Teoría de Lenguajes

Clase Teórica 2

Autómatas Finitos

Primer cuartimestre 2016

Material compilado por Julio Jacobo a lo largo de distintas ediciones de la materia Teoría de Lenguajes en el Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, revisado recientemente por Verónica Becher.

Bibliografía: Capítulo 2, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Definición (Autómata Finito Determinístico (AFD))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde*

Definición (Autómata Finito Determinístico (AFD))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde*

- Q *es un conjunto finito de estados*

Definición (Autómata Finito Determinístico (AFD))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde*

- Q *es un conjunto finito de estados*
- Σ *es un conjunto finito de símbolos que constituye el alfabeto de entrada*

Definición (Autómata Finito Determinístico (AFD))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde*

- Q *es un conjunto finito de estados*
- Σ *es un conjunto finito de símbolos que constituye el alfabeto de entrada*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ *es la función de transición*

Definición (Autómata Finito Determinístico (AFD))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ *donde*

- Q *es un conjunto finito de estados*
- Σ *es un conjunto finito de símbolos que constituye el alfabeto de entrada*
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ *es la función de transición*
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial*

Definición (Autómata Finito Determinístico (AFD))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde*

- Q *es un conjunto finito de estados*
- Σ *es un conjunto finito de símbolos que constituye el alfabeto de entrada*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ *es la función de transición*
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial*
- $F \subseteq Q$ *es el conjunto de estados finales*

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición (Función de transición generalizada $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}(q, \lambda) = q$

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición (Función de transición generalizada $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}\,(q, \lambda) = q$
- $\widehat{\delta}\,(q, xa) = \delta\left(\widehat{\delta}\,(q, x)\,, a\right)$, *con* $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$.

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición (Función de transición generalizada $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}\,(q, \lambda) = q$
- $\widehat{\delta}\,(q, xa) = \delta\left(\widehat{\delta}\,(q, x)\,, a\right)$, *con* $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$.

Notar que $\widehat{\delta}\,(q, a) = \delta\left(\widehat{\delta}\,(q, \lambda)\,, a\right) = \delta\,(q, a)$.

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición (Función de transición generalizada $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}\,(q, \lambda) = q$
- $\widehat{\delta}\,(q, xa) = \delta\left(\widehat{\delta}\,(q, x)\,, a\right)$, *con* $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$.

Notar que $\widehat{\delta}\,(q, a) = \delta\left(\widehat{\delta}\,(q, \lambda)\,, a\right) = \delta\,(q, a)$. Por esto puede utilizarse el símbolo δ para ambos tipos de transición.

Definición (Cadena aceptada por un AFD)

Una cadena x *es aceptada por un AFD* $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *si y solo si* $\widehat{\delta}\,(q_0, x) \in F$.

Definición (Cadena aceptada por un AFD)

Una cadena x es aceptada por un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\widehat{\delta}\left(q_0, x\right) \in F$.

Definición (Lenguaje aceptado por un AFD)

Dado un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, el lenguaje aceptado por M, $\mathcal{L}\left(M\right)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M y se define como

$$\mathcal{L}\left(M\right) = \left\{ x \in \Sigma^* : \widehat{\delta}\left(q_0, x\right) \in F \right\}.$$

Definición (Autómata Finito No Determinístico (AFND))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde* Q, Σ, q_0 *y* F *tienen el mismo significado que para el AFD, pero* $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Autómata Finito No Determinístico (AFND))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ *donde* Q, Σ, q_0 *y* F *tienen el mismo significado que para el AFD, pero* $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$.

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición (Autómata Finito No Determinístico (AFND))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde* Q, Σ, q_0 *y* F *tienen el mismo significado que para el AFD, pero* $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$.

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición (Función de transición generalizada $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$
- $\widehat{\delta}(q, xa) = \left\{ p \in Q : \exists r \in \widehat{\delta}(q, x) \text{ tal que } p \in \delta(r, a) \right\}$, *con* $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$.

Notar que

$$\widehat{\delta}\left(q,\lambda a\right)=\left\{p\in Q: \exists r\in\widehat{\delta}\left(q,\lambda\right)\ \text{tal que}\ p\in\delta\left(r,a\right)\right\}$$

Notar que

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(q,\lambda a) &= \left\{p \in Q : \exists r \in \widehat{\delta}(q,\lambda) \text{ tal que } p \in \delta(r,a)\right\} \\ &= \{p \in Q : \exists r \in \{q\} \text{ tal que } p \in \delta(r,a)\}\end{aligned}$$

Notar que

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}\,(q,\lambda a) &= \left\{p \in Q : \exists r \in \widehat{\delta}\,(q,\lambda) \ \text{ tal que } p \in \delta\,(r,a)\right\}\\ &= \{p \in Q : \exists r \in \{q\} \ \text{ tal que } p \in \delta\,(r,a)\}\\ &= \{p \in Q : p \in \delta\,(q,a)\}\\ &= \delta\,(q,a)\,.\end{aligned}$$

Notar que

$$
\begin{aligned}
\widehat{\delta}\,(q, \lambda a) &= \left\{p \in Q : \exists r \in \widehat{\delta}\,(q, \lambda) \text{ tal que } p \in \delta\,(r, a)\right\} \\
&= \{p \in Q : \exists r \in \{q\} \text{ tal que } p \in \delta\,(r, a)\} \\
&= \{p \in Q : p \in \delta\,(q, a)\} \\
&= \delta\,(q, a)\,.
\end{aligned}
$$

Por esto puede utilizarse el símbolo δ para ambos tipos de transición.

Definición (Cadena aceptada por un AFND)

Una cadena x *es aceptada por un AFND* $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *si y solo si* $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi$.

Definición (Cadena aceptada por un AFND)

Una cadena x *es aceptada por un AFND* $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *si y solo si* $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi$.

Definición (Lenguaje aceptado por un AFND)

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$*, el lenguaje aceptado por* M*,* $\mathcal{L}(M)$*, es el conjunto de cadenas aceptadas por* M *y se define como*

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ x \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi \right\}.$$

Podemos extender la función de transición aún más, haciendo que mapee conjuntos de estados y cadenas en conjuntos de estados.

Definición

Función de transición $\delta : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ *dada por*

$$\delta(P, x) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x).$$

Podemos extender la función de transición aún más, haciendo que mapee conjuntos de estados y cadenas en conjuntos de estados.

Definición

Función de transición $\delta : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ *dada por*

$$\delta(P, x) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x).$$

Es trivial ver que, para todo AFD existe un AFND equivalente.

Podemos extender la función de transición aún más, haciendo que mapee conjuntos de estados y cadenas en conjuntos de estados.

Definición

Función de transición $\delta : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ *dada por*

$$\delta(P, x) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x).$$

Es trivial ver que, para todo AFD existe un AFND equivalente.
Lo que no es tan obvio es que lo inverso también es cierto:

Podemos extender la función de transición aún más, haciendo que mapee conjuntos de estados y cadenas en conjuntos de estados.

Definición

Función de transición $\delta : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ *dada por*

$$\delta(P, x) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x).$$

Es trivial ver que, para todo AFD existe un AFND equivalente.
Lo que no es tan obvio es que lo inverso también es cierto:

Para cada AFND existe un AFD equivalente.

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFD (Rabin & Scott, 1959))

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$*, existe un AFD* $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ *tal que* $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$*.*

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFD (Rabin & Scott, 1959))

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$*, existe un AFD* $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\rangle$ *tal que* $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$*.*

Demostración. Construimos un $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\rangle$.
Q' es el conjunto de elementos $[q_1, \ldots, q_i]$, con $q_1, \ldots, q_i \in Q$ (corresponden a los elementos de $\mathcal{P}(Q)$).

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFD (Rabin & Scott, 1959))

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$*, existe un AFD* $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ *tal que* $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$*.*

Demostración. Construimos un $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$.
Q' es el conjunto de elementos $[q_1, \ldots, q_i]$, con $q_1, \ldots, q_i \in Q$ (corresponden a los elementos de $\mathcal{P}(Q)$).

$F' = \{[q_1, \ldots, q_i] \in Q' : \{q_1, \ldots, q_i\} \cap F \neq \phi\}$

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFD (Rabin & Scott, 1959))

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$*, existe un AFD* $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ *tal que* $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$*.*

Demostración. Construimos un $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$.
Q' es el conjunto de elementos $[q_1, \ldots, q_i]$, con $q_1, \ldots, q_i \in Q$ (corresponden a los elementos de $\mathcal{P}(Q)$).

$F' = \{[q_1, \ldots, q_i] \in Q' : \{q_1, \ldots, q_i\} \cap F \neq \phi\}$

$q_0' = [q_0]$

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFD (Rabin & Scott, 1959))

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$*, existe un AFD* $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ *tal que* $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$*.*

Demostración. Construimos un $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$.
Q' es el conjunto de elementos $[q_1, \ldots, q_i]$, con $q_1, \ldots, q_i \in Q$ (corresponden a los elementos de $\mathcal{P}(Q)$).

$F' = \{[q_1, \ldots, q_i] \in Q' : \{q_1, \ldots, q_i\} \cap F \neq \phi\}$

$q'_0 = [q_0]$

$$\delta'([q_1, \ldots, q_j], a) = [p_1, \ldots, p_i] \Longleftrightarrow \delta(\{q_1, \ldots, q_j\}, a) = \{p_1, \ldots, p_i\}.$$

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'\left(q_0', x\right) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta\left(q_0, x\right) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'\left(q_0', x\right) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta\left(q_0, x\right) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'\left(q_0', x\right) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta\left(q_0, x\right) = \left\{q_1, \ldots, q_i\right\}.$

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$.

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q_0', \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q_0', \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q_0', \lambda) = [q_0] \Longleftrightarrow \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \iff \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q_0', \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q_0', \lambda) = [q_0] \iff \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$:
$\delta'(q_0', x) = [p_1, \ldots, p_k] \iff \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.
Veamos que vale para xa, para $a \in \Sigma$,

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q_0', \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q_0', \lambda) = [q_0] \Longleftrightarrow \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$:
$\delta'(q_0', x) = [p_1, \ldots, p_k] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.
Veamos que vale para xa, para $a \in \Sigma$,

$\delta'\left(q_0', xa\right) = \delta'\left(\delta'\left(q_0', x\right), a\right) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow$
por definición de δ' en AFD M'

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q_0', \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q_0', \lambda) = [q_0] \Longleftrightarrow \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$:
$\delta'(q_0', x) = [p_1, \ldots, p_k] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.
Veamos que vale para xa, para $a \in \Sigma$,

$\delta'\left(q_0', xa\right) = \delta'\left(\delta'\left(q_0', x\right), a\right) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow$
por definición de δ' en AFD M'
$\exists\, [p_1, \ldots, p_k], \delta'\left(q_0', x\right) = [p_1, \ldots, p_k] \wedge \delta'([p_1, \ldots, p_k], a) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow$
por HI y y por definición de δ en AFND M

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q_0', \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q_0', \lambda) = [q_0] \Longleftrightarrow \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$:
$\delta'(q_0', x) = [p_1, \ldots, p_k] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.
Veamos que vale para xa, para $a \in \Sigma$,

$\delta'\left(q_0', xa\right) = \delta'\left(\delta'\left(q_0', x\right), a\right) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow$

por definición de δ' en AFD M'

$\exists\, [p_1, \ldots, p_k], \delta'\left(q_0', x\right) = [p_1, \ldots, p_k] \wedge \delta'([p_1, \ldots, p_k], a) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow$

por HI y y por definición de δ en AFND M

$\exists\, \{p_1, \ldots, p_k\},\ \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\} \wedge \delta(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) = \{r_1, \ldots, r_i\} \Longleftrightarrow$

por def δ en AFND M,

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \iff \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q_0', \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q_0', \lambda) = [q_0] \iff \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$:
$\delta'(q_0', x) = [p_1, \ldots, p_k] \iff \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.
Veamos que vale para xa, para $a \in \Sigma$,

$\delta'\left(q_0', xa\right) = \delta'\left(\delta'\left(q_0', x\right), a\right) = [r_1, \ldots, r_i] \iff$

por definición de δ' en AFD M'

$\exists [p_1, \ldots, p_k], \delta'\left(q_0', x\right) = [p_1, \ldots, p_k] \wedge \delta'([p_1, \ldots, p_k], a) = [r_1, \ldots, r_i] \iff$

por HI y y por definición de δ en AFND M

$\exists \{p_1, \ldots, p_k\},\ \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\} \wedge \delta(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) = \{r_1, \ldots, r_i\} \iff$

por def δ en AFND M,

$\delta(q_0, xa) = \delta(\delta(q_0, x), a) = \{r_1, \ldots, r_i\}$

Demostremos que para toda cadena x,
$\delta'(q'_0, x) = [q_1, \ldots, q_i] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.
Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'\left(q'_0, \lambda\right) = [q_0] \quad \text{y} \quad \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q'_0, \lambda) = [q_0] \Longleftrightarrow \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$:
$\delta'(q'_0, x) = [p_1, \ldots, p_k] \Longleftrightarrow \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.
Veamos que vale para xa, para $a \in \Sigma$,

$\delta'\left(q'_0, xa\right) = \delta'\left(\delta'\left(q'_0, x\right), a\right) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow$
por definición de δ' en AFD M'
$\exists\, [p_1, \ldots, p_k], \delta'\left(q'_0, x\right) = [p_1, \ldots, p_k] \wedge \delta'([p_1, \ldots, p_k], a) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow$
por HI y y por definición de δ en AFND M
$\exists\, \{p_1, \ldots, p_k\},\ \delta(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\} \wedge \delta(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) = \{r_1, \ldots, r_i\} \Longleftrightarrow$
por def δ en AFND M,
$\delta(q_0, xa) = \delta(\delta(q_0, x), a) = \{r_1, \ldots, r_i\}$

Concluimos,$\delta'(q'_0, xa) = [r_1, \ldots, r_i] \Longleftrightarrow \delta(q_0, xa) = \{r_1, \ldots, r_i\}$.

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ construimos
AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.
Ahora nos queda probar que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ construimos AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.
Ahora nos queda probar que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

$$x \in \mathcal{L}(M)$$

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ construimos
AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.
Ahora nos queda probar que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

$$\begin{aligned} & x \in \mathcal{L}(M) \\ & \iff \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\} \wedge \{q_1, \ldots, q_i\} \cap F \neq \phi \end{aligned}$$

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ construimos
AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.
Ahora nos queda probar que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

$$\begin{aligned}
& x \in \mathcal{L}(M) \\
& \iff \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\} \wedge \{q_1, \ldots, q_i\} \cap F \neq \phi \\
& \iff \delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \wedge [q_1, \ldots, q_i] \in F'
\end{aligned}$$

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ construimos
AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.
Ahora nos queda probar que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

$$
\begin{aligned}
& x \in \mathcal{L}(M) \\
& \iff \delta(q_0, x) = \{q_1, \ldots, q_i\} \wedge \{q_1, \ldots, q_i\} \cap F \neq \phi \\
& \iff \delta'(q_0', x) = [q_1, \ldots, q_i] \wedge [q_1, \ldots, q_i] \in F' \\
& \iff x \in \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde Q, Σ, q_0 y F tienen el mismo significado que para el AFND, pero $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde Q, Σ, q_0 y F tienen el mismo significado que para el AFND, pero $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Clausura λ de un estado)

La clausura λ de un estado q, $Cl_\lambda(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q, siguiendo sólo transiciones λ.
Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_λ.
Sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $(q, p) \in R$ si y solo si $p \in \delta(q, \lambda)$. Luego,

$$Cl_\lambda(q) = \{p : (q, p) \in R^*\}$$

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde Q, Σ, q_0 y F tienen el mismo significado que para el AFND, pero $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Clausura λ de un estado)

La clausura λ de un estado q, $Cl_\lambda(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q, siguiendo sólo transiciones λ.
Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_λ.
Sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $(q,p) \in R$ si y solo si $p \in \delta(q, \lambda)$. Luego,

$$Cl_\lambda(q) = \{p : (q,p) \in R^*\}$$

Notar que el estado q pertenece a su clausura λ.

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde Q, Σ, q_0 y F tienen el mismo significado que para el AFND, pero $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Clausura λ de un estado)

La clausura λ de un estado q, $Cl_\lambda(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q, siguiendo sólo transiciones λ.
Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_λ.
Sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $(q, p) \in R$ si y solo si $p \in \delta(q, \lambda)$. Luego,

$$Cl_\lambda(q) = \{p : (q, p) \in R^*\}$$

Notar que el estado q pertenece a su clausura λ.

Definición (Clausura λ de un conjunto de estados P)

$$Cl_\lambda(P) = \bigcup_{q \in P} Cl_\lambda(q).$$

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas en Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Función de transición extendida $\widehat{\delta}$)

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas en Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Función de transición extendida $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas en Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Función de transición extendida $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$
- $\widehat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\left\{p : \exists r \in \widehat{\delta}(q, x) \text{ tal que } p \in \delta(r, a)\right\}\right)$
  con $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$*, o sea,*

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas en Σ, o sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$.

Definición (Función de transición extendida $\widehat{\delta}$)

- $\widehat{\delta}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$
- $\widehat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\left\{p : \exists r \in \widehat{\delta}(q, x) \text{ *tal que* } p \in \delta(r, a)\right\}\right)$
  con $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$*, o sea,*

$$\widehat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\bigcup_{r \in \widehat{\delta}(q,x)} \delta(r, a)\right)$$

Extendiendo la definición de δ y $\widehat{\delta}$ a conjuntos de estados, tenemos que

Extendiendo la definición de δ y $\widehat{\delta}$ a conjuntos de estados, tenemos que

- $\delta\left(P, a\right) = \bigcup\limits_{q \in P} \delta\left(q, a\right)$

Extendiendo la definición de δ y $\widehat{\delta}$ a conjuntos de estados, tenemos que

- $\delta(P,a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q,a)$
- $\widehat{\delta}(P,x) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(q,x)$

Extendiendo la definición de δ y $\widehat{\delta}$ a conjuntos de estados, tenemos que

- $\delta\left(P, a\right) = \bigcup\limits_{q \in P} \delta\left(q, a\right)$
- $\widehat{\delta}\left(P, x\right) = \bigcup\limits_{q \in P} \widehat{\delta}\left(q, x\right)$

Utilizando esto último, $\widehat{\delta}\left(q, xa\right)$ puede escribirse como

$$\widehat{\delta}\left(q, xa\right) = Cl_{\lambda}\left(\delta\left(\widehat{\delta}\left(q, x\right), a\right)\right).$$

Extendiendo la definición de δ y $\widehat{\delta}$ a conjuntos de estados, tenemos que

- $\delta(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$
- $\widehat{\delta}(P, x) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(q, x)$

Utilizando esto último, $\widehat{\delta}(q, xa)$ puede escribirse como

$$\widehat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\delta\left(\widehat{\delta}(q, x), a\right)\right).$$

Notar que $\widehat{\delta}(q, a)$ puede ser distinto de $\delta(q, a)$:

$$\widehat{\delta}(q, a) = Cl_\lambda\left(\delta\left(\widehat{\delta}(q, \lambda), a\right)\right) = Cl_\lambda(\delta(Cl_\lambda(q), a)) \neq \delta(q, a),$$

Definición (Cadena aceptada por un AFND-λ)

Se dice que una cadena x *es aceptada por un AFND-*λ
$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *si y solo si* $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi$.

Definición (Cadena aceptada por un AFND-λ)

Se dice que una cadena x es aceptada por un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi$.

Definición (Lenguaje aceptado por un AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, el lenguaje aceptado por M, $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M y se define como

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ x : \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi \right\}.$$

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ que reconoce el mismo lenguaje.

Demostración. Definimos

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ que reconoce el mismo lenguaje.

Demostración. Definimos

$$\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a).$$

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ que reconoce el mismo lenguaje.

Demostración. Definimos

$$\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a).$$

$$F' = \begin{cases} F & \text{, si } Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset \\ F \cup \{q_0\} & \text{, si no.} \end{cases}$$

Observar que $F' \supseteq F$.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x) \text{ para } |x| \geq 1.$, por inducción en la longitud de la cadena.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x) \text{ para } |x| \geq 1.$, por inducción en la longitud de la cadena.
Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de δ', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$,

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x) \text{ para } |x| \geq 1.$, por inducción en la longitud de la cadena.
Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de δ', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$,
Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F'\rangle$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x) \text{ para } |x| \geq 1.$, por inducción en la longitud de la cadena.
Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de δ', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$,
Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w.

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\underbrace{\delta'(q_0, w)}, a) = \delta'(\underbrace{\widehat{\delta}(q_0, w)}, a),$$

las expresiones tomadas por las llaves son iguales por h.i.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x) \text{ para } |x| \geq 1.$, por inducción en la longitud de la cadena.
Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de δ', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$,
Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w.

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\underbrace{\delta'(q_0, w)}, a) = \delta'(\underbrace{\widehat{\delta}(q_0, w)}, a),$$

las expresiones tomadas por las llaves son iguales por h.i.

Por otro lado, si $P \subseteq Q$

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta'(q, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(P, a) = \widehat{\delta}(P, a)$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x) \text{ para } |x| \geq 1.$, por inducción en la longitud de la cadena.
Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de δ', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$,
Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w.

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\underbrace{\delta'(q_0, w)}, a) = \delta'(\underbrace{\widehat{\delta}(q_0, w)}, a),$$

las expresiones tomadas por las llaves son iguales por h.i.

Por otro lado, si $P \subseteq Q$

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta'(q, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(P, a) = \widehat{\delta}(P, a)$$

Por lo tanto, haciendo $P = \widehat{\delta}(q_0, w)$, tenemos que

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x) \text{ para } |x| \geq 1.$, por inducción en la longitud de la cadena.
Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de δ', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$,
Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w.

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\underbrace{\delta'(q_0, w)}, a) = \delta'(\underbrace{\widehat{\delta}(q_0, w)}, a),$$

las expresiones tomadas por las llaves son iguales por h.i.

Por otro lado, si $P \subseteq Q$

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta'(q, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(P, a) = \widehat{\delta}(P, a)$$

Por lo tanto, haciendo $P = \widehat{\delta}(q_0, w)$, tenemos que

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(q_0, wa).$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \Longleftrightarrow$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \iff \quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \implies$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \iff \quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow q_0 \in F' \iff$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \iff \quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \implies q_0 \in F' \iff \quad \lambda \in \mathcal{L}(M')$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \iff \quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \implies q_0 \in F' \iff \quad \lambda \in \mathcal{L}(M')$$

$$\lambda \in \mathcal{L}(M') \iff q_0 \in F' \implies \big(q_0 \in F \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\big)$$

Dado que

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \iff \quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \implies q_0 \in F' \iff \quad \lambda \in \mathcal{L}(M')$$

$$\lambda \in \mathcal{L}(M') \iff q_0 \in F' \implies \left(q_0 \in F \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \right)$$

Dado que

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{q_0 \in F} & \vee & \underbrace{Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing & & \lambda \in \mathcal{L}(M) \\ \Downarrow & & \\ \lambda \in \mathcal{L}(M) & & \end{array}$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \iff \quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \implies q_0 \in F' \iff \quad \lambda \in \mathcal{L}(M')$$

$$\lambda \in \mathcal{L}(M') \iff q_0 \in F' \implies \big(q_0 \in F \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\big)$$

Dado que

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{q_0 \in F} & \vee & \underbrace{Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing & & \lambda \in \mathcal{L}(M) \\ \Downarrow & & \\ \lambda \in \mathcal{L}(M) & & \end{array}$$

concluimos

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.
Para $x = \lambda$,

$$\lambda \in \mathcal{L}(M) \Longleftrightarrow \quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \Longrightarrow q_0 \in F' \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathcal{L}(M')$$

$$\lambda \in \mathcal{L}(M') \Longleftrightarrow q_0 \in F' \Longrightarrow \left(q_0 \in F \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\right)$$

Dado que

$$\underbrace{q_0 \in F}_{\substack{\Downarrow \\ Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \\ \Downarrow \\ \lambda \in \mathcal{L}(M)}} \quad \vee \quad \underbrace{Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing}_{\substack{\Downarrow \\ \lambda \in \mathcal{L}(M)}}$$

concluimos

$$\lambda \in \mathcal{L}(M') \Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{L}(M).$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$x \in \mathcal{L}(M) \iff$ por aceptación en AFND-λ

.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$x \in \mathcal{L}(M) \Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing,$ por aceptación en AFND-λ

.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$x \in \mathcal{L}(M) \Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing$, por aceptación en AFND-λ

$\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$, por el paso intermedio y porque $F \subseteq F'$

.

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\
&\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\
&\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\
&\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\
&\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\
&\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\
&\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

$$x \in \mathcal{L}(M') \Longleftrightarrow$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\
&\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\
&\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

$x \in \mathcal{L}(M') \Longleftrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$, por aceptación en AFND

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\
&\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\
&\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M') &\Longleftrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND} \\
&\Longrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing \vee
\end{aligned}
$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\ &\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\ &\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(M') &\Longleftrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND} \\ &\Longrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing \vee \left(\widehat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \varnothing \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \right) \end{aligned}$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\
&\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\
&\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in \mathcal{L}(M') &\Longleftrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND} \\
&\Longrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing \vee \left(\widehat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \varnothing \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing \right)
\end{aligned}
$$

Dado AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(M) &\Longleftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\ &\Longrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing \text{ , por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\ &\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(M') &\Longleftrightarrow \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing, \text{ por aceptación en AFND} \\ &\Longrightarrow \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing \vee \left(\widehat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \varnothing \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\right) \\ &\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M) \vee x \in \mathcal{L}(M) \\ &\Longrightarrow x \in \mathcal{L}(M). \end{aligned}$$