Autómatas de Pila

Teoría de Lenguajes

Segundo cuatrimestre de 2016

Autómatas de Pila

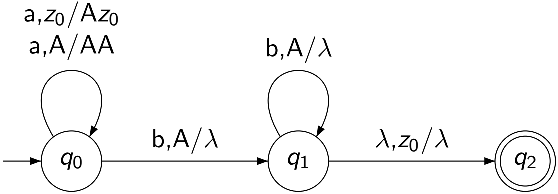
¿Podemos construir un autómata finito que reconozca este lenguaje?

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

No, en clases anteriores *demostramos* que no es regular.
Para poder reconocer lenguajes de este tipo necesitamos un formalismo con mayor poder expresivo: un *autómata de pila*.

- La pila es una cadena de símbolos.
- Las transiciones pueden depender del símbolo en el tope de la pila, además del primer símbolo de la cadena de entrada.
- En cada transición se desapila el símbolo del tope y se puede apilar una cadena.

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$



Definición

Recordemos que un autómata finito se definía de la siguiente manera:

$$A =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$$

Un autómata de pila M se define como:

$$M =< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F >$$

Donde:

1. Q es un conjunto finito de estados
2. Σ es el alfabeto de entrada
3. Γ es el alfabeto de la pila
4. $q_0 \in Q$ es el estado inicial
5. $z_0 \in \Gamma$ es el símbolo inicial de la pila
6. $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales
7. δ es la función de transición: $Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

Configuración instantánea

En un autómata finito, teníamos como configuración instantánea un elemento de:

$$Q \times \Sigma^*$$

¿Cómo será una configuración instantánea en un autómata de pila?

$$(q, \alpha, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

donde:

1. q es el estado actual
2. α es la cadena de entrada que resta consumir
3. γ es el contenido de la pila

Lenguaje aceptado

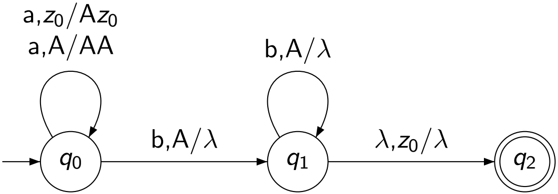
Relación de transición entre configuraciones:
$\forall q_1, q_2 \in Q$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in \Sigma^*$, $b \in \Gamma$, $\beta \in \Gamma^*$:

1. $(q_1, a\alpha, b\gamma) \vdash (q_2, \alpha, \beta\gamma) \Longleftrightarrow (q_2, \beta) \in \delta(q_1, a, b)$
2. $(q_1, \alpha, b\gamma) \vdash (q_2, \alpha, \beta\gamma) \Longleftrightarrow (q_2, \beta) \in \delta(q_1, \lambda, b)$

Notar que *siempre* se saca el tope de la pila. Si en una transición no se quiere modificar la pila hay que volver a apilar el mismo símbolo.

Lenguaje aceptado por estado final:

$$\alpha \in L(M) \Longleftrightarrow \exists q_f \in F, \gamma \in \Gamma^* \mid (q_0, \alpha, z_0) \vdash^* (q_f, \lambda, \gamma)$$



$$M_1 =< \{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{A, z_0\}, \delta, q_0, z_0, \{q_2\} >$$

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to P(Q \times \Gamma^*)$$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, z_0) = \{(q_0, Az_0)\} & \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \lambda)\} \\
\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} & \delta(q_1, \lambda, z_0) = \{(q_2, \lambda)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \lambda)\} & \delta(q_1, a, A) = \emptyset \\
\delta(q_0, b, z_0) = \emptyset & \ldots \\
\delta(q_0, \lambda, z_0) = \emptyset & \\
\ldots &
\end{array}$$

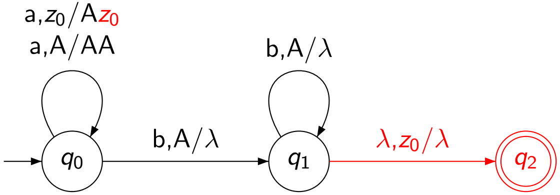
$$(q_0, ab, z_0) \vdash (q_0, b, Az_0) \vdash (q_1, \lambda, z_0) \vdash (q_2, \lambda, \lambda) \ \checkmark$$
$$(q_0, aab, z_0) \vdash (q_0, ab, Az_0) \vdash (q_0, b, AAz_0) \vdash (q_1, \lambda, Az_0) \ \times$$

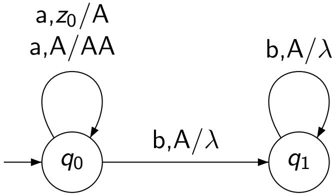
Lenguaje aceptado por estado final:

$$\alpha \in L(M) \iff \exists q_f \in F, \gamma \in \Gamma^* \mid (q_0, \alpha, z_0) \vdash^* (q_f, \lambda, \gamma)$$

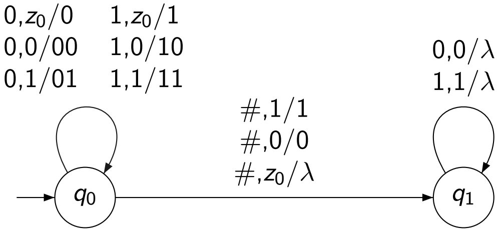
Lenguaje aceptado por pila vacía:

$$\alpha \in N(M) \iff \exists q_n \in Q \mid (q_0, \alpha, z_0) \vdash^* (q_n, \lambda, \lambda)$$

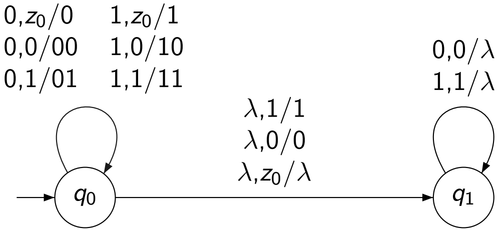




$$L_2 = \{\omega\#\omega^r \mid \omega \in (0|1)^*\}$$



$$L_3 = \{\omega\omega^r \mid \omega \in (0|1)^*\}$$

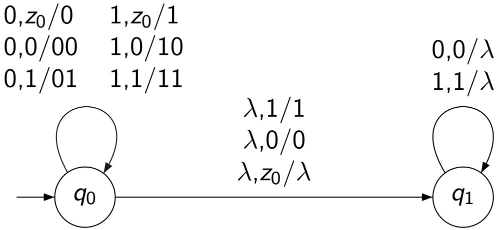


Un AP es *determinístico* si:

1. $\forall q \in Q, z \in \Gamma : \ \delta(q, \lambda, z) \neq \emptyset \Longrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(q, a, z) = \emptyset$
2. $\forall q \in Q, z \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\lambda\} : \ |\delta(q, a, z)| \leq 1$

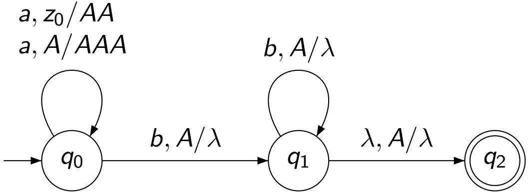
- **Lenguajes aceptados por APDs $\subsetneq$ Lenguajes aceptados por APNDs**
  Los AP determinísticos no son equivalentes a los no determinísticos: se pueden generar más lenguajes con los no determinísticos. Ejemplo: $\omega\omega^r$.
- **Lenguajes aceptados por APD por PV $\subsetneq$ Lenguajes aceptados por APD por EF**
  Los lenguajes aceptados por APD por PV son siempre libres de prefijos, los aceptados por APD por EF pueden no serlo.
- **Lenguajes aceptados por APND por PV $=$ Lenguajes aceptados por APND por EF $=$ Lenguajes libres de contexto**
  Los APNDs por PV y por EF ambos generan todos los lenguajes libres de contexto.

$$L_3 = \{\omega\omega^r | \omega \in (0|1)^*\}$$

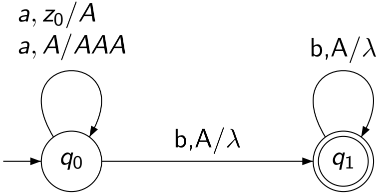


$$(q_0, 00, z_0) \vdash (q_0, 0, 0) \vdash (q_0, \lambda, 00) \vdash (q_1, \lambda, 00) \; \times$$
$$(q_0, 00, z_0) \vdash (q_0, 0, 0) \vdash (q_1, 0, 0) \vdash (q_1, \lambda, \lambda) \; \checkmark$$

$$L_4 = \{a^n b^m \mid 0 < m < 2n\}$$



¿Es determinístico?



$L_5 = \{\omega \mid \omega \in (a|b)^* \text{ y cada prefijo de } \omega \text{ tiene al menos tantas } a\text{'s como } b\text{'s } \}$