bw+4-2b-Kb=0$$

w^2 Kb 4-2b-Kb

w^1　2b

w^0　4-2b-Kb

系统若要稳定，Kb>0, K>0；4-2b-Kb＞0，$K<\frac{4-2b}{b}=\frac{2(2-b)}{b}=\frac{2\left(1+e^{-T/T_1}\right)}{\left(1-e^{-T/T_1}\right)}$

7-21 系统的结构如图 7-58 所示，试用根轨迹法确定系统稳定的临界 K 值。

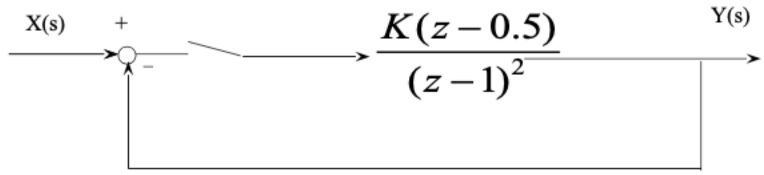
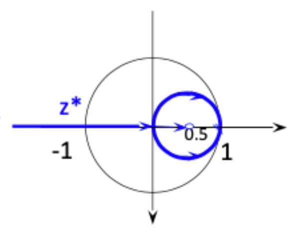


图 7-58 题 7-21 的系统结构图

解：系统的开环脉冲传递函数为：$G(z)=\frac{K(z-0.5)}{(z-1)^2}$



故系统有 1 个开环零点：z= 0.5；2 个开环重极点：$p_1=p_2$＝1

据根轨迹规则，可知根轨迹大致形状：

1）实轴上的分离点与会合点：

因为 $|G(z)|=1$ ；所以 $K=\frac{(z-1)^2}{z-0.5}$

$$\frac{dK}{dz}=\frac{2(z-1)(z-0.5)-(z-1)^2}{(z-0.5)^2}=\frac{z(z-1)}{(z-0.5)^2}=0$$

，故得：

z＝0, z =1 ,可画出如图示的根轨迹草图

由图知，系统稳定的临界值产生在 z = -1 处：

法 1）由幅值条件可求出该点的 K：$K=\frac{|z*-p_1||z*-p_2|}{|z*-z_1|}=\frac{2*2}{1.5}=\frac{8}{3}$

法 2）将在 z = -1 代入特征方程　$1+G(z)=0$

即　$1+\frac{K(-1.5)}{4}=0$　，故当 z = -1 时，K＝2.67

另，易知当 K<0 时，系统不稳定。

故当 0＜K＜2.67 时系统是稳定的，或者说系统稳定的临界 K 值为 2.67。

7-27 已知系统的闭环传递函数 $\Phi_B(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$ ；试求系统在 $1(t),t,\frac{t^2}{2}$ 输入时

的稳态误差。

解：误差传递函数为

$$\Phi_e(z)=1-\Phi_B(z)=\frac{z^2-1.368z+0.368}{z^2-z+0.632}$$

$$\text{特征方程：}\Delta(z)=z^2-z+0.632$$

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 0.632}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-1.528}}{2}=0.5\pm j0.618$$

$$|z_{1,2}|<1$$

由上知，系统是稳定的。可以运用终值定理。

不同输入的稳态误差

$$(1)\text{单位阶跃}\quad e_{ss}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2-1.368z+0.368}{z^2-z+0.632}\cdot\frac{z}{z-1}=0$$

$$(2)\text{单位速度}\quad e_{ss}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2-1.368z+0.368}{z^2-z+0.632}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$¿\lim_{z\to 1}\left\{\frac{\frac{d}{dz}(z^2-1.368z+0.368)z}{\frac{d}{dz}(z^2-z+0.632)(z-1)}\right\}=\lim_{z\to 1}\frac{3z^2-2.736z+0.368}{3z^2-4z+1.632}=1$$

$$(3)\text{单位加速度}\quad e_{ss}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2-1.368z+0.368}{2(z^2-z+0.632)}\cdot\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$=\lim_{z\to 1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{d}{dz}[(z^2-1.368z+0.368)z(z+1)]}{[(z^2-z+0.632)(z-1)^2]}\right\}=\infty$$

7-30　已知离散系统如图 7-65 所示，其中采样周期 $T=1$，连续部分传递函数 $G_0(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，试求当 $r(t)=1(t)$ 时，系统无稳态误差、过渡过程在最少拍内结束的数字控制器 $D(z)$。

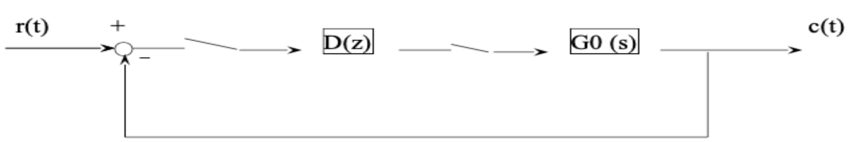


图 7-65 题 7-30 系统图

解：系统的对象开环脉冲传递函数

$$Z[G_0(s)]=Z[\frac{1}{s(s+1)}]=Z[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-1}}=\frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

为使系统在单位阶跃输入下无稳态误差。并能在有限拍内结束过渡过程，由稳态误差的计算公式：

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+G(z)D(z)}=\lim_{z\to 1}[1-\Phi(z)]=0$$

阶跃输入下无稳态误差的最少拍系统的闭环传递函数应为：

$$\Phi(z)=z^{-1}$$

数字控制器的脉冲传递函数为

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)[1-\Phi(z)]}=1.58-0.58z^{-1}$$