Práctica 4 - Lógica Proposicional -

Ejercicio 1. Sea $v : \mathbf{Prop} \to \{0,1\}$ una valuación, donde **Prop** denota el conjunto de símbolos proposiciones del cálculo proposicional. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, argumentar si es posible decidir $v \models \alpha$ o $v \not\models \alpha$ en los siguientes casos:

a. $\alpha = \neg p_1$.

b. $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.

c. $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

d. $\alpha = \neg p_4$.

e. $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.

Ejercicio 2. Dadas las siguientes fórmulas del cálculo proposicional:

- $\alpha_1 = (\neg p_1 \to (p_3 \vee p_4))$.
- $\alpha_2 = \neg(p_2 \to (p_3 \wedge p_1))$.
- $\alpha_3 = ((\neg p_2 \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

Hallar todas las valuaciones v tales que:

a. $v \models \alpha_i$.

b. $v \models \alpha_i$ y $v(p_j) = 0$ si $p_j \notin \mathbf{Var}(\alpha)$.

donde **Var** denota al conjunto de variables proposicionales y $\mathbf{Var}(\alpha)$ al subconjunto de **Var** cuyos elementos son las variables proposicionales que aparecen en α.

Ejercicio 3. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$. Decimos que α es satisfacible cuando existe una valuación v tal que $v \models \alpha$. Demostrar que:

a. α es tautología si y solo si $\neg\alpha$ no es satisfacible.

b. $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

c. $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

d. $(\alpha \to \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

Ejercicio 4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que si $\alpha \wedge \beta$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

b. Dadas dos valuaciones v, v', probar que si $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in \mathbf{Var}(\alpha)$ entonces $v \models \alpha$ si y sólo si $v' \models \alpha$.

c. Usando el resultado anterior, mostrar que si $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \to \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción ó β es tautología.

d. Análogamente, probar que si α y β son contingencias y no tienen variables proposicionales en común, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingencia.

Ejercicio 5. Se dice que un conjunto de conectivos es *adecuado* si con ellos se puede representar cualquier función booleana.

a. Demostrar que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es un conjunto adecuado de operadores (sin suponer que otro conjunto es adecuado).

b. Probar, usando el resultado anterior, que también son adecuados $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$.

c. Demostrar que $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$ y $\{\vee, \rightarrow\}$ no son adecuados.

Ejercicio 6. Dadas $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$ puede escribirse $(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ como $\alpha|\beta$ (llamada barra de *Sheffer*), y $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ como $\alpha{\downarrow}\beta$ (barra de *Nicod*).

a. Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha{\downarrow}\beta$.

b. Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

c. Probar que si $*$ es un conectivo binario adecuado, entonces $*$ es $|$ ó $\downarrow$.

Ejercicio 7. Sean $\top$ y $\bot$ dos conectivos de aridad cero (i.e., constantes booleanas), que cumplen $v \models \top$ y $v \not\models \bot$ para toda valuación v.

a. Probar que $\{\rightarrow, \bot\}$ es un conjunto adecuado de conectivos.

b. Probar que $\{\rightarrow, \top\}$ *no* es un conjunto adecuado de conectivos.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{L} = \{|\}$. Podemos dar una codificación biyectiva $\# : \mathbf{Form}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$\#\varphi = \begin{cases} 2 * (i-1) & \text{si } \varphi = p_i \text{ (con } i \geq 1) \\ 2 * \langle \#\alpha, \#\beta \rangle + 1 & \text{si } \varphi = \alpha|\beta \end{cases}$$

a. Probar que existe un algoritmo primitivo recursivo que resuelve el problema de *model checking proposicional*. Es decir, dada una fórmula α y una valuación *finita* v tal que $\mathbf{Var}(\alpha) \subseteq \operatorname{Dom} v$ decide si $v \models \alpha$.
Sugerencia: Dar una codificación biyectiva para las valuaciones y justificar la elección. Recordar que existen varios esquemas de recursión que resultan ser primitivos recursivos.

b. Probar que existe un algoritmo primitivo recursivo que resuelve el problema de *satisfacción proposicional*. Es decir, dada una fórmula α decide si existe una valuación v tal que $v \models \alpha$.

c. Probar que existe un algoritmo primitivo recursivo que, dada una fórmula α, decide si α es una tautología.

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \neg\}$ y α una fórmula proposicional del lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $\alpha^\star$ la fórmula que resulta de reemplazar en α: $\wedge \mapsto \vee$, $\vee \mapsto \wedge$ y para todo i, $p_i \mapsto \neg p_i$. Probar que para toda valuación v, $v \models \alpha^\star$ si y sólo si $v \not\models \alpha$.

Ejercicio 10. Dada una valuación v, sean p y q dos proposiciones tales que $v(p) = v(q)$. Demostrar que $v \models \varphi$ sii $v \models \varphi[p \mapsto q]$ para toda fórmula φ, donde $\varphi[p \mapsto q]$ denota la fórmula que resulta de reemplazar uniformemente la proposición p por q en φ.

Ejercicio 11. Dado un conjunto de fórmulas Γ, llamamos $\mathbf{Con}(\Gamma)$ al conjunto de consecuencias semánticas de Γ definido como $\mathbf{Con}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas. Probar que:

a. $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

b. si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

c. si $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$ entonces $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$.

d. $\mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma)) = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 12. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que $\mathbf{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es tautología.

b. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   1) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   2) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   3) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

Ejercicio 13. * Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$.

a. Probar que si Γ es satisfacible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfacible. Mostrar que la recíproca no es cierta.

b. Probar que Γ es satisfacible si y sólo si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es satisfacible.

c. ¿Es cierto que para toda fórmula α sucede $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$?

Ejercicio 14. Demostrar que son equivalentes:

a. $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.

b. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c. Existe una fórmula β tal que $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d. $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.