Conjuntos c.e. y co-c.e.

María Emilia Descotte

16 de septiembre de 2016

Repasito

- ¿ Qué es que un conjunto A sea c.e.?
  Respuesta: Definiciones equivalentes:
  a. Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parcial computable tal que $A = Dom(g)$
  b. Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parcial computable tal que $A = Rg(g)$
  c. Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ p.r. tal que $A = Rg(g)$
  d. Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable tal que $A = Rg(g)$
- Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
  a. Si A es computable entonces A es c.e.
  Respuesta: Verdadero
  b. Si A es c.e. entonces A es computable.
  Respuesta: Falso. Por ejemplo $A = K$
  c. Si A es computable entonces A es co-c.e.
  Respuesta: Verdadero
  d. A es computable sii A es c.e. y co-c.e.
  Respuesta: Verdadero
  e. K es c.e.
  Respuesta: Verdadero
  f. K es co-c.e.
  Respuesta: Falso
  g. Tot no es c.e. ni co-c.e.
  Respuesta: Verdadero

Reducciones de conjuntos Sean A y B dos conjuntos de números naturales. Decimos que A es reducible a B y lo notamos $A \leq B$ si existe una función computable tal que $x \in A$ si y solo si $f(x) \in B$.

Ejercicio 1. *(Queda de tarea) Si $A \leq B$, entonces valen las siguientes implicaciones:*

a. B computable $\Rightarrow$ A computable

b. B c.e. $\Rightarrow$ A c.e.

c. B co-c.e. $\Rightarrow$ A co-c.e.

Ejercicio 2. *Decidir si los siguientes conjuntos son solo c.e., solo co-c.e., ambas o ninguna. Justificar la respuesta:*

a. $A = \{\langle \#P, k\rangle \mid \Psi_P^{(1)}(k)\downarrow \text{ y } \Psi_P^{(1)}(k+1)\downarrow \text{ y } \Psi_P^{(1)}(k) + 1 = \Psi_P^{(1)}(k+1)\}$.

b. $B = \{\#P \mid \Psi_P^{(1)} \text{ es total y } \Psi_P^{(1)}(x) < \Psi_P^{(1)}(x+1)\ \forall x \in \mathbb{N}\}$.

Solución:

a) Idea: Tiene pinta de ser c.e. pero no computable. Parece razonable hacer un programa que termine si le paso un elemento de este conjunto y sino se cuelgue pero no tanto hacer uno que compute su característica porque si algo no está en el conjunto no puedo hacer más que colgarme. Luego no será co-c.e. porque si fuese c.e. y co-c.e. sería computable.

Demostración: Es c.e. pues es el dominio de Ψ_Q con Q el siguiente programa:

$$Q: \ [A] \qquad \text{IF } \Phi_{l(X_1)}(r(X_1)) + 1 = \Phi_{l(X_1)}(r(X_1)+1) \text{ GOTO E}$$

$$\text{GOTO A}$$

Para ver que no es computable, si nos sacamos la k de encima va a tener pinta de conjunto de índices y podremos usar Rice. Sea $\tilde{A} = \{x \mid \langle x, 35\rangle \in A\}$. Veamos que $\tilde{A}$ es reducible a A: basta tomar $f(x) = \langle x, 35\rangle$. Luego, si A fuese computable, también lo sería $\tilde{A}$ por el ejercicio anterior. Entonces basta ver que $\tilde{A}$ no es computable. Veamos que $\tilde{A}$ es un conjunto de índices no trivial:

$$\tilde{A} = \{x \mid \Phi_x^{(1)}(35)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(36)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(35) + 1 = \Phi_x^{(1)}(36)\}$$

Sea $\mathcal{C} = \{g \mid$ están definidas en 35 y en 36 y su valor en 36 es el valor en 35 más 1$\}$ Es claro que $\tilde{A} = \{x \mid \Phi_x \in \mathcal{C}\}$. Luego es un conjunto de índices. Para ver que es no trivial, daremos un programa P cuyo número no pertenece a $\tilde{A}$ y otro Q cuyo número sí pertenece:

$$P: \ Y \leftarrow 16 \qquad Q: \ Y \leftarrow X$$

Luego por el teorema de Rice $\tilde{A}$ no es computable lo que prueba que A no es computable.

Finalmente la respuesta es que es solo c.e. pues si fuese también co-c.e. sería computable.

b) Idea: No tiene pinta de ser c.e. por ejemplo porque para decir si es total debería correr el programa en todos los naturales. ¡Ojo! Ahora no nos alcanzaría ver que no es computable para decir algo sobre co-c.e. por eso vamos a tratar de ver si nos parece co-c.e. o no. Para eso analizamos su complemento:

$\overline{B} = \{\#P \mid \Psi_P^{(1)}$ no es total o existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $\Psi_P^{(1)}(x) \geq \Psi_P^{(1)}(x+1)\}$

Tampoco parece muy c.e. Para ver que no es total debería ver que se indefine lo cual no suena muy posible sin colgarse. Una buena idea sería reducirlo entonces a un conjunto que no sea c.e. ni co-c.e. Luego por el ejercicio anterior tendremos lo que queremos. No conocemos muchos conjuntos que no sean c.e. ni co-c.e. así que vamos a usar el que tenemos más a mano que es Tot. Buscamos entonces una función f computable tal que $x \in Tot$ si y solo si $f(x) \in B$. Reescribimos ese si y solo si teniendo en cuenta quienes son los conjuntos en cuestión:

$$\Phi_x \text{ es total si y solo si } (\Phi_{f(x)}^{(1)} \text{ es total y } \Phi_{f(x)}^{(1)}(y) < \Phi_{f(x)}^{(1)}(y+1) \ \forall y \in \mathbb{N})$$

Estamos buscando entonces una f computable tal que cuando la uso como número de programa le pase algo particular, eso suena a teorema del parámetro.

Demostración: Sea $g(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$ Como g es parcial computable, existe un número e tal que $g(x,y) = \Phi_e^{(1)}(x,y)$.

Además, por el teorema del parámetro, existe una función $S_1^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ p.r. tal que $\Phi_e^{(1)}(x,y) = \Phi_{S_1^1(x,e)}^{(1)}(y)$.

Tomamos $f(x) = S_1^1(x, e)$ que es computable. Veamos que hace la reducción que queremos:

$$x \in Tot \Rightarrow \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \ \forall\ y \in \mathbb{N} \Rightarrow g(x,y) = y \ \forall\ y \in \mathbb{N} \Rightarrow \Phi_e^{(1)}(x,y) = y \ \forall\ y \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$\Phi_{f(x)}^{(1)}(y) = y \ \forall\ y \in \mathbb{N} \Rightarrow (\Phi_{f(x)}^{(1)} \text{ es total y } \Phi_{f(x)}^{(1)}(y) < \Phi_{f(x)}^{(1)}(y+1) \ \forall y \in \mathbb{N})$$

$$x \notin Tot \Rightarrow \ \exists\ y \in \mathbb{N} \ \mid \ \Phi_x^{(1)}(y) \uparrow \Rightarrow \ \exists\ y \in \mathbb{N} \ \mid \ g(x,y) \uparrow \Rightarrow \ \exists\ y \in \mathbb{N} \ \mid \ \Phi_e^{(1)}(x,y) \uparrow \Rightarrow$$
$$\exists\ y \in \mathbb{N} \ \mid \ \Phi_{f(x)}^{(1)}(y) \uparrow \Rightarrow \ \Phi_{f(x)}^{(1)} \text{ no es total}$$

Finalmente, vimos que $Tot \leq B$, entonces B no es c.e. ni co-c.e. pues Tot no lo es.

Ejercicio 3. *Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.*

a. *Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que para todo $S \subset A$ finito, se tiene que S es computable. Entonces A es computable.*

b. *Sean A y B dos conjuntos de números naturales y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función (total) computable. Si A es c.e. y se cumple que $f(x) \in A$ sii $x \in B$, entonces B es c.e.*

c. *Si $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (con $i \in \mathbb{N}$) es una familia de funciones computables, entonces $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $F(i) = f_i(i)$ también es computable.*

d. *Si A es un conjunto infinito no computable, entonces para todo $B \subset A$ infinito, B es no computable.*

Solución:

a. Falso. Contraejemplo: $A = K$ (cualquier conjunto no computable sirve pues todos los conjuntos finitos son computables).

b. Verdadero. Vamos a armar un programa P que termine exactamente en los elementos de B (i.e. $Dom(\Psi_P^{(1)}) = B$): Como A es c.e., existe un programa Q tal que $Dom(\Psi_Q^{(1)}) = A$. Alcanza con tomar como P el siguiente programa:

$$P: \ X_1 \leftarrow f(X_1)$$
$$Q$$

c. Falso. Contraejemplo:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_i(i) \downarrow \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

d. Falso. Contraejemplo: $A = K$, $B = \{\#P_i \ \mid \ i \in \mathbb{N}\}$ donde P_i es el siguiente programa:

$$P_i : X_i \leftarrow X_i + 1$$

Tarea: Notar que este conjunto es infinito y está contenido en K. Demostrar que es computable.