

# 现代控制理论

## Modern Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大  
用自己的浙大通行证账号登录



## 第七章 Chapter 7

### 线性离散时间控制系统分析与综合



# 内容回顾

---

- 绪论：控制系统概述
- 数学模型
- 时域分析
- 稳定性分析
- 根轨迹
- 频率响应



# 课程安排

---

- 第七章 线性离散时间控制系统分析与综合
- 第八章 线性定常系统的状态空间分析法
- 第九章 非线性系统分析
- 课程总学分2.5，其中理论2.0，实验0.5学分

# 课程目标和要求

## ➤ 目标：

- 学会如何分析与设计**离散控制系统**
- 学会如何分析与设计**基于状态空间模型的控制系统**
- 了解非线性系统的相关概念及分析方法

## ➤ 要求：

- 课前预习，上课听讲，课后复习，按时完成作业，积极参与讨论

## ➤ 成绩评定：

- 平时30~50%（作业测验出勤等）+实验10%+期末考试60~40%
- 按照学校文件，**平时与期末均须达到一定要求方可合成最终成绩**
- 平时作业要**按时完成、不得抄袭——否则抄与被抄者都将得零分**（每周二交作业，迟交80%，答案发布后不接受不交计为缺——本次作业0分）

## ➤ 联系方式：

- 赵豫红：yhzhaoh@zju.edu.cn；手机：13588011887（691887）
- 余泽洋：498778498@qq.com；手机：13635800216

# 课程目标和要求

## ➤ 理论课授课时间、地点

周二：1-2节 8:00-9:35  
周四：3-4节 10:00-11:35  
教7-504

秋学期							
九月			十月				
一	二	三	四	五	六	七	八
12	19	26	3	10	17	24	31
13	20	27	4	11	18	25	1
14	21	28	5	12	19	26	2
15	22	29	6	13	20	27	3
16	23	30	7	14	21	28	4
17	24	1	8	15	22	29	★
18	25	2	9	16	23	30	6

# 课程目标和要求

- **实验要求：**实验报告要求完成实验内容后规定时间内在课程网站上交（具体根据网站设置时间），逾期扣分。

—实验部分由模拟实验工具箱实验+基于Matlab的数字仿真实验组成；

—**工具箱3个实验（教10-3101）**：实验时间预约选择——第2、5、6周的周一和周五下午；每个实验分为四个时间段；每个时间段限36人；

先预习有关实验内容，根据自己选择的时间段按时到实验室做实验，并及时提交实验报告；

—**基于Matlab的实验**：自己课下做实验完成，如果没计算机，可按课表上的时间地点(第3、7周)去实验室的计算机上完成；（请在助教处报名）



# 实验时间安排

- 控制学院实验中心网站<http://www.cse.zju.edu.cn/aec>，点击右侧“实验预约”，登录后选择课程，进行三个实验的预约。
- 预约开放时间：**9月13日 9:50 先到先得**
- 实验中心：曹峥老师，13588151625

控制系统典型环节的模拟

成员

2022年9月19日13:30-15:30

2022年9月19日15:40-17:40

2022年9月23日13:30-15:30

2022年9月23日15:40-17:40

二阶系统的瞬态响应分析

成员

2022年10月10日13:30-15:30

2022年10月10日15:40-17:40

2022年10月9日13:30-15:30

2022年10月9日15:40-17:40

线性系统的频率特性的测试

成员

2022年10月14日13:30-15:30

2022年10月14日15:40-17:40

2022年10月17日13:30-15:30

2022年10月17日15:40-17:40





# 课程目标和要求

- 孙优贤, 王慧主编. 自动控制原理(第7~9章). 北京: 化学工业出版社
- 胡寿松主编. 自动控制原理 (第N版). 北京: 科学出版社
- 吴麒, 王诗宓. 自动控制原理(第2版)(下册). 北京: 清华大学出版社

1. John J. D'Azzo, Constantine H. Houpis. Linear Control System Analysis and Design. Fourth Edition. 清华大学出版社和McGraw-Hill联合出版

2. Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini.  
Feedback Control of Dynamic Systems (Fourth Edition)

上书的中文译本:

《动态系统的反馈控制》(第四版); 朱齐丹等译, 电子工业出版社



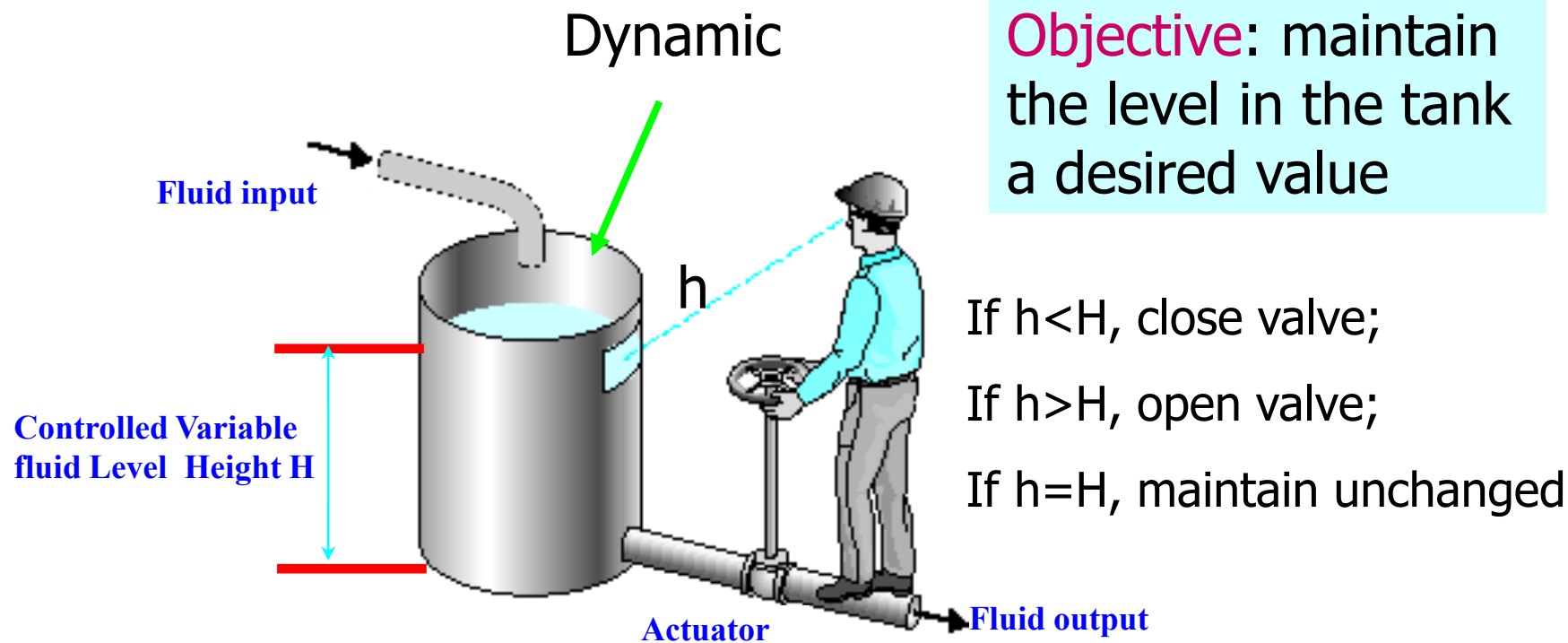
# 主要内容

---

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

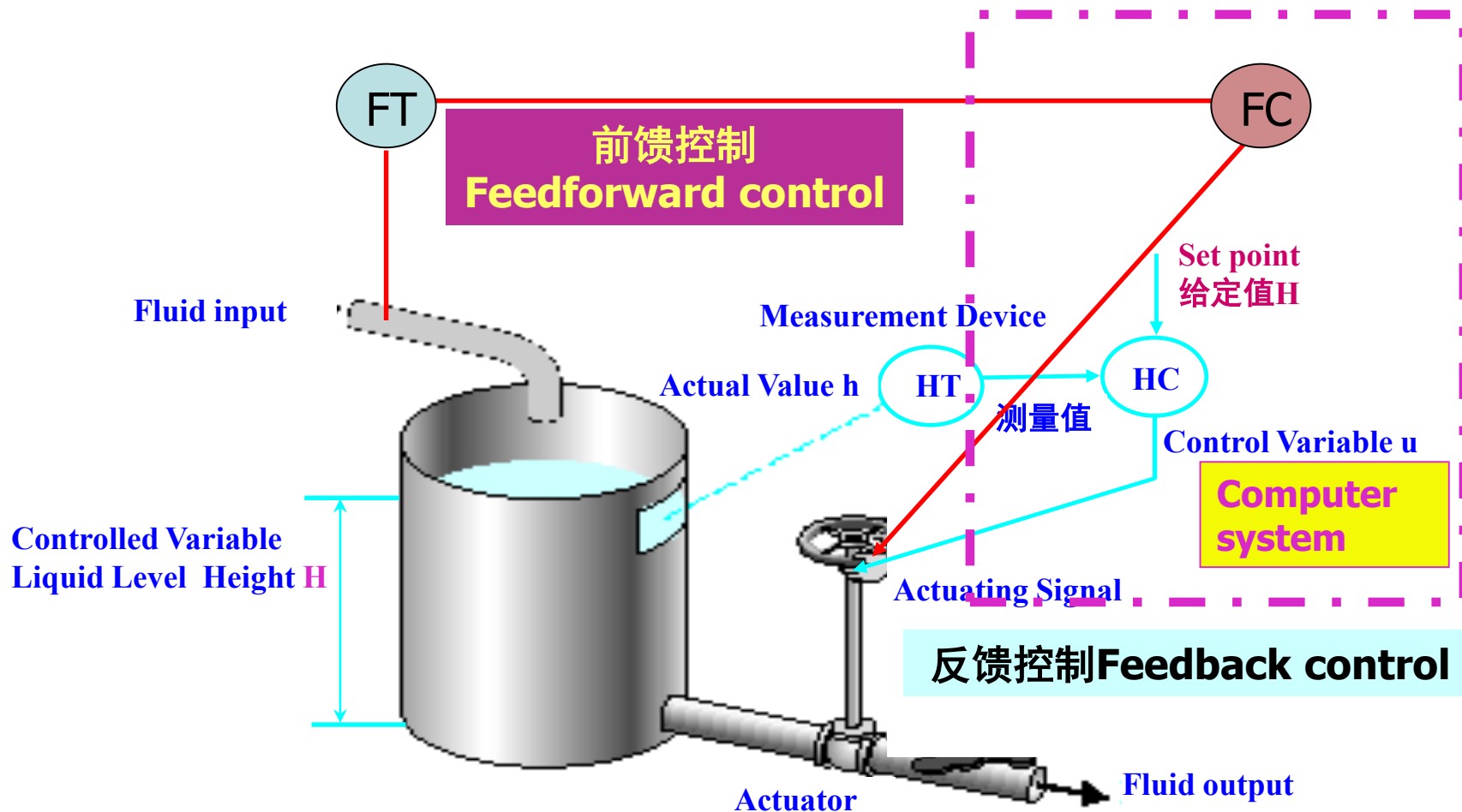
# 离散系统基本概念

一直到上个世纪四、五十年代，人工控制还随处可见……



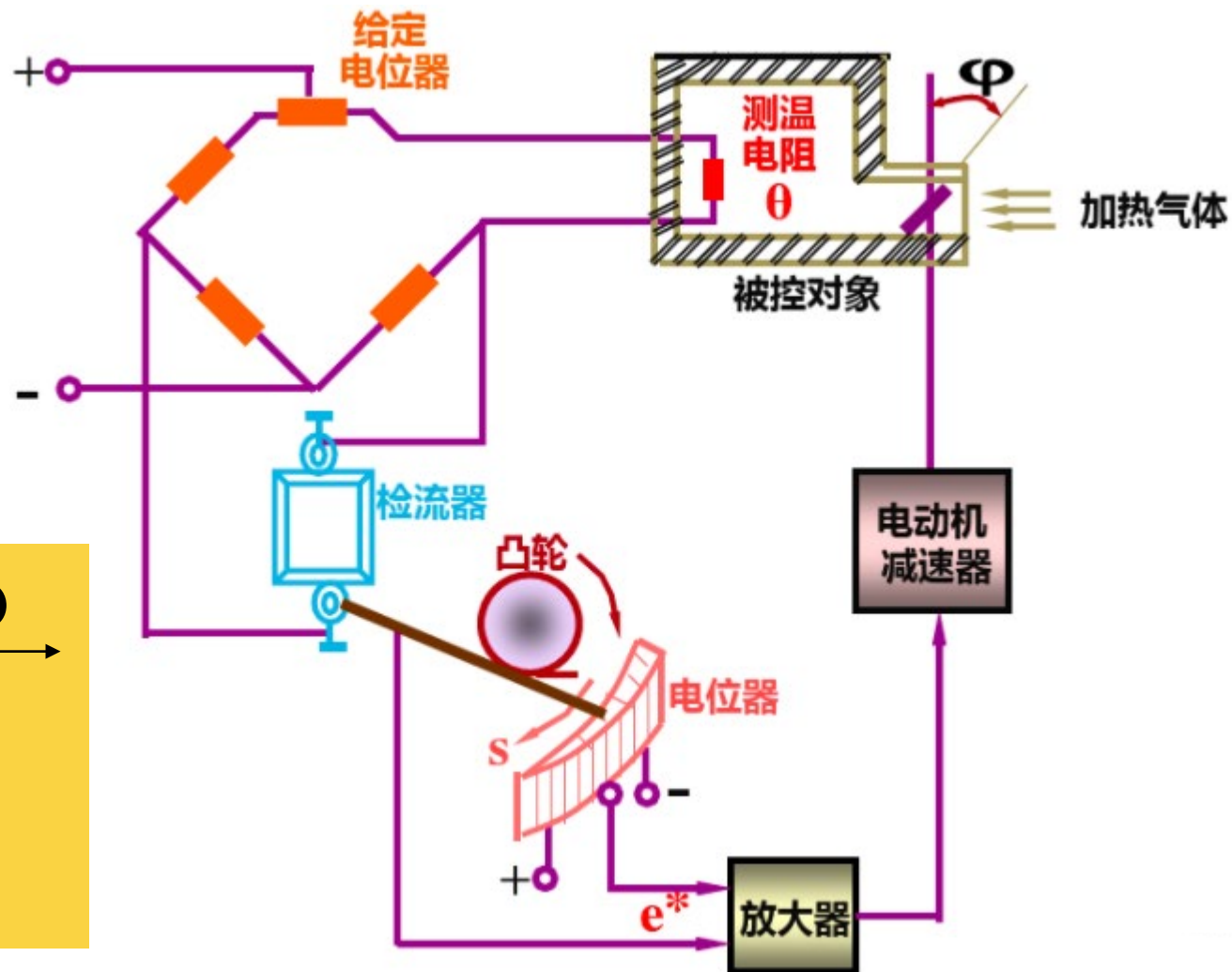
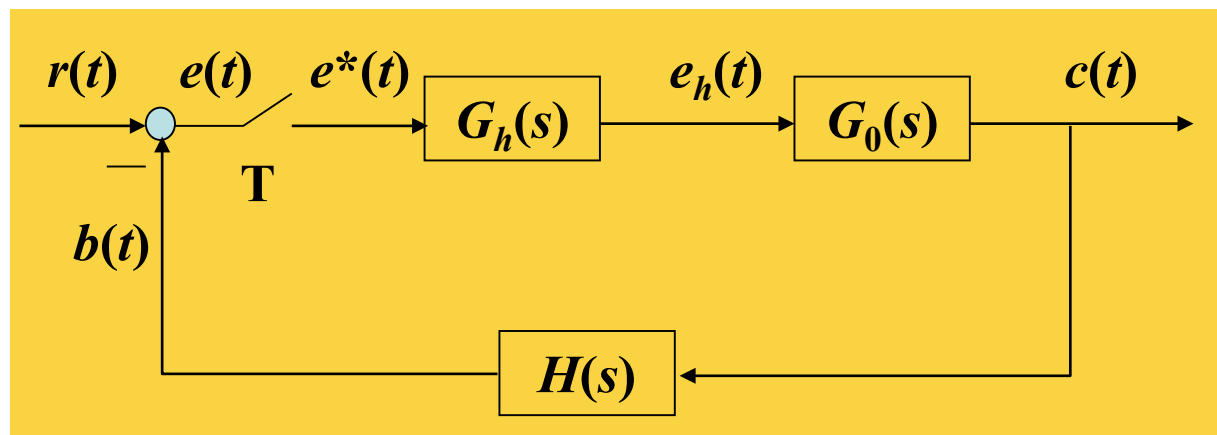
# 离散系统基本概念

渐渐人工控制被自动控制系统替代，先是仪表控制，再是计算机控制……



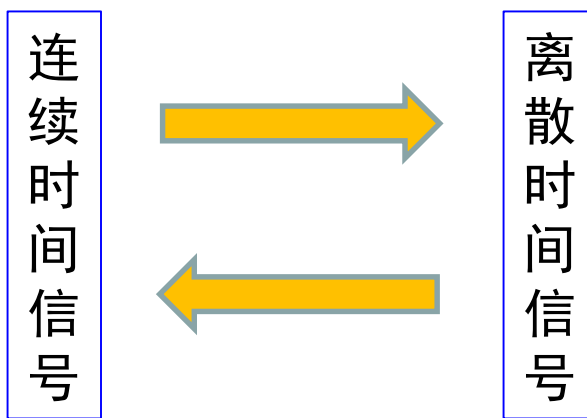
# 离散系统基本概念

## ➤ 炉温采样控制系统



# 离散系统基本概念

- **连续控制系统：**连续的被控对象（含传感器和执行器）+连续的控制
- 连续控制器不易实现复杂的控制算法
- **计算机**适合进行复杂计算
- **计算机不能处理连续时间信号**
- **计算机能处理离散时间信号**

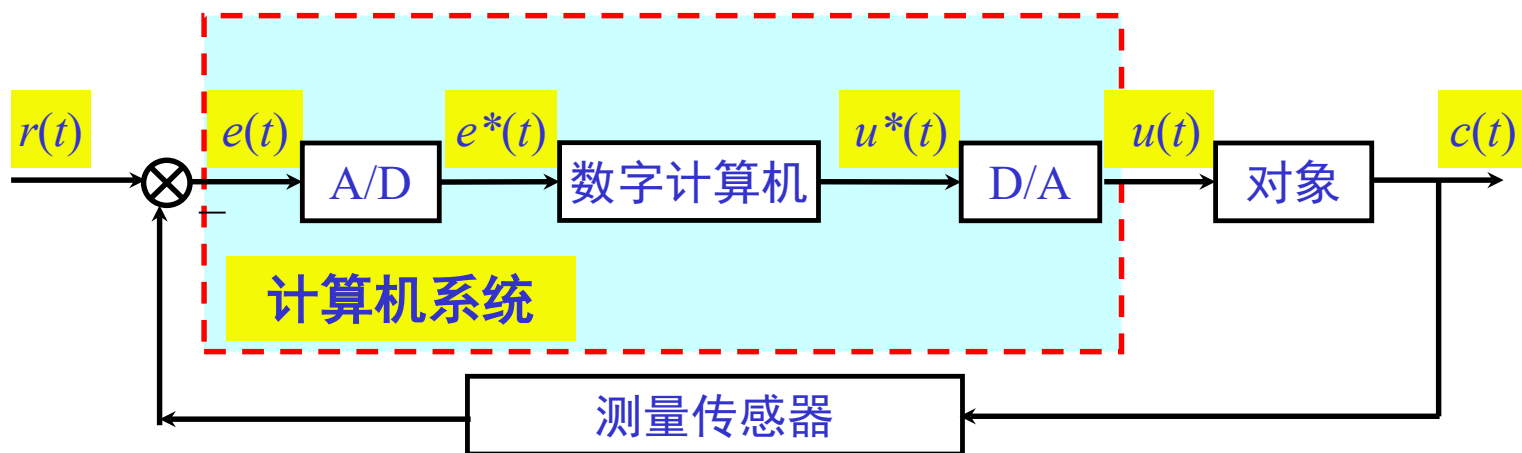


- **离散系统：**连续的被控对象+离散的控制

# 离散系统基本概念

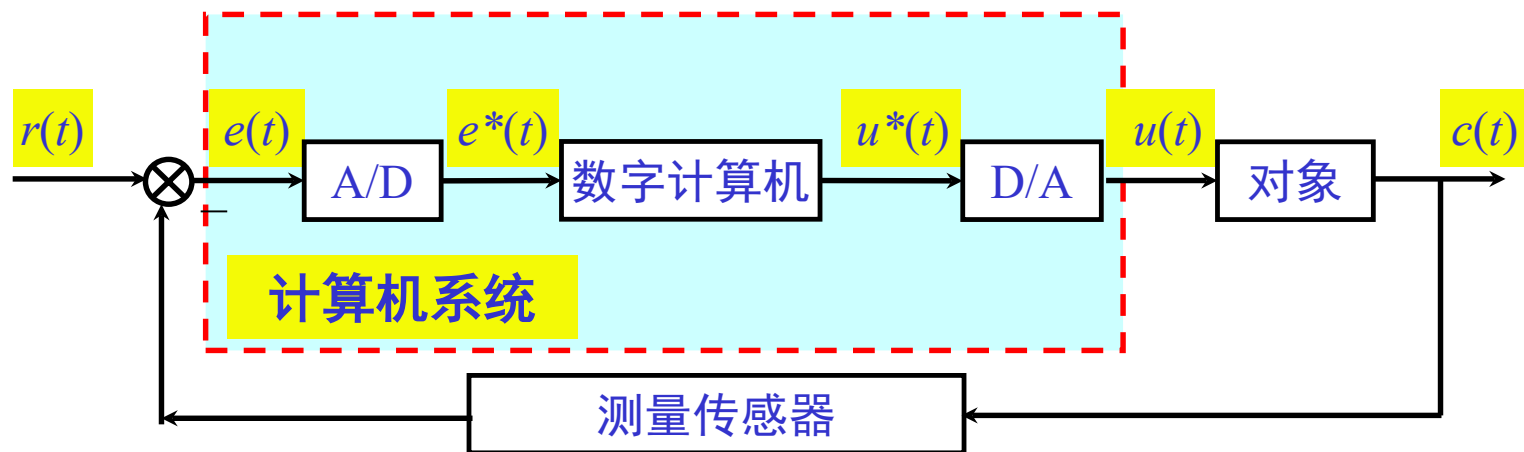
**连续时间控制系统** (Continuous-time control systems) ——系统中所有环节的信号均为时间的连续函数，简称连续系统。

**离散时间控制系统** (Discrete-time control systems) ——当系统中含有采样开关或数字处理环节时，系统中便有离散的信号存在，简称离散系统（又可细分为采样系统与数字系统）。

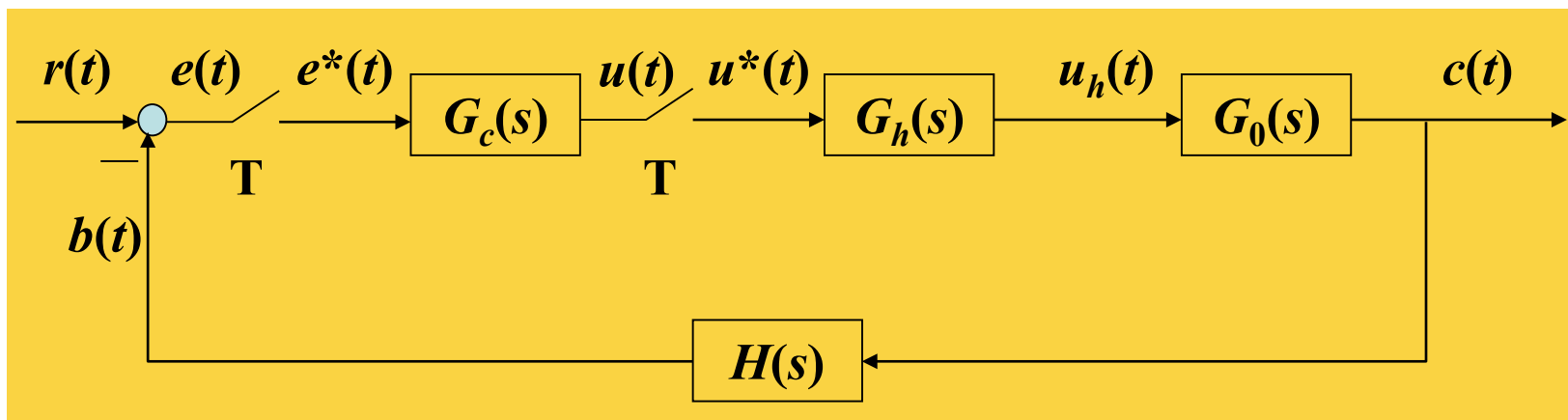


**数字计算机控制系统**

# 离散系统基本概念



- 假定A/D用周期为 $T$ 的理想开关来代替，D/A用保持器来取代，传递函数为 $G_h(s)$ ，数字控制器等效为传递函数为 $G_c(s)$ 的脉冲控制器与一个周期为 $T$ 的理想采样开关相串联，则等效采样系统结构图为：





# 离散系统基本概念

---

## 离散控制系统特点：

- 软件实现控制规律，实现容易，改变简单；
  - 可以有效抑制噪声，提高系统的抗干扰能力；
  - 适于网络化；
  - 历史数据存储方便；
  - 可分时控制若干个系统，提高设备的利用率；
  - 引入采样的方式使大延迟控制系统稳定。
- 
- 控制器设计时需要考虑量化误差和采样周期的影响
  - 对于小规模对象而言，成本高；
  - 对工作环境要求高。

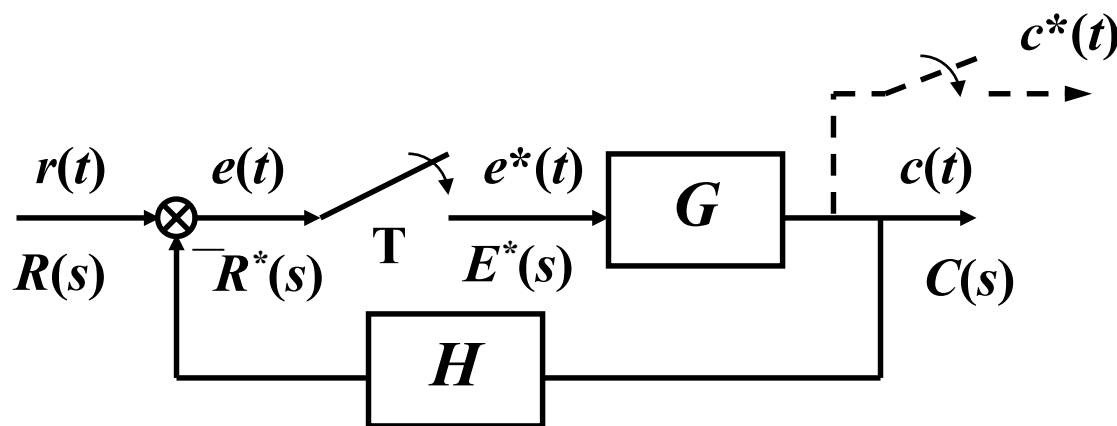
# 主要内容

---

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

# 信号的采样与保持——采样

➤ **采样 (Sampling)** ——是将连续时间信号转化为离散时间信号，可以出现在系统中的多个地方，用开关符号表示。

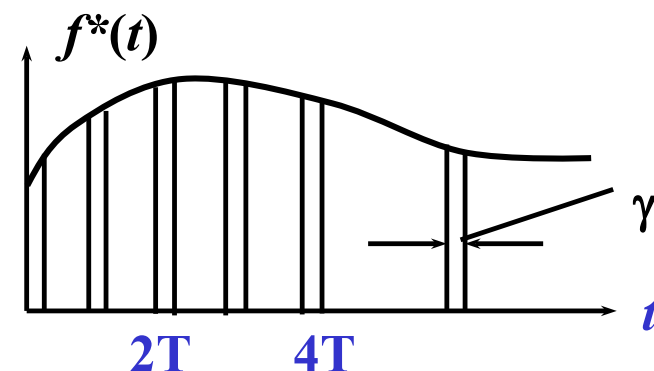
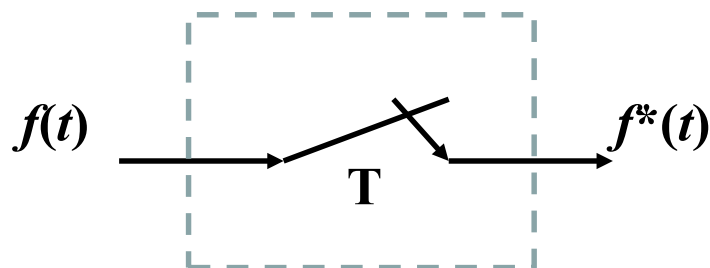
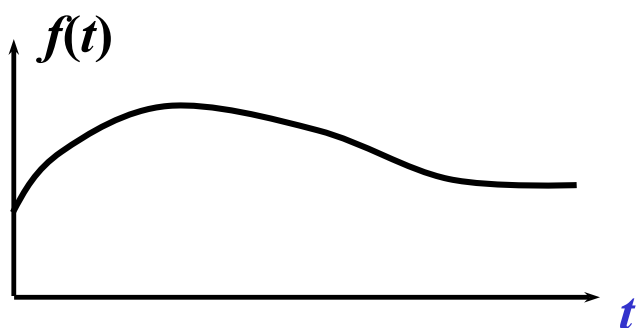


$$G_{\text{open}} = ?$$

$$G_{\text{closed}} = ?$$

# 信号的采样与保持——采样过程

➤ **采样过程**把在时间和量值上均连续的模拟信号，按一定的时间间隔 $T$ （采样周期）转变为只在瞬时 $0、1T、2T、\dots、kT$ 才有脉冲输出信号。



$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)[1(t - kT) - 1(t - kT - \gamma)]$$

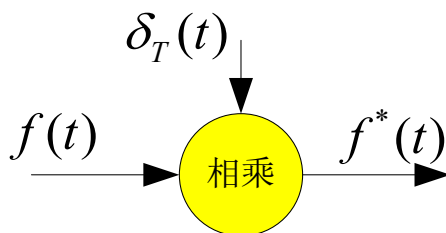
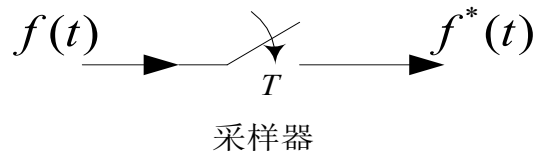
# 信号的采样与保持——理想采样

➤ 理想采样：如果采样开关闭合时间满足

$$\gamma \ll T_s$$

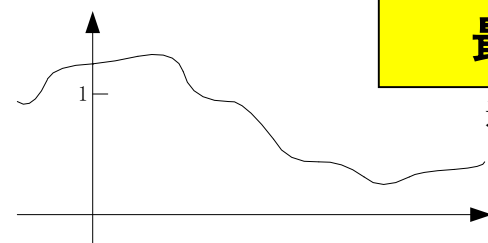
$$\gamma \ll T|_{f(t)}$$

➤ 采样器的数学描述



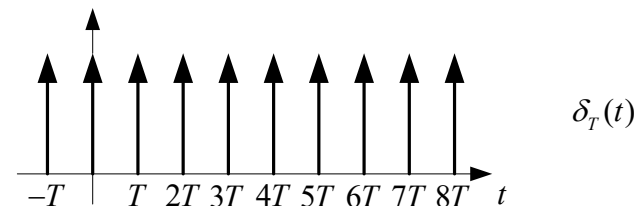
$$\text{单位脉冲串 } \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

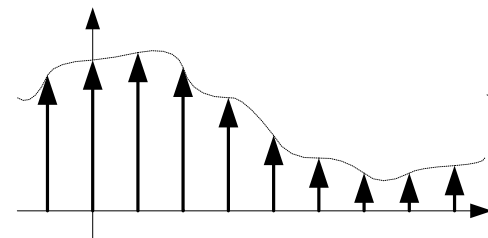


最小时间常数

连续时间信号  $f(t)$



$\delta_T(t)$



离散时间信号  $f^*(t)$

用脉冲串描述离散时间信号

# 信号的采样与保持——理想采样

➤ 设 $e(t)=1(t)$ ，试求 $e^*(t)$ 的拉氏变换。

$$e^*(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots$$

$$E^*(s) = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

# 信号的采样与保持——理想采样

➤ 已知  $e(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$ ，求  $e^*(t)$  的拉氏变换。

$$e^*(t) = 0\delta(t) + (e^{-T} - e^{-2T})\delta(t-T) + (e^{-2T} - e^{-4T})\delta(t-2T) + \dots$$

$$\begin{aligned} E^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-nT} - e^{-2nT}) e^{-nTs} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-T(s+1)}} - \frac{1}{1 - e^{-T(s+2)}} \\ &= \frac{(e^{-T} - e^{-2T})e^{Ts}}{(e^{Ts} - e^{-T})(e^{Ts} - e^{-2T})} \end{aligned}$$

比较繁琐  
 $e^{Ts}$  是  $s$  的超越函数

# 信号的采样与保持——采样过程

周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数公式

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_s t}$$

$$\text{其中 } \omega_s = \frac{2\pi}{T}, \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_s t} dt$$

## ➤ 单位脉冲串的傅里叶级数展开

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_s t}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} e^{-jk\omega_s 0} = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$$



$$\text{若 } x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\text{则 } x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j(\omega - \omega_0)), \omega_0 \text{ 为实常数}$$

# 信号的采样与保持——理想采样

## ➤ 采样前后信号频谱的变化

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(j\omega)$$

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t)$$

$$= f(t) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jk\omega_s t}$$

$$f(t)e^{jk\omega_s t} \xleftrightarrow{F} F(j(\omega - k\omega_s))$$

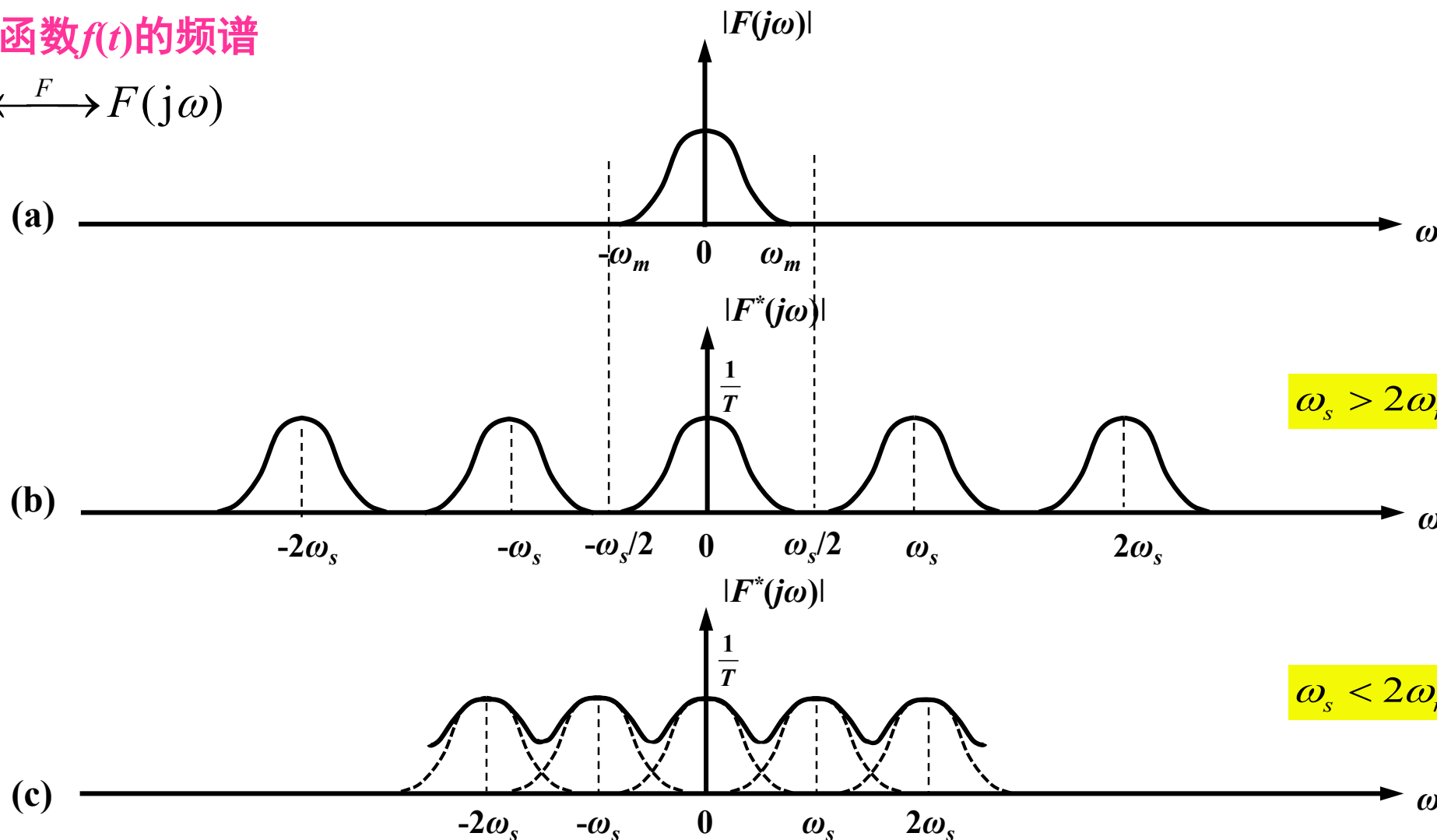
$$f^*(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - k\omega_s))$$

称  $\frac{1}{T} F(j\omega)$  为  $F^*(j\omega)$  的主分量;  $\frac{1}{T} F(j(\omega - k\omega_s)), k \neq 0$  为  $F^*(j\omega)$  的补分量

# 信号的采样与保持——理想采样

连续函数  $f(t)$  的频谱

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(j\omega)$$



图(a) 连续函数  $f(t)$  的频谱；图(b) 当  $\omega_s > 2\omega_m$  时的脉冲采样函数  $f^*(t)$  的频谱；图(c) 当  $\omega_s < 2\omega_m$  时的脉冲采样函数  $f^*(t)$  的频谱

# 信号的采样与保持——理想采样

- **问题**：(1) 在理论上，采样后的信号  $f^*(t)$  能否保证恢复原连续信号  $f(t)$ （即  $f^*(t)$  是否包含了  $f(t)$  的主要特征）？ (2) 在实际应用中，如何过滤采样后  $f^*(t)$  中的高频倍号，仅保留主频信号——其仅在幅值上与原信号相差  $1/T$  倍？

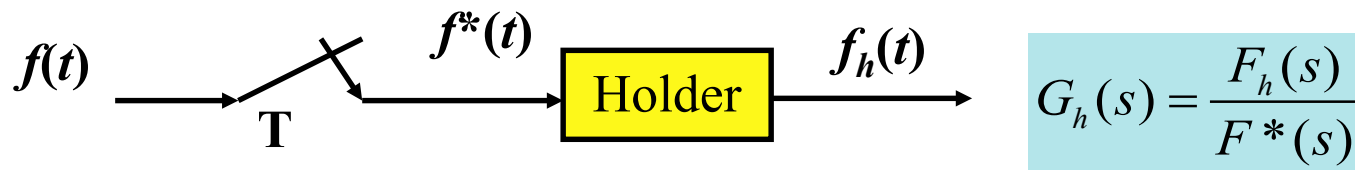
- **采样定理**：为了能不失真地从离散信号中恢复原有的连续信号，采样频率必须大于等于原连续信号所含最高频率的两倍（从频谱图也可以直观地看出），即

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$$

或

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_{\max}}$$

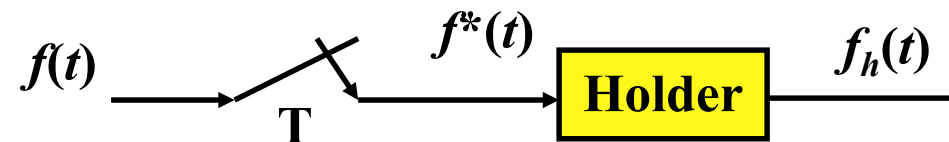
- 在实际应用中，通常采用保持器作为低通滤波器与采样器一起使用以保证采样后的信号  $f^*(t)$  复现原连续信号  $f(t)$ 。



# 信号的采样与保持——保持器

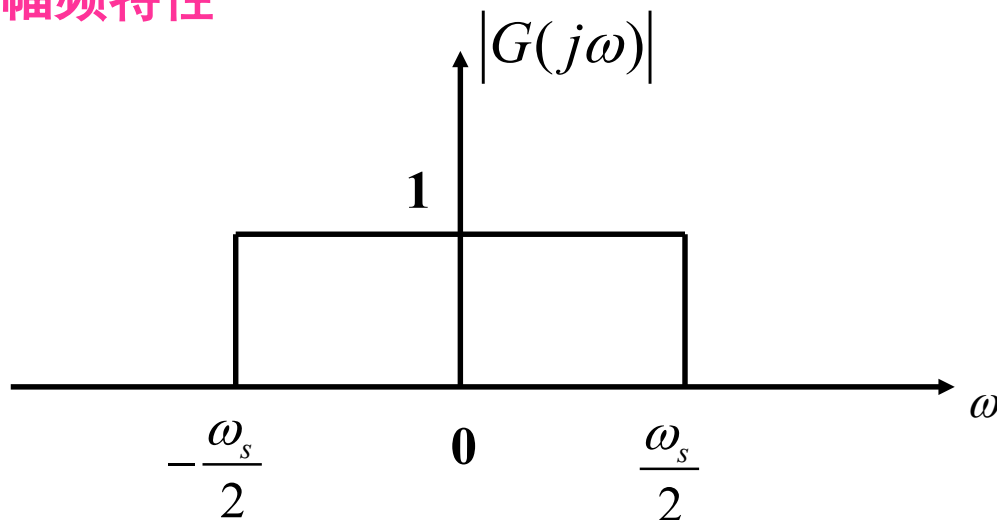
- 理想滤波器的滤波特性

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_s / 2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s / 2 \end{cases}$$



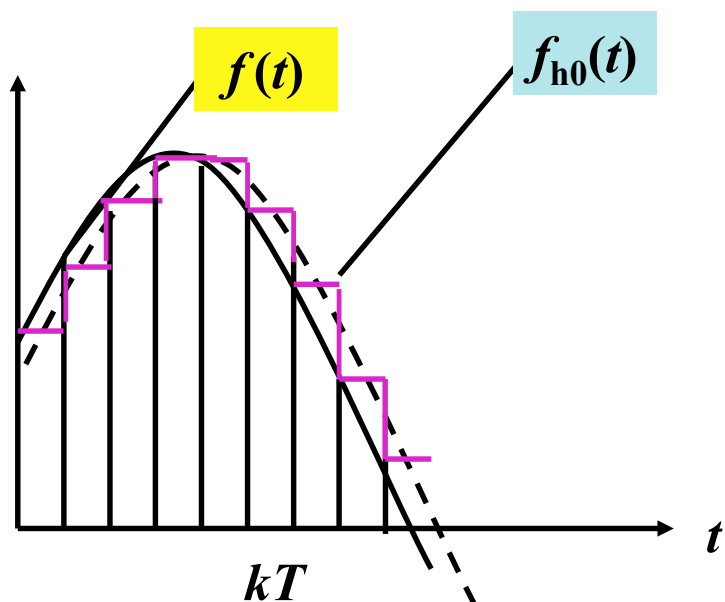
$$G_h(s) = \frac{F_h(s)}{F^*(s)}$$

- 理想滤波器的幅频特性



# 信号的采样与保持——保持器

- 保持器的作用：一是保存采样信号；二是作为低通滤波器。
- 零阶保持器是最常用的一种保持器，它把采样时刻的采样值恒定不变地保持（或外推）到下一采样时刻，故其输出为阶梯信号。



若将阶梯信号的中点连接起来（虚线），则可以得到与 $f(t)$ 信号形状相同。时间上落后 $T/2$ 的响应

$$\because f_{h0}(kT) = f(kT), k = 1, 2, 3 \dots$$

$$f_{h0}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) [1(t - kT) - 1(t - kT - T)]$$

LT



$$F_{h0}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right]$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}$$

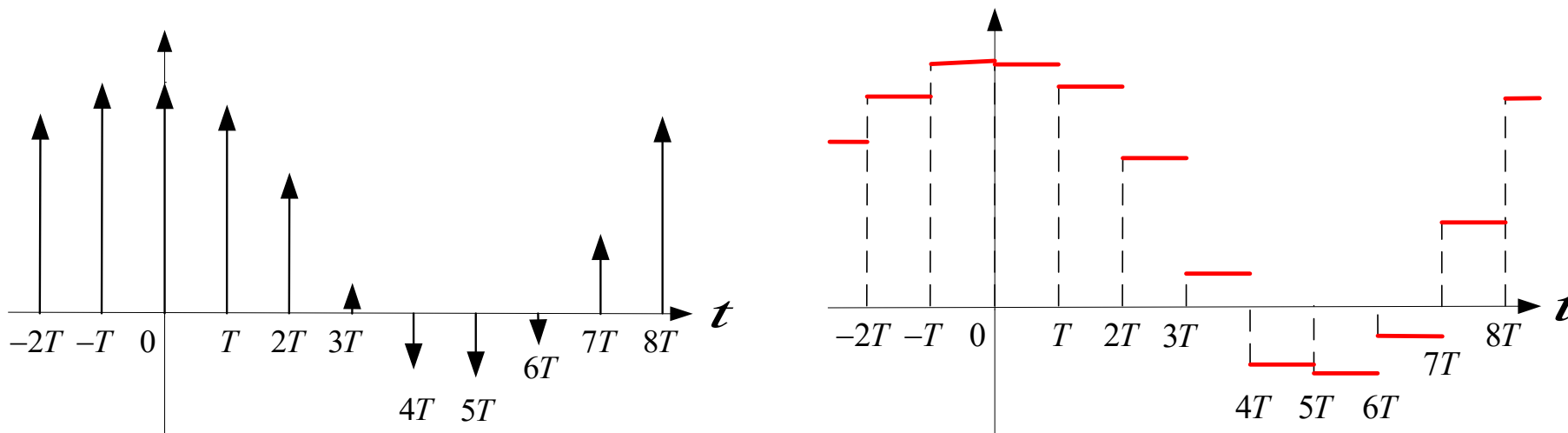
$$G_{h0}(s) = \frac{F_{h0}(s)}{F^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$



# 信号的采样与保持——保持器

## ➤ 零阶保持器：

输入脉冲串  $u^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \delta(t - kT)$ ,  $T$  为周期



零阶保持器是最常用的一种保持器，它把  $u_k$  从  $kT$  时刻恒定不变地保持（或外推）到  $(k+1)T$ ，输出阶梯信号：

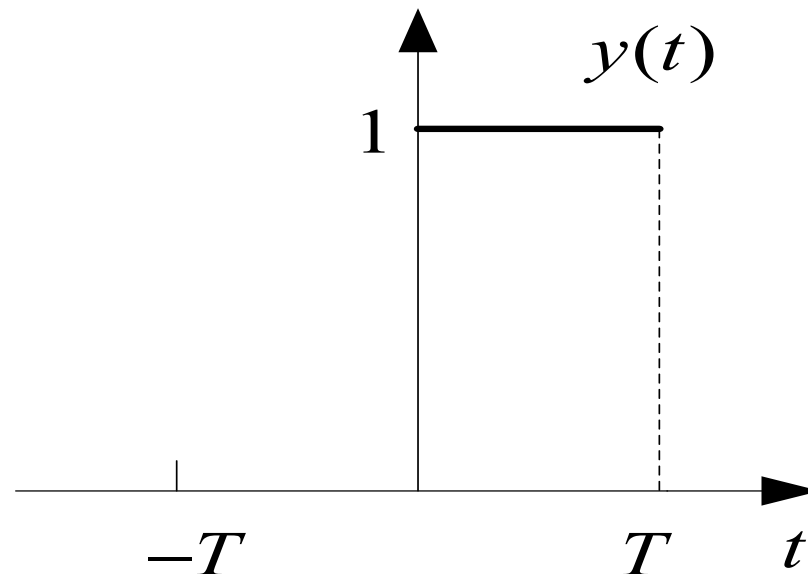
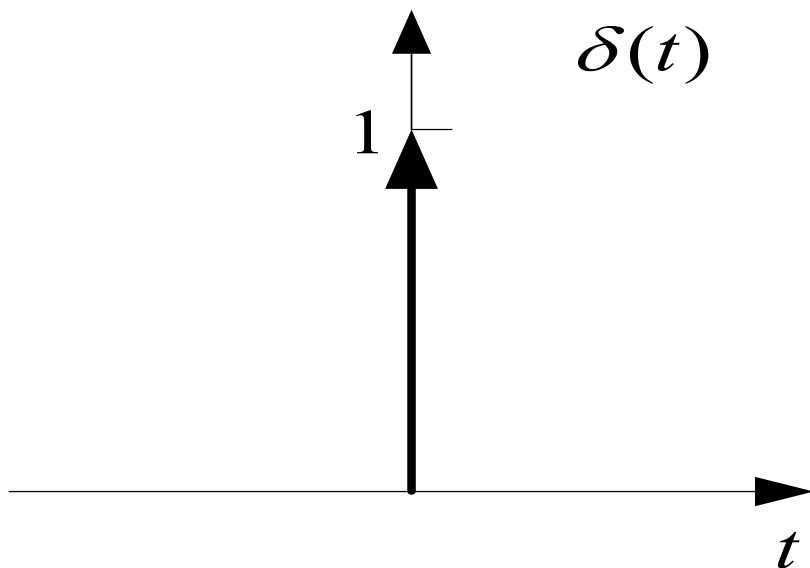
$$y(t) = u_k, \quad kT \leq t < (k+1)T$$

# 信号的采样与保持——保持器

## ➤ 零阶保持器的传递函数

- 输入 $\delta(t)$ ，输出为单位脉冲响应  $y(t) = 1(t) - 1(t - T)$ ，其拉氏变换即零阶保持器的传递函数，为：

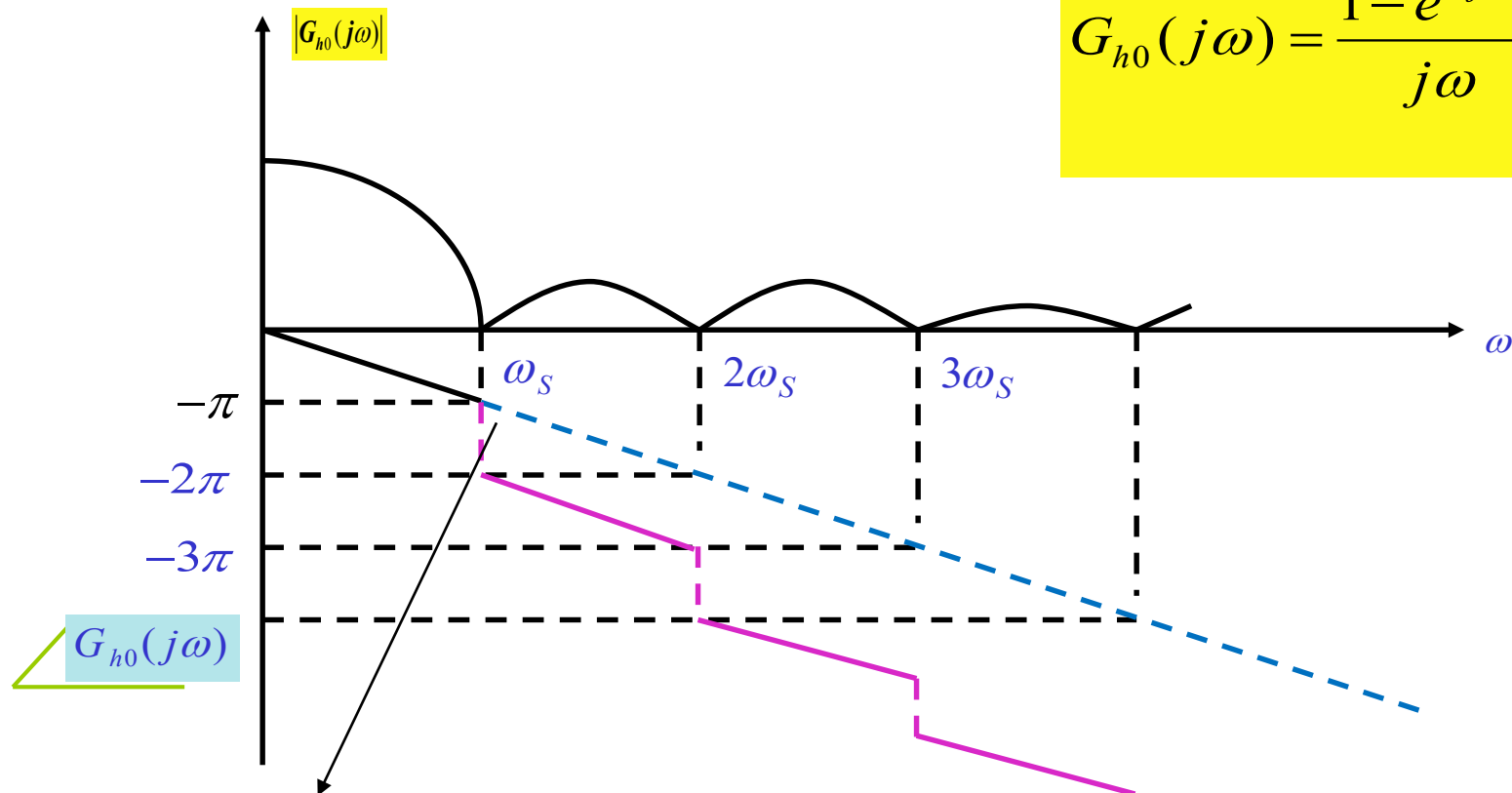
$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$



# 信号的采样与保持——保持器

➤ 零阶保持器的频率特性：

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$



$$\text{若 } \omega_s > \omega < 2\omega_s, \quad \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} < 0$$

由于幅值中的sin函数存在，增加了 $-\pi$ 的相位滞后，故产生跳变。在基频内，相位滞后为 $-\pi$ 。



# 信号的采样与保持——保持器

## ➤ 零阶保持器的频率特性：

$$G_{h0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{T}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

注意幅值

### • ZOH 的特性：

- (1) 低通特性，幅值随频率增大迅速衰减；
- (2) 相角滞后特性，且随频率的增大而增大，使闭环系统稳定性变差；
- (3) 时间滞后特性，ZOH的平均响应在时间上比输入滞后 $T/2$ ，相当于给系统增加了一个延迟环节，对稳定性不利，且增加了系统输出中的纹波。

### • ZOH 与理想滤波器的差别：

- (1) 幅值上增加了 $T$ 倍  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$
- (2) 虽然也是低通滤波器，但无截止频率（即除基频外，还允许各次谐波通过一小部分）
- (3) 有半个周期的相位滞后，故可能会影响系统的稳定性与时间响应指标

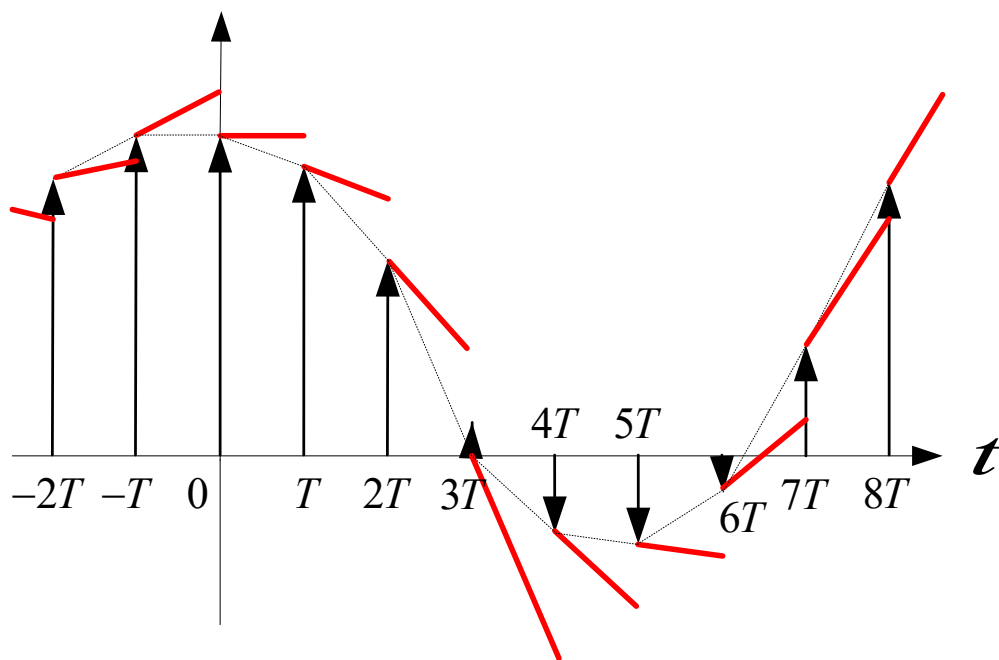
# 信号的采样与保持——保持器

- 一阶保持器以两个采样时刻的值为基础实行外推。输入脉冲串

$$u^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \delta(t - kT)$$

输出为：

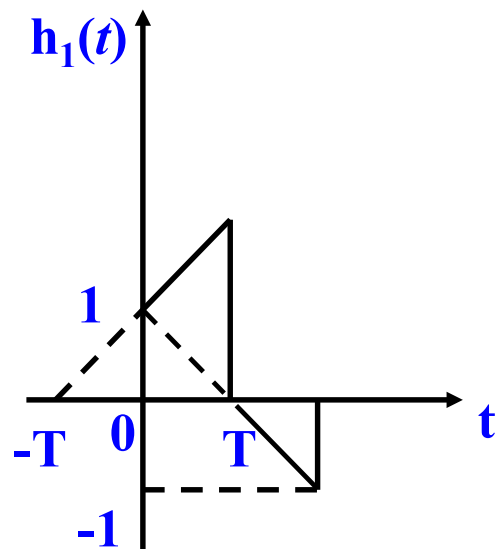
$$y(t) = u_k + \frac{u_k - u_{k-1}}{T} (t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$$



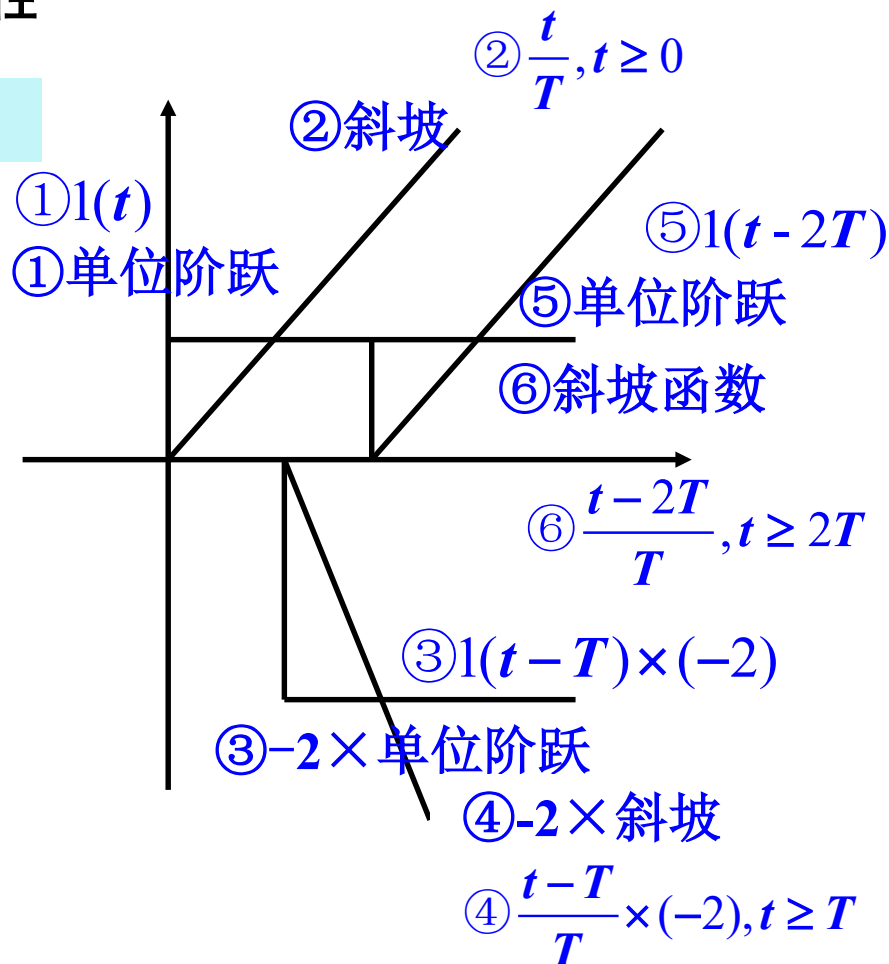
# 信号的采样与保持——保持器

## ➤ 一阶保持器的传递函数及频率特性

$$h_1(t) = ① + ② + ③ + ④ + ⑤ + ⑥$$



a) 一阶保持器的脉冲响应函数



b) 脉冲响应函数的分解

# 信号的采样与保持——保持器

- 根据一阶保持器脉冲响应函数的分解，可得保持器的传递函数

$$G_{h1}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{2}{s}e^{-Ts} - \frac{2}{Ts^2}e^{-Ts} + \frac{1}{s}e^{-2Ts} + \frac{1}{Ts^2}e^{-2Ts}$$

或

$$G_{h1}(s) = T(1 + Ts) \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2$$

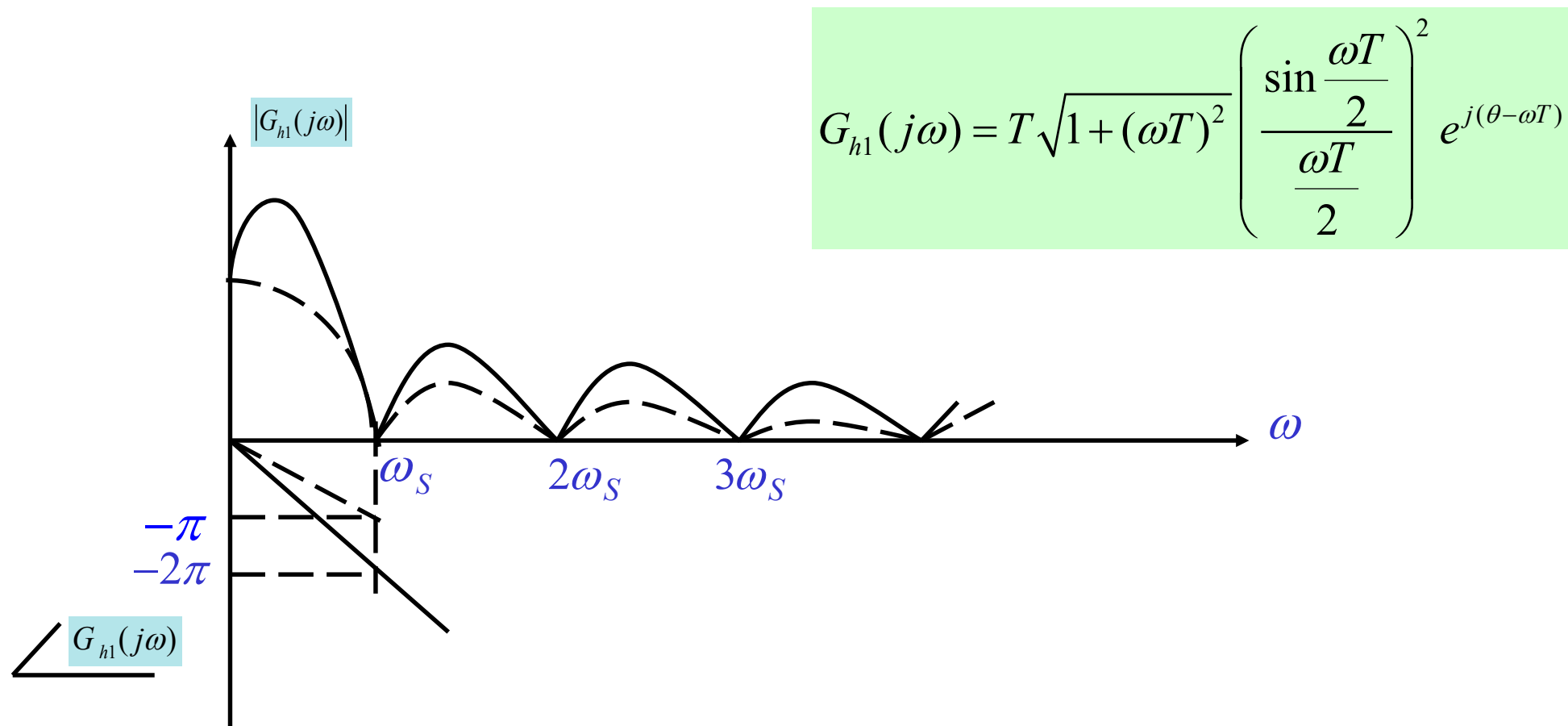
- 一阶保持器的频率特性为

$$G_{h1}(j\omega) = T(1 + j\omega T) \left( \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} \right)^2 = T \sqrt{1 + (\omega T)^2} \left( \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 e^{j(\theta - \omega T)}$$

where  $\theta = tg^{-1}T$

# 信号的采样与保持——保持器

- 一阶保持器的频率特性，虚线为零阶保持器的频率特性



一阶保持器的频率特性（虚线为零阶保持器的频率特性）

# 要点回顾

- 连续控制系统：连续的被控对象+连续的控制
- 离散系统：连续的被控对象+离散的控制+采样器+保持器

- 采样器  $f^*(t) = f(t)\delta_T(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - k\omega_s))$

- 采样定理  $\omega_s \geq 2\omega_m$

- 零阶保持器  $\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$

- 一阶保持器  $y(t) = u_k + \frac{u_k - u_{k-1}}{T}(t - kT), kT \leq t < (k+1)T$

- 用脉冲串描述离散时间信号

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

- 用傅立叶级数处理单位脉冲串

---

*The End*