第五周作业 **P.378-379　习题八：8-2(3); 8-5; 8-6; 8-8; 8-10.**

8-2　（1）确定下列系统是否完全能观；（2）是否完全能控；（3）求出系统的传递函数；（4）确定每个系统分别有多少个能观与能控的状态变量；（5）判别系统是否稳定？

（3）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u$；$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$；

解：（3）(a)不能观；　(b)不能控；　(c) $G(s)=\frac{s+1}{s(s-1)}$；

(d)2 个能观，2 个能控；(e)系统不稳定。

8-5　已知系统状态空间表达式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}u\text{；}\quad y=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试判定：（1）能否适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能控性？

（2）能否适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能观性？

解：(1)可控性判别矩阵：$Q_C=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & a\lambda+b & a\lambda^2+2b\lambda\\ b & b\lambda & b\lambda^2\\ c & c\lambda & c\lambda^2\end{bmatrix}$

因为：$\det Q_c=0$，故无论如何选择 a、b 和 c，系统都不具有能控性。

(2)可观性判别矩阵：$Q_0=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a\lambda & a+b\lambda & c\lambda\\ a\lambda^2 & b\lambda^2+2a\lambda & c\lambda^2\end{bmatrix}$

又因为 $\det Q_o=0$，故无论如何选择 a、b 和 c，系统都不具有能观性。

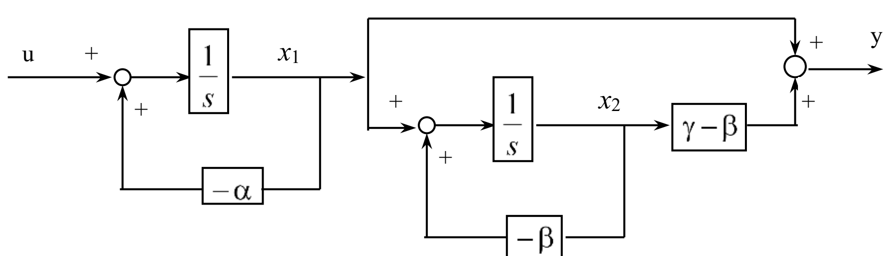
8-6　设系统的传递函数为：$G(s)=\dfrac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$，欲使系统的状态全部能控且能观，试求 a 的取值范围。

解：当 $a\neq 1,2,4$ 时，系统的状态全部能控且能观。

8-8　串联组合系统的结构图如图 8-17 所示，试：

（1）写出系统的状态空间表达式；

（2）讨论系统的能控性与能观性。



解：（1） $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-a & 0\\ 1 & -\beta\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$；　$y=\begin{bmatrix}1 & \gamma-\beta\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$；

（2）系统能控，当 $\gamma=\alpha$ 时，系统能控不能观。

$Q_o=\begin{pmatrix}1 & \gamma-\beta\\ -\alpha+\gamma-\beta & -\beta(\gamma-\beta)\end{pmatrix}$ 所以 $\det(Q_o)=-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$

所以当 $\gamma=\alpha$ 或 $\gamma=\beta$ 时，系统不能观。

8-10　已知系统状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}u$，试求与其相应的离散化系统为不能控时的采样周期 T 值。

解：

$$G_{(T)}=\begin{pmatrix}\cos(2T) & \frac{1}{2}\sin(2T)\\ -2\sin(2T) & \cos(2T)\end{pmatrix}\qquad H_{(T)}=\begin{pmatrix}\frac{1-\cos(2T)}{2}\\ \sin(2T)\end{pmatrix}$$

$$Q_c=\begin{pmatrix}\frac{1-\cos(2T)}{2} & \frac{\sin^2(2T)-\cos^2(2T)+\cos(2T)}{2}\\ \sin(2T) & 2\sin(2T)\cos(2T)-\sin(2T)\end{pmatrix}\qquad \det(Q_c)=-4\cos(T)\sin^3(T)$$

所以当 $T=\frac{n\pi}{2}$（n 为正整数），与其相应的离散化系统为不能控。

8-12　已知系统（$\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$）如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}。$$

要求：（1）判别系统的能控性。如果完全能控，请将该系统化为能控规范型；如果不完全能控，请找出其能控子空间；（2）判别系统的能观性。如果完全能观，请将该系统化为能观规范型；如果不完全能观，请找出其能观子空间。

解：（1）按能控性分解

step1: 计算能控性矩阵 Qc

$$Q_C=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\0 & 0 & 0\\1 & 3 & 8\end{bmatrix}$$；rankQc=2<3，系统不完全能控；

Step2：构造非奇异变换矩阵 T，并求出变换后的系统矩阵：

从 Qc 中选取 2 个线性无关的列，再附加一线性无关列 $T_2^{\,T}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

（附加的线性无关列不同，则答案可能不同，但 A、B 形式是一定相同的）

$$T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 3 & 0\end{bmatrix};\qquad \text{则}\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_C=T^{-1}AT==\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\\1 & 4 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ \hat{b}_C=T^{-1}b=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\ \hat{c}_c=cT=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

如果选取 $T_c=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$T_c^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\-1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\hat{A}_C=T^{-1}AT==\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\\1 & 4 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$，b 与上相同，$\hat{c}_c=cT=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

如果选取 $T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}$，$T^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\-1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\hat{A}_C=T^{-1}AT==\begin{bmatrix}-4 & -13 & 1\\4 & 12 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$，b 与上相同，$\hat{c}_c=cT=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

Step3：写出分解后的可控、不可控子系统动态方程：

可控子系统：$\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0 & -4\\1 & 4\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$

$$y_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x_c$$

不可控子系统：$\dot{x}_{\bar{c}}=x_{\bar{c}}$

$$y_2=-x_{\bar{c}}$$

（2）按能观性分解

step1：计算能观性矩阵 Qo

$$Q_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$；rankQo=2<3，系统不完全能观；

Step2：构造非奇异变换矩阵 T^{-1}，并求出变换后的各矩阵：

从 Qo 中选取 2 个线性无关的行作为 T_1，再附加一线性无关行 $T_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad \text{则}\quad T=(T^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_o=T^{-1}AT==\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ \hat{b}_o=T^{-1}b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};\ \hat{c}_o=cT=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果选取 $T_0^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$T_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\hat{A}_0=T^{-1}AT==\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\hat{b}_o=T^{-1}b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$，c 与上相同

Step3：写出分解后的可观、不可观子系统动态方程：

可观子系统：$\dot{x}_o=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}x_o+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$

$$y_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x_o=y$$

不可观子系统：$\dot{x}_{\bar{o}}=\begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix}x_o+2x_{\bar{o}}+u$

$$y_2=0$$