信号的采样与保持

连续控制器不易实现复杂的控制算法

计算机适合进行复杂计算

计算机不能处理连续时间信号

计算机能处理离散时间信号

离散系统：
连续的被控对象+离散的控制器+采样器+保持器

连续系统
连续的被控对象（含传感器和执行器）+连续的控制器

采样定理：$\omega_s \geq 2\omega_m$

保持器的作用：

一是保存采样信号；二是作为低通滤波器。

零阶保持器： 采样周期

$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ $G_{h0}(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=T\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}e^{-j\frac{\omega T}{2}}$

相角滞后，时间滞后 $T/2$，稳定性差

Z变换

拉氏变换 $Y(s)$	采样函数 $y(kT)$	Z 变换 $Y(z)$
1	$\delta(kT)$	1
e^{-nTs}	$\delta[(k-n)T]$	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-(1+akT)e^{-akT}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z^2-z(1-aT)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z^2-z\cos aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh akT$	$\frac{z\sinh aT}{z^2-2z\cosh aT+1}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh akT$	$\frac{z^2-z\cosh aT}{z^2-2z\cosh aT+1}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\cos bkT$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\sin bkT$	$\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$

$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)e^{-kTs}$ $\xlongequal{z=e^{Ts}}$ $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}$

Laplace → Z

① 定义法：$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}$

② 部分分式法：$f(t)\to F(s)\xrightarrow{\text{分式展开}}f(t)\to F(z)$

③ 留数法：$F(z)=\hat{F}(z)+\beta$ 其中 $\hat{F}(z)=\sum Res[F(z)\frac{z}{z-e^{sT}}]$

一阶 $R_1=\lim_{s\to p_1}[(s-p_1)F(s)\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}]$ $\beta=\lim_{s\to\infty}sF(s)-\lim_{z\to\infty}\hat{F}(z)$

n阶 $R=\frac{1}{(q-1)!}\lim_{s\to p}\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}[(s-p)^qF(s)\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}]$ β保证 $f(t)$ $F(z)$ 初值 $f(0)$ 一致

1）只有采样函数能定义Z变换，不反映非采样时刻信息

2）在式 $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}$ 中，问：$f(kT)$ 决定幅值，z^{-k} 决定时间，即Z变换和离散序列之间有非常明确的幅值和时间的对应关系。

单边Z变换的几个性质

移位 $Z[f^*(t-pT)]=z^{-p}F(z)$ $y[(k+1)T] \leftrightarrow z[Y(z)-y(0)]$

$Z[f^*(t+pT)]=z^pF(z)-\sum_{i=0}^{p-1}f(iT)z^{p-i}$ 零初始条件为0可忽略

初值 $\lim_{k\to 0}f(kT)=\lim_{z\to\infty}F(z)$

终值 $\lim_{k\to\infty}f(kT)=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)]$ 所有极点在单位圆内（最多1个 $z=1$）

$Z[e^{\pm at}x(t)]=X(e^{\mp aT}z)$

微分 $Z[tx(t)]=-Tz\frac{dX(z)}{dz}$

复移位 $Z[e^{\pm\alpha t}x(t)]=X(e^{\mp\alpha T}z)$

$Z[a^kx(k)]=X(\frac{z}{a})$

复域微分 $Z[tx(t)]=-Tz\frac{dX(z)}{dz}$

$Z[kx(t)]=-z\frac{dX(z)}{dz}$

☆ Z反变换

1）长除法（找规律） 2）$\frac{Y(z)}{z}$ 部分分式法+查表

3）留数法 $x(kT)=\sum Res[X(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$

n个相异单极点，$=\sum_{i=1}^{n}\lim_{z\to p_i}[(z-p_i)X(z)z^{k-1}]$

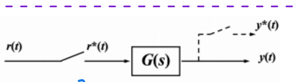
对于n重极点 $=\lim_{z\to p}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{(n-1)}}{dz}[(z-p)^nX(z)z^{k-1}]$

差分方程求解 $\sum a_n y(k+n)=\sum b_m u(k+m)$ $m\leq n$

一递推法

一 Z变换法（移位性质）

脉冲传函



零初始条件：$k<0$ 时 $y(k)=0$

$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=Z[y^*(t)]|_{r(t)=\delta(t)}$ 周期性

$[G(s)E^*(s)]^*=G^*(s)E^*(s)$ $E^*(s-jk\omega_s)=E^*(s)$

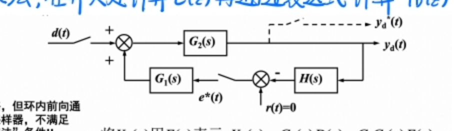
若无对 $y(t)$ 采样，就没有 $G(z)$

视察法 $G_0(z)$：开环脉冲传函 环可以从任一采样器断开，走一圈

$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1-G_0(z)}$

条件：前向通道（环内）有采样器存在 $G_f(z)$：前向通路传函

对干扰信号 $d(t)$：改画传函图，常无法直接利用视察法，在开关处计算 $E(z)$ 再通过表达式计算 $Y_D(z)$



单回路，但环内前向通道无采样器，不满足"视察法"条件!!

从 $d(t)$ 至 $e^*(t)$ 的环内前向通道有采样器，满足"视察法"条件!!

将 $Y_D(z)$ 用 $E(z)$ 表示，$Y_D(z)=G_2(z)D(z)+G_2G_1(z)E(z)$

$E(z)=-\frac{HG_2(z)D(z)}{1+HG_2G_1(z)}$ 此处特别要留意符号！

$Y_D(z)=G_2(z)D(z)-\frac{G_2G_1(z)HG_2(z)}{1+HG_2G_1(z)}D(z)$

状态方程的全解

连续 ① $G(s)=C\underbrace{(sI-A)^{-1}}_{\Phi(s)}B+D$

② $X(s)=\Phi(s)x(0)+\Phi(s)Bu(s)$

$\mathcal{L}^{-1}$ $x(t)=\Phi(t)x(0)+\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)Bu(s)]$

$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

离散 $\begin{cases}x(k+1)=G(T)x(k)+H(T)u(k)\\ y(k)=Cx(k)+Du(k)\end{cases}$

$G(T)=e^{AT}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]|_{t=T}$

$H(T)=\int_0^Te^{A\tau}B\,d\tau$

Z变换法（离散方程求解）

$\mathbf{x}(k)=Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]=Z^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0)+\mathbf{Bu}(z)]\}$

$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\{Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]\}+\mathbf{Du}(k)$

模型转换

差分方程 $\underset{\text{Z反变换}}{\overset{\text{Z变换}}{\rightleftarrows}}$ 脉冲传递函数

$zP(z)-P(z)\xrightarrow{z^{-1}}\begin{cases}P(k+1)-P(k)\\ P(k)-P(k-1)\end{cases}$

状态方程→脉冲传递函数

$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$

脉冲传递函数→状态方程

$x(k+1)\to$ 延时器 $\to x(k)$

离散系统

Z 域 $zX(z)\to z^{-1}\to X(z)$

能控标准型

能观标准型

正则标准型（并联分）

串联分解

$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1z+a_0}$ $\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+bu(k)\\ y(k)=cx(k)+du(k)\end{cases}$

$=b_n+\frac{(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)z^{n-1}+\cdots+(b_1-a_1b_n)z+(b_0-a_0b_n)}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1z+a_0}$

能控标准型

$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ $c=[b_0-a_0b_n\quad b_1-a_1b_n\quad\cdots\quad b_{n-1}-a_{n-1}b_n]$ $d=b_n$

能观标准型

$A=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}b_0-a_0b_n\\b_1-a_1b_n\\b_2-a_2b_n\\\vdots\\b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{bmatrix}$ $c=[0\quad\cdots\quad0\quad1]$ $d=b_n$

并联分解：$G(z)=\sum D_i(z)$ $D_i(z)=\frac{C_i}{z-\lambda_i}$

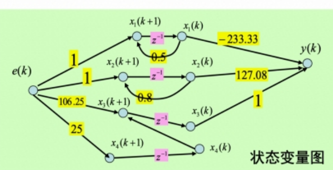
C_i：单根可前可后，重根在前 ☆

$\to\boxed{C_i}\to\boxed{z^{-1}}\to$ $+\lambda_i$

$A=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ $C=[C_1\cdots C_n]$

$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{10(z^2+z+1)}{z^2(z-0.5)(z-0.8)}=\frac{-233.33}{z-0.5}+\frac{127.08}{z-0.8}+\frac{106.25}{z}+\frac{25}{z^2}$

$x_i(k+1)=\lambda_i x_i(k)+u(k)$



$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{Ax}(k)+\mathbf{B}e(k)$

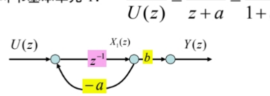
$\mathbf{y}(k)=\mathbf{Cx}(k)$

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.5&0&0&0\\0&0.8&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\106.25\\25\end{bmatrix}$

$\mathbf{c}=[-233.33\quad 127.08\quad 1\quad 0]$

串联分解

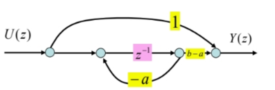
一阶环节基本单元-1：$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b}{z+a}=\frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$



$x_1(k+1)=-ax_1(k)+u(k)$

$y(k)=bx_1(k)$

一阶环节基本单元-2：$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+b}{z+a}=1+\frac{b-a}{z+a}$



$\begin{cases}x_1(k+1)=-ax_1(k)+u(k)\\ y(k)=(b-a)x_1(k)+u(k)\end{cases}$

状态方程→脉冲传递函数 $G(z)$→差分方程

☆稳定性充要条件 有界输入→有界输出

1）差分方程特征根的模 $|\lambda_i|<1$ $i=1,2\cdots n$

2）特征方程 $1+GH(z)=0$ 所有特征根在单位圆内 也可以对z平面用根轨迹

3）特征方程中 $z=\frac{w+1}{w-1}$ 换到w平面，

$w=j\omega$ 换到伪频

Routh判据、根轨迹：w域

K一定时，T↑，稳定性越差甚至不稳定

Routh：二阶 ax^2+bx+c $a,b,c>0$

三阶 ax^3+bx^2+cx+d $bc>ad$

二阶采样系统K↑不稳定 | (K>0)二阶连续系统都稳定

☆ 稳态误差 $e^*(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$

$k_p=\lim_{z\to 1}G(z)$ $\begin{cases}0型：e^*(\infty)=\frac{R_0}{1+k_p} & r(kT)=R_0\\ 1型+：k_p=\infty\quad e^*(\infty)=0\end{cases}$

$k_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$ $\begin{cases}0型：k_v=0\quad e^*(\infty)=\infty\\ 1型：e^*(\infty)=T\frac{R_1}{k_v} & r(kT)=R_1kT\\ 2型+：k_v=\infty\quad e^*(\infty)=0\end{cases}$

$k_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$ $\begin{cases}0,1型：k_a=0\quad e^*(\infty)=\infty\\ 2型：e^*(\infty)=T^2\frac{R_2}{k_a} & r(kT)=\frac{R_2}{2}(kT)^2\\ 更高：k_a=\infty\quad e^*(\infty)=0\end{cases}$

采样器：T_p, T_s ↓，σ↑

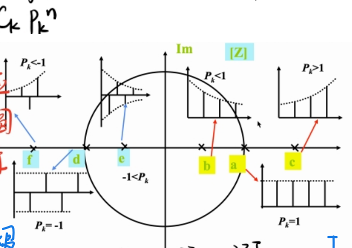
保持器：T_p, T_s，σ↑ 相角滞后稳定性降低

$C(z)=G(z)R(z)=\frac{C(1)}{R(1)}\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_kz}{z-P_k}$ $c^*(t)$ 稳态部分

$C_k=\lim_{z\to P_k}K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(z-P_j)}\cdot\frac{1}{z-1}$ 瞬态响应

$C_k(nT)=C_kP_k^n$

闭环极点应在右半单位圆中，尽量靠近原点。

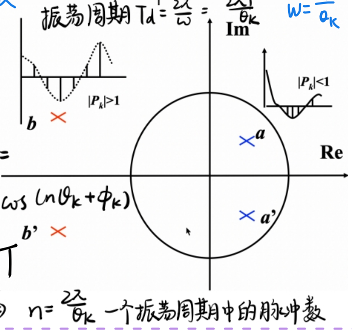


共轭复根

$P_k=|P_k|e^{j\theta_k}$

$C_k=|C_k|e^{j\phi_k}$

振荡周期 $T_d=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi T}{\theta_k}$ $w=\frac{T}{\theta_k}$



$C_{k,k+1}(nT)=2|C_k||P_k|^n\cos(n\theta_k+\phi_k)$

采样周期：T

$T_d=nT\Rightarrow n=\frac{2\pi}{\theta_k}$ 一个振荡周期中的脉冲数

数字控制系统

1）模拟 $G_c(s)\xrightarrow{Z}D(z)$ Pade近似

$H_0(s)=\frac{2T}{Ts+2}$ $e^{-Ts}=-\frac{s-\frac{2}{T}}{s+\frac{2}{T}}$

G_c 的离散法

①后向差分法（PID控制器）

$u(k)=k_c\{e(k)+\frac{T}{T_i}\sum_{j=0}^{k}e(j)+\frac{T_d}{T}[e(k)-e(k-1)]\}$

$\Delta u(k)=k_c\{e(k)-e(k-1)+\frac{T}{T_i}e(k)+\frac{T_d}{T}[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)]\}$

② 零极点、$s=-a\Leftrightarrow z=e^{-aT}$ 零极点匹配映射法

零点、$s=\infty\Leftrightarrow z=-1$

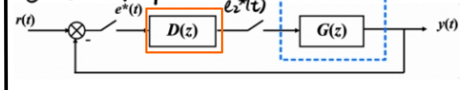
增益 $G_c(0)=D(1)$

$G_c(s)=k\frac{s+a}{s+b}\Leftrightarrow D(z)=C\frac{z-A}{z-B}$ $\begin{cases}A=e^{-aT}\\ B=e^{-bT}\\ C\frac{1-A}{1-B}=k\frac{a}{b}\end{cases}$

③ Tustin：$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

2）数字设计方法 $D(z)$ 无单位圆上（1外）加 $G(z)$ 分母极点最多比零点多1个

① Z域解析法 圆外的极点..



$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$

$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+D(z)G(z)}=1-\Phi(z)$

$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)[1-\Phi(z)]}=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$ 求 $\Phi(z)$ 或 $\Phi_e(z)$

注意 $G(z)$.

☆ 无稳态误差最小拍系统

闭环脉冲传函所有极点在原点时（n阶），

瞬态响应在n拍结束过渡过程。$\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b}{a_nz^n}$

设计 $D(z)$ 使 $E(z)=\sum_{k=0}^{N}e(k)z^{-k}$ N为满足要求最小整数.

典型输入信号 $r(t)=R_it^i$ $i=0,1,2,\cdots$

$R(z)=\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^m}$（$m=i+1$，$A(z^{-1})$ 为不含 $(1-z^{-1})$ 的 z^{-1} 多项式）

$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^mF(z)$ 取 $F(z)=1$

系统在m拍后无偏差.（从m拍开始）多mT时刻

典型输入 $r(t)$	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
$Z[r(t)]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$
$A(z^{-1})$	$m=1$ $A(z^{-1})=1$	$m=2$ $A(z^{-1})=Tz^{-1}$	$m=3$ $A(z^{-1})=[(Tz^{-1})^2+z^{-1}]/2$

步骤：① $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^mF(z)$

② 求 $D(z)$ ③ $Y(z)$ ④ $E(z)$

物理可实现性

- 从上式看，当 $F(z)=1$ 时，控制器物理可实现（$D(z)$ 的分子阶次≤分母的阶次），要求 $G(z)$ 的极点最多只能比其零点多一个
- 当 $F(z)=1$，$m\leq 3$ 时，若 $G(z)$ 有单位圆上或单位圆外零点，则 $D(z)$ 必有相同极点
- 当 $F(z)=1$ 时，若 $G(z)$ 在被 $(z-1)^m$ 抵消后还有单位圆上或单位圆外极点，则 $D(z)$ 必有相同零点
- 通过选择 $F(z)$ 解决 $F(z)=\frac{1-\Phi(z)}{(1-z^{-1})^m}=\frac{\Phi_e(z)}{(1-z^{-1})^m}=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}$

当 $G(z)$ 具有单位圆上和单位圆外零极点

若 $G(z)$ 有d个滞后环节 z^{-1}，则 $\Phi(z)$ 包含 z^{-d} 因子

$\Phi(z)$ 的零点包含 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的零点；

$\Phi_e(z)$ 的零点包含 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的极点；

设 $F(z)=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}$，代定系数，由 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$，求解，若无解，$F(z)$ 阶次↑直到有解

[例] $G(z)=\frac{0.76z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.135z^{-1})(1-0.0185z^{-1})}$ 滞后 单位圆外零点、单位圆上极点、

令 $\begin{cases}\Phi(z)=b_1z^{-1}(1+1.065z^{-1})\\ \Phi_e(z)=(1-z^{-1})(1+a_1z^{-1})\end{cases}$（$F(z)=1+a_1z^{-1}$）

由 $\Phi(z)=1-\Phi_e(z)$ 解得 $\begin{cases}a_1=0.516\\ b_1=0.484\end{cases}$ ⇒ $D(z)=\cdots$

☆ 无纹波 $E_2(z)$ 有限拍后常值输出

- $G(s)$ 至少 $m-1$ 个积分环节
- 若 $G(z)$ 含 z^{-d}，则 $\Phi(z)$ 含 z^{-d}
- $\Phi(z)$ 包含 $G(z)$ 全部零点、
- $\Phi_e(z)$ 包含 $G(z)$ 在单位圆上和圆外的全部极点、

[例] $G(z)=\frac{3.68z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$

设 $\begin{cases}\Phi(z)=z^{-1}(1+0.718z^{-1})(\beta_0+\beta_1z^{-1})\\ \Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2(1+\alpha_1z^{-1})\end{cases}$ 无纹波比有纹波多一阶单位圆内零点、多n个零点，多n拍.

② Z域根轨迹 → 求预期极点、设置 $D(z)$ 零点、参数

[例] $G(z)=\frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$，期望极点、$z_{1,2}=0.199\pm0.31j$

设 $D(z)=\frac{z-0.368}{z-z_d}$ $1+G(z_1)D(z_1)=0$ 求解 K和 z_d.（实部、虚部 =0）

能控性和能观性

能控性：输入u控制 x 从初始状态到任意值

对于系统 (A, B, C, D)，如果对任意初始状态 $x(0)\in R^n$ 和任意最终状态 $x_f\in R^n$，存在 $t_f\in(0,\infty)$ 和控制作用 $u(t)$，使得 $x(t_f)=x_f$，称系统 (A, B, C, D) 完全能控。

由状态方程的解：$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$

能观性：输出y能否去测量 x

对于系统 (A, B, C, D)，如果存在 $t_f\in(0,\infty)$，根据 $[0, t_f]$ 间的输出 $y(t)$ 和控制作用 $u(t)$ 能确定出初始状态 $x(0)$，称系统 (A, B, C, D) 完全能观。

- 确定了 $x(0)$，则可由 $x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^te^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ 确定 $[0, t_f]$ 间的 $x(t)$。

能控矩阵 $Q_c=[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]$

判据：① $rank(Q_c)=n$

PBH秩判据：② $\forall\lambda_i\in\lambda$，$rank[\lambda_iI-A\quad B]=n$

$\forall s$，$rank[sI-A\quad B]=n$

③ 对角标准型 $B'=T^{-1}B$ 无全零行. 出现零行时状态变量不可控

能观矩阵 $Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}$

判据：① $rank(Q_o)=n$

PBH秩判据：② $\forall\lambda_i\in\lambda$，$rank\begin{bmatrix}C\\\lambda_i-A\end{bmatrix}=n$ 列满秩

$\forall s$，$rank\begin{bmatrix}C\\sI-A\end{bmatrix}=n$

③ 对角标准型 $C'=CT$ 无全零列

能控能观 ⇔ $G(s)=\frac{C\cdot adj(sI-A)\cdot b}{|sI-A|}=\frac{N(s)}{D(s)}$

$N(s)$、$D(s)$ 无零极点对消

不对消的对应模态能控能观.

输出能控性矩阵：$S_o=[CB\quad CAB\quad\cdots\quad CA^{n-1}B\quad D]$

输出能控的充要条件（设输出变量数为q）：

$rankS_o=[CB\quad CAB\quad\cdots\quad CA^{n-1}B\quad D]=q$

离散系统

$rankQ_C=rank[H\quad GH\quad\cdots\quad G^{n-1}H]=n$ $Q_o=\begin{bmatrix}C\\CG\\\vdots\\CG^{n-1}\end{bmatrix}$

$rankQ_O=rank[C^T\quad G^TC^T\quad\cdots\quad(G^T)^{n-1}C^T]=n$

如果采样周期 T 选择得不妥当的话，一个能控的连续系统离散化后不一定能保持其能控性；同样，一个能观的连续系统离散化后也不一定能保持其能观性。

实现问题：

已知传递函数模型 $G(s)$，求一个状态空间模型

最小实现问题：

已知传递函数模型 $G(s)$，求一个完全能控、完全能观的状态空间模型

对偶原理 $S_1\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$ $S_2\begin{cases}\dot{z}=A^Tz+C^Tv\\ w=B^Tz\end{cases}$

S_1 能控（观）⇔ S_2 能观（控）.

线性变换 $\dot{x}=Ax+Bu \xrightarrow{x=Tz} \dot{z}=\underbrace{T^{-1}AT}_{A'}z+\underbrace{T^{-1}B}_{B'}u$

$y=Cx \longrightarrow y=\underbrace{CT}_{C'}z$ $\quad TA'=AT$

1) 对角标准型 $T=[t_1\ t_2 \cdots t_n]$ t_i为λ_i对应特征向量 n个线性无关

$\hat{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

2) Jordan标准型 A没有n个线性无关的特征向量

$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_1 & & \\ & \tilde{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \tilde{A}_p\end{bmatrix}$ $\quad \tilde{A}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i\end{bmatrix}_{\sigma_i\times\sigma_i}$ λ_i为σ_i重

若λ_i(σ_i重)只有1个独立的特征向量

$(\lambda_i I-A)v_{i1}=0$

$(\lambda_i I-A)v_{i2}=-v_{i1}$ $\cdots$ $(\lambda_i I-A)v_{i\sigma_i}=-v_{i,\sigma_i-1}$

$(\lambda_i I-A)v_{i3}=-v_{i2}$

解：$|\lambda I-A|=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ 求得 $\lambda=2$ 的特征向量 $[1\ \ 2\ \ 4]^T$

求得$\lambda=-1$的特征向量$[1\ \ -1\ \ 1]^T$，只有2个独立的特征向量，不可对角化

构造并求解 $(\lambda I-A)\zeta=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-2&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$，得广义特征向量$[1\ \ 0\ \ -1]^T$

化约当型的 $T=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\4&1&-1\end{bmatrix}$ ➡ $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

能控 ⟺ $\tilde{A}_i$对应的$\tilde{B}_i$最后一行线性无关

能观 ⟺ $\tilde{A}_i$对应的$\tilde{C}_i$第一列线性无关

3) ☆能控标准型 先看是否能控、能观

$\Delta(s)=|sI-A|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$.

$T_c=Q_cL$ $\quad L=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ a_2 & & & & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & 0\end{bmatrix}$ 不用求T_c^{-1}

$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots\\ 0 & 0 & & \ddots & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1}\end{bmatrix}$ $\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$C_c=CT_c$

4) ☆能观标准型 不用求T_o

$T_o^{-1}=LQ_o$ $\quad T_o^{-1}=T_c^T$ 对偶

$A_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & & & -a_1\\ 0 & 1 & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}$ $\quad b_o=T_o^{-1}b$ $\quad C_o=[0\ 0\ \cdots\ 1]$

$Q_c'=T_c^{-1}Q_c$ $\quad Q_o'=Q_oT$.

线性变换之前必须判断能控/观 ☆

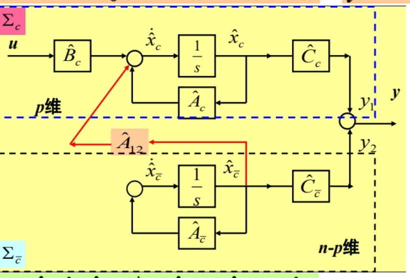
能控子空间分解 p维可控 (n-p)维不可控.

$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\\dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_c & \hat{A}_{12}\\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_c\\0\end{bmatrix}u$ $\begin{matrix}p\\n-p\end{matrix}$ $\quad \mathrm{rank}(Q_c)=p$

$y=[\hat{C}_c\ \ \hat{C}_{\bar{c}}]\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$

T: 从Q_c选出p个线性无关的列向量，补(n-p)个线性无关的列向量.

$\dot{x}=T^{-1}ATz+T^{-1}Bu=\hat{A}x+\hat{B}u$ $\quad y=CTx=\hat{C}x$



$\Sigma_c:(\hat{A}_c,\hat{B}_c,\hat{C}_c)$: $\dot{\hat{x}}_c=\hat{A}_c\hat{x}_c+\hat{A}_{12}\hat{x}_{\bar{c}}+\hat{B}_cu$

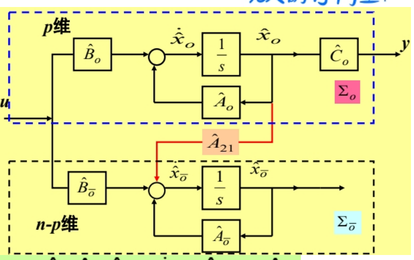
$y_c=\hat{C}_c\hat{x}_c$ ☆ 必须写

能观子空间分解

$\begin{bmatrix}\dot{x}_o\\\dot{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_o & \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_o\\x_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_o\\\hat{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}u$

$y=[\hat{C}_o\ \ 0]\begin{bmatrix}x_o\\x_{\bar{o}}\end{bmatrix}$

T^{-1}: 从Q_o选出p个线性无关的行向量，补(n-p)个线性无关的行向量.



$\Sigma_o:(\hat{A}_o,\hat{B}_o,\hat{C}_o)$: $\dot{\hat{x}}_o=\hat{A}_o\hat{x}_o+\hat{B}_ou$

$y=\hat{C}_o\hat{x}_o$

子空间分解后能观/能控/能观能控的传递函数与原系统相同

能控能观子空间分解

先能控分解 $\Sigma\to\Sigma_c$，再能观分解 $\Sigma_c\to\Sigma_{co}$

状态反馈 $u=r+kx$ ⟺ 完全能控

系统(A,B)镇定：存在k使(A+Bk,B)稳定

⇕

不能控子系统稳定.

不影响能控性，可能影响能观性（产生零极点对消）

（若 $u=r+ky=r+kCx$，则不影响能控能观性）

1) 直接法 ①判断完全能控

②期望闭环特征方程 $\Delta^*(\lambda)$

③ $|\lambda I-(A+BK)|$ ④列写系统闭环方程

系统(A,B)完全能控 ⟺ (A,B,C)可以用状态反馈任意配置极点

2) 能控标准型 $\Delta=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0$

①判断完全能控

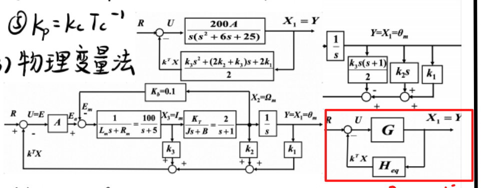
②构造T_c，计算A_c、b_c $\quad k_{ci}=a_{i-1}-\beta_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

③期望闭环特征方程 $\Delta^*(\lambda)=\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1\lambda+\beta_0$

④ $k_c=[a_0-\beta_0\ \ a_1-\beta_1\ \cdots\ a_{n-1}-\beta_{n-1}]$

⑤ $k_p=k_cT_c^{-1}$

3) 物理变量法

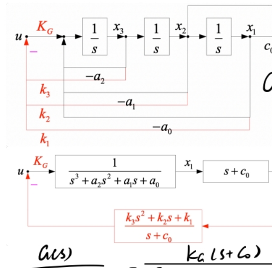


$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H_{eq}(s)}$ G(s)的分母阶次=n Heq(s)分子的阶次=n-1 最后形式

$G(s)H_{eq}(s)$极点为$G(s)$极点，零点为$H(s)$零点， 引入额外零点.

期望极点特征方程系数与$\frac{Y(s)}{R(s)}$对应系数相等.

☆相变量法



$G(s)=\frac{K_G(s+c_0)}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$

$H_{eq}(s)=\frac{k_3s^2+k_2s+k_1}{s+c_0}$

$\frac{G(s)}{1+G(s)H_{eq}(s)}=\frac{K_G(s+c_0)}{s^3+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$

Step 1. 绘制系统的状态变量图； $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$

Step 2. 假设所有的状态变量可测量；

Step 3. 将 $H_{eq}(s)$ 和 $Y(s)/R(s)$ 表示为k_i的形式；

Step 4. 根据单位阶跃输入（$u_{-1}(t)$）零稳态误差的要求，计算 k_1 值；即 $y(t)_{ss}=\lim_{s\to0}sY(s)=1$；

Step 5. 根据期望的系统特性(M_p, t_p, t_s, 和稳态误差)分析期望的$Y(s)/R(s)$。有时也希望通过配置一个或多个闭环极点来对消不期望的$Y(s)/R(s)$零点。

Step 6. 令steps 3 和 5 所得到的闭环传递函数相等。分母多项式中对应项系数相等，从而解得 k_i 的值。若在设计中采用相变量，则必须进行线性变换， 将相变量反馈系数转换为控制系统中物理变量对应的系数。

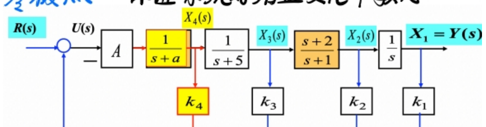
n-1个零点由k_i决定

$H_{eq}(s)=\frac{k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1}{s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0}$ $\quad G(s)H_{eq}(s)=\frac{K_G(k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$

全极点系统 → 与物理变量化简、求解思路相同 变为G与Heq

要对增益变化的不灵敏，期望闭环必须有β个主导闭环极点位于$H_{eq}(s)$的β个零点附近，其余(n-β)个非主导.

零极点、 保证系统对增益变化不敏感



期望的闭环系统增加一个非主导极点， 原则上 $a\neq2$ 均可（取a=1） 无零极点对消

分析期望的系统特性以及闭环传函.

分析期望的根轨迹 $1+G(s)H_{eq}(s)=0$ 验证对增益变化的不敏感性.

确定k_i值以产生期望的系统特性.

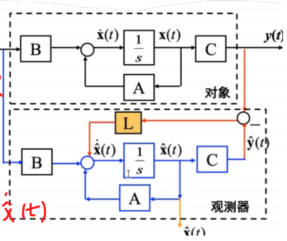
全维状态观测器

$\tilde{\Sigma}_o$: $\dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Bu(t)+Ly(t)$

误差：

$\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t)$

$\dot{\tilde{x}}(t)=(A-LC)\tilde{x}(t)$



1) 直接法： 任意极点配置

①判断完全能观

② $\Delta^*(s)$

③ $|sI-(A-LC)|$

④系数相等 ⑤写出$\hat{x}(t)$

2) 能观标准型 $\Delta=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0$

①判断完全能观 $\quad L_{oi}=\beta_{i-1}-a_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

②构造T_o，计算A_o、C_o

③期望闭环特征方程 $\Delta^*(\lambda)=\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1\lambda+\beta_0$

④ $L_o=[\beta_0-a_0\ \ \beta_1-a_1\ \cdots\ \beta_{n-1}-a_{n-1}]^T$

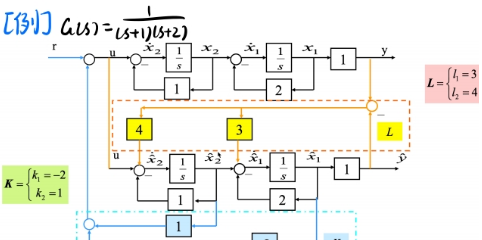
⑤ $L=T_oL_o$

分离原理： K和L可独立设计 单独求解K、L再组合

$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{\tilde{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BK & -BK\\ 0 & A-LC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\tilde{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}r$

$Q(\lambda)=|\lambda I-(A+BK)|\cdot|\lambda I-(A-LC)|$

[例] $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$



$L=\begin{cases}l_1=3\\l_2=4\end{cases}$ $\quad K=\begin{cases}k_1=-2\\k_2=1\end{cases}$

降维状态观测器

① $\mathrm{Rank}[C]=m<n$

② 构造 $Q^{-1}=\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}_{n\times n}$ R随意设 $CQ=[I_m\ 0]$

③ 计算变换后的系统 $\bar{\Sigma}:(\bar{A},\bar{b})$

令：$x=Q\bar{x}$ $\quad$ 则：$\dot{\bar{x}}=Q^{-1}AQ\bar{x}+Q^{-1}Bu$, $\quad y=CQ\bar{x}=[I_m\ \ 0]\bar{x}$

$\Sigma:\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\\dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11}&\bar{A}_{12}\\\bar{A}_{21}&\bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\\bar{B}_2\end{bmatrix}u\\ y=[I_m\ \ 0]\bar{x}=\bar{x}_1\end{cases}$ ➡ $\begin{matrix}\dot{\bar{x}}_1=\dot{y}=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{A}_{12}\bar{x}_2+\bar{B}_1u\\ \dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{A}_{21}\bar{x}_1+\bar{B}_2u\end{matrix}$ $=y$

得到关于 $\bar{x}_2$ 的(n-m)维状态方程及输出方程 $\quad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{u}\\ w=\bar{A}_{12}\bar{x}_2\end{cases}$

④设计状态观测器 $|sI-(\bar{A}_{22}-L\bar{A}_{12})|$，得到L

⑤计算F，H，G，写出系统Σ_3

$\begin{cases}\bar{A}_{22}-L\bar{A}_{12}=F\\ \bar{A}_{21}-L\bar{A}_{11}+(\bar{A}_{22}-L\bar{A}_{12})L=G\\ \bar{B}_2-L\bar{B}_1=H\end{cases}$ $\quad \Sigma_3:\begin{cases}\dot{z}=Fz+Gy+Hu\\ \hat{\bar{x}}_2=z+Ly\end{cases}$

故 $\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\hat{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\Ly+z\end{bmatrix}$ $\quad$ 最后 $\hat{x}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\end{bmatrix}=Q\hat{\bar{x}}$

非线性系统不满足叠加原理；稳定性不仅取决于系统参数，初始条件与外加输入有关

自激振荡 多值响应 跳跃谐振

非线性系统稳定性是针对平衡点讨论的 $\begin{cases}\dot{x}=f(x,t)\\ f(x,t)=0\text{的点}\end{cases}$

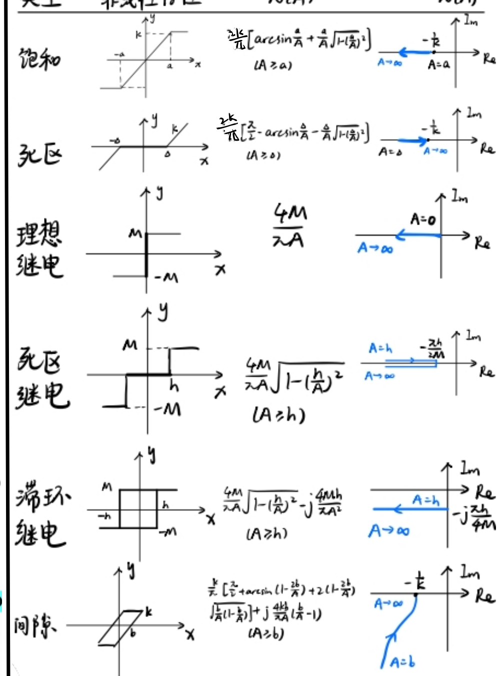
描述函数 输入 $e(t)=A\sin\omega t$

输出基波分量 $x_1(t)=X_1\sin(\omega t+\varphi_1)$ $\quad N(A)=\frac{X_1}{A}e^{j\varphi_1}$

1) 系统线性部分和非线性环节可以分离。如下图所示，图中NL为非线性环节，G为线性部分的传递函数。 适用条件

2) 非线性特性具奇对称特性，且输入输出关系为静特性。

3) 线性部分应具良好的低通滤波特性。



因果最小相位开环传函 G(s)

$G(j\omega)$不包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 闭环稳定，包围则不稳定

相交则自激振荡（是否稳定需判断）.

➢ 公式 $G(j\omega)=-\frac{1}{N(A)}$ 将奈奎斯特判据推广应用于非线性系统，可判断系统运动稳定性：线性部分为最小相位系统，若轨线 $G(j\omega)$ 不包围轨线 $-\frac{1}{N(A)}$，则系统是稳定的；若轨线 $G(j\omega)$ 包围轨线 $-\frac{1}{N(A)}$，则系统是不稳定的，若 $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(A)}$ 相交，则意味着系统会产生自激振荡，交点处 $G(j\omega)$曲线所对应的角频率ω为自激振荡的角频率，交点处$-\frac{1}{N(A)}$所对应的幅值A为自激振荡的振幅值。

Lyapunov第一法(间接法)

9.1 线性定常系统 $\dot{x}=Ax$ $x(0)=x_0$, $t\geq0$

渐近稳定 ⟺ A所有特征值在复平面左半平面

稳定 ⟺ A所有特征值实部非负，且实部为0的特征值为A的最小多项式的单根

非线性系统 $\dot{x}=f(x)$ 线性化：

$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x^T}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x=x_e}=A$ $\begin{cases}\forall\lambda<0 & \text{渐近稳}\\ \exists\lambda>0 & \text{不稳定}\\ \exists\lambda=0 & \text{不知道}\end{cases}$ 平衡点.

$\dot{x}=f(x_e)+A(x-x_e)+$余项.

☆ Lyapunov第二法(直接法) 仅讨论 $x_e=0$

9.2 $\dot{x}(t)=f(x(t))$ $\quad f(0)=0$ $\quad$ 9.2为充分条件

$\forall t\geq t_0$，若存在 $V(x,t)$ 满足 $V(x,t)$正定, $\dot{V}(x,t)$负定

则原点处渐近稳定（若$\|x\|\to\infty$时$V(x,t)\to\infty$，则大范围渐近稳定）

V(x)不是唯一，常取 $V(x)=ax_1^2+bx_2^2$（常取a=b=1）

* 线性系统，渐近稳定 ⇒ 大范围渐近稳定

9.3 对$\forall t\geq t_0$ $V(x,t)$正定, $\dot{V}(x,t)$负半定, $\dot{V}[\Phi(t;x_0,t_0),t]$不恒为0 ($t_0$时从$x_0$出发的解)

$\|x\|\to\infty$时 $V(x,t)\to\infty$ 则原点处大范围渐近稳定

9.4 对$\forall t\geq t_0$ $V(x,t)$正定, $\dot{V}(x,t)$负半定, $\dot{V}[\Phi(t;x_0,t_0),t]$均恒等于0 ($x_0\neq0$)

则原点处Lyapunov意义稳定

9.5 对$\forall t\geq t_0$ $V(x,t)$在原点附近某邻域正定, $\dot{V}(x,t)$同邻域正定 ⇒ 原点处不稳定.

若$\dot{V}(x,t)$正半定，非零状态时不恒为0，则不稳定.

☆ Lyapunov方程 $A^TP+PA=-Q$ → 针对线性定常系统

9.6 $\forall$正定对称矩阵Q，∃正定对称矩阵P满足$A^TP+PA=-Q$

则$V(x)=x^TPx$是一个Lyapunov函数 ⟺ 线性定常连续渐近稳定

① 常取$Q=I$

② 计算P (P_{11}, P_{12}, P_{22} 待定系数) P为对称方阵

③ 若P正定，则渐近稳定 正定 ⟺ 各阶主子行列式>0

·若 $\dot{V}(x)=-x^TQx$ 沿任一条轨迹不恒等于0，Q可取正半定阵

9.7 $x(k+1)=Gx(k)$，平衡 $x_e=0$

Lyapunov方程：$G^TPG-P=-Q$

$V[x(k)]=x^T(k)Px(k)$

9.8 非线性系统 $\dot{x}=f(x)$ $f(0)=0$ $\quad F(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$

$\hat{F}(x)=F^T(x)+F(x)$

若$\hat{F}(x)$负定 则$x=0$渐近稳定 且 $V(x)=f^T(x)\cdot f(x)$

若$\|x\|\to\infty$ $V(x)\to\infty$ 则大范围渐近稳定

没有外部输入的动态系统 $\dot{x}=f(x(t))$ 称为自治系统。

若自治系统是线性定常的，即有$f(x,t)=Ax$，则当A为非奇异矩阵时，系统存在一个唯一的平衡状态；当A为奇异矩阵时，系统将存在无穷多个平衡状态。∃λ=0

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0)\in S(\delta),\forall t\in[0,\infty),x(t)\in S(\varepsilon)$平衡点$x_e$在李亚普诺夫意义下稳定

$\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x(0)\in S(\delta),\exists t\in[0,\infty),x(t)\notin S(\varepsilon)$ 平衡点x_e在李亚普诺夫意义下不稳定

lyapunov意义下稳定、渐近稳定、不稳定 ⟷ 经典控制的临界稳~,不~

正定：当$x\neq0$, $V(x)\neq0$. 只有$x=0$时$V(x)=0$ $\quad$ 负定：$-V(x)$正定

正半定：$x=0$时$V(x)=0$，$x\neq0$时 $V(x)\geq0$ ∃$x\neq0$ $V(x)=0$ 负半定：$-V(x)$正半定

矩阵正定 ⟺ 方阵 对称 所有顺序主子式为正 $\quad V=x^TPx$

$V(x)=ax_1^2+bx_2^2$ $\quad \dot{V}(x)=2ax_1\dot{x}_1+2bx_2\dot{x}_2$ $\quad \begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-x_2\end{cases}$

解：显然，原点（$x_1=0$，$x_2=0$）是唯一的平衡状态。

9.2 如果定义一个正定标量函数$V(x)$ $V(x)=x_1^2+x_2^2$ 当$\|x\|\to\infty$时，$V(x)\to\infty$

$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1x_2+2x_2(-x_1-x_2)=-2x_2^2$

对于非零状态（$x_2=0,x_1\neq0$），$\dot{V}(x,t)=0$

对于其他任意状态，存在 $\dot{V}(x,t)<0$，所以 $\dot{V}(x,t)$负半定。

假设有从非零状态出发的状态轨迹 $\Phi(t)=[\phi_1(t)\ \ \phi_2(t)]^T$，使得 $\dot{V}(\Phi(t))\equiv0$

则 $\phi_2(t)\equiv0$ 。 由 $\dot{\phi}_2(t)=-\phi_1(t)-\phi_2(t)$及$\phi_2(t)\equiv0$，可得 $\phi_1(t)\equiv0$

与从非零状态出发的假设矛盾。只有从原点出发的状态轨迹满足 $\dot{V}(\Phi(t))\equiv0$

因此，在该系统任意的从非零状态出发的状态轨迹上，$\dot{V}$不恒等于零 反证法证明

根轨迹绘制法则

·分支数 = max{m,n}，连续，关于实轴对称

·始于开环极点，终于开环零点

·n-m条渐近线，与实轴夹角 $\gamma=\frac{(1+2k)180°}{n-m}$ $(k=0,1,\cdots,n-m-1)$ 交点 $\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}$

·实轴根轨迹：右侧零、极点个数和为奇数

·q重极点出射角：$\frac{(1+2k)180°+\sum\angle(p_d-z_j)-\sum\angle(p_d-p_i)}{q}$ $\quad k=0,1,\cdots,q-1$

q重零点入射角：$\frac{(1+2k)180°+\sum\angle(z_d-p_i)-\sum\angle(z_d-z_j)}{q}$ $\quad k=0,1,\cdots,q-1$

·分离点：$\sum\frac{1}{s-p_i}=\sum\frac{1}{s-z_j}$ $\quad$ 无有限零点，$\sum\frac{1}{s-p_i}=0$

$(-k=\frac{\prod(s-p_i)}{\prod(s-z_j)}$，$\frac{d(-k)}{ds}=0$ 求s)

·分离角：l条根轨迹交点，$\frac{(2k+1)\pi}{l}$

·与虚轴交点：

$\begin{cases}\mathrm{Re}(1+G(j\omega)H(j\omega))=0\\ \mathrm{Im}(1+G(j\omega)H(j\omega))=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_c\\ \pm\omega_c\end{cases}$

·n-m≥2时，系统根的和为常数. $\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$ （$\sum p_i$为k=0时根的和）

正反馈 (k<0)

·渐近线 $\gamma=\frac{k\cdot360°}{n-m}$

·实轴根轨迹：右侧零、极点个数和为偶数

·出/入射角：$(1+2k)180°\to k\cdot360°$ $\quad k=0,1,\cdots,q-1$

·开环Nyquist曲线绘制

1) 开环幅相曲线的起点，取决于比例环节K和系统积分或微分环节的个数m（系统的型别），因为其他环节当ω=0时为1。

m<0，起点为原点；

m=0，起点为实轴上的点K处（K为系统开环增益，K有正负之分）；

m>0，K>0时，起点为m×(-90°)的无穷远处，K<0时，起点为m×(-90°)-180°的无穷远处。

令虚部为零，可求出频率特性与实轴的交点；令实部为零，可求出频率特性与虚轴的交点。

2) 开环幅相曲线的终点，取决于开环传递函数分子、分母多项式中最小相位环节和非最小相位环节的阶次和。

设系统开环传递函数分子、分母多项式的阶次分别为w和n，记除K外，分子多项式中最小相位环节的阶次和为w_1，非最小相位环节的阶次和为w_2，分母多项式中最小相位环节的阶次和为n_1，非最小相位环节的阶次和为n_2，则有

$w=w_1+w_2$, $n=n_1+n_2$ $\quad \phi(\infty)=\begin{cases}[(w_1-w_2)-(n_1-n_2)]\times90° & K>0\\ [(w_1-w_2)-(n_1-n_2)]\times90°-180° & K<0\end{cases}$

特别地，当开环系统为最小相位系统时，

若 $n=w$, $G(j\infty)H(j\infty)=K^*$

$n>w$, $G(j\infty)H(j\infty)=0\angle(n-w)\times(-90°)$

其中K^*为系统开环根轨迹增益

3) 若开环系统存在特殊振荡环节，重数 l 为正整数，即开环传递函数具有下述形式

$G(s)H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+1\right)^l}G_1(s)H_1(s)$

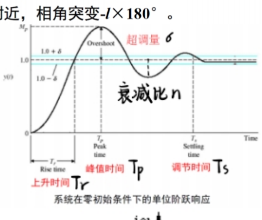
$G_1(s)H_1(s)$不含$\pm j\omega_n$的极点，当ω趋于ω_n时，$|GH(j\omega)|$趋于无穷，而

$\phi(\omega_{n-})\approx\phi_1(\omega_n)=\angle G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)$

$\phi(\omega_{n+})\approx\phi_1(\omega_n)-l\times180°$

即$\Phi(\omega)$在$\omega=\omega_n$的附近，相角突变$-l\times180°$。

阻尼振荡频率 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



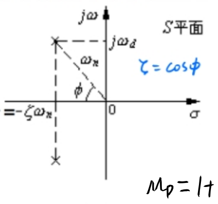
系统在零初始条件下的单位阶跃响应

$\sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

$T_r=\frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$T_s=\begin{cases}\frac{3}{\zeta\omega_n} & 5\%\\ \frac{4}{\zeta\omega_n} & 2\%\end{cases}$



$n=e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ $\quad M_p=1+e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

等ζ：$z=e^{-\omega T\cot\phi}\angle\omega T$ 螺线