Clase Práctica: Lema de Pumping

1. Repaso

Utilizamos el Lema de Pumping para demostrar que un lenguaje es no regular.

Hasta ahora vimos varias herramientas para especificar ciertos lenguajes regulares: ER, GR, AF. Utilizando la existencia de alguno de estos formalismos para lenguaje, podemos asegurar que es regular.

¿Pero cómo hacemos para probar que un lenguaje no es regular? ¿Podríamos ponernos a buscar la no existencia de un ER, GR o AF habiendo infinitas combinaciones?

Para esto existe el Lema de Pumping (o Lema de Bombeo).

2. Enunciado formal del Lema

$$\mathcal{L}\ es\ regular\ \Rightarrow (\exists p)\ (p > 0)\ \wedge\ (\forall \alpha)\ (\alpha \in \mathcal{L})\ \wedge\ (|\alpha| \geq p)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists\ xyz)\ (xyz = \alpha\ \wedge\ |xy| \leq p\ \wedge\ |y| \geq 1 \wedge$$
$$\wedge\ (\forall i)\ (i \geq 0)\ \Rightarrow\ xy^i z\ \in\ \mathcal{L}))$$

3. Negación del Lema

El lema expresado de esta forma no resulta útil para probar que un lenguaje no es regular, únicamente sirve para decir que si un lenguaje es regular entonces cumple cierta propiedad. Pero por negación del consecuente podríamos afirmar que si dicha propiedad no se cumple, entonces el lenguaje no es regular.

$$(\forall p)\ (p > 0)\ \Rightarrow\ (\exists \alpha)\ (\alpha \in \mathcal{L})\ \wedge\ (|\alpha| \geq p) \wedge$$
$$\wedge (\forall\ xyz)\ (xyz = \alpha\ \wedge\ |xy| \leq p\ \wedge\ |y| \geq 1\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (\exists i)\ (i \geq 0)\ \wedge\ xy^i z\ \notin\ \mathcal{L})) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}\ no\ es\ regular$$

4. Demostración por Pasos - Estrategia Ganadora

Una demostración utilizando Lema de Pumping puede representarse como un juego entre 2 jugadores. Dado el siguiente Juego:

Paso 1) Oponente elije un $p > 0$

Paso 2) Jugador elije un α tal que $|\alpha| \geq p \wedge \alpha \in \mathcal{L}$

Paso 3) Oponente elije una descomposición de ese α tal que $\alpha = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1$

Paso 4) Si el Jugador encuentra un i tal que $xy^i z$ no pertence a $\mathcal{L}$ el Jugador Gana ($\mathcal{L}$ no es Regular), en cambio si no lo encuentra gana el oponente ($\mathcal{L}$ puede o no ser Regular)

Si el Jugador encuentra una "Estrategia Ganadora", de tal forma que independientemente de lo elegido por el Oponente, encuentra un α que le permita encontrar un i de tal forma que $xy^i z$ no pertenezca al lenguaje, entonces ese lenguaje no es regular.

5. Ejercicios

5.1. Ejercicio 1

$L = \{w|w = a^n\ b^m\}$ es Regular?

Si. existe una ER que lo expresa (a*b*).

5.2. Ejercicio 2

$L = \{w|w = a^n\ b^n\}$ es Regular?

Al ver este problema, tenemos que intuir que no es regular, ya que para poder reconocer la misma cantidad de b's tengo que recordar la cantidad de a's leidas, y esto se ve reflejado en la limitación de "memoria"de los LR. Pero para una demostración formal de que no es Regular debo usar el Lema de Pumping:

1. Sea $p > 0$
2. Elijo $\alpha = a^p\ b^p$
3. Sea $xyz = a^p\ b^p$ tal que $|xy| \leq p, |y| \geq 1$ notar que dado el α elegido, sin importar la longitud de p, y sin importar la descomposición elegida podemos asegurar que:
   a) $x = a^{|x|}\ (|x| \geq 0)$
   b) $y = a^{|y|}\ (|y| \geq 1)$
   c) $z = a^{(p-(|x|+|y|)}\ b^p$
4. Elijo $i = 0$, de esta manera $xy^0z = xz = a^{|x|}.\ a^{p-(|x|+|y|)}b^p = a^{p-|y|}b^p$ y como $|y|$ es mayor o igual que 1, puedo asegurar que $xz = a^k b^p$ siendo k distinto (menor estricto) que p, por ende xz no pertenece al lenguaje. Luego L no es regular.

5.3. Ejercicio 3

$L = \{w = a^n\ b^m|n \geq m\}$ es Regular?

Nuevamente podemos intuir que no lo es. Y si queremos demostrarlo, podemos ver que la demostración anterior puede servirnos a la perfección, ya que el α elegido pertenece a este nuevo lenguaje, y eligiendo $i = 0$, xz queda con menos a's que b's por lo que tampoco pertenece al nuevo lenguaje.

5.4. Ejercicio 4

$L = \{a^p|p\ es\ par\}$ es Regular?

Si. Expresión regular: $(aa)^*$

5.5. Ejercicio 5

$L = \{a^c|c\ es\ cuadrado\ perfecto\}$ es Regular?

2) elijo $\alpha = a^{p^2}$

4) elijo $i = 2$

   Vamos a acotar la longitud de la cadena:
   $|xy^2z| = |xyz| + |y| <= p^2 + p < 1 + p^2 + p < 1 + p^2 + 2p = (p + 1)^2$

   A su vez, sabemos que:
   $|xy^2z| > |xyz| = p^2$

   Luego:
   $p^2 < |xy^2z| < (p + 1)^2$

   Por ende $|xy^2z|$ (la longitud de la cadena utilizando $i = 2$) no puede ser un cuadrado perfecto. Luego L no es regular.

5.6. Ejercicio 6

$L = \{w|w \in L((ab)^n(cd)^n)\}$ es Regular?

A veces es necesario partir en casos la demostración ya que no se puede predicar sobre la descomposición xyz. Podemos demostrar para cada caso posible que existe un i tal que para dicho caso la cadena xy^iz no pertenece al lenguaje. Incluso a veces es necesario brindar un i diferente para cada caso.

2) Elijo $\alpha = (ab)^p(cd)^p$

4)

caso 1 y empieza con a y termina con b

$x \in L((ab)^*)$. Es decir, x está en el lenguaje formado por la ER $(ab)^*$.

$y \in L((ab)^+)$

Elijo $i = 0$ entonces la cadena quedará con la forma $xy^0z = (ab)^s(cd)^p$ con $s < p$

caso 2 y empieza con b y termina con b

$x \in L((ab)^*a)$

$y \in L(b(ab)^*)$

Elijo $i = 2$ entonces $xy^2z \in L((ab)^*ab(ba)^*b(ab)^*(cd)^*)$. Si observamos la ER podemos ver que independientemente de las cantidades de ab's y cd's, las cadenas no pertenecerán al lenguaje ya que habrá 2 b's seguidas.

caso 3 y empieza con b y termina con a

$x \in L((ab)^*a)$

$y \in L((ba)^+)$

Elijo $i = 0$ entonces la cadena quedará con la forma $xy^0z = (ab)^s(cd)^p$ con $s < p$

caso 4 y empieza con a y termina con a

$x \in L((ab)^*)$

$y \in L(a(ba)^*)$

Elijo $i = 2$ entonces $xy^2z \in L((ab)^*a(ba)^*a(ba)^*b(cd)^*)$. Nuevamente si observamos la ER podemos ver que independientemente de las cantidades de ab's y cd's, las cadenas no pertenecerán al lenguaje ya que habrá 2 a's seguidas

Por ende como en todos los casos vale la propiedad, L es NR.

6. Demostraciones por propiedades

6.1. Complemento

Puede ser regular el complemento de un lenguaje no regular?
Sea L No Regular. Supongo L^c Regular.
como existe un automata para L^c, existe un automata para L $\Rightarrow$ absurdo.
Entonces:

- $R^c = R$
- $NR^c = NR$

Veamos un ejemplo.

6.2. Ejercicio 7

$L = \{w|w \in \{a,b\}^* \wedge |w|_a \neq |w|_b\}$ es Regular?

El problema con este lengueja es que no sabremos cuantas a's y b's contiene y, por lo que nunca sabremos si al bombearlo la nueva cadena quedó o no en el lenguaje.
Pero sí observamos el lenguaje complemento, podemos intuir que el complemento de este lenguaje no es regular.

$L^c = \{w|w \in \{a,b\}^* \wedge |w|_a = |w|_b\}$ es Regular?

La demostración es similar a la del ejercicio 2.

1. Sea $p > 0$
2. Elijo $\alpha = a^p\ b^p$
3. Sea $xyz = a^p\ b^p$ tal que $|xy| \leq p, |y| \geq 1$

a) $x = a^{|x|}$ ($|x| \geq 0$)

b) $y = a^{|y|}$ ($|y| \geq 1$)

c) $z = a^{(p-(|x|+|y|)}\ b^p$

4. Elijo $i = 2$, de esta manera $xy^2z = xyyz = a^{|x|}.a^{2|y|}.\ a^{p-(|x|+|y|)}b^p = a^{p+|y|}b^p$.
   Como $|y|$ es mayor o igual que 1, puedo asegurar que $xyyz = a^k b^p$ siendo k distinto a p, por ende la cadena no pertenece al lenguaje.

5. Por ende L^c es NR $\Rightarrow$ L es NR

6.3. Reversa

$L = \{w = b^n a^m | n \leq m\}$ es Regular?
Sea L no regular.
Supongo L^r Regular. Luego, como existe un automata para L^r, existe un automata para L $\Rightarrow$ absurdo.
Entonces:

- $R^r = R$
- $NR^r = NR$

6.4. Unión

* La unión de dos lenguajes Regulares es Regular (Se pueden unir autómatas)
* La unión infinita de lenguajes Regulares es Regular?
  $\{ab\}$ U $\{aabb\}$ U ... $= a^n b^n$ no lo es
  $\{\lambda\}$ U $\{\lambda\}$ U ...$= \lambda$ si lo es
* La unión de dos lenguajes No Regulares?
  $\{w = (a|b)^* || w|_a \neq |w|_b\} \cup \{w = (a|b)^* || w|_a = |w|_b\} = E*$ si lo es
  $\{w = (a|b)^* || w|_a \neq |w|_b\} \cup \{w = (a|b)^* || w|_a \neq |w|_b\} = \{w = (a|b)^* || w|_a \neq |w|_b\}$ no lo es

6.5. Intersección

* La intersección de dos lenguajes Regulares es Regular
* La intersección infinita de lenguajes Regulares es Regular?
  Ver el complemento de la unión Infinita: $(R \cap R \cap ...R)^c = R^c U R^c U ... U R^c = RURU...UR$ que puede ser o no regular por lo visto antes
* La intersección de dos lenguajes No Regulares?
  $\{w | w \in \{a,b\}^* \wedge |a| \neq |b|\} \cap \{w | w \in \{a,b\}^* \wedge |a| = |b|\} = \emptyset$ es regular
  $\{w | w \in \{a,b\}^* \wedge |a| \neq |b|\} \cap \{w | w \in \{a,b\}^* \wedge |a| \neq |b|\} = \{w | w \in \{a,b\}^* \wedge |a| \neq |b|\}$ es no regular

6.6. Unión disjunta

* La Unión disjunta de un lenguaje **No Regular** con otro lenguaje **Regular**, es **No Regular**
  $Q = NR \cup R$ (disjunta)
  $Q \setminus R = (NR \cup R) \setminus R$
  $Q \setminus R = NR$ (por ser R y NR disjuntos)
  $Q \cap R^c = NR$
  Supongo Q Regular, $Q \cap R^c$ es regular, pero es igual a otro lenguaje que no es regular. Abs!
  Notar que esto no vale si los conjuntos no son disjuntos. Por ejemplo:

$$\{a^p \mid p \text{ es primo}\} \cup \{a\}^* = \{a\}^*$$

  es regular. Tampoco si ambos son no regulares. Por ejemplo:

$$\{a^p \mid p \text{ es primo}\} \cup \{a^p \mid p \text{ no es primo}\} = \{a\}^*$$

  también es regular.