Unificador más general (MGU)

Una sustitución S es un MGU de $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$ si

1. es solución de $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$
2. es más general que cualquier otra solución de $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$

Ejemplos

- La sustitución $\{Bool/v, Bool \times Nat/u\}$ es solución de $\{v \times Nat \to Nat \doteq u \to Nat\}$ pero no es un MGU pues es instancia de la solución $\{v \times Nat/u\}$
- $\{v \times Nat/u\}$ es un MGU del conjunto

Algoritmo de unificación

Teorema

Si $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$ tiene solución, existe un MGU y además es único salvo renombre de variables

- Entrada:
  - Conjunto de ecuaciones de unificación $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$
- Salida:
  - MGU S de $\{\sigma_1 \doteq \sigma'_1, \ldots, \sigma_n \doteq \sigma'_n\}$, si tiene solución
  - `falla`, en caso contrario

Algoritmo de Martelli-Montanari

- Vamos a presentar un algoritmo no-determinístico
- Consiste en reglas de simplificación que simplifican conjuntos de pares de tipos a unificar (*goals*)

$$G_0 \mapsto G_1 \mapsto \ldots \mapsto G_n$$

- Las secuencias que terminan en el goal vacío son exitosas; aquellas que terminan en `falla` son fallidas
- Algunos pasos de simplificación llevan una sustitución que representa una solución parcial al problema

$$G_0 \mapsto G_1 \mapsto_{S_1} G_2 \mapsto \ldots \mapsto_{S_k} G_n$$

- Si la secuencia es exitosa el MGU es $S_k \circ \ldots \circ S_1$

Reglas del algoritmo de Martelli-Montanari

1. **Descomposición**
   $\{\sigma_1 \to \sigma_2 \doteq \tau_1 \to \tau_2\} \cup G \mapsto \{\sigma_1 \doteq \tau_1, \sigma_2 \doteq \tau_2\} \cup G$
   $\{Nat \doteq Nat\} \cup G \mapsto G$
   $\{Bool \doteq Bool\} \cup G \mapsto G$
2. **Eliminación de par trivial**
   $\{s \doteq s\} \cup G \mapsto G$
3. **Swap**: si σ no es una variable
   $\{\sigma \doteq s\} \cup G \mapsto \{s \doteq \sigma\} \cup G$
4. **Eliminación de variable**: si $s \notin FV(\sigma)$
   $\{s \doteq \sigma\} \cup G \mapsto_{\{\sigma/s\}} \{\sigma/s\}G$
5. **Falla**
   $\{\sigma \doteq \tau\} \cup G \mapsto \texttt{falla}$, con $(\sigma, \tau) \in T \cup T^{-1}$ y
   $T = \{(Bool, Nat), (Nat, \sigma_1 \to \sigma_2), (Bool, \sigma_1 \to \sigma_1)\}$
6. **Occur check**: si $s \neq \sigma$ y $s \in FV(\sigma)$
   $\{s \doteq \sigma\} \cup G \mapsto \texttt{falla}$

Ejemplo de secuencia exitosa

$$
\begin{array}{ll}
 & \{(Nat \to r) \to (r \to u) \doteq t \to (s \to s) \to t\} \\
\mapsto^{1} & \{Nat \to r \doteq t, r \to u \doteq (s \to s) \to t\} \\
\mapsto^{3} & \{t \doteq Nat \to r, r \to u \doteq (s \to s) \to t\} \\
\mapsto^{4}_{Nat \to r/t} & \{r \to u \doteq (s \to s) \to (Nat \to r)\} \\
\mapsto^{1} & \{r \doteq s \to s, u \doteq Nat \to r\} \\
\mapsto^{4}_{s \to s/r} & \{u \doteq Nat \to (s \to s)\} \\
\mapsto^{4}_{Nat \to (s \to s)/u} & \emptyset
\end{array}
$$

- El MGU es
  $\{Nat \to (s \to s)/u\} \circ \{s \to s/r\} \circ \{Nat \to r/t\} =$
  $\{Nat \to (s \to s)/t, s \to s/r, Nat \to (s \to s)/u\}$

Ejemplo de secuencia fallida

$$
\begin{array}{ll}
 & \{r \to (s \to r) \doteq s \to ((r \to Nat) \to r)\} \\
\mapsto^{1} & \{r \doteq s, s \to r \doteq (r \to Nat) \to r\} \\
\mapsto^{4}_{s/r} & \{s \to s \doteq (s \to Nat) \to s\} \\
\mapsto^{1} & \{s \doteq s \to Nat, s \doteq s\} \\
\mapsto^{6} & \texttt{falla}
\end{array}
$$

Algoritmo de inferencia (caso constantes y variables)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{W}(\mathit{0}) &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright \mathit{0} : \mathit{Nat} \\
\mathbb{W}(\mathit{true}) &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright \mathit{true} : \mathit{Bool} \\
\mathbb{W}(\mathit{false}) &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright \mathit{false} : \mathit{Bool} \\
\mathbb{W}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x : s\} \triangleright x : s, \quad s \text{ variable fresca}
\end{aligned}
$$

Algoritmo de inferencia (caso *succ*)

- Sea $\mathbb{W}(U) \;=\; \Gamma \triangleright M : \tau$
- Sea $S = MGU\{\tau \doteq Nat\}$
- Entonces

$$\mathbb{W}(succ(U)) \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; S\Gamma \triangleright S\, succ(M) : Nat$$

- Nota: Caso *pred* es similar

Algoritmo de inferencia (caso *iszero*)

- Sea $\mathbb{W}(U) \; = \; \Gamma \triangleright M : \tau$
- Sea $S = MGU\{\tau \doteq Nat\}$
- Entonces

$$\mathbb{W}(iszero(U)) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad S\Gamma \triangleright S\; iszero(M) : Bool$$

Algoritmo de inferencia (caso ifThenElse)

- Sea
  - $\mathbb{W}(U) \ = \ \Gamma_1 \rhd M : \rho$
  - $\mathbb{W}(V) \ = \ \Gamma_2 \rhd P : \sigma$
  - $\mathbb{W}(W) \ = \ \Gamma_3 \rhd Q : \tau$
- Sea

$$S = MGU(\{\sigma_1 \doteq \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_j, i \neq j\} \\ \cup \\ \{\sigma \doteq \tau, \ \rho \doteq Bool\})$$

- Entonces

$$\mathbb{W}(if \ U \ then \ V \ else \ W) \stackrel{\text{def}}{=} \\ S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_3 \rhd S(if \ M \ then \ P \ else \ Q) : S\sigma$$

Algoritmo de inferencia (caso aplicación)

- Sea
  - $\mathbb{W}(U) \;=\; \Gamma_1 \triangleright M : \tau$
  - $\mathbb{W}(V) \;=\; \Gamma_2 \triangleright N : \rho$
- Sea

$$S = MGU(\{\sigma_1 \doteq \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_1 \wedge x : \sigma_2 \in \Gamma_2\} \cup \{\tau \doteq \rho \to t\}) \quad \text{con } t \text{ una variable fresca}$$

- Entonces

$$\mathbb{W}(U\, V) \overset{\text{def}}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \triangleright S(M\, N) : St$$

Algoritmo de inferencia (caso abstracción)

- Sea $\mathbb{W}(U) \quad = \quad \Gamma \rhd M : \rho$
- Si el contexto tiene información de tipos para x (i.e. $x : \tau \in \Gamma$ para algún τ), entonces

$$\mathbb{W}(\lambda x.U) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \Gamma \setminus \{x : \tau\} \rhd \lambda x : \tau.M : \tau \to \rho$$

- Si el contexto no tiene información de tipos para x (i.e. $x \notin \text{Dom}(\Gamma)$) elegimos una variable fresca s y entonces

$$\mathbb{W}(\lambda x.U) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \Gamma \rhd \lambda x : s.M : s \to \rho$$

Algoritmo de inferencia (caso *fix*)

- Sea $\mathbb{W}(U) \;=\; \Gamma \rhd M : \tau$
- Sea $S = MGU\{\tau \doteq t \to t\}$, t variable fresca

$$\mathbb{W}(\mathit{fix}(U)) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad S\Gamma \rhd S\,\mathit{fix}(M) : St$$

Ejemplo (2/4)

$$\textit{if true then } succ(x\,y) \textit{ else } x\,(succ(y))$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{W}(x) & = & \{x : s\} \triangleright x : s \\
\mathbb{W}(y) & = & \{y : t\} \triangleright y : t \\
\mathbb{W}(x\,y) & = & \{x : t \rightarrow r, y : t\} \triangleright x\,y : r \\
 & & \text{donde } S = MGU(\{s \doteq t \rightarrow r\}) = \{t \rightarrow r/s\} \\
\mathbb{W}(succ(x\,y)) & = & \{x : t \rightarrow Nat, y : t\} \triangleright succ(x\,y) : Nat \\
 & & \text{donde } S = MGU(\{r \doteq Nat\}) = \{Nat/r\}
\end{array}$$

Ejemplo (3/4)

$$\mathit{if}\ \ \mathit{true}\ \ \mathit{then}\ \mathit{succ}(x\, y)\ \mathit{else}\ x\,(\mathit{succ}(y))$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{W}(y) & = & \{y : v\} \rhd y : v \\
\mathbb{W}(\mathit{succ}(y)) & = & \{y : \mathit{Nat}\} \rhd \mathit{succ}(y) : \mathit{Nat} \\
 & & \text{donde } S = \mathit{MGU}(\{v \doteq \mathit{Nat}\}) = \{\mathit{Nat}/v\} \\
\mathbb{W}(x) & = & \{x : u\} \rhd x : u \\
\mathbb{W}(x\, \mathit{succ}(y)) & = & \{x : \mathit{Nat} \to w, y : \mathit{Nat}\} \rhd x\, \mathit{succ}(y) : w \\
 & & \text{donde } \mathit{MGU}(\{u \doteq \mathit{Nat} \to w\}) = \{\mathit{Nat} \to w/u\}
\end{array}$$

Ejemplo (4/4)

$$M = if\ \ true\ \ then\ succ(x\,y)\ else\ x\,(succ(y))$$

- $\mathbb{W}(true) = \emptyset \triangleright true : Bool$
- $\mathbb{W}(succ(x\,y)) = \{x : t \to Nat, y : t\} \triangleright succ(x\,y) : Nat$
- $\mathbb{W}(x\,succ(y)) = \{x : Nat \to w, y : Nat\} \triangleright x\,succ(y) : w$

$$\mathbb{W}(M) \quad = \quad \{x : Nat \to Nat, y : Nat\} \triangleright M : Nat$$

donde $S = MGU(\{t \to Nat \doteq Nat \to w,\ t \doteq Nat, Nat \doteq w\}) =$
$= \{Nat/t, Nat/w\}$

Un ejemplo de falla

$$M = \mathit{if}\ \ \mathit{true}\ \ \mathit{then}\ x\,\underline{2}\ \ \mathit{else}\ \ x\ \mathit{true}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{W}(x) & = & \{x : s\} \rhd x : s \\
\mathbb{W}(\underline{2}) & = & \emptyset \rhd \underline{2} : \mathit{Nat} \\
\mathbb{W}(x\,\underline{2}) & = & \{x : \mathit{Nat} \to t\} \rhd x\,\underline{2} : t \\
\\
\mathbb{W}(x) & = & \{x : u\} \rhd x : u \\
\mathbb{W}(\mathit{true}) & = & \emptyset \rhd \mathit{true} : \mathit{Bool} \\
\mathbb{W}(x\,\mathit{true}) & = & \{x : \mathit{Bool} \to v\} \rhd x\,\mathit{true} : v \\
\\
\mathbb{W}(M) & = & \mathit{falla}
\end{array}$$

no existe el $\mathit{MGU}(\{\mathit{Nat} \to t \doteq \mathit{Bool} \to v\})$