第一周作业参考答案

7.1(2)、7.2(1)(4)、7.3(2)、7.4(1)、7.5(1)(2)

7-1 （1分）试证明：

（2） $Z[(a^k x(k)]=X(\frac{z}{a})$ 。

证明：

（2） $Z[(a^k x(k)]=\sum_{k=1}^{\infty}(a^k x(k))z^{-k}$ ， 令 $\tilde{z}=\frac{z}{a}$

则 $X(\frac{z}{a})=$ ：

$$X(\tilde{z})=\sum_{k=1}^{\infty}(x(k))\tilde{z}^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}(x(k))(\frac{z}{a})^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}(x(k))a^k z^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}(a^k x(k))z^{-k}$$

故，原题得证。

（1分）

7-2 （2分）试求下列函数的 z 变换。

（1） $e(t)=a^t$；

（4） $E(s)=\frac{s+1}{s^2}$ 。

解：（1） $e(t)=a^t$

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{nT}z^{-n}$$
$$=1+a^T z^{-1}+a^{2T}z^{-2}+a^{3T}z^{-3}+\cdots$$

令： $x=a^{-T}z$；上式 $=1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\cdots=\frac{1}{1-a^T z^{-1}}=\frac{z}{z-a^T}$

附：若是 $e(t)=a^n$；

（1分）

则答案： $E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}$

$$=1+az^{-1}+a^2 z^{-2}+a^3 z^{-3}+\cdots$$

令： $x=a^{-1}z$ ；上式 $=1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\cdots=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$

（4） $E(s)=\dfrac{s+1}{s^2}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}$ ；取拉氏反变换，得 $e(t)=1+t$

再由表 7-2 可得： $E(z)=\dfrac{z}{(z-1)}+\dfrac{Tz}{(z-1)^2}=\dfrac{z^2-z+Tz}{(z-1)^2}$

（1 分）

7-3 （3 分）用长除法、部分分式法和留数法求下列表达式的 z 反变换。

(2) $X(z)=\dfrac{z}{(z\text{-}1)^2(z-2)}$。

解：

（1）长除法

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{z}{z^3-4z^2+5z^1-2}$$

$$=0\cdot z^0+0\cdot z^{-1}+z^{-2}+4z^{-3}+11z^{-4}+26z^{-5}+\cdots$$

所以 k	0	1	2	3	4	5	......
x(kT)	0	0	1	4	11	26	......

（1 分）

（2）部分分式法

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)^2(z\text{-}2)}=\frac{1}{z-2}+\frac{-1}{z\text{-}1}+\frac{\text{-}1}{(z\text{-}1)^2}$$

$$\therefore X(z)=\frac{z}{z-2}+\frac{-z}{z\text{-}1}+\frac{\text{-}z}{(z\text{-}1)^2}$$

$$\therefore\quad x(kT)=-1-k+2^k \qquad k=0,1,2,3......$$

（1 分）

（3）留数法

$$x(kT)=\mathrm{Re}\,s[\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}z^{k-1}]$$

$$=(z-2)\frac{z^k}{(z-1)^2(z-2)}\bigg|_{z=2}+\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}[(z-1)^2\frac{z^k}{(z-1)^2(z-2)}]\bigg|_{z=1}$$

$$=2^k-1-k$$

（1 分）

7-4 求下列表达式的 Z 反变换，并求其初值和终值。

(1) $F(z)=\dfrac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}$ 。

解： 用长除法得反变换

$$F(z)=\frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}=\frac{z^2+0.5z}{z^3-1.5z^2+0.8125z-0.3125}$$

$$=0\cdot z^0+z^{-1}+2z^{-2}+2.1875z^{-3}+1.65625z^{-4}+\cdots$$

所以 k	0	1	2	3	4	5	……
$f(kT)$	0	1	2	2.1875	1.65625		……

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}\frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}=0$$

F(z)的极点一个在单位圆上，另两个在单位圆内，由终值定理可得：

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty}f(kT)=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})F(z)]=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z^2-0.5z+0.3125)}=1.846$$ =

24/13

（1 分）

7-5 （2 分）已知 X(z), 求 $x(\infty)$。

(1) $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ ， $a>0$ ； (2)

$$X(z)=\frac{z^2(z^2+z+1)}{(z^2-0.8z+1)(z^2+z+1.3)}$$

解：(1) X(z)极点一个在单位圆上，一个在单位圆内，由终值定理得：

$$
\begin{aligned}
x(\infty) &= \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)] \\
&= \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}})] \\
&= \lim_{z\to 1}[1-\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}]=1
\end{aligned}
$$

（1分）

(2) 由于 X(z)有 4 个极点，且有 2 个极点位于单位圆外，故终值为 不存在或∞

（1分）

满分一共 10 分

课堂测验

1、初值为 0，终值不存在（5 分）

2、$\mathrm{F}(z)=\dfrac{T^2 3^{-T} z(3^{-T}z+1)}{(3^{-T}z-1)^3}$ （5 分）