

Teoría de Lenguajes

Clase Teórica 2

Autómatas Finitos

Primer cuatrimestre 2016

Material compilado por Julio Jacobo a lo largo de distintas ediciones de la materia Teoría de Lenguajes en el Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, revisado recientemente por Verónica Becher.

Bibliografía: Capítulo 2, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Definición 1 (Autómata Finito Determinístico (AFD)). *Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde*

- Q es un conjunto finito de estados
- Σ es un conjunto finito de símbolos que constituye el alfabeto de entrada
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es la función de transición
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ , o sea $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición 2 (Función de transición generalizada $\hat{\delta}$). ■ $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$

- $\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$, con $x \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$.

Notar que $\hat{\delta}(q, a) = \delta(\hat{\delta}(q, \lambda), a) = \delta(q, a)$. Por esto puede utilizarse el símbolo δ para ambos tipos de transición.

Definición 3 (Cadena aceptada por un AFD). *Una cadena x es aceptada por un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$.*

Definición 4 (Lenguaje aceptado por un AFD). *Dado un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, el lenguaje aceptado por M , $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M y se define como*

$$\mathcal{L}(M) = \{x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x) \in F\}.$$

Definición 5 (Autómata Finito No Determinístico (AFND)). *Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde Q , Σ , q_0 y F tienen el mismo significado que para el AFD, pero $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$.*

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas de Σ , o sea $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$, definiéndola de la siguiente manera:

Definición 6 (Función de transición generalizada $\hat{\delta}$). ■ $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$

- $\hat{\delta}(q, xa) = \{p \in Q : \exists r \in \hat{\delta}(q, x) \text{ tal que } p \in \delta(r, a)\},$
con $x \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$.

Notar que

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(q, \lambda a) &= \left\{ p \in Q : \exists r \in \widehat{\delta}(q, \lambda) \text{ tal que } p \in \delta(r, a) \right\} \\ &= \left\{ p \in Q : \exists r \in \{q\} \text{ tal que } p \in \delta(r, a) \right\} \\ &= \left\{ p \in Q : p \in \delta(q, a) \right\} \\ &= \delta(q, a).\end{aligned}$$

Por esto puede utilizarse el símbolo δ para ambos tipos de transición.

Definición 7 (Cadena aceptada por un AFND). *Una cadena x es aceptada por un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$.*

Definición 8 (Lenguaje aceptado por un AFND). *Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, el lenguaje aceptado por M , $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M y se define como*

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ x \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset \right\}.$$

Podemos extender la función de transición aún más, haciendo que mapee conjuntos de estados y cadenas en conjuntos de estados.

Definición 9. *Función de transición $\delta : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ dada por*

$$\delta(P, x) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x).$$

Es trivial ver que, para todo AFD existe un AFND equivalente. Lo que no es tan obvio es que lo inverso también es cierto:

Para cada AFND existe un AFD equivalente.

Teorema 1 (Equivalencia entre AFND y AFD (Rabin & Scott, 1959)). *Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, existe un AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.*

Demostración. Construimos un $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$.

Q' es el conjunto de elementos $[q_1, \dots, q_i]$, con $q_1, \dots, q_i \in Q$ (corresponden a los elementos de $\mathcal{P}(Q)$).

$$F' = \{[q_1, \dots, q_i] \in Q' : \{q_1, \dots, q_i\} \cap F \neq \emptyset\}$$

$$q'_0 = [q_0]$$

$$\delta'([q_1, \dots, q_j], a) = [p_1, \dots, p_i] \iff \delta(\{q_1, \dots, q_j\}, a) = \{p_1, \dots, p_i\}.$$

Demostremos que para toda cadena x , $\delta'(q'_0, x) = [q_1, \dots, q_i] \iff \delta(q_0, x) = \{q_1, \dots, q_i\}$.

Demostración por inducción en la longitud de la cadena.

Caso Base: $|x| = 0$, o sea $x = \lambda$. Por definición de $\widehat{\delta}$,

$$\delta'(q'_0, \lambda) = [q_0] \text{ y } \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\},$$

por lo que $\delta'(q'_0, \lambda) = [q_0] \iff \delta(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$: $\delta'(q'_0, x) = [p_1, \dots, p_k] \iff \delta(q_0, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Veamos que vale para xa , para $a \in \Sigma$,

$$\begin{aligned}\delta'(q'_0, xa) &= \delta'(\delta'(q'_0, x), a) = [r_1, \dots, r_i] \iff \\ &\text{por definición de } \delta' \text{ en AFD } M' \\ \exists [p_1, \dots, p_k], \delta'(q'_0, x) &= [p_1, \dots, p_k] \wedge \delta'([p_1, \dots, p_k], a) = [r_1, \dots, r_i] \iff \\ &\text{por HI y por definición de } \delta \text{ en AFND } M \\ \exists \{p_1, \dots, p_k\}, \delta(q_0, x) &= \{p_1, \dots, p_k\} \wedge \delta(\{p_1, \dots, p_k\}, a) = \{r_1, \dots, r_i\} \iff \\ &\text{por def } \delta \text{ en AFND } M, \\ \delta(q_0, xa) &= \delta(\delta(q_0, x), a) = \{r_1, \dots, r_i\}\end{aligned}$$

Concluimos, $\delta'(q'_0, xa) = [r_1, \dots, r_i] \iff \delta(q_0, xa) = \{r_1, \dots, r_i\}$.

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ construimos AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$. Ahora nos queda probar que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(M) & \\ \iff \delta(q_0, x) &= \{q_1, \dots, q_i\} \cap F \neq \emptyset \\ \iff \delta'(q'_0, x) &= [q_1, \dots, q_i] \cap F' \neq \emptyset \\ \iff x \in \mathcal{L}(M') &. \end{aligned}$$

Definición 10 (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ). *AFND- λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde Q , Σ , q_0 y F tienen el mismo significado que para el AFND, pero $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$.*

Definición 11 (Clausura λ de un estado). *La clausura λ de un estado q , $Cl_\lambda(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q , siguiendo sólo transiciones λ .*

Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_λ .

Sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $(q, p) \in R$ si y solo si $p \in \delta(q, \lambda)$. Luego,

$$Cl_\lambda(q) = \{p : (q, p) \in R^*\}$$

Notar que el estado q pertenece a su clausura λ .

Definición 12 (Clausura λ de un conjunto de estados P).

$$Cl_\lambda(P) = \bigcup_{q \in P} Cl_\lambda(q).$$

La función de transición puede extenderse para que acepte como segundo argumento cadenas en Σ , o sea $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$.

Definición 13 (Función de transición extendida $\hat{\delta}$). ■ $\hat{\delta}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$

■ $\hat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\left\{p : \exists r \in \hat{\delta}(q, x) \text{ tal que } p \in \delta(r, a)\right\}\right)$ con $x \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$, o sea,

$$\hat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\bigcup_{r \in \hat{\delta}(q, x)} \delta(r, a)\right)$$

Extendiendo la definición de δ y $\hat{\delta}$ a conjuntos de estados, tenemos que

■ $\delta(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$

■ $\hat{\delta}(P, x) = \bigcup_{q \in P} \hat{\delta}(q, x)$

Utilizando esto último, $\hat{\delta}(q, xa)$ puede escribirse como

$$\hat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\left(\delta\left(\hat{\delta}(q, x), a\right)\right).$$

Notar que $\hat{\delta}(q, a)$ puede ser distinto de $\delta(q, a)$:

$$\hat{\delta}(q, a) = Cl_\lambda\left(\delta\left(\hat{\delta}(q, \lambda), a\right)\right) = Cl_\lambda(\delta(Cl_\lambda(q), a)) \neq \delta(q, a),$$

Definición 14 (Cadena aceptada por un AFND- λ). *Se dice que una cadena x es aceptada por un AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$.*

Definición 15 (Lenguaje aceptado por un AFND- λ). *Dado un AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, el lenguaje aceptado por M , $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M y se define como*

$$\mathcal{L}(M) = \left\{x : \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\right\}.$$

Teorema 2 (Equivalencia entre AFND y AFND- λ). *Dado un AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ que reconoce el mismo lenguaje.*

Demostración. Definimos

$$\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a).$$

$$F' = \begin{cases} F & , \text{ si } Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset \\ F \cup \{q_0\} & , \text{ si no.} \end{cases}$$

Observar que $F' \supseteq F$.

Dado AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$. Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x)$ para $|x| \geq 1$, por inducción en la longitud de la cadena. Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de δ' , $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$,

Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w .

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\underbrace{\delta'(q_0, w)}_{\widehat{\delta}(q_0, w)}, a) = \delta'(\widehat{\delta}(q_0, w), a),$$

las expresiones tomadas por las llaves son iguales por h.i.

Por otro lado, si $P \subseteq Q$

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta'(q, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(q, a) = \widehat{\delta}(P, a)$$

Por lo tanto, haciendo $P = \widehat{\delta}(q_0, w)$, tenemos que

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(q_0, wa).$$

Dado AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.

Veamos que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.

Para $x = \lambda$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathcal{L}(M) &\iff Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \implies q_0 \in F' \iff \lambda \in \mathcal{L}(M') \\ \lambda \in \mathcal{L}(M') &\iff q_0 \in F' \implies (q_0 \in F \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset) \text{ Dado que} \\ &\quad \underbrace{q_0 \in F}_{\downarrow} \vee \underbrace{Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset}_{\downarrow} \\ &\quad Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \quad \lambda \in \mathcal{L}(M) \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \lambda \in \mathcal{L}(M) \end{aligned}$$

concluimos

$$\lambda \in \mathcal{L}(M') \iff \lambda \in \mathcal{L}(M).$$

Dado AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

construimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$.

Veamos ahora que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$, para $x \neq \lambda$.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(M) &\iff \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset, \text{ por aceptación en AFND-}\lambda \\ &\implies \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \emptyset, \text{ por el paso intermedio y porque } F \subseteq F' \\ &\implies x \in \mathcal{L}(M'). \end{aligned}$$

$x \in \mathcal{L}(M') \iff \delta'(q_0, x) \cap F' \neq \emptyset$, por aceptación en AFND

$$\begin{aligned} &\implies \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset \vee (\widehat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \emptyset \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset) \text{ por lema anterior y por def. de } F' \\ &\implies x \in \mathcal{L}(M) \vee x \in \mathcal{L}(M) \\ &\implies x \in \mathcal{L}(M). \end{aligned}$$