# 现代控制理论
# Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录

# 第八章 Chapter 8

## 线性定常系统的状态空间分析法

# 主要内容

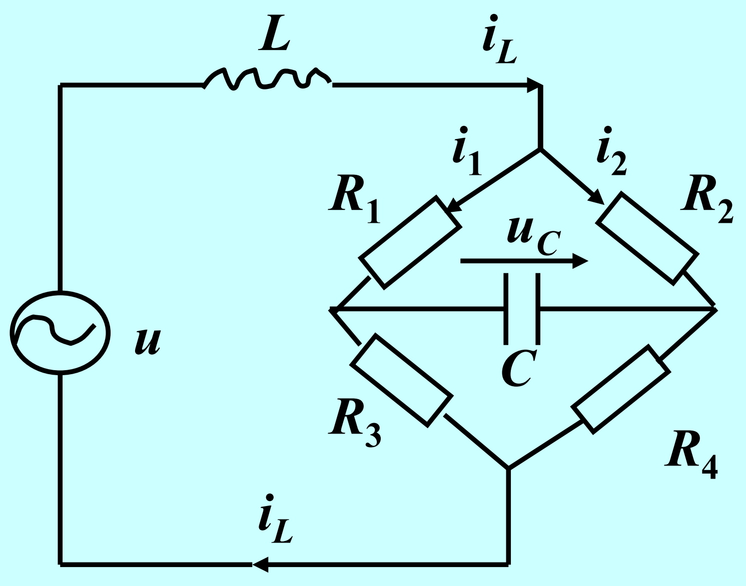
- 简介
- 能控性和能观性
- 线性变换和标准型
- 系统的状态反馈
- 系统的状态观测

# 能控性和能观性

- 物理概念
- 能控性定义与判定
- 能观性定义与判定
- 能控性&能观性与传递函数
- 离散系统的能控性与能观性
- 对偶原理

# 能控性和能观性：物理概念

**例1：考虑如图所示电路。有两种情况：**




$i_L=x_1, u_C=x_2, y=u_C$

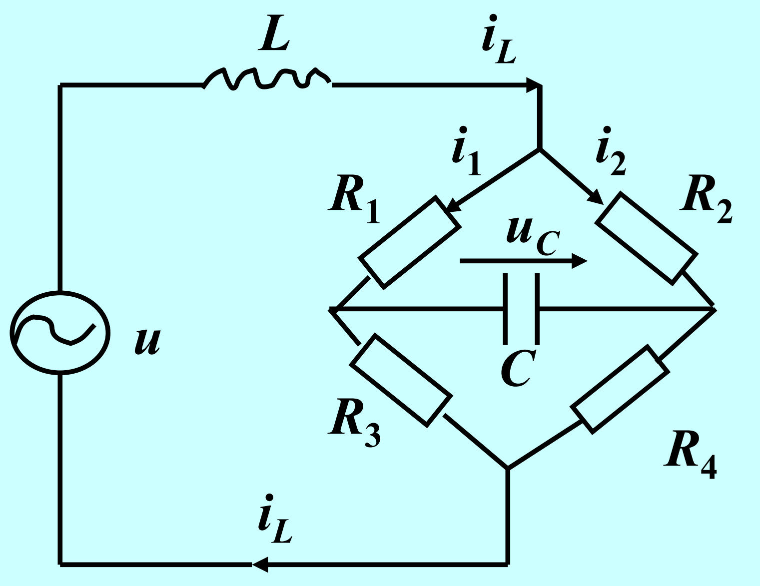
(1) 若 $R_1R_4 \neq R_2R_3$

输入 $u$ 控制所有的状态变量，也就是说选择 $u$ 使得对于任意初始时刻 $t_0$，在有限的时间内，将状态变量由每个初始状态 $x(t_0)$ 转移到任意的终止状态 $x(t_f)$，$t_f>t_0$。因此完全能控。

因为 $y=u_C$，并且 $u_C$ 与 $i_L$ 有关，因此系统是完全能观的。

# 能控性和能观性：物理概念

例1：考虑如图所示电路。有两种情况：




$i_L=x_1,\ u_C=x_2,\ y=u_C$

(2) 若 $R_1R_4=R_2R_3$

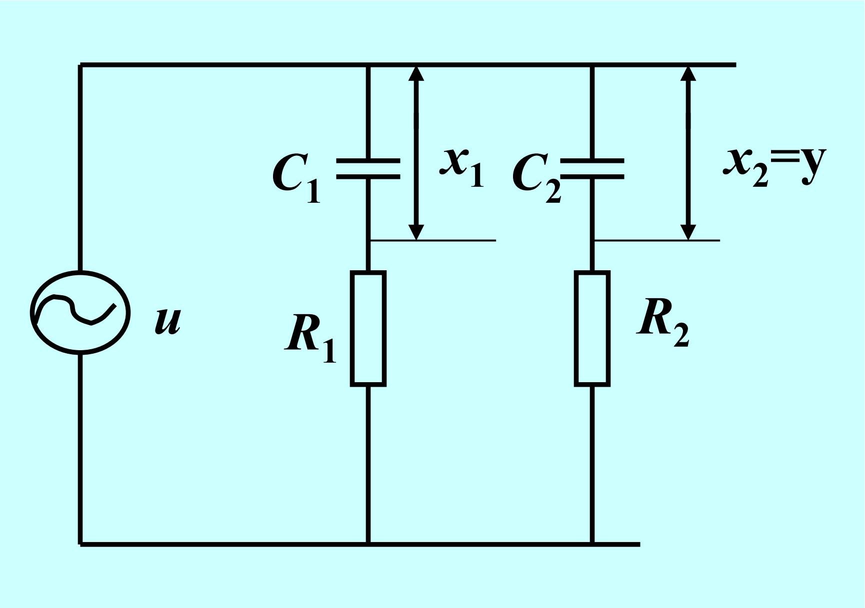
输入 $u$ 仅控制状态变量 $i_L$，这就意味着 $u$ 不能来控制 $u_C$ (在任意时刻$u_C$=0)。因此系统是不能控的。

$i_L$ 也不能由输出 $y$ 来决定，系统是不完全能观测的。

系统是不能控且不能观的。

# 能控性和能观性：物理概念

**例2 考虑如图所示电路系统：**




假设 $R_1 = R_2$ $C_1 = C_2$

$x_1(t_0) = x_2(t_0)$

输入 $u$ 仅仅能够使

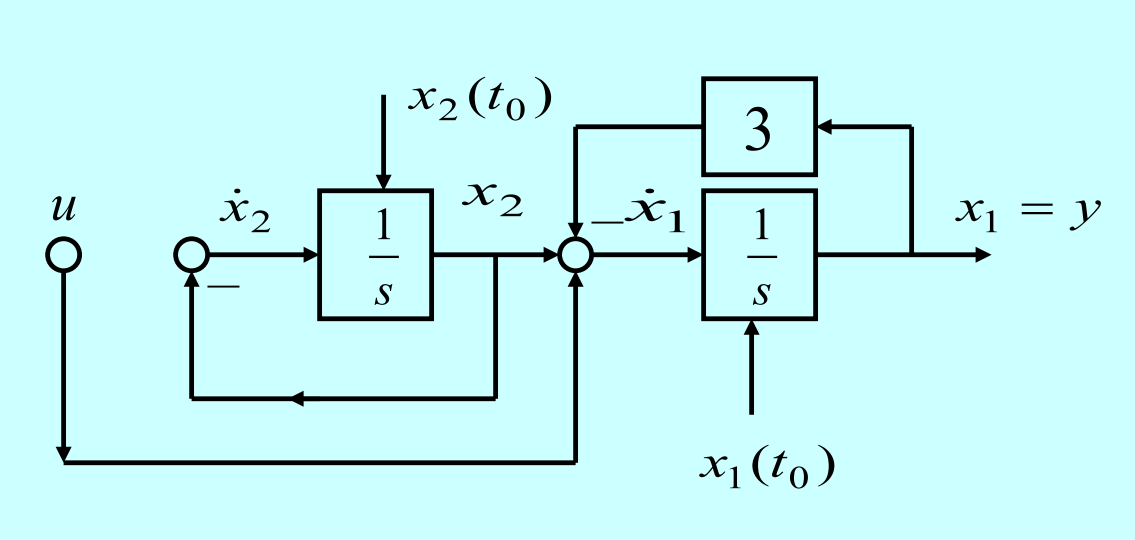
$x_1(t) = x_2(t)$

因此输入不能控制状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 到不同的值。因此，系统是不能控的。

但是 $y=x_1(t)=x_2(t)$，系统是完全能观测的。

# 能控性和能观性：物理概念

**例3 考虑如图所示电路系统：**

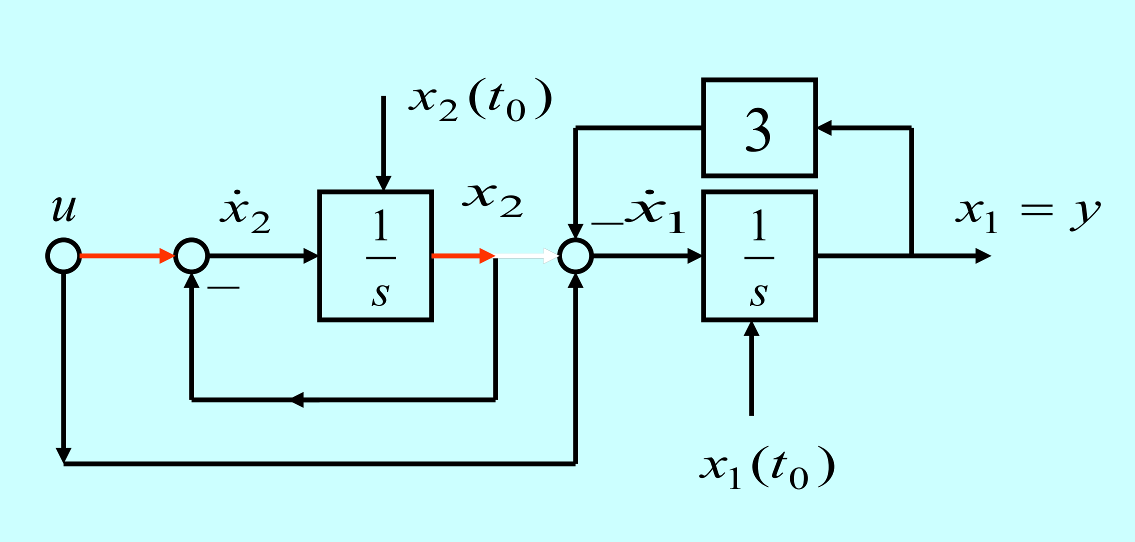



从图的左侧可以看出，输入 $u$ 只对状态变量 $x_1$有影响，这就意味着 $x_2$ 与 $u$ 没有关系。因此，系统是不能控的。

尽管 $y=x_1$，与 $x_2$ 没有关系，但是注意到 $x_2$ 影响 $x_1$，因此系统是能观测的。

# 能控性和能观性：物理概念

例3 考虑如图所示电路系统：




当系统改为 红线 所示系统时：

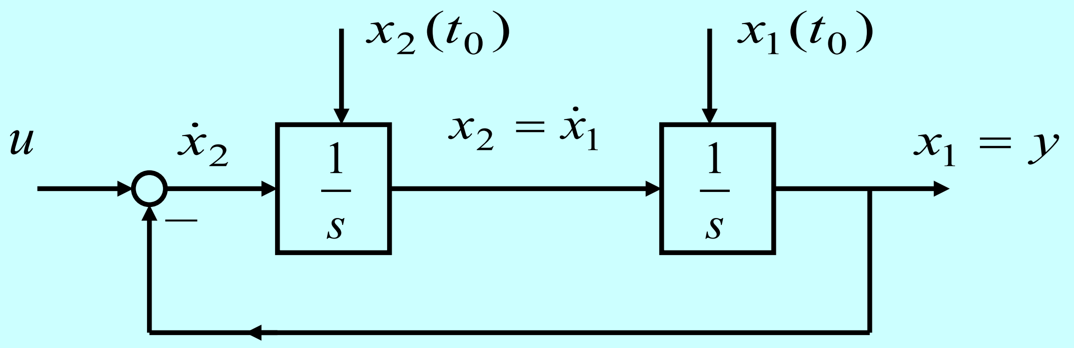
输入 $u$ 不仅影响状态 $x_1$，而且影响状态 $x_2$，这就是说系统是能控的。

很显然 $y=x_1$，与状态 $x_2$ 没有关系，因此系统是不能观测的。

# 能控性和能观性：物理概念

例3 考虑如图所示电路系统：

若系统改为右图所示：

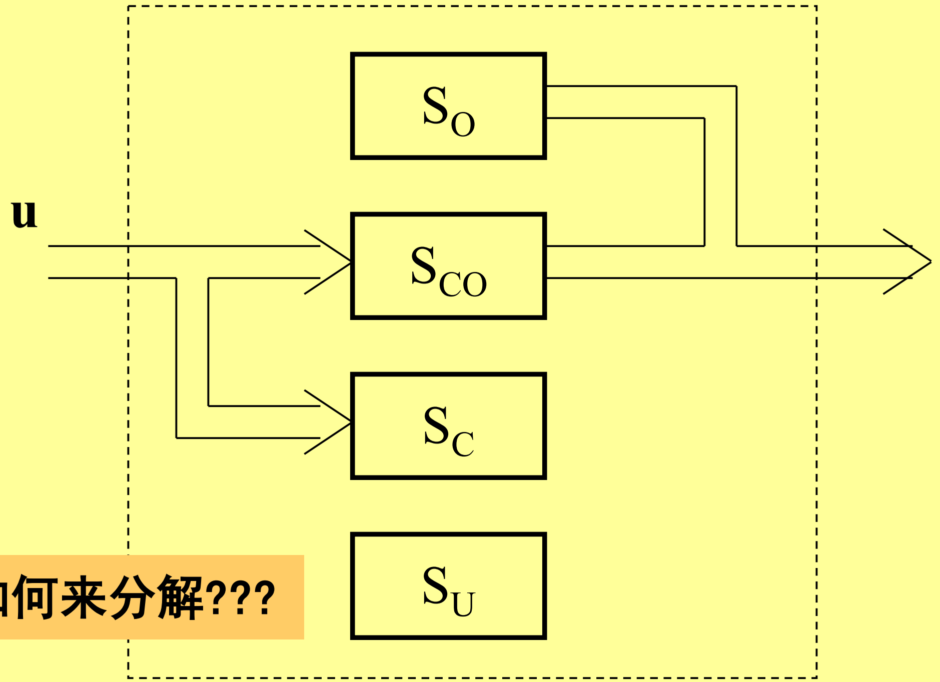



则系统是完全能控和能观测的。

是否有条件可以判断系统是能控或者能观测的？ → Yes ！

# 能控性和能观性：物理概念

能控性和能观测性的定义也可以由下图来描述。




一个系统的四种可能子系统的分解

只有子系统 $S_{CO}$ 满足

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

若整个系统是能控能观的，则系统的状态变量模型和传递函数阵模型是等价的，可以完全来表示这个系统。

# 能控性和能观性

- 物理概念
- 能控性定义与判定
- 能观性定义与判定
- 能控性&能观性与传递函数
- 离散系统的能控性与能观性
- 对偶原理

# 能控性和能观性：能控性定义

对于系统($A$, $B$, $C$, $D$)，如果对任意初始状态$\mathbf{x}(0)\in R^n$和任意最终状态 $\mathbf{x}_f\in R^n$，存在$t_f\in(0,\infty)$和控制作用$\mathbf{u}(t)$，使得$\mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_f$，称系统($A$, $B$, $C$, $D$)完全能控。

由状态方程的解：

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

系统的能控性仅取决于状态方程中的系统矩阵$A$和控制矩阵$B$，因此在讨论能控性问题时，可用($A$, $B$)表示系统。

在能控性中，重要的是存在u(t)可使初始状态向量转移到目标状态向量，对状态向量转移的状态轨迹并不加以关注和规定。

完全能控的系统能在状态空间中任意两点间转移的性质，对于达到控制的目的非常重要。

# 能控性和能观性：能控性判定

如何来判定一个系统是完全能控的？

对于

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

设 $t_0$=0, 以及 终态向量 $\mathbf{x}(t_f)=0$

$$0=e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}(0)+\int_0^{t_f}e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

或

$$\mathbf{x}(0)_{n\times 1}=-\int_0^{t_f}[e^{-\mathbf{A}\tau}]_{n\times n}B_{n\times r}\mathbf{u}(\tau)_{r\times 1}d\tau$$

??—关键!?

对于线性系统，问题等效于求解 n 个代数方程。若有解，即意味着可以找到 u 使得任意的x(0)在有限的时间内到达原点，也即系统为能控的。否则系统为不能控。

# 能控性和能观性：能控性判定

$$\mathbf{x}(0)_{n\times 1} = -\int_0^{t_f} [e^{-\mathbf{A}\tau}]_{n\times n} B_{n\times r}\mathbf{u}(\tau)_{r\times 1} d\tau$$

**凯莱—哈密顿定理：若n阶矩阵A的特征多项式为** $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0$

**则：** $f(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_1 A + a_0 I = 0$

**推论1：矩阵A的m次幂(m>=n)可表示为A的n-1阶多项式**

$$A^m = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k，\quad m \ge n$$

当$m = n$时，成立 $A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I$

假设$m = i \ge n$时成立，即$A^i = \sum_{k=0}^{n-1} b_k A^k$

$$m = i+1\text{时, 有}\quad A^{i+1} = A(b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I)$$

$$= b_{n-1}A^n + \cdots + b_1 A^2 + b_0 A$$

$$= b_{n-1}(-a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I) + \cdots + b_1 A^2 + b_0 A = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k$$

**推论2：** 矩阵指数$e^{-A\tau}$可表示为$A$的$n-1$阶多项式

$$e^{-A\tau} = I - A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} - \frac{A^3\tau^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(\tau) A^k$$

# 能控性和能观性：能控性判定

$$\mathbf{x}(0)=-\int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=-\int_0^{t_f}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k(\tau)A^kB\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{t_f}\gamma_k(\tau)A^kB\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}A^kB\int_0^{t_f}\gamma_k(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

记$\beta_k=\int_0^{t_f}\gamma_k(\tau)u(\tau)d\tau$，则$x(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}A^kB\beta_k=-\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}$

$\forall x(0)\in R^n$都有$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$满足上面方程组的充要条件是

$$\text{rank}\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=n$$

# 能控性和能观性：能控性判定

## 能控性条件

(A,B)完全能控的充要条件：*能控性矩阵* $Q_C$ 满足

$$\mathrm{rank}Q_C = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \qquad (*)$$

对于 单输入系统 来说，矩阵 B 是一个向量，可写为b，矩阵$Q_C$的维数为 n×n。多输入系统的$Q_C$的维数？

## 能控标准型

若一个 SISO 系统 是能控标准型，也就是说系统矩阵 A 具有相伴型（友矩阵），并且控制向量 b=[0 0 • • •1]$^T$，那么 能控性矩阵 $Q_C$ 是满秩 $n$ 的，没有必要进行能控性验证。

**若一个系统是能控的，则它总能够转化为能控标准型。**

# 能控性和能观性：能控性判定

## 对角标准型

若系统没有重复的极点($\lambda_i \neq \lambda_j$)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

设 x=Tz　　对角化

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \Lambda\mathbf{z} + \mathbf{B}'\mathbf{u}$$

模态的能控性判别矩阵

其中 Λ 为对角标准型，其模态是解耦的，即每个状态$z_i$ 代表一个模态，并且可以受输入u(t)的直接影响（仅当 $B'=T^{-1}B$ 没有元素都为0的行）。

对于 没有重复极点的系统，总是可以将其转换为对角标准型，因此，当$B'=T^{-1}B$ 没有全为零的行时，系统是完全能控的。

当矩阵对 (A,B) 不完全能控，则可以通过变换状态方程使系统矩阵为对角型，从而确定不能控部分。

控制矩阵$B'=T^{-1}B$ 中出现零行表明对应的模态（mode）是不能控的。

# 能控性和能观性：能控性判定

## PBH检验法

**PBH秩判据I&II：** 线性定常连续系统完全能控的充分必要条件是：对矩阵$A$的所有特征值$\lambda_i$（$i$=1,…,$n$），有 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda_i I - A & B\end{bmatrix} = n$

或 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}sI - A & B\end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in$ 复数域S

**PBH秩向量判据：** 线性定常连续系统完全能控的充分必要条件是：不存在与 $B$ 的所有列正交的 $A$的左特征向量 $p$，即

$$\begin{cases} p^T A = \lambda p^T \\ p^T B = 0 \end{cases}$$ 只有零解

# 能控性和能观性：能控性判定举例

例：证明能控标准型是完全能控的。

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

用PBH秩判据II $\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}=n, \quad \forall s\in$ 复数域S

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A & b \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s+a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}=n$$

因此，系统完全能控

# 能控性和能观性：能控性判定举例

**例 8-2-1** 系统表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

判断系统是否能控？

**解：** 能控性矩阵的秩可以表示为

$$\operatorname{rank} Q_C = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\det Q_c = \det[b \quad Ab] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

因此系统是 不完全能控的。

# 能控性和能观性：能控性判定举例

**例 8-2-2** 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

判断系统是否能控？

**解：** 能控性矩阵的秩可以表示为

$$\mathrm{rank}Q_C=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=2$$

$$\det Q_c=\det[b \quad Ab]=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0$$

因此系统 **是完全能控的。**

# 能控性和能观性：能控性判定举例

**例 8-2-3** 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

判断系统是否能控？

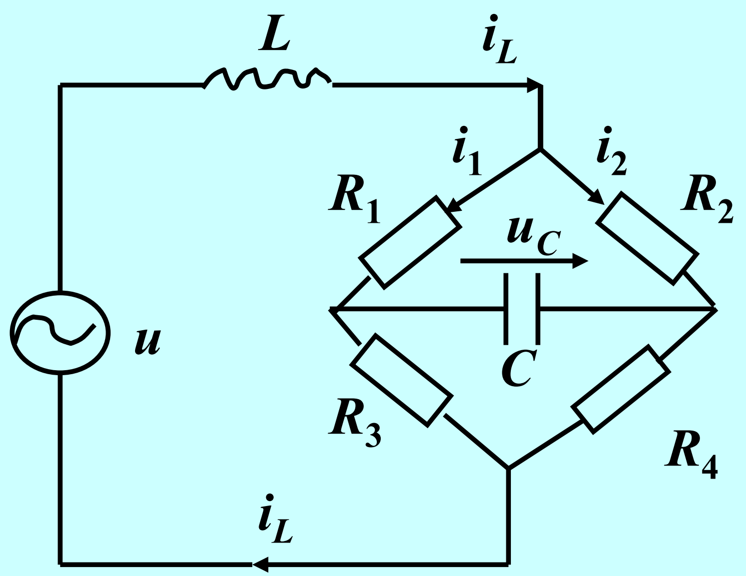
**解：** 能控性矩阵的秩可以表示为

$$\operatorname{rank} Q_C=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2&1&3&2&5&4\\1&1&2&2&4&4\\-1&-1&-2&-2&-4&-4\end{bmatrix}=2<3$$

因此系统是 **不完全能控的**。

# 能控性和能观性：能控性判定举例

**例 8-2-4** 考虑如图所示电路系统：




$i_L = x_1,\ u_C = x_2,\ y = u_C$

图中： $x_1 = i_L,\ x_2 = u_c,\ y = x_2$

$$Let: R_{12} = R_1 + R_2; R_{34} = R_3 + R_4$$

根据电路原理

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_{12}} + \frac{R_3R_4}{R_{34}}\right)x_1 + \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_{12}} - \frac{R_3}{R_{34}}\right)x_2 + \frac{1}{L}u$$

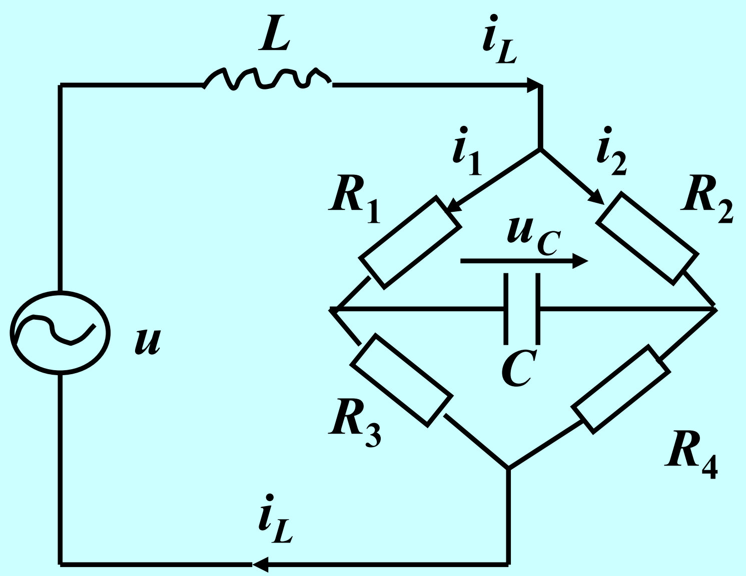
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_{12}} - \frac{R_4}{R_{34}}\right)x_1 - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}\right)x_2$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_{12}} + \frac{R_3R_4}{R_{34}}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_{12}} - \frac{R_3}{R_{34}}\right) \\ \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_{12}} - \frac{R_4}{R_{34}}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}\right) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

# 能控性和能观性：能控性判定举例

**例 8-2-4** 考虑如图所示电路系统，有两种情况：

$Let: R_{12}=R_1+R_2; R_{34}=R_3+R_4$




$i_L=x_1, u_C=x_2, y=u_C$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_{12}}+\frac{R_3R_4}{R_{34}}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_{12}}-\frac{R_3}{R_{34}}\right) \\ \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_{12}}-\frac{R_4}{R_{34}}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{34}}\right) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}Q_C=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L^2}\left(\frac{R_1R_2}{R_{12}}+\frac{R_3R_4}{R_{34}}\right) \\ 0 & -\frac{1}{LC}\left(\frac{R_4}{R_{34}}-\frac{R_2}{R_{12}}\right) \end{bmatrix}$$

(1) 若 $R_1R_4 \neq R_2R_3$

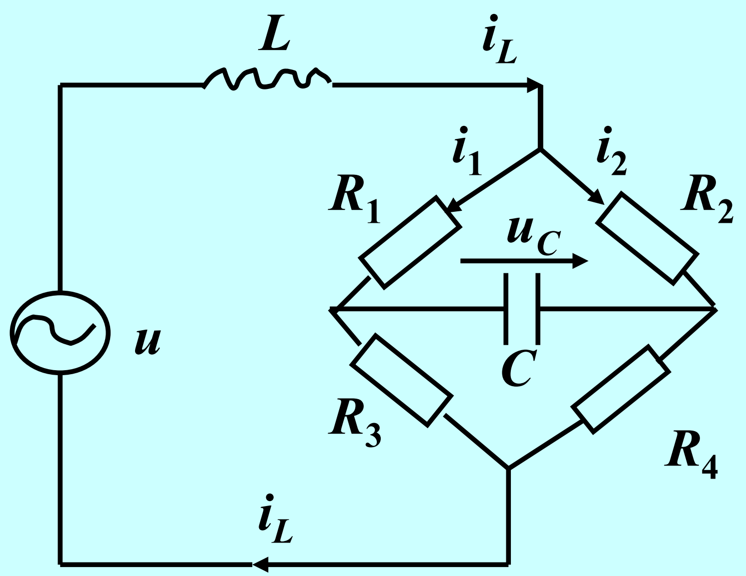
$$\frac{R_4}{R_{34}} \neq \frac{R_2}{R_{12}}$$

$\mathrm{rank}Q_C=2=n$ 系统完全能控

# 能控性和能观性：能控性判定举例

**例 8-2-4** 考虑如图所示电路系统，有两种情况：

$$Let: R_{12} = R_1 + R_2; R_{34} = R_3 + R_4$$




$i_L = x_1, u_C = x_2, y = u_C$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(\frac{R_1R_2}{R_{12}} + \frac{R_3R_4}{R_{34}}) & \frac{1}{L}(\frac{R_1}{R_{12}} - \frac{R_3}{R_{34}}) \\ \frac{1}{C}(\frac{R_2}{R_{12}} - \frac{R_4}{R_{34}}) & -\frac{1}{C}(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}Q_C = \text{rank}\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$$

$$= \text{rank}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L^2}(\frac{R_1R_2}{R_{12}} + \frac{R_3R_4}{R_{34}}) \\ 0 & -\frac{1}{LC}(\frac{R_4}{R_{34}} - \frac{R_2}{R_{12}}) \end{bmatrix}$$

(2) 若 $R_1R_4 = R_2R_3$

$$\frac{R_4}{R_{34}} = \frac{R_2}{R_{12}}$$

$$\text{rank}Q_C = 1 < n$$

系统不能控

# 能控性和能观性：输出能控性

- **输出能控性**，其实它是与状态能控性完全无关，仅是当需要控制输出量时，借用了状态能控性的概念。

- **输出能控性定义：**在有限的时间间隔$t \in [t_0, t_f]$, 存在无约束的分段连续控制函数 $u(t)$，能使任意初始输出 $y(t_0)$ 转移至任意最终输出$y(t_f)$，则称该系统是输出完全能控的，简称输出能控。

**输出能控性矩阵：**

$$S_o = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix}$$

**输出能控的充要条件（设输出变量数为$q$）：**

$$\mathrm{rank} S_o = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix} = q$$

# 能控性和能观性

- 物理概念
- 能控性定义与判定
- 能观性定义与判定
- 能控性&能观性与传递函数
- 离散系统的能控性与能观性
- 对偶原理

# 能控性和能观性：能观性定义

对于系统$(A, B, C, D)$，如果存在$t_f \in (0,\infty)$，根据$[0, t_f]$间的输出$y(t)$和控制作用$u(t)$能确定出初始状态$x(0)$，称系统$(A, B, C, D)$完全能观。

- 确定了$x(0)$，则可由 $x(t) = e^{At}x(0) + \int_o^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ 确定$[0, t_f]$间的$x(t)$。

- 完全能观的系统能即时得到状态向量在状态空间中的位置，这一性质对于达到控制的目的也非常重要。

- 由于状态空间表达式 $\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$ 中矩阵$A$、$B$、$C$、$D$和$u(t)$已知，状态方程和输出方程的最后两项可计算，因此，讨论完全能观性条件时，不妨设$u(t)=0$，可用$(A,C)$表示系统。

# 能控性和能观性：能观性判定

只考虑零输入系统： $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}; \ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$

易知，其输出向量为： $\boldsymbol{y}(t) = Ce^{At}\boldsymbol{x}(0)$

将 $e^{At}$ 写为$A$的有限项的形式，即 $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$

因而 $\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k \boldsymbol{x}(0)$

或 $\boldsymbol{y}(t) = \alpha_0(t)C\boldsymbol{x}(0) + \alpha_1(t)CA\boldsymbol{x}(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}\boldsymbol{x}(0)$

显然，如果系统是能观测的，那么在 $t_0 \le t \le t_1$ 时间间隔内，由输出$\boldsymbol{y}(t)$，就可由上式唯一地确定出$\boldsymbol{x}(0)$。 可以证明，上式有解的充要条件是能观性矩阵的秩为$n$。

$$\mathrm{rank}Q_O = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

# 能控性和能观性：能观性判定

## 能观性条件

$(A,C)$完全能观的充要条件是能观性矩阵满足：

$$\operatorname{rank}Q_O=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix}=n$$

或

$$\operatorname{rank}\ Q_O=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T\end{bmatrix}^T=n$$

对于单输入单输出系统，矩阵 $C$ 是一维行向量，可以表示为 $c$，且能观性矩阵的维数为 $n\times n$。

# 能控性和能观性：能观性判定

## 能观标准型

若 SISO 系统是 能观标准型形式， 即系统矩阵$A$ 是相伴阵（友矩阵）的 转置，且观测行矩阵c=[0 0 • • • 1]，那么 能观性矩阵 $Q_o$ 满秩（rank$Q_o$= $n$），不需要进行能观性判定。

若系统完全能观， 则可将其转换为能观标准型。

# 能控性和能观性：能观性判定

## 对角标准型

当系统没有重复极点时，采用对角化方法，

$\dot{x} = Ax + Bu$　　$y = Cx$

令 x=Tz　　对角化

$\dot{z} = \Lambda z + B'u$　　$y = Cx = CTz = C'z$

模态的能观性判别矩阵

其中矩阵 Λ 是对角标准型，若 C’=CT 的某一列全为零，则对应的这个模态与任何输出都没有关系，系统不能观测。

对于没有重复极点的系统，总可以将其转换为对角标准型，则当C’ 没有全为零的列，则系统能观测。

当矩阵对 (A, C) 不完全能观测时，可以通过转换状态和输出方程，使系统矩阵是对角标准型，从而获得不能观的模态。

C’=CT 全为零的列表明相应的状态是不能观测的。

# 能控性和能观性：能观性判定

## PBH检验法

**PBH秩判据I&II**：$(A,C)$ 完全能观的充分必要条件是对矩阵A的所有特征值$\lambda_i$（$i=1,\ldots,n$）

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n$$

或对任意复数$s$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n$$

**PBH秩向量判据**：$(A,C)$ 完全能观的充分必要条件是$A$不存在与 $C$ 的所有行正交的特征向量，即

$$\begin{cases} Ap = \lambda p^T \\ Cp = 0 \end{cases}$$

只有零解

# 能控性和能观性：能观性判定举例

**例：证明能观标准型是完全能观的。**

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用PBH秩判据II

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} c \\ sI-A \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ s & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & s & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & s+a_{n-1} \end{bmatrix}=n$$

因此，系统完全能观

# 能控性和能观性：能观性判定举例

**例 8-2-5** 系统表示为

判断系统是否能控和能观？

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

**解：** 能控性矩阵 & 能观性矩阵 为

$$\mathrm{rank}Q_C=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=2$$

$$\mathrm{rank}Q_O=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=2$$

因此系统是 完全能控和能观。

# 能控性和能观性：能观性判定举例

**例 8-2-6** 系统表示为
$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4&5&1\end{bmatrix}$$

判断系统是否能控和能观？

**解:**

$$\mathrm{rank}Q_C=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}B&AB&A^2B\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-6\\1&-6&25\end{bmatrix}=3$$

$$\mathrm{rank}Q_O=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}4&5&1\\-6&-7&-1\\6&5&-1\end{bmatrix}=2$$

因此系统 完全能控、不完全能观。

# 能控性和能观性

- 物理概念
- 能控性定义与判定
- 能观性定义与判定
- 能控性&能观性与传递函数
- 离散系统的能控性与能观性
- 对偶原理

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

SISO系统状态完全能控、能观的条件也可用传递函数描述：状态完全能控能观的充要条件是在由($A$, $B$, $c$, $d$)计算传递函数的过程中不出现零极点相消现象。如果发生相消，可能出现下列三种情况之一：

（1）系统不能控不能观；

（2）系统不能控；

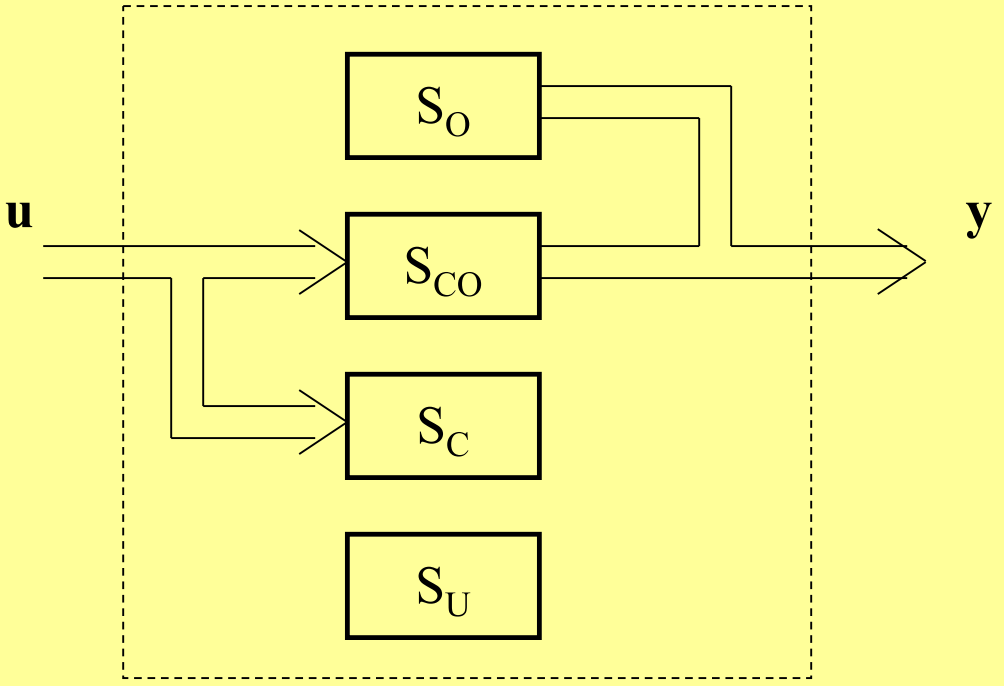
（3）系统不能观。

所以，对于已知的SISO系统，可以根据传递函数判别系统是否完全能控能观。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

如图所示，只有子系统 $S_{CO}$ 满足传递函数的定义

$$Y(s) = G(s)U(s)$$




一个系统的四种可能子系统的分解

因此，对于一个 完全能控能观 SISO 系统，传递函数中没有零极点对消情况。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

描述一个SISO动态系统的状态方程不是惟一的，即实现问题。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$G(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c} \cdot adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

n 阶多项式

SISO系统实现{A，b，c} 称为 G(s) 的最小实现，当且仅当N(s) 与 D(s) 无公因子。

G(s) 的 n 阶实现{A，b，c} 能控能观的充要条件是G(s)＝N(s)/D(s)无公因子，即无零极点对消现象。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

实现问题：

已知传递函数模型$G(s)$，求一个状态空间模型

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

使$c(sI - A)^{-1}b + d = G(s)$

最小实现问题：

已知传递函数模型$G(s)$，求一个完全能控、完全能观的状态空间模型

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

使$c(sI - A)^{-1}b + d = G(s)$

在实现问题中，状态空间模型的阶数大于或等于传递函数模型的阶数

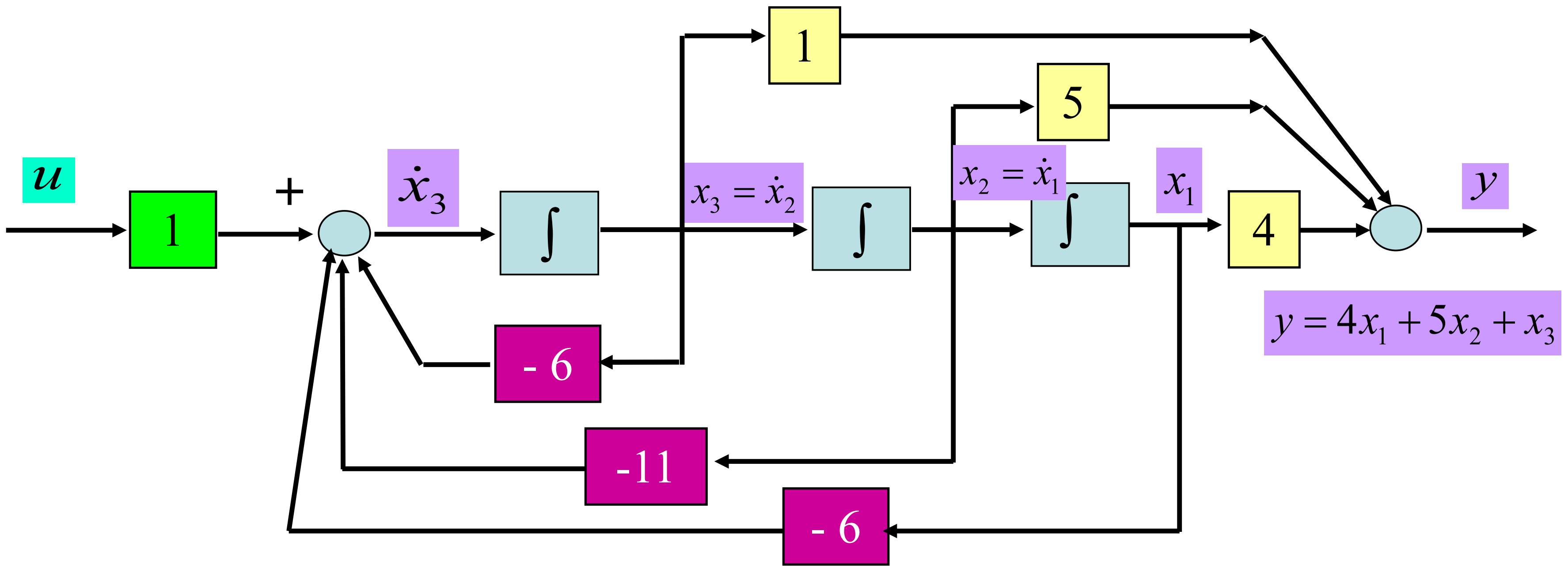
在最小实现问题中，状态空间模型的阶数等于传递函数模型的阶数

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

**例 8-2-6-1** 系统表示为

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4&5&1\end{bmatrix}$$

判断系统是否能控和能观？



# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

**例 8-2-6-1** 系统表示为

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4&5&1\end{bmatrix}$$

判断系统是否能控和能观？

**解：** 方程为能控标准型，完全能控。从状态空间模型计算传递函数：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B=\frac{\cancel{(s+1)}(s+4)}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)}$$

出现零极点对消，因此，系统完全能控但不完全能观。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

例 8-2-6-2 系统表示为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

判断系统是否能控和能观？

解：若系统表示为能观标准型形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\ 1&0&-11\\ 0&1&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 1\end{bmatrix}u;\quad y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

那么，如果如上述实现，则系统是 不能控但是能观的。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

**例 8-2-7-1** 系统表示为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+2.5}{(s+2.5)(s-1)}$$

判断系统是否能控和能观？

**解：** 注意到传递函数分子与分母出现对消因子 (s+2.5)，只有 $\lambda=1$对应模态是能控能观的。

如果系统状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2.5 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}=x_1$$

$$\mathrm{rank}Q_C=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=1$$

$$\mathrm{rank}Q_O=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$$

如果如上述实现，则系统是 不能控但是能观的。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

例 8-2-7-2 系统表示为 $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+2.5}{(s+2.5)(s-1)}$$

判断系统是否能控和能观？

解： 若系统的状态方程为

能控标准型：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} 2.5 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

则系统是能控的。

$$\mathrm{rank}Q_O=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ 2.5 & 1 \end{bmatrix}=1$$

如果如上述实现，则系统是 能控但是不能观的。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

例 8-2-7-3 系统表示为 $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+2.5}{(s+2.5)(s-1)}$$

判断系统是否能控和能观？

解： 若系统状态方程为

能观标准型：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

则系统是 能观测的。

$$\operatorname{rank}Q_C=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=1$$

如果如上述实现，则系统是 不能控但是能观的。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

**例 8-2-7-4** 系统表示为 $$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+2.5}{(s+2.5)(s-1)}$$

判断系统是否能控和能观？

**解：** 若系统状态方程为

**对角标准型：**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

可以直接得出结论

如果如上述实现，则系统是 不能控且不能观的。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

例 8-2-8 系统表示为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$ $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

试求：(1) 特征值；(2) 传递函数 Y(s)/U(s)；(3) 系统是否能控 和/或 能观；(4) 将状态方程转换为对角标准型的转换矩阵 T； (5) 绘制基于对角标准型的系统仿真图。

解：(1)

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix} = (s+2)(s+1)$$

特征值： $\lambda_1$=-2 $\lambda_2$=-1。

(2)

$$\Phi'(s) = [sI - A]^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

解：

(2)

$$G(s)=c\Phi'(s)b=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ -1 & s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{(s+2)}$$

注意 有零极点对消因子 $s$+1，只有模态 $\lambda_1$=-2 是能控能观的。

(3)

$$\mathrm{rank}Q_c=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}=1$$

$$\mathrm{rank}Q_o=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=2$$

因此系统是 不完全能控 但能观。

# 能控性和能观性：能控能观性与传递函数

**解：** (4) 对角化矩阵

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix};\ \mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{z}}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{z}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{z}$$

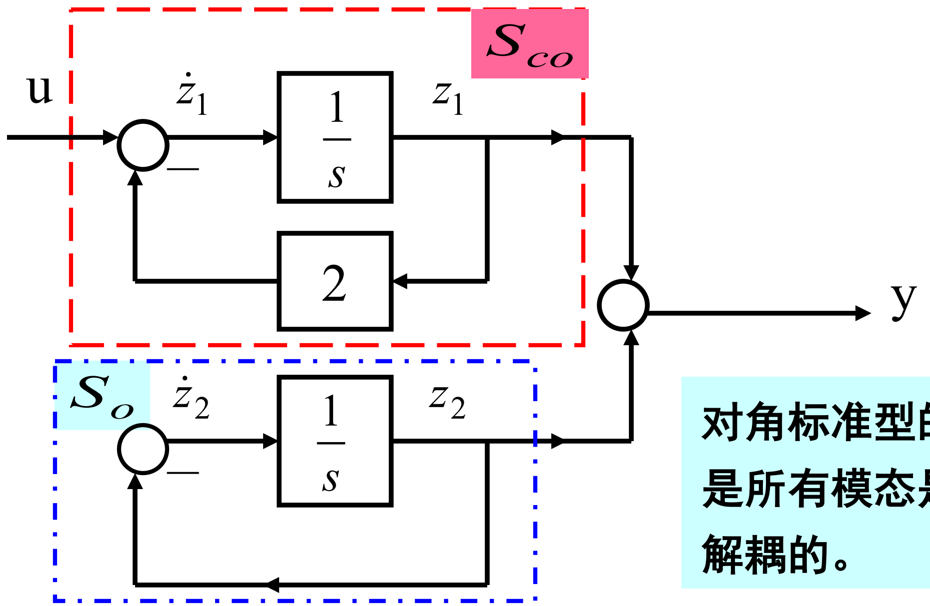
(5) 独立状态变量和输出方程

$$\dot{z}_1=-2z_1+u$$

$$\dot{z}_2=-z_2$$

$$y=z_1+z_2$$

$\lambda_2$=-1 是一个输入解耦零点，且系统是不能控的。




对角标准型的优点是所有模态是完全解耦的。

# 能控性和能观性

- 物理概念
- 能控性定义与判定
- 能观性定义与判定
- 能控性&能观性与传递函数
- 离散系统的能控性与能观性
- 对偶原理

# 能控性和能观性：离散系统的能控性与能观性

考虑离散系统：

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

**离散系统状态能控性的定义**：在有限时间间隔内，t ? [0, nT]，存在控制序列 $u(0)$, $u(1)$, …. , $u(n-1)$，能使系统从任意初态x(0) 转移至任意终态 x(n)，则称该系统是状态完全能控的，简称是能控的。

**离散系统状态能控性判别条件**：

$$\operatorname{rank} Q_C=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}=n$$

# 能控性和能观性：离散系统的能控性与能观性

考虑离散系统：

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

**离散系统状态能观性的定义：** 已知输入向量序列 $u(0), u(1), \ldots, u(n-1)$ 及有限采样时间内测量到的输出向量序列 $y(0), y(1), \ldots, y(n-1)$，能惟一确定任意初始状态向量x(0)，则称该系统是状态完全能观的，简称是能观的。能观性反映的是由输出确定状态 x(k) 的能力。

**离散系统状态能观性判别条件：**

$$\mathrm{rank}Q_O=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}=n$$

或

$$\mathrm{rank}Q_O=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C^T & G^TC^T & \cdots & (G^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}=n$$

# 能控性和能观性： 离散系统的能控性与能观性

**例 8-2-9-1** 系统表示为

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}u(k)$$

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}_i\mathbf{x}(k)(i=1,2)$$

其中

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix},\mathbf{H}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix},\mathbf{C}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

**判断**系统对于 $\mathrm{C}_1$ 是否能观？

$$Q_o=\begin{bmatrix}c^T & G^Tc^T & (G^T)^2c^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\det Q_o=\det\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=3$$

对于 $\mathrm{C}_1$，系统是能观的。

当 $t=k$

$$y(k)=x_2(k)$$

当 $t=k+1$

$$y(k+1)=x_2(k+1)=-2x_2(k)+x_3(k)$$

当 $t=k+2$

$$y(k+2)=x_2(k+2)=4x_2(k)+3x_1(k)$$

3 步之后，所有 $\mathrm{x}(\mathrm{k})$ 能观。

# 能控性和能观性：离散系统的能控性与能观性

例 8-2-9-2 系统表示为

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}u(k)$$

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}_i\mathbf{x}(k)(i=1,2)$$

其中

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix},\mathbf{H}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix},\mathbf{C}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

判断系统对于 $C_2$ 是否能观？

$$\text{rank}Q_o=\begin{bmatrix}C^T & G^TC^T & (G^T)^2C^T\end{bmatrix}^T=\text{rank}\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 1 & 9 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -3\end{bmatrix}^T=2<3$$

因此，对于 $C_2$，系统是不能观的。

当 $t=k$

$$y(k)=\begin{bmatrix}x_3(k)\\ x_1(k)\end{bmatrix}$$

当 $t=k+1$

$$y(k+1)=\begin{bmatrix}x_3(k+1)\\ x_1(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1(k)+2x_3(k)\\ x_1(k)-x_3(k)\end{bmatrix}$$

当 $t=k+2$

$$y(k+2)=\begin{bmatrix}x_3(k+2)\\ x_1(k+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9x_1(k)+x_3(k)\\ -2x_1(k)-3x_3(k)\end{bmatrix}$$

3 步之后，$x_2$ ($k$) 仍然不能观。

# 能控性和能观性：离散系统的能控性与能观性

离散状态空间模型

$$\begin{cases}\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}(T)\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}(T)\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{cases}$$

$$k\in\{0,1,2,\cdots\}$$

$$\mathbf{G}(T)=e^{\mathbf{A}T},\mathbf{H}(T)=\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}d\tau$$

## 连续状态方程离散化后的能控性与能观性

如果采样周期 T 选择得不妥当的话，一个能控的连续系统离散化后不一定能保持其能控性；同样，一个能观的连续系统离散化后也不一定能保持其能观性。

例 8-2-10 系统表示为

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

分析采样周期的选择对系统能控性的影响。

原系统显然能控

离散化状态方程

$$G(T)=L^{-1}[sI-A]^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix}s & -1\\ \omega^2 & s\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega}\\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}(T)=\int_0^T G(\tau)bd\tau=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2}\\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega}\end{bmatrix}$$

# 能控性和能观性：离散系统的能控性与能观性

**例 8-2-10** 系统表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

离散化状态方程：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}u(k)$$

$$\mathrm{Q_c} = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} & \dfrac{\cos\omega T - \cos^2\omega T + \sin^2\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} & \dfrac{2\sin\omega T\cos\omega T - \sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

当： $T = \dfrac{2k\pi}{\omega}, (k = 0,1,2,\cdots)$ 能控性矩阵为零阵，系统不能控。

当： $T = \dfrac{(2k+1)\pi}{\omega}, (k = 0,1,2,\cdots)$ 能控性矩阵秩为1，系统不能控。

# 能控性和能观性：离散系统的能控性与能观性

**例 8-2-11** 系统表示为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

分析采样周期的选择对系统能观性的影响。

原系统显然能观

离散化状态方程：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k)$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} c^T & G^T c^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega T \\ 0 & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{k\pi}{\omega}, (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\operatorname{rank} Q_o = 1 < 2$$

系统不能观。

# 能控性和能观性

- 物理概念
- 能控性定义与判定
- 能观性定义与判定
- 能控性&能观性与传递函数
- 离散系统的能控性与能观性
- **对偶原理**

# 能控性和能观性：对偶原理

**对偶原理——由R.E.Kalman提出**

从能控性判别矩阵$Q_c$与能观性判别矩阵$Q_o$看出，它们有明显的相似性——存在某种转置关系。数学意义上说：能控性与能观性之间存在对偶关系。

考虑由下述状态空间表达式描述的系统 $S_1$：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

式中 $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}, C \in R^{m\times n}$

再考虑由下述状态空间表达式定义的对偶系统 $S_2$：

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A^T z + C^T v \\ w &= B^T z\end{aligned}$$

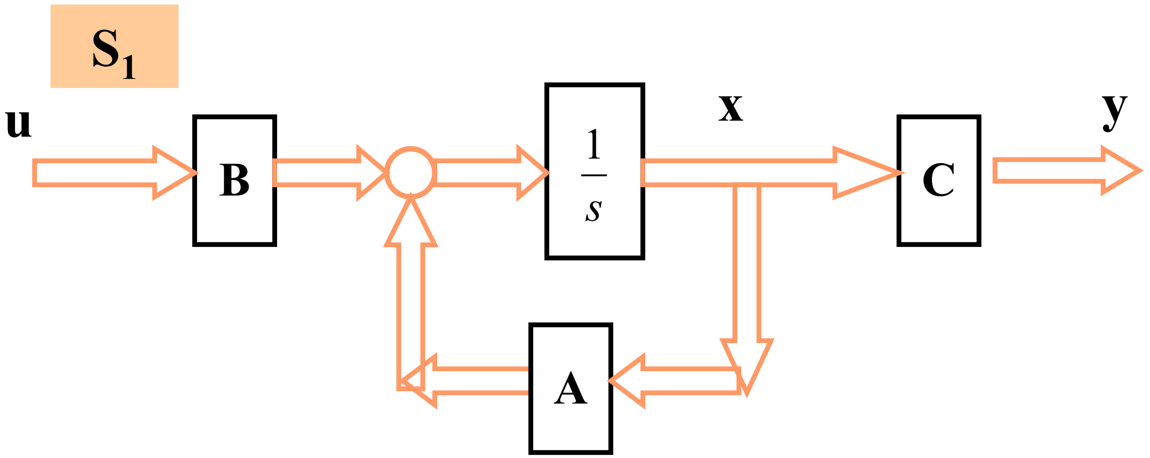
式中 $z \in R^n, v \in R^m, w \in R^r, A^T \in R^{n\times n}, C^T \in R^{n\times m}, B^T \in R^{r\times n}$

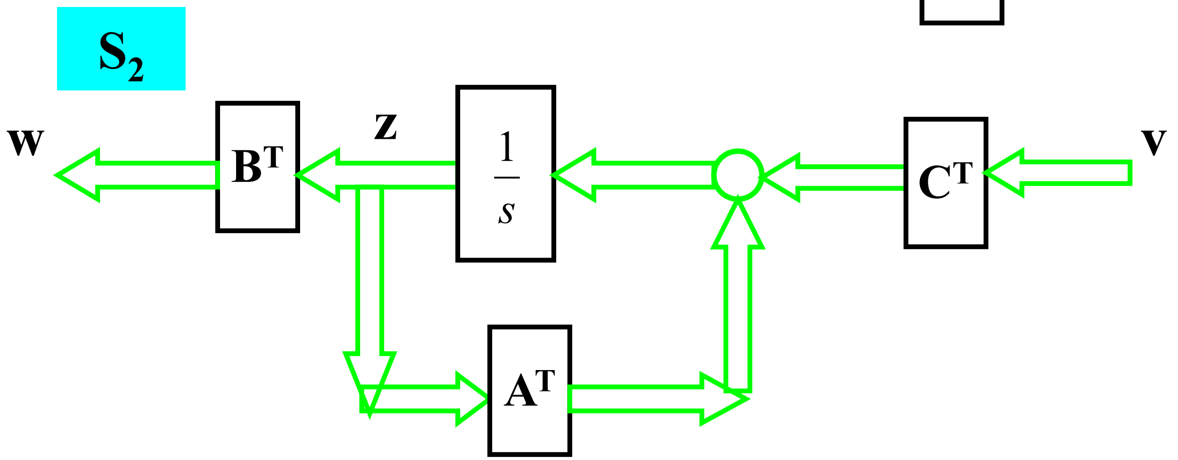
**对偶原理：当且仅当系统$S_1$状态能观（状态能控）时，系统$S_2$才是状态能控（状态能观）的。**

# 能控性和能观性：对偶原理

系统 $S_1$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$




对偶系统 $S_2$

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$
$$w = B^T z$$

对偶的含义：输入端与输出端互换，信号传递反向，信号引出点与信号综合点互换，以及对应矩阵的转置。

# 能控性和能观性：对偶原理

## 对偶原理的验证

➢ 分别写出系统 $S_1$ 和 $S_2$ 的状态能控和能观的充要条件

1) 系统 $S_1$状态能控的充要条件是n×nr维能控性矩阵

$$Q_c=[\,B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B\,]$$ 的秩为n。

系统 $S_1$状态能观的充要条件是n×nm维能观性矩阵

$$Q_o=[\,C^T \,\vdots\, A^TC^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^T)^{n-1}C^T\,]$$ 的秩为n。

2) 系统 $S_2$状态能控的充要条件是n×nm 维能控性矩阵

$$Q_c=[\,C^T \,\vdots\, A^TC^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (A^T)^{n-1}C^T\,]$$ 的秩为n。

系统 $S_2$状态能观测的充要条件是n×nr 维能观性矩阵

$$Q_o=[\,B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B\,]$$ 的秩为n。

# 能控性和能观性：对偶原理

## 对偶原理的验证

对比上述这些条件，可以很明显地看出对偶原理的正确性。利用此原理，一个给定系统的能观性可用其对偶系统的状态能控性来检检和判断。简单地说，对偶性有如下关系：$A \Rightarrow A^T,\quad B \Rightarrow C^T,\quad C \Rightarrow B^T$

例：试用对偶原理判定如下系统的能控性

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} bu(t)$$

解：对偶系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

对偶系统能观性判别

$$\text{rank}\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = 2$$

对偶系统完全能观，所以原系统完全能控

# 能控性和能观性

- 物理概念
- 能控性定义与判定
- 能观性定义与判定
- 能控性&能观性与传递函数
- 离散系统的能控性与能观性
- 对偶原理

# The End