自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录

第八章 Chapter 8

线性定常系统的状态空间分析法

主要内容

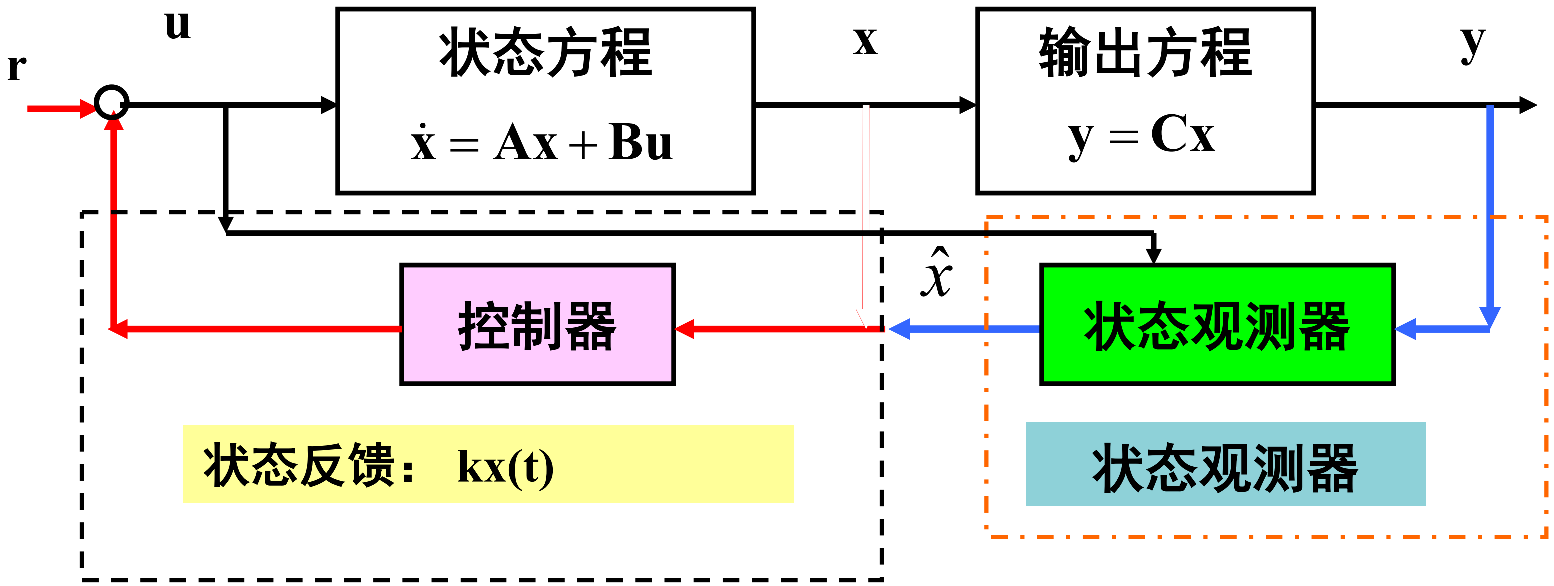
- 简介
- 能控性和能观性
- 线性变换和标准型
- 系统的状态反馈
- 状态变量反馈：稳态误差分析
- **系统的状态观测**

系统状态观测器

- 基本思想
- 全维状态观测器
- 分离原理
- 降维状态观测器

基本思想

- 前面讨论通过状态反馈 Kx 进行极点任意配置时，总是假设： (1) 系统状态完全可控；(2) 状态均可获取。
- 若系统状态变量不可测量，但是系统可观测，则实时状态变量可以由系统输入和输出估计得到，所以状态观测器又被称为状态估计器。



基本思想

- 实际工程中，能获取的往往是输出 y，而非状态 x。设计状态观测器的目的是利用已知的输出与输入信息估计出不能获取的状态。系统：

$$\mathbf{y} \in R^{m\times 1}, \quad \mathbf{x} \in R^{n\times 1}, \quad m < n$$

采用估计出的状态取代真实的状态必须满足 2 个基本要求：

(1) $\|\hat{\boldsymbol{x}}(t)\text{-}\boldsymbol{x}(t)\|$ 收敛，$\lim\limits_{t\to\infty}\|\hat{\boldsymbol{x}}(t)\text{-}\boldsymbol{x}(t)\| = 0$

(2) $\|\hat{\boldsymbol{x}}(t)\text{-}\boldsymbol{x}(t)\|$ 收敛速度满足要求

向量$e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$的欧几里得范数

$$\|e(t)\| = \sqrt{e_1^2(t) + e_2^2(t) + \cdots + e_n^2(t)}$$

- 所谓**状态观测器**（又称状态重构或状态估计）：已知系统的动态数学模型，通过输入、输出信息估计出全部状态信息（全维状态观测器）。

基本思想

系统状态空间模型为 Σ：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{y}\in R^m,\quad \boldsymbol{x}\in R^n,\quad \boldsymbol{u}\in R^r$$

1）方法一：利用系统输入及输出的微分信号可直接估计状态信息

$$\begin{aligned}
y&=C\mathbf{x}\\
\dot{y}&=C\dot{\mathbf{x}}=CA\mathbf{x}+CBu\\
\ddot{y}&=C\ddot{\mathbf{x}}=CA^2\mathbf{x}+CABu+CB\dot{u}\\
&\vdots\\
y^{(n-1)}&=C\mathbf{x}^{(n-1)}=CA^{n-1}\mathbf{x}+\sum_{i=1}^{n-1}CA^{n-1-i}Bu^{(i-1)}
\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{Y}(t)=\begin{bmatrix} y(t)\\ \dot{y}(t)-CBu(t)\\ \ddot{y}(t)-CABu(t)-CB\dot{u}(t)\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(t)-\sum_{i=1}^{n-1}CA^{n-1-i}Bu^{(i-1)}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C\\ CA\\ CA^2\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t)$$

若系统能观，N的秩为n，则有 $\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{Y}(t)$ ⇒ $\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N})^{-1}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{Y}(t)$

基本思想

- 由上式可见：若系统能观，则由可测的输入输出及它们的(n-1)阶导数构造向量 $Y(t)$，可获得$X(t)$。然而，理论上虽然是可行的方法，工程实际上却行不通。
- 原因1)：工程中不能实现真正的微分，只能近似

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{y(t+\Delta)-y(t)}{\Delta}$$

$$\frac{y(t)-y(t-h)}{h}\approx\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}，当h很小时 \qquad 或者 \qquad s=\frac{s}{\tau s+1},\tau\ll 1$$

- 原因2)：信号中不可避免地存在噪声，微分尤其是高阶的微分对噪声有放大作用——可能足以覆盖真实的测量信号

例：热噪声信号

$$\omega(t)=0.01\sin 100t$$
$$\dot\omega(t)=\cos 100t$$
$$\ddot\omega(t)=-100\sin 100t$$

每次微分都将噪声信号的模放大到原值的100倍

因此，方法一没有普遍的实际应用价值。

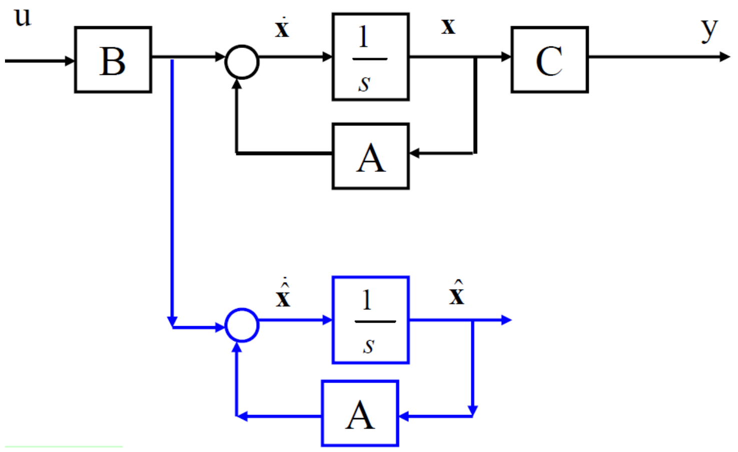
基本思想

系统状态空间模型为 Σ：$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ \ x(0)=x_0$

$y(t)=Cx(t)$ $\quad y\in R^m,\ \ x\in R^n,\ \ u\in R^r$

2）方法二：利用系统数学模型估计状态信息

构造一个系统：$\tilde{\Sigma}:\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t)\\ \hat{x}(0)=\hat{x}_0\end{cases}$



则

$$\dot{\hat{x}}(t)-\dot{x}(t)=A[\hat{x}(t)-x(t)]$$

$$\hat{x}(t)=x(t)+e^{At}(\hat{x}_0-x_0)$$

- 由上式，如果 $\hat{x}_0=x_0$，则 $\hat{x}(t)=x(t)$，即构造的系统（状态估计器）完全反映原状态。然而，工程中x_0往往无法获取！

缺点1：工程中无法保证$\hat{x}_0-x_0=0$，若A不稳定，$\hat{x}(t)-x(t)$发散

缺点2：即使A稳定，收敛速度未必满足要求

缺点3：未用到y和C的信息

基本思想

分析： $\hat{x}(t)=x(t)+e^{At}(\hat{x}_0-x_0)$

（1）工程中x_0往往无法获取，如果A不稳定？——不能用！

（2）如果A是稳定矩阵（其特征值均具有负实部），则

$$e^{At}(\hat{x}_0-x_0)\Big|_{t\to\infty}\to 0\Rightarrow \hat{x}(t)\Big|_{t\to\infty}\to x(t)\Big|_{t\to\infty}$$

即状态估计器具有渐近特性

（3）再假设 A 的特征值的负实部值的绝对值足够大，则

$\hat{x}(t)\to x(t)$ 足够快　　即状态估计器可以被接受

问题：由于构造系统的A与原系统是同一个A，假设不成立！

（4）原A是给定的，故需要改造 A 为期望的 $\tilde{A}$ ，使得

$$\left|\lambda(\tilde{A})\right|_{\min}>\left|\lambda(A)\right|_{\min}$$

这样构造出的状态估计器具有期望的特性

基本思想

对状态观测器的大致轮廓分析：

（1）不需要对系统变量微分(u, y)；

（2）在已知模型基础上，可以通过调整某些参数，控制 $\hat{x}(t) \to x(t)$ 的速度，一般构造的 $\tilde{A}$ 比系统A的最小特征值（绝对值）要大；

（3）应该有手段修正状态观测器的估计精度：用C, Y？

系统状态观测器

- 基本思想
- 全维状态观测器
- 分离原理
- 降维状态观测器

全维状态观测器

指状态观测器可以估计出系统的全部状态

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gy + Hu$$

构造的系统

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

1）构造的系统总是存在偏差

2）开环结构估计结果不满意

考虑：控制系统中的反馈环节

——引入校正环节，利用系统可测的输出信息随时校正估计

闭环状态观测器 $\tilde{\Sigma}_o: \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)]$

$y \in R^m$， $x \in R^n$

$L_{n\times m}$ –待定常量矩阵

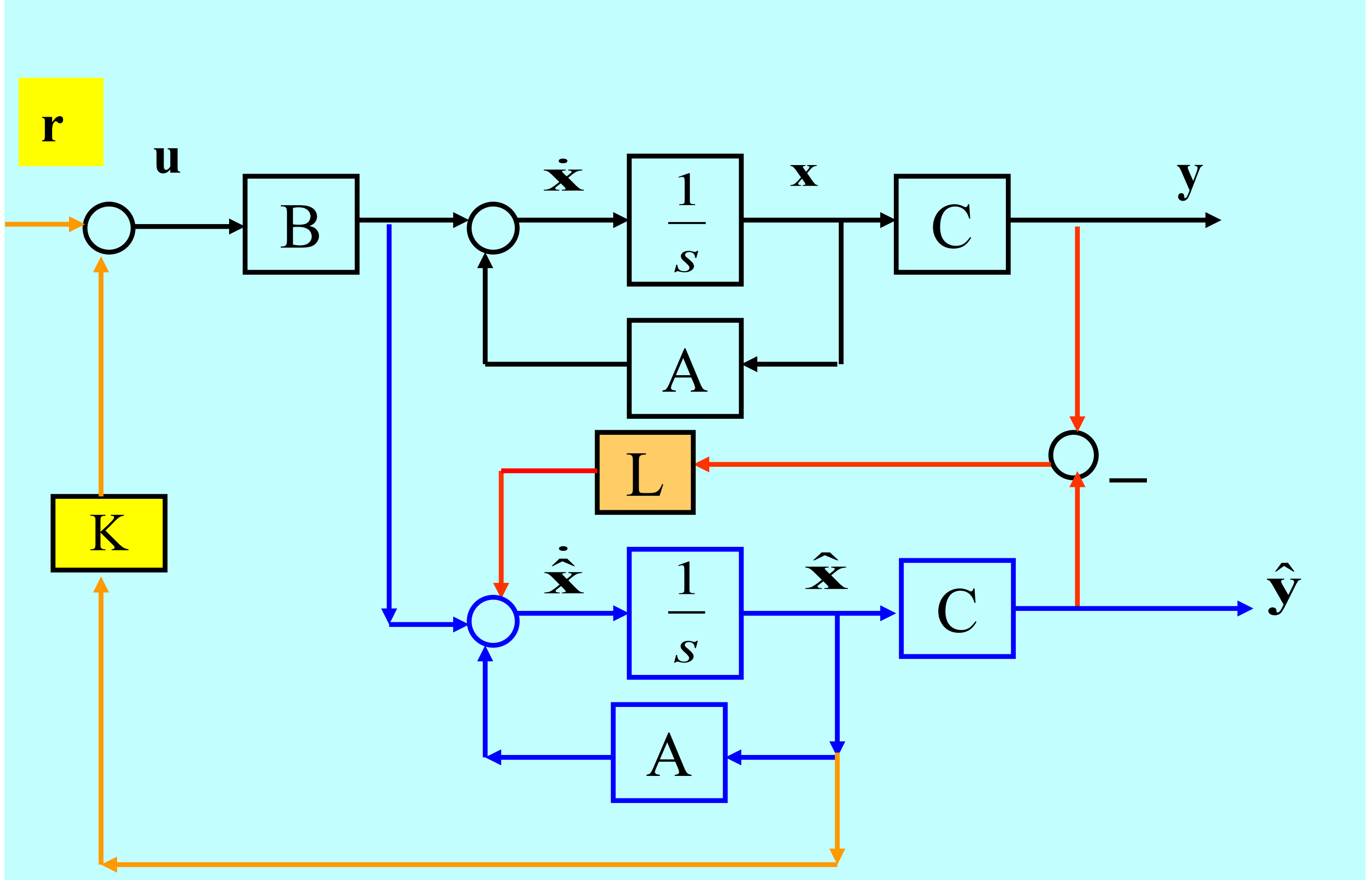
或写成 $\tilde{\Sigma}_o: \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$

$F = A - LC$， $G = L$， $H = B$

方程中仅有的可调参数 L？

全维状态观测器

$$\tilde{\Sigma}_o : \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$



问题：

1）如何求*L*阵？

2）如何保证所得到的状态观测器是渐近稳定的？

全维状态观测器

分析观测器 $\tilde{\Sigma}_o:\ \dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Bu(t)+Ly(t)$ 能否满足要求

- 定义真实状态与估计状态之间的误差为 $\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t)$

则 $$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t)&=\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)\\&=Ax+Bu-[(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly]\\&=(A-LC)\tilde{x}\text{——状态估计误差方程}\end{aligned}$$

$y=Cx$

齐次方程求解

$$\tilde{x}(t)=e^{(A-LC)t}\tilde{x}(0)$$

一般未知，因为$x(0)$一般不知道

要求 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{x}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}[x(t)-\hat{x}(t)]=0$ 且尽可能地快

也即要求$(A-LC)$矩阵的所有特征值均位于S左半平面。若L能任意确定（回顾状态反馈的方法），$\tilde{x}(t)$衰减的过程也就能被控制。

全维状态观测器

- **定理1**：设系统 Σ： $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$
  $y(t)=Cx(t)$

完全可观，则通过全维状态观测器 $\dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Bu(t)+Ly(t)$

估计它的状态，估计误差 $\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t)$ 由 $\dot{\tilde{x}}(t)=(A-LC)\tilde{x}(t)$ 决定，并可通过 L 阵的选取，任意配置 $(A-LC)$的全部特征值。

说明：因为｛A，C｝能观，对偶系统 Σ^*： $\dot{x}^*(t)=A^Tx^*(t)+C^Tu^*(t)$ 能控。由对偶原理，｛A^T，C^T｝能控，则必存在K^*实现$(A^T+C^TK^*)$的极点任意配置。

因为特征值不受转置影响 $\lambda(A^T+C^TK^*)=\lambda(A+(K^*)^TC)$

只要令：$L=-(K^*)^T$。所以只要对偶系统能控(原系统能观)，$(A-LC)$的极点就可实现任意配置。L称为观测器的增益矩阵。

全维状态观测器

- 由 **定理1** 的说明，可知系统状态观测器的设计问题实际上已经转化为状态反馈控制器的设计，方法完全类似。

例 8-5-1 设有系统

$$\Sigma:\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0.08\end{bmatrix}u$$

$$y=cx=[1\quad 0]x$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为-10， -1。

解： step 1: 能观性判别，系统能观。

step 2: 观测器期望特征方程 $\Delta^*(s)=(s+10)(s+1)=s^2+11s+10=0$

step 3: 构造全维观测器，写出观测器特征方程

观测器 $\dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Bu(t)+Ly(t)$

全维状态观测器

例 8-5-1 设有系统

$$\Sigma:\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0.08\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{cx}=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

$$\Delta^*(s)=(s+10)(s+1)=s^2+11s+10=0$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为- 10， - 1。

解：step 3: 构造全维观测器，写出观测器特征方程

观测器

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)+\boldsymbol{Ly}(t)$$

观测器特征方程

$$\Delta_o(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\right|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}[1\quad 0]\right\}\right|$$

$$=s^2-(0.1-l_1)s-0.1l_1+0.1l_2$$

step 4: 求解观测器增益矩阵$\boldsymbol{L}$

$$\Delta^*(s)=\Delta_o(s)\Rightarrow \boldsymbol{L}=\begin{cases}l_1=11.1\\ l_2=111.1\end{cases}$$

step 5: 写出全维观测器方程（此略）

全维状态观测器

例8-5-2 系统表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=x_1$$

假设状态x_2不可测量，构造状态观测器，使观测器极点位于-9 和 -10。

解：首先判断系统是否能观。由能观性矩阵

$$\boldsymbol{RankM_o}=\boldsymbol{Rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}=2$$

系统完全能观。

$[A\text{-}LC]$的极点由期望的特征多项式决定

$$\Delta^*(s)=(s+9)(s+10)=s^2+19s+90$$
$$=\Delta_o=\left|s\boldsymbol{I}\text{-}(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{LC})\right|=s^2+(3+l_1)s+2+2l_1+3l_2$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\ 56/3\end{bmatrix}$$

全维状态观测器

例8-5-2

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=x_1$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\ 56/3\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1(t)\\ \dot{\tilde{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}\right]\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\left\{\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16\\ 56/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right\}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-17 & 3\\ -56/3 & -2\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{L}(y-\hat{y})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{L}y=\begin{bmatrix}-17 & 3\\ -56/3 & -2\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}16\\ 56/3\end{bmatrix}y$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

全维状态观测器

例8-5-2

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1(t)\\ \dot{\tilde{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-17 & 3\\ -56/3 & -2\end{bmatrix}\tilde{x}(t)$$

对于 u(*t*)=1(*t*), $x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $\hat{x}(0)=\begin{bmatrix}\hat{x}_1(0)\\ \hat{x}_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ ⇨ $\tilde{x}(0)=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1(0)\\ \tilde{x}_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

则相应的响应分别为：

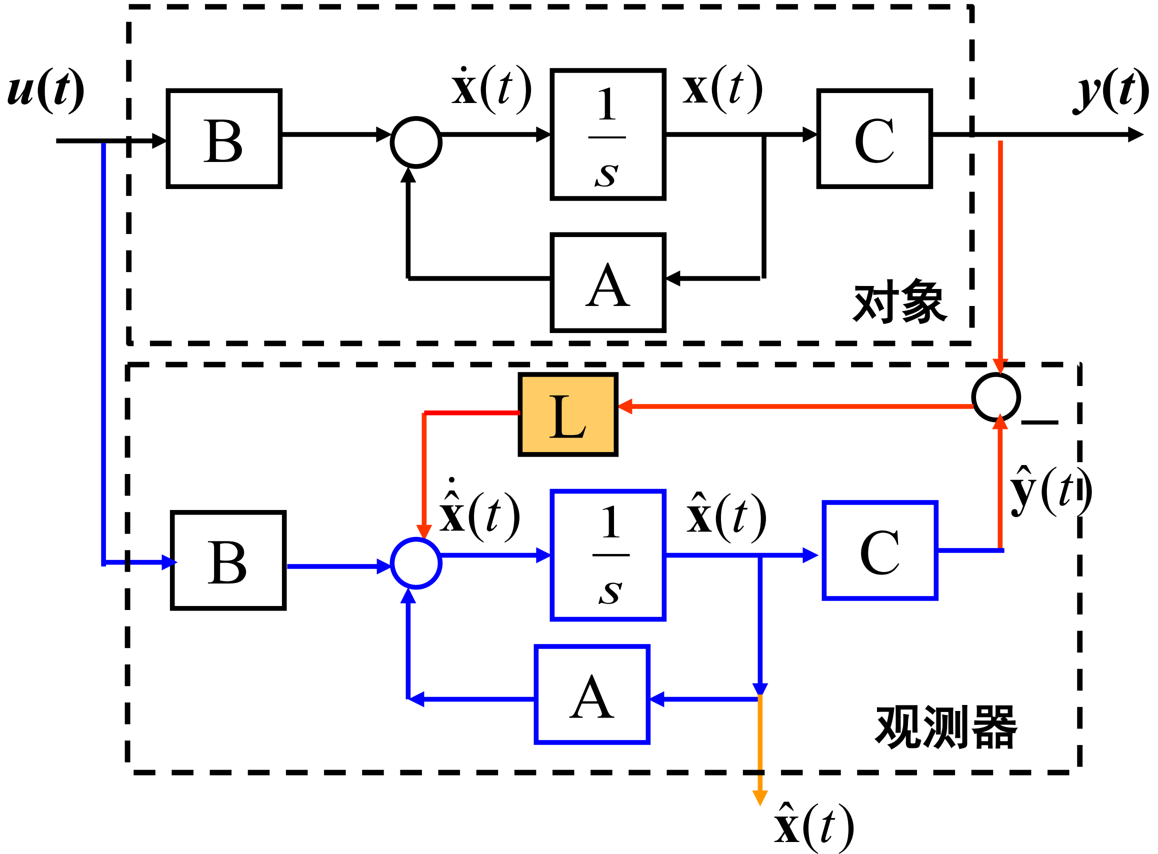
$$x_2(t)=0.5+0.5e^{-2t}$$

$$\hat{x}_2(t)=0.5+0.5e^{-2t}-8e^{-9t}+7e^{-10t}$$

$$\tilde{x}_2(t)=8e^{-9t}-7e^{-10t}$$

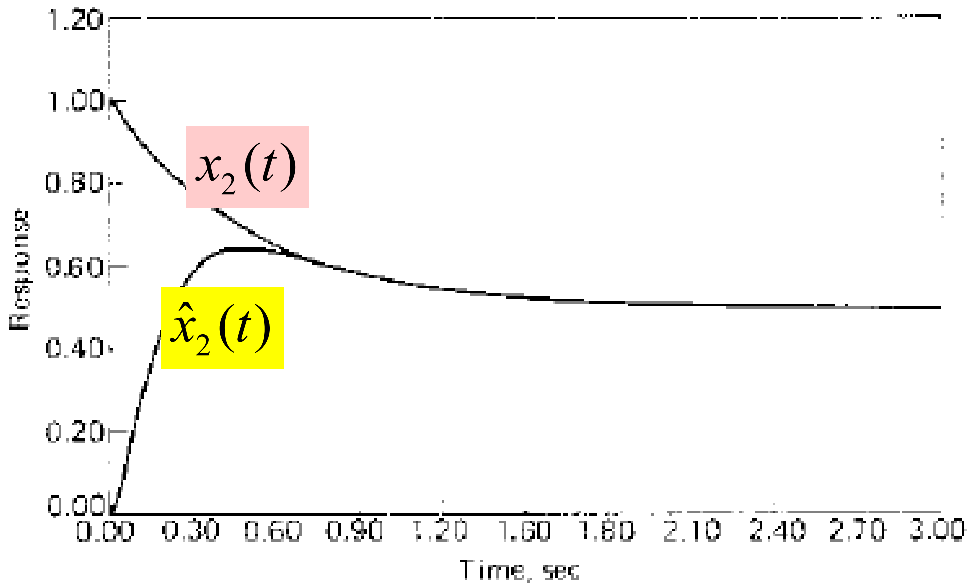
响应曲线如下页图所示，估计状态 $\hat{x}_2(t)$ 能够快速跟踪实际状态 $x_2(t)$ 。

$$\dot{\hat{x}}(t)=\begin{bmatrix}-17 & 3\\ -56/3 & -2\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}16\\ 56/3\end{bmatrix}y$$



全维状态观测器

例8-5-2



在 u(*t*)=1(*t*)作用下，状态响应为：

$$x_2(t) = 0.5 + 0.5e^{-2t}$$

$$\hat{x}_2(t) = 0.5 + 0.5e^{-2t} - 8e^{-9t} + 7e^{-10t}$$

$$\tilde{x}_2(t) = 8e^{-9t} - 7e^{-10t}$$

全维状态观测器

全维观测器设计小结

1. 设计方法类似状态反馈控制器的设计，关键是求解增益矩阵 L
2. 当系统维数较低或C阵非零元素较少时，采用直接法设计较为方便；

   但若维数＞＝3，或C阵中非零元素占优时，直接法求解将会困难（会遇到求解 f(L)高阶方程）

——这种情况下，简单通用的方法？

3. 回顾状态反馈控制器的设计方法，先化系统矩阵为标准型？

   状态反馈：能控系统 $\Sigma \rightarrow$ 能控标准型 $\Sigma_c \rightarrow K_c \rightarrow K= K_c T_c^{-1}$

   状态观测：能观系统 $\Sigma \rightarrow$能观标准型 $\Sigma_o \rightarrow L_o \rightarrow L=?$

全维状态观测器

一般能观系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$x = T_o x_o$$

能观标准型系统

$$\dot{x}_o = T_o^{-1} A T_o x_o + T_o^{-1} B u = A_o x_o + B_o u$$
$$y = C T_o x_o = C_o x_o$$

设计状态观测器

$$\dot{\hat{x}}_o = (A_o - L_o C_o)\hat{x}_o + B_o u + L_o y$$
$$\hat{y} = C_o \hat{x}_o$$

$$\hat{x}_o = T_o^{-1} \hat{x}$$

$$T_o^{-1}\dot{\hat{x}} = (A_o - L_o C_o) T_o^{-1} \hat{x} + B_o u + L_o y$$
$$\hat{y} = C_o T_o^{-1} \hat{x}$$

左乘T_o

$$\dot{\hat{x}} = T_o(A_o - L_o C_o) T_o^{-1} \hat{x} + T_o B_o u + T_o L_o y$$
$$= (A - T_o L_o C)\hat{x} + Bu + T_o L_o y$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

$$L = T_o L_o$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

全维状态观测器

$$T_o^{-1}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ddots & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & & \ddots & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-2} \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

全维观测器设计通用方法

Step 1. 对给定系统进行能观性判别，系统能观才能设计状态观测器；

Step 2. 对能观系统构造一个变换矩阵T_o；将系统 Σ 变成能观标准型 Σ_o；

设系统 Σ： $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

$y(t)=Cx(t)$

$x=T_o x_o(t)$

$T_o=Q_o^{-1}\bar{Q}_o$

$$\Sigma_o:\dot{x}_o(t)=A_o x_o(t)+B_o u(t)=T_o^{-1}AT_o x(t)+T_o^{-1}Bu$$

$$y(t)=C_o x_o=CT_o x(t)$$

Step 3. 根据指定的观测器期望极点 λ_i 求期望的特征方程；

$$\Delta^*(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0$$

Step 4. 通过简单的数值运算得到能观标准型的增益阵 L_o，再借助变换矩阵 T_o得到原系统的观测器增益阵 L。

$$l_{oi}=\beta_{i-1}-a_{i-1},\quad i=1,2,\cdots n$$

Step 5. 写出原系统的状态观测器。

$$L=T_oL_o$$

全维状态观测器

例 8-5-3 设有系统

$$\Sigma: \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{cx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法一：直接法设计

解： step 1: 能观性判别，系统能观。可以设计状态观测器

step 2: 期望观测器特征方程 $\Delta^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$

step 3: 构造全维观测器，写出闭环观测器特征方程

$$\Delta_o(s) = \left| s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}) \right| = \left\| \begin{bmatrix} s-(1-l_1) & l_1 & 0 \\ l_2 & s-(2-l_2) & -1 \\ l_3 & l_3 & s-2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= s^3 + s^2(-5 + l_1 + l_2) + s(8 - 4l_1 - 3l_2 + l_3) + 4l_1 + 2l_2 - l_3 - 4$$

全维状态观测器

例 8-5-3 设有系统

$$\Sigma: \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法一：直接法设计

解： step 4: 比较 2个特征方程 s 的同次幂系数，求解出L

$$\Delta^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60 \ = \Delta_o(s)$$

$$\Delta_o(s) = s^3 + s^2(-5 + l_1 + l_2) + s(8 - 4l_1 - 3l_2 + l_3) + 4l_1 + 2l_2 - l_3 - 4$$

$$\begin{aligned} -5 + l_1 + l_2 &= 12 \\ 8 - 4l_1 - 3l_2 + l_3 &= 47 \\ 4l_1 + 2l_2 - l_3 - 4 &= 60 \end{aligned} \Rightarrow \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}y(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

step 5: 写出全维观测器方程 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) + \boldsymbol{L}y(t)$

全维状态观测器

例 8-5-3 设有系统

$$\Sigma:\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解：step 1: 能观性判别，系统能观。可以设计状态观测器且能观性矩阵

$$\boldsymbol{Q}_o=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&4&4\end{bmatrix}$$

系统开环特征方程

$$\Delta(s)=|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}s-1&0&0\\0&s-2&-1\\0&0&s-2\end{bmatrix}=s^3-5s^2+8s-4$$

$$\Delta(s)=s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

全维状态观测器

例 8-5-3 设有系统

$$\Sigma: \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = cx = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解： step 2: 构造一个变换矩阵T_0；将系统 Σ 变成能观标准型 Σ_0

$$T_o^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ddots & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & & \ddots & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-2} \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T_o^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_o = T_o^{-1} A T_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b_o = T_o^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_o = cT_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

全维状态观测器

$$A_o = T_o^{-1} A T_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

例 8-5-3 设有系统

$$\Sigma: \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = cx = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解：step 3: 根据指定的观测器期望极点 λ_i 求期望的特征方程(与前同)

$$\Delta^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$
$$= s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0$$

$$A_o - L_o c_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -47 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}$$

step 4: 通过简单的数值运算得到能观标准型的增益阵 L_0，再借助变换矩阵 T_0得到原系统的观测器增益阵 L。

$$\Delta(s) = s^3 - 5s^2 + 8s - 4$$
$$= s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$l_{oi} = \beta_{i-1} - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

$$l_{o1} = 60 - (-4) = 64$$
$$l_{o2} = 47 - 8 = 39$$
$$l_{o3} = 12 - (-5) = 17$$

$$L_o = \begin{bmatrix} 64 \\ 39 \\ 17 \end{bmatrix}$$

全维状态观测器

例 8-5-3 设有系统

$$\Sigma:\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=cx=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解： step 4: 通过简单的数值运算得到能观标准型的增益阵 L_o，再借助变换矩阵 T_o得到原系统的观测器增益阵 L。

$$\therefore L=T_oL_o=(T_o^{-1})^{-1}\begin{bmatrix}64\\39\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}64\\39\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120\\-103\\210\end{bmatrix}$$

step 5: 写出全维观测器方程

$$\dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Bu(t)+Ly(t)$$

系统状态观测器

- 基本思想
- 全维状态观测器
- 分离原理
- 降维状态观测器

分离原理

- 设线性系统 Σ 能控能观：
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

通过状态反馈控制器设计实现极点配置 $u = r + Kx$

设计状态观测器增益阵 L估计状态以实现反馈控制 $u = r + K\hat{x}$

问题：(1) 采用全维状态观测器提供的状态估计值代替真实状态实现状态反馈，其状态反馈阵K是否需要重新设计以保持系统期望的特征值？

(2) 状态观测器引入后，状态反馈部分是否会改变已经设计好的观测器极点配置？观测器的增益矩阵L是否需要重新设计？

上述问题是考虑一个维数为 $2n$ 的复合系统的动态特性。

分离原理正是回答了这 2个问题。

分离原理

可以证明： 采用全维状态观测器提供的状态估计值代替真实状态实现状态反馈组成的维数为 $2n$ 的复合系统与状态反馈子系统具有同样的传递特性（传递函数（矩阵）），而与观测器部分无关。因此可由观测器的状态估计值代替状态的真实值进行反馈。

而复合系统的特征值是由状态反馈子系统与全维状态观测器的特征值组合而成，且两部分的特征值相互独立，彼此不受影响。因此可以根据各自的要求独立地进行设计状态反馈矩阵K和状态观测器的L。

定理2（分离定理）： 若受控系统（A，B，C）能控能观，用状态观测器形成状态反馈时，其系统的极点配置和观测器设计可分别独立进行，即**状态反馈阵K和状态观测器L阵的设计可分别独立地进行**。

分离原理

- 设能控能观的线性系统 Σ：
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

由于某些状态不能得到，需要通过状态观测器估计，以实现状态反馈控制，即将 $u = r + K\hat{x} = r + K(x - \tilde{x})$ 代入原状态方程，可得：

$$\dot{x} = Ax + B[r + K(x - \tilde{x})] = (A + BK)x - BK\tilde{x} + Br$$

而状态估计的误差方程为： $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$

由状态估计与状态反馈控制构成的维数为2n的复合系统为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

上式的特征多项式为：

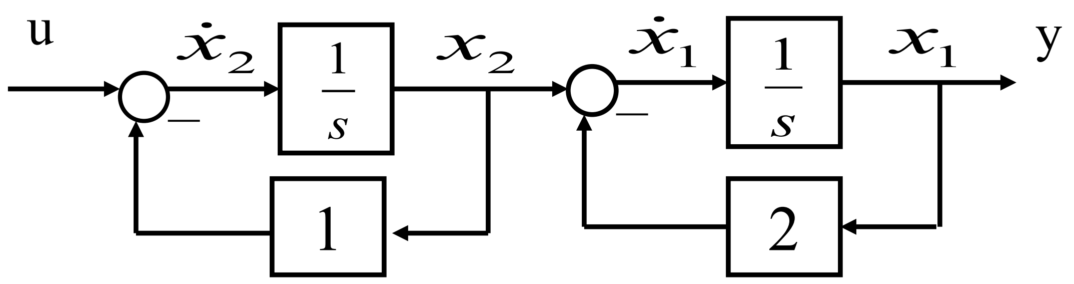
$$Q(\lambda) = \left|\lambda I - (A + BK)\right| \cdot \left|\lambda I - (A - LC)\right|$$

——K与L可独立设计

分离原理

例 8-5-4 某系统的传递函数如下，其状态不可测。试设计观测器（极点均为－3）进行状态重构以实现状态反馈，使系统的闭环极点为－1±j 。并画出状态结构图。

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



解：step 1: 因系统传递函数无相消的因子，故一定能控能观。

如图，系统的状态方程实现：

$$\Sigma:\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{cx}=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

step 2: 先设计状态观测器（状态观测器与状态反馈可以分别设计）：

(1) 期望观测器特征方程：$\Delta_o^*(s)=(s+3)^2=s^2+6s+9$

分离原理

例 8-5-4 某系统的传递函数如下，其状态不可测。试设计观测器（极点均为－3）进行状态重构以实现状态反馈，使系统的闭环极点为－1±j 。并画出状态结构图。

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Sigma:\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{cx}=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

解：step 2: (2) 状态观测器特征方程

$$\Delta_o(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\right|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}[1\quad 0]\right\}\right|$$

$$=s^2+(3+l_1)s+(2+l_1+l_2) \Longleftrightarrow \Delta^*(s)=(s+3)^2=s^2+6s+9$$

(3) 求解观测器增益矩阵

$$\Delta^*{}_o(s)=\Delta_o(s)\Rightarrow \boldsymbol{L}=\begin{cases}l_1=3\\ l_2=4\end{cases}$$

step 3: 求状态反馈矩阵

(1) 期望的闭环特征方程：

$$\Delta^*(s)=(s+1+j)(s+1-j)=s^2+2s+2$$

(2) 状态反馈后的闭环特征方程：

$$\Delta_{cl}(s)=\left|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bK})\right|=s^2+(3-k_2)s+(2-2k_2-k_1)$$

分离原理

例 8-5-4 某系统的传递函数如下，其状态不可测。试设计观测器（极点均为－3）进行状态重构以实现状态反馈，使系统的闭环极点为－1±j 。并画出状态结构图。

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Sigma:\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{cx}=[1 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

解：step 3: (3) 求解状态反馈矩阵K

$$\Delta^*(s)=(s+1+j)(s+1-j)=s^2+2s+2$$

$$\Delta_{cl}(s)=|s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{bK})|=s^2+(3-k_2)s+(2-2k_2-k_1)$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{cases}k_1=-2\\ k_2=1\end{cases}$$

step 4: 写出状态反馈控制系统与状态观测器

应用了分离原理分别设计了状态反馈矩阵K与状态观测器L阵。

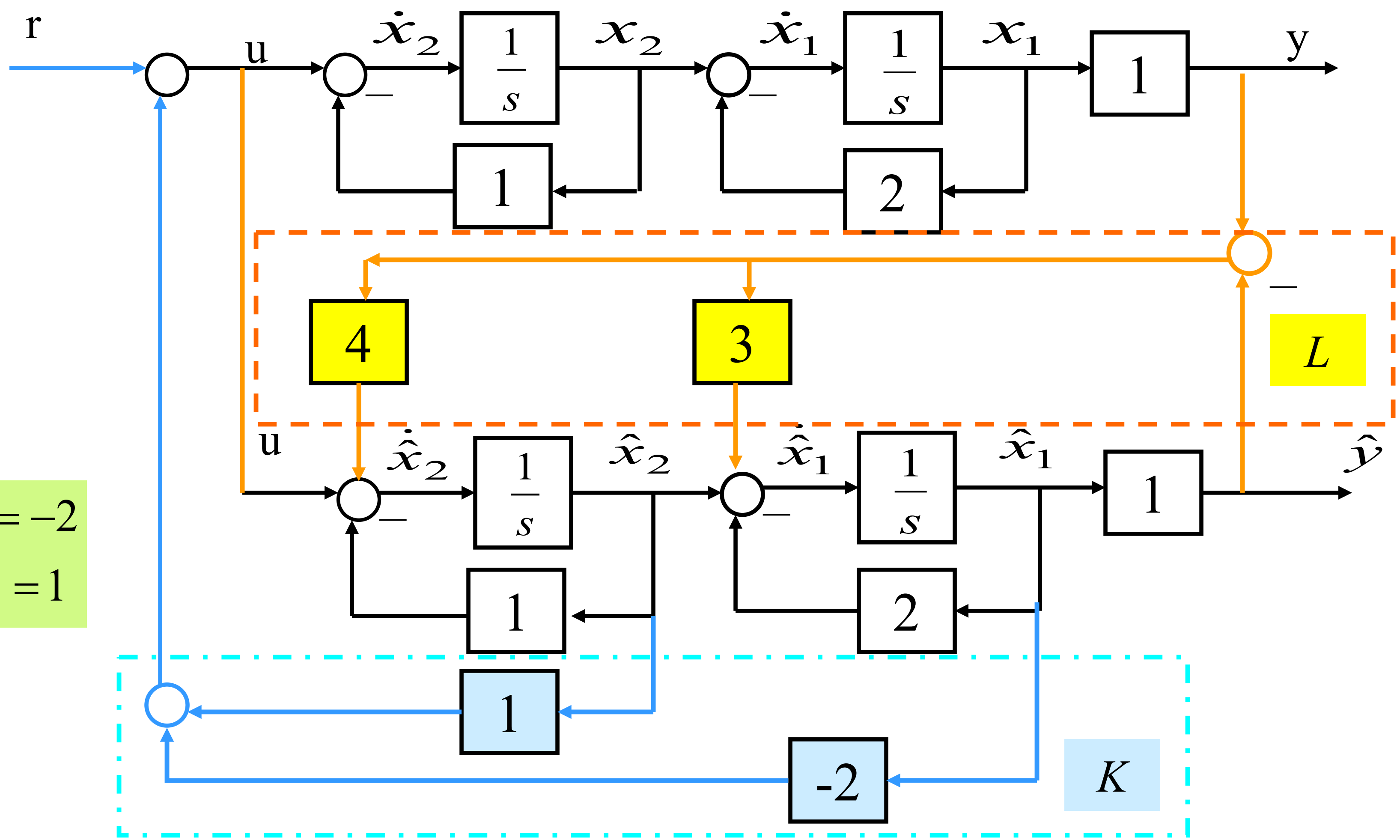
状态反馈矩阵K与状态观测阵L的实现见结构图。

分离原理

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Sigma:\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{cx}=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$



$$\boldsymbol{L}=\begin{cases} l_1=3\\ l_2=4\end{cases}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{cases} k_1=-2\\ k_2=1\end{cases}$$

问题：能否利用可以测量到的状态，而不是估计出全部状态？

分离原理

例8-5-5 系统表示为
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=x_1$$

状态反馈[$A+BK$]将极点配置到 -5 和 -6，其中K=[-5 -3]。

闭环状态方程为
$$\Sigma_{cl:}\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Br}=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ -5 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{r}$$

对 r(t)=1(t),
$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

系统的状态响应为：
$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{-6t}\\ \frac{1}{30}+\frac{9}{5}e^{-5t}-\frac{5}{6}e^{-6t}\end{bmatrix}$$

分离原理

例8-5-5 系统表示为
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=x_1$$

若状态不可测量（假设为 x_2），采用观测器方法，可以得到如下结果

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1(t)\\ \dot{\tilde{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}\right]\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\left\{\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16\\ 56/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right\}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-17 & 3\\ -56/3 & -2\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

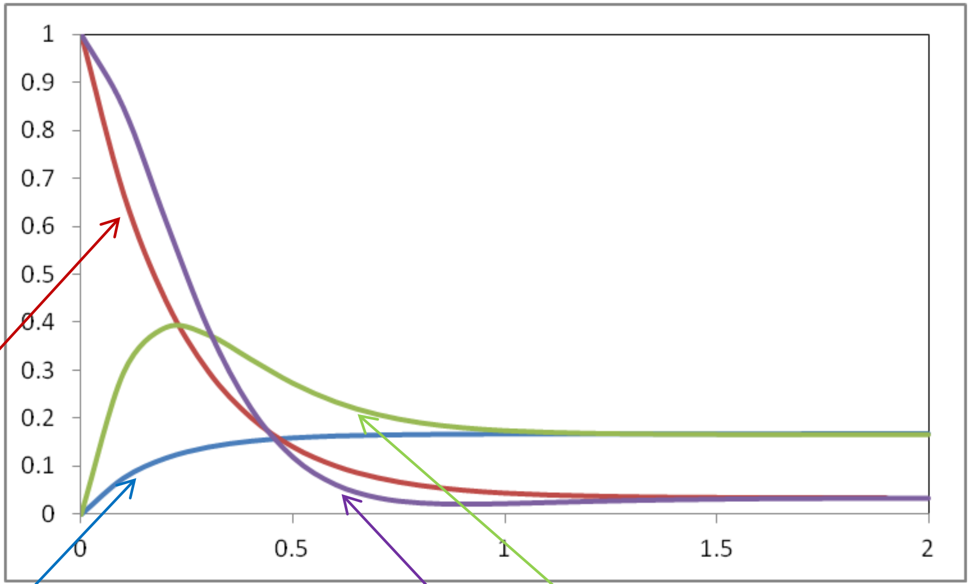
则组合系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 5 & 3\\ -5 & -5 & 5 & 3\\ 0 & 0 & -17 & 3\\ 0 & 0 & -\dfrac{56}{3} & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \tilde{\boldsymbol{x}}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{r}(t)$$

分离原理

例8-5-5

对于 r(t)=1(t), $x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\hat{x}(0)=\begin{bmatrix}\hat{x}_1(0)\\\hat{x}_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\tilde{x}(0)=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1(0)\\\tilde{x}_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$



直接状态反馈的结果

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{-6t}\\ \frac{1}{30}+\frac{9}{5}e^{-5t}-\frac{5}{6}e^{-6t}\end{bmatrix}$$

状态观测+状态反馈的结果

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}+\frac{23}{6}e^{-6t}-13e^{-9t}+9e^{-10t}\\ \frac{1}{30}-\frac{42}{5}e^{-5t}+\frac{115}{6}e^{-6t}-26e^{-9t}+\frac{81}{5}e^{-10t}\end{bmatrix}$$

系统状态观测器

- 基本思想
- 全维状态观测器
- 分离原理
- 降维状态观测器

降维状态观测器

基本概念

- 设计状态观测器的目的

  由可以得到的输入输出估计出状态，用以分析与设计控制系统

考虑线性系统 Σ：
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

系统中的状态多少总会有一些是可测的，或可用y直接计算得到，

问题：可否利用这些状态信息？

（1）全维状态观测器：未利用，需要估计出所有的状态（n维）

（2）降维观测器：若rank[C]=m，则 y 与 m个 x之间不是独立的，可利用这m个状态信息，设计观测器就只需要估计 [n-m]个状态

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_m \\ \hat{x}_{n-m} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{——}y\text{的线性组合} \\ \text{——估计值，由观测器得到。} \end{matrix}$$

降维状态观测器

基本概念

如果： $\mathrm{rank}[\boldsymbol{C}] = n \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$ 不需要设计观测器

一般： $\mathrm{rank}[\boldsymbol{C}] = m < n$

若 $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{C}_1 \quad 0]\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} m \\ n-m \end{array}$ $\Rightarrow$ $\left|\boldsymbol{C}_1\right|_{m维} \neq 0$ $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{X}_2$ 由观测器估计

如果 $\boldsymbol{C} \neq [\boldsymbol{C}_1 \quad 0]$ 形式

则需要构造变换矩阵Q，使得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{I}_m \quad \boldsymbol{0}]$

Q=？？？

降维状态观测器

推导变换矩阵Q

设 rank$[C]=m<n$, 为行满秩

构造

$$Q^{-1}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}m\\n-m\end{array}$$

$R_{(n-m)\times n}$ 是使Q^{-1}满秩的任意 $(n-m)\times n$ 的实常量矩阵

$$\because Q\equiv\begin{bmatrix}Q_{1(n\times m)} & Q_{2(n\times(n-m))}\end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}Q=\begin{bmatrix}C_{m\times n}\\R_{(n-m)\times n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_m & 0\\0 & I_{n-m}\end{bmatrix}$$

$$\therefore CQ=\begin{bmatrix}CQ_{1(n\times m)} & CQ_{2(n\times(n-m))}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_m & 0\end{bmatrix}$$

降维状态观测器

推导变换矩阵Q

例 8-5-6：已知输出矩阵 $C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ **构造Q阵。**

解： $\text{rank}[C]=2<n=3$, 为行满秩

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}\begin{matrix}m\\n-m\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$R_{1\times3}$是使Q^{-1}满秩的任意(3-2)×3 的实常量矩阵——非惟一

$$Q=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore CQ=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{2\times2}&0\end{bmatrix}$$

降维状态观测器

降维观测器设计思路

- 一般系统不满足 $C=[I_m \ \ 0]$ 的条件，引入变换矩阵Q，对原系统进行线性变换，即

令：$x = Q\bar{x}$

则：$\dot{\bar{x}} = Q^{-1}AQ\bar{x} + Q^{-1}Bu$

$y = CQ\bar{x} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}\bar{x}$

对系统进行分块：

$$\Sigma: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{x}_1 \text{ --}m \text{ 维} \end{cases}$$

经变换，观测器只需要估计$(n\text{-}m)$个状态

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} y \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array}$$

原系统需要估计的状态

$$\hat{x} = Q\hat{\bar{x}} = Q\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} y \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array}$$

降维状态观测器

(*n*-*m*)维观测器设计

$$\Sigma:\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}I_m & 0\end{bmatrix}\bar{x}=\bar{x}_1\end{cases}$$

$$\dot{\bar{x}}_1=\dot{y}=\bar{A}_{11}\underbrace{\bar{x}_1}_{=y}+\bar{A}_{12}\bar{x}_2+\bar{B}_1u$$

$$\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{A}_{21}\underbrace{\bar{x}_1}_{=y}+\bar{B}_2u$$

引入均为已知量的虚拟变量：

虚拟输入变量 $\bar{u}=\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u$

虚拟输出变量 $w=\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u$

得到关于 $\bar{x}_2$ 的(*n*-*m*) 维状态方程及输出方程

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{u}\\ w=\bar{A}_{12}\bar{x}_2\end{cases}$$

- 若(*n*-*m*)维系统 $\Sigma_2:\{\bar{A}_{22},\bar{A}_{12}\}$（相当于一般状态空间模型中的（*A*，*C*））能观，则可设计(*n*-*m*) 维降阶观测器

降维状态观测器

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{u}\\ w=\bar{A}_{12}\bar{x}_2\end{cases}$$

(*n*-*m*)维观测器设计

虚拟输入变量 $\bar{u}=\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u$

虚拟输出变量 $w=\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u$

- 定理3

$$\Sigma:\{A,C\}\text{能观}\Rightarrow\bar{\Sigma}:\{\bar{A},\bar{C}\}\text{能观}\Rightarrow\Sigma_2:\{\bar{A}_{22},\bar{A}_{12}\}\text{能观}$$

也即存在一个 (*n*-*m*) 维的状态观测器：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\bar{x}}}_2&=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2+\bar{L}w+\bar{u}\\&=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2+\bar{L}(\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u)+\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u\end{aligned}$$

不希望出现导数项！

再引入新的变量

$$z=\hat{\bar{x}}_2-\bar{L}y$$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2=(z+\bar{L}y)'=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2+\bar{L}(\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u)+\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u$$

$$\Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u+\{\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}\}y\\ \hat{\bar{x}}_2=z+\bar{L}y\end{cases}$$

降维状态观测器

$$\bar{\Sigma}_2:\begin{cases}\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{u}\\ w=\bar{A}_{12}\bar{x}_2\end{cases}$$

(*n*-*m*)维观测器设计

虚拟输入变量 $\bar{u}=\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u$

虚拟输出变量 $w=\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u$

$$z=\hat{\bar{x}}_2-\bar{L}y$$

$$\Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u+\{\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}\}y\\ \hat{\bar{x}}_2=z+\bar{L}y\end{cases}$$

$$令:\begin{cases}\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12}=F\\ \bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}=G\\ \bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1=H\end{cases}$$

$$\Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=Fz+Gy+Hu\\ \hat{\bar{x}}_2=z+\bar{L}y\end{cases}$$

$$\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}y\\ \bar{L}y+z\end{bmatrix} & \begin{array}{c}m\\ n-m\end{array}\end{array}$$

反变换回到原系统

$$\hat{x}=Q\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ \bar{L}y+z\end{bmatrix}$$

降维状态观测器

(*n*-*m*)维观测器设计示例

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ c=\begin{bmatrix}-1&1&1\end{bmatrix}$$

例 8-5-7：已知系统 $\{A, b, c\}$

问最小维状态观测器是几维系统？试设计极点均在－4的降维观测器，并画出结构图。

解：step 1: 计算能观矩阵，知系统一定能观。

$$\text{又}:\operatorname{rank}[c]=1$$

故，最小维状态观测器是n-m=3-1=2维。

step 2: 构造Q^{-1} 阵

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}=\left[\begin{array}{ccc}-1&1&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore CQ=\begin{bmatrix}-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}1&0&0\end{array}\right]$$

降维状态观测器

$$\Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u+\{\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}\}y\\ \hat{\bar{x}}_2=z+\bar{L}y\end{cases}$$

(*n*-*m*)维观测器设计示例

step 3: 计算变换后的系统 $\bar{\Sigma}:\{\bar{A},\bar{b}\}$

$$\bar{A}=Q^{-1}AQ=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 3 & -2\\ \hline 0 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 2\end{array}\right]\qquad \bar{b}=Q^{-1}b=\left[\begin{array}{c}1\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right]$$

step 4: 求变换后的观测器矩阵 $\bar{L}$

(1)期望极点的观测器特征方程：

$$\Delta_o^*(s)=(s+4)^2=s^2+8s+16$$

(2) 状态观测器特征方程

$$\Delta_o(s)=\left|sI-(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\right|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{l}_1\\ \bar{l}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}\right\}\right|$$

$$=s^2+(-3+3\bar{l}_1-2\bar{l}_2)s-6+8\bar{l}_2-14\bar{l}_1$$

$$\bar{L}=\begin{bmatrix}-33\\ -55\end{bmatrix}$$

step 5: 计算*F*，*H*，*G*，写出系统Σ_3

$$\begin{cases}\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12}=F\\ \bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}=G\\ \bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1=H\end{cases}$$

$$\Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=Fz+Gy+Hu\\ \hat{\bar{x}}_2=z+\bar{L}y\end{cases}$$

降维状态观测器

(*n*-*m*)维观测器设计示例

$$\hat{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z_1 - 33y \\ z_2 - 55y \end{bmatrix}$$

step 6: 给出原系统的估计值

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}\hat{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -33 & 1 & 0 \\ -55 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & 1 & 0 \\ -55 & 0 & 1 \\ 21 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

降维状态观测器

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z_1 - 33y \\ z_2 - 55y \end{bmatrix}$$

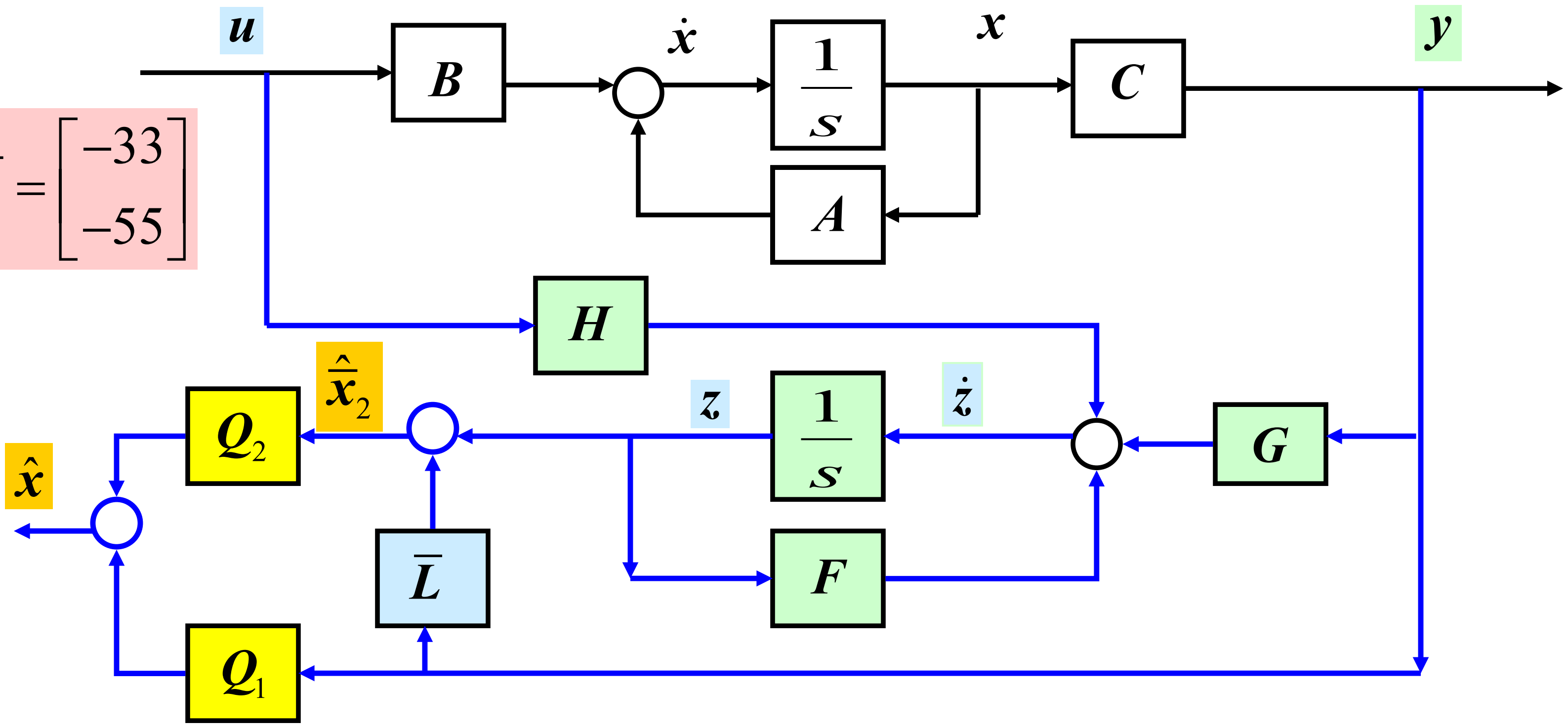
(*n-m*)维观测器设计示例

step 7: 给出状态估计的结构图

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \\ \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_2 = \boldsymbol{z} + \bar{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{y} \end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} -33 \\ -55 \end{bmatrix}$$



降维状态观测器

降维观测器小结

1）将原受控系统进行线性变换，以设计$(n\text{-}m)$维的降维观测器

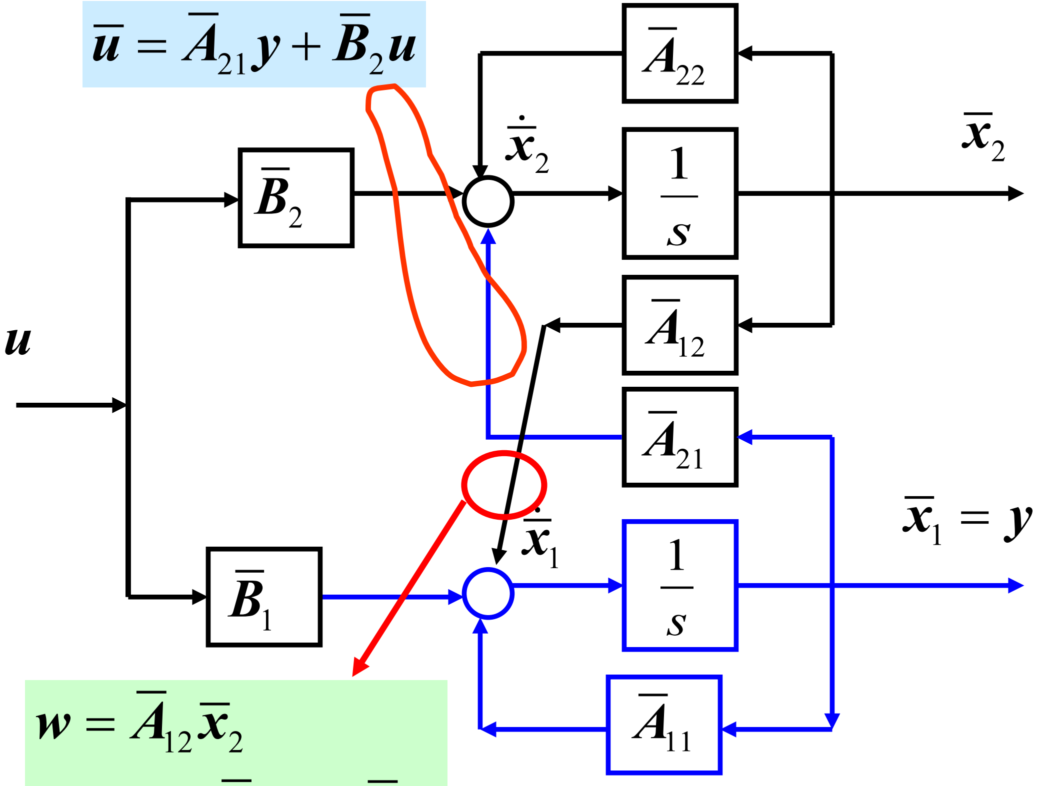
2）引入虚拟变量

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$x = Q\bar{x}$$

$$\bar{\Sigma}: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

$$\bar{u} = \bar{A}_{21} y + \bar{B}_2 u$$



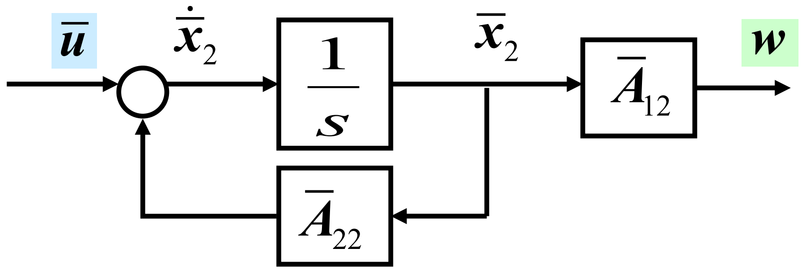
$$w = \bar{A}_{12}\bar{x}_2 = \dot{y} - \bar{A}_{11} y - \bar{B}_1 u$$

降维状态观测器

降维观测器小结

3）可用设计全维观测器的方法对图示子系统设计观测器

$$\bar{\Sigma}_2:\begin{cases}\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{u}\\ w=\bar{A}_{12}\bar{x}_2\end{cases}$$



$$\begin{aligned}\dot{\hat{\bar{x}}}_2&=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2+\bar{L}w+\bar{u}\\ &=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2+\bar{L}(\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u)+\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u\end{aligned}$$

不希望y的导数项出现，进行变量替代

再引入新的变量

$$z=\hat{\bar{x}}_2-\bar{L}y$$

$$\Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u+\{\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}\}y\\ \hat{\bar{x}}_2=z+\bar{L}y\end{cases}$$

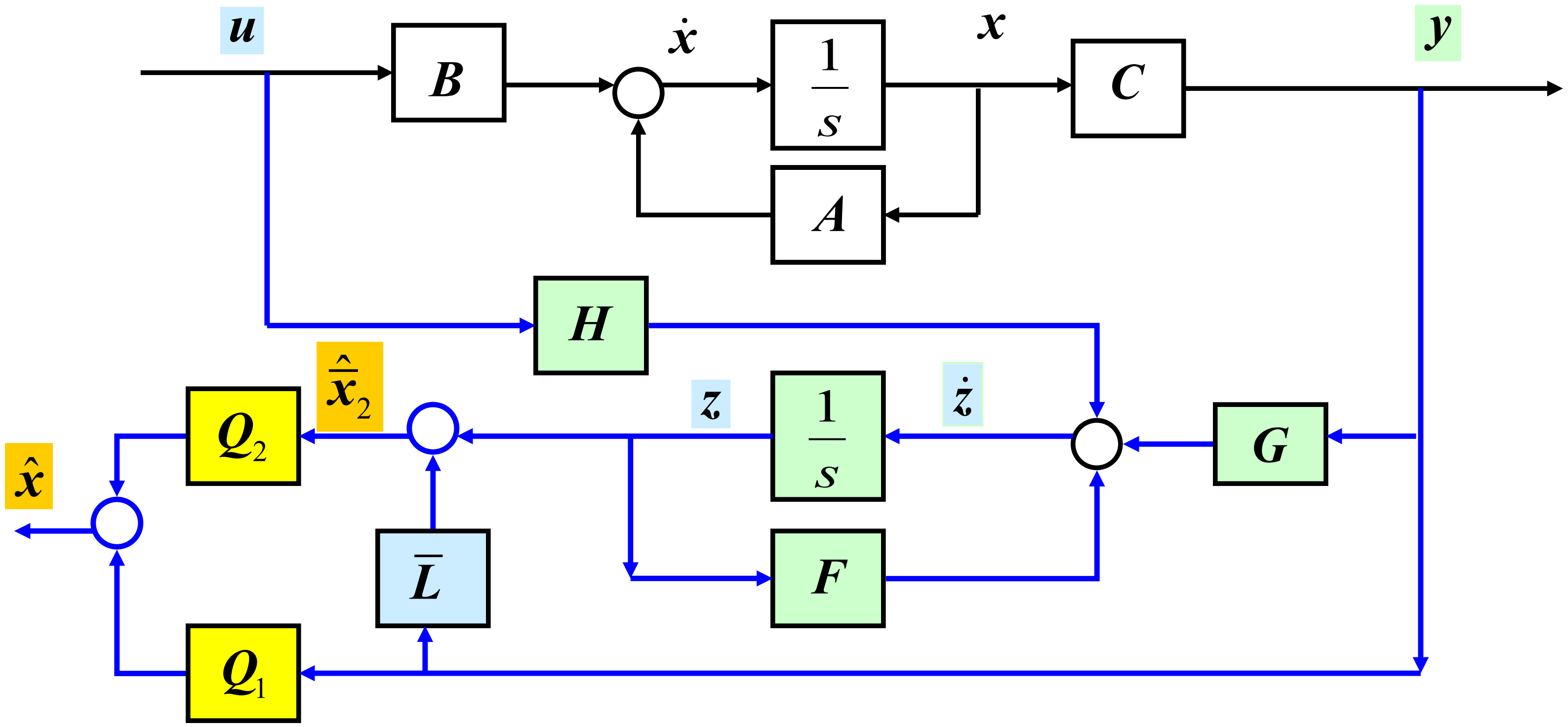
降维状态观测器

降维观测器小结

$$\Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=Fz+Gy+Hu\\ \hat{\bar{x}}_2=z+\bar{L}y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12}=F\\ \bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}=G\\ \bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1=H\end{cases}$$

$$\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ \bar{L}y+z\end{bmatrix}$$



降维状态观测器

降维观测器小结

4）反变换观测器得原系统下的状态估计值

$$\hat{x} = Q\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix}$$

问题 1：若已知系统输出矩阵是 $C=[\,0 \quad I_m\,]$或变换到这种形式？

同样可以推导，不同之处在于

$$\begin{aligned} \bar{A}_{22} &\Leftrightarrow \bar{A}_{11} \\ \bar{A}_{12} &\Leftrightarrow \bar{A}_{21} \\ \bar{B}_1 &\Leftrightarrow \bar{B}_2 \end{aligned}$$

问题 2：考虑已知系统是 2 维的单变量情况

系统状态观测器

- 基本思想
- 全维状态观测器
- 分离原理
- 降维状态观测器

第八章内容

- ✓ 回顾与简介
- ✓ 能控性和能观性
- ✓ 线性变换和标准型
- ✓ 系统的状态反馈
- ✓ 状态变量反馈：稳态误差分析
- ✓ 系统的状态观测

The End