

现代控制理论

Modern Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录



第九章 Chapter 9

非线性系统分析



主要内容

- 简介
- **Description Function (描述函数)**
- **Lyapunov (李亚普诺夫) 稳定性分析**

简介

- 非线性系统特点
- 研究非线性系统的意义与方法
- 常见的非线性特性
- 典型非线性特性的数学描述

非线性系统特点

- 许多实际系统在某个操作点附近都可以近似为线性系统：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$
$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{近似线性})$$

- 线性系统满足：

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t); x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$
$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

- 非线性系统与线性系统相比，具有一系列新的特点：

1) 非线性控制系统不满足叠加原理

非线性系统特点

非线性系统与线性系统相比，具有一系列新的特点：

2) **非线性系统的稳定性**不仅取决于系统的固有结构和参数，而且与系统的初始条件以及外加输入有关系。

➤ 对非线性系统而言，稳定性总是针对某一平衡点（状态）讨论的。

所谓平衡点（状态）：

设

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

求出满足

$$f(x, t) = 0$$

的所有 x_e ，即为非线性系统的**平衡点**。

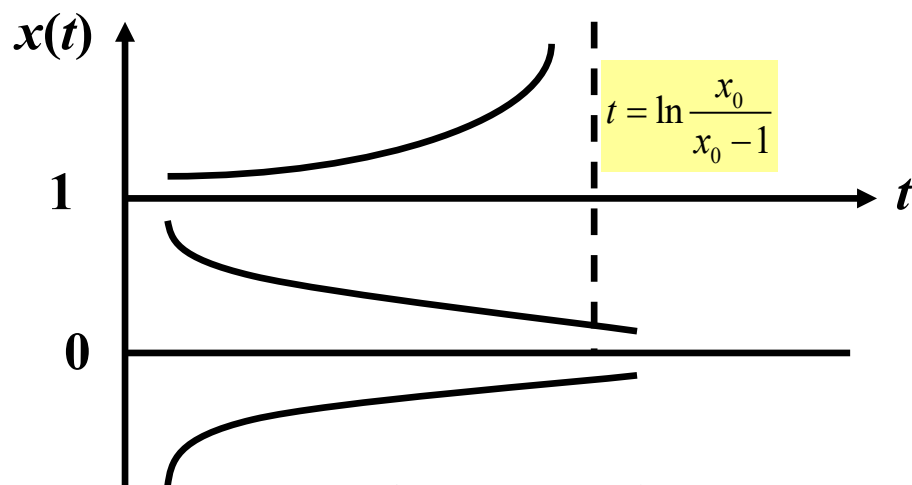
非线性系统特点

例：对于一由非线性微分方程 $\dot{x} = -x(1-x)$ 描述的非线性系统，显然有两个平衡点，即 $x_1=0$ 和 $x_2=1$ 。将上式改写为

$$\frac{dx}{x(1-x)} = -dt$$

设 $t=0$ 时，系统的初态为 x_0 。积分上式可得

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$



一阶非线性系统

若初始条件 $x_0 < 1$ ，随着时间 $t \rightarrow \infty$ ， $x(t) \rightarrow 0$ ，即平衡状态 $x_1=0$ 是小范围稳定的；当 $x_0 > 1$ 时，在 $t = \ln(x_0/(x_0-1))$ 时， $x(t) \rightarrow \infty$ ，说明 $x_2=1$ 是不稳定的平衡状态。

非线性系统特点

非线性系统与线性系统相比，具有一系列新的特点：

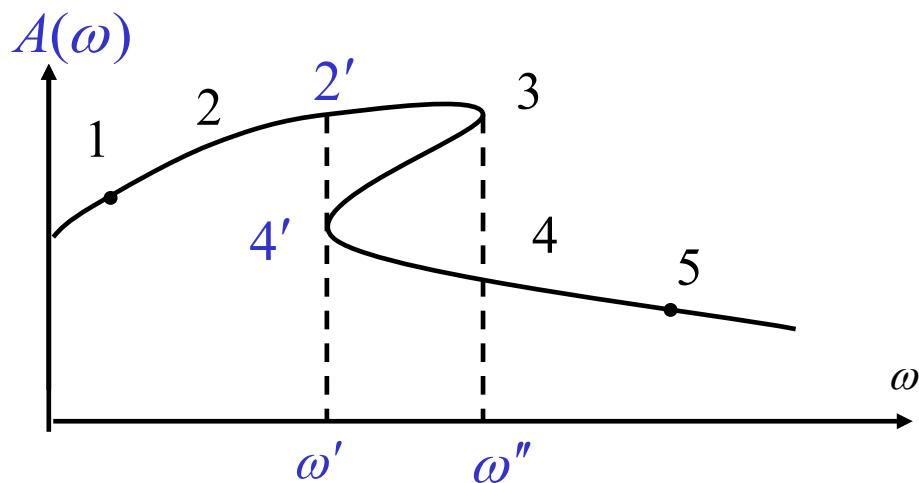
3) 非线性系统**可能存在自激振荡**现象
(即维持等幅振荡运动)

对于二阶非线性系统，这种自激振荡状态称为**极限环**。

自激振荡（自振）：没有外界周期变化信号的作用时，系统内产生的具有固定振幅和频率的稳定周期运动。

4) 非线性系统在正弦信号作用下，其输出可能存在极其复杂的情况：

- 跳跃谐振和多值响应

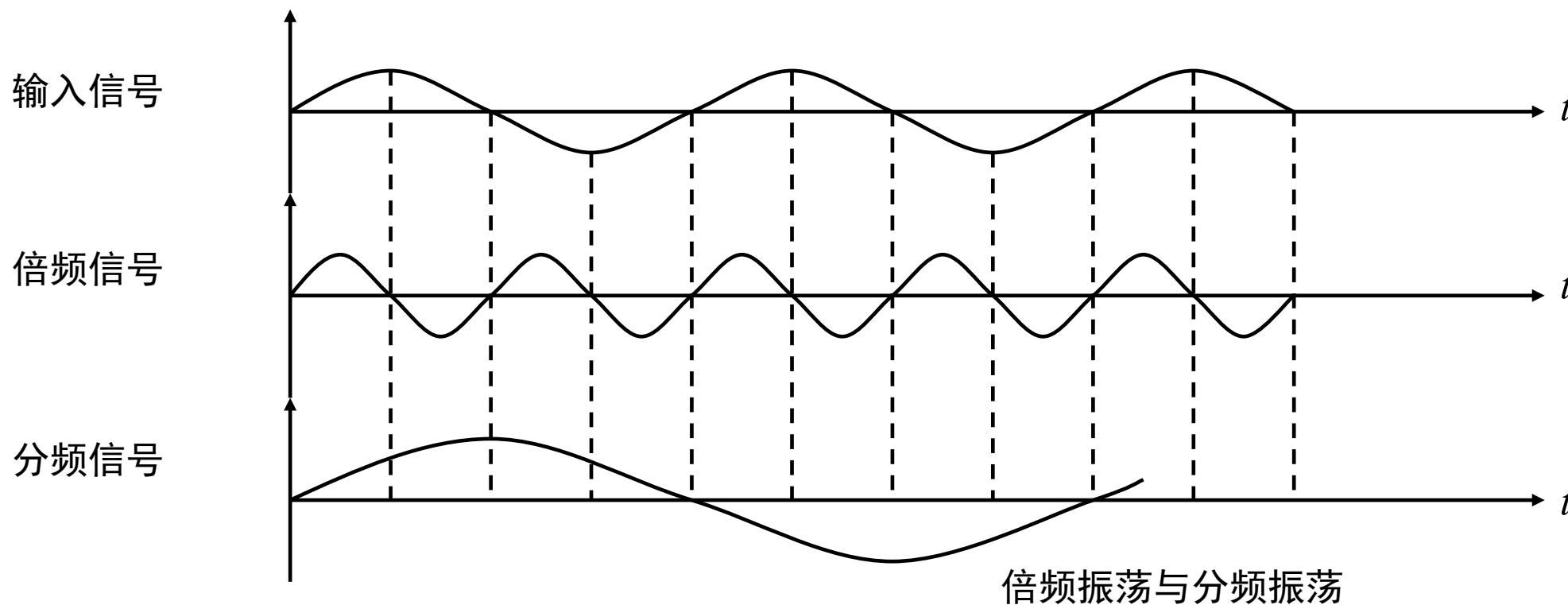


跳跃谐振与多值响应

非线性系统特点

- 分频振荡和倍频振荡

非线性系统在正弦信号作用下，其稳态分量除产生同频率振荡外，还可能产生倍频振荡和分频振荡。如图所示波形：



研究非线性系统的意义与方法

研究非线性系统的意义

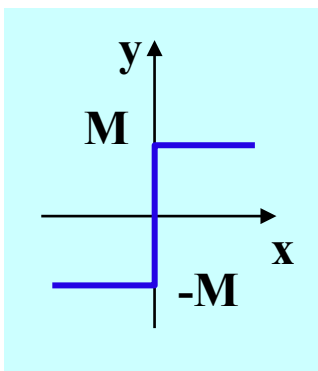
- 1) 一些强非线性系统在较大的工作范围内, 无法利用线性近似;
- 2) 用线性系统理论进行分析无法解释系统中非线性因素产生的影响;
- 3) 合理引入非线性环节, 可取得线性方法达不到的效果。

研究非线性系统的方法

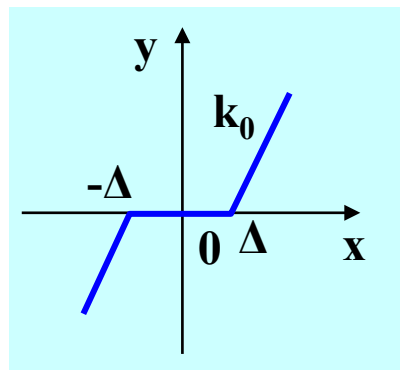
- 1) **相平面法**: 用图解的方法分析一阶, 二阶非线性系统的方法。
- 2) **描述函数法**: 是受线性系统频率分析法启发, 而发展出的一种分析非线性系统的方法。它是一种谐波线性化的分析方法, 是频率法在非线性系统分析中的推广。
- 3) **计算机求解法**是利用计算机求解非线性微分方程的一种数值解法。
- 4) **Lyapunov函数法**: 基于状态空间描述建立起来的**确定系统稳定性的一般理论**。

常见的非线性特性

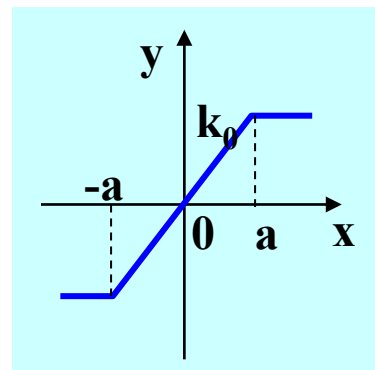
继电特性



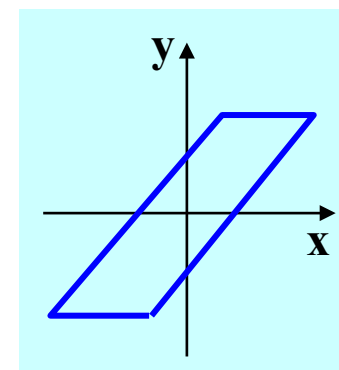
死区特性



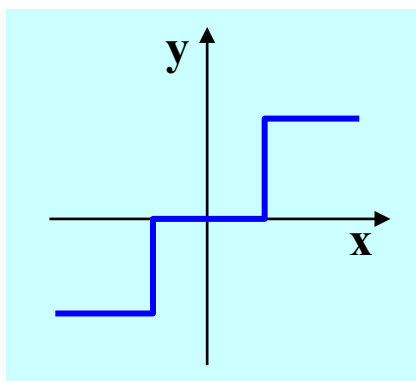
饱和特性



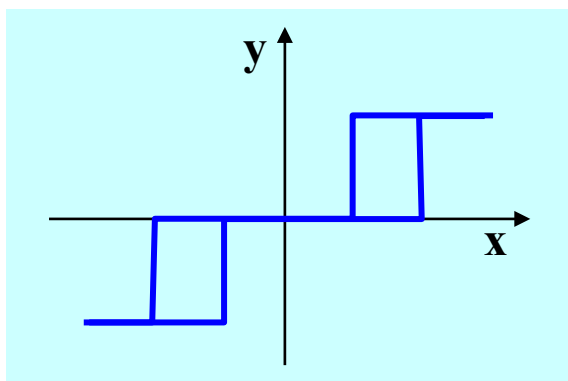
滞环



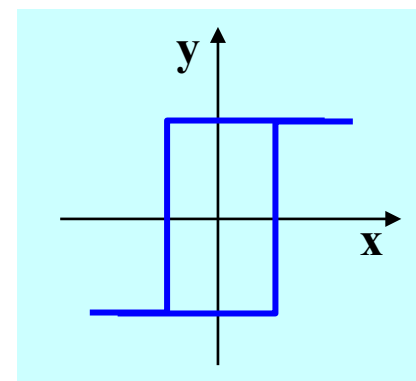
死区双位



死区滞环双位



间隙双位



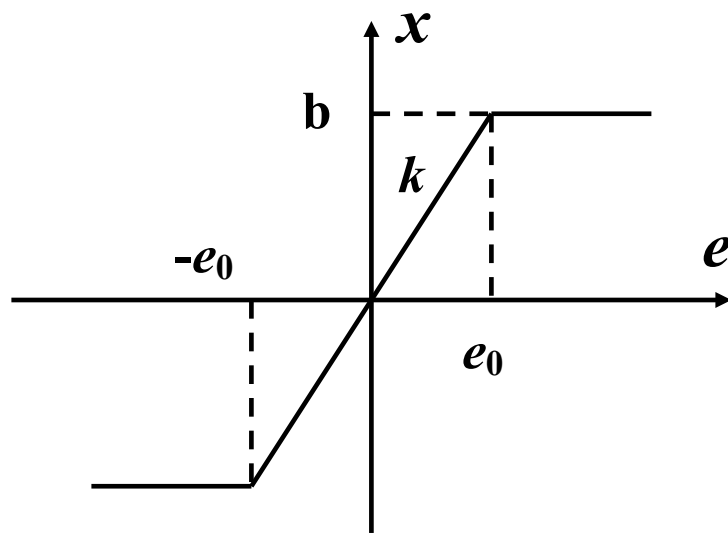
典型非线性特性的数学描述

饱和特性

- 在电子放大器中常见的一种非线性

饱和特性输入输出关系的数学描述:

$$x(t) = \begin{cases} ke(t) & |e(t)| < e_0 \\ ke_0 \operatorname{sign} e(t) & |e(t)| > e_0 \end{cases}$$



饱和特性

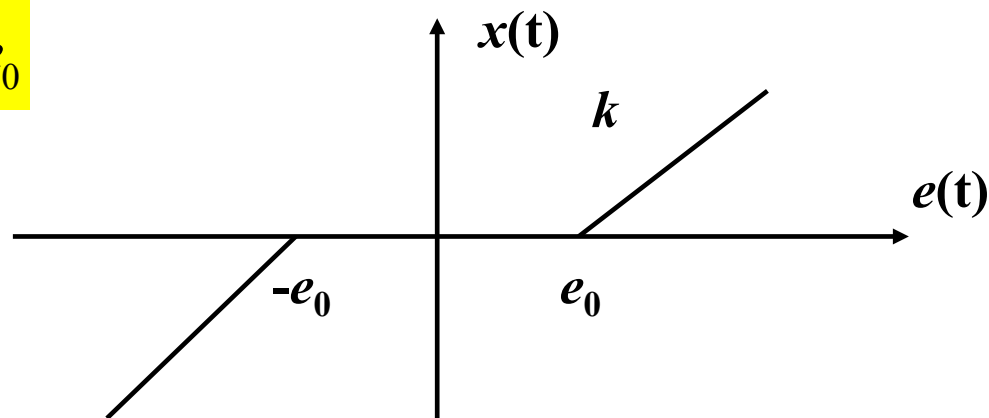
典型非线性特性的数学描述

死区特性

➤ 死区特性也称为不灵敏区，大量存在各种放大器中。其特性如图所示。其数学描述如下：

$$x(t) = \begin{cases} 0 & |e(t)| \leq e_0 \\ k[e(t) - e_0 \text{sign}e(t)] & |e(t)| \geq e_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |e(t)| \leq e_0 \\ |e(t)| \geq e_0 \end{cases}$$



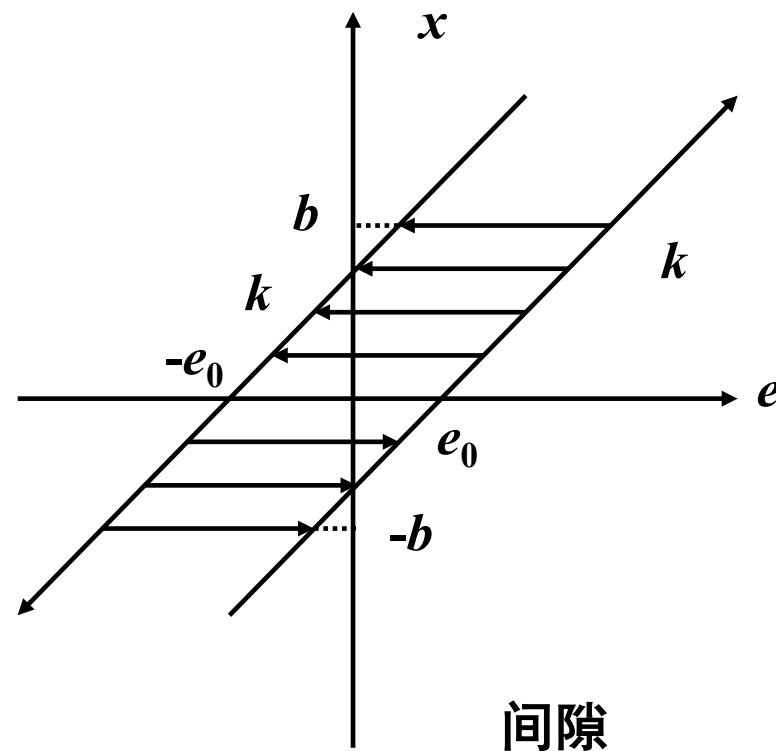
死区特性

典型非线性特性的数学描述

间隙特性

➤ 存在于齿轮之间。其特性如图所示。其数学描述如下：

$$x(t) = \begin{cases} k[e(t) - e_0], & \dot{x}(t) > 0 \\ k[e(t) + e_0], & \dot{x}(t) < 0 \\ b \operatorname{sign}e(t), & \dot{x}(t) = 0 \end{cases}$$



间隙

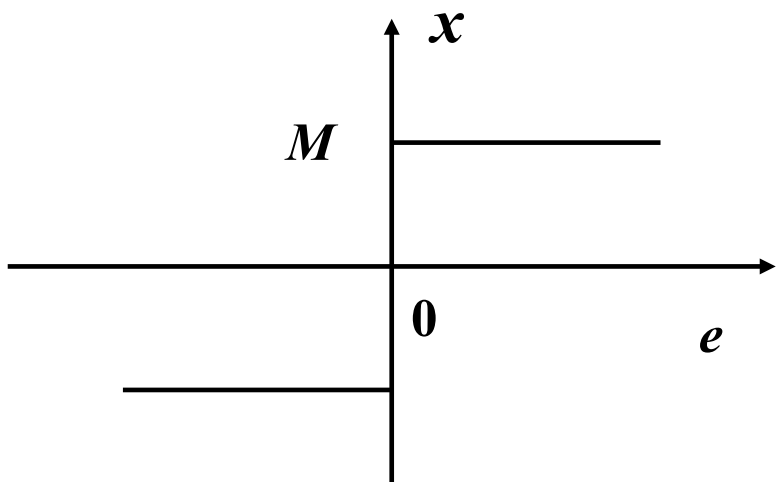
典型非线性特性的数学描述

继电特性

➤ 继电特性是根据**控制的需要**，**人为产生**的一种非线性特性。在使用继电特性时，有四种可供选择的形态。

1) 理想继电特性

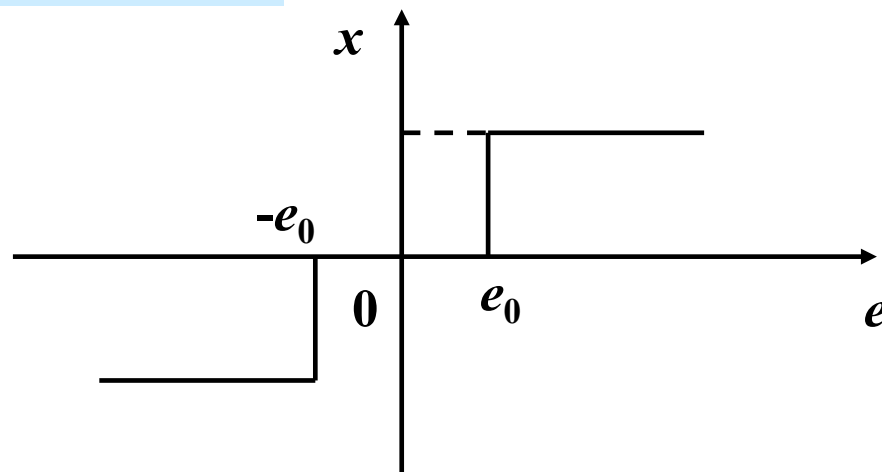
$$x(t) = \begin{cases} M, & e > 0 \\ -M, & e < 0 \end{cases}$$



理想的继电特性

2) 具有死区的继电特性

$$x(t) = \begin{cases} M & e(t) > e_0 \\ 0 & -e_0 \leq e(t) \leq e_0 \\ -M & e(t) < -e_0 \end{cases}$$



具有死区的继电特性

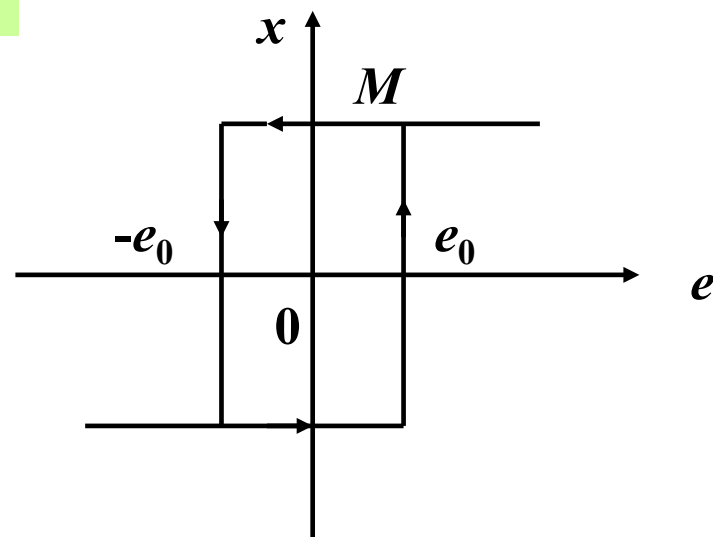
典型非线性特性的数学描述

继电特性

➤ 继电特性是根据控制的需要，人为产生的一种非线性特性。在使用继电特性时，有四种可供选择的形态。

3) 具有滞环的继电特性

$$x(t) = \begin{cases} M, & \dot{e}(t) > 0, e(t) > e_0; \dot{e}(t) < 0, e(t) > -e_0 \\ -M, & \dot{e}(t) > 0, e(t) < e_0; \dot{e}(t) < 0, e(t) < -e_0 \end{cases}$$



具有滞环的继电特性

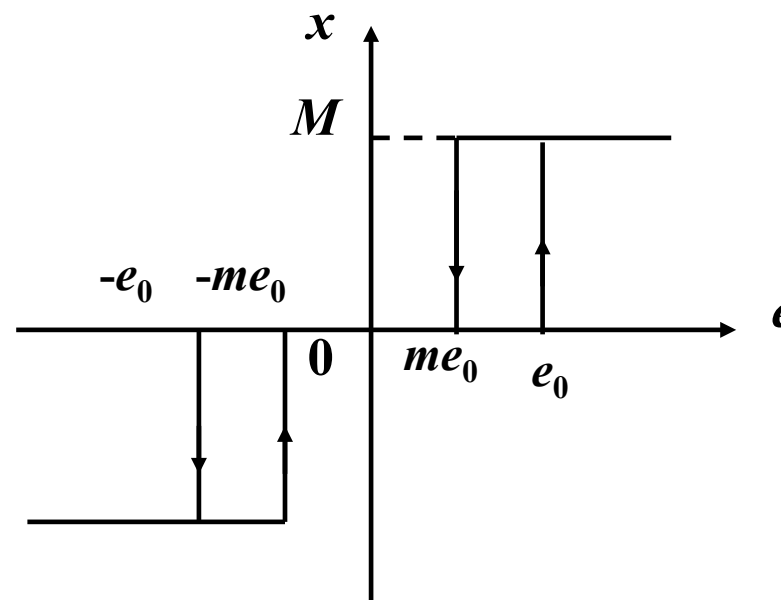
典型非线性特性的数学描述

继电特性

➤ 继电特性是根据**控制的需要**，**人为产生**的一种非线性特性。在使用继电特性时，有四种可供选择的形态。

4) 具有滞环和死区的继电特性

$$x(t) = \begin{cases} M, & \dot{e} > 0, e > e_0 \\ & \dot{e} < 0, e > me_0 \\ 0, & \dot{e} > 0, -me_0 < e < e_0 \\ & \dot{e} < 0, -e_0 < e < me_0 \\ -M, & \dot{e} > 0, e < -me_0 \\ & \dot{e} < 0, e < -e_0 \end{cases}$$



具有滞环和死区的继电特性

主要内容

- 简介
- **Description Function (描述函数)**
- **Lyapunov (李亚普诺夫) 稳定性分析**



描述函数法

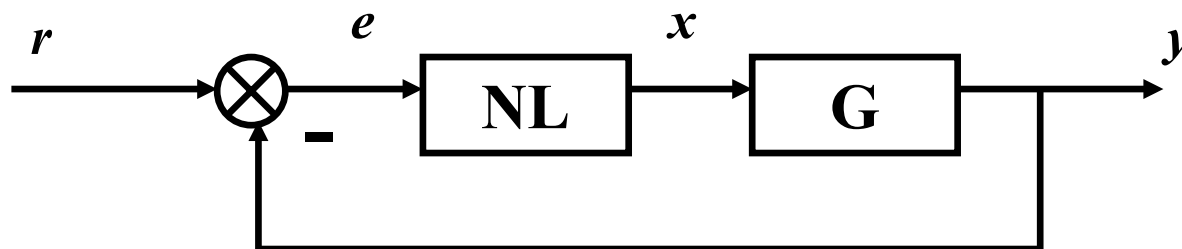
- 描述函数的概念
- 典型非线性的描述函数
- 用描述函数分析非线性系统



描述函数的概念

➤ 描述函数法是一种近似分析非线性系统的方法，将线性系统的频率法改进后用于非线性系统，它适用于具有以下特点的非线性系统。

- 1) 系统线性部分和非线性环节可以分离。如下图所示，图中NL为非线性环节，G为线性部分的传递函数。
- 2) 非线性特性具奇对称特性，且输入输出关系为静特性。
- 3) 线性部分应具备良好的低通滤波特性。



非线性系统典型结构示意图

描述函数的概念

- 若满足以上条件，描述函数可定义为非线性环节稳态正弦响应中的基波分量与输入正弦量的复数比。设输入为正弦量 $e(t) = A \sin \omega t$

一般情况下，其输出为周期函数，展开成傅立叶级数

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

式中，由于非线性为奇对称特性，所以 $A_0=0$ 。而

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos n\omega t d(\omega t) \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

忽略高次分量，取基波分量，有 $A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t d(\omega t)$ $B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d(\omega t)$

则基波分量为

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = x_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$x_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

则描述函数定义为

$$N(A) = \frac{x_1}{A} e^{j\phi_1}$$

- $N(A)$ 是输入幅值 A 的函数，是一个可变增益的复放大系数。

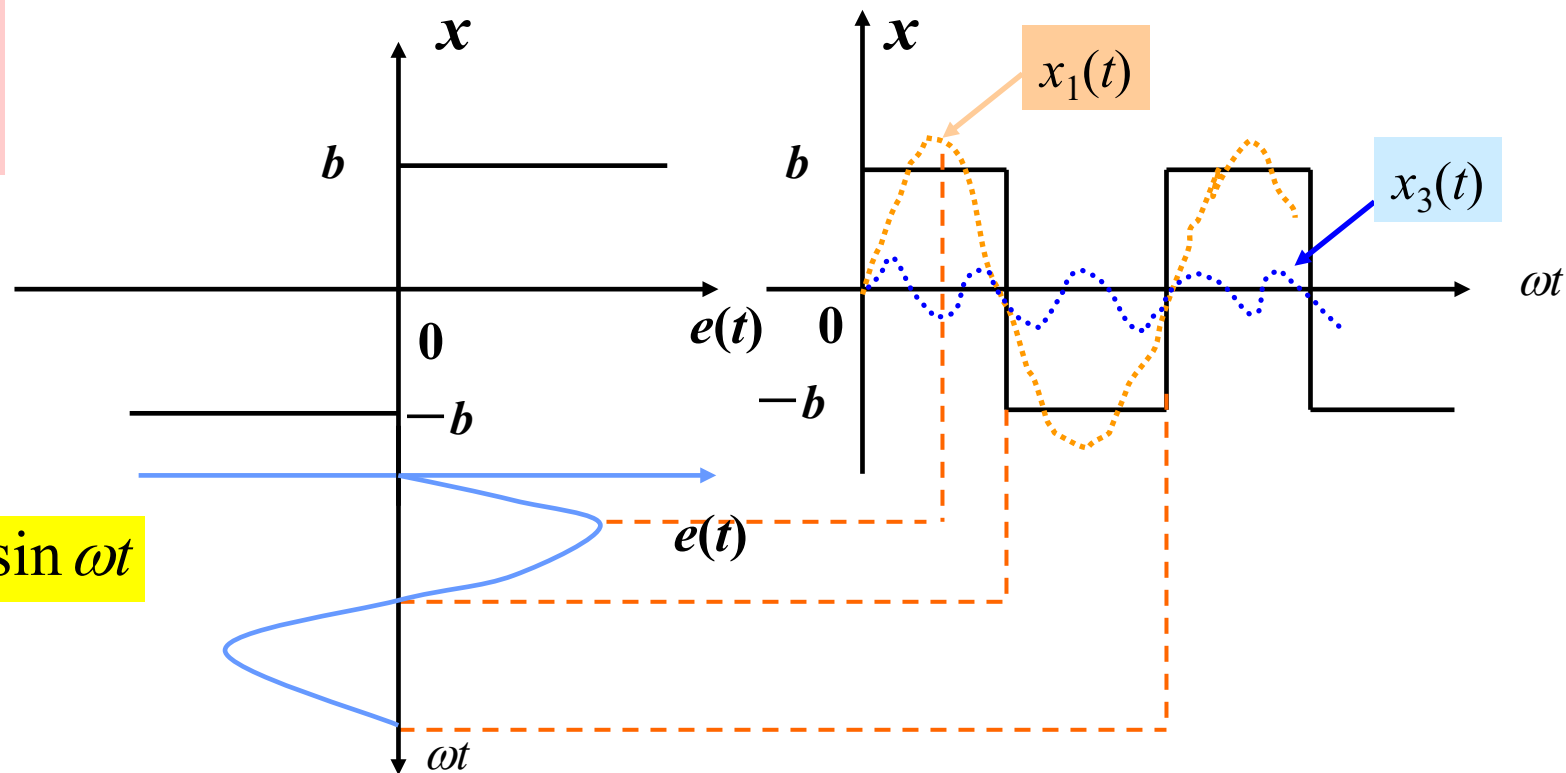
$$\phi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1}$$

典型非线性的描述函数

理想继电特性

$$x(t) = \begin{cases} b, & e > 0 \\ -b, & e < 0 \end{cases}$$

$$e(t) = A \sin \omega t$$



理想的继电特性

因为是奇函数，
 $A_1 = 0$ ，故

$$x_1(t) = B_1 \sin \omega t$$

典型非线性的描述函数

理想继电特性

$$x(t) = \begin{cases} b, & e > 0 \\ -b, & e < 0 \end{cases}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} b \sin \omega t d\omega t = \frac{4b}{\pi}$$

理想继电特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4b \sin \omega t}{\pi A \sin \omega t} = \frac{4b}{\pi A}$$

易知，三次谐波系数为：

$$B_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin 3\omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/6} b \sin 3\omega t d\omega t = \frac{4b}{3\pi}$$

即，三次谐波频率增加了3倍，而幅值减弱了3倍。

典型非线性的描述函数

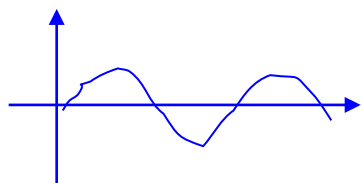
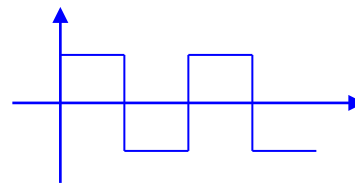
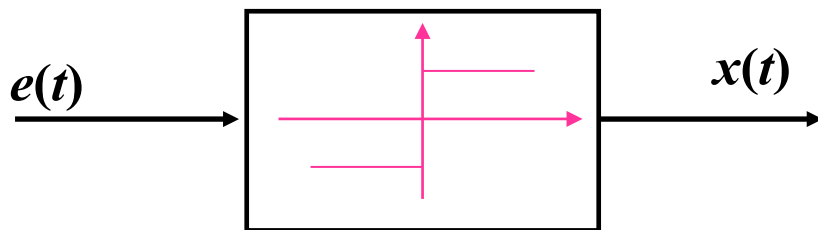
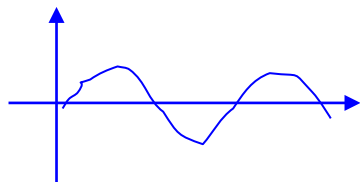
理想继电特性

$$x(t) = \begin{cases} b, & e > 0 \\ -b, & e < 0 \end{cases}$$

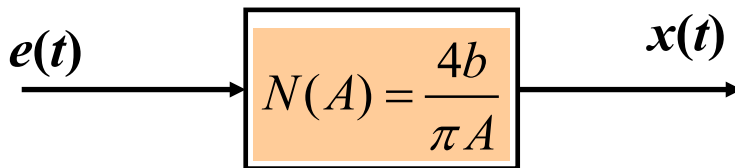
理想继电特性的描述函数为

$$x(t) = \begin{cases} b, & e > 0 \\ -b, & e < 0 \end{cases}$$

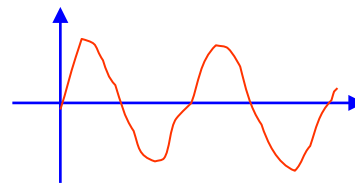
$$e(t) = A \sin \omega t$$



$$e(t) = A \sin \omega t$$



描述函数



$$x(t) = B_1 \sin \omega t = N(A)e(t)$$

典型非线性的描述函数

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = x_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

饱和特性

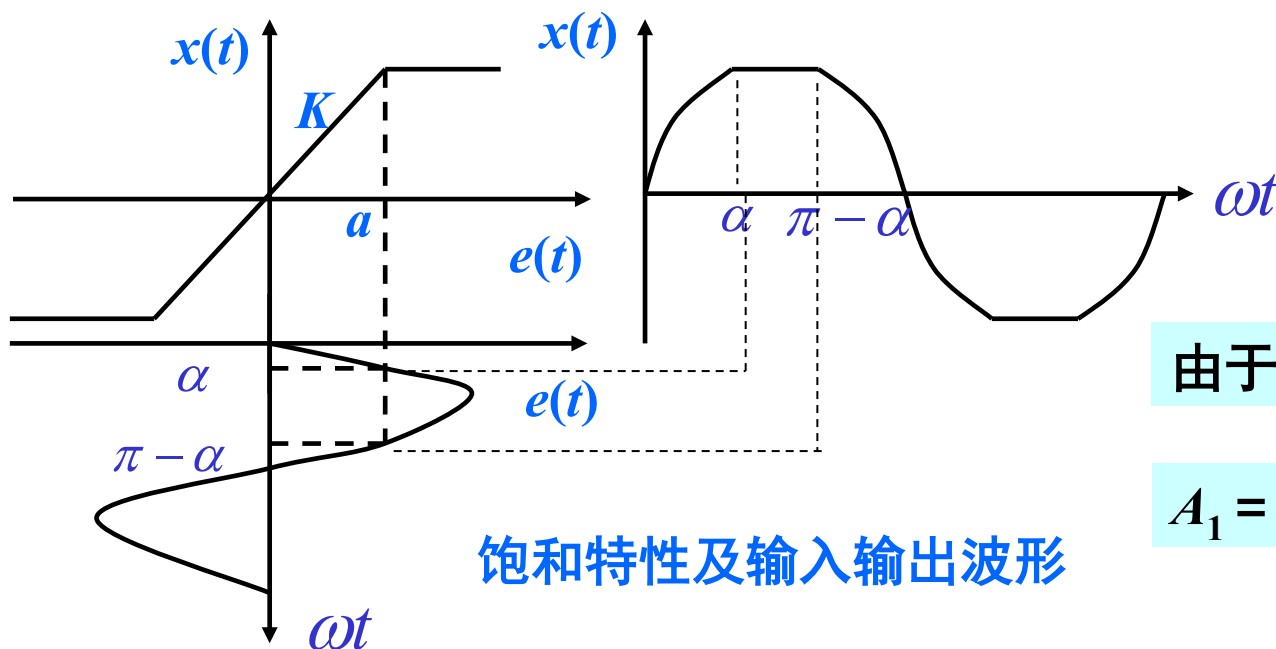
当 $A > a$ 时，饱和特性输出 $x(t)$ 为

$$x(t) = \begin{cases} KA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \alpha \\ Ka & \alpha \leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ KA \sin \omega t & \pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

如图所示。该饱和特性输入 $e(t) = A \sin \omega t$

式中

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{a}{A}$$



由于输出波形为奇函数

$$A_1 = 0, \quad \varphi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1} = 0$$

典型非线性的描述函数

饱和特性

当 $A > a$ 时, 饱和特性输出 $x(t)$ 为

$$x(t) = \begin{cases} KA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \alpha \\ Ka & \alpha \leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ KA \sin \omega t & \pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

由于输出波形为奇函数

$$A_1 = 0, \quad \varphi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_1}{B_1} = 0$$

式中

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{a}{A}$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} KA \left[\sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right]$$

饱和特性描述函数求得如下:

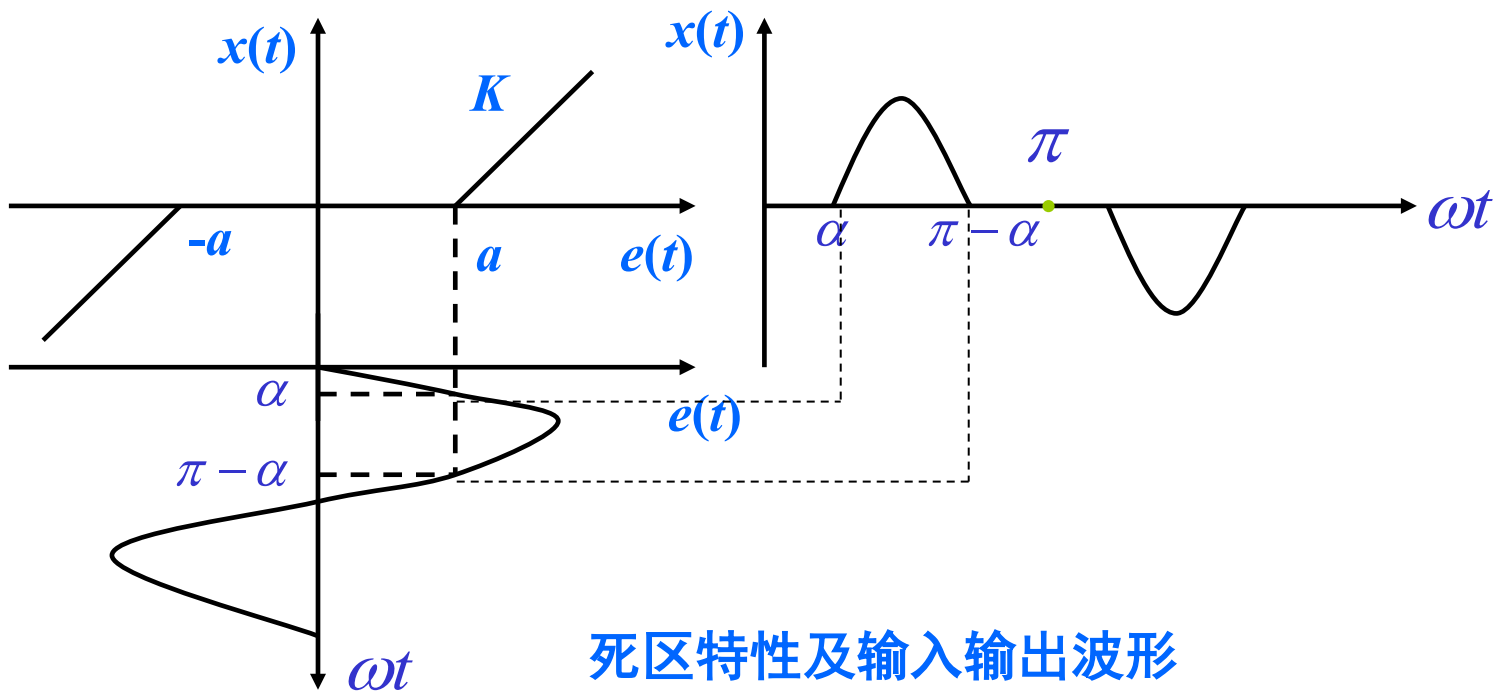
$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2}{\pi} K \left[\sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right]$$

➤ 饱和特性的描述函数是输入振幅 A 的函数, 而且是非线性关系, 因此, 可将描述函数看作是一可变放大系数的放大器。

典型非线性的描述函数

死区特性

当输入 $e(t) = A \sin \omega t$ 时，非线性特性输入输出波形如图所示。



典型非线性的描述函数

死区特性

由图所示，当 $e(t) = A \sin \omega t$ 时，且 $A > a$ ，式中 $\alpha = \sin^{-1} \frac{a}{A}$ ，死区输出为

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega t \leq \alpha \\ K(A \sin \omega t - a) & \alpha \leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ 0 & \pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

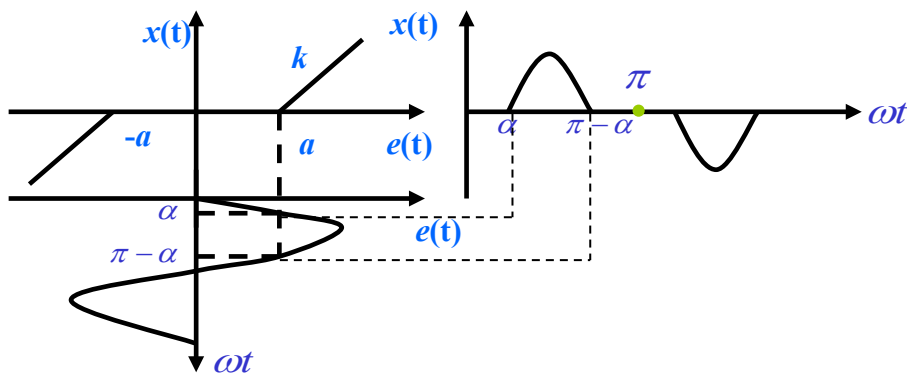
$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega t \leq \alpha \\ \alpha &\leq \omega t \leq \pi - \alpha \\ \pi - \alpha &\leq \omega t \leq \pi \end{aligned}$$

输出为奇函数， $A_1=0$ ， $\varphi_1=0$

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} KA \left[\frac{2}{\pi} - \sin^{-1} \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right]$$

死区描述函数求得为

$$N(A) = \frac{2}{\pi} K \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right]$$



典型非线性的描述函数

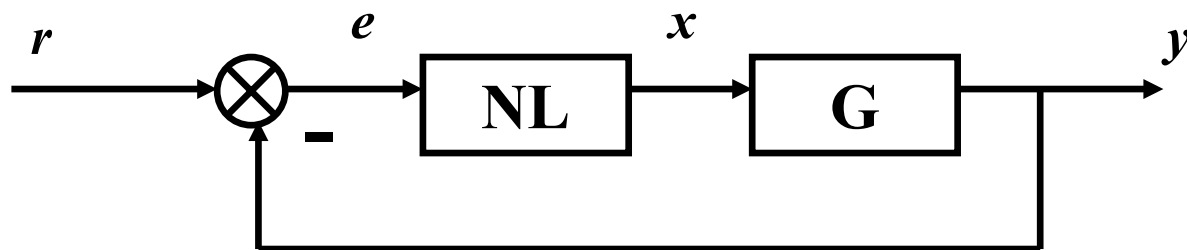
➤ 注：

- 1) 对于单值非线性环节的基波分量没有相移，这类非线性环节的描述函数是一个实数，其值随输入信号的振幅值大小而变化，即 N 仅是 A 的函数，如理想继电特性，相当于一个等效线性环节的放大系数；
- 2) 在非单值的情况下，环节的输出不仅与输入有关，而且与输入的变化情况有关。如滞环，即使是相同的输入，因输入的变化不同，特性也就不同。

➤ 常见非线性环节的描述函数可参见表9-1。

用描述函数分析非线性系统

- 描述函数法**实质上**是将非线性环节近似当作线性环节来分析和处理，**前提**是系统具有较好的低通滤波性能。其**主要用途**是进行稳定性分析，求出系统出现自激振荡时的振幅和频率的数值。
- 前已提及，描述函数法适用于系统线性部分和非线性环节可以分离的系统。如下图所示，图中NL为非线性环节，G为所有线性部分的传递函数。



非线性系统典型结构示意图

用描述函数分析非线性系统

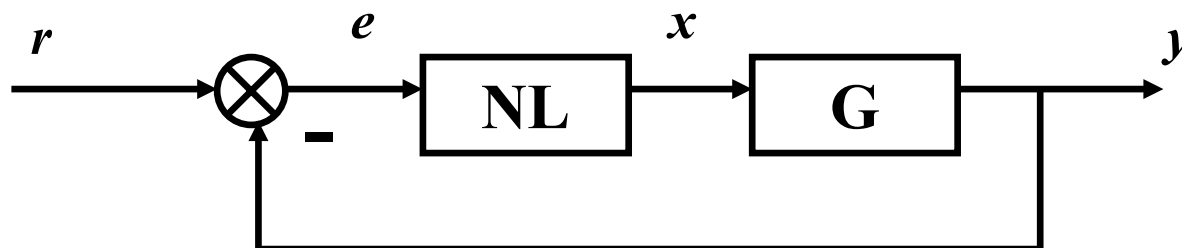
➤ 如图所示系统的闭环特性为
$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N(A)G(j\omega)}{1 + N(A)G(j\omega)}$$

➤ 系统的特征方程为
$$1 + N(A)G(j\omega) = 0$$

➤ 由线性系统的稳定性理论，当特征方程满足时，系统存在纯虚根，闭环系统出现等幅振荡，又称为自激振荡或极限环振荡。

即当 $G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$ 系统处于稳定边界。

线性部分



非线性系统典型结构示意图

用描述函数分析非线性系统

➤ 回忆线性系统中的奈魁斯特判据：

特征方程： $G(j\omega) + 1 = 0 \longrightarrow G(j\omega) = -1$

因果且最小相位的开环传递函数 $G(s)$

$G(s)$ 的零极点实部都小于或等于0

闭环系统以 $G(j\omega)$ 是否包围 $(-1, j0)$ 作为是否稳定的判据，不包围 $(-1, j0)$ 闭环系统稳定，包围 $(-1, j0)$ 闭环系统不稳定。

➤ 将线性系统中的奈魁斯特判据推广：因果且最小相位的 $G(s)$

$$1 + N(A)G(j\omega) = 0 \longrightarrow G(j\omega) = -1/N(A)$$

闭环系统以 $G(j\omega)$ 是否包围 $-1/N(A)$ 作为是否稳定的判据，不包围 $-1/N(A)$ 为闭环稳定，包围 $-1/N(A)$ 为闭环不稳定。

➤ 同样，若 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 曲线相交，系统可能出现极限环振荡，而该极限环振荡是否稳定，需要具体分析。

用描述函数分析非线性系统

一非线性系统结构如图所示，假定输入为零，图中 $N(A)$ 为非线性环节的描述函数，
若 $x_2 = A_2 \sin \omega t$ ，则

$$x_1' = -|G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)| A_2 \sin(\omega t + \theta)$$

式中

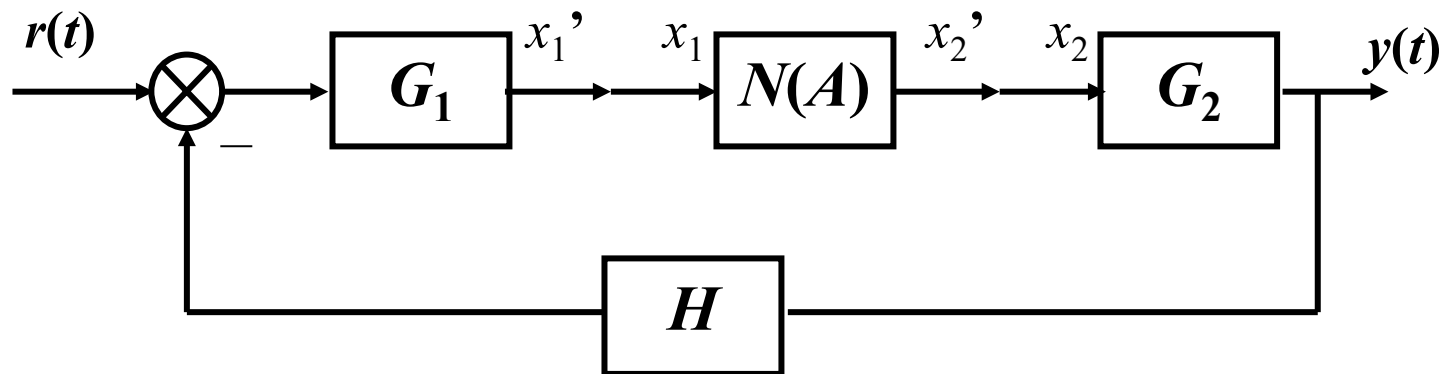
$$\theta = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \angle H(j\omega)$$

假定

$$N(A) = |N(A)|e^{j\varphi}$$

则

$$x_2'(t) = -|N(A)||G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)| A_2 \sin(\omega t + \theta + \varphi)$$



用描述函数分析非线性系统

$$x_1' = -|G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)| A_2 \sin(\omega t + \theta)$$

$$\theta = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \angle H(j\omega)$$



假定 $N(A) = |N(A)| e^{j\varphi}$

则 $x_2'(t) = -|N(A)| |G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)| A_2 \sin(\omega t + \theta + \varphi)$

$$x_2 = A_2 \sin \omega t$$

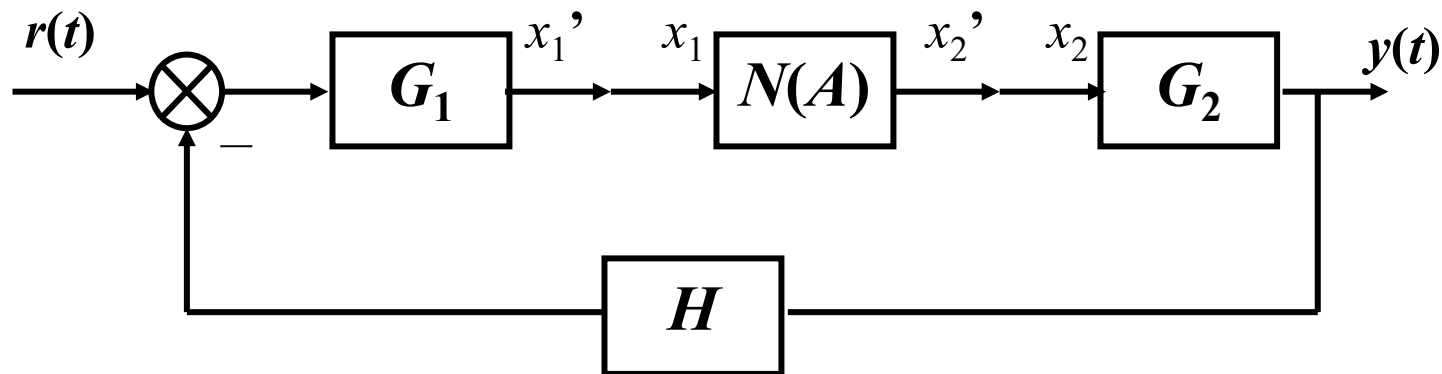
如果 $x_2'(t)$ 等于 $x_2(t)$, 则意味着产生了自激振荡, 即:

$$|N(A)| |G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)| = 1$$

$$\theta + \varphi = (2n + 1)\pi$$

可见系统产生自激振荡的条件为

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$



用描述函数分析非线性系统

➤ 公式 $G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$ 将奈奎斯特判据推广应用于非线性系统，可判断系统运动稳定性：线性部分为最小相位系统，若轨线 $G(j\omega)$ 不包围轨线 $-\frac{1}{N(A)}$ ，则系统是稳定的；若轨线 $G(j\omega)$ 包围轨线 $-\frac{1}{N(A)}$ ，则系统是不稳定的，若 $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(A)}$ 相交，则意味着系统会产生自激振荡，交点处 $G(j\omega)$ 曲线所对应的角频率 ω 为自激振荡的角频率，交点处 $-\frac{1}{N(A)}$ 所对应的幅值 A 为自激振荡的振幅值。

➤ 自激振荡的振幅和振荡频率由下面二式求得

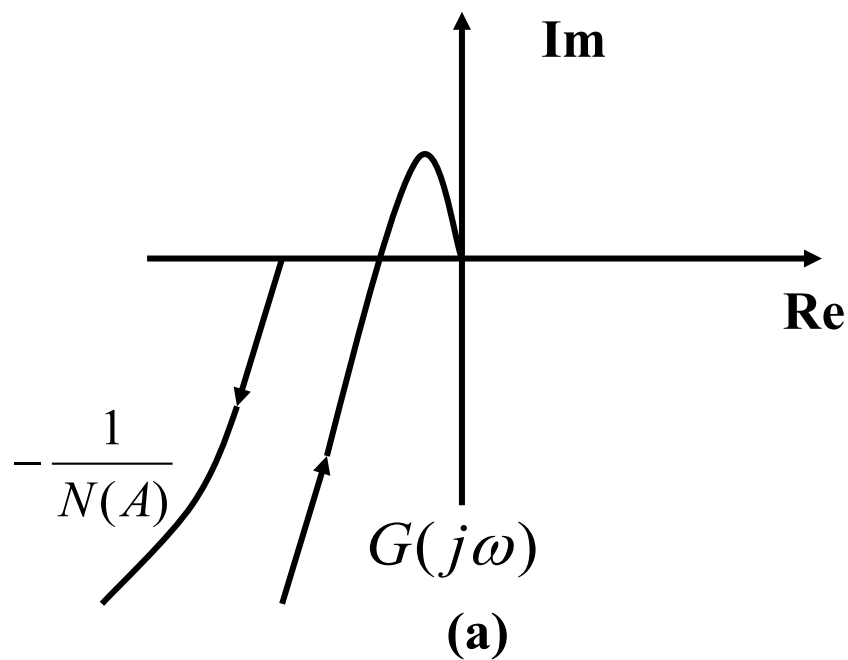
$$|G(j\omega)N(A)| = 1$$

$$\theta + \varphi = -\pi$$

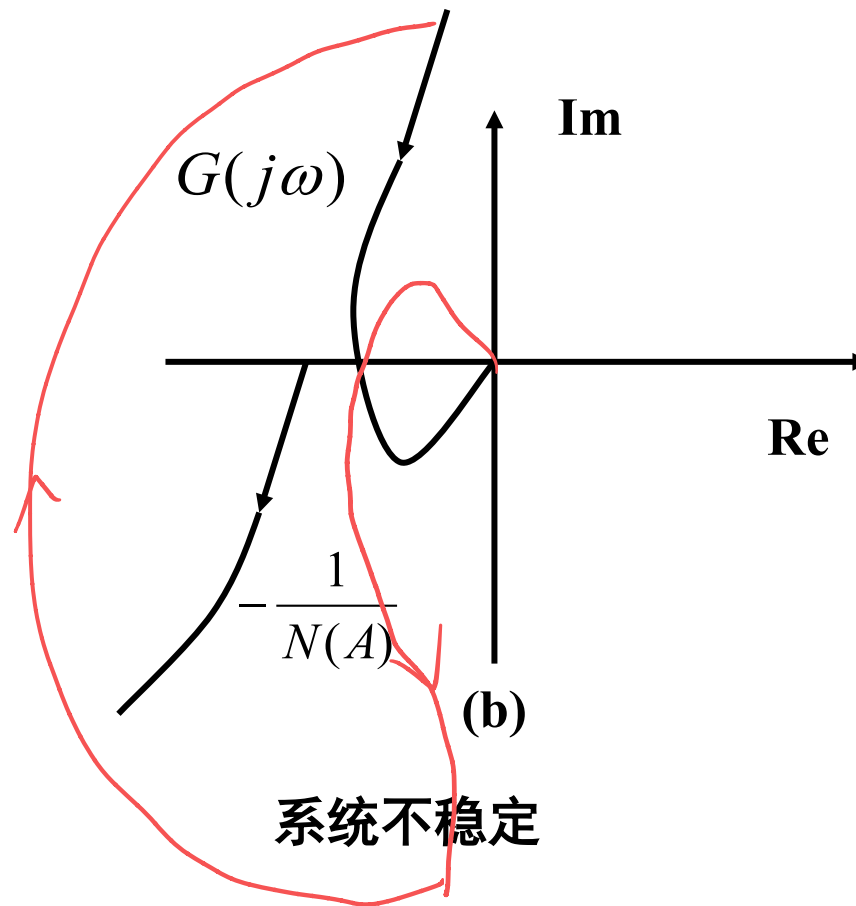
➤ $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(A)}$ 的相互关系曲线如下页图所示。

用描述函数分析非线性系统

➤ $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(A)}$ 的相互关系曲线如图所示。



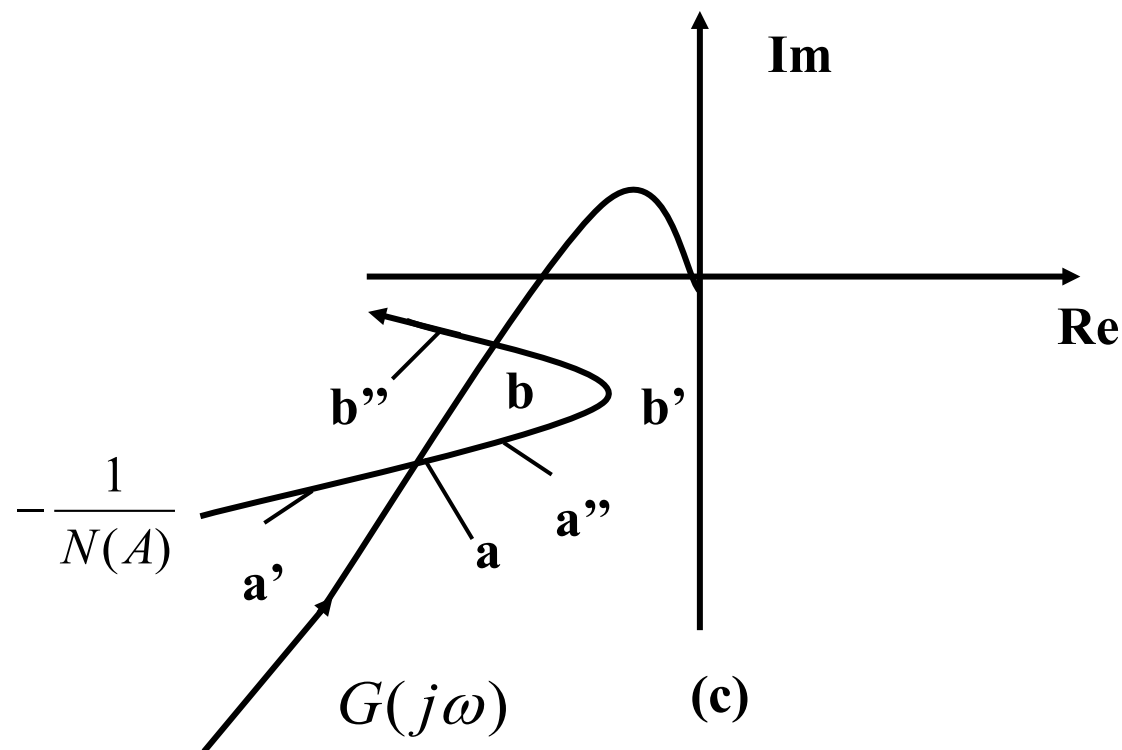
系统是稳定的



系统不稳定

用描述函数分析非线性系统

➤ $G(j\omega)$ 与 $-\frac{1}{N(A)}$ 的相互关系曲线如图所示。



a是不稳定自激振荡；
b是稳定自激振荡。

系统在a、b产生自激振荡

用描述函数分析非线性系统

微扰法

判断a是否稳定

a受微扰变到a'

a'不被 $G(j\omega)$ 包围

系统行为稳定

振荡幅值减小

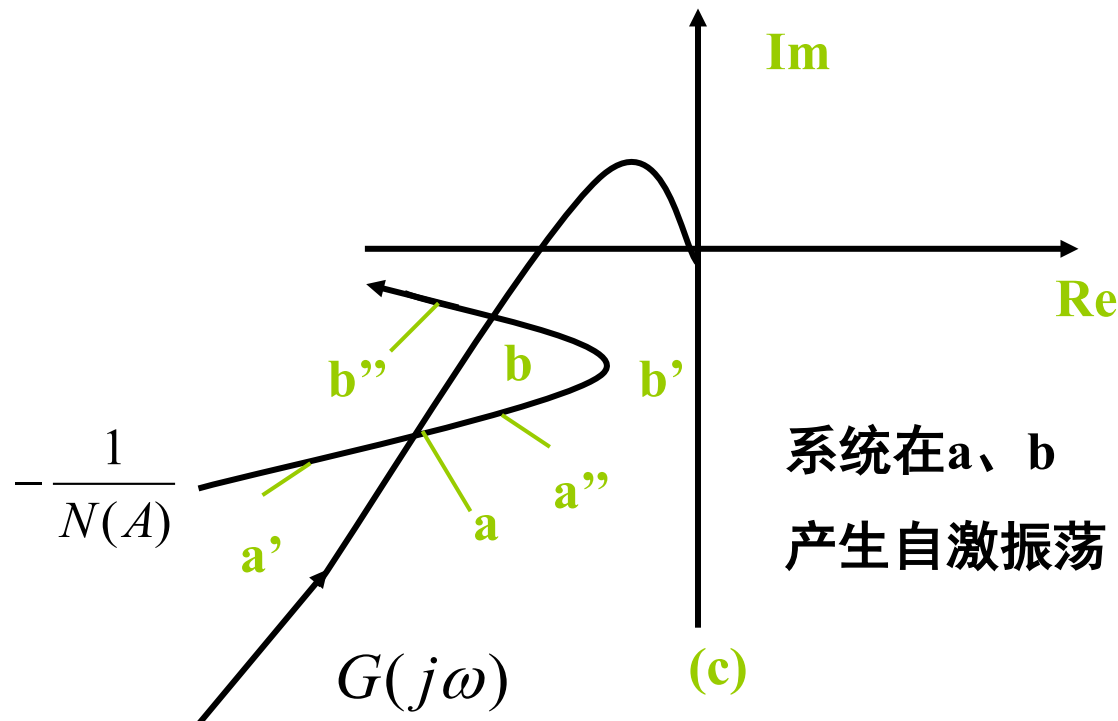
a' 向背离a的方向移动

同理

a受微扰变到a'',

a'' 向背离a的方向移动

所以a是~~不稳定~~自激振荡



系统在a、b

产生自激振荡

判断b是否稳定

同理

b受微扰变到b'',

b'' 向靠近b的方向移动

所以b是~~稳定~~自激振荡

b受微扰变到b',

b'被 $G(j\omega)$ 包围

系统行为不稳定

振荡幅值增大

b' 向靠近b的方向移动

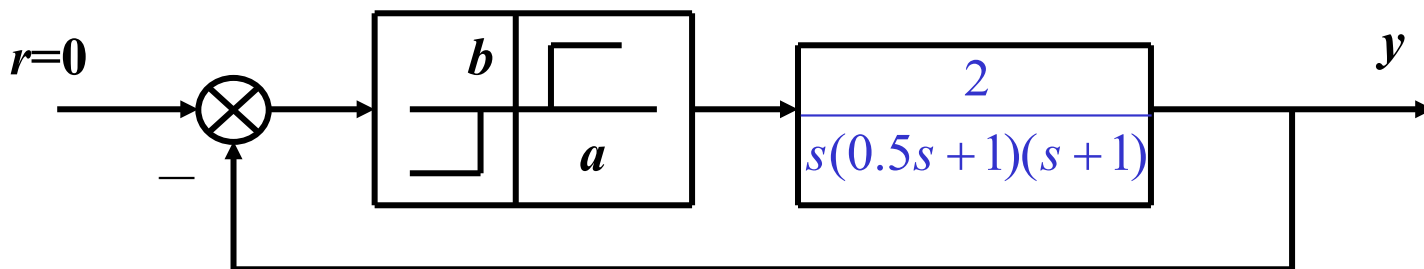
用描述函数分析非线性系统



$$A \rightarrow a, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$

$$A \rightarrow \infty, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$

例 9-1 一继电控制系统结构如图所示。继电器参数 $a=1$, $b=3$, 试分析系统是否产生自激振荡, 若产生自激振荡, 求出振幅和振荡频率。若要使系统不产生自激振荡, 应如何调整继电器参数。

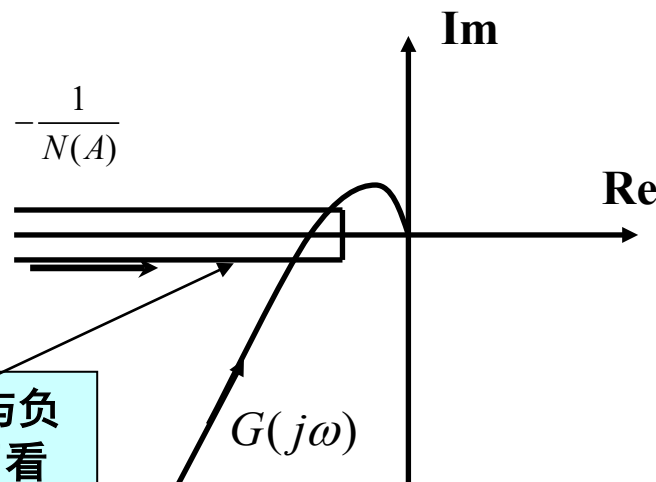


已知: 带死区的继电特性的描述函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4b\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

解: 分别绘出 $G(j\omega)$ 和 $-1/N(A)$ 如图所示

$-1/N(A)$ 轨线实际上与负实轴重迭, 这里为了看得清楚而放大了

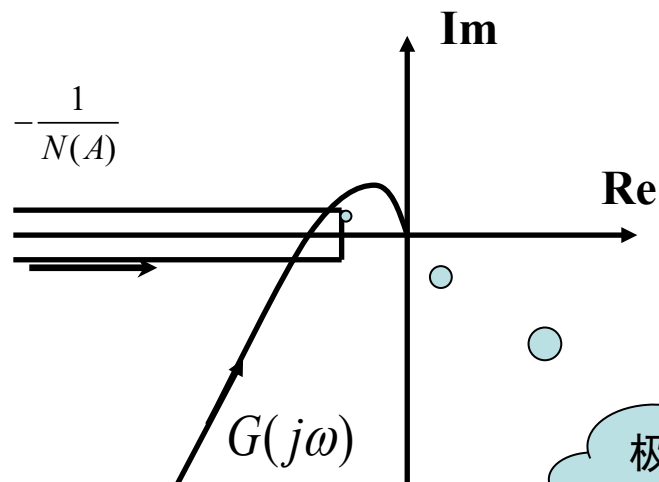


$G(s)$ 因果且最小相位

用描述函数分析非线性系统

$$A \rightarrow a, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$

$$A \rightarrow \infty, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$



极值点处 A ? - $1/N(A)$?

要求 $-\frac{1}{N(A)}$ 在负实轴上的极值

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4b\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

$$\text{令: } \frac{d}{dA} \frac{1}{N(A)} = 0$$



$$A = \sqrt{2}a$$

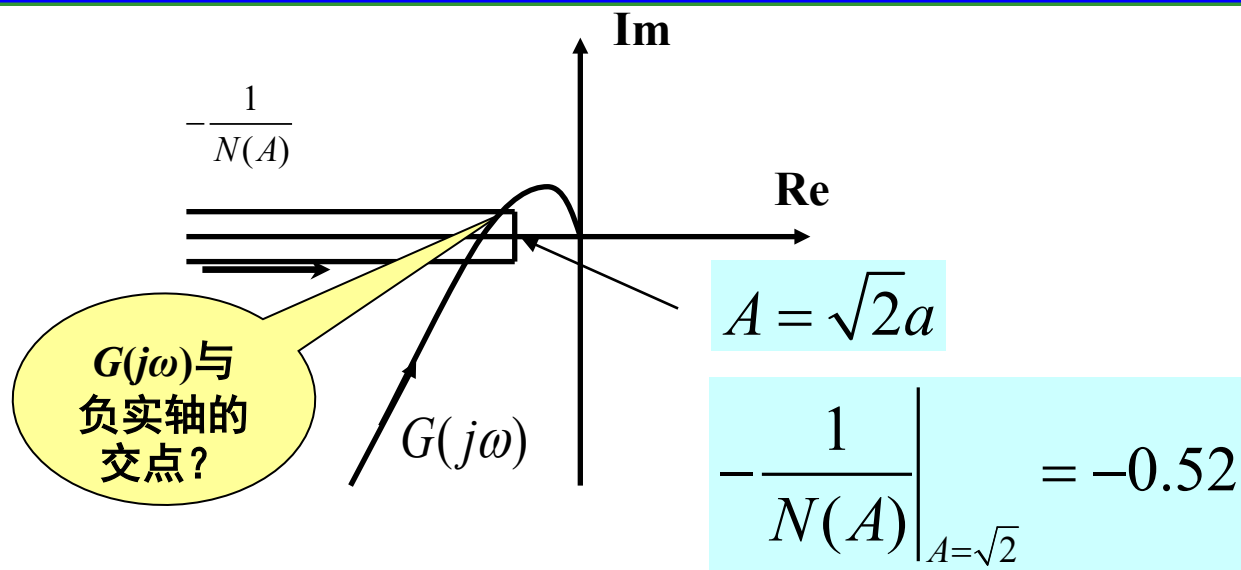
将 $a = 1$, $b = 3$ 代入

$$\left. -\frac{1}{N(A)} \right|_{A=\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{6} \approx -0.52$$

用描述函数分析非线性系统

$$A \rightarrow a, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$

$$A \rightarrow \infty, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$



又

$$G(j\omega) = -\frac{3\omega}{\omega(0.25\omega^4 + 1.25\omega^2 + 1)} - j\frac{2(1 - 0.5\omega^2)}{\omega(0.25\omega^4 + 1.25\omega^2 + 1)}$$

令虚部为零求得

$$\omega = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Re} G(j\omega)\Big|_{\omega=\sqrt{2}} = -\frac{1}{1.5} \approx -0.66$$

用描述函数分析非线性系统

$$A \rightarrow a, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$

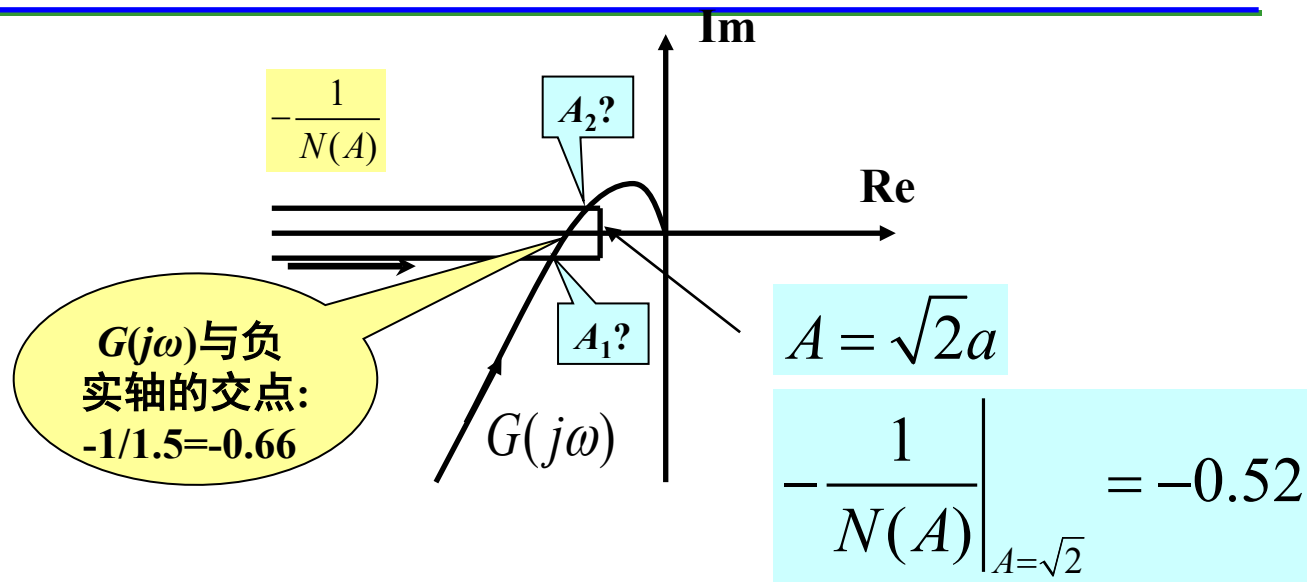
$$A \rightarrow \infty, -\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$$

$$\text{令: } \frac{-\pi A}{12\sqrt{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2}} = -\frac{1}{1.5}$$

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4b\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

可求得继电器参数比 $\frac{b}{a} < 2.36$

比如，调整继电器参数比 $b/a=2$ ，即可保证系统不产生自激振荡。



求得两个振幅值: $A_1 = 1.11$, $A_2 = 2.3$

所以稳定的自激振荡的振幅为2.3，振荡频率为 $\sqrt{2}$

为使系统不产生自激振荡，可令

$$-\frac{1}{N(A)} \Big|_{A=\sqrt{2}a} \leq -\frac{1}{1.5}$$



用描述函数分析非线性系统

- 由于非线性系统的复杂性，分析非线性系统的方法没有一种统一的方法。在满足某些条件下（可分离成线性与非线性两个环节、非线性为奇对称、低通），可以采用描述函数法，特别是用在分析系统是否产生自激振荡。
- 另外常用的还有相平面法。它是一种图解法求解二阶非线性微分方程的分析方法，但缺点是只能用来分析一阶和二阶非线性系统。这里不再介绍。



The End