

# Teoría de Lenguajes

## Clase Teórica 6

### Autómatas de Pila y Lenguajes Independientes del Contexto

Primer cuatrimestre 2016

Material compilado por el Profesor Julio Jacobo, a lo largo de distintas ediciones de la materia Teoría de Lenguajes en el Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, revisado recientemente por Verónica Becher.

**Bibliografía:** Capítulos 6 y 7, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

**Ejemplo 1.** Autómata de pila que acepta  $L = \{\alpha\alpha^R : \alpha \in \Sigma^*\}$ :  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$  donde  
 $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$   $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$   $F = \{q_0, q_3\}$

$a, a \mid aa$

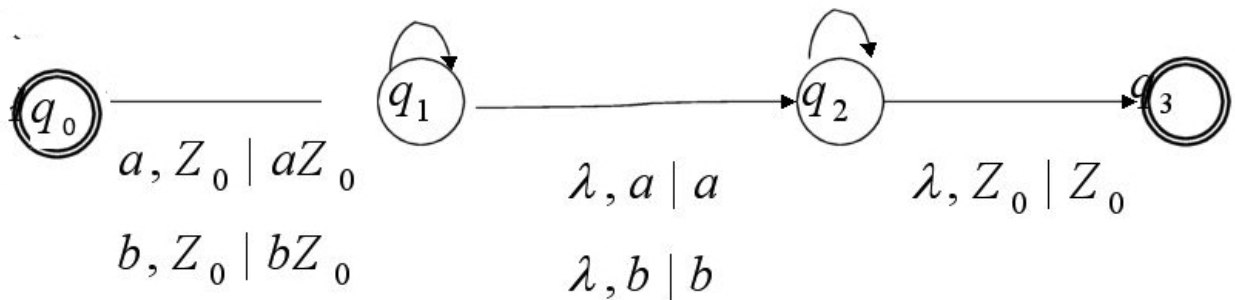
$b, a \mid ba$

$a, b \mid ab$

$b, b \mid bb$

$a, a \mid \lambda$

$b, b \mid \lambda$



**Definición 1** (Oettinger 1961, Schutzenberger 1963). Un autómata de pila está definido por  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$  donde

- $Q$  es el conjunto de estados
- $\Sigma$  es el alfabeto de entrada
- $\Gamma$  es el alfabeto de la pila
- $q_0 \in Q$  es el estado inicial
- $Z_0 \in \Gamma$  es la configuración inicial de la pila
- $F \subseteq Q$  es el conjunto de estados finales
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$  función de transición:  $\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_m, \gamma_m)\}$

La interpretación de  $\delta(q, a, Z) = \{(q_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_n, \gamma_n)\}$ , con  $q, p_1, \dots, p_n \in Q$ ,  $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$ ,  $Z \in \Gamma$ , y  $\gamma_i \in \Gamma^*$  es la siguiente.

Cuando el estado del autómata es  $q$ , el símbolo que la cabeza lectora está inspeccionando en ese momento es  $a$ , y en el tope de la pila nos encontramos el símbolo  $Z$ , se realizan las siguientes acciones:

Si  $a \in \Sigma$ , es decir no es la cadena vacía, la cabeza lectora avanza una posición para inspeccionar el siguiente símbolo.

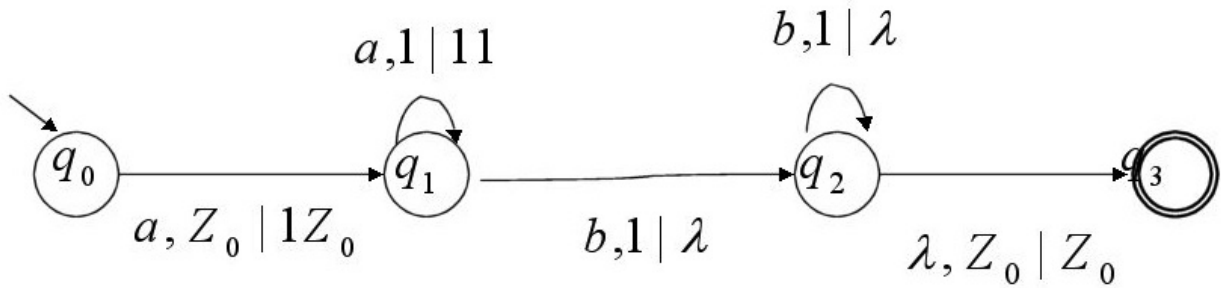
Se elimina el símbolo  $Z$  de la pila del autómata.

Se selecciona un par  $(q_i, \gamma_i)$  de entre los existentes en la definición de  $\delta(q, a, Z)$ .

Se apila la cadena  $\gamma_i = c_1 c_2 \dots c_k$ , con  $c_i \in \Gamma$  en la pila del autómata, quedando el símbolo  $c_1$  en el tope de la pila.

Se cambia el control del autómata al estado  $p_i$ .

**Ejemplo 2.** Autómata de pila que acepta  $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ :  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$  donde  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{Z_0, 1\}$ ,  $F = \{q_3\}$



Sea un autómata de pila  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ .

**Definición 2** (Configuración de un autómata de pila). Es una tripla de  $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$  donde  $Q$  es el estado actual,  $\Sigma^*$  es la parte de la cadena de entrada que falta procesar y  $\Gamma^*$  es el contenido de la pila. La configuración inicial del autómata será entonces  $(q_0, \alpha, Z_0)$ .

**Definición 3** (Cambio de configuración  $\vdash$ ). Para todo  $a \in \Sigma$ ,  $\alpha \in \Sigma^*$ ,  $t \in \Gamma$ ,  $\tau, \pi \in \Gamma^*$ ,  $q, r \in Q$

- Si  $(r, \tau) \in \delta(q, a, t)$  entonces  $(q, a\alpha, t\pi) \vdash (r, \alpha, \tau\pi)$ .
- Si  $(r, \tau) \in \delta(q, \lambda, t)$  entonces  $(q, \alpha, t\pi) \vdash (r, \alpha, \tau\pi)$ .

**Definición 4.** Sea un autómata de pila  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ .

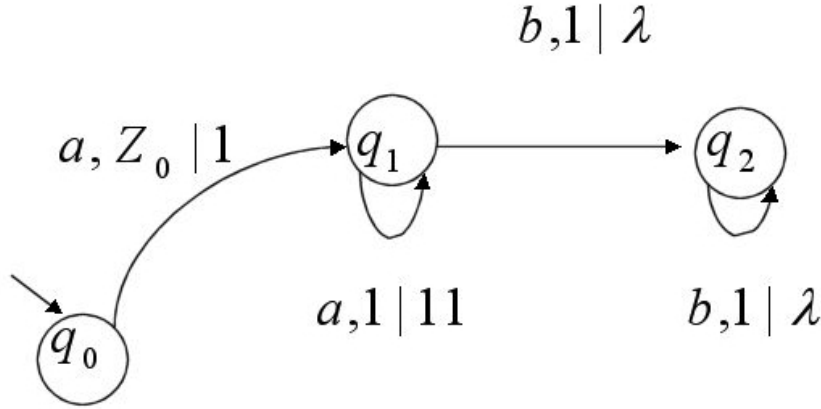
El lenguaje reconocido por  $M$  por estado final es

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \exists p \in F \quad (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (p, \lambda, \gamma) \right\}$$

El lenguaje reconocido por  $M$  por pila vacía es

$$\mathcal{L}_\lambda(M) = \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \exists q \in Q \quad (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda) \right\}$$

**Ejemplo 3.** Sea AP  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset \rangle$  donde  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$ , donde  $\delta$  está dada por el siguiente dibujo:



Notar que  $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, 1)\}$ , por lo tanto en la transición de  $q_0$  a  $q_1$  el símbolo  $Z_0$  fue removido de la pila.

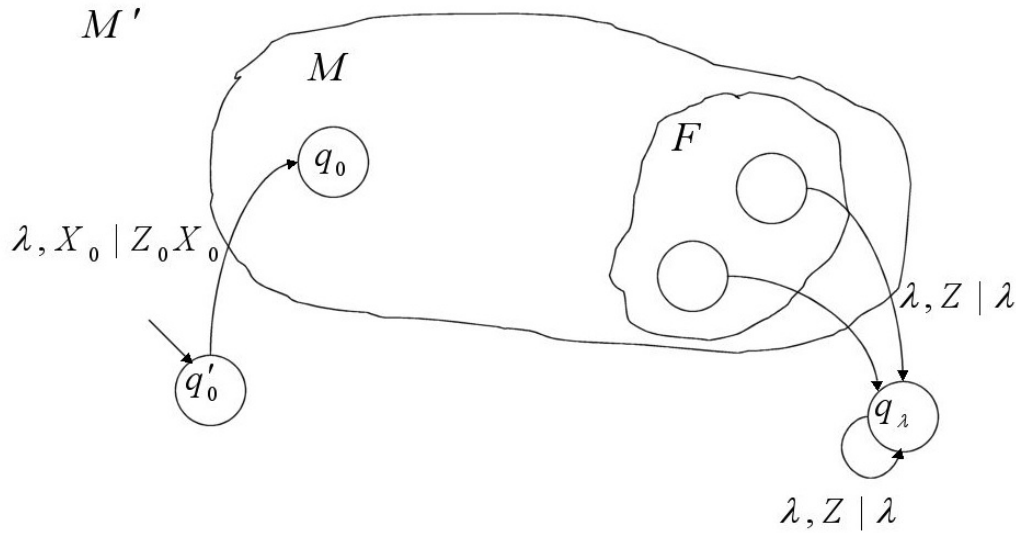
El lenguaje reconocido por  $M$  por pila vacía es

$$\mathcal{L}_\lambda(M) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$$

**Teorema 1.** Para cada AP  $M$  existe AP  $M'$  tal que  $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_\lambda(M')$ .

**Demostración.** Sea AP  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ . Definimos

$$M' = \langle Q \cup \{q_\lambda, q'_0\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta', q'_0, X_0, \emptyset \rangle$$



1.  $\delta'(q'_0, \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$   
 $M'$  entra al estado inicial de  $M$  con  $Z_0 X_0$  en la pila, así evita pila vacía
2.  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \forall Z \in \Gamma, \delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ .  
 $M'$  simula  $M$ .
3.  $\forall q \in F, \forall Z \in \Gamma \cup \{X_0\}, (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q, \lambda, Z)$
4.  $\forall Z \in \Gamma \cup \{X_0\}, (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q_\lambda, \lambda, Z)$ .  
 Si  $M$  entra en un estado final,  $M'$  debe ir a vaciar la pila.

Veamos que  $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}_\lambda(M')$ .

Si  $x \in \mathcal{L}(M)$  entonces  $(q_0, x, Z_0) \xrightarrow{*}_M (q, \lambda, \gamma)$ , con  $q \in F$ .

Por definición de  $\delta'$ ,  $\delta'(q'_0, \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$ , entonces

$$(q'_0, x, X_0) \xrightarrow{*}_{M'} (q_0, x, Z_0 X_0).$$

Por definición de  $\delta'$ ,  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \forall Z \in \Gamma, \delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ ,

$$(q_0, x, Z_0) \vdash_{M'}^* (q, \lambda, \gamma).$$

Entonces  $(q'_0, x, X_0) \vdash_{M'} (q_0, x, Z_0 X_0) \vdash_{M'}^* (q, \lambda, \gamma X_0).$

Por definición de  $\delta'$ ,  $\forall q \in F, \forall Z \in \Gamma \cup \{X_0\},$

$$(q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q, \lambda, Z) \text{ y } (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q_\lambda, \lambda, Z).$$

Entonces

$$(q, \lambda, \gamma X_0) \vdash_{M'}^* (q_\lambda, \lambda, \lambda).$$

Por lo tanto,  $(q'_0, x, X_0) \vdash_{M'}^* (q_\lambda, \lambda, \lambda).$

Concluimos que, si  $x \in \mathcal{L}(M)$  entonces  $x \in \mathcal{L}_\lambda(M').$

Veamos que  $\mathcal{L}_\lambda(M') \subseteq \mathcal{L}(M).$

Si  $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ , entonces existe la secuencia

$$(q'_0, x, X_0) \vdash_{M'} \underbrace{(q_0, x, Z_0 X_0) \vdash_{M'}^* (q, \lambda, \gamma X_0) \vdash_{M'}^* (q_\lambda, \lambda, \lambda)}_A,$$

Pero la transición en  $A$  implica

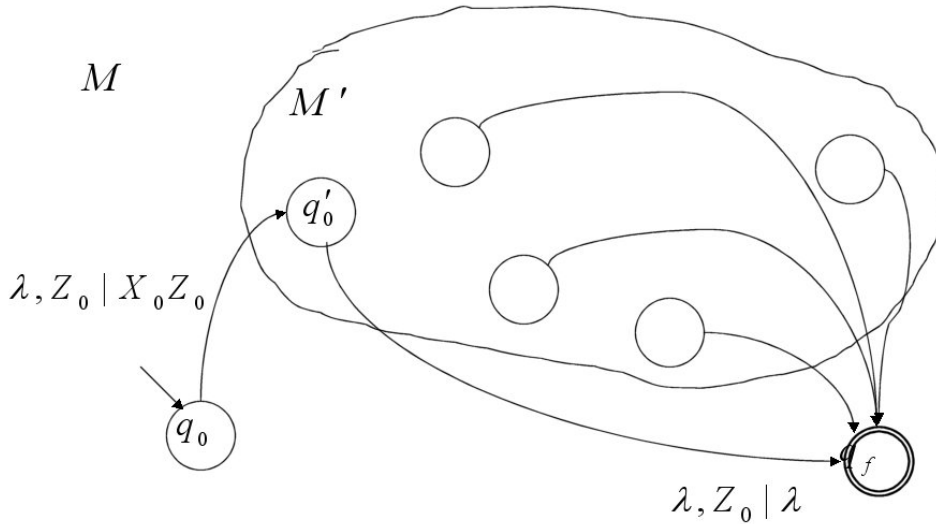
$$(q_0, x, Z_0) \vdash_M^* (q, \lambda, \gamma).$$

Por lo tanto, si  $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$  entonces  $x \in \mathcal{L}(M).$   $\square$

**Teorema 2** (Chomsky 1962, Evey 1963). *Para cada AP  $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, X_0, \emptyset \rangle$  existe AP  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$  tal que  $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_\lambda(M').$*

**Demostración.** Sea AP  $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, X_0, \emptyset \rangle.$

Definimos  $M = \langle Q' \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma' \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\} \rangle$  donde



- $\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q'_0, X_0 Z_0)\},$   
así desde un principio  $M$  simula  $M'$ , con  $X_0 Z_0$  en la pila.
- $\forall q \in Q', \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \forall Z \in \Gamma'^*, \quad \delta(q, a, Z) = \delta'(q, a, Z)$   
así  $M$  simula  $M'$ .
- $\forall q \in Q', \quad (q_f, \lambda) \in \delta(q, \lambda, Z_0)$   
así cuando se vacía la pila simulada de  $M'$ ,  $M$  salta a estado final  $q_f$ .

Nos queda por argumentar que  $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$  si y solo si  $x \in \mathcal{L}(M)$ .

Si  $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$  entonces  $(q'_0, x, X_0) \xrightarrow{M'}^* (q, \lambda, \lambda)$ .

La definición de  $M$  asegura

$$(q_0, x, Z_0) \vdash_M (q'_0, x, X_0 Z_0) \xrightarrow{M}^* (q, \lambda, Z_0) \vdash_M^* (q_f, \lambda, \lambda),$$

y por lo tanto  $x \in \mathcal{L}(M)$ .

Si  $x \in \mathcal{L}(M)$  entonces

$$(q_0, x, Z_0) \vdash_M (q'_0, x, X_0 Z_0) \xrightarrow{M}^* (q, \lambda, Z_0) \vdash_M^* (q_f, \lambda, \lambda),$$

pero por definición de  $M$ ,

$$(q'_0, x, X_0 Z_0) \xrightarrow{M}^* (q, \lambda, Z_0) \text{ si y solo si } (q'_0, x, X_0) \xrightarrow{M'}^* (q, \lambda, \lambda).$$

Concluimos  $(q'_0, x, X_0) \xrightarrow{M'}^* (q, \lambda, \lambda)$ , y por lo tanto  $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ .

**Definición 5.** Una gramática  $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$  es independiente del contexto si las producciones en  $P$  son de la forma

$$A \rightarrow \alpha, \text{ con } A \in V_N \text{ y } \alpha \in (V_N \cup V_T)^*.$$

Si  $\alpha \in (V_N \cup V_T)^+$  la gramática se denomina propia.

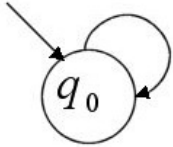
Demostraremos que para cada gramática independiente del contexto  $G$  hay un autómata de pila  $M$  que acepta el lenguaje generado por dicha gramática y viceversa.

**Ejemplo 4.** Sea  $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$  la gramática independiente del contexto tal que  $V_N = \{E\}$ ,  $V_T = \{+, *, \text{id}, (, )\}$ ,  $S = E$  y tiene una única producción

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \text{id}$$

Definimos  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset \rangle$  donde  $Q = \{q_0\}$ ,  $\Sigma = V_T$ ,  $\Gamma = V_N \cup V_T$  y  $Z_0 = S$ .

$$\lambda, E \mid \text{id}; \quad \lambda, E \mid (E); \quad \lambda, E \mid E + E; \quad \lambda, E \mid E * E$$



$$+, + \mid \lambda; \quad *, * \mid \lambda; \quad ), ) \mid \lambda; \quad (, ( \mid \lambda; \quad \text{id}, \text{id} \mid \lambda$$

Si en el tope de la pila hay un símbolo no-terminal, el autómata  $M$  lo reemplazará en la pila por el lado derecho de alguna producción.

Si en el tope de la pila hay un símbolo terminal el autómata  $M$  constatará que es igual al próximo símbolo en la cadena de entrada y lo desapilará.

Este autómata acepta  $L$  por pila vacía.

**Teorema 3** (Chomsky 1962, Evey 1963). Para cada gramática  $G$  independiente del contexto existe un autómata de pila  $M$  tal que  $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\lambda(M)$ .

**Demostración.** Sea  $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$  una gramática independiente del contexto.

Definamos el AP  $M = \langle \{q\}, V_T, V_N \cup V_T, \delta, q, S, \phi \rangle$  donde la función de transición  $\delta$  está dada por:

1. Si  $(A \rightarrow \alpha) \in P$ , entonces  $(q, \alpha) \in \delta(q, \lambda, A)$ .
2.  $\forall a \in V_T, \delta(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$ .

Demostraremos este lema : para cualquier  $A$  en  $V_N$ ,  $w \in V_T^*$

$$A \xrightarrow{*} w \text{ si y solo si } (q, w, A) \vdash_M^* (q, \lambda, \lambda).$$

Luego, para cualquier  $w \in V_T^*$ ,  $S \xrightarrow{+} w$  si y solo si  $(q, w, S) \vdash_M^+ (q, \lambda, \lambda)$ .

por lo tanto  $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\lambda(M)$ .  $\square$

Sea GLC  $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$  y el AP  $M = \langle \{q\}, V_T, V_N \cup V_T, \delta, q, S, \phi \rangle$  definido antes.

**Lema 1.**  $A \xRightarrow{*} w$  si y solo si  $(q, w, A) \vdash_M^* (q, \lambda, \lambda)$ .

**Demostración.** Veamos que

$$A \xRightarrow{*} w \text{ si y solo si } (q, w, A) \vdash_M^* (q, \lambda, \lambda).$$

Usaremos inducción en la cantidad de derivaciones, que llamaremos  $m$ .

Caso base,  $m = 1$ .  $A \xRightarrow{1} w$  para  $w = a_1 \dots a_k$ , con  $k > 0$ , si y solo si,  $(q, a_1 \dots a_k, A) \vdash_M (q, a_1 \dots a_k, a_1 \dots a_k) \vdash_M^k (q, \lambda, \lambda)$ .

Caso inductivo,  $m > 1$ . Asumimos hipótesis inductiva: Para todo  $j < m$ ,

$$A \xRightarrow{j} x \text{ si y solo si } (q, x, A) \vdash_M^* (q, \lambda, \lambda).$$

$A \xRightarrow{m} w$  si y solo si  $A \rightarrow X_1 \dots X_k$  está en  $P$  tal que para cada  $i$ ,  $X_i \xRightarrow{m_i} x_i$ , para algún  $m_i < m$  y  $x_1 \dots x_k = w$ .

Por definición de  $M$ ,  $(A \rightarrow X_1 \dots X_k) \in P$  si y solo si  $(q, w, A) \vdash_M (q, w, X_1 \dots X_k)$ .

Si  $X_i \in V_N$ , entonces por hipótesis inductiva,  $(q, x_i, X_i) \vdash_M^* (q, \lambda, \lambda)$ .

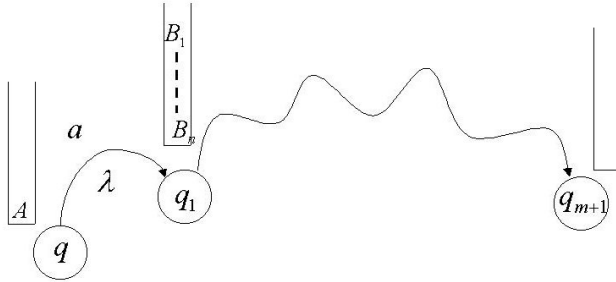
Si  $X_i = x_i \in V_T$ , entonces  $(q, x_i, X_i) \vdash_M (q, \lambda, \lambda)$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (q, w, A) \vdash_M (q, x_1 \dots x_k, X_1 \dots X_k) \vdash_M (q, x_2 \dots x_k, X_2 \dots X_k) \vdash_M \dots \\ \vdash_M (q, x_k, X_k) \vdash_M (q, \lambda, \lambda). \quad \square \end{aligned}$$

**Teorema 4** (Chomsky 1962, Evey 1963). Si  $M$  es un autómata de pila entonces  $\mathcal{L}_\lambda(M)$  es un lenguaje independiente del contexto.

**Demostración.** Sea  $AP M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ .



Definamos la gramática  $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$  así:

$S$  es el símbolo distinguido, es tal que  $S \notin \Gamma$ .  $V_N = \{[q, A, p] : q \in Q, A \in \Gamma, p \in Q\} \cup S$ .

$V_T = \Sigma$ , y  $P$  se define así:

- $(S \rightarrow [q_0, Z_0, q])$  en  $P$ , para cada  $q$  en  $Q$ .
- $[q, A, q_1] \rightarrow a$  en  $P$  si y solo si  $(q_1, \lambda) \in \delta(q, a, A)$ .
- $[q, A, q_1] \rightarrow \lambda$  en  $P$  si y solo si  $(q_1, \lambda) \in \delta(q, \lambda, A)$ .

Para cada  $q, q_1, q_2, \dots, q_{m+1} \in Q$ ,  $a \in \Sigma$  y  $A, B_1, \dots, B_m \in \Gamma$ ,

- $[q, A, q_{m+1}] \rightarrow a[q_1, B_1, q_2] \dots [q_m, B_m, q_{m+1}]$  en  $P$   
si y solo si  $(q_1, B_1 \dots B_m) \in \delta(q, a, A)$ .
- $[q, A, q_{m+1}] \rightarrow [q_1, B_1, q_2] \dots [q_m, B_m, q_{m+1}]$  en  $P$   
si y solo si  $(q_1, B_1 \dots B_m) \in \delta(q, \lambda, A)$ .

( $G$  es tal que su derivación más a la izquierda es una simulación de  $M$ ).

Demostraremos este lema: para todo  $q \in Q$ ,  $A \in \Gamma$ ,  $p \in Q \cup \{S\}$ ,

$$(q, x, A) \vdash_M^* (p, \lambda, \lambda) \quad \text{si y solo si} \quad [q, A, p] \xRightarrow{*}_G x.$$

Tomando  $q = q_0$  y  $A = Z_0$ ,

$$(q_0, x, Z_0) \vdash_M^* (p, \lambda, \lambda) \quad \text{si y solo si} \quad [q_0, Z_0, p] \xRightarrow{*}_G x.$$

Por la definición de  $G$ ,  $S \rightarrow [q_0, Z_0, p]$ , entonces,

$$(q_0, x, Z_0) \vdash_M^* (p, \lambda, \lambda) \quad \text{si y solo si} \quad S \xRightarrow{G}^* x.$$

O, lo que es lo mismo

$$x \in \mathcal{L}_\lambda(M) \quad \text{si y solo si} \quad x \in \mathcal{L}(G).$$

□

**Lema 2.** Para todo  $q \in Q, A \in \Gamma, p \in Q \cup \{S\}$ ,

$$(q, x, A) \vdash_M^* (p, \lambda, \lambda) \quad \text{si y solo si} \quad [q, A, p] \xRightarrow{G}^* x.$$

**Demostración. PRIMERA PARTE** Veamos que para todo  $i \geq 1$ ,

$$\text{Si } (q, x, A) \vdash_M^i (p, \lambda, \lambda) \quad \text{entonces } [q, A, p] \xRightarrow{G}^* x.$$

Escribimos  $a$  para denotar un símbolo de  $\Sigma$  o  $\lambda$ .

Caso  $i = 1$ . Tenemos  $(q, a, A) \vdash_M^1 (p, \lambda, \lambda)$ . entonces  $x = a$  o  $x = \lambda$ .

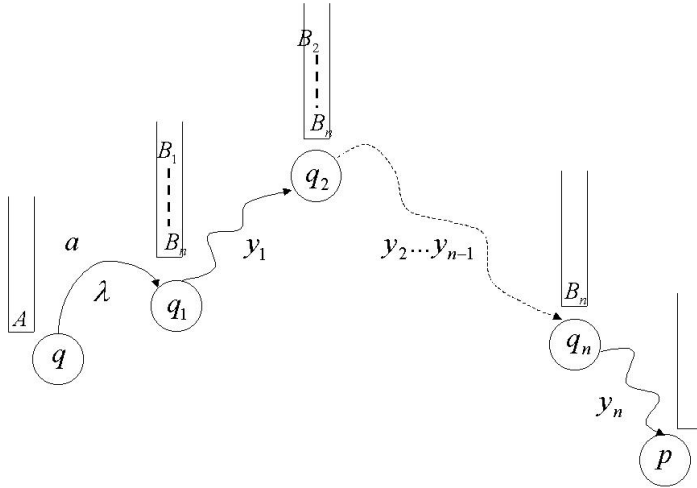
Por lo tanto,  $(p, \lambda) \in \delta(q, a, A)$ . Y por definición de  $G$ ,  $[q, A, p] \rightarrow a$ .

Concluimos Si  $(q, a, A) \vdash_M^1 (p, \lambda, \lambda)$  entonces  $[q, A, p] \xRightarrow{G} a$ .

Caso  $i > 1$ . Tenemos  $x = ay$  con  $y \in \Sigma^*$ .

Existen  $B_1, \dots, B_n$  en  $\Gamma$  (reemplazan a  $A$  al pasar de estado  $q$  a  $q_1$  consumiendo  $a$ ) tales que

$$(q, ay, A) \vdash_M^{i-1} (q_1, y, B_1, \dots, B_n) \vdash_M^{i-1} (p, \lambda, \lambda).$$



Necesariamente  $y$  se decompone como  $y = y_1 \dots y_n$ , tales que para  $1 \leq j \leq n$ ,  $y_1 \dots y_j$  hacen que  $B_j$  quede en el tope de pila.

Existen  $q_2, \dots, q_{n+1}$  tales que, para  $1 \leq j \leq n$ , en menos de  $i$  transiciones,  $(q_j, y_j, B_j) \vdash_M^* (q_{j+1}, \lambda, \lambda)$ .

Por hipótesis inductiva, usando menos que  $i$  pasos, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\text{Si } (q_j, y_j, B_j) \vdash_M^* (q_{j+1}, \lambda, \lambda) \quad \text{entonces } [q_j, B_j, q_{j+1}] \xRightarrow{G}^* y_j.$$

Pero en  $G$  tenemos la producción

$$[q, A, q_{n+1}] \Rightarrow a[q_1, B_1, q_2] \dots [q_n, B_n, q_{n+1}]$$

Usando que para cada  $j$ ,  $[q_j, B_j, q_{j+1}] \xRightarrow{G}^* y_j$ , obtenemos

$$[q, A, q_{n+1}] \xRightarrow{G}^* ay_1 \dots y_n = x.$$

**SEGUNDA PARTE** Veamos que para todo  $i \geq 1$ ,

$$\text{Si } [q, A, p] \xRightarrow{G}^i x \quad \text{entonces } (q, x, A) \vdash_M^* (p, \lambda, \lambda).$$

Escribimos  $a$  para denotar un símbolos de  $\Sigma$  o  $\lambda$ .

Para  $i = 1$  tenemos que  $[q, A, p] \xRightarrow{G}^1 a$  Entonces,  $[q, A, p] \xRightarrow{G}^1 a$  es producción de  $G$  y por definición de  $M$ ,  $(p, \lambda) \in \delta(q, a, A)$ .

Para  $i > 1$ . Tenemos  $[q, A, p] \xRightarrow{G}^i a[q_1, B_1, Q_2] \dots [q_n, B_n, p] \xRightarrow{G}^{i-1} x$ .

Descomponemos  $x$  como  $x = ax_1 \dots x_n$  tal que para cada  $1 \leq j \leq n$ , cada derivación toma menos de  $i$  pasos,  $[q_j, B_j, q_{j-1}] \xRightarrow{*}_G x_j$

Por hipótesis inductiva, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,  $(q_j, x_j, B_j) \vdash_M^* (q_{j+1}, \lambda, \lambda)$ .

Luego, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,  $(q_j, x_j, B_j \dots B_n) \vdash_M^* (q_{j+1}, \lambda, B_{j+1} \dots B_n)$ .

Partimos de  $[q, A, p] \xRightarrow{*}_G a[q_1, B_1, Q_2] \dots [q_n, B_n, p]$ .

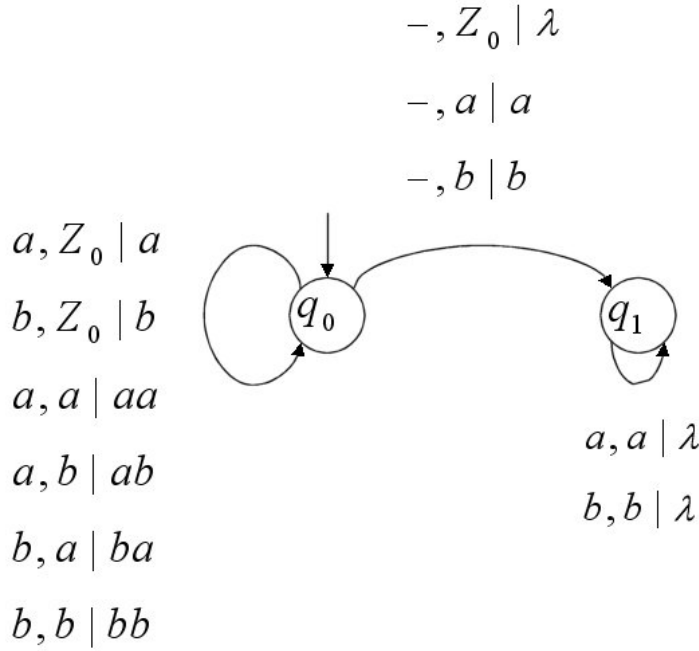
Por definicion de  $M$ ,  $(q, a, A) \vdash_M (q, \lambda, B_1 \dots B_n)$ .

Llamando  $p$  al  $q_{n+1}$ , obtenemos  $(q, ax_1 \dots x_n, A) \vdash_M (q_1, x_1 \dots x_n, B_1 \dots B_n) \vdash_M^* (p, \lambda, \lambda)$ .  $\square$

**Definición 6.** Un autómata de pila  $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$  es determinístico si,  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, \forall A \in \Gamma$ ,

1.  $\#\delta(q, a, A) \leq 1$
2.  $\#\delta(q, \lambda, A) \leq 1$
3. si  $\#\delta(q, \lambda, A) = 1$  entonces  $\#\delta(q, a, A) = 0$

**Ejemplo 5.** El siguiente autómata de pila  $M$  es determinístico



$$\mathcal{L}(M) = \{\alpha - \alpha^R : \alpha \in (\Sigma \setminus \{\lambda\})^*\}.$$

**Teorema 5.** No es cierto que para cada autómata de pila no determinístico existe otro determinístico que reconoce el mismo lenguaje. Es decir, hay lenguajes libres de contexto que no son aceptados por ningún autómata de pila determinístico.

**Demostración.**  $L = \{ww^R\}$  es aceptado por AP no-determinístico pero no es aceptado por ningún AP determinístico ver Hopcroft, Motwani Ulman (2001) página 249:



On the other hand, there are CFL's like  $L_{www}$  that cannot be  $\bar{L}(P)$  for any DPDA  $P$ . A formal proof is complex, but the intuition is transparent. If  $P$  is a DPDA accepting  $L_{www}$ , then given a sequence of 0's, it must store them on the stack, or do something equivalent to count an arbitrary number of 0's. For instance, it could store one  $X$  for every two 0's it sees, and use the state to remember whether the number was even or odd.

Suppose  $P$  has seen  $n$  0's and then sees  $110^n$ . It must verify that there were  $n$  0's after the 11, and to do so it must pop its stack.<sup>5</sup> Now,  $P$  has seen  $0^n110^n$ . If it sees an identical string next, it must accept, because the complete input is of the form  $ww^R$ , with  $w = 0^n110^n$ . However, if it sees  $0^m110^m$  for some  $m \neq n$ ,  $P$  must *not* accept. Since its stack is empty, it cannot remember what arbitrary integer  $n$  was, and must fail to recognize  $L_{www}$  correctly. Our conclusion is that:

- The languages accepted by DPDA's by final state properly include the regular languages, but are properly included in the CFL's.

#### Acerca de los autómatas de pila

- Dada una gramática libre de contexto  $G$ , se puede reconocer si una palabra pertenece a  $\mathcal{L}(G)$  en tiempo del orden cúbico de la longitud de la palabra.
- Sin embargo, para las gramáticas libre de contexto determinísticas hay algoritmos lineales de reconocimiento (Knuth 1965, LR parsers)
- Los autómatas con dos o más pilas son equivalentes a una máquina de Turing.
- Los autómatas de pila de dos vías, tienen una pila, control finito y una cinta cuya cabeza puede moverse en ambas direcciones (Aho, Hopcroft, Ullman 1968, and Gray, Harrison, Ibarra 1967). Estos autómatas tienen menos poder computacional que una máquina de Turing.