Correctitud y Completitud

Lógica y Computabilidad

Notación 1. Sea $\mathcal{M}$ un modelo y v una valuación usaremos $\mathcal{M}, v \models \varphi$ en lugar de $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.

Ejercicio 1. Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario P y un símbolo de constante r. Sea la clase de modelos $\mathcal{A} = \{\mathcal{M} \mid P^{\mathcal{M}}$ define un árbol con raíz r sobre todos los elementos de $\mathcal{M}\}$, donde por árbol se entiende cualquier árbol dirigido donde cada nodo puede tener una cantidad arbitraria de hijos ($P(x, y)^{\mathcal{M}}$ afirma que $x^{\mathcal{M}}$ es el padre de $y^{\mathcal{M}}$). Considerar la axiomatización SQ_{Tree}, que extiende a la axiomatización SQ vista en clase de la siguiente manera

$$\begin{array}{rl}
\textbf{SQ8} & (\forall x)\big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big) \\
\textbf{SQ9} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y, x) \wedge P(z, x)) \to (y = z)\big) \\
\textbf{SQ10} & (\forall x)\big(((\forall y)\neg P(y, x)) \to x = r\big)
\end{array}$$

Sabiendo que SQ es correcta y completa con respecto a la clase de todos los modelos

a) Demostrar que los axiomas $SQ8, SQ9$ y $SQ10$ son válidos en $\mathcal{A}$. Demostrar que SQ_{Tree} es correcta con respecto a $\mathcal{A}$.

b) Sea $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x, y) \to \neg P(y, x)\big)$. Demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

c) Demostrar que φ es válida en $\mathcal{A}$ y concluir que SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

Resolución (a). Para ver que los axiomas son válidos en la clase $\mathcal{A}$ primero interpretemos que significarían las fórmulas interpretadas en un modelo de la clase $\mathcal{A}$.

SQ8:	Los nodos son irreflexivos y ningún nodo tiene a la raiz como hijo.
SQ9:	Los nodos no comparten hijos.
SQ10:	El único nodo sin padre es la raiz r.

Todas estas propiedades suenan razonables para un modelo de la clase, probemos formalmente que valen. Si probamos que para cualquier modelo de la clase y cualquier valuación, los axiomas son verdaderos entonces habremos probado que son válidos en la clase. Fijado un modelo arbitrario $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ y una valuación v, veamos axioma por axioma

SQ8. $\mathcal{M}, v \models (\forall x)\big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big)$ si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Y esto ocurre si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x, r) \text{ y } \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x, x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Siguiendo las definiciones semanticas, lo anterior sucede si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x, r) \text{ y } \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x, x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Finalmente llegamos a que debe suceder

$$(a, r^M) \notin P^M \text{ y } (a, a) \notin P^M \tag{1}$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Es **muy importante** llegar hasta esta instancia para luego poder justificar la validez de la fórmula. Al principio sólo tenemos una fórmula, y una fórmula es solamente una serie de símbolos. Recien en esta instancia tenemos una (o más) condición sobre una relación (que es un elemento matemático) y sabemos que esta relación se interpretara como dicta la definición de $\mathcal{A}$.

Ahora podemos decir que, en la clase $\mathcal{A}$, todo elemento es reflexivo asi que, en particular para un a cualquiera sucede que $(a,a) \notin P^M$. De igual manera justificamos que, al ser r la raiz, no puede tener padre, por lo tanto $(a, r^M) \notin P^M$. Concluimos que SQ8 es válido en la clase.

SQ9. En este caso saltearé algunos pasos en la demostración de validez, para los parciales es necesario que si saltean algunos pasos los justifiquen adecuadamente. En este punto veremos un ejemplo del tipo de cosas que pueden "saltearse con justificación adecuada". Siempre usen las definiciones de satisfacción hasta llegar a las condiciones sobre elementos del modelo para luego poder justificar su validez.

$$\mathcal{M}, v \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y,x) \wedge P(z,x)) \rightarrow (y = z)\big)$$

si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c] \models (P(y,x) \wedge P(z,x)) \rightarrow (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Para ahorrar espacio llamemos a una valuación $v' = v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$. La ultima fórmula equivale a

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \wedge P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \not\models P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$(b,a) \notin P^M \;\text{ o }\; P(c,a) \notin P^M \;\text{ o }\; (b,c) \in =^M \tag{2}$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Ahora que tenemos una condición sobre los elementos del modelo tenemos que probar que se cumple.

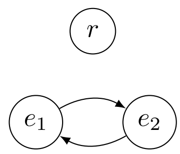
Como tengo 3 disyunciones, en lugar de ver que siempre se cumple alguna de las 3 voy a suponer que no se cumple ninguna y ver que eso no es posible. Eso quiere decir que tengo dos elementos distintos b, c tal que ambos tienen como hijo al elemento a. En un árbol eso no puede suceder. Absurdo.

SQ10. Este punto queda como ejercicio.

¿Qué probamos con esto? Probamos que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{A}$. También sabemos que MP preserva validez, ya que, si $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta$, $\mathcal{A} \models \alpha$ entonces $\mathcal{A} \models \beta$.

Juntando estas dos cosas probamos que si $SQ_{\text{Tree}} \vdash \varphi$ entonces $\mathcal{A} \models \varphi$, o sea, que el sistema axiomático es *correcto* con respecto a la clase $\mathcal{A}$. □

Resolución (b). La fórmula $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)\big)$ indica que la relación es antisimétrica. Por lo tanto debemos concentrarnos en dar un modelo donde la relación no sea antisimétrica, de todas maneras no debemos perder de vista que queremos que cumpla con todos los axiomas. Este es el punto en el que debemos notar que "algo" le falta a la axiomatización. Nosotros pensamos en árboles antisimétricos pero evidentemente nuestros axiomas no lo están forzando. Consideremos el siguiente modelo



$\mathcal{M}$

Debemos mostrar que todos los axiomas son válidos en el modelo... ¿Debemos hacer **todo** ese trabajo infernal nuevamente? No. Gracias al análisis que ya hicimos sobre las fórmulas ya sabemos que condiciones imponen sobre el modelo y podemos partir directamente de ahí.

Veamos que SQ8 (1) vale en el modelo para cualquier a. No hay elementos reflexivos y tampoco hay elementos que tengan a r como hijo. Vale.

Veamos que SQ9 (2) vale en el modelo para cualquier a, b, c. No hay elementos con dos hijos. Vale (en los parciales deben justificar mucho más, por favor).

Veamos que SQ10 (ejercicio) vale en el modelo para cualquier a, b. Todos tienen padre menos r. Vale.

El paso siguiente es ver que φ no vale en el modelos. Queda como ejercicio ver que para la valuación donde $v(x) = e_1, v(y) = e_2$ la fórmula es falsa. □

Resolución (c). Todo árbol es antisimétrico por lo tanto φ valdrá en todo modelo donde P sea interpretada como un árbol. En un caso real (parcial) deberíamos demostrar esta propiedad como hicimos en el punto (a).

¿Cómo podemos concluir lo que nos piden? Notemos que, como todos nuestros axiomas son válidos en el modelo $\mathcal{M}$ y modus ponens preserva validez, todo teorema de esta teoría será válido en $\mathcal{M}$. Escrito de otra manera, si $SQ_{\text{Tree}} \vdash \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi$. Este punto es **crucial**, si no queda claro por favor preguntá a los docentes.

También probamos que φ es válida en la clase, entonces nos gustaría que fuera un teorema de nuestra teoría pero, como $\mathcal{M} \not\models \varphi$, usando el contrarecíproco de la observación anterior llegamos a que $SQ_{\text{Tree}} \nvdash \varphi$.

Por lo tanto tenemos una fórmula φ (la de la antisimetría) tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ (es válida en la clase) y $SQ_{\text{Tree}} \nvdash \varphi$ (no es teorema). Concluimos que la teoría es incompleta respecto a $\mathcal{A}$. □