作业 4 对以下非线性规划问题

$$\max f(\boldsymbol{x}) = x_1$$

$$\text{s.t.}\quad x_2 - 2 + (x_1-1)^3 \le 0$$

$$(x_1-1)^3 - x_2 - 2 \le 0$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

（1） 用图解法求上述问题的极大点 $\boldsymbol{x}^*$；

（2） 检验 $\boldsymbol{x}^*$ 是否满足 KKT 条件和 Fritz John 条件。

原问题可转化为

$$\min\ f(x) = -x_1$$

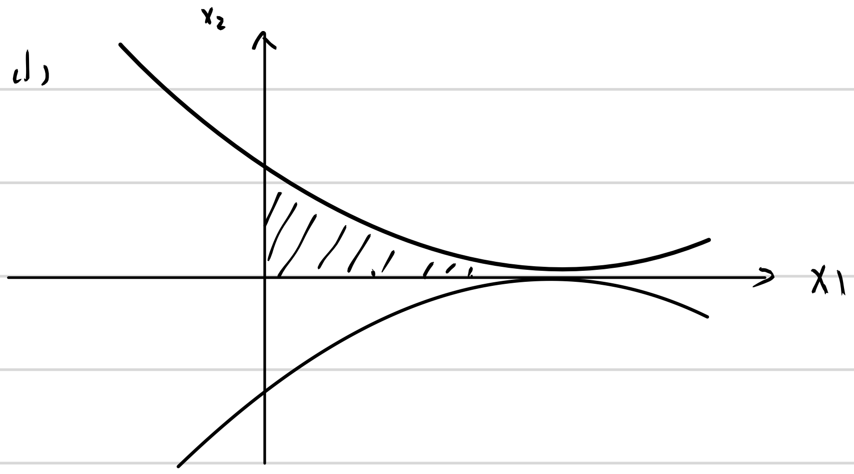
$$\text{s.t.}\quad 2 - x_2 - (x_1-1)^3 \ge 0 \qquad g_1(x)$$

$$2 + x_2 - (x_1-1)^3 \ge 0 \qquad g_2(x)$$

$$x_1 \ge 0 \qquad g_3(x)$$

$$x_2 \ge 0 \qquad g_4(x)$$

解. (1)




由图可知，极大点为 $x^* = (1+\sqrt[3]{2}, 0)$

(2) 点 $x^*$ 起约束作用的梯度为 $\nabla g_1(x)$ $\nabla g_2(x)$ $\nabla g_3(x)$

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -3\sqrt[3]{4} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} -3\sqrt[3]{4} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x) - [\mu_1 \nabla g_1(x) + \mu_2 \nabla g_2(x) + \mu_3 \nabla g_3(x)] = 0 \\ \mu_3 = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_4 \ge 0 \end{cases}$$

可得存在 $\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{4}} \\ \mu_2 = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{4}} \end{cases}$ $\begin{cases} \mu_3 = 0 \\ \mu_4 = 0 \end{cases}$

故满足 KKT 条件

对于 Fritz John 条件.

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 由图可知 $u_3 = 0$

$$u_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3\sqrt[3]{4} & -3\sqrt[3]{4} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} u_1[2 - x_2 - (x_1-1)^3] \\ u_2[2 + x_2 - (x_1-1)^3] \\ u_3 x_1 \\ u_4 x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \ge 0$$

因 $u_4=3$ 得

$$\begin{cases} -u_0+3\sqrt[3]{4}\,u_1+3\sqrt[3]{4}\,u_2=0 \\ u_1-u_2-u_4=0 \end{cases}$$

存在 $u_0=9\sqrt[3]{4}$ $u_1=2$ $u_2=1$ $u_3=0$ $u_4=1$

使上式成立

故满足 Fritz John 条件