现代控制理论
Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录

第八章 Chapter 8

线性定常系统的状态空间分析法

主要内容

- 简介
- 能控性和能观性
- 线性变换和标准型
- 系统的状态反馈
- 系统的状态观测

线性变换与标准型

- 状态空间表达式的线性变换
  - 对角型、约当型
  - 能控标准型
  - 能观标准型
- 非奇异线性变换的不变特性
- 线性定常系统的结构分解
  - 能控子空间分解
  - 能观子空间分解
  - 能控能观子空间分解

状态空间表达式的线性变换

一般地，系统的状态空间模型为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

令 $x=Tz$

新的状态空间模型为 $\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \hat{A}z + \hat{B}u$

经过线性变换不改变系统原有的外部与内在特性。

为了有助于系统的分析与控制系统的设计，往往有意识地选择合适的变换，使得系统矩阵 A 具有某种特殊的结构形式，如对角阵（约当阵）、能控标准型、能观标准型等等。

状态空间表达式的线性变换

1） 对角标准型

当系统只有互异的实数特征根时，一定可以找到一个变换阵 T 使得 $\Lambda=T^{-1}AT$ 为对角矩阵。当系统存在重复的实数特征根时，能否找到变换阵 T 取决于对于重复的特征根是否存在互异的特征向量。

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$

令 $x=Tz$

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \Lambda z + B'u \qquad y = CTz = C'z$$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$$

$$At_i = \lambda_i t_i$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- 对角阵表示系统完全解耦。
- 若 $T^{-1}B$ 任一行不全为零，系统能控（单变量则所有元素不为零）
- 若 CT 任一列不全为零，系统能观（单变量则所有元素不为零）

状态空间表达式的线性变换

1） 对角标准型

定理：当且仅当$A\in R^{n\times n}$有n个独立（线性无关）的特征向量时，存在非奇异方阵T使$T^{-1}AT$为对角矩阵

例：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 能否对角化？若能求变换阵

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

求λ=5的特征向量,$(\lambda I-A)\phi=0$

$$\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$$

用高斯消去法，得$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$，解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q\\q\\q\end{bmatrix},0\neq q\in C$.取$q=1$,$\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

状态空间表达式的线性变换

1） 对角标准型

求$\lambda=-1$的特征向量，$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}=0$， 解为$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -q_1-q_2 \end{bmatrix}, 0\neq\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}\in C^2$

取$q_1=1, q_2=0, \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，取$q_1=0, q_2=1, \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3个线性无关的特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ A可对角化

变换阵T即由n个线性无关的特征向量构成

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

状态空间表达式的线性变换

$$\begin{bmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \cdots & t_{ip} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} = A_i\begin{bmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \cdots & t_{ip} \end{bmatrix}$$

2） Jordan （约当）标准型

当系统有重复的特征根时，也可以选择变换阵 T 使得 $\tilde{A} = T^{-1}AT$ 为约当标准型。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

令 $x=Tz$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y &= CTx = \tilde{C}z \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{A}_l \end{bmatrix}$$

以及

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

- 系统能控的充要条件是对应Jordan块 $\tilde{A}_i$ 的 $\tilde{B}_i$ 的最后一行线性无关。
- 系统能观的充要条件是对的Jordan块 $\tilde{A}_i$ 的 $\tilde{C}_i$ 的第一列线性无关。

状态空间表达式的线性变换

2） Jordan （约当）标准型

设$A \in R^{n\times n}$的互异特征值为$\lambda_1(\sigma_1$重)、$\lambda_2(\sigma_2$重)、$\cdots$、$\lambda_p(\sigma_p$重)

A没有n个线性无关的特征向量时，不可对角化，但一定可以化为约当标准型

仅讨论简单情况：$\forall i \in \{1,\cdots,p\}$, 每个互异特征值$\lambda_i$只有1个独立的特征向量。

$\forall i \in \{1,\cdots,p\}$, 构造并求解如下$\sigma_i$个向量方程

$$
\begin{gathered}
(\lambda_i I - A)v_{i1} = 0 \\
(\lambda_i I - A)v_{i2} = -v_{i1} \\
(\lambda_i I - A)v_{i3} = -v_{i2} \\
\vdots \\
(\lambda_i I - A)v_{i\sigma_i} = -v_{i,\sigma_i-1}
\end{gathered}
$$

得特征向量$v_{i1} \in C^n$及广义特征向量$v_{i2},\cdots,v_{i\sigma_i} \in C^n$

变换阵T即由特征向量和广义特征向量构成。

状态空间表达式的线性变换

2） Jordan （约当）标准型

例：将$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{bmatrix}$化为对角型或约当型。

解：$|\lambda I-A|=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ 求得 $\lambda=2$ 的特征向量 $\begin{bmatrix}1&2&4\end{bmatrix}^T$

求得$\lambda=-1$ 的特征向量$\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}^T$，只有2个独立的特征向量，不可对角化

构造并求解 $(\lambda I-A)\zeta=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-2&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$，得广义特征向量$\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^T$

化约当型的 $T=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\4&1&-1\end{bmatrix}$ ⇒ $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

状态空间表达式的线性变换

3） SISO 系统能控标准型

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad\qquad y = cx$$

令 $x=T_cz$ 新的状态空间模型 令 $x=T_cz$

$$\dot{z} = T_c^{-1}AT_cz + T_c^{-1}bu = A_cz + b_cu \qquad\qquad y = cT_cx = c_cz$$

假设给定系统是完全能控的，则可以将其转换为能控标准型。

对于一个完全能控的系统，有

$$\mathrm{Rank}Q_C = \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$$

系统的特征方程为

$$\Delta(s) = \left| sI - A \right| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0$$

状态空间表达式的线性变换

$$\Delta(s)=|sI-A|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

3） SISO 系统能控标准型

利用特征方程的系数，构造一个非奇异矩阵 L，矩阵L与能控性矩阵 Q_C 一起构造出如下转换矩阵 T_c。

$$L=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_c=Q_CL=Q_C\tilde{Q}_C^{-1}$$

$$\dot{x}=Ax+bu$$

$$y=cx$$

$$\dot{z}=T_c^{-1}AT_cz+T_c^{-1}bu=A_cz+b_cu$$

$$y=cT_cz=c_cz$$

$$A_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_c=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_c=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$$c_c=cT_c$$

状态空间表达式的线性变换

4） SISO 系统能观标准型

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad y = cx$$

令 $x=T_o z$ 　　新的状态空间模型　　令 $x=T_o z$

$$\dot{z} = T_o^{-1}AT_o z + T_o^{-1}bu = A_o z + b_o u \qquad y = cT_o x = c_o z$$

假设给定系统是完全能观的，则可以将其转换为能观标准型。

系统的特征方程为

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

状态空间表达式的线性变换

$$\Delta(s)=|sI-A|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

4） SISO 系统能观标准型

对一个完全能观的系统，有

$$\text{Rank}\ Q_O=\text{Rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}=n$$

变换矩阵 T_o^{-1} 同样可以利用特征方程的系数来获得。

$$L=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}_O=\left[c_o^T \quad A_o^T c_o^T \quad \cdots \quad (A_o^T)^{n-1}c_o^T\right]^T$$

$$T_o^{-1}=LQ_O=\tilde{Q}_O^{-1}Q_O$$

$$T_o=Q_O^{-1}\tilde{Q}_O$$

状态空间表达式的线性变换

4） SISO 系统能观标准型

$$T_o = Q_O^{-1}\tilde{Q}_O$$

$$T_o^{-1} = \tilde{Q}_O^{-1}Q_O$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\dot{z} = T_o^{-1}AT_oz + T_o^{-1}bu = A_oz + b_ou$$

$$y = cT_oz = c_oz$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$c_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_o = T_o^{-1}b$$

实际上，标准型中的 A_c 、 b_c及 A_o 、 c_o阵可直接由闭环特征方程的系数得到，求转换矩阵T_c 和T_o是为了求能控标准型中的 c_c 阵和能观标准型中的 b_o 阵。

状态空间表达式的线性变换

5） SISO 系统标准型对偶性

能观系统

(A, b, c, d)

对偶原理

能控系统

(A^T, c^T, b^T, d)

能观标准型

$(T_o^{-1}AT_o, T_o^{-1}b, cT_o, d)$

能控标准型

$(T_c^{-1}A^TT_c, T_c^{-1}c^T, b^TT_c, d)$

对偶原理

能观标准型

$(T_c^TAT_c^{-T}, T_c^Tb, cT_c^{-T}, d)$

即有 $T_o^{-1}= T_c^T$

状态空间表达式的线性变换

例 8-3-1 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

将其变换为能控标准型。

解： (1)

$$\text{Rank}\ Q_C=\text{Rank}\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}0 & 3 & -10\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 9\end{bmatrix}$$

注意：

$$\det\begin{bmatrix}0 & 3 & -10\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 9\end{bmatrix}\neq 0$$

$$\therefore \text{Rank}Q_C=3$$

因此，系统是完全能控的。

状态空间表达式的线性变换

例 8-3-1 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

将其变换为能控标准型。

解： (2)

$$|s\mathrm{I}\text{-}A|=\begin{vmatrix}s+1 & \text{-}1 & \text{-}2\\ 0 & s+2 & \text{-}1\\ 0 & 0 & s+3\end{vmatrix}=(s+1)(s+2)(s+3)=s^3+6s^2+11s+6$$

$$=s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

(3) 构造矩阵 L

$$L=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & & \iddots & \iddots & \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 6 & 1\\ 6 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

状态空间表达式的线性变换

例 8-3-1 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

将其变换为能控标准型。

??这种情况下不一定需要求

解：

$$\therefore T_c=Q_cL=\begin{bmatrix}0 & 3 & -10\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & 6 & 1\\ 6 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore T_c^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ -2 & 8 & -8\\ 2 & -18 & 28\end{bmatrix}$$

(4) 能控标准型

$$A_c=T_c^{-1}AT_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix} \qquad b_c=T_c^{-1}b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$c_c=cT_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

状态空间表达式的线性变换

例 8-3-2 系统表示为
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

将其转换为能观标准型。

解： (1)
$$\mathrm{Rank}Q_O=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}c\\ cA\\ cA^2\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 9\end{bmatrix}=3=n$$

因此，系统是完全能观测的。

(2)
$$|s\mathrm{I}\text{-}A|=\begin{vmatrix}s-1 & 0 & -2\\ -2 & s-1 & -1\\ -1 & 0 & s+2\end{vmatrix}=s^3-5s+4=s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

状态空间表达式的线性变换

$$|s\mathrm{I}\text{-}A| = s^3 - 5s + 4 = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

例 8-3-2 系统表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

将其转换为能观标准型。

解： (3) 构造矩阵

$$T_o^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 能观标准型

$$A_o = T_o^{-1} A T_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_o = c T_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_o = T_o^{-1} b = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

线性变换与标准型

- 状态空间表达式的线性变换
  - 对角型、约当型
  - 能控标准型
  - 能观标准型
- 非奇异线性变换的不变特性
- 线性定常系统的结构分解
  - 能控子空间分解
  - 能观子空间分解
  - 能控能观子空间分解

非奇异线性变换的不变特性

采用状态空间模型描述一个动态系统时，其形式不是惟一的。如

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

可以在不同的状态空间实现。

能控标准型：

$$\Sigma_c:\begin{bmatrix}\dot{x}_{c1}\\ \dot{x}_{c2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}$$

能观标准型：

$$\Sigma_o:\begin{bmatrix}\dot{x}_{o1}\\ \dot{x}_{o2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o2}\end{bmatrix}$$

对角型：

$$\Sigma_\Lambda:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

不同形式间必然存在内在的联系，因为它们代表了同一个动态系统。

非奇异线性变换的不变特性

当系统没有重复的特征根时

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

令 $x=Tz$

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \hat{A}z + \hat{B}u$$

$$y = Cx$$

令 $x=Tz$

$$y = CTx = \hat{C}z$$

这种变换被称为相似变换，即保持系统的固有特性（能控性、能观性和特征方程等）以及外部特性（输入/输出关系）不变。

代表同一个动态系统的状态方程形式可以不同，所有“不同”表达形式的背后实质上是本质上的“同”。这些“同”表现在：系统的特征方程多项式、特征值、能控性、能观性、输入输出关系等内在的和外部的特性经过非奇异线性变换都将保持不变。

非奇异线性变换的不变特性

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

令 $x=Tz$

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \hat{A}z + \hat{B}u$$

（1）能控性保持不变

$$\because \hat{Q}_C = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \cdots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \cdots & (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}AB & \cdots & T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B \end{bmatrix}$$
$$= T^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = T^{-1}Q_C$$

$$\therefore \mathrm{Rank}\hat{Q}_C = \mathrm{Rank}\ T^{-1}Q_C = \mathrm{Rank}\ Q_C$$

（2）能观性保持不变

$$\because \hat{Q}_O = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = Q_O T$$

$$\therefore \mathrm{Rank}\hat{Q}_O = \mathrm{Rank}Q_O T = \mathrm{Rank}Q_O$$

非奇异线性变换的不变特性

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

令 $x=Tz$

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \hat{A}z + \hat{B}u$$

（3）特征方程保持不变

$$\hat{\Delta}(s) = \left|sI - \hat{A}\right| = \left|sI - T^{-1}AT\right| = \left|T^{-1}sIT - T^{-1}AT\right|$$

$$= \left|T^{-1}(sI - A)T\right| = \left|T^{-1}\right|\left|sI - A\right|\left|T\right| = \left|sI - A\right| = \Delta(s)$$

$$\therefore \hat{\Delta}(s) = \Delta(s)$$

（4）输入/输出关系$G(s)$保持不变

$$\hat{G}(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B$$

$$= CT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}B$$

$$= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B = G(s)$$

$$\therefore \hat{G}(s) = G(s)$$

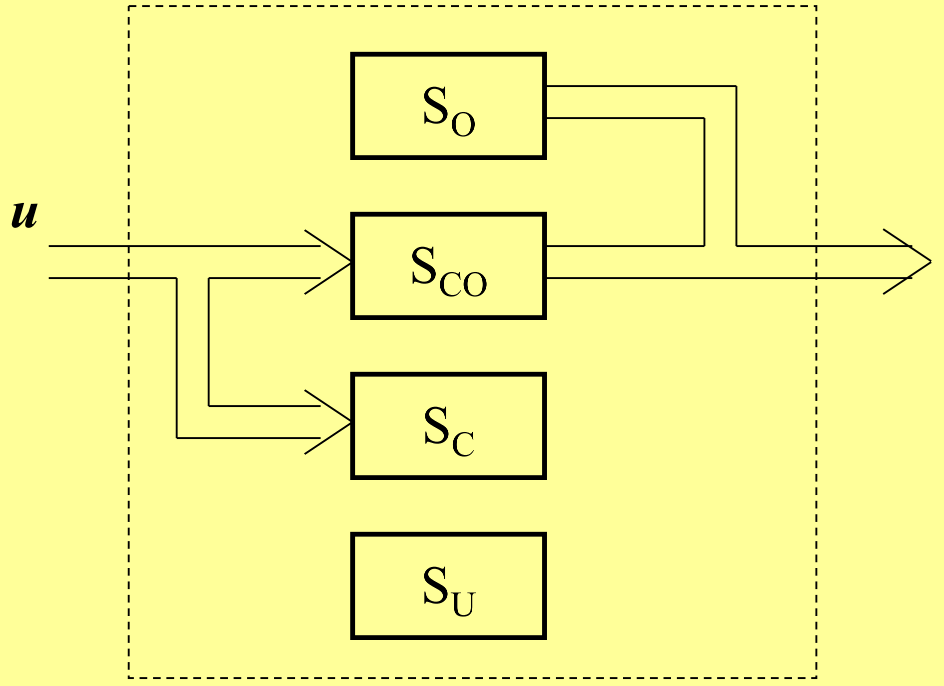
线性变换与标准型

- 状态空间表达式的线性变换
  - 对角型、约当型
  - 能控标准型
  - 能观标准型
- 非奇异线性变换的不变特性
- 线性定常系统的结构分解
  - 能控子空间分解
  - 能观子空间分解
  - 能控能观子空间分解

线性定常系统的结构分解

- **任何系统均可能包括四个子系统**：(1)能控能观S_{CO}；(2)能控不能观S_C；(3)不能控能观S_O；(4)不能控不能观S_U。从状态空间看即4个子空间，如图所示。

- 对一般给定的系统状态方程，不会是标准的4个子空间形式。由于非奇异变换不改变系统的能控性与能观性，所以可通过非奇异变换将系统划分为上述4个子空间，这就称为**不变子空间分解**。

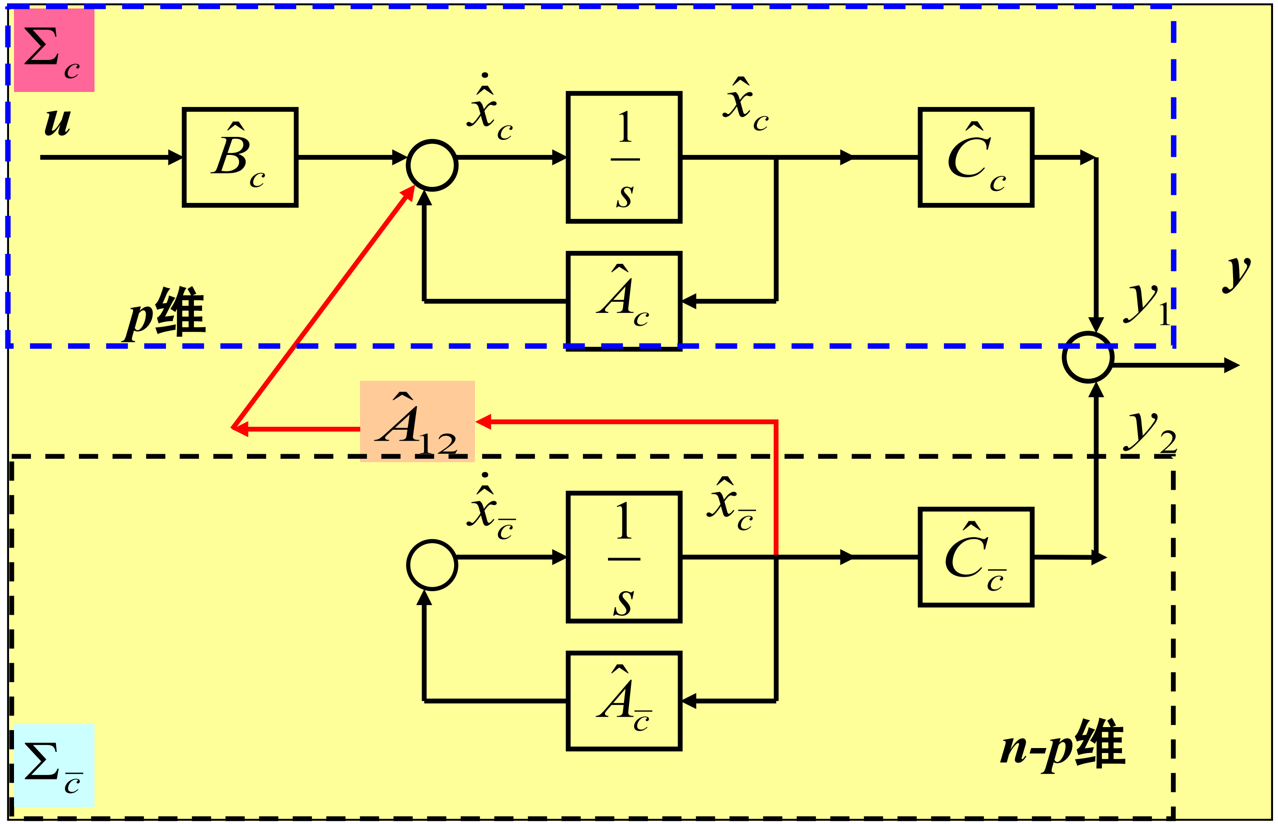


系统的四种可能分解结构

线性定常系统的结构分解

1）能控子空间分解

- 所谓能控子空间分解是指将一个n维的不完全能控系统按能控性分解为能控与不能控2个子系统，分别为 p 维与（n-p）维，如图所示。



- 如果系统矩阵A是对角标准型，只要检验B中的元素是否为零即可分解。

- 然而一般情况A不是对角形，需要有**规范化的分解方法**。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{C}_c & \hat{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

线性定常系统的结构分解

1）能控子空间分解

问题：能否再从Q_C中选取？

设不完全能控系统的状态方程：$\dot{x}=Ax+bu$ $y=Cx$

$$\mathrm{Rank}Q_C=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=p<n$$

方法：从能控性矩阵Q_C中选出 p 个线性无关的列向量。再附加上任意尽可能简单的（n-p）个线性无关的列向量，构成非奇异的 T 变换矩阵，引入 T 变换，进行非奇异变换：

$$x=T\begin{bmatrix}\hat{x}_c\\ \hat{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=T^{-1}ATz+T^{-1}Bu=\hat{A}x+\hat{B}u \qquad y=CTx=\hat{C}x$$

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A}_c & \hat{A}_{12}\\ \hline 0 & \hat{A}_{\bar{c}}\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\ (n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\left[\begin{array}{c}\hat{B}_c\\ \hline 0\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\ (n-p)\text{行}\end{array}$$

r 列

$$\hat{C}=CT=\left[\begin{array}{c|c}\hat{C}_c & \hat{C}_{\bar{c}}\end{array}\right]\ q\text{ 行}$$

p列 $(n$-$p)$列

- 经过上述非奇异变换后系统特点：

  (1) 分解出了$p\times p$维能控子系统 $\Sigma_c:(\hat{A}_c,\hat{B}_c,\hat{C}_c)$；(2) 能控子系统的传递函数与原系统的相同。

线性定常系统的结构分解

1）能控子空间分解

- 经过上述非奇异变换 $T=\begin{bmatrix}T_1 & T_2\end{bmatrix}$ 后的 p 维能控子系统动态方程

$$\Sigma_c:(\hat{A}_c,\hat{B}_c,\hat{C}_c):\ \dot{\hat{x}}_c=\hat{A}_c\hat{x}_c+\hat{A}_{12}\hat{x}_{\bar{c}}+\hat{B}_c u$$
$$y_c=\hat{C}_c\hat{x}_c$$

经过上述非奇异变换后的 $(n-p)$ 维不能控子系统动态方程

$$\Sigma_{\bar{c}}:(\hat{A}_{\bar{c}},\hat{C}_{\bar{c}}):\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}}=\hat{A}_{\bar{c}}\hat{x}_{\bar{c}}$$
$$y_{\bar{c}}=\hat{C}_{\bar{c}}\hat{x}_{\bar{c}}$$

输入 u 只能通过能控子系统传递到输出，而与不能控子系统无关，故 u 至 y 间的传递函数矩阵描述不能反映不能控部分的特性，但其存在仍不容忽视。如要求 $\hat{A}_{\bar{c}}$ 仅含稳定特征值，以保证整个系统稳定，就是考虑能控子系统的状态响应 $\hat{x}_c(t)$ 及系统输出响应 $y(t)$ 均与 $\hat{x}_{\bar{c}}(t)$ 有关。

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c:c}\hat{A}_c & \hat{A}_{12}\\ \hdashline 0 & \hat{A}_{\bar{c}}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\left[\begin{array}{c}\hat{B}_c\\ \hdashline 0\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

r 列

$$\hat{C}=CT=\left[\begin{array}{c:c}\hat{C}_c & \hat{C}_{\bar{c}}\end{array}\right]\ q\text{行}$$

p列　$(n-p)$列

线性定常系统的结构分解

例 8-3-3 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}x$$

试按能控子空间分解该系统。

解：(1)判别能控性：

$$\mathrm{Rank}Q_C=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}0&1&1&2&3&4\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&2&3&4\end{bmatrix}=2=p<3=n$$

(2)构成非奇异变换阵 T： 从能控性矩阵 Q_C 中选出 2 个线性无关的列向量，再附加任意尽可能简单的（3－2=1）个列向量

设选Q_C中的第1、2列

$$\therefore T=\left[\begin{array}{cc:c}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{array}\right],\quad\Rightarrow\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

任选尽量简单的一列

线性定常系统的结构分解

例 8-3-3 系统表示为
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}x$$

试按能控子空间分解该系统。

解：(3)计算各矩阵

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\1&2&1\\\hline 0&0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A}_c&\hat{A}_{12}\\\hline 0&\hat{A}_{\bar{c}}\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline 0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\hat{B}_c\\\hline 0\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{C}=CT=\left[\begin{array}{cc|c}0&2&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\hat{C}_c&\hat{C}_{\bar{c}}\end{array}\right]$$

(4)写出能控子系统动态方程（类似地可以写出不能控子系统）

$$\Sigma_c:\ \dot{\hat{x}}_c=\hat{A}_c\hat{x}_c+\hat{A}_{12}\hat{x}_{\bar{c}}+\hat{B}_cu=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\hat{x}_c+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\hat{x}_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$y_c=\hat{C}_c\hat{x}_c=\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix}\hat{x}_c$$

线性定常系统的结构分解

1）能控子空间分解

注意：

(1) 从变换矩阵 T 的选取不惟一性可知：虽然系统能控性规范分解的诸系数阵可能不相同，但其Q_C秩是不变的，分解后的形式是不变的。

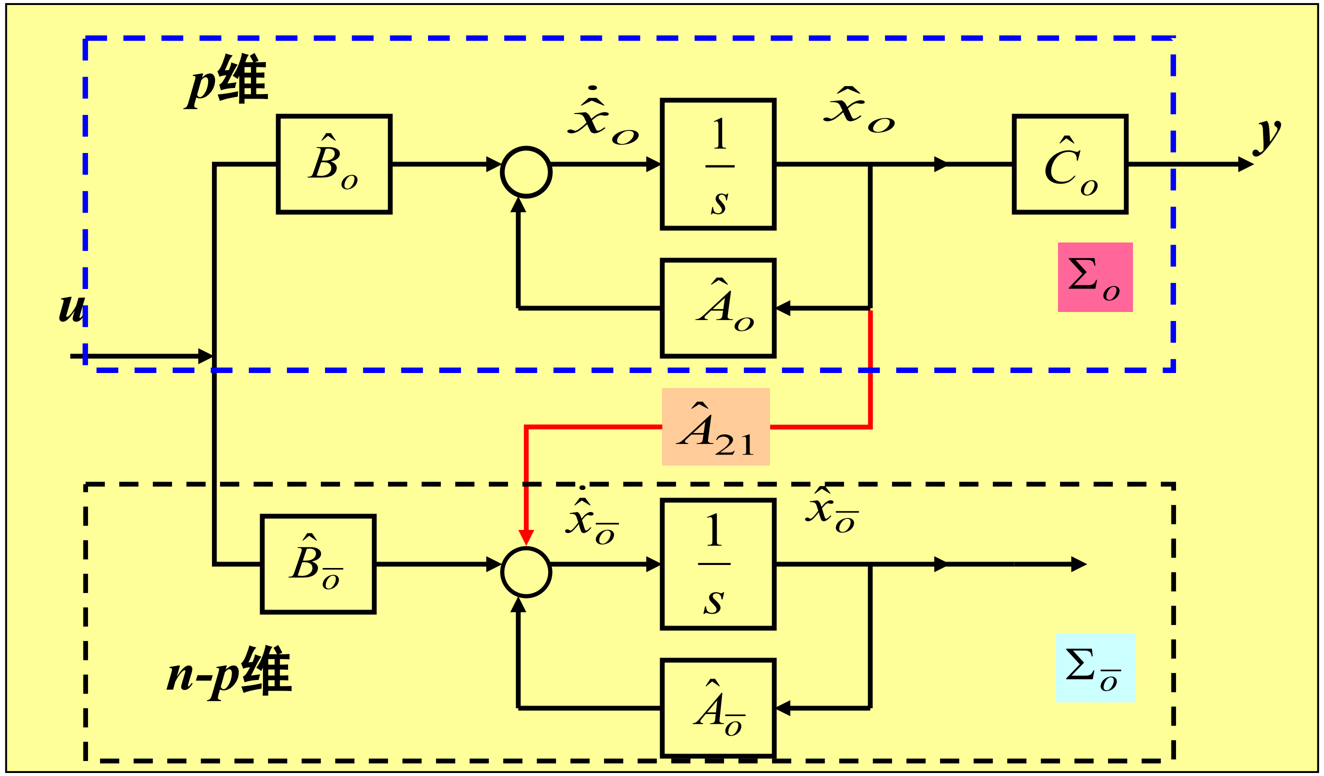
(2) 系统能控性的判别标准（又一条完全能控的充要条件）：若系统经非奇异线性变换不能化成如前所述的能控分解规范型（即$\hat{A}_c$的阶次$p<n$）的话，系统完全能控。

（这条规则实际上为计算机进行能控性判别提供了思路。）

线性定常系统的结构分解

2）能观子空间分解

- 所谓能观子空间分解是指将一个不完全能观的系统按能观性分解为能观与不能观2个子系统，如图所示。 与能控性分解类似



- 如果系统矩阵A是对角标准型，只要检验C中的元素是否为零即可分解。
- 然而一般情况A不是对角型，需要有**规范化的分解方法**。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_o & \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_o \\ \hat{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{C}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

线性定常系统的结构分解

2）能观子空间分解

- 设不完全能观系统的动态方程：$\dot{x}=Ax+Bu$　　$y=Cx$

问题：能否再从Q_o中选取？

$$\mathrm{Rank}Q_o=p<n$$

$$x=T\begin{bmatrix}\hat{x}_o\\ \hat{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

方法：从能观性矩阵Q_o中选出 p 个线性无关的行向量构成T_1，再附加上任意尽可能简单的（n-p）个线性无关的行向量，构成T_2， T_1与 T_2，组成 n 维状态空间的一组基 T^{-1}，进行非奇异变换：

$$\dot{x}=T^{-1}ATz+T^{-1}Bu=\hat{A}x+\hat{B}u$$　　$$y=CTx=\hat{C}x$$

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\hat{A}_o & 0\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{matrix}p\text{行}\\ (n-p)\text{行}\end{matrix}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{B}_o\\ \hat{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}}_{r\text{ 列}}\begin{matrix}p\text{行}\\ (n-p)\text{行}\end{matrix}$$

$$\hat{C}=CT=\begin{bmatrix}\underbrace{\hat{C}_o}_{p\text{列}} & \underbrace{0}_{(n-p)\text{列}}\end{bmatrix}\ q\text{ 行}$$

- 经过上述非奇异变换后系统特点：

(1) 分解出了$p\times p$ 维能观子系统 $\Sigma_o:(\hat{A}_o,\hat{B}_o,\hat{C}_o)$ ； (2) 能观子系统的传递函数与原系统的相同。

线性定常系统的结构分解

2）能观子空间分解

- 经过上述非奇异变换 $T^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}$ 后的 p 维能观子系统动态方程

$$\Sigma_o:(\hat{A}_o,\hat{B}_o,\hat{C}_o):\ \dot{\hat{x}}_o=\hat{A}_o\hat{x}_o+\hat{B}_o u$$
$$y=\hat{C}_o\hat{x}_o$$

经过上述非奇异变换后的 $(n\text{-}p)$ 维不能观子系统动态方程

$$\Sigma_{\bar{o}}:(\hat{A}_{\bar{o}},\hat{B}_{\bar{o}}):\ \dot{\hat{x}}_{\bar{o}}=\hat{A}_{\bar{o}}\hat{x}_{\bar{o}}+\hat{A}_{21}\hat{x}_o+\hat{B}_{\bar{o}}u$$

由以上能控能观的规范分解方法知道：能控、能观的分解结果不是惟一的，这在变换矩阵T的选取中可以充分体现。但**分解后的子系统形式是一样的。**

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c:c}\hat{A}_o & 0\\ \hdashline \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\underbrace{\left[\begin{array}{c}\hat{B}_o\\ \hdashline \hat{B}_{\bar{o}}\end{array}\right]}_{r\text{ 列}}\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{C}=CT=\left[\begin{array}{c:c}\underbrace{\hat{C}_o}_{p\text{列}} & \underbrace{0}_{(n-p)\text{列}}\end{array}\right]\ q\text{ 行}$$

线性定常系统的结构分解

例 8-3-4 系统表示为
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}x$$

试按能观子空间分解该系统。

解：(1)判别能观性

$$\mathrm{Rank}Q_O=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=2=p<3=n$$

(2)构成非奇异变换阵 T^{-1}：从能观性矩阵Q_O中选出 2 个线性无关的行向量构成T_1，再从3维空间选择任意线性无关的 1个行向量

选Q_O中的第1、2行

$$\therefore T^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\ \hdashline 1&0&0\end{bmatrix},\quad\Rightarrow\quad T=(T^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

任选尽量简单的一行

线性定常系统的结构分解

例 8-3-4 系统表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

试按能观子空间分解该系统。

解： (3)计算各矩阵

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \hat{A}_o & 0 \\ \hdashline \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{array}\right] \begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \hat{B}_o \\ \hdashline 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array}$$

$$\hat{C} = CT = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \hat{C}_o & \hat{C}_{\bar{o}} \end{array}\right]$$

(4)写出能观子系统动态方程（类似地可以写出不能观子系统）

$$\Sigma_o: \dot{\hat{x}}_o = \hat{A}_o \hat{x}_c + \hat{B}_o u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_o + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \hat{C}_o \hat{x}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_c$$

线性定常系统的结构分解

3）不变能控能观子空间分解

经非奇异变换后4个子空间的维数、能控能观性等保持不变

- 对于一般不完全能控不完全能观的线性系统，通过线性非奇异变换可实现系统结构的规范分解，其规范分解的表达式（形式）：

$$
\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_{co}\\ \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}}\\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}o}\\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}\hat{A}_{co} & 0 & \hat{A}_{13} & 0\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{c\bar{o}} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24}\\ \hdashline 0 & 0 & \hat{A}_{\bar{c}o} & 0\\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\hat{x}_{co}\\ \hat{x}_{c\bar{o}}\\ \hat{x}_{\bar{c}o}\\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}\hat{B}_{co}\\ \hat{B}_{c\bar{o}}\\ \hdashline 0\\ 0\end{array}\right]u
$$

$$
y=\left[\begin{array}{cc:cc}\hat{C}_{co} & 0 & \hat{C}_{\bar{c}o} & 0\end{array}\right]\hat{x}
$$

Step1: 按能控性分解$\Sigma\rightarrow\Sigma_c$

Step2: 按能观性分解$\Sigma_c\rightarrow\Sigma_o$

线性定常系统的结构分解

3）不变能控能观子空间分解

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_{co}\\ \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}}\\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}o}\\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}\hat{A}_{co} & 0 & \hat{A}_{13} & 0\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{c\bar{o}} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24}\\ \hdashline 0 & 0 & \hat{A}_{\bar{c}o} & 0\\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\hat{x}_{co}\\ \hat{x}_{c\bar{o}}\\ \hat{x}_{\bar{c}o}\\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}\hat{B}_{co}\\ \hat{B}_{c\bar{o}}\\ \hdashline 0\\ 0\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{cc:cc}\hat{C}_{co} & 0 & \hat{C}_{\bar{c}o} & 0\end{array}\right]\hat{x}$$

考察上式的传递函数：

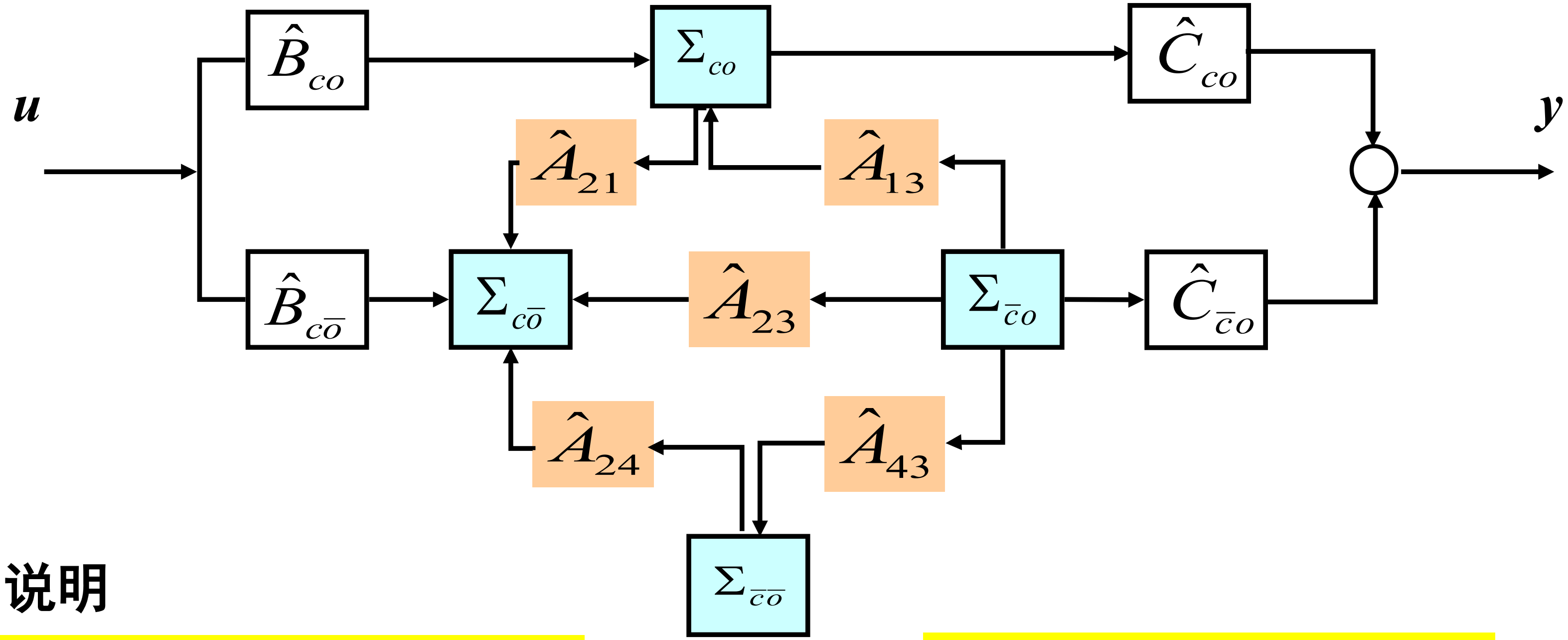
$$\begin{aligned}G(s)&=C(sI-A)^{-1}B\\&=\hat{C}_{co}(sI-\hat{A}_{co})^{-1}\hat{B}_{co}=G_{co}(s)\end{aligned}$$

综上所述，输入输出描述(传递函数/矩阵)，仅是对系统结构的一种不完全描述。只有对完全能控能观系统，传递函数/矩阵才能充分表达系统的结构，即描述是完全的，否则关于系统的信息是不完整的。

线性定常系统的结构分解

3）不变能控能观子空间分解

系统结构规范分解方块图：



说明

$\Sigma_{ij}(i=c,\bar{c};\ j=o,\bar{o})$

表示正向通道含积分器

$A_{ij}(i,j=1,2,3,4)$

表示基本反馈单元

$\Sigma_{c\bar{o}}$ 只有信号输入无输出

$\Sigma_{\bar{c}o}$ 只有信号输出无输入

只有Σ_{co}能实现信号

由输入u到输出y间的传递

线性变换与标准型

- 状态空间表达式的线性变换
  - 对角型、约当型
  - 能控标准型
  - 能观标准型
- 非奇异线性变换的不变特性
- 线性定常系统的结构分解——重点
  - 能控子空间分解
  - 能观子空间分解
  - 能控能观子空间分解

The End