

PRÁCTICA 2 - FUNCIONES \mathcal{S} -COMPUTABLES -**Ejercicio 1.**

- a. Definir *macros* para las siguientes pseudo-instrucciones (con su interpretación natural) e indicar en cada caso qué variables y qué etiquetas se asumen “frescas”:
- $V_i \leftarrow k$
 - $V_i \leftarrow V_j + k$
 - IF $V_i = 0$ GOTO L
 - GOTO L
- b. Definir dos pseudo-programas distintos en el lenguaje \mathcal{S} (usando las macros convenientes del punto anterior) que computen la función de dos variables $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Para alguno de los dos, expandir las macros utilizadas prestando atención a la instanciación de variables y etiquetas frescas.
- c. Sea P el programa en \mathcal{S} que resulta de expandir todas las macros en alguno de los códigos del punto anterior. Determinar cuál es la función computada en cada caso:
- $\Psi_P^{(1)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 - $\Psi_P^{(2)} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$
 - $\Psi_P^{(3)} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$

Ejercicio 2.

- a. Sea $\mathcal{C}_{\mathcal{S}} = \{\Psi_P^{(n)} \mid P \text{ es un programa en } \mathcal{S}, n \geq 1\}$ la clase de funciones \mathcal{S} -parciales computables. Mostrar que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ es una clase *PRC*.
- b. Demostrar (sin definir un programa en \mathcal{S}) que la función $*$: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $*(x, y) = x \cdot y$ es \mathcal{S} -computable.
- c. Si $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ es una función primitiva recursiva. ¿Qué podemos decir acerca de la existencia de un programa en el lenguaje \mathcal{S} que la compute?

Ejercicio 3. Decimos que un programa P es *autocontenido* si en cada instrucción *IF* $V \neq 0$ *GOTO* L que ocurre en P , L es una etiqueta definida en P .

- a. Demostrar que todo programa P tiene un programa autocontenido P' equivalente (P y P' son programas equivalentes si $\Psi_P^{(n)} = \Psi_{P'}^{(n)} \forall n \geq 1$).
- b. Sean P y Q dos programas autocontenidos con etiquetas disjuntas y sea $r : \mathbb{N}^n \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado primitivo recursivo. Definir macros para las siguientes pseudo-instrucciones (con su interpretación natural):
- IF $r(V_1, \dots, V_n)$ GOTO L
 - IF $r(V_1, \dots, V_n)$ THEN P ELSE Q
 - WHILE $r(V_1, \dots, V_n)$ P

c. Dadas las funciones $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 3 \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x$$

Demostrar que es \mathcal{S} -parcial computable la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 5 \vee x = 3 \\ g(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 4.

a. Se definen las siguientes variantes del lenguaje \mathcal{S} :

- \mathcal{S}_1 : Igual que \mathcal{S} pero sin la instrucción $V \leftarrow V + 1$
- \mathcal{S}_2 : Igual que \mathcal{S} pero sin la instrucción IF $V \neq 0$ GOTO L
- \mathcal{S}_3 : Igual que \mathcal{S} pero sin la instrucción $V \leftarrow V \div 1$

Demostrar que para cada uno de estos lenguajes existe al menos una función \mathcal{S} -parcial computable que no es computable en este nuevo lenguaje.

b. Sea \mathcal{S}' el lenguaje de programación definido como \mathcal{S} salvo que sus instrucciones (etiquetadas o no) son de los siguientes tres tipos (con su interpretación natural):

$$\begin{aligned} V &\leftarrow V' \\ V &\leftarrow V + 1 \\ \text{IF } V \neq V' &\text{ GOTO } L \end{aligned}$$

Demostrar que una función es parcial computable en \mathcal{S}' si solamente si lo es en \mathcal{S} .

Ejercicio 5.

a. Demostrar que si $p : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ es un predicado \mathcal{S} -computable (total), entonces es \mathcal{S} -parcial computable:

$$\text{minimoNA}_p(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \min\{t \mid y \leq t \wedge p(x_1, \dots, x_n, t)\} & \text{si existe algún tal } t \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b. Mostrar, usando el resultado anterior, que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es biyectiva y \mathcal{S} -computable (total), entonces también lo es su inversa, f^{-1} .

Ejercicio 6. Un programa P en el lenguaje \mathcal{S} con instrucciones I_1, I_2, \dots, I_n se dice *optimista* si $\forall i = 1, \dots, n$, si I_i es la instrucción IF $V \neq 0$ GOTO L entonces L no aparece como etiqueta de ninguna instrucción I_j con $j \leq i$.

Demostrar que el siguiente predicado es primitivo recursivo:

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si el programa cuyo número es } x \text{ es optimista} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 7. Utilizando las funciones primitivas-recursivas $\text{STP}^{(n)}$ y $\text{SNAP}^{(n)} : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ vistas en clase, mostrar que las siguientes son funciones \mathcal{S} -parciales computables:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} & f_2(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} \\ f_3(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Im } \Phi_x^{(1)} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} & f_4(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \cap \text{Im } \Phi_y^{(1)} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función \mathcal{S} -parcial computable en tiempo polinomial (i.e., existe un programa P tal que $\Psi_P^{(1)}(x) = f(x)$ y tal que, para algún polinomio $Q(x)$, P no requiere más que $Q(\lceil \log_2 x \rceil)$ pasos para terminar).

- Mostrar que f es primitiva recursiva.
- ¿Sucedre lo mismo si la cota es exponencial, doblemente exponencial, etc.?
- ¿Qué podemos decir, en general, sobre la complejidad temporal de una función computable que no sea primitiva recursiva?

Ejercicio 9. * Se dice que un programa P en el lenguaje \mathcal{S} *se pisa con n entradas* si para alguna entrada x_1, x_2, \dots, x_n y algún tiempo t , la variable de salida Y luego de t pasos de la ejecución de P con entradas x_1, x_2, \dots, x_n vale $\#P$.

Demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ es \mathcal{S} -parcial computable la función:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si el programa cuyo número es } x \text{ se pisa con } n \text{ entradas} \\ \uparrow & \text{caso contrario} \end{cases}$$

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.