

Teoría de las comunicaciones

Práctica 1: Transmisión de Información

Temas

Información, Fuentes de Información, Entropía, Velocidad de Transmisión, Delay, Capacidad de Canal.

Definiciones

Información de un evento

$I(s) = -\log(P(s))$ con $P(s)$ la probabilidad del evento s

Entropía de una fuente

$$H(S) = \sum_{s \in S} P(s) I(s)$$

Largo promedio de un código

$L(C) = \sum_{s \in S} P(s) l(C(s))$ con $l(C(s))$ el largo de la codificación del símbolo s

Codificación sin pérdida de información

Un código C sobre una fuente S codifica *sin pérdida de información* sii $H(S) \leq L(C)$

Tipos de códigos

Dado un código C sobre una fuente S ,

- C es *instantáneo* o *libre de prefijos* sii C no codifica ningún símbolo como prefijo de otro.
- C es *unívocamente decodificable* sii no es posible interpretar la misma tira de codificaciones bajo C como dos secuencias de símbolos distintas.
- C es *óptimo* sii $L(C)$ es mínima (i.e., todo otro código sobre S tiene mayor o igual longitud promedio).

Capacidad de un canal (limitado en potencia, en ancho de banda y con ruido)

$C[\text{bps}] = B[\text{Hz}] * \log_2(1 + \text{SNR}[\text{veces}])$ con $\text{SNR}[\text{veces}] = 10^{\text{SNR}[\text{dB}]/10}$ y B el ancho de banda disponible.

Velocidad de transmisión

$$V_{tx}[\text{bps}]$$

Velocidad de transmisión sin pérdida de información

$$V_{tx}[\text{bps}] \leq C[\text{bps}], \text{ con } V_{tx}^{max} = C$$

Tiempo de Transmisión de un bit

$$T_{tx}[\text{seg}] = 1/V_{tx}$$

Tiempo de Propagación de un bit

$T_{prop}[\text{seg}] = D/V$ con D la distancia del enlace y V la velocidad de propagación de la forma de onda en el medio físico.

Delay

$$\text{Delay}[\text{seg}] = T_{tx} + T_{prop}$$

Capacidad de Volumen de un canal (también "Producto Delay por Velocidad de Transmisión" o "Producto Delay por Ancho de Banda")

$$C_{vol}[\text{bits}] = \text{Delay} \cdot V_{tx}$$

Ejercicio 1

Una fuente de información binaria con memoria nula produce el símbolo s_0 con probabilidad p_0 y el símbolo s_1 con probabilidad $p_1 = 1 - p_0$.

- Formular la entropía de la fuente como función de p_0 .
- Graficar $H(p_0)$.
- Dar una interpretación de los puntos de la gráfica que considere interesantes.

Ejercicio 2

Para la siguiente fuente

$$S = [P(A) = 0.4; P(B) = 0.3; P(C) = 0.2; P(D) = 0.1]$$

se proponen 3 códigos posibles

- A = 001 ; B = 01 ; C = 11 ; D = 010
- A = 0 ; B = 01 ; C = 011; D = 111
- A = 1 ; B = 01 ; C = 001 ; D = 0001

- ¿Cuáles son instantáneos?
- ¿Cuáles son unívocamente decodificables?
- De los unívocamente decodificables, ¿Cuál es más eficiente (H/L)?
- De los unívocamente decodificables, ¿Alguno presenta *pérdida de información*?

Ejercicio 3

¿Cuánto vale la entropía y la longitud de la codificación de cada símbolo para las fuentes de información de los siguientes casos? Asumir que la codificación se da bajo el código óptimo.

- 2 símbolos equiprobables
- 8 símbolos equiprobables
- N símbolos equiprobables

Ejercicio 4

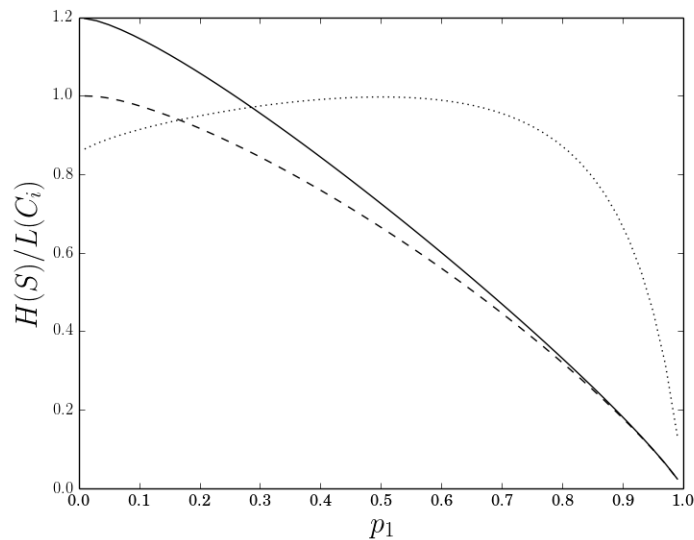
Sea $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, $n > 2$, una fuente de información de memoria nula. Supongamos que s_1 es emitido con cierta probabilidad p_1 y que todo otro símbolo distinto de s_1 es emitido con probabilidad p_{all} (i.e., $P_S(s_i) = P_S(s_j) = p_{\text{all}}$, $1 < i, j \leq n$). Sean C_1 , C_2 y C_3 tres códigos binarios sobre S definidos como sigue:

$$C_1(s_i) = \text{bin}_n(i) \quad C_2(s_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1 \text{ bin}_{n-1}(i-1) & \text{si } i > 1 \end{cases} \quad C_3(s_i) = \begin{cases} \text{bin}_n(0) & \text{si } i = 1 \\ \text{bin}_{n/2}(\lfloor i/2 \rfloor) & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

En estas definiciones, $\text{bin}_k(j)$ indica la representación binaria de j utilizando exactamente $\lceil \log_2(k+1) \rceil$ bits.

La figura que sigue muestra la gráfica de $H(S)/L(C_i)$ en función de p_1 , para un valor fijo de n .

- Determinar qué curva corresponde a cada uno de los códigos.



Ejercicio 5

Considere una señal de video en escala de grises que transmite imágenes a una resolución 640×480 píxeles, de los cuales cada uno puede asumir 10 niveles diferentes de brillo. Supongamos que la tasa de transmisión es de 30 imágenes por segundo y que la relación señal a ruido es de 30 dB.

- Calcular la entropía de la fuente si todas las imágenes fueran equiprobables.
- ¿Cuántos bits son necesarios para codificar cada imagen de manera óptima e instantánea con un código que asigne el mismo largo a todas las imágenes?
- Calcular el ancho de banda mínimo requerido para soportar la transmisión de la señal resultante.

Ejercicio 6

Calcule la Capacidad de Volumen (cantidad de bits que entran simultáneamente) en cada uno de los siguientes medios físicos de transmisión, asumiendo que se los utiliza a su máxima Capacidad de Transmisión (es decir, sin pérdida de información):

- $D = 100\text{km}$, $V_{prop} = 200000\text{km/s}$, $SNR = 100\text{dB}$, $B = 400\text{Hz}$
- $D = 100\text{km}$, $V_{prop} = 200000\text{km/s}$, $SNR = 10\text{dB}$, $B = 400\text{kHz}$
- $D = 100\text{km}$, $V_{prop} = 300000\text{km/s}$, $SNR = 10\text{dB}$, $B = 400\text{kHz}$
- $D = 100\text{m}$, $V_{prop} = 300000\text{km/s}$, $SNR = 10\text{dB}$, $B = 400\text{kHz}$

Ejercicio 7

Un satélite orbita la tierra tomando muestras meteorológicas. Se desea establecer un enlace entre dicho satélite y una base central en la superficie terrestre. Dicho medio de transmisión soporta una velocidad de transmisión de 100 Mbps. Si la información viaja a una velocidad de propagación de 300000 km/s, ¿es posible que haya una distancia para la que el tiempo total de enviar 30Mb sea menor que 0.04 segundos?

Ejercicio 8

Suponga que se instala un enlace punto a punto de 100 Mbps entre la Tierra y una base en la Luna. La distancia entre la Luna y la Tierra es de aproximadamente 385000 km, y la velocidad de propagación de los datos es la velocidad de la luz (300000 km/s).

- ¿Cuál es el Delay de ida de un bit? ¿Y el RTT de un bit del enlace?
- ¿Cuántos bits entran simultáneamente en el canal?
- Una cámara en la base lunar toma fotografías de la Tierra y las guarda en formato digital en un disco. Suponga que el Control de Misión en la Tierra desea descargar la última imagen que es de 25 Mb. ¿Cuál es el tiempo mínimo que puede transcurrir entre el momento en que se inicia el pedido del dato y finaliza la recepción? (Asumir que el mensaje de pedido es de 2Kb)

Ejercicios de Parcial

Ejercicio 9

Una cámara de video tiene la posibilidad de configurar su resolución en función de los requerimientos de transmisión de datos. La resolución determina la cantidad de imágenes posibles que se pueden representar, o sea, la cantidad de símbolos que puede emitir si se la modelara como una fuente de información. La cámara transmite su señal de video usando un medio inalámbrico ($V_{prop} = 300000 \text{ Km/s}$) con una relación señal a ruido de 20dB y un ancho de banda de 100kHz. Además, la distancia que separa la cámara de la antena de recepción es de 3000Km.

- Modelando la cámara como una fuente de información equiprobable y asumiendo una codificación óptima y sin pérdida de información. ¿Cuál debería ser el tamaño de cada imagen de manera que el T_{tx} de cualquiera de ellas sea menor al 10% del tiempo de propagación?
- Manteniendo el tamaño de imagen del item anterior, si se sabe que la relación señal a ruido disminuye 1dB cada 100Km, ¿Cuál sería el mínimo ancho de banda que permite que el delay de una imagen a 4000Km sea menor que 15ms?
- Si se sabe que las imágenes que emite la cámara no son equiprobables, la longitud media de una codificación óptima, ¿Podría disminuir o aumentaría?

Ejercicio 10

Un avión que mide radiación UV a 10000m de altura, necesita poder enviar datos hasta una base en la superficie. El enlace entre el avión y la base tiene una relación señal a ruido a esa altura de 40dB. La velocidad de propagación del enlace es de 300000000 m/s.

- Si se modelara el avión como una fuente de información equiprobable con $H(avion) = 50 \text{ Kb}$ ¿Cuál es el mínimo ancho de banda necesario para enviar un promedio de 80 paquetes(símbolos) por segundo sin pérdida de información?
- Usando el ancho de banda del inciso anterior, calcule el delay de cada paquete desde que se emite en el avión hasta que llega a la base.
- Usando un ancho de banda de 20Khz, calcule una cota máxima para la entropía del avión si se desea transmitir sin pérdida de información la misma cantidad de paquetes por segundo y con un delay por paquete de a lo sumo 70ms.

Ejercicio 11

Supongamos que tenemos tres sensores de humedad, presión y temperatura que se modelan usando las siguientes fuentes de información respectivamente: $R = r_1 \dots r_n$, $S = s_1 \dots s_m$ y $T = t_1 \dots t_k$. Un dispositivo muestrea estos sensores con un esquema *round robin*, usando para R el doble de frecuencia de muestreo que

para S y T (ej : $r, s, r, t, r, s, r, t, etc$). A su vez, el dispositivo envía las mediciones por un enlace que tiene 30dB y 500Khz, codificando de forma instantanea (usando diferentes prefijos) cada una de ellas de manera de que el receptor pueda distinguir cada sensor.

1. Defina una fuente de información D que modele al dispositivo y calcule las probabilidades de cada símbolo emitido suponiendo que R , S y T , son equiprobables y $H(R) = 5bits$, $H(S) = 4bits$ y $H(T) = 4bits$. ¿La fuente D es equiprobable? *Nota: no hace falta dar una codificación para D .*
2. Calcule una cota inferior para el largo promedio de cualquier código para D que sea sin pérdida de información.
3. ¿Cuál es el mínimo delay que puede alcanzar una medición desde que sale del dispositivo y llega a una base a 20000Km de distancia ($V_{prop} = 300000km/s$)?

Ejercicio 12

Dados una señal de video sobre un enlace inalámbrico que tiene una relación señal a ruido de 30dB, con un ancho de banda útil de 50MHz; y una cámara que usa 5 Megapíxeles por imagen y 12 bits por pixel.

- a. ¿Hasta cuántas imágenes por segundo es posible enviar sin pérdida de información pensando la cámara como una fuente de símbolos equiprobables?
- b. Calcule el delay promedio de una imagen enviada desde una cámara ubicada a 2Km de distancia. ($V_{prop} = 300000Km/s$)
- c. Explique por qué, en teoría, podría aumentar la cantidad de imágenes por segundo si se supiera que la fuente no es equiprobable.

Bibliografía

Computer Networks: A Systems Approach. 5ta Edición. *Peterson & Davie.* Capítulo 1: Foundation.

Teoría de la Información y Codificación. 5ta Edición. *Norman Abramson.* Capítulo 1: Introducción (secciones 1.1 a 1.5), Capítulo 2: La información y sus fuentes (secciones 2.1 a 2.4), Capítulo 3: Propiedades de los códigos (secciones 3.1 a 3.5), Capítulo 4: Codificación (secciones 4.1 a 4.3).

Data and Computer Communications. 5ta Edición. *William Stallings.* Capítulo 2: Data Transmission.