2.6 给出线性规划问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leqslant -3 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

（1）写出其对偶问题；（2）用图解法求解对偶问题；（3）利用(2)的结果及根据对偶问题性质写出原问题最优解。

解：1）将原问题化成标准型

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

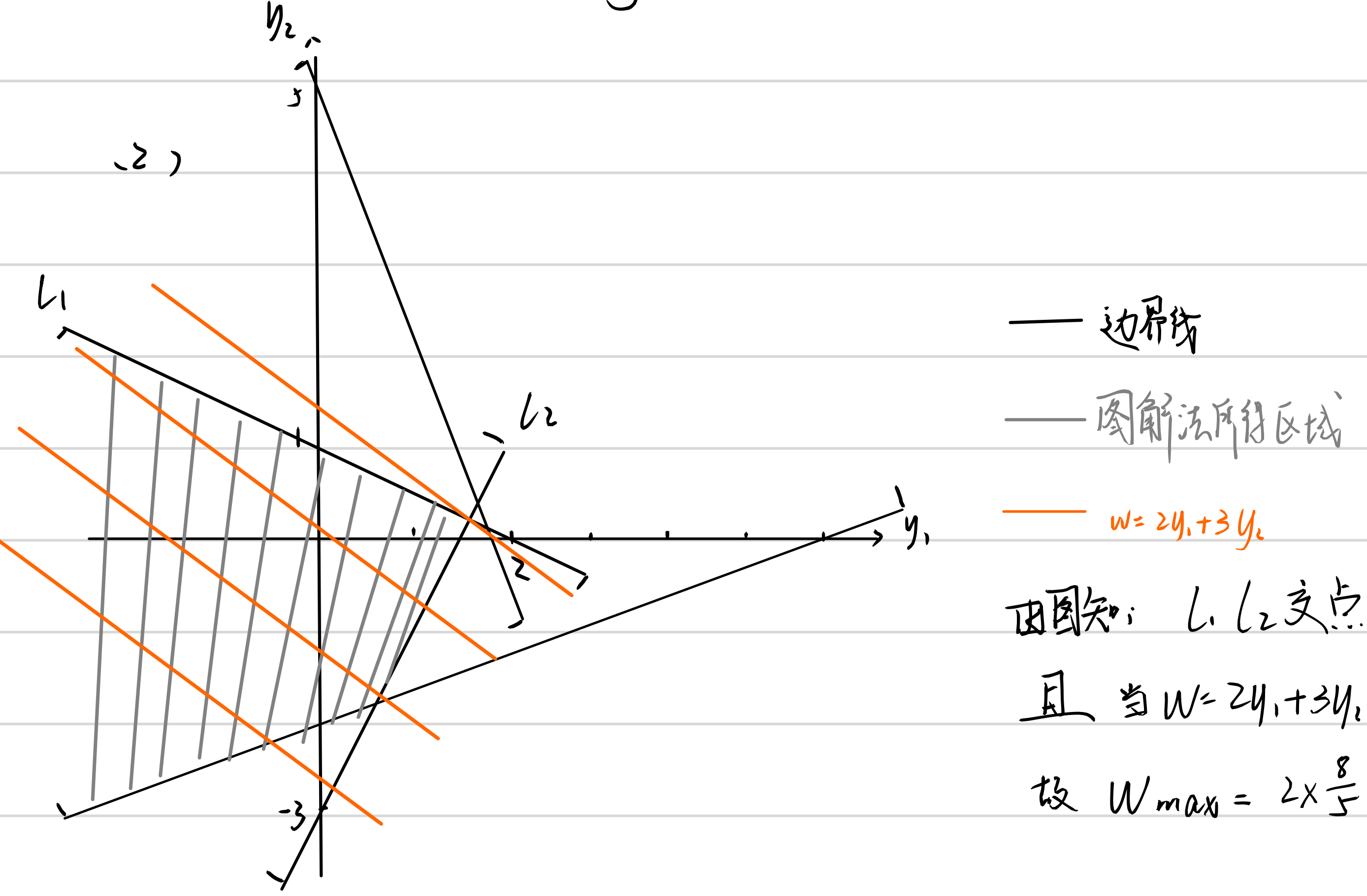
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \geqslant 3 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

对偶问题

$$\max w = 2y_1 + 3y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leqslant 2 & ① \\ 2y_1 - y_2 \leqslant 3 & ② \\ 3y_1 + y_2 \leqslant 5 & ③ \\ y_1 - 3y_2 \leqslant 6 & ④ \end{cases}$$

2）



由图知：l_1 l_2 交点坐标 $(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$

且当 $w = 2y_1 + 3y_2$ 过 $(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$ 时 由图知 w 此时最大

故 $W_{max} = 2 \times \frac{8}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{19}{5}$

3，将 $y_1^* = \frac{8}{5}$，$y_2^* = \frac{1}{5}$ 代入对偶问题

知④为严格不等式　　故 $x_4 = 0$

由 $(AX^* - b)^T y^* = 0$，$y_1^* > 0$，$y_2^* > 0$。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} - x_3 \\ x_2 = \frac{1}{5} - x_3 \end{cases}$$

$z^* = \frac{19}{5}$

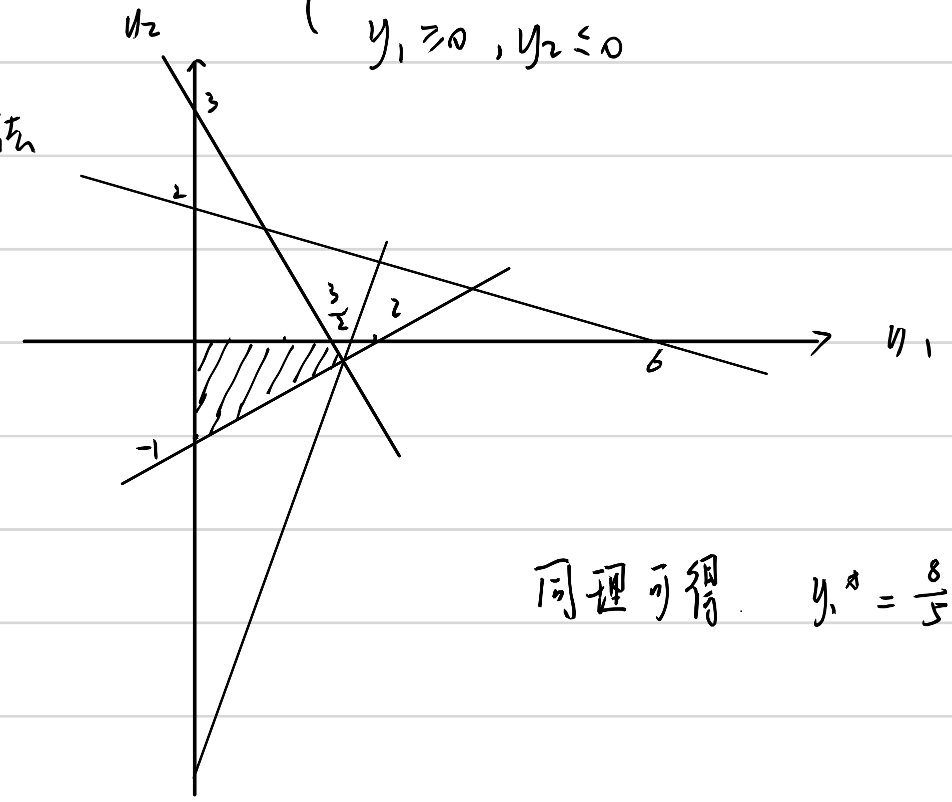
故 $X^* = [\frac{8}{5}, \frac{1}{5}, t, 0]^T$（t 取 $0 \sim \frac{1}{5}$）

如果不转换成标准形

(1) 对偶问题 $\max\ w = 2y_1 - 3y_2$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
y_1 - 2y_2 \le 2 & ① \\
2y_1 + y_2 \le 3 & ② \\
3y_1 - y_2 \le 5 & ③ \\
y_1 + 3y_2 \le 6 & ④ \\
y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0
\end{cases}
$$

(2) 图解法



同理可得 $y_1^* = \frac{8}{5}$ $y_2^* = -\frac{1}{5}$ $W_{max} = \frac{19}{5}$

(3) $y_1 = \frac{8}{5}$ $y_2 = -\frac{1}{5}$ 时 第④个不等式成立.

故 $x_4 = 0$

由 $(AX^* - b)^T y^* = 0$, $y_1^* > 0$, $y_2^* > 0$.

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} - x_3 \\ x_2 = \frac{1}{5} - x_3 \end{cases}
$$

$z^* = \frac{19}{5}$

故 $X^* = [\frac{8}{5}, \frac{1}{5}, t, 0]^T$ (t 取 $0 \sim \frac{1}{5}$)