现代控制理论
Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录

第七章 Chapter 7

线性离散系统的分析与校正

主要内容

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

离散系统的稳定性与稳态误差

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差

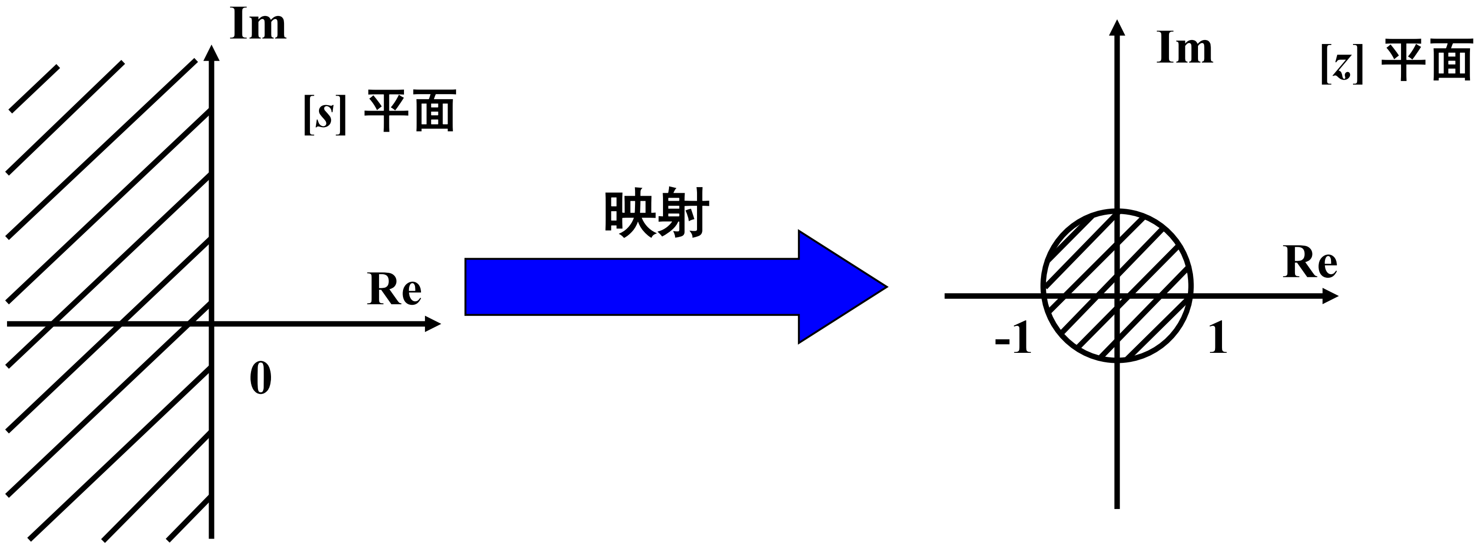
S域到z域的映射

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j2\pi\omega/\omega_s}$$

(1) s平面中实部 σ为常数的线对应z平面中半径为 $e^{\sigma T}$ 的圆

s平面的虚轴对应z平面的一系列重叠的单位圆

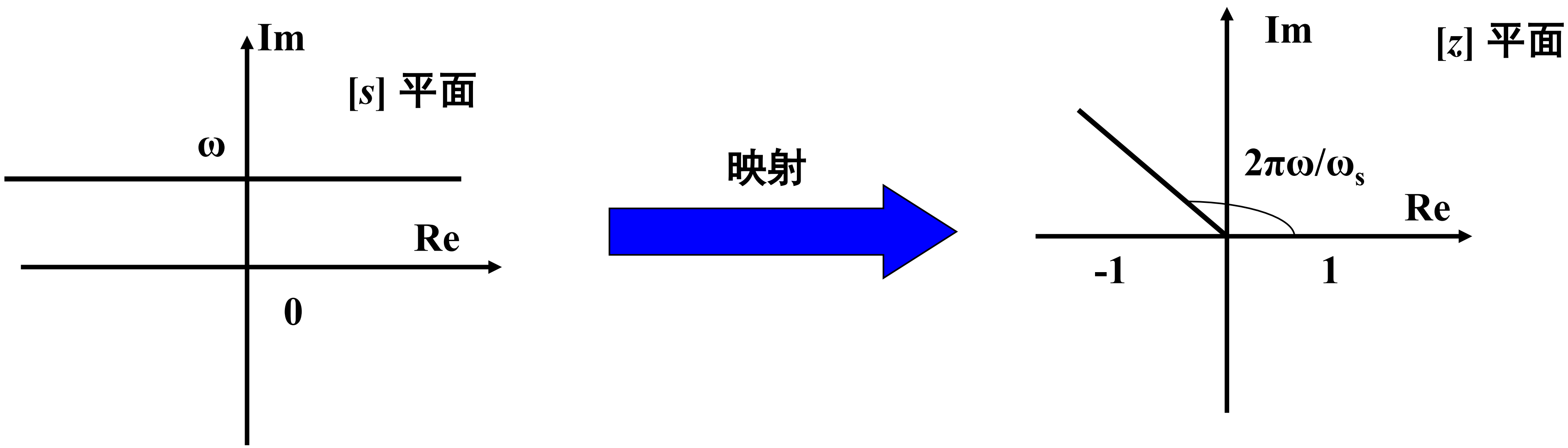
s平面的左半开平面对应z平面的单位圆的内部



S域到z域的映射

(2) s平面中虚部 ω为常数的线对应z平面中角度ωT的射线

s平面的负实部（ $-\infty<\sigma\leq 0$）对应于 z平面中 $0<z\leq 1$的实轴部分

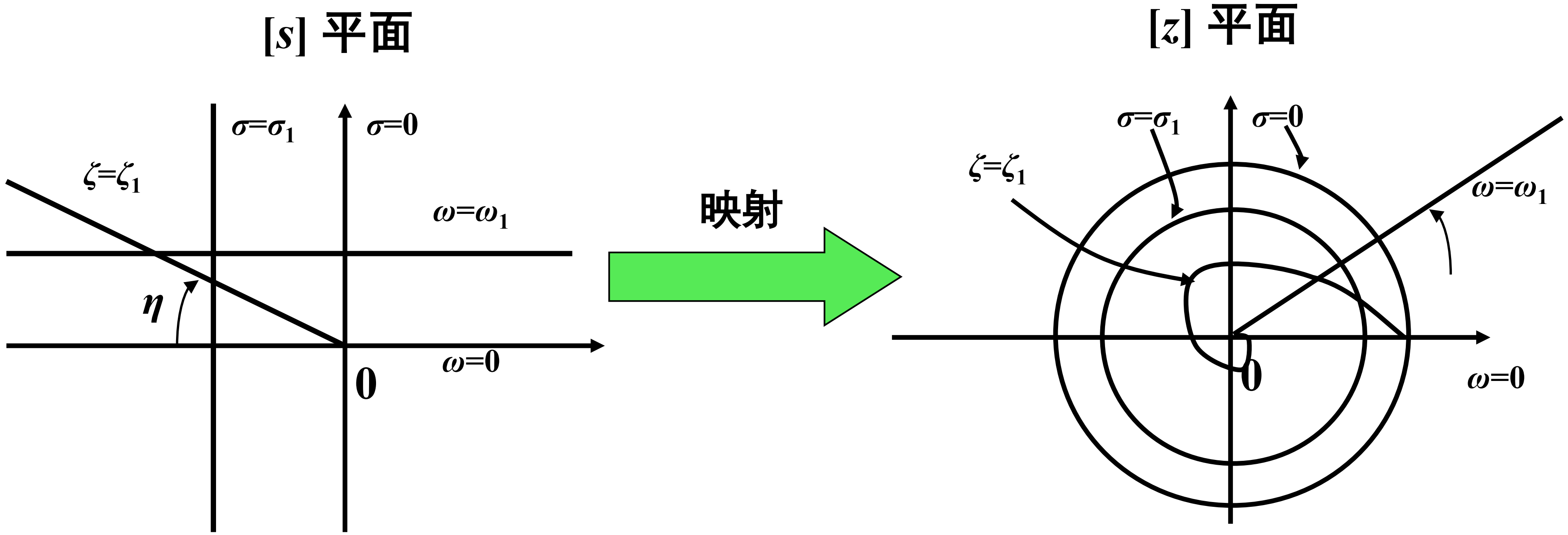


S域到z域的映射

(3) s平面中阻尼比为常数的线可以定义为

$$s=\sigma+j\omega=-\omega\text{ctg}\,\eta+j\omega \quad \text{其中} \quad \eta=\cos^{-1}\zeta$$

$$z=e^{sT}=e^{-\omega T\text{ctg}\,\eta+j\omega T}=e^{-\omega T\text{ctg}\,\eta}\angle\omega T$$



离散系统的稳定性与稳态误差

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差

稳定性

➢ 离散系统稳定的定义

– 若离散系统在有界输入序列作用下，其输出序列也是有界的，则称该离散系统是稳定的。

■ 离散系统稳定的充分必要条件

➢ 时域中

线性定常差分方程 $$c(k)=-\sum_{i=1}^{n}a_i c(k-i)+\sum_{j=0}^{m}b_j r(k-j)$$

齐次方程： $$c(k)+\sum_{i=1}^{n}a_i c(k-i)=0$$ 通解： $A\alpha^k$

代入

$$A\alpha^k+a_1A\alpha^{k-1}+\cdots+a_nA\alpha^{k-n}=0$$

特征方程

稳定性

- **离散系统稳定的充分必要条件**
  - 时域中

特征方程： $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

假设特征根： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

差分方程的通解： $c(k) = A_1\alpha_1^k + A_2\alpha_2^k + \cdots + A_n\alpha_n^k$

当特征方程的根 $|\alpha_i| < 1$ 时，i=1, …, n，必有 $\lim_{k\to\infty} c(k) = 0$

线性定常离散系统系统稳定的充分必要条件：

差分方程的所有特征根的模 $|\alpha_i| < 1, i = 1, 2, \ldots n$

稳定性

➢ Z 域

➢ 已知如下系统方框图， 系统方程可以描述为

$$C(s)=G(s)E^*(s)$$

$$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-G(s)H(s)E^*(s)$$

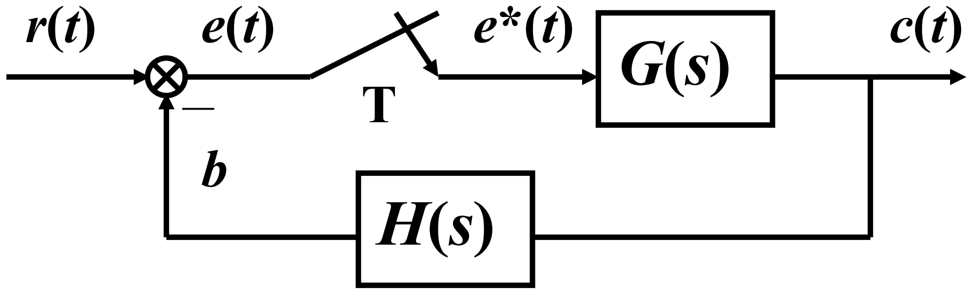
$$E^*(s)=R^*(s)-[G(s)H(s)]^*E^*(s)$$

$$E^*(s)=\frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

$$C^*(s)=\frac{G^*(s)R^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{\boxed{1+GH(z)}}$$

特征方程



➢ 注意

$GH^*(s)\equiv [G(s)H(s)]^*$

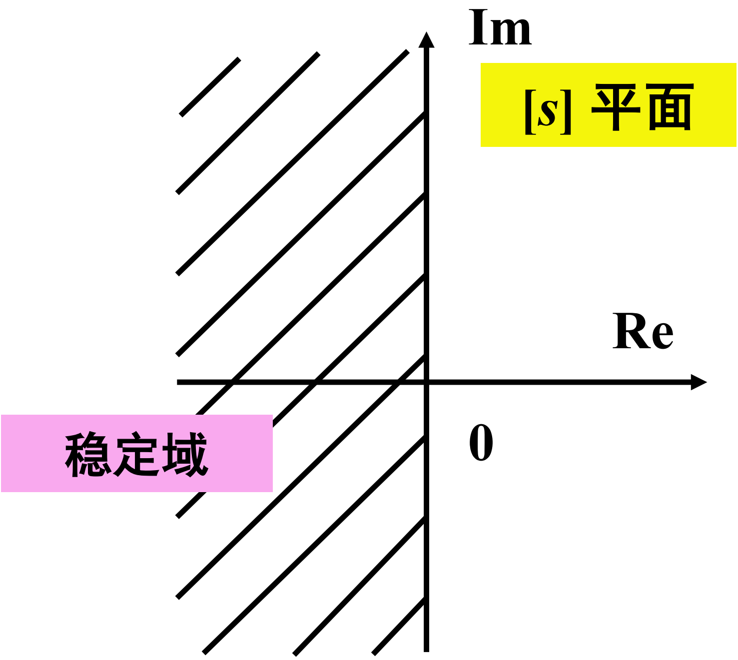
一般地，

$GH^*(s)\neq G^*(s)H^*(s)$

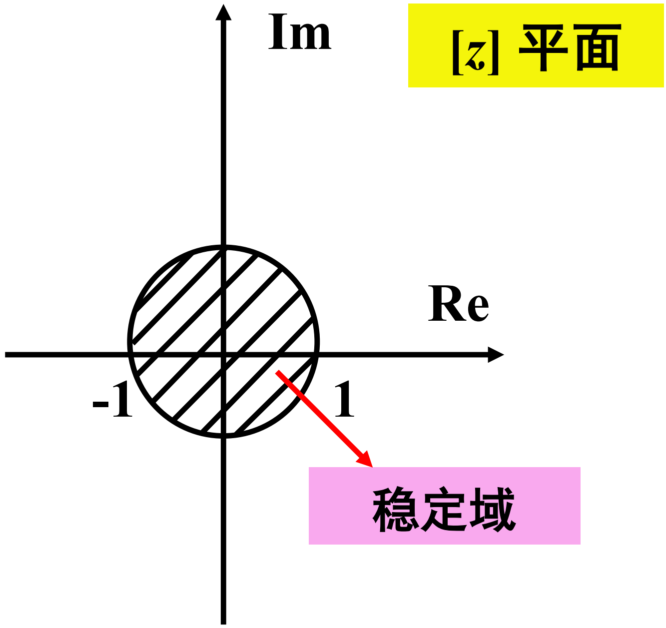
稳定性

- 采样序列的 Laplace 变换

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \xrightarrow{\text{let } z \equiv e^{Ts}} F^*(s)\Big|_{s\equiv(1/T)\ln z} = F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$



映射



稳定性

Z 域中的充分必要条件是特征方程的所有特征根在单位圆内。

例7-4-1 闭环采样系统的特征方程如下，判断系统的稳定性

$$z^2 + 2.3z + 3 = 0$$

解：法1） 特征方程的特征根为：

$$z_{1,2} = -1.15 \pm j1.295 \Rightarrow |z| = 1.732 > 1$$

因此，闭环系统是不稳定的。

稳定性

例7-4-1 闭环采样系统的特征方程如下，判断系统的稳定性

$$z^2+2.3z+3=0$$

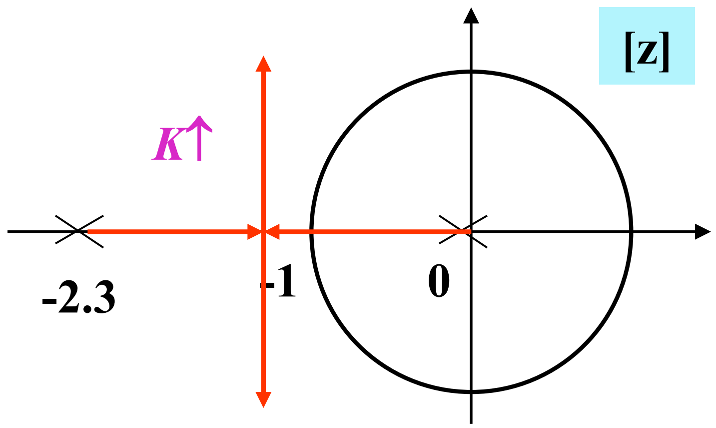
解：法2） 可以采用 **根轨迹** 方法来分析稳定性。

$$z^2+2.3z+3=0 \Rightarrow 1+\frac{K}{z^2+2.3z}=0 \Rightarrow [GH]_e=\frac{K}{z^2+2.3z}$$

开环极点：0 和 –2.3

Z平面的根轨迹如图所示

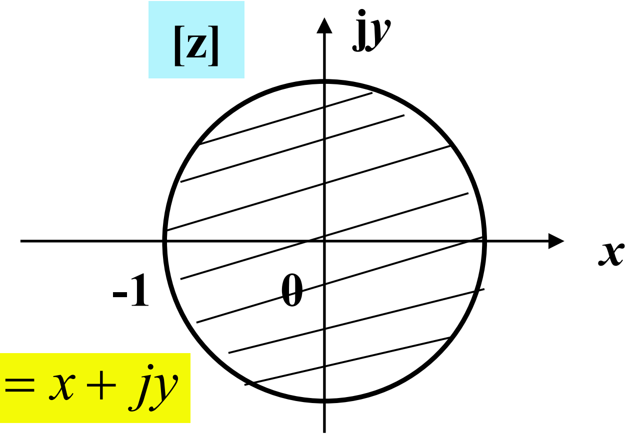
从图可以看出，对于$K>0$，闭环采样系统是不稳定的。



稳定性（从z域到w域）

➢ 对于采样系统的稳定性分析，是否也可以采用Routh稳定性判据？

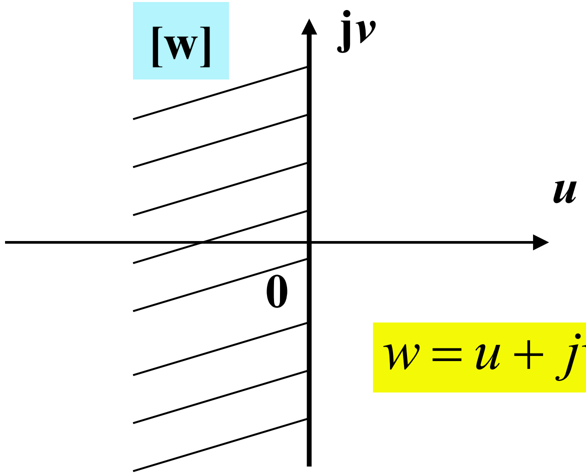
Routh稳定性判据不能直接采用，但是从[z]平面转换到[w]平面之后就可以采用了。



$z = x + jy$

映射

$$z=\frac{w+1}{w-1} \Leftrightarrow w=\frac{z+1}{z-1}$$

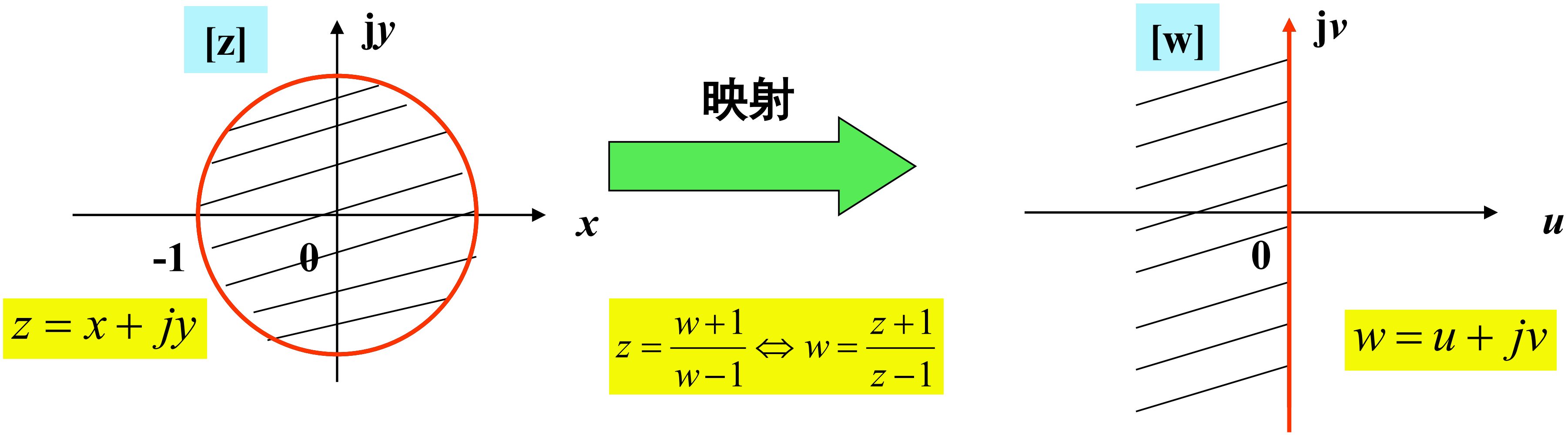


$w = u + jv$

$$w=u+jv=\frac{z+1}{z-1}=\frac{x+jy+1}{x+jy-1}=\frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2}-j\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

稳定性（从z域到w域）

$$w = u + jv = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+jy+1}{x+jy-1} = \frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2} - j\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$



1) 当 $|z| = x^2 + y^2 = 1$ $\xrightarrow{\text{映射}}$ 对 [w]：u=0

2) 当 $|z| = x^2 + y^2 < 1$ 对[w]：u<0，位于左半平面

3) 当 $|z| = x^2 + y^2 > 1$ 对[w]：u>0，位于右半平面

稳定性（频域响应）

- 通过双线性变换 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ 解决脉冲传递函数不能直接应用频域的问题

- 设闭环离散系统特征方程为

$$1+G(z)=0$$

$$\Big\Downarrow \quad z=\frac{w+1}{w-1}$$

$$1+G(w)=0$$

$$\Big\Downarrow \quad w=j\omega$$

$$1+G(j\omega)=0$$

式中的 ω 通常称为伪频

- 经过如上双线性变换后，连续系统中的各种频域判据均可应用。

稳定性

例7-4-1 闭环采样系统的特征方程如下，判断系统的稳定性

$$z^2+2.3z+3=0$$

解：法3）转换平面法：[z] 平面到 [w] 平面

$$z^2+2.3z+K=0 \Rightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+2.3\left(\frac{w+1}{w-1}\right)+K=0$$

$$(3.3+K)w^2+(2-2K)w+K-1.3=0$$

$$-3.3<K;\quad K<1;\quad K>1.3$$

注意：二阶系统稳定的充分必要条件是 特征方程所有系数同号。

因此，不存在K使闭环系统稳定。

稳定性

$$Z\left[\frac{K}{s^2}\right]=\frac{KTz}{(z-1)^2}$$

例7-4-2 给定单位负反馈系统的对象和零阶保持器传递函数分别为

$$G(s)=\frac{K}{s}$$ 和 $$H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$ 其中K>0。分析该系统的闭环稳定性。

解：法1）计算开环脉冲传递函数

$$GH_0(s)=\frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2}$$

Z变换

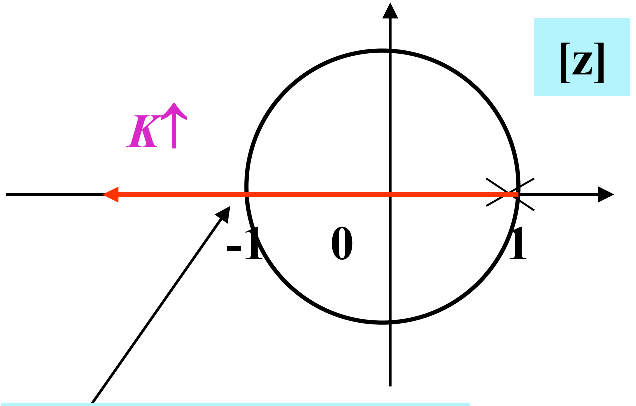
$$GH_0(z)=(1-z^{-1})Z\{\frac{K}{s^2}\}=\frac{KT}{z-1}$$

$$\left|\frac{KT}{z-1}\right|=1\Big|_{\substack{z=1\\z=-1}}\quad\Rightarrow 0<K<\frac{2}{T}$$

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

$$GH_0(w)=\frac{KT}{\frac{w+1}{w-1}-1}=\frac{KT}{2}(w-1)$$

(1)



$$(KT)^*=|2|;\ \ K^*=\frac{2}{T}$$

稳定性

例7-4-2 给定单位负反馈系统的对象和零阶保持器传递函数分别为

$G(s)=\dfrac{K}{s}$ 和 $H_0(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$ 其中K>0。分析该系统的闭环稳定性。

解：

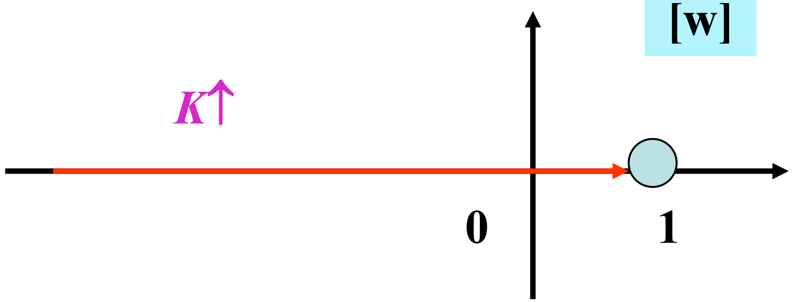
$$GH_0(w)=\frac{KT}{\dfrac{w+1}{w-1}-1}=\frac{KT}{2}(w-1)$$

$$1+GH_0(w)=0 \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{KT}{2}(w-1)=0 \quad\Rightarrow\quad w=1-\frac{2}{KT}$$

$$1-\frac{2}{KT}<0 \quad\Rightarrow\quad 0<K<\frac{2}{T}$$

法2）直接求w平面的特征根或用w平面的根轨迹来分析：

$$1+GH_0(w)\Big|_{w=0}=0 \quad\Rightarrow\quad 1+\left.\frac{KT}{\dfrac{w+1}{w-1}-1}\right|_{w=0}=0$$



$$K=\frac{2}{T} \qquad 0<K<\frac{2}{T}$$

稳定性

例7-4-3 闭环采样系统的特征方程如下，试求使系统稳定的K值范围？

$$z^2 - z + 0.5K = 0$$

解：法1）从 [z]平面转换到 [w]平面

$$z^2 - z + 0.5K = 0 \Rightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - \left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0.5K = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0.5Kw^2 + (2-K)w + 2 + 0.5K = 0$$

根据Routh’s 稳定判据，当0<K<2时， 闭环采样系统稳定。

稳定性

例7-4-3 闭环采样系统的特征方程如下，试求使系统稳定的*K*值范围？

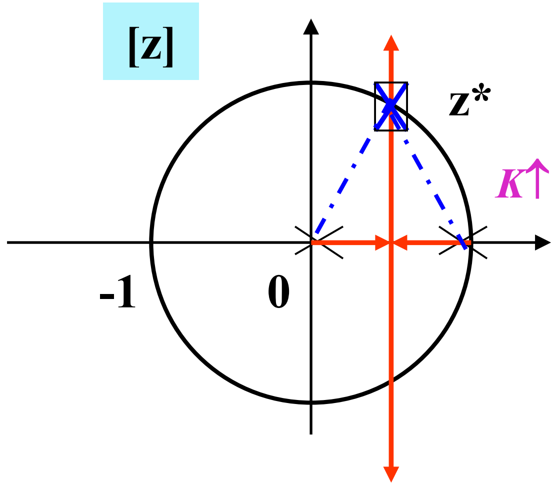
$$z^2 - z + 0.5K = 0$$

解：法2）绘制系统的根轨迹图

$$z^2 - z + 0.5K = 0 \Rightarrow 1 + \frac{0.5K}{z^2 - z} = 0 \Rightarrow [GH]_e = \frac{K'}{z^2 - z}$$

$$0.5K = K' = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow K = 2$$

利用幅值条件和分离点0.5



从根轨迹图可以看出，当 0<*K*<2时，闭环系统稳定。

稳定性

例7-4-3 闭环采样系统的特征方程如下，试求使系统稳定的K值范围？

$$z^2 - z + 0.5K = 0$$

解：法3）求解特征方程

$$z^2 - z + 0.5K = 0 \Longrightarrow \left|z_{1,2}\right| = \left|\frac{1 \pm \sqrt{1-2K}}{2}\right| < 1 \Rightarrow 0 < K < 2$$

所得结果与其他方法的结果相同，当 0<K<2时，闭环采样系统稳定。

特别注意： Z 平面 几何边界是单位圆

稳定性

例7-4-4 采样反馈系统如图所示，其中 $H(s)=1$，采样周期为 T=1，试求使系统稳定的K值范围？

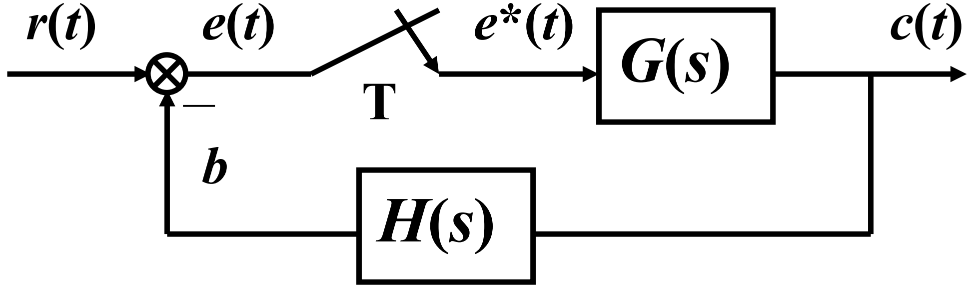
$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

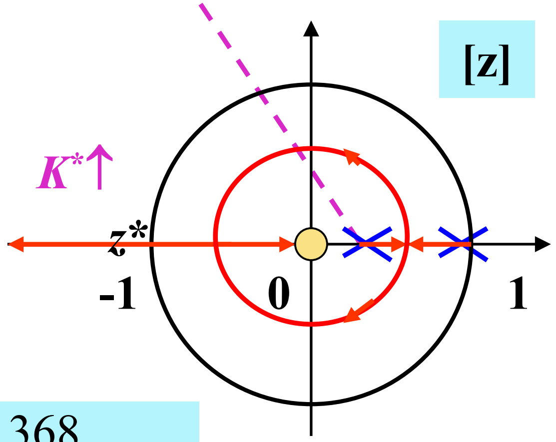
解：1）开环脉冲传递函数

$$G(z)=Z\{\frac{K}{s(s+1)}\}=\frac{Kz^{-1}(1-e^{-T})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}\Bigg|_{T=1}=\frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

2） 根轨迹如右图

3） 当 $z=-1$，$K^*_{\max}=\frac{2\cdot 1.368}{1}=2.73\Rightarrow K=\frac{2.73}{0.632}=4.2$





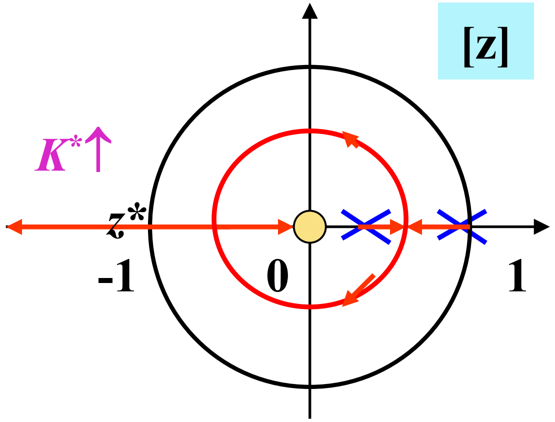
$$K_{\max}=\frac{2*1.368}{0.632}=4.2$$

当 $0<K<4.2$，系统稳定。

稳定性

例7-4-4 采样反馈系统如图所示，其中 $H(s)=1$，采样周期为 T=1，试求使系统稳定的K值范围？

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$



当 $0<K<4.2$，系统稳定。

如果是二阶连续系统，根轨迹如何？稳定性？

➢可以看出，二阶采样系统当增益增大时系统不稳定，二阶连续系统对所有的正增益系统都是稳定的。这是二者之间的区别。

稳定性（零阶保持）

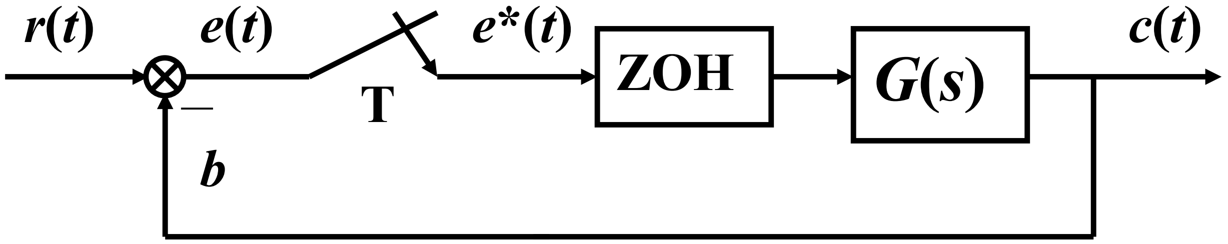
- **零阶保持（ZOH）的函数**是对采样函数$f^*(t)$进行分段连续构造出来的。其传递函数为

$$G_{\mathrm{ZOH}}(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

- **ZOH** 给系统引入了一个滞后角，因此，影响了系统的稳定性和时域特性。

例 如图，前向通道脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{C(z)}{E(z)}=Z\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\}=K\frac{(e^{-T}+T-1)z+(1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}\overset{T=1}{=}\frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$



$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

采样周期 T=1

稳定性（零阶保持）

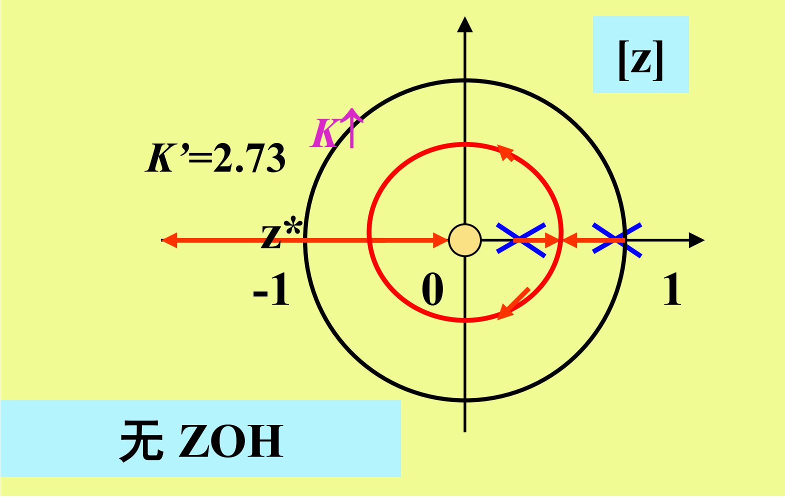
➢比较：与没有 ZOH的Z变换进行比较

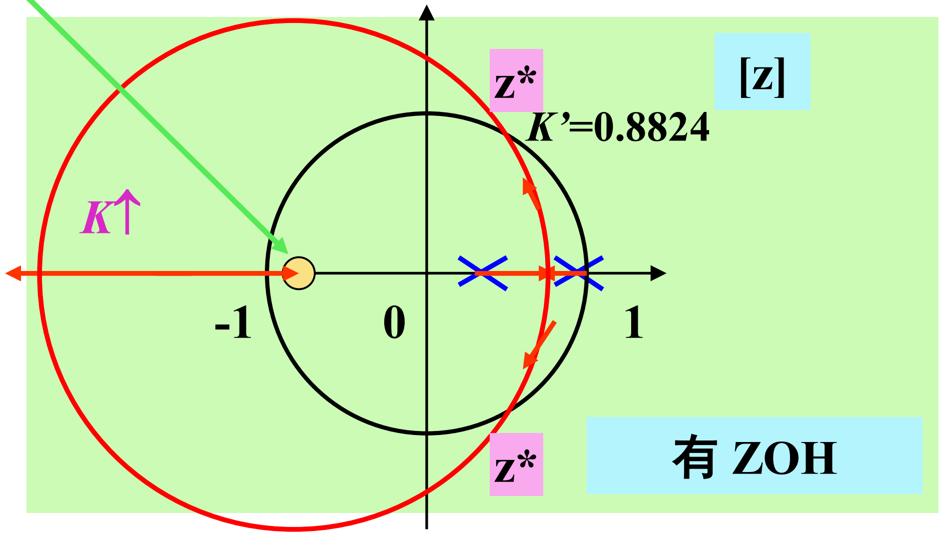
$$G(z)=Z\{\frac{K}{s(s+1)}\}=\frac{Kz^{-1}(1-e^{-T})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}\Big|_{T=1}=\frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

和

$$G(z)=\frac{C(z)}{E(z)}=Z\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+1)}\}=\frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

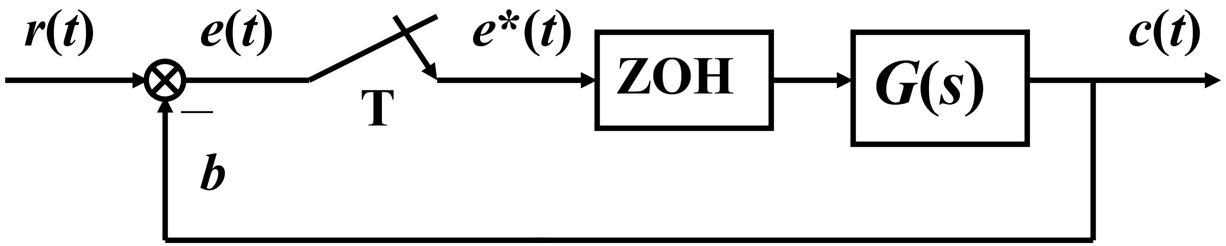
如图所示。开环零点从原点移至z=-0.717。





稳定性（采样周期）

- 分析采样周期对系统稳定性的影响



$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

采样周期 T=1

前向通道传递函数

$$G(z)=\frac{C(z)}{E(z)}=K\frac{(e^{-T}+T-1)z+(1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

闭环系统脉冲传递函数

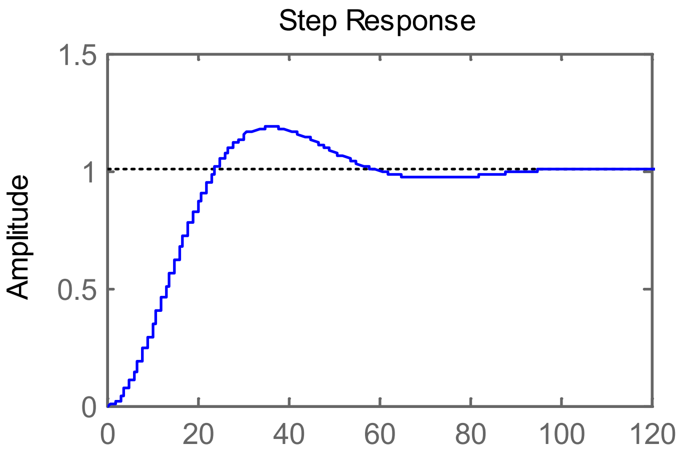
$$\phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{K[(e^{-T}+T-1)z+(1-e^{-T}-Te^{-T})]}{z^2+[K(e^{-T}+T-1)-(1+e^{-T})]z+[K(1-e^{-T}-Te^{-T})+e^{-T}]}$$

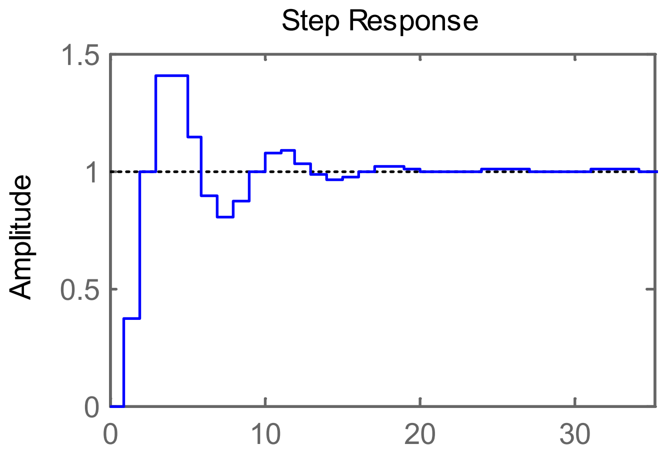
稳定性（采样周期）

➢ 分析采样周期对系统稳定性的影响

$$\phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{K[(e^{-T}+T-1)z+(1-e^{-T}-Te^{-T})]}{z^2+[K(e^{-T}+T-1)-(1+e^{-T})]z+[K(1-e^{-T}-Te^{-T})+e^{-T}]}$$

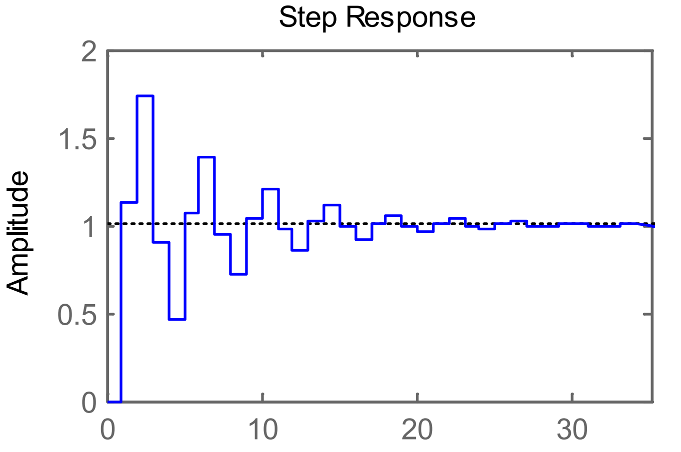
T=0.1

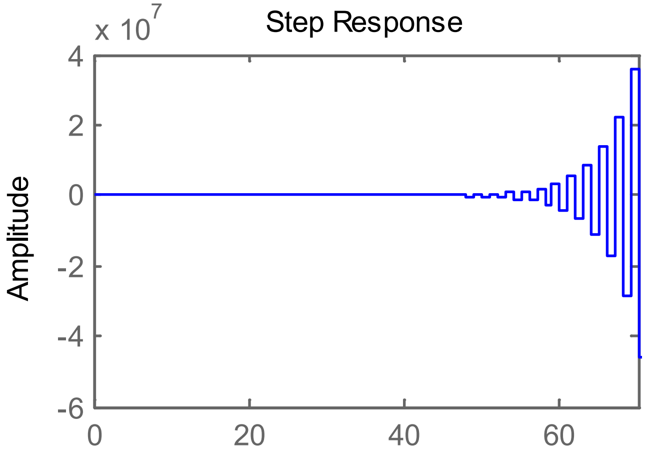




T=1

T=2





T=4

稳定性

结论：

1）当采样周期一定时，加大开环增益会使离散系统的稳定性变差，甚至使系统变得不稳定；

•从例7-4-4可以看出，二阶采样系统当增益增大时系统不稳定，二阶连续系统对所有的正增益系统都是稳定的。这是二者之间的区别。

2）当开环增益一定时，采样周期越长，丢失的信息越多，对离散系统的稳定性及动态性能都不利，甚至可使系统失去稳定性。

离散系统的稳定性与稳态误差

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- **稳态误差**

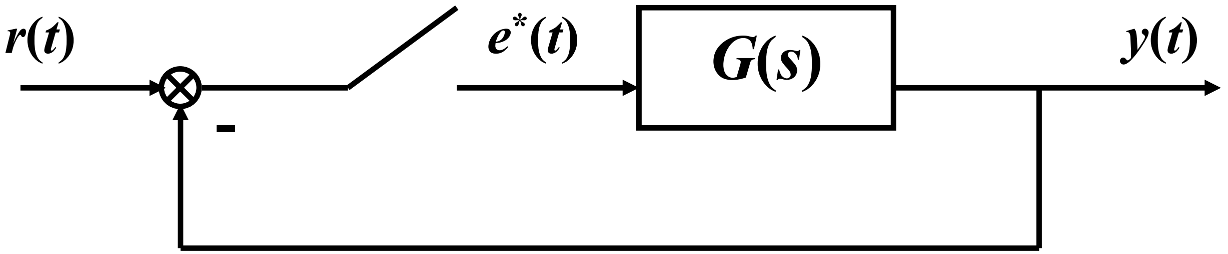
稳态误差

➢ 稳态误差系数在采样系统和连续系统中具有同样的意义和重要性：表明了系统在稳态时输出跟踪给定类型输入的情况。

讨论：如图所示稳定的单位负反馈系统（与连续系统类似）。

可以很容易得到误差脉冲传递函数

$$G_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$



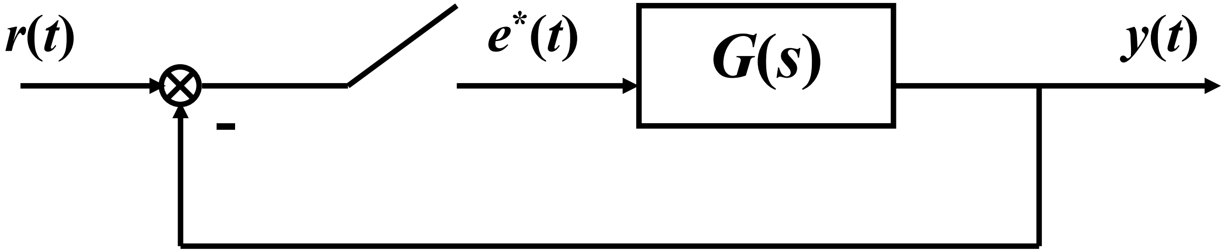
稳态误差

$$G_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)} \Rightarrow E(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

根据终值定理

$$e^*(\infty)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{R(z)}{1+G(z)}=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

与连续系统类似，根据系统开环脉冲传递函数在z=1的极点的个数而分为0型、1型、2型……系统。



稳态误差

$$e^*(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

➢ 阶跃输入，$R(z)=R_0 z/(z-1)$

$$e^*(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R_0}{1+G(z)}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{R_0}{1+G(1)}$$

定义阶跃（比例）误差系数 K_p

$$K_p\equiv\lim_{z\to 1}G(z)$$

仅适用于阶跃输入 $r(kT)=R_0$。

对0型系统

$$e^*(\infty)=\frac{R_0}{1+K_p}$$

对1型及以上系统

$$K_p=\infty \qquad e^*(\infty)=0$$

稳态误差

$$e^*(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

- **斜坡输入，$R(z)=R_1Tz/(z-1)^2$**

$$e^*(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{R_1}{1+G(z)}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}=T\lim_{z\to1}\frac{R_1}{(z-1)[1+G(z)]}=T\lim_{z\to1}\frac{R_1}{(z-1)G(z)}$$

定义斜坡（速度）误差系数 K_v

$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)G(z)$$

仅适用于斜坡输入 $r(kT)=R_1kT$ 。

对0型系统 $K_v=0$ $e^*(\infty)=\infty$

对1型系统 $e^*(\infty)=T\lim_{z\to1}\frac{R_1}{(z-1)G(z)}=T\frac{R_1}{K_v}$

对2型及以上系统 $K_v=\infty$ $e^*(\infty)=0$

稳态误差

$$e^*(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

➢ 加速度输入，$R(z)=R_2T^2z(z+1)/2(z-1)^3$

$$e^*(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R_2}{1+G(z)}\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}=T^2\lim_{z\to 1}\frac{R_2}{(z-1)^2G(z)}$$

定义加速度误差系数K_a

$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$$

仅适用于加速度输入 $r(kT)=\frac{R_2(kT)^2}{2}$。

对 0 型和 1 型系统 $K_a=0$ $e^*(\infty)=\infty$

对 2 型系统 $e^*(\infty)=T^2\lim_{z\to 1}\frac{R_2}{(z-1)^2G(z)}=T^2\frac{R_2}{K_a}$

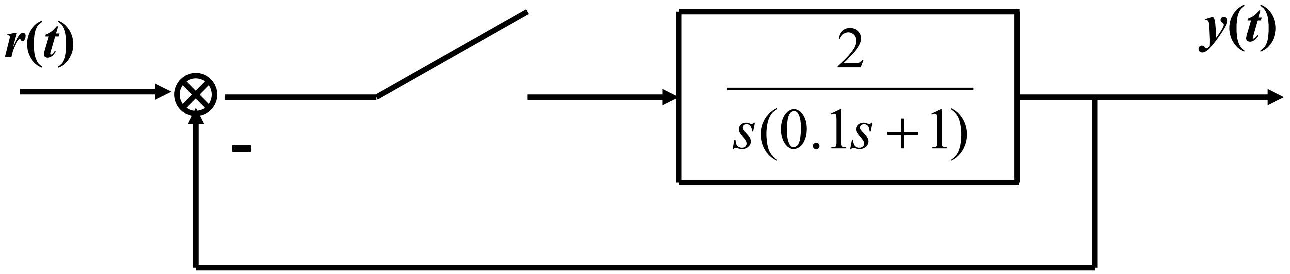
对 3 型及以上系统 $K_a=\infty$ $e^*(\infty)=0$

注：与连续系统的稳态误差相比：采样系统的稳态误差还与采样周期T有关。

稳态误差

$$Z\left\{\left[\frac{K}{s(s+a)}\right]\right\}=\frac{K}{a}Z\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right\}$$

例7-4-5 已知离散系统的结构如图所示，采样周期T=0.1秒，求系统单位阶跃和单位斜坡输入时的稳态误差。



解： 1) 开环脉冲传递函数

$$G(z)=Z\left[\frac{2}{s(0.1s+1)}\right]=\frac{1.264z}{(z-1)(z-0.368)}$$

2) 这是一个1型系统。对单位阶跃输入，稳态误差为0。

3) 当输入为单位斜坡，速度误差系数K_v为

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=\left.\frac{1.264}{(z-0.368)}\right|_{z=1}=\frac{1.264}{0.632}$$

因此，对于 单位斜坡输入， 稳态误差为

$$e(\infty)=\frac{T}{K_v}=\frac{0.0632}{1.264}=0.05$$

主要内容

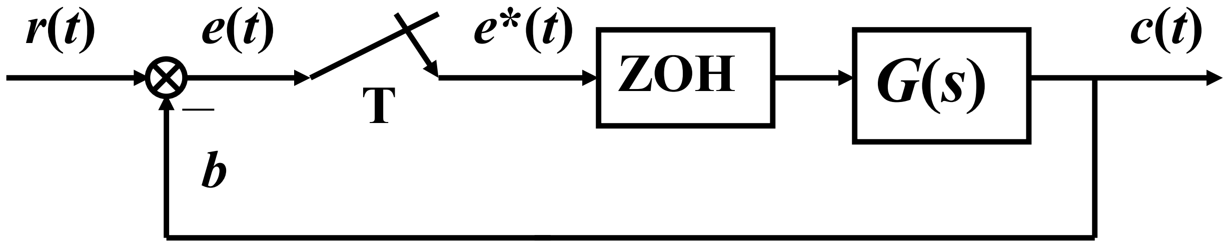
- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

瞬态响应

➢ 离散系统的时间响应

闭环脉冲传递函数 - - - → 输出Z变换 → 输出脉冲序列

例



$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

采样周期 T=1

开环脉冲传递函数（T=1）：

$$G(z)=\frac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环系统脉冲传递函数（T=1）：

$$\phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

单位阶跃响应：

$$C(z)=0.368z^{-1}+z^{-2}+1.4z^{-3}+1.4z^{-4}+1.147z^{-5}+\cdots$$

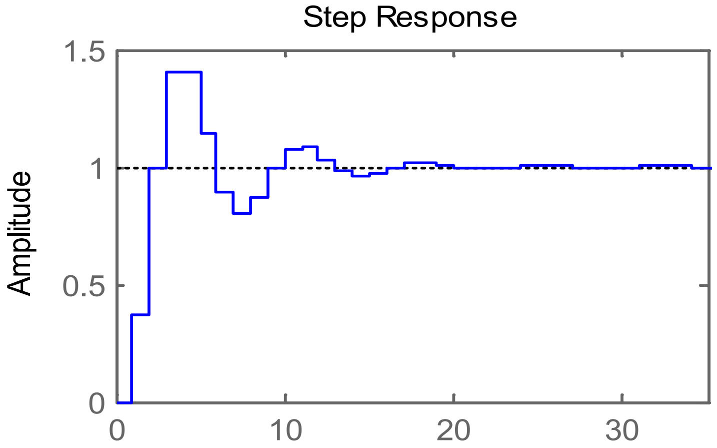
瞬态响应

➢ 采样器和保持器对动态性能的影响

有保持器的采样系统

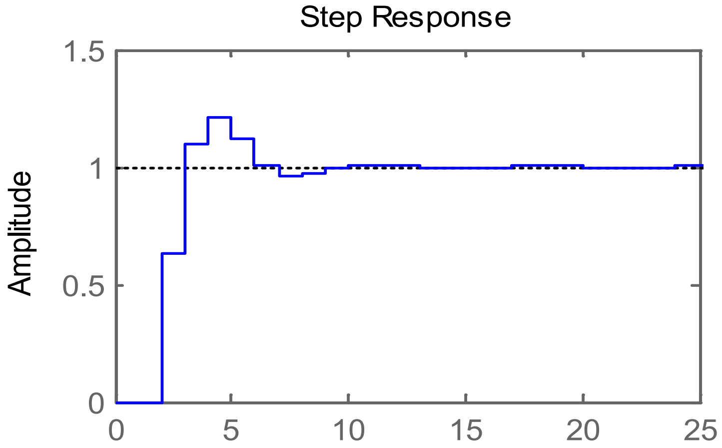
$$G(z)=\frac{C(z)}{E(z)}=Z\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\}=\frac{0.368(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\phi(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$



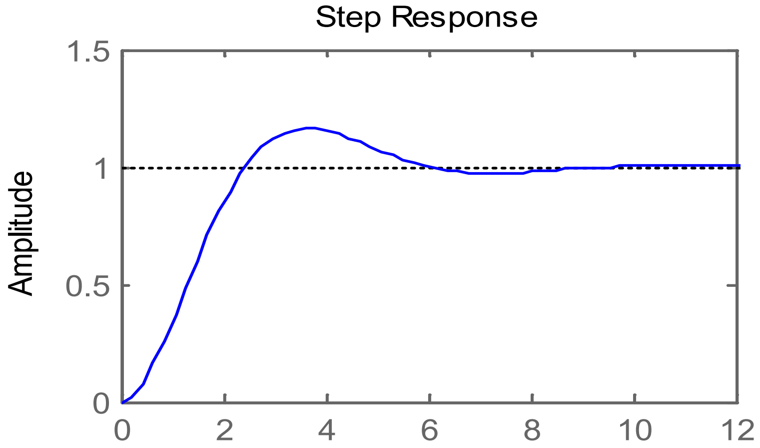
无保持器的采样系统

$$\phi(z)=\frac{0.632z}{z^2-0.736z+0.368}$$

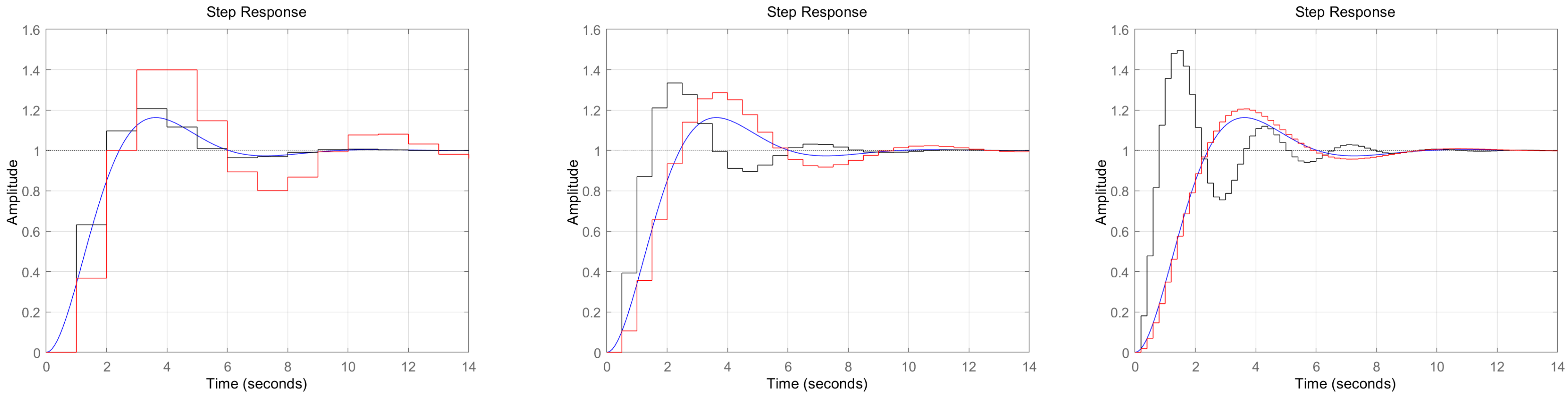


连续系统

$$\phi(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$



瞬态响应



T=1　　T=0.5　　T=0.2

—— 连续系统　—— 无保持器的采样系统　—— 有保持器的采样系统

结论：

1）采样器可使系统的峰值时间和调节时间略有减少，但使超调量增大；

2）零阶保持使系统的峰值时间和调节时间都加长，超调量和振荡次数也增加。这是因为零阶保持器的相角滞后降低了系统的稳定程度。

瞬态响应

> ➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

通常离散控制系统的闭环脉冲传递函数可表示为（设系统无重极点）：

$$G_B(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(z-P_k)}$$

当系统输入$r(t)$ 为单位阶跃时，其系统输出的Z变换$C(z)$为：

$$C(z)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(z-P_k)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

展开成部分分式，有

$$C(z)=\frac{C(1)}{R(1)}\cdot\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k z}{z-P_k}$$

$c^*(t)$的稳态部分

其中，各分式的系数C_k可用留数法求取

$$C_k=\lim_{z\to p_k}K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z-P_j)}\cdot\frac{1}{z-1}$$

瞬态响应

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

1) P_k为正实根，对应的瞬态分量

$$c_k(nT) = Z^{-1}\{\frac{C_k z}{z-P_k}\} = C_k P_k^n$$

令 $P_k = e^{aT};\ a = \frac{1}{T}\ln P_k$ 则 $c_k(nT) = C_k e^{anT}$

若P_k=1，即闭环极点位于右半Z平面上圆周上，闭环系统瞬态响应$c_k(nT)$为等幅脉冲；对应图1中 a点对应波形。

若P_k<1，则闭环极点位于单位圆内，此时a<0，则输出响应$c_k(nT)$ 呈指数衰减状；对应图1中 b点对应波形。

若P_k>1，闭环极点位于单位圆外，此时a>0，则输出响应$c_k(nT)$ 呈指数增加状，对应图1中 c点对应波形。

瞬态响应

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

2) 当P_k为负实根，则对应的瞬态分量为

$$c_k(nT)=C_kP_k^n$$

若P_k= -1，输出响应分量$c_k(nT)$对应图1中d点波形，呈等幅跳跃输出。

若$|P_k|<1$，输出响应分量$c_k(nT)$ 对应图1中e点波形。

若$|P_k|>1$，输出响应分量$c_k(nT)$对应图1中f点波形，呈发散跳跃变化。

瞬态响应

> ➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

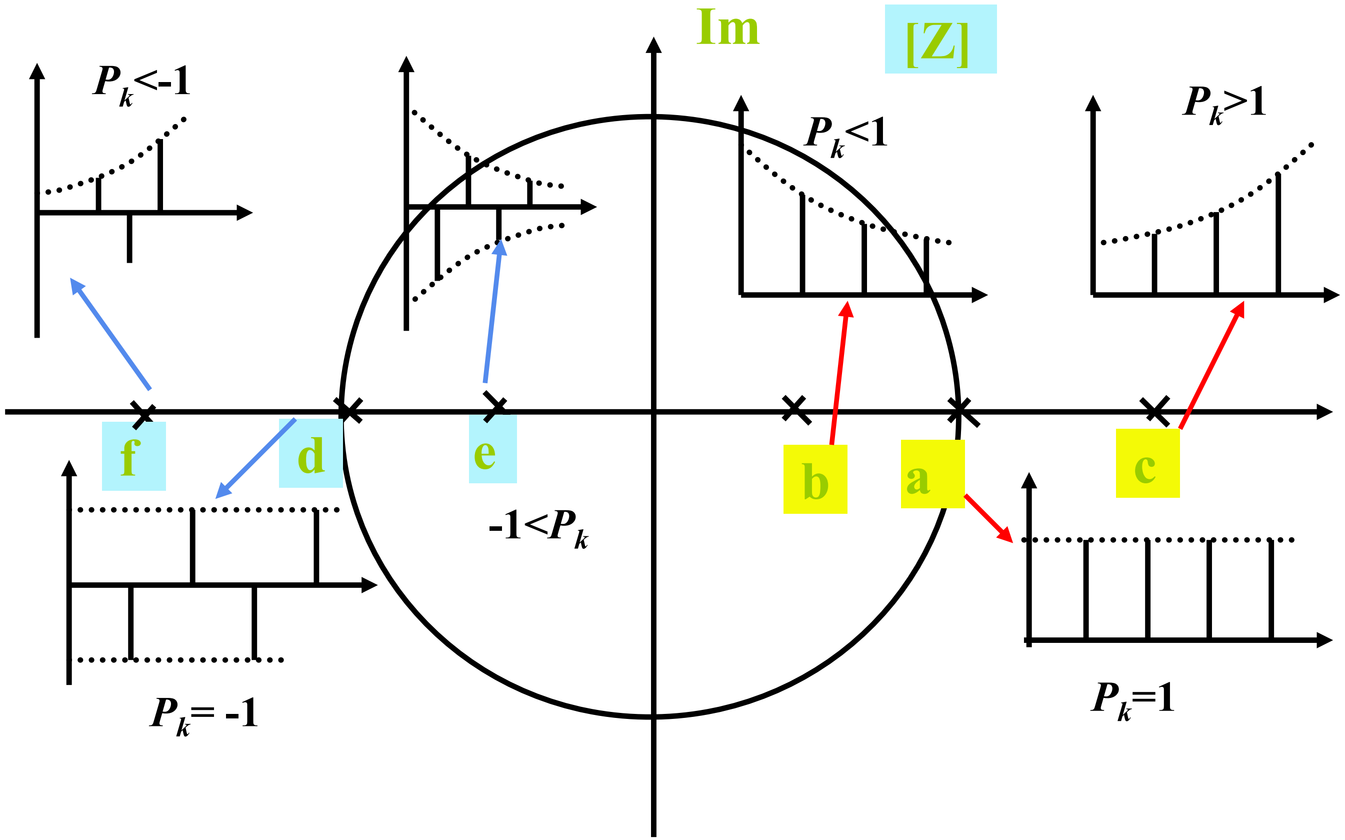


图1　闭环实极点分布与相应瞬态响应

瞬态响应

> ➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

$$c_k(nT) = C_k P_k^{\,n}$$

3) 当P_k，P_{k+1}为一对共轭复根时，为

$$P_k = |P_k| e^{j\theta_k} \quad 与 \quad P_{k+1} = |P_k| e^{-j\theta_k}$$

此时，C_k，C_{k+1} 也为一对共轭复数

$$C_k = |C_k| e^{j\phi_k} \quad 与 \quad C_{k+1} = |C_k| e^{-j\phi_k}$$

则它们对应的瞬态分量$c_{k,\,k+1}(nT)$ 为

$$\begin{aligned} c_{k,k+1}(nT) &= |C_k||P_k|^n\, e^{j(n\theta_k+\phi_k)} + |C_k||P_k|^n\, e^{-j(n\theta_k+\phi_k)} \\ &= 2|C_k||P_k|^n \cos(n\theta_k+\phi_k) \end{aligned}$$

瞬态响应

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

$$c_k(nT)=C_kP_k^{\ n}$$

3) 当P_k，P_{k+1}为一对共轭复根时

$$c_{k,k+1}(nT)=|C_k||P_k|^n e^{j(n\theta_k+\phi_k)}+|C_k||P_k|^n e^{-j(n\theta_k+\phi_k)}$$
$$=2|C_k||P_k|^n\cos(n\theta_k+\phi_k)$$

若$|P_k|<1$，则对应的瞬态响应分量为振幅衰减的正弦振荡，对应图2中a 点对应的波形。

若$|P_k|>1$，则对应的瞬态响应分量为发散正弦振荡，对应图2中b点对应的波形。

令$\theta_k=\omega T$ ⇒ $$\omega=\frac{\theta_k}{T}$$

为系统对应瞬态分量的振荡频率，其振荡周期 $$T_d=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi T}{\theta_k}$$

瞬态响应

振荡周期 $T_d = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi T}{\theta_k}$

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

- 设一个振荡周期中所包含的脉冲个数为 n，采样周期为 T，则

$$nT = T_d = \frac{2\pi T}{\theta_k}$$

所以 $$n = \frac{2\pi}{\theta_k}$$

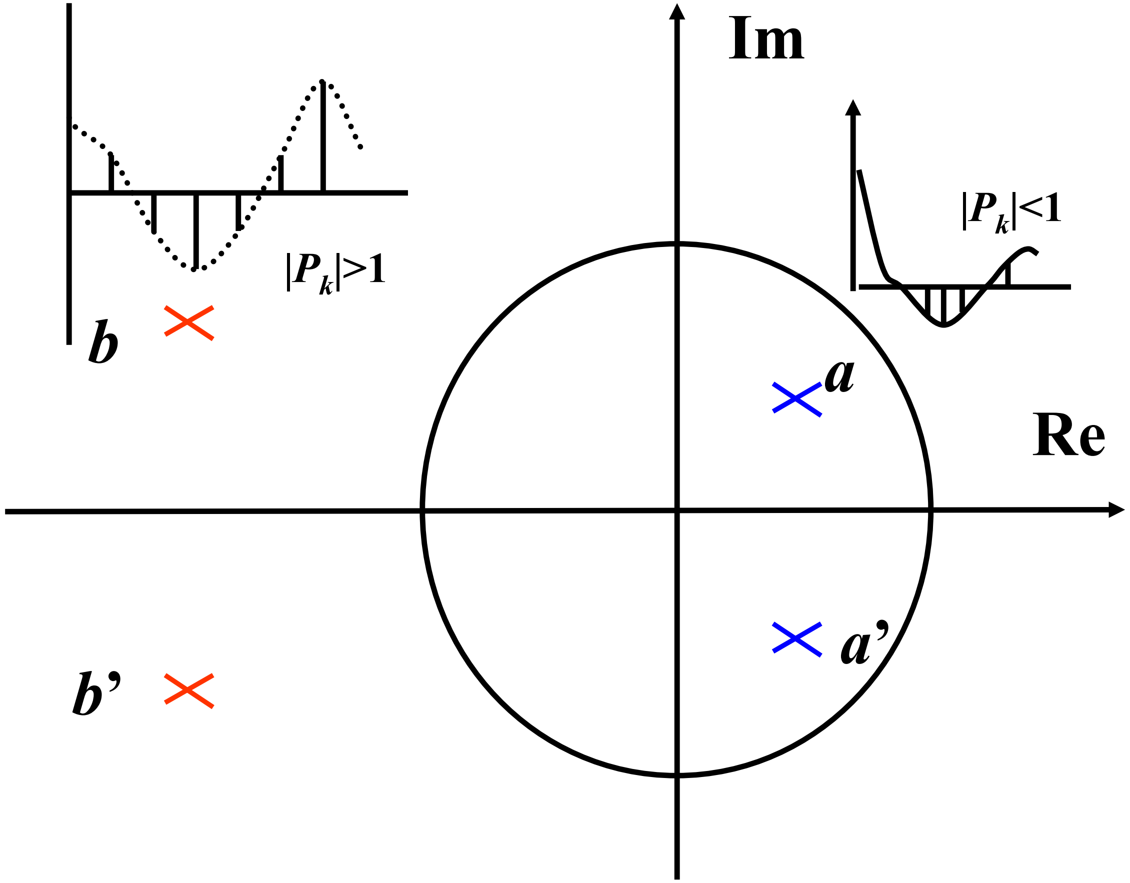
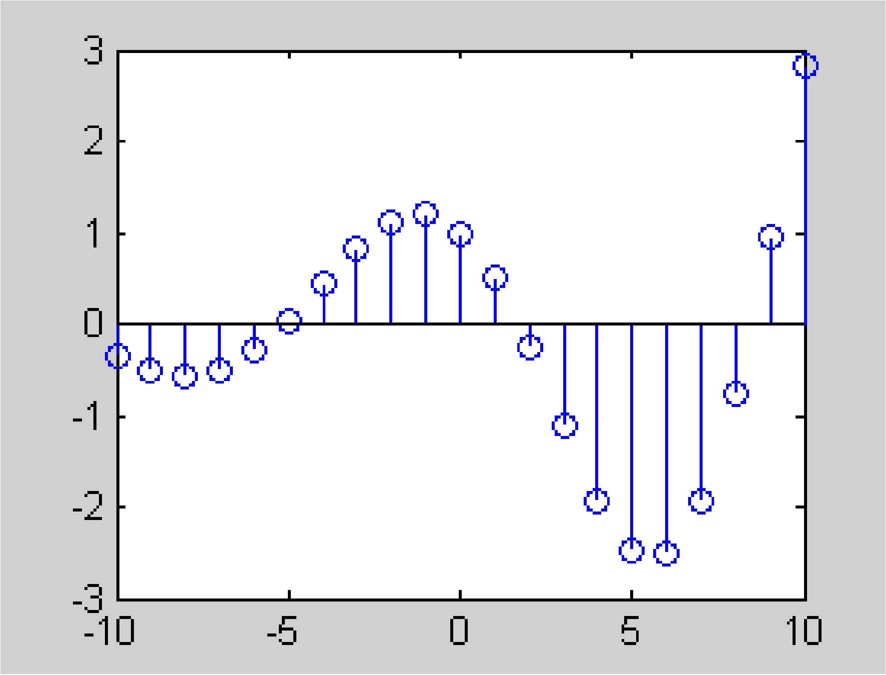


图2　闭环复极点分布与相应瞬态响应

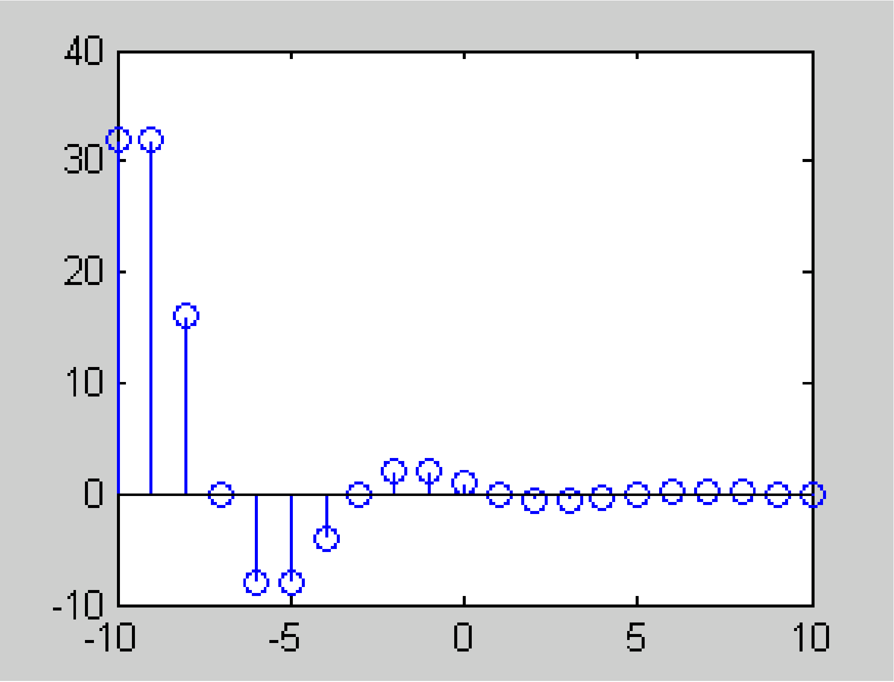
瞬态响应

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

$|P_k|>1$



$|P_k|<1$

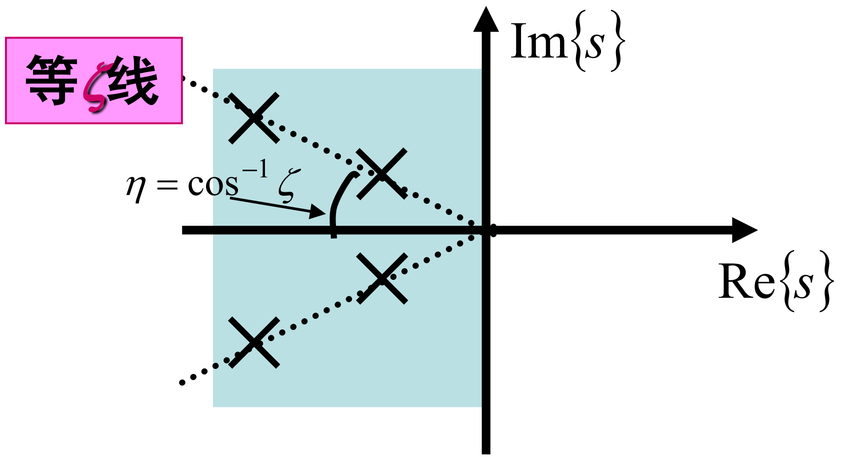


回顾：连续系统

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系，先回忆在连续系统中的重要动态指标

$$M_o = \sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad 0 \le \zeta < 1$$

相同的超调，与阻尼比ζ有关



由上式可见，最大百分比超调量完全由 ζ决定，ζ越小，超调量越大。当ζ=0时，σ%=100%，当ζ=1时，σ% =0。

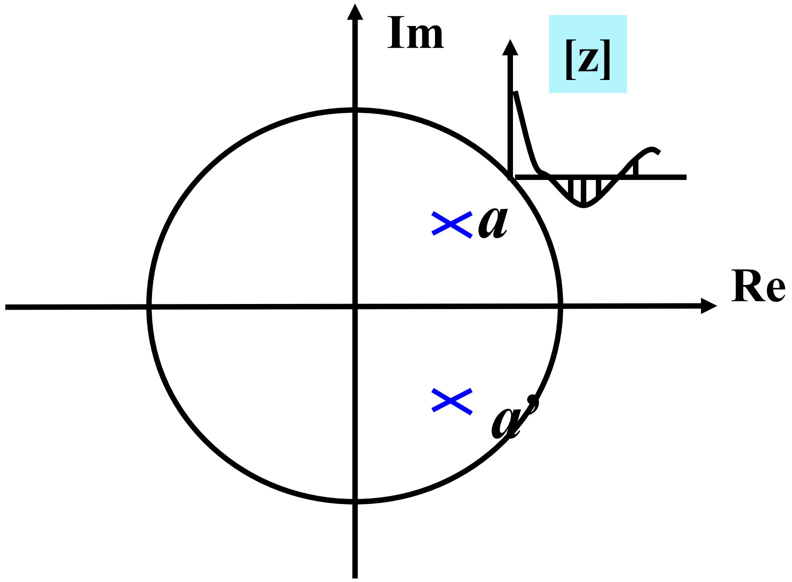
瞬态响应

> ➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

- 在s平面，定义阻尼比为常数的射线为

$$s=\sigma+j\omega=-\omega\,\mathrm{ctg}\,\eta+j\omega$$

其中 $\eta=\cos^{-1}\zeta$

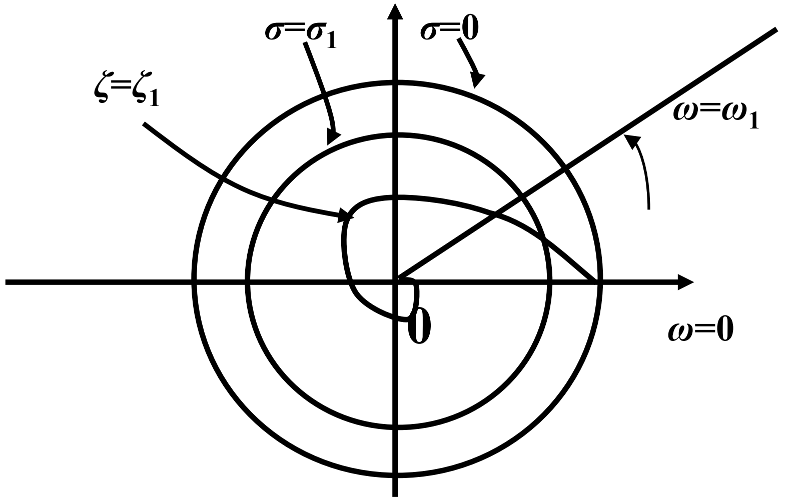


闭环复极点分布与相应瞬态响应

因此

$$z=e^{sT}=e^{-\omega T\mathrm{ctg}\,\eta+j\omega T}=e^{-\omega T\mathrm{ctg}\,\eta}\angle\omega T$$

[z] 平面



瞬态响应

- 当闭环实极点位于z平面左半单位圆内时，由于输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差
- 当闭环复极点位于z平面左半单位圆内时，由于输出衰减高频振荡脉冲，故动态过程质量欠佳
- 在离散系统设计时，应把闭环极点安置在z平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点

瞬态响应

$$z = e^{sT} = e^{-\omega T \operatorname{ctg}\eta + j\omega T} = e^{-\omega T \operatorname{ctg}\eta} \angle \omega T$$

$$\eta = \cos^{-1}\zeta$$

例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为 z=0.368±j0.482 ，试分析采样反馈系统的瞬态响应？

$$s = -0.5 \pm j0.9187 \qquad \zeta = 0.48$$

解： 1) 闭环特征根 z^*= 0.368±j0.482，则

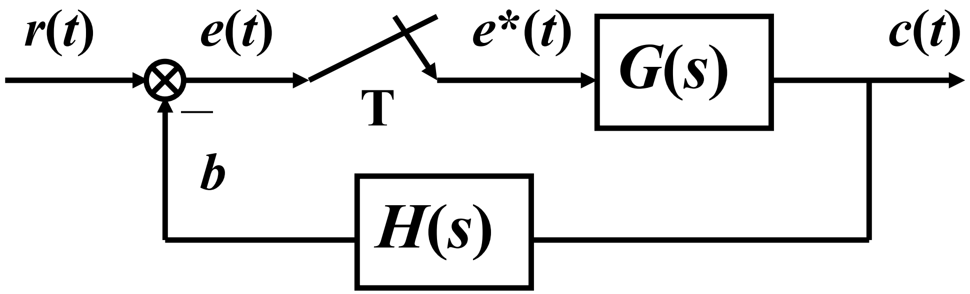
$$K^* = \frac{0.482 \cdot \sqrt{0.482^2 + (1-0.368)^2}}{\sqrt{0.368^2 + 0.482^2}} = 0.632 = 0.632K$$

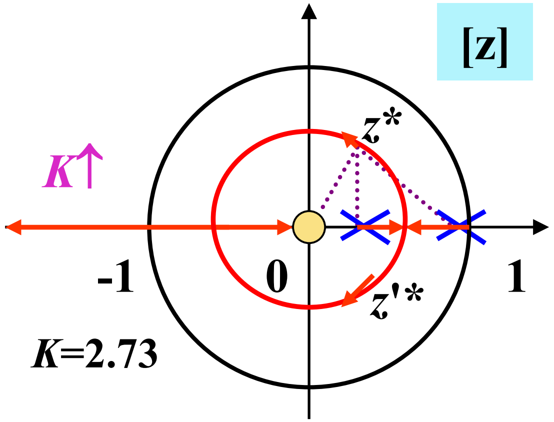
$$GH(z) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

2) 闭环传函

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.632z}{(z-0.368+j0.482)(z-0.368-j0.482)}$$

$$G_B = \frac{GH(z)}{1+GH(z)} = \frac{K^* z}{(z-z^*)(z-z'^*)}$$





瞬态响应

例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为 $z=0.368\pm j0.482$， 试分析采样反馈系统的瞬态响应？

解：3) 对于单位阶跃输入 $R(z)=\dfrac{z}{z-1}$

输出 Z变换表达式$C(z)$

法1：

$$C(z)=\frac{0.632z}{(z^2-0.736z+0.368)}\cdot\frac{z}{z-1}$$
$$=0.632z^{-1}+1.096z^{-2}+1.205z^{-3}+1.12z^{-4}+1.014z^{-5}+\cdots$$

$C(z)$的反变换为 $c(kT)=0\delta(t)+0.632\delta(t-T)+1.096\delta(t-2T)+1.205\delta(t-3T)+\cdots$

注意： 采样瞬时的 $c(kT)$序列为$C(z)$ 表达式中对应项的系数。

瞬态响应

例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为 z=0.368±j0.482 ，试分析采样反馈系统的瞬态响应？

解：3) 对于单位阶跃输入 $R(z)=\dfrac{z}{z-1}$

输出 Z变换表达式$C(z)$

$$C(z)=\frac{0.632z}{(z^2-0.736z+0.368)}\cdot\frac{z}{z-1}\Rightarrow\frac{C(z)}{z}=\frac{1}{z-1}+\frac{-z+0.368}{(z^2-0.736z+0.368)}$$

法2：

$$C(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z(z-e^{-0.5}\cos 1)}{(z^2-2ze^{-0.5}\cos 1+e^{-1})}$$

$C(z)$的反变换 $c(kT)=1-e^{-0.5kT}\cos kT$

这种方式称为“解析式”表达式（不会引入误差）。

注意：$C(z)$只能表示$c(t)$在kT采样时刻的采样值$c^*(t)$，不能反映出采样周期之间的信息。

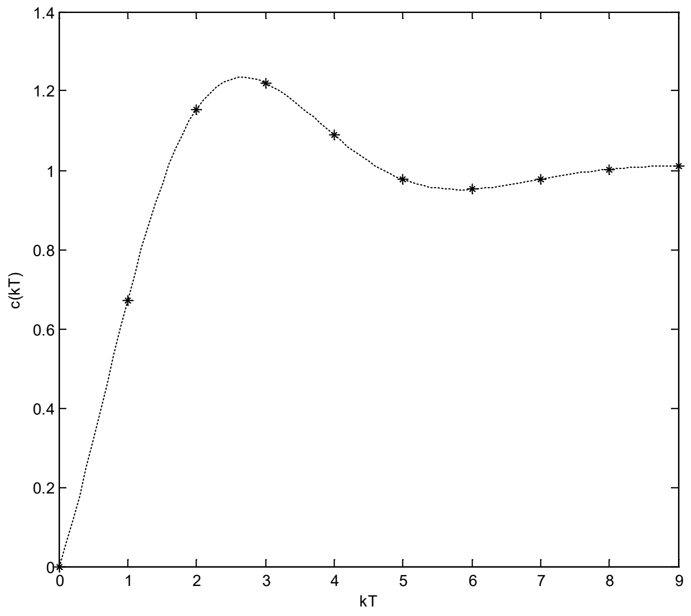
瞬态响应

法1的$C(z)$的逆变换 是“开放”式

$$c(kT)=0\delta(t)+0.632\delta(t-T)+1.096\delta(t-2T)+1.205\delta(t-3T)+\cdots$$

法2的$C(z)$的逆变换为“解析”式

$$c(kT)=1-e^{-0.5kT}\cos kT$$



系统的单位阶跃响应如图。注意：连续的线仅是连接了顶点而已。真实得到的值只有每个采样瞬间才有值。

注意：采样瞬时的 $c(kT)$序列为$C(z)$ 表达式中对应项的系数。

瞬态响应

➢ 连续系统中通常采用的分析方法可以同样应用于离散系统，如：根轨迹，瞬态响应等。

➢ 可以根据期望的阻尼比ζ 和回复时间t_s来选择期望的闭环特征根。注意 [s] 平面到 [z] 平面的映射关系。

➢ 注意 $c(kT)$ 或 $c^*(t)$序列中的初值和终值。

瞬态响应

➢ 有限时间响应系统

当闭环脉冲传递函数所有极点**都分布在原点**时，此时的系统具有一个很特别的响应，即在有限时间结束过渡过程，达到稳态，此时的闭环脉冲传递函数具有如下形式

$$G_B(z)=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{a_n z^n}=\frac{b_n}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{a_n}z^{-1}+\cdots+\frac{b_0}{a_n}z^{-n}$$

其单位脉冲响应

$$h^*(t)=\frac{b_n}{a_n}\delta(t)+\frac{b_{n-1}}{a_n}\delta(t-T)+\cdots+\frac{b_0}{a_n}\delta(t-nT)$$

即在单位脉冲作用下，该系统的瞬态响应能在nT内结束，即n拍可结束过渡过程，这个特点是连续系统所不具备的。

离散系统分析

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差
- 瞬态响应

The End