作业 5 已知离散时间控制系统的模型为

$$x(k+1)=2x(k)+u(k)\ ,\quad x(k)\in R\ ,\quad u(k)\in R\ ,\quad k=0,1,2,\cdots$$

$x(k)$、$u(k)$ 分别为第 k 拍系统状态和控制输入。若控制目标函数

$$\min J=\sum_{i=1}^{M}[x^2(k+i)+u^2(k+i-1)]\ ,$$

控制窗口宽度 M=2, $x(k)=c_k$ 在第 k 拍已知, 用动态规划法求系统的最优控制序列 $u^*(k+i)$,

$i=0,1$。

解: 阶段: 两个阶段

状态变量 $x(k)$: 第k拍系统的状态

决策变量 $u(k)$: 第k拍系统的输入

已知初始状态变量: $x(k)=C_k$

状态转移方程 $x(k+1)=2x(k)+u(k)$

阶段指标函数 $V(k)=x^2(k+1)+u^2(k)$

最优指标值递推方程 $f_k[x(k)]=\min\{V_k+f_{k+1}[x(k+1)]\}$

$f_{k+2}[x(k+2)]=0$

k+1环节:

$f_{k+1}[x(k+1)]=\min\{V_{k+1}+f_{k+2}[x(k+2)]\}$

$=\min\{x^2(k+2)+u^2(k+1)\}$

$=\min\{[2x(k+1)+u(k+1)]^2+u^2(k+1)\}$

$=\min\{4x^2(k+1)+4x(k+1)u(k+1)+2u^2(k+1)\}$

当 $u^*(k+1)=-x(k+1)$ $f_{k+1}[x(k+1)]=2x^2(k+1)$

k环节

$f_k[x(k)]=\min\{V_k+f_{k+1}[x(k+1)]\}$

$=\min\{3x^2(k+1)+u^2(k)\}$

$=\min\{12x^2(k)+12x(k)u(k)+4u^2(k)\}$

当 $u^*(k)=-\frac{3}{2}x(k)$ $f_k[x(k)]=3x^2(k)$

由于 $x(k)=C_k$.

故 $u_1^*(k)=-\frac{3}{2}C_k$. $x(k+1)=2x(k)+u^*(k)=\frac{1}{2}C_k$

故 $u_2^*(k)=-\frac{1}{2}C_k$