# No expresabilidad en primer orden*

Autor del apunte: Herman Schinca

Clase del 4 de noviembre de 2016

**Definición.** Decimos que una propiedad es expresable en primer orden si vale

$$\mathcal{M} \models \varphi \ sii \ \mathcal{M} \in K$$

donde $K$ es la clase de modelos que cumplen dicha propiedad.

**Ejercicio 1.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de predicado binario $R$. Decidir si es posible expresar en primer orden la propiedad que afirma que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todo elemento se relaciona a lo sumo con $k$ elementos distintos.

*Resolución.* En primer lugar, supongamos que sí es posible y tratemos de escribir dicha fórmula. Que los elementos del dominio se relacionen con a lo sumo $k$ elementos, para algún $k$, lo podemos expresar con una gran disyunción en donde cada disyunto expresa que todo elemento se relaciona con a lo sumo $i$ elementos, es decir:

$$\psi_0 : \neg(\exists x)[(\exists y)R(x, y)]$$

$$\psi_1 : \neg(\exists x)[(\exists y, z)y \neq z \wedge R(x, y) \wedge R(x, z)]$$

$$\begin{aligned}\psi_2 : \neg(\exists x)[(\exists y, z, w)y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge \\ R(x, y) \wedge R(x, z) \wedge R(x, w)]\end{aligned}$$

$$\ldots$$

La fórmula que obtendríamos sería $\psi_0 \vee \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots$ Pero, ¿es ésta una fórmula bien formada? ¿Qué me indican los 3 puntos suspensivos, que la fórmula continúa indefinidamente hasta el infinito? Recordemos que la cantidad de símbolos de una fórmula debe ser necesariamente finita. Sin embargo, al limitar la cantidad de $\psi_i$ que podemos utilizar no estaríamos logrando capturar la propiedad pedida ya que existirán modelos en los cuales sus elementos se relacionen con una cantidad mayor de elementos que la indicada por todas las $\psi_i$ de la fórmula. Por ejemplo, si fijáramos en 10 la cantidad de $\psi_i$ de nuestra fórmula entonces estamos dejando fuera a todos los modelos en donde haya elementos del dominio que se relacionen con 11 o más elementos.

Esta primera aproximación nos debería dar la intuición de que quizás no es posible escribir una fórmula en primer orden que pueda describir esta propiedad que sí pudimos describir en *lenguaje natural*. Sin embargo, simplemente nos debe dar esa intuición. De ninguna manera lo anterior es una prueba formal acerca de la imposibilidad de escritura de dicha fórmula ya que sólo vimos que tratar de escribir la fórmula como una unión de muchas disyunciones no funcionaba pero podría ser que con otra estrategia sí se pudiera.

Una segunda intuición que debería estarnos abordando en este mismo instante es que la demostración tampoco podría encararse por el camino de "te muestro que probé con un montón

** Este apunte fue hecho con mucho amor. Si encuentras algún error repórtalo a hschinca@dc.uba.ar* de potenciales fórmulas y ninguna da. Luego, por inducción en la cantidad de esfuerzo, no es expresable".

La demostración, en cambio, la encararemos por el absurdo, es decir, supondremos que sí la podemos escribir en primer orden y luego de varias implicaciones lógicas llegaremos a una contradicción, la cual sólo pudo haber ocurrido por esta suposición inicial.

Esta clase de demostraciones de la *no expresabilidad* de una propiedad en primer orden se caracteriza por una estructura muy bien definida que consta de 5 pasos:

**a)** **Suponemos que sí es expresable**. Sea $\varphi_\alpha$ la fórmula de primer orden que describe la propiedad del enunciado.

**b)** El segundo paso es clave. Aquí es donde tenemos que apelar a nuestra creatividad y al entendimiento preciso de lo que está enunciando la propiedad. El objetivo es crear un conjunto de fórmulas tales que para poder satisfacer a todas a la vez, $\varphi_\alpha$ debe ser falsa. Resulta trivial ver que si $\varphi_\alpha$ no es expresable entonces tampoco podrá serlo su negación. Por este motivo **debemos definir infinitas fórmulas con las cuales vayamos negando incrementalmente a $\varphi_\alpha$**. En nuestro caso podríamos definir:

$\varphi_1$ : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 1 elemento".
$\varphi_2$ : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 2 elementos".
$\varphi_3$ : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 3 elementos".
...

De este modo, y uniendo todas las fórmulas, no podemos dar un $k$ fijo tal que satisfaga a todas las $\varphi_i$ puesto que, en particular, no sería verdad para $\varphi_{k+1}$.

En primer orden, la definición de estas fórmulas quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\varphi_1 : (\exists x)(\exists y)R(x, y)$$

$$\varphi_2 : (\exists x)(\exists y, z)y \neq z \wedge R(x, y) \wedge R(x, z)$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned}\varphi_i : &(\exists x)(\exists y_1, y_2, \ldots, y_i)todosDistintos(y_1, \ldots, y_i)\wedge \\ &R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \ldots \wedge R(x, y_i)\end{aligned}$$

donde $todosDistintos(y_1, \ldots, y_n) \equiv y_1 \neq y_2 \wedge \ldots \wedge y_1 \neq y_n \wedge y_2 \neq y_3 \wedge \ldots \wedge y_{n-1} \neq y_n$.

Es importante notar el paralelismo existente entre las $\psi_i$ del comienzo y estas $\varphi_i$ que acabamos de definir puesto que unas son exactamente la negación de las otras.

**c)** Definimos el siguiente conjunto $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\varphi_\alpha\}$.

**d)** Vamos a mostrar que el conjunto $\Gamma$ es tanto satisfacible como insatisfacible para llegar al absurdo prometido.

**d.1)** Queremos ver que $\Gamma$ es insatisfacible.

Suponemos que es satisfacible, entonces $\exists\ \mathcal{M}, v\ /\ \mathcal{M} \models \Gamma[v]$. Luego, $\varphi_\alpha$ es vedadera en el modelo $\mathcal{M}$ y la valuación $v$ pues $\varphi_\alpha \in \Gamma$. De aquí se desprende que existe $k \in \mathbb{N}$ fijo tal que todo elemento de $\mathcal{M}$ se relaciona a lo sumo con $k$ elementos distintos de $\mathcal{M}$.

Por otro lado, como $\mathcal{M} \models \Gamma[v]$, entonces $\varphi_{k+1}$ es verdadera en $\mathcal{M}, v$. Por definición de $\varphi_{k+1}$, existe un elemento en $\mathcal{M}$ tal que se relaciona con al menos $k+1$ elementos distintos, lo que representa un **absurdo** puesto que habíamos dicho que todos los elementos de $\mathcal{M}$ se relacionaban con a lo sumo $k$ elementos. Por ende, $\Gamma$ **es insatisfacible**.

**d.2)** Queremos ver que $\Gamma$ es satisfacible.

Por compacidad vale que si todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito es satisfacible entonces $\Gamma$ también lo es.

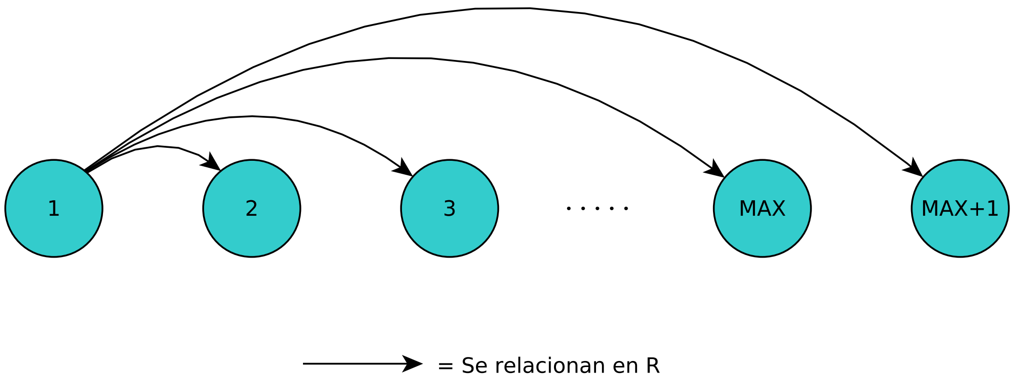
Tomemos $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finito y mostremos que dicho conjunto es satisfacible.

Como $\Gamma_1$ es finito contiene una cantidad finita de $\varphi_i$ (en particular, puede que no contenga ninguna $\varphi_i$). Lo que tenemos que ver es que existe un modelo $\mathcal{M}$ y una valuación $v$ que hacen verdaderas a todas las fórmulas de $\Gamma_1$.

Tomemos $MAX = max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_1\} \bigcup \{1\})$. La unión con el conjunto que sólo tiene al 1 se debe a que el primer conjunto podría ser vacío y queremos darle un valor a $MAX$.

Sólo resta construir el modelo $\mathcal{M}$ y ver que se satisfacen todas las fórmulas de $\Gamma_1$.

Sea $\mathcal{M}$:




En primer lugar, notar que el valor de verdad de ninguna de nuestras $\varphi_i$ depende de la valuación $v$ puesto que se tratan de sentencias, es decir, fórmulas con todas sus variables ligadas. Instanciando $x$ en el elemento 1 se satisfacen todas las $\varphi_i$ en $\Gamma_1$ pues se relaciona con, al menos, $MAX$ elementos. También se satisface $\varphi_\alpha$, en caso de que estuviera en $\Gamma_1$, pues todo elemento de $\mathcal{M}$ se relaciona con a lo sumo $MAX$ elementos. Por ende, $\Gamma_1$ es satisfacible.

Como no dimos ninguna condición acerca de $\Gamma_1$ entonces se concluye que, por compacidad, $\Gamma$ **es satisfacible**.

**e)** Como probamos que $\Gamma$ es insatisfacible por (d.1) y, a la vez, satisfacible por (d.2) entonces llegamos a un absurdo, que provino de suponer que $\varphi_\alpha$ era expresable en primer orden.

$\square$

**Ejercicio 2.** Considerar un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con igualdad y un símbolo de predicado binario $\lhd$. Demostrar que no es posible expresar en primer orden la proposición que afirma: "para todo par de elementos $x$ e $y$, si $x \lhd y$, entonces hay una cantidad finita de elementos $x_i$ que cumplen que $x_i \lhd y$ y $x \lhd x_i$".

*Resolución.* Utilizaremos el mismo esquema de demostración que en el ejercicio anterior.

**a)** **Suponemos que la propiedad es expresable por una fórmula** en primer orden. Sea $\varphi_\beta$ dicha fórmula.

**b)** Definimos una serie de fórmulas que intenten contradecir incrementalmente a $\varphi_\beta$:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0 : (\exists x, y) x \lhd y \\
&\varphi_1 : (\exists x, y)(\exists z) x \lhd y \wedge x \lhd z \wedge z \lhd y \\
&\ldots \\
&\varphi_i : (\exists x, y)(\exists z_1, z_2, \ldots, z_i) todosDistintos(z_1, \ldots, z_i) \wedge \\
&\qquad x \lhd y \wedge x \lhd z_1 \wedge \ldots \wedge x \lhd z_i \wedge z_1 \lhd y \wedge \ldots \wedge z_i \lhd y
\end{aligned}
$$

**c)** Sea $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}_0\} \bigcup \{\varphi_\beta\}$.

**d)** Ahora debemos mostrar que $\Gamma$ es tanto satisfacible como insatisfacible.

**d.1)** Veamos que $\Gamma$ es insatisfacible. Pero... ¿Lo es? Si tomamos $\mathcal{M}$ la interpretación usual de los enteros interpretando a $\lhd$ como $<_{\mathbb{Z}}$ entonces $\mathcal{M}$ satisface a $\varphi_\beta$ pues es cierto que entre todo par de enteros $x, y$ hay una cantidad finita de elementos menores que $y$ y no menores que $x$. También satisface a todas las $\varphi_i$ ya que para cualquier $i$ podemos encontrar un par de enteros $x, y$ entre los cuales haya $i$ elementos menores que $y$ y no menores que $x$. El problema estuvo en que no definimos de manera adecuada las fórmulas $\varphi_i$. La estrategia debería haber sido utilizar 2 variables libres $x, y$ para de este modo predicar siempre sobre el mismo par y que, incrementalmente, existan cada vez más elementos entre ese par fijo de elementos $x$ e $y$.

Por lo tanto, acabamos de comprobar que la parte crítica de la demostración reside en definir correctamente las infinitas fórmulas en el segundo punto del esquema.

Retomemos entonces desde allí:

**b)**

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(x, y) : x \lhd y \\
&\varphi_1(x, y) : (\exists z) x \lhd y \wedge x \lhd z \wedge z \lhd y \\
&\qquad \ldots \\
&\varphi_i(x, y) : (\exists z_1, z_2, \ldots, z_i) todosDistintos(z_1, \ldots, z_i) \wedge \\
&\qquad\qquad x \lhd y \wedge x \lhd z_1 \wedge \ldots \wedge x \lhd z_i \wedge z_1 \lhd y \wedge \ldots \wedge z_i \lhd y
\end{aligned}
$$

**c)** Sea $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}_0\} \bigcup \{\varphi_\beta\}$.

**d)** Ahora debemos mostrar que $\Gamma$ es tanto satisfacible como insatisfacible.

**d.1)** Probaremos que $\Gamma$ es insatisfacible.

Suponemos que es satisfacible. Luego, hay un modelo y una valuación que hacen verdaderas a todas las fórmulas de $\Gamma$, es decir:

$$\exists\ \mathcal{M}, v\ /\ \mathcal{M} \models \Gamma[v]$$

En particular, $\varphi_\beta$ es verdadera en dicho modelo y dicha valuación por lo que para todo par de elementos existe una cantidad finita de elementos entre ambos (según la relación $\lhd$). Por otro lado, las $\varphi_i$ nos dicen que hay un par de elementos del dominio para los cuales no existe una cantidad acotada de elementos entre ellos. Este razonamiento se desprende por cómo construimos las fórmulas en (b). Utilizamos dos variables libres para poder luego instanciarlas en un valor particular del dominio. Sin pérdida de generalidad digamos que instanciamos $x$ en 1 e $y$ en 2. Luego, las $\varphi_i$ nos dicen que:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(1,2) &: \text{“entre 1 y 2 hay al menos 0 elementos que se relacionan según } \lhd\text{”.}\\
\varphi_1(1,2) &: \text{“entre 1 y 2 hay al menos 1 elemento que se relacionan según } \lhd\text{”.}\\
&\ldots\\
\varphi_i(1,2) &: \text{“entre 1 y 2 hay al menos } i \text{ elementos que se relacionan según } \lhd\text{”.}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

De esta manera, para el par $(1,2)$ llegamos a una contradicción: existen a la vez una cantidad finita e infinita de elementos entre ellos. Por lo tanto, $\Gamma$ **es insatisfacible**.

**d.2)** Queremos ver que $\Gamma$ es satisfacible.

Apelando a compacidad, basta con ver que todo subconjunto finito incluido en $\Gamma$ lo es. Sea $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finito y veamos que existe un modelo y una valuación que hacen verdaderas a todas las fórmulas en $\Gamma_1$, es decir:

$$\exists\ \mathcal{M}, v\ /\ \mathcal{M} \models \Gamma_1[v]$$

Tomamos $MAX = max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_1\} \bigcup \{1\})$, al igual que en el ejercicio anterior.

En este caso, nos basta con tomar el modelo usual de los enteros interpretando a $\lhd$ como $<_{\mathbb{Z}}$. En él vale que para todo par de elementos hay una cantidad finita de elementos entre ellos por lo que satisfaceríamos $\varphi_\beta$. Si la valuación $v$ instancia a $x$ e $y$ en 1 y $MAX+1$ respectivamente, entonces es cierto que entre esos dos números hay al menos $MAX$ elementos, por lo que satisfaceríamos a cada una de las $\varphi_i$. Notar que aquí sí fue importante la valuación que utilizamos ya que necesitamos que entre $x$ e $y$ hubiera al menos $MAX$ elementos. Luego, satisfacimos a todas las fórmulas en $\Gamma_1$ sin dar ninguna condición sobre este conjunto. Luego, por compacidad, $\Gamma$ **es satisfacible**.

**e)** Como probamos que $\Gamma$ es insatisfacible por (d.1) y, a la vez, satisfacible por (d.2) entonces llegamos a un absurdo, que provino de suponer que $\varphi_\beta$ era expresable en primer orden.

$\square$