Subtipado

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires

14 de Noviembre de 2017

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \cdot r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \cdot r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \cdot r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará? y si lo hago con un Float, ¿funcionará?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \cdot r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará? y si lo hago con un Float, ¿funcionará? ¿siempre?

Sustitutividad

La relación de subtipado

lacktriangle Cualquier término de tipo S puede ser usado en forma segura en un contexto en el cual un término de tipo T es esperado

Sustitutividad

La relación de subtipado

lacktriangle Cualquier término de tipo S puede ser usado en forma segura en un contexto en el cual un término de tipo T es esperado

Principio de Sustitutividad

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\prod \Gamma \triangleright M : \tau}$$
 (T-Sub)

Las relación de subtipado Reglas - las fáciles

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \text{ (S-Boolnat)} \qquad \frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}} \text{ (S-NatInt)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \text{ (S-IntFloat)} \qquad \frac{}{\sigma <: \tau} \text{ (S-Top)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \text{ (S-Refl)} \qquad \frac{\sigma <: \tau \quad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} \text{ (S-Trans)}$$

Pensar en el principio de sustitutividad ¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\operatorname{Bool} \times \operatorname{Bool}$ reemplazable por un par $\operatorname{Nat} \times \operatorname{Nat}$?
- ¿Es un par de Nat × Bool reemplazable por un par Bool × Bool?

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\operatorname{Bool} \times \operatorname{Bool}$ reemplazable por un par $\operatorname{Nat} \times \operatorname{Nat}$?
- ¿Es un par de Nat × Bool reemplazable por un par Bool × Bool?

$$\frac{\sigma <: \tau \qquad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2}$$
 (S-Pair)

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- $lue{}$ ¿Es un par de $\operatorname{Bool} imes \operatorname{Bool}$ reemplazable por un par $\operatorname{Nat} imes \operatorname{Nat}$?
- ¿Es un par de Nat × Bool reemplazable por un par Bool × Bool?

$$\frac{\sigma <: \tau \qquad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2}$$
 (S-Pair)

■ Probar el siguiente juicio (¿quién es σ ?)

$$\{y : \text{Bool}\} \triangleright (\lambda p : \text{Nat} \times \text{Nat} : succ(\pi_1(p))) (y, y) : \sigma$$

Las relación de subtipado Reglas - funciones

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo una función es reemplazable por otra?

$$\frac{\sigma' ? \sigma \qquad \tau' ? \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau}$$
(S-Arrow)

Las reglas en acción

Ejercicio 1

¿Cuál de estas dos expresiones es tipable? ¿Qué tipo tiene?

$$(\lambda f: \text{Nat} \to \text{Nat. } f \ 3) \quad (\lambda x: \text{Float. true})$$

 $(\lambda f: \text{Nat} \to \text{Nat. } f \ 3) \quad (\lambda b: \text{Bool. } 0, 5)$

Suponemos

$$\frac{}{\Gamma \triangleright 3 : \mathrm{Nat}} \, (\mathrm{T\text{-}Three}) \quad \frac{}{\Gamma \triangleright 0, 5 : \mathrm{Float}} \, (\mathrm{T\text{-}Half})$$

Reglas de subtipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\qquad \qquad \qquad } \text{(T-Sub)}$$

$$\frac{}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{(S-BoolNat)} \qquad \frac{}{\qquad \qquad } \text{(S-NatInt)}$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \qquad \text{(S-IntFloat)} \qquad \frac{}{\qquad \qquad } \text{(S-Top)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\qquad \qquad } \text{(S-Trans)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\qquad \qquad } \text{(S-Trans)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \qquad \frac{\sigma <: \sigma' \qquad \tau' <: \tau}{\qquad \qquad } \text{(S-Arrow)}$$

$$\frac{}{\sigma' \rightarrow \tau' <: \sigma \rightarrow \tau} \qquad \text{(S-Arrow)}$$

$$\frac{\{l_i | 1 \le i \le n\} \subseteq \{k_j | 1 \le j \le m\} \qquad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\qquad \qquad } \text{(S-RCD)}$$

¿Cómo extender λ -cálculo desde el subtipado?

Ejercicio 2 (tipo parcial)

- Expresar con reglas de subtipado que el tipo de la currificación de una función es equivalente al tipo de dicha función. Es decir, cualquier función currificada mantiene el mismo tipo que la misma sin currificar y viceversa.
- 2 Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente término tiene tipo $Nat \to Nat.$

$$(\lambda y : \text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)) \ 0$$

Una ejercitación mas completa sobre la currificación puede encontrarse en el ejercicio 9 de la práctica del tema.

¿Cómo extender λ -cálculo desde el subtipado?

Ejercicio 2 (tipo parcial)

1

$$\frac{}{\sigma \times \tau \to \rho <: \sigma \to \tau \to \rho} \text{(S-Curry)}$$

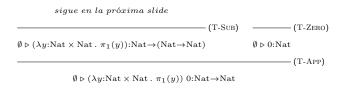
$$\frac{}{\sigma \to \tau \to \rho <: \sigma \times \tau \to \rho} \text{(S-Uncurry)}$$

2 Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente término tiene tipo $Nat \to Nat.$

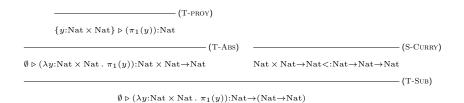
$$(\lambda y : \text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)) \ 0$$

Una ejercitación mas completa sobre la currificación puede encontrarse en el ejercicio 9 de la práctica del tema.

Ejercicio II: Solución



Ejercicio II: Solución



Ejercicio III

Supongamos que agregamos al lenguaje el tipo $Comp_{\sigma}$, para representar comparadores de términos de tipo σ . Los comparadores tienen la operación mejorSegún, que indica si el primer término es mejor que el segundo.

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \mathit{Comp}_{\sigma} \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \mathsf{mejorSegún}(M, N, O) : \mathsf{Bool}} (\mathsf{T\text{-}Comp})$$

a) El siguente término:

$$\lambda c\colon \mathit{Comp}_{\{x:\operatorname{Int}\}}.\mathsf{mejorSegún}(c,\{x=1,y=2\},\{x=0\})$$
 ¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad? ¿Lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright \{x = 1, y = 2\} : \{x : \text{Int}, y : \text{Int}\}$$
 $\Gamma \triangleright \{x = 0\} : \{x : \text{Int}\}$

Ejercicio III

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \mathit{Comp}_{\sigma} \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \mathsf{mejorSegún}(M, N, O) : \mathsf{Bool}} (\mathsf{T\text{-}Comp})$$

- b) Dar la o las reglas de subtipado para comparadores.
- c) El siguiente término:

$$\lambda c \colon \mathit{Comp}_{\mathrm{Float}}.(\lambda x \colon \mathit{Comp}_{\mathrm{Nat}}.\mathsf{mejorSegún}(x,3,4)) \ c$$

¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad? ¿Según las reglas dadas, lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright 3 : \text{Nat} \qquad \Gamma \triangleright 4 : \text{Nat}$$

Reglas de subtipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\qquad \qquad \qquad } \text{(T-Sub)}$$

$$\frac{}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{(S-BoolNat)} \qquad \frac{}{\qquad \qquad } \text{(S-NatInt)}$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \qquad \text{(S-IntFloat)} \qquad \frac{}{\qquad \qquad } \text{(S-Top)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\qquad \qquad } \text{(S-Trans)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\qquad \qquad } \text{(S-Trans)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \qquad \frac{\sigma <: \sigma' \qquad \tau' <: \tau}{\qquad \qquad } \text{(S-Arrow)}$$

$$\frac{}{\sigma' \rightarrow \tau' <: \sigma \rightarrow \tau} \qquad \text{(S-Arrow)}$$

$$\frac{\{l_i | 1 \le i \le n\} \subseteq \{k_j | 1 \le j \le m\} \qquad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\qquad \qquad } \text{(S-RCD)}$$

Preguntas???????