# Teoría de Lenguajes

Clase Teórica 4

Minimización Autómatas Finitos

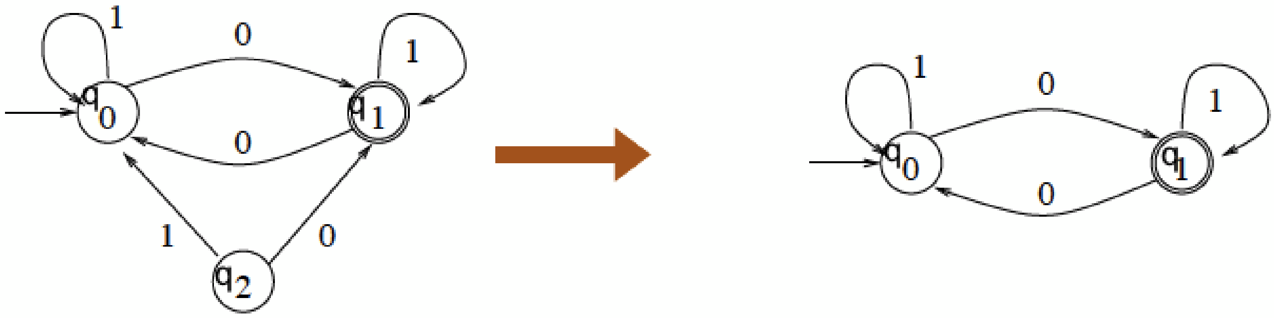
Primer cuatrimestre 2016

Material compilado por Julio Jacobo a lo largo de distintas ediciones de la materia Teoría de Lenguajes en el Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, revisado recientemente por Verónica Becher.

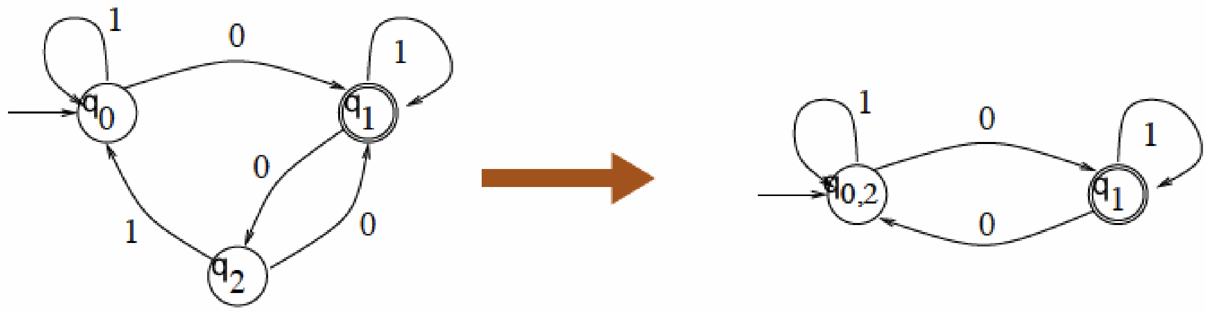
**Bibliografía**: Capítulo 4, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

**Ejemplos de minimización de AFD**

$M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. El estado $q_2$ es inaccesible, entonces puede ser quitado. $\mathcal{L}(M) = (1^*01^*)(01^*01^*)^*$.




$M' =< Q, \Sigma, \delta', q_0, F >$. No hay estados inaccesibles. $\mathcal{L}(M') = (1^*01^*)(01^*01*)^*$.




**Definición 1.** *Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD. Definimos $\equiv$ la relación de indistinguibilidad sobre Q: dos estados $q, r \in Q$ son indistinguibles, que denotamos $q \equiv r$ , cuando*

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \text{ si y solo si } \widehat{\delta}(r, \alpha) \in F).$$

**Observación 2.** *Todo par de estados indistinguibles, al consumir cualquier cadena $\alpha \in \Sigma^*$, llegan a otro par de estados indistinguibles:*

$$\text{Si } q \equiv r \text{ entonces } \forall \alpha \in \Sigma^*, \left(\widehat{\delta}(q, \alpha) \equiv \widehat{\delta}(r, \alpha)\right)$$

**Demostración**. Supongamos $q \equiv r$ pero $\exists \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \not\equiv \widehat{\delta}(r, \alpha))$.
Entonces existe una cadena $\beta$ que distingue $\widehat{\delta}(q, \alpha)$ de $\widehat{\delta}(r, \alpha)$:

$$\exists \beta \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, \alpha), \beta) \in F \wedge \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(r, \alpha), \beta) \notin F)$$

o viceversa. Esto equivale a decir que
$$\widehat{\delta}(q, \alpha\beta) \in F \wedge \widehat{\delta}(r, \alpha\beta) \notin F$$
o viceversa.Pero entonces $q \not\equiv r$, y arribamos a una contradicción.

**Teorema 3.** *La indistinguibilidad $\equiv$ es una relación de equivalencia.*

**Demostración**.

- reflexividad: Debemos ver que para todo $q \in Q$, $q \equiv q$.
$$q \equiv q \text{ si y solo si } \forall\alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$
y esta doble implicación es siempre verdadera.
- simetría: Supongamos $q \equiv r$ . Entonces
$$\forall\alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(r, \alpha) \in F). \text{ Luego,}$$
$$\forall\alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(r, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F). \text{ Por lo tanto, } r \equiv q.$$
- transitividad: Supongamos $q \equiv r$ and $r \equiv s$. Entonces,
$$\forall\alpha \in \Sigma^*,(\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(r, \alpha) \in F), y$$
$$\forall\alpha \in \Sigma^*,(\widehat{\delta}(r, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(s, \alpha) \in F)$$
Por lo tanto, $\forall\alpha \in \Sigma^*$, $(\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(s, \alpha) \in F)$. Es decir, $q \equiv s$.

**Definición 1.** *Si $A$ es un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre $A$, entonces las clases de equivalencia forman una partición del conjunto $A$.*

*Las clases de equivalencia de la relación $\sim$ determinan un nuevo conjunto, denominado conjunto cociente y denotado $A/\sim$.*

### Estados inaccesibles

**Definición 2.** *El estado $p$ de AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es inaccesible si para toda $w \in \Sigma^*$, $p \neq \widehat{\delta}(q_0, w)$.*

Algoritmo que computa el conjunto de estados accesibles.

```
let reachable_states:= {q0};
let new_states:= {q0};
do {
    temp := the empty set;
    for each q in new_states do
        for all c in Σ do
            temp := temp ∪ {p such that p=δ(q,c)};
        end;
    end;
    new_states := temp \ reachable_states;
    reachable_states := reachable_states ∪ new_states;
} while(new_states ≠ the empty set);
unreachable_states := Q \ reachable_states;
```
.

**Definición 4** (Autómata Finito Determinístico Mínimo)**.** *Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M_{min} =< Q_{min}, \Sigma, \delta_{min}, q_{min_0}, F_{min} >$ es*
$$\begin{aligned} Q_{min} &= (Q\,/\equiv) \text{ (las clases de equivalencia de } \equiv \text{)} \\ \delta_{min}([q], a) &= [\delta(q, a)] \\ q_{min_0} &= [q_0] \\ F_{min} &= \{[q] \in Q_{min} : q \in F\} \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_{min})$:

$\alpha \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta_{min}}([q_0], \alpha) \in F_{min}$.

**Observación 5.** *Si $\widehat{\delta}(q, \alpha) = r$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q], \alpha) = [r]$.*

**Demostración.** Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q, \lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}([q], \lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q, \lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q], \lambda) = [q]$.

Caso inductivo $|\alpha| = n + 1$, con $n \geq 0$.
Asumamos que la propiedad vale para longitud $n$.
Sea $\alpha = a\beta$.

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{\delta}(q, a\beta) & = \widehat{\delta}(\delta(q, a), \beta) = & r & \\
\widehat{\delta_{min}}([q], a\beta) & = \widehat{\delta_{min}}([\delta(q, a)], \beta) = & [r] & \text{por Hipótesis Inductiva} \\
 & = \widehat{\delta_{min}}(\delta_{min}([q], a), \beta) & & \text{por definición de } \delta_{min} \\
 & = \widehat{\delta_{min}}([q], a\beta) & & \text{por definición de } \widehat{\delta_{min}}
\end{array}
$$

Concluimos que

$$\text{Si } \widehat{\delta}(q, a\beta) = r \qquad \text{entonces} \qquad \widehat{\delta_{min}}([q], a\beta) = [r].$$

**Definición 6** (Indistinguibilidad de orden $k$: $\overset{k}{\equiv}$)**.** *Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles, y sea $k$ un entero no negativos. Sean $p, q \in Q$. Decimos $p \overset{k}{\equiv} q$ si $\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k)$ implica $\left(\widehat{\delta}(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F\right)$.*

**Teorema 7** (Propiedades de la indistinguibilidad de orden $k$)**.**

1. *$\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia*
2. *$\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$*
3. *Si $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$ entonces $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$.*
4. *$p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta(r, a)$*
5. *Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$*

1. $\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia: ejercicio.
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$. Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} q$.
   Si $\forall \alpha \in \Sigma^*(|\alpha| \leq k + 1)$ entonces $\left(\widehat{\delta}(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F\right)$.
   Por lo tanto,
   Si $\forall \alpha \in \Sigma^*, \quad (|\alpha| \leq k)$ entonces $\left(\widehat{\delta}(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F\right)$.
   Por definición de $\overset{k}{\equiv}$, $\quad p \overset{k}{\equiv} q$.
3. Supongamos $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$. Debemos ver que $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$.

$$
\begin{aligned}
\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) &= \left\{\{q \in Q : \widehat{\delta}(q, \lambda) \notin F\}, \{q \in Q : \widehat{\delta}(q, \lambda) \in F\}\right\} \\
&= \{\{q \in Q : q \notin F\}, \{q \in Q : q \in F\}\} \\
&= \{Q - F, F\}.
\end{aligned}
$$

4. Debemos probar $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta(r, a)$.

$\Rightarrow$) Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} r$ pero no es cierto que $\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta(r, a)$.
Entonces $\exists a \in \Sigma, \exists \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k) \wedge$

$$\left(\widehat{\delta}(\delta(p, a), \alpha) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}(\delta(r, a), \alpha) \notin F\right). \text{ O viceversa.}$$

Por lo tanto $\left(\widehat{\delta}\left(p, a\alpha\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(r, a\alpha\right) \notin F\right)$. O viceversa.

Entonces, $p \overset{k+1}{\not\equiv} r$, ya que $|a\alpha| \leq k+1$, contradiciendo $p \overset{k+1}{\equiv} r$.

$\Leftarrow$) Demostramos el contrapositivo. Supongamos que $p \overset{k+1}{\not\equiv} q$. Entonces $\exists \alpha = a\alpha'$, con $|\alpha| \leq k+1$ que *distingue* $p$ de $q$, o sea que

$$\left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(p, a\right), \alpha'\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(q, a\right), \alpha'\right) \notin F\right) \text{. O viceversa}$$

Por lo tanto $\delta\left(p, a\right) \overset{k}{\not\equiv} \delta\left(q, a\right)$.

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en $n$.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para $n$ con $n \geq 0$:

Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Debemos probar que Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Supongamos $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$. Veamos $\forall q, p \in Q$, $\left(q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r\right)$.

$$\begin{aligned}
q \overset{k+n+1}{\equiv} r &\Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta\left(q, a\right) \overset{k+n}{\equiv} \delta\left(r, a\right)\right) && \text{por definición } \overset{k+n}{\equiv} \\
&\Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta\left(q, a\right) \overset{k}{\equiv} \delta\left(r, a\right)\right) && \text{por HI} \\
&\Leftrightarrow q \overset{k+1}{\equiv} r && \text{por definición } \overset{k+1}{\equiv}. \\
&\Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r && \text{por suposición } \left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right).
\end{aligned}$$

Recordemos

Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles.
El AFD mínimo equivalente $M_{min} =< Q_{min}, \Sigma, \delta_{min}, q_{min_0}, F_{min} >$ es

$$\begin{aligned}
Q_{min} &= \left(Q \,/ \equiv\right) \text{ (las clases de equivalencia de } \equiv \text{)} \\
\delta_{min}\left(\left[q\right], a\right) &= \left[\delta\left(q, a\right)\right] \\
q_{min_0} &= \left[q_0\right] \\
F_{min} &= \left\{\left[q\right] \in Q_{min} : q \in F\right\}
\end{aligned}$$

**Algoritmo de minimización de un AFD**

Input AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
Output $Q/\equiv$
$P = \{Q\}$
$i = 0$
**while** $\left(P \neq \bigcup_{X \in P} X/\overset{i}{\equiv}\right)$ **do**

$$P = \bigcup_{X \in P} X/\overset{i}{\equiv}$$

$i = i + 1$

**end while**
return $P$

**Algoritmos de Minimización de AFD**

AFD $\langle Q, \Sigma, \delta, q, F\rangle$, con $|Q| = n$ y $|\Sigma| = s$.

| | | |
|---|---|---|
| Hopcroft (1971) | $O(ns\ \log n)$ | refinamiento (equivalencia Myhill Nerode) |
| Moore (1956) | $O(n^2 s)$ | radix sort |
| Brzozowski (1963) | $O(2^n)$ | revierte a NDA determiniza |

Algoritmo de Hopcroft en página 161, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

**Algoritmo de minimización de autómatas finitos de Hopcroft**

Sea AFD $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde $Q$ no tiene inaccesibles.

```
P := {F, Q \ F};
W := {F};
while (W is not empty) do
     choose and remove a set A from W
     for each c in Σ do
          let X be the set of states for which a transition on c leads to a state in A
          for each set Y in P for which X ∩ Y is nonempty and Y \ X is nonempty do
               replace Y in P by the two sets X ∩ Y and Y \ X
               if Y is in W
                    replace Y in W by the same two sets
               else
                    if |X ∩ Y| <= |Y \ X|
                         add X ∩ Y to W
                    else
                         add Y \ X to W
          end;
     end;
end;
```

.

La complejidad peor caso es $O(n|\Sigma| \log n)$, donde $n = |Q|$.

Esta cota proviene de que cada una de las $n|\Sigma|$ transiciones participa en, a lo sumo, $O(\log n)$ pasos del algoritmo que realizan refinamiento.

Esta cantidad se debe a que en cada paso los conjuntos considerados de $Q$ decrecen a la mitad de su tamaño.

**Teorema 8.** *Sea AFD $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ y sea $M_{min}$ el autómata mínimo equivalente. Entonces, cualquier AFD $M'$ que reconozca el mismo lenguaje tiene al menos tantos estados como $M_{min}$. Es decir,*

$$\forall M', \left( \textit{Si } \mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M_{min}) \textit{ entonces } |Q'| \geq |Q_{min}| \right)$$

Para demostrarlo usaremos el siguiente lema.

**Lema 9.** *Sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ y $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ y $M$ no posee estados inaccesibles.*

*Si $|Q'| < |Q|$ entonces existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que*

$$\left(\widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}(q_0', \beta)\right).$$

*Demostración del Teorema.* Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.

Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta_{min}}(q_0, \beta)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}(q_0', \beta)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}(q_0, \alpha)$ y $\widehat{\delta_{min}}(q_0, \beta)$ son distinguibles por pertenecer al autómata $M_{min}$, $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_{min}}(q_0, \alpha\gamma) \in F \wedge \widehat{\delta_{min}}(q_0, \beta\gamma) \notin F.$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M_{min}) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin \mathcal{L}(M_{min})$.

Por otro lado, como $\widehat{\delta'}(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}(q_0', \beta)$,

$$\widehat{\delta'}(q_0', \alpha\gamma) \in F \wedge \widehat{\delta'}(q_0', \beta\gamma) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M') \Leftrightarrow \beta\gamma \in \mathcal{L}(M')$.

Por lo tanto $\mathcal{L}(M_{min}) \neq \mathcal{L}(M')$, lo que contradice la hipótesis $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M_{min})$. □

### El lema pendiente

**Lema 10.** *Sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ y $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ y $M$ no posee estados inaccesibles.*

*Si $|Q'| < |Q|$ entonces existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que*

$$\left(\widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}(q_0', \beta)\right).$$

**Demostración**. Equivalentemente, sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ y $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ y $M$ no posee estados inaccesibles. Supongamos que todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en $M$ conducen también a estados diferentes en $M'$, es decir,

$$\forall \alpha, \beta \in \Sigma^* \left( \text{ Si } \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \text{ entonces } \widehat{\delta'}(q_0', \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q_0', \beta)\right).$$

Entonces, la cantidad de estados de $M'$ es mayor o igual a la cantidad de estados de $M$, es decir

$$|Q| \leq |Q'|.$$

Es suficiente definir una función inyectiva $f$ de $Q$ en $Q'$.

Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min_{long-lex} \left\{\alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q\right\}$$

($g(q)$ es el camino mínimo desde $q_0$ a $q$.)

Sea $f : Q \to Q'$ mediante $f(q) = \widehat{\delta'}(q_0', g(q))$.
($f(q)$ es el estado al que llego en $M'$ usando el camino mínimo en $M$.)

Si $p, q \in Q$ son diferentes, $\widehat{\delta}(q_0, g(p)) \neq \widehat{\delta}(q_0, g(q))$.
Y, por hipotesis,
$\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \left( \text{ Si } \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \text{ entonces } \widehat{\delta'}(q_0', \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q_0', \beta)\right)$.
Entonces, si $p$ y $q$ en $Q$ son diferentes, $\widehat{\delta'}(q_0', g(p)) \neq \widehat{\delta'}(q_0', g(q))$.
Usando la definición de $f$, tenemos $f(p) \neq f(q)$.
Concluímos $f : Q \to Q'$ es inyectiva, y por lo tanto $|Q| \leq |Q'|$.

### Ejercicios

1. Dar un autómata AFD tal que $Q/\overset{2}{\equiv}$ sea distinto de $Q/\overset{3}{\equiv}$.
2. Sea un AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Mostrar que para todo entero $k \geq 0$,

   $$((Q/\overset{k}{\equiv}))/\overset{k}{\equiv}) \text{ es igual a } Q/\overset{k}{\equiv}.$$

3. Consideremos el algoritmo de minimización de autómatas dado aquí y reemplacemos la instrucción $i = i + 1$ por la instrucción $i = i + 2$. ¿Terminará la ejecución del ciclo? En caso de que sí, ¿Con qué resultado?
4. Un transductor es un autómata con entrada y con salida (también llamado "Mealy machine"). Formalmente un transductor finito determinístico es una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \rho, q_0, F)$ donde $Q, \Sigma, \delta$ y $q_0$ son como en un DFA, $\Delta$ es el alfabeto de salida y $\rho$ es la función que mapea $Q \times \Sigma$ en $\Delta$.

   Es decir $\rho(q, a)$ es salida de la transición del estado $q$ con entrada $a$.

   La salida de $M$ con entrada $a_1 \dots a_n$ es $\rho(q_0, a_1)\rho(q_1, a_2) \dots \rho(q_{n-1}, a_n)$ donde $q_0, q_1 \dots q_{n-1}$ es la secuencia de estados tal que $\delta(q_{i-1}, a) = q_i$ para $i = 1, \dots, n$.

   ¿Cómo es el algoritmo de minimización para transductores?