

Sintaxis para cálculo λ con pares

¿Qué hay que agregar?

- ...términos para representar el constructor y los observadores

$$M ::= \dots \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$$

- ...y un tipo para estas nuevas expresiones

$$\sigma ::= \dots \mid \sigma \times \tau$$

Reglas de tipado para pares

¿Qué hay que agregar?

- Al menos una regla por cada forma nueva de sintaxis, porque cada una de ellas precisa poder ser tipada.
- Notar que, de no hacerlo, sería imposible construir términos tipables (útiles) con dicha forma.

Regla de tipado para el constructor

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : \tau}{\Gamma \triangleright \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}$$

Reglas de tipado para las proyecciones

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \times \tau}{\Gamma \triangleright \pi_1(M) : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright N : \sigma \times \tau}{\Gamma \triangleright \pi_2(N) : \tau}$$

Semántica para pares

¿Qué reglas hay que agregar?

- Necesitamos reducir todos los pares *con sentido* que no sean valores.

¿Cuáles son los valores?

- Empecemos por ahí entonces...

Extensión de los valores

$$V ::= \dots \mid \langle V, W \rangle$$

Reglas de semántica para pares

Ahora sí, las reglas

$$\frac{M \rightarrow M'}{\langle M, N \rangle \rightarrow \langle M', N \rangle}$$

$$\frac{N \rightarrow N'}{\langle V, N \rangle \rightarrow \langle V, N' \rangle}$$

Reglas de semántica para las proyecciones

$$\frac{M \rightarrow M'}{\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M')}$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\pi_2(M) \rightarrow \pi_2(M')}$$

$$\frac{}{\pi_1(< V, W >) \rightarrow V}$$

$$\frac{}{\pi_2(< V, W >) \rightarrow W}$$

Sintaxis para cálculo λ con árboles binarios

¿Qué hay que agregar?

- ...términos para representar los constructores y observadores

$$M ::= \dots \mid Nil_\sigma \mid Bin(M, N, O) \mid root(M) \mid right(M) \mid left(M) \mid isNil(M)$$

- ...y un tipo para estas nuevas expresiones

$$\sigma ::= \dots \mid AB_\sigma$$

Reglas de tipado para los constructores

$$\frac{}{\Gamma \triangleright Nil_{\sigma} : AB_{\sigma}}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_{\sigma} \quad \Gamma \triangleright O : AB_{\sigma} \quad \Gamma \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright Bin(M, N, O) : AB_{\sigma}}$$

- Nil_{σ} es una constante diferente según el tipo σ .
 - ¡No tenemos polimorfismo!
- Para Bin , en cambio, el tipo queda determinado por el tipo de los subtérminos.

Reglas de tipado para los observadores

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_{\sigma}}{\Gamma \triangleright \text{root}(M) : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_{\sigma}}{\Gamma \triangleright \text{isNil}(M) : \text{Bool}}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_{\sigma}}{\Gamma \triangleright \text{left}(M) : AB_{\sigma}}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_{\sigma}}{\Gamma \triangleright \text{right}(M) : AB_{\sigma}}$$

Semántica para árboles binarios

- Primero, empecemos por los valores:

$$V ::= \dots \mid Nil_{\sigma} \mid Bin(V, W, Y)$$

Reglas de semántica para los constructores

$$\frac{M \rightarrow M'}{Bin(M, N, O) \rightarrow Bin(M', N, O)}$$

$$\frac{N \rightarrow N'}{Bin(\textcolor{red}{V}, N, O) \rightarrow Bin(\textcolor{red}{V}, N', O)}$$

$$\frac{O \rightarrow O'}{Bin(\textcolor{red}{V}, \textcolor{red}{W}, O) \rightarrow Bin(\textcolor{red}{V}, \textcolor{red}{W}, O')}$$

Reglas de semántica para los observadores (1/2)

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{left}(M) \rightarrow \text{left}(M')}$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{right}(M) \rightarrow \text{right}(M')}$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{root}(M) \rightarrow \text{root}(M')}$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{isNil}(M) \rightarrow \text{isNil}(M')}$$

Reglas de semántica para los observadores (2/2)

$$\frac{}{isNil(Nil_{\sigma}) \rightarrow true}$$

$$\frac{}{isNil(Bin(V, W, Y)) \rightarrow false}$$

$$\frac{}{left(Bin(V, W, Y)) \rightarrow V}$$

$$\frac{}{right(Bin(V, W, Y)) \rightarrow Y}$$

$$\frac{}{root(Bin(V, W, Y)) \rightarrow W}$$

Sintaxis para cálculo λ con árboles binarios bis

- Los tipos quedan igual que en el caso anterior:

$$\sigma ::= \dots \mid AB_\sigma$$

- Y los términos,

$$M ::= \dots \mid Nil_\sigma \mid Bin(M, N, O) \mid$$

$$Case_{AB_\sigma} M \text{ of } Nil \rightsquigarrow N ; Bin(m, n, o) \rightsquigarrow O$$

Aquí las minúsculas (m, n, o) representan **variables**.

Reglas de tipado para árboles binarios bis

- Para los constructores son las que ya teníamos.

$$\frac{}{\Gamma \triangleright Nil_{\sigma} : AB_{\sigma}}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_{\sigma} \quad \Gamma \triangleright O : AB_{\sigma} \quad \Gamma \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright Bin(M, N, O) : AB_{\sigma}}$$

Regla de tipado para el *Case*

$$\frac{\Gamma \triangleright M : AB_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \tau \quad \Gamma \cup \{m : AB_\sigma, n : \sigma, o : AB_\sigma\} \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright \text{Case}_{AB_\sigma} M \text{ of } Nil \rightsquigarrow N ; Bin(m, n, o) \rightsquigarrow O : \tau}$$

Semántica para los árboles binarios bis

- Tenemos los mismos valores que antes:

$$V ::= \dots \mid Nil_\sigma \mid Bin(V, W, Y)$$

Reglas de semántica para los constructores

- Análogas a las que ya teníamos.

$$\frac{M \rightarrow M'}{Bin(M, N, O) \rightarrow Bin(M', N, O)}$$

$$\frac{N \rightarrow N'}{Bin(\textcolor{red}{V}, N, O) \rightarrow Bin(\textcolor{red}{V}, N', O)}$$

$$\frac{O \rightarrow O'}{Bin(\textcolor{red}{V}, \textcolor{red}{W}, O) \rightarrow Bin(\textcolor{red}{V}, \textcolor{red}{W}, O')}$$

Reglas de semántica para el Case

$$\frac{M \rightarrow M'}{\text{Case}_{AB_\sigma} M \text{ of } Nil \rightsquigarrow N ; Bin(m, n, o) \rightsquigarrow O} \rightarrow \text{Case}_{AB_\sigma} M' \text{ of } Nil \rightsquigarrow N ; Bin(m, n, o) \rightsquigarrow O$$

$$\frac{}{\text{Case}_{AB_\sigma} Nil_\sigma \text{ of } Nil \rightsquigarrow N ; Bin(m, n, o) \rightsquigarrow O \rightarrow N}$$

$$\frac{}{\text{Case}_{AB_\sigma} Bin(V, W, Y) \text{ of } Nil \rightsquigarrow N ; Bin(m, n, o) \rightsquigarrow O \rightarrow O\{m \leftarrow V, n \leftarrow W, o \leftarrow Y\}}$$