现代控制理论
Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录

第七章 Chapter 7

线性离散系统的分析与校正

主要内容

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

离散系统的数学模型

- 线性差分方程
- 脉冲传递函数
- 离散系统的状态空间模型
- 各种离散模型的关系

离散系统的状态空间模型

连续状态空间模型：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \infty)$$

离散状态空间模型：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \qquad k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$$

状态$\mathbf{x}(k)$

输入$\mathbf{u}(k)$

输出$\mathbf{y}(k)$

复习：连续状态方程的全解

➢通常有两种方法计算状态方程的全解：直接求解方程（时域）和利用拉普拉斯变换（S域）；状态转移矩阵STM概念。

方法 1 时域法： e^{-At} 是方阵，$x(t)$ 是 $n\times 1$ 的状态向量，于是有

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)] = e^{-At}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - e^{-At}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) = e^{-At}[\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]$$

对于状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)] = e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

将该方程在 0 到 t 的时间区间上进行积分

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{N}(t)] = \boldsymbol{M}(t)\dot{\boldsymbol{N}}(t) + \dot{\boldsymbol{M}}(t)\boldsymbol{N}(t)$$

复习：连续状态方程的全解

- 从方程 $e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$ ，希望得到 $x(t)$

$$e^{At}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)]=e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau\right]$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$$

➢ 利用 STM 和 $t=t_0$ 时刻的初始条件，在输入 $u(t)$ 作用下状态方程的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau,\ t>t_0$$

状态转移方程

令 $\beta=t-\tau$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{Bu}(t-\beta)d\beta$$

复习：连续状态方程的全解

方法 2　拉普拉斯变换方法：

状态方程　$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

$$\Big\Downarrow \ \text{LT}$$

$$\boldsymbol{X}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0)+[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$
$$=\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\Big\Downarrow \ \text{LT}^{-1}$$

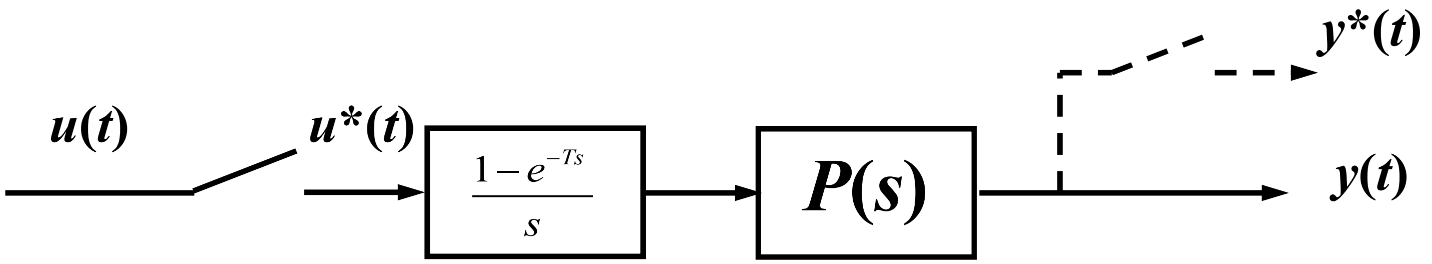
$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]$$

若初始时刻$t=t_0$，在输入 $u(t)$ 作用下状态方程的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

离散系统的状态空间模型

➢ **从连续状态空间模型到离散状态空间模型**



连续状态空间模型 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$ $\quad t \in [0, \infty)$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

⇩ 零阶保持器

$$\boldsymbol{x}(k+1) = e^{AT}\boldsymbol{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)d\tau$$

离散系统的状态空间模型

$$\boldsymbol{x}(k+1)=e^{AT}\boldsymbol{x}(k)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A(k+1)T-A\tau}\boldsymbol{Bu}(k)d\tau$$

令λ=(k+1)T-τ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=e^{AT}\boldsymbol{x}(k)+\int_{0}^{T}e^{A\lambda}\boldsymbol{Bu}(k)d\lambda\\&=e^{AT}\boldsymbol{x}(k)+\left[\int_{0}^{T}e^{A\lambda}\boldsymbol{B}d\lambda\right]\boldsymbol{u}(k)\\&=\boldsymbol{G}(T)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}(T)\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}$$

离散状态空间模型

$$\begin{cases}\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}(T)\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}(T)\mathbf{u}(k)\\\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{cases}$$

$$k\in\{0,1,2,\cdots\}$$

$$\mathbf{G}(T)=e^{\mathbf{A}T},\mathbf{H}(T)=\int_{0}^{T}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}d\tau$$

注意：

1）G，H取决于A，B，*T*

2）计算H时有时先乘B更容易

3）对于线性定常系统，*T*一旦固定，G、H即为常数

4）注意计算 exp(A*T*)的方法

离散系统的状态空间模型

➢ **例7-3-9** 已知连续状态方程 $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$ ，求离散状态方程（含零阶保持）。

解：1）

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

2）

$$\mathbf{G}(T)=e^{\mathbf{A}T}=L^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}\Big|_{t=T}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(T)=[\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}d\lambda]=\int_0^T\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda})\\ e^{-2\lambda}\end{bmatrix}d\lambda=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(T+\frac{e^{-2T}-1}{2})\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

3）若T=1s，

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}(T)\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}(T)\mathbf{u}(k)=\begin{bmatrix}1 & 0.432\\ 0 & 0.135\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}0.284\\ 0.432\end{bmatrix}\mathbf{u}(k)}$$

求解离散状态方程

1) 离散状态方程本质上是一阶差分方程组，求其解也与求差分方程解一样有两种方法：递推法与Z变换法。

- **递推法**

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

已知：$\mathbf{x}(0),\ \mathbf{u}(k)$

直接将初始条件$x(0)$与$u(k)$代入状态方程递推求解

特点：简单且适合计算机，但无解析式

$$\mathbf{x}(1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(0)$$
$$\mathbf{x}(2)=\mathbf{A}\mathbf{x}(1)+\mathbf{B}\mathbf{u}(1)=\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0)+\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{x}(k)=\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

令 $\Phi(k)=\mathbf{A}^k$ 为离散状态转移矩阵，且有

$$\Phi(k+1)=\mathbf{A}\Phi(k)$$
$$\Phi(0)=\mathbf{I}$$

$$\Phi(t)=e^{\mathbf{A}t}$$
$$\Phi(0)=\mathbf{I}$$

$$\mathbf{x}(k)=\Phi(k)\mathbf{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-i-1)\mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

求解离散状态方程

- **Z变换法**

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \qquad \text{已知：} \mathbf{x}(0),\ \mathbf{u}(k)$$

Z变换

$$z\mathbf{X}(z)-z\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}\mathbf{X}(z)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\Rightarrow \mathbf{X}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0)+(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

Z反变换

$$\mathbf{x}(k)=Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]=Z^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)]\}$$

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\{Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]\}+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

与递推法比较

$$\mathbf{\Phi}(k)=\mathbf{A}^{k}=Z^{-1}[(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z]$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i)=Z^{-1}[(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)]$$

特点：不同于递推法得到的是有限项时间序列(Open form)，Z变换法的最突出优点是可以得到解的数学解析式(Closed form)。

求解离散状态方程

例7-3-10 已知离散系统，其初始条件及输入$u(k)$，求$\mathbf{x}(k)$。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; u(k) = 1, k = 0,1,2,\cdots$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)$$

解：1)用递推法

代入不同的k值计算

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

$$\Phi(1) = \mathbf{A}$$

$$\Phi(2) = \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -0.16 & -1 \\ 0.16 & 0.84 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(3) = \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.84 \\ -0.134 & -0.68 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

求解离散状态方程

例7-3-10 已知离散系统，其初始条件及输入$u(k)$，求$\mathbf{x}(k)$。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; u(k) = 1, k = 0,1,2,\cdots$$

解：2) Z变换法 $\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)$

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[\mathbf{X}(z)] = Z^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)]\}$$

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{4/3}{z+0.2} + \dfrac{-1/3}{z+0.8} & \dfrac{5/3}{z+0.2} + \dfrac{-5/3}{z+0.8} \\[2ex] \dfrac{-0.8/3}{z+0.2} + \dfrac{0.8/3}{z+0.8} & \dfrac{-1/3}{z+0.2} + \dfrac{4/3}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{z}{z-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z-1} \\[2ex] \dfrac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

求解离散状态方程

$$\mathbf{X}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\left[z\mathbf{x}(0)+\mathbf{Bu}(z)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}\\ \dfrac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-17z/6}{z+0.2}+\dfrac{22z/9}{z+0.8}+\dfrac{25z/18}{z-1}\\ \dfrac{3.4z/6}{z+0.2}+\dfrac{-17.6z/9}{z+0.8}+\dfrac{7z/18}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(k)=Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]$$

$$\mathbf{x}(k)=Z^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{-17z/6}{z+0.2}+\dfrac{22z/9}{z+0.8}+\dfrac{25z/18}{z-1}\\ \dfrac{3.4z/6}{z+0.2}+\dfrac{-17.6z/9}{z+0.8}+\dfrac{7z/18}{z-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{17}{6}(-0.2)^k+\dfrac{22}{9}(-0.8)^k+\dfrac{25}{18}\\ \dfrac{3.4}{6}(-0.2)^k-\dfrac{17.6}{9}(-0.8)^k+\dfrac{7}{18}\end{bmatrix}$$

上式为一解析的闭合形式，代入k值即可计算不同时刻的状态。

离散系统的数学模型

- 线性差分方程
- 脉冲传递函数
- 离散系统的状态空间模型
- 各种离散模型的关系

各种离散模型的关系

1) 差分方程（时域）和脉冲传递函数（z 域）

- **由差分方程→脉冲传递函数** ——通过Z变换

若 n 阶前向差分方程（其中a, b为常数，k, n, m为整数，且$m \le n$）

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)$$
$$=b_m r(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1 r(k+1)+b_0 r(k)$$

对上式两边作Z变换（令初始条件为零，并利用超前移位特性），得脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

若为后向差分方程，方法类似（利用滞后移位特性）。

各种离散模型的关系

例：$y(k+2)+4y(k+1)+3y(k)=6r(k+1)+7r(k)$，求脉冲传递函数

解：作z变换 $\left[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]+4\left[zY(z)-zy(0)\right]+3Y(z)$

$$=6\left[zR(z)-zr(0)\right]+7R(z)$$

$$\left[z^2Y(z)+4zY(z)+3Y(z)\right]-z^2y(0)-z\left[y(1)+4y(0)\right]=\left[6zR(z)+7R(z)\right]-z6r(0)$$

零初始条件$y(-1)=y(-2)=\cdots=0, r(-1)=r(-2)=\cdots=0$

当$k=-1$时，$y(1)+4y(0)+3y(-1)=6r(0)+7r(-1)$

即$y(1)+4y(0)=6r(0)$

当$k=-2$时，$y(0)+4y(-1)+3y(-2)=6r(-1)+7r(-2)$，即$y(0)=0$

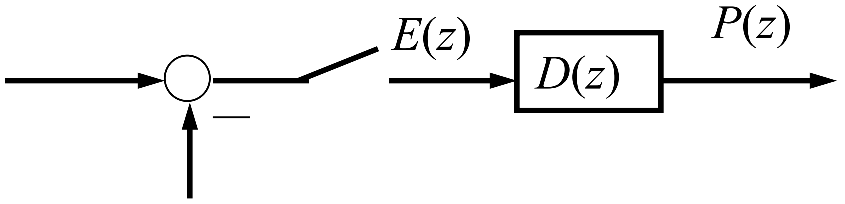
$$Y(z)\left(z^2+4z+3\right)=R(z)\left(6z+7\right), G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{6z+7}{z^2+4z+3}$$

各种离散模型的关系

➢ 由脉冲传递函数→差分方程 ——通过Z反变换

若已知控制器的脉冲传递函数$D(z)$，要化为计算机的控制算式，必须将 $D(z)$转化为**差分方程表示**，若

$$D(z)=\frac{P(z)}{E(z)}=\frac{k(z-a)}{z-1}$$



$$zP(z)-P(z)=k[zE(z)-aE(z)]$$

Z反变换

$$P(k+1)-P(k)=k[e(k+1)-ae(k)]$$ ——**前向差分方程**

或 $$P(k)-P(k-1)=k[e(k)-ae(k-1)]$$ ——**后向差分方程**

零初始条件下等价

不可实现，因$P(k)$用到$e(k+1)$的值。

注：工程上用后向差分方程多些。$D(z)$分子的阶次不能高于分母的阶次？

各种离散模型的关系

2) 脉冲传递函数和状态方程

- **由状态方程→脉冲传递函数** ——转换后的结果是惟一的

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}adj(z\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\left|z\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|} + \mathbf{D}}$$

$\Delta = \left|z\mathbf{I}-\mathbf{A}\right| = 0$ 为系统特征方程

各种离散模型的关系

➢ **例7-3-11** 已知系统状态方程

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.6 & 0.233\\ -0.466 & -0.097\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.2\\ 0.233\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

求其脉冲传递函数。

解：

$$G(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-0.6 & -0.233\\ 0.466 & z+0.097\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.2\\ 0.233\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z+0.097 & 0.233\\ -0.466 & z-0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\ 0.233\end{bmatrix}$$

$$=\frac{0.2z+0.074}{(z-0.135)(z-0.368)}$$

各种离散模型的关系

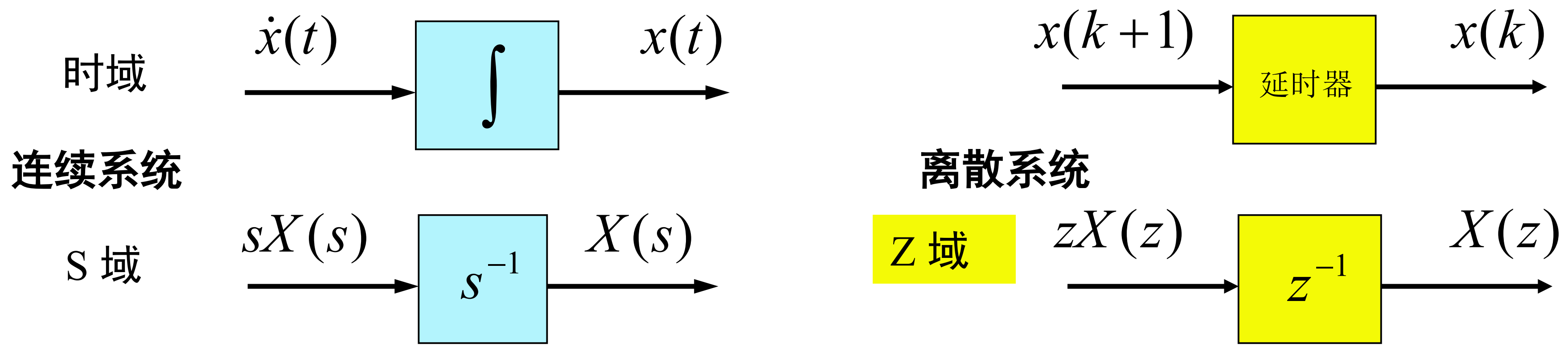
➢ 由脉冲传递函数→状态方程

——转换后的结果不惟一！

➢ 与连续系统类似，由脉冲传递函数求离散状态方程的问题称为**实现问题**，因状态变量选择的不同，状态方程也就不同

➢ 常见的实现如**能控标准型**、**能观标准型**、**正则标准型**(或称并联分解）、**串联分解**等。一般先画出状态图再写状态方程比较容易，信号流图等工具也可以采用

➢ 与连续系统不同的是，连续系统中采用积分器作为基本单元，而在离散系统中则采用延时器作为基本单元。



各种离散模型的关系

➢ **能控标准型和能观标准型：**

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

$$=b_n+\frac{(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)z^{n-1}+\cdots+(b_1-a_1b_n)z+(b_0-a_0b_n)}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

$$\begin{cases} x(k+1)=Ax(k)+bu(k) \\ y(k)=cx(k)+du(k) \end{cases}$$

能控标准型

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix} b_0-a_0b_n & b_1-a_1b_n & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}b_n \end{bmatrix}$$

$$d=b_n$$

能观标准型

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} b_0-a_0b_n \\ b_1-a_1b_n \\ b_2-a_2b_n \\ \vdots \\ b_{n-1}-a_{n-1}b_n \end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d=b_n$$

各种离散模型的关系

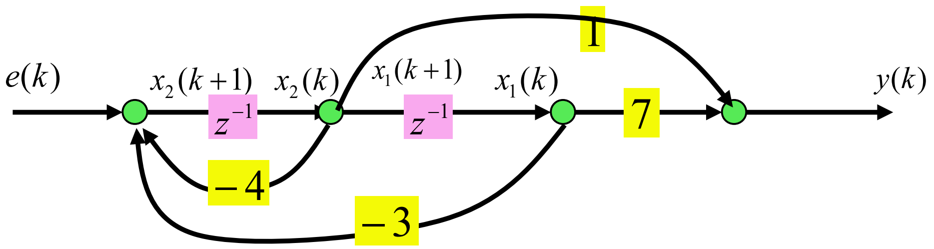
➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**1）能控标准型**

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$

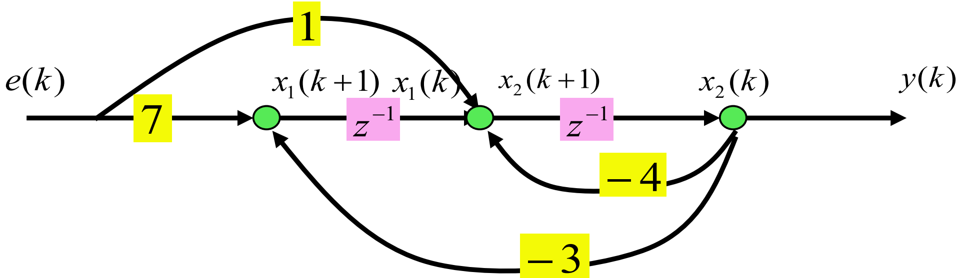
$$y(k)=\begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}x(k)$$



2）能观标准型

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x(k)$$



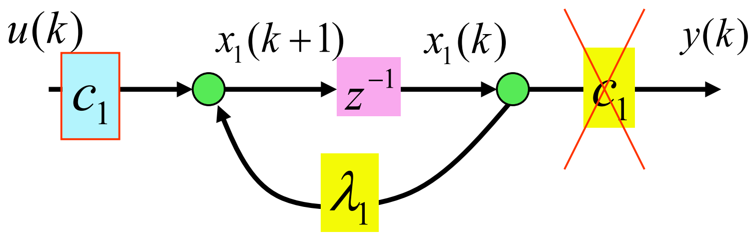
各种离散模型的关系

➢ **正则标准型（并联分解）**：适用于脉冲传递函数为部分分式形式，——当特征方程无重根时，系统矩阵A为对角阵

基本单元：

$$D(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{c_1}{z-\lambda_1}=\frac{z^{-1}c_1}{1-z^{-1}\lambda_1}$$

$$x_1(k+1)=\lambda_1 x_1(k)+u(k)$$
$$y(k)=c_1 x_1(k)$$



$$\boxed{\begin{aligned} x_1(k+1)&=\lambda_1 x_1(k)+c_1 u(k)\\ y(k)&=x_1(k)\end{aligned}}$$

➡ A, b,c?

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix};\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix};\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

- 正则标准型（并联分解）——若有重根，系统矩阵A为约当阵
- 有重根时则c_1的位置须由后变为前（单根时可前可后）

各种离散模型的关系

➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**3）正则标准型(并联分解）**——无重根

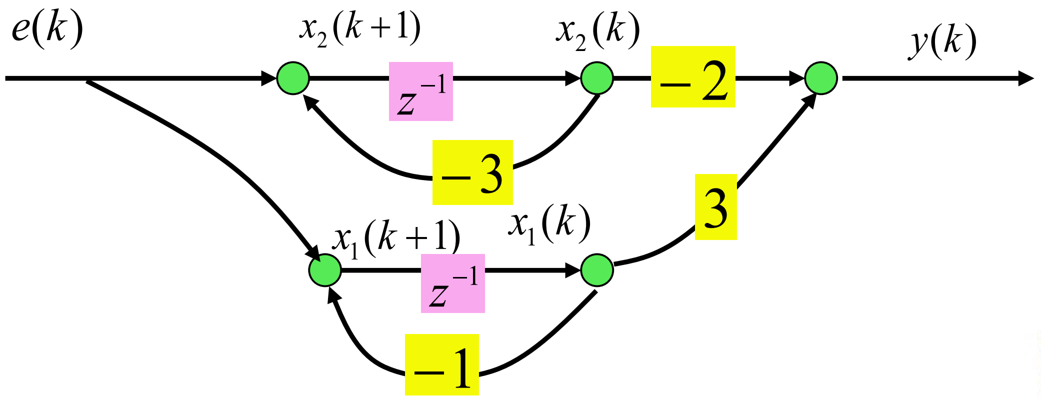
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix};\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix};\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}=\frac{3}{z+1}-\frac{2}{z+3}$$

$$=\frac{c_1z^{-1}}{1-z^{-1}\cdot\lambda_1}+\frac{c_2z^{-1}}{1-z^{-1}\cdot\lambda_2}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e(k)$$

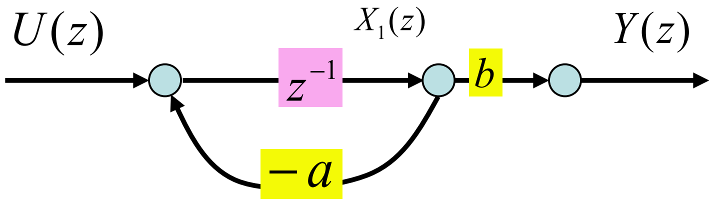
$$y(k)=\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}x(k)$$



各种离散模型的关系

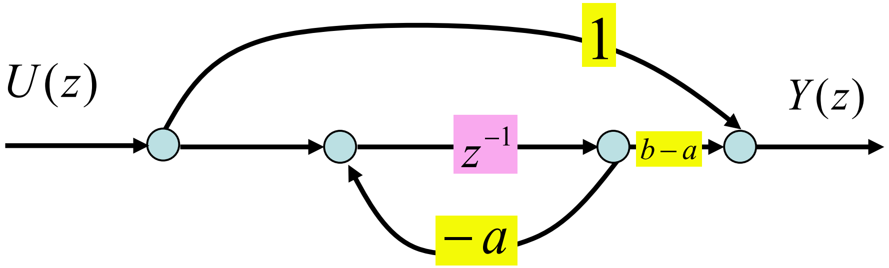
- **串联分解：**适用于脉冲传递函数分子分母均为因式分解形式

一阶环节基本单元-1：
$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b}{z+a}=\frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$



$$x_1(k+1)=-ax_1(k)+u(k)$$
$$y(k)=bx_1(k)$$

一阶环节基本单元-2：
$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+b}{z+a}=1+\frac{b-a}{z+a}$$



$$\begin{cases}x_1(k+1)=-ax_1(k)+u(k)\\ y(k)=(b-a)x_1(k)+u(k)\end{cases}$$

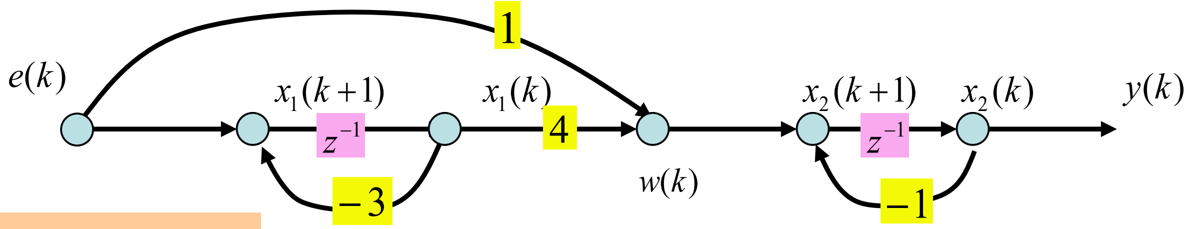
各种离散模型的关系

➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**4）串联分解1：** $\because D(z)=\dfrac{Y(z)}{E(z)}=\dfrac{z+7}{z^2+4z+3}=\dfrac{1}{z+1}\cdot\dfrac{z+7}{z+3}=\dfrac{1}{z+1}\left(1+\dfrac{4}{z+3}\right)$

状态变量图



$$x_1(k+1)=-3x_1(k)+e(k)$$
$$w(k)=4x_1(k)+e(k)$$

$$x_2(k+1)=-x_2(k)+w(k)$$
$$y(k)=x_2(k)$$

$$x_2(k+1)=4x_1(k)-x_2(k)+e(k)$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&0\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}x(k)$$

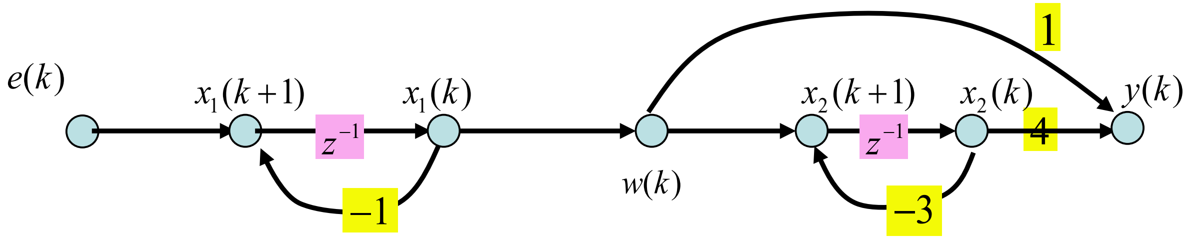
各种离散模型的关系

➤ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**4）串联分解2：** $\because D(z)=\dfrac{Y(z)}{E(z)}=\dfrac{z+7}{z^2+4z+3}=\dfrac{1}{z+1}\cdot\dfrac{z+7}{z+3}=\dfrac{1}{z+1}\left(1+\dfrac{4}{z+3}\right)$

状态变量图



$$x_1(k+1)=-x_1(k)+e(k)$$
$$w(k)=x_1(k)$$

$$x_2(k+1)=-3x_2(k)+w(k)$$
$$y(k)=w(k)+4x_2(k)$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e(k)$$
$$y(k)=\begin{bmatrix}1&4\end{bmatrix}x(k)$$

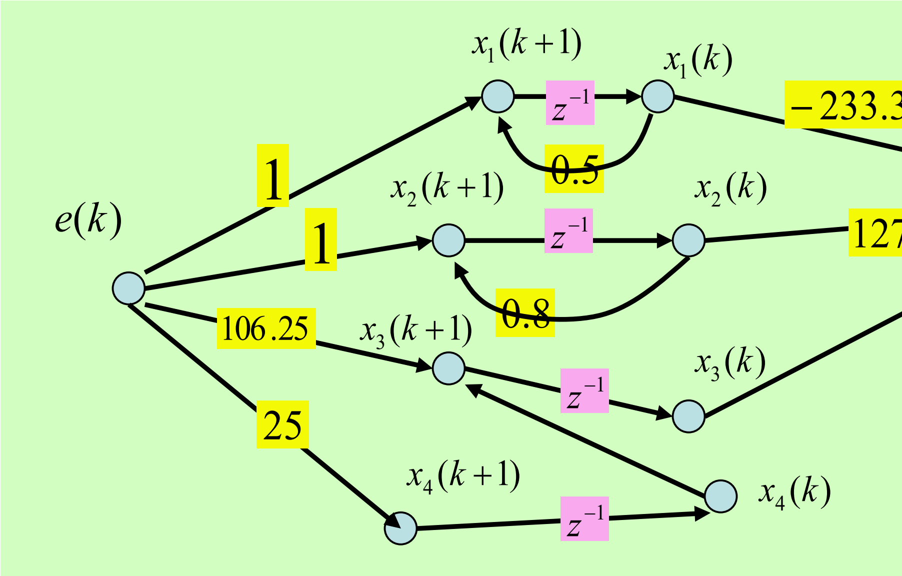
各种离散模型的关系

例7-3-13 已知系统脉冲传递函数，求系统状态空间实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{10(z^2+z+1)}{z^2(z-0.5)(z-0.8)}$$

解：特征方程的根：0.5，0.8，0，0——有重根——将$D(z)$写成部分分式

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{10(z^2+z+1)}{z^2(z-0.5)(z-0.8)}=\frac{-233.33}{z-0.5}+\frac{127.08}{z-0.8}+\frac{106.25}{z}+\frac{25}{z^2}$$

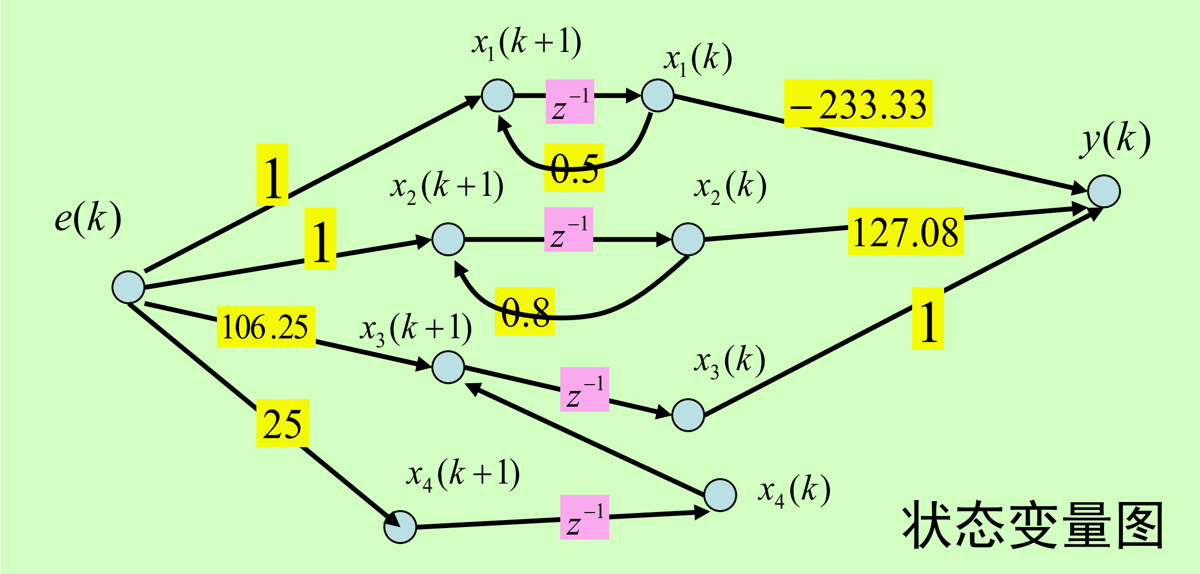


状态变量图

特别注意：最后2个状态变量，因为重根的存在，与一般的并联分解不同之处！

各种离散模型的关系

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{10(z^2+z+1)}{z^2(z-0.5)(z-0.8)}=\frac{-233.33}{z-0.5}+\frac{127.08}{z-0.8}+\frac{106.25}{z}+\frac{25}{z^2}$$



$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}e(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 106.25\\ 25\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-233.33 & 127.08 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

各种离散模型的关系

3) 差分方程和状态方程

- **由差分方程→状态方程** ——因状态选取不惟一，状态方程不惟一

$$
\begin{aligned}
y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k) \\
=b_mr(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1r(k+1)+b_0r(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{y}(k)&=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)
\end{aligned}
$$

通常先转化为脉冲传递函数$G(z)$，然后再转化为状态方程

各种离散模型的关系

➢ 由状态方程→差分方程 ——转换后的结果是惟一的！？

状态方程→脉冲传递函数$G(z)$ →差分方程

例7-3-14 已知状态方程，求系统差分方程表示。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

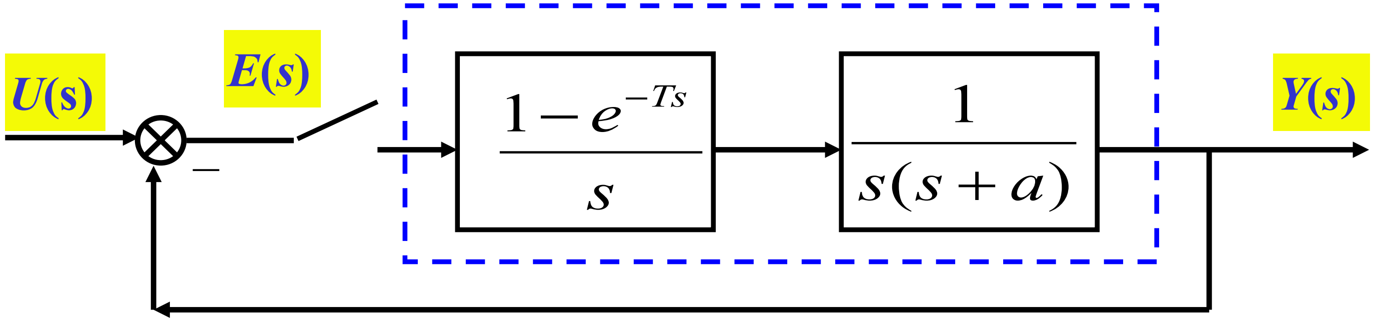
$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 3 & z+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z+2}{z^2+5z+3} = \frac{Y(z)}{U(z)} \xrightarrow{\text{求z反变换}} y(k+2)+5y(k+1)+3y(k) = u(k+1)+2u(k)$$

各种离散模型的关系

4) 闭环离散系统的状态方程

- **例7-3-15** 已知系统如图示，a=1，T=1，写出闭环系统的状态方程。



解：开环脉冲传递函数

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left(Z\left[\frac{1}{s^2}\right]-Z\left[\frac{1}{s}\right]+Z\left[\frac{1}{s+1}\right]\right)$$

$$=(1-z^{-1})\left(\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}\right)=\frac{1}{z-1}-1+\frac{z-1}{z-0.3678}=\frac{1}{z-1}-\frac{0.6322}{z-0.3678}$$

各种离散模型的关系

$$G(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{0.6322}{z-0.3678}$$

$$\begin{aligned}
x_1(k+1)&=x_1(k)+e(k)\\
x_2(k+1)&=0.3678x_2(k)-0.6322e(k)\\
y(k)&=x_1(k)+x_2(k)
\end{aligned}$$

$$e(k)=u(k)-y(k)$$

$$e(k)=u(k)-x_1(k)-x_2(k)$$

$$\begin{aligned}
x_1(k+1)&=-x_2(k)+u(k)\\
x_2(k+1)&=0.6322x_1(k)+x_2(k)-0.6322u(k)\\
y(k)&=x_1(k)+x_2(k)
\end{aligned}$$

参见P295图7-31

The End