Teoría de Lenguajes

Clase Teórica 4

Minimización Autómatas Finitos

Primer cuatrimestre 2016

Material compilado por Julio Jacobo a lo largo de distintas ediciones de la materia Teoría de Lenguajes en el Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, revisado recientemente por Verónica Becher.

Bibliografía: Capítulo 4, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

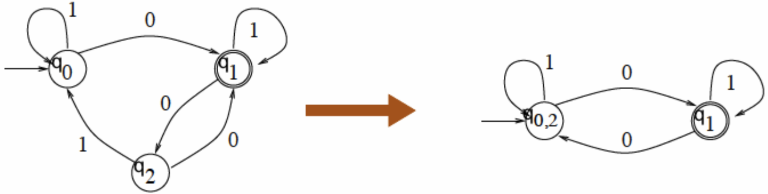
Ejemplos de minimización de AFD

$M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. El estado q_2 es inaccesible, entonces puede ser quitado. $\mathcal{L}(M) = (1^*01^*)(01^*01^*)^*$.

Ejemplos de minimización de AFD

$M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$. El estado q_2 es inaccesible, entonces puede ser quitado. $\mathcal{L}(M) = (1^*01^*)(01^*01^*)^*$.

$M' =< Q, \Sigma, \delta', q_0, F >$. No hay estados inaccesibles.
$\mathcal{L}(M') = (1^*01^*)(01^*01*)^*$.



Definición

Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *un AFD. Definimos* $\equiv$ *la relación de indistinguibilidad sobre* Q*: dos estados* $q, r \in Q$ *son indistinguibles, que denotamos* $q \equiv r$ *, cuando*

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \text{ si y solo si } \widehat{\delta}(r, \alpha) \in F).$$

Observación

Todo par de estados indistinguibles, al consumir cualquier cadena $\alpha \in \Sigma^*$, *llegan a otro par de estados indistinguibles:*

$$\textit{Si } q \equiv r \quad \textit{entonces } \forall \alpha \in \Sigma^*, \big(\widehat{\delta}(q,\alpha) \equiv \widehat{\delta}(r,\alpha)\big)$$

Observación

Todo par de estados indistinguibles, al consumir cualquier cadena $\alpha \in \Sigma^*$, llegan a otro par de estados indistinguibles:

$$\textit{Si } q \equiv r \quad \textit{entonces } \forall \alpha \in \Sigma^*, \big(\widehat{\delta}(q, \alpha) \equiv \widehat{\delta}(r, \alpha)\big)$$

Demostración. Supongamos $q \equiv r$ pero $\exists \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \not\equiv \widehat{\delta}(r, \alpha))$.

Observación

Todo par de estados indistinguibles, al consumir cualquier cadena $\alpha \in \Sigma^*$, llegan a otro par de estados indistinguibles:

$$\textit{Si } q \equiv r \quad \textit{entonces } \forall \alpha \in \Sigma^*, \big(\widehat{\delta}(q, \alpha) \equiv \widehat{\delta}(r, \alpha)\big)$$

Demostración. Supongamos $q \equiv r$ pero $\exists \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \not\equiv \widehat{\delta}(r, \alpha))$.
Entonces existe una cadena β que distingue $\widehat{\delta}(q, \alpha)$ de $\widehat{\delta}(r, \alpha)$:

$$\exists \beta \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, \alpha), \beta) \in F \wedge \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(r, \alpha), \beta) \notin F)$$

o viceversa.

Observación

Todo par de estados indistinguibles, al consumir cualquier cadena $\alpha \in \Sigma^*$, llegan a otro par de estados indistinguibles:

$$\textit{Si } q \equiv r \quad \textit{entonces } \forall \alpha \in \Sigma^*, \big(\widehat{\delta}(q,\alpha) \equiv \widehat{\delta}(r,\alpha)\big)$$

Demostración. Supongamos $q \equiv r$ pero $\exists \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q,\alpha) \not\equiv \widehat{\delta}(r,\alpha))$. Entonces existe una cadena β que distingue $\widehat{\delta}(q,\alpha)$ de $\widehat{\delta}(r,\alpha)$:

$$\exists \beta \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q,\alpha),\beta) \in F \wedge \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(r,\alpha),\beta) \notin F)$$

o viceversa. Esto equivale a decir que

$$\widehat{\delta}(q,\alpha\beta) \in F \wedge \widehat{\delta}(r,\alpha\beta) \notin F$$

o viceversa.

Observación

Todo par de estados indistinguibles, al consumir cualquier cadena $\alpha \in \Sigma^*$, llegan a otro par de estados indistinguibles:

$$\textit{Si } q \equiv r \quad \textit{entonces } \forall \alpha \in \Sigma^*, \big(\widehat{\delta}(q, \alpha) \equiv \widehat{\delta}(r, \alpha)\big)$$

Demostración. Supongamos $q \equiv r$ pero $\exists \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \not\equiv \widehat{\delta}(r, \alpha))$. Entonces existe una cadena β que distingue $\widehat{\delta}(q, \alpha)$ de $\widehat{\delta}(r, \alpha)$:

$$\exists \beta \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q, \alpha), \beta) \in F \land \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(r, \alpha), \beta) \notin F)$$

o viceversa. Esto equivale a decir que

$$\widehat{\delta}(q, \alpha\beta) \in F \land \widehat{\delta}(r, \alpha\beta) \notin F$$

o viceversa.Pero entonces $q \not\equiv r$, y arribamos a una contradicción.

Teorema

La indistinguibilidad $\equiv$ *es una relación de equivalencia.*

Teorema

La indistinguibilidad $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Demostración.

- reflexividad: Debemos ver que para todo $q \in Q$, $q \equiv q$.

$$q \equiv q \text{ si y solo si } \forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

  y esta doble implicación es siempre verdadera.

Teorema

La indistinguibilidad $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Demostración.

- reflexividad: Debemos ver que para todo $q \in Q$, $q \equiv q$.

$$q \equiv q \text{ si y solo si } \forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

  y esta doble implicación es siempre verdadera.

- simetría: Supongamos $q \equiv r$. Entonces

  $\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(r, \alpha) \in F)$. Luego,

  $\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(r, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q, \alpha) \in F)$. Por lo tanto, $r \equiv q$.

Teorema

La indistinguibilidad $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Demostración.

- reflexividad: Debemos ver que para todo $q \in Q$, $q \equiv q$.

$$q \equiv q \text{ si y solo si } \forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q,\alpha) \in F)$$

  y esta doble implicación es siempre verdadera.

- simetría: Supongamos $q \equiv r$. Entonces

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(r,\alpha) \in F). \text{ Luego,}$$
$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(r,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q,\alpha) \in F). \text{ Por lo tanto, } r \equiv q.$$

- transitividad: Supongamos $q \equiv r$ and $r \equiv s$. Entonces,

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(r,\alpha) \in F), y$$
$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(r,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(s,\alpha) \in F)$$

  Por lo tanto, $\forall \alpha \in \Sigma^*, (\widehat{\delta}(q,\alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(s,\alpha) \in F)$. Es decir, $q \equiv s$.

Definición

Si A es un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A, entonces las clases de equivalencia forman una partición del conjunto A.

Las clases de equivalencia de la relación $\sim$ determinan un nuevo conjunto, denominado conjunto cociente y denotado $A/\sim$.

Estados inaccesibles

Definición

El estado p de AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es inaccesible si para toda $w \in \Sigma^*,\ p \neq \widehat{\delta}(q_0, w)$.

Algoritmo que computa el conjunto de estados accesibles.

```
let reachable_states:= {q0};
let new_states:= {q0};
do {
    temp := the empty set;
    for each q in new_states do
        for all c in Σ do
            temp := temp ∪ {p such that p=δ(q,c)};
        end;
    end;
    new_states := temp \ reachable_states;
    reachable_states := reachable_states ∪ new_states;
} while(new_states ≠ the empty set);
unreachable_states := Q \ reachable_states;
```

.

Definición (Autómata Finito Determinístico Mínimo)

Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente* $M_{min} =< Q_{min}, \Sigma, \delta_{min}, q_{min_0}, F_{min} >$ *es*

$$\begin{aligned} Q_{min} &= (Q \,/ \equiv) \text{ (las clases de equivalencia de } \equiv \text{)} \\ \delta_{min}\left([q], a\right) &= \left[\delta\left(q, a\right)\right] \\ q_{min_0} &= [q_0] \\ F_{min} &= \{[q] \in Q_{min} : q \in F\} \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_{min})$:

$\alpha \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta_{min}}([q_0], \alpha) \in F_{min}$.

Observación

Si $\widehat{\delta}(q, \alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q], \alpha) =$

Observación

Si $\widehat{\delta}(q, \alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q], \alpha) = [r]$.

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q],\alpha) = [r]$*.*

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q], \alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q],\alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q]\,,\alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}\,([q]\,,\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q]\,,\lambda) = [q]$.

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q]\,,\alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}\,([q]\,,\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q]\,,\lambda) = [q]$.

Caso inductivo

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q],\alpha) = [r]$*.*

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$.

Caso inductivo $|\alpha| = n+1$, con $n \geq 0$.

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q],\alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$.

Caso inductivo $|\alpha| = n+1$, con $n \geq 0$.
Asumamos que la propiedad vale para longitud n.
Sea $\alpha = a\beta$.

$$\widehat{\delta}(q,a\beta) \quad = \widehat{\delta}(\delta(q,a),\beta) = \quad r$$

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q],\alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$.

Caso inductivo $|\alpha| = n+1$, con $n \geq 0$.
Asumamos que la propiedad vale para longitud n.
Sea $\alpha = a\beta$.

$$\begin{array}{llll} \widehat{\delta}(q,a\beta) & = \widehat{\delta}(\delta(q,a),\beta) = & r & \\ \widehat{\delta_{min}}([q],a\beta) & = \widehat{\delta_{min}}([\delta(q,a)],\beta) = & [r] & \text{por Hipótesis Inductiva} \end{array}$$

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q]\,,\alpha) = [r]$*.*

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.

Caso base $|\alpha| = 0$.

$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)

$\widehat{\delta_{min}}\,([q]\,,\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)

Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q]\,,\lambda) = [q]$.

Caso inductivo $|\alpha| = n+1$, con $n \geq 0$.

Asumamos que la propiedad vale para longitud n.

Sea $\alpha = a\beta$.

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{\delta}(q,a\beta) & = \widehat{\delta}(\delta\,(q,a)\,,\beta) = & r & \\
\widehat{\delta_{min}}([q],a\beta) & = \widehat{\delta_{min}}([\delta\,(q,a)]\,,\beta) = & [r] & \text{por Hipótesis Inductiva} \\
 & = \widehat{\delta_{min}}(\delta_{min}\,([q]\,,a)\,,\beta) & & \text{por definición de } \delta_{min}
\end{array}
$$

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q],\alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$.

Caso inductivo $|\alpha| = n+1$, con $n \geq 0$.
Asumamos que la propiedad vale para longitud n.
Sea $\alpha = a\beta$.

$$\begin{array}{llll}
\widehat{\delta}(q,a\beta) & = \widehat{\delta}(\delta(q,a),\beta) = & r & \\
\widehat{\delta_{min}}([q],a\beta) & = \widehat{\delta_{min}}([\delta(q,a)],\beta) = & [r] & \text{por Hipótesis Inductiva} \\
 & = \widehat{\delta_{min}}(\delta_{min}([q],a),\beta) & & \text{por definición de } \delta_{min} \\
 & = \widehat{\delta_{min}}([q],a\beta) & & \text{por definición de } \widehat{\delta_{min}}
\end{array}$$

Observación

Si $\widehat{\delta}(q,\alpha) = r$ *entonces* $\widehat{\delta_{min}}([q],\alpha) = [r]$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$.
Caso base $|\alpha| = 0$.
$\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ (por definición $\widehat{\delta}$)
$\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$ (por definición $\widehat{\delta_{min}}$)
Conlcluimos que, Si $\widehat{\delta}(q,\lambda) = q$ entonces $\widehat{\delta_{min}}([q],\lambda) = [q]$.

Caso inductivo $|\alpha| = n+1$, con $n \geq 0$.
Asumamos que la propiedad vale para longitud n.
Sea $\alpha = a\beta$.

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{\delta}(q,a\beta) & = \widehat{\delta}(\delta(q,a),\beta) = & r & \\
\widehat{\delta_{min}}([q],a\beta) & = \widehat{\delta_{min}}([\delta(q,a)],\beta) = & [r] & \text{por Hipótesis Inductiva} \\
 & = \widehat{\delta_{min}}(\delta_{min}([q],a),\beta) & & \text{por definición de } \delta_{min} \\
 & = \widehat{\delta_{min}}([q],a\beta) & & \text{por definición de } \widehat{\delta_{min}}
\end{array}
$$

Concluimos que

$$\text{Si } \widehat{\delta}(q,a\beta) = r \qquad \text{entonces} \qquad \widehat{\delta_{min}}([q],a\beta) = [r].$$

Definición (Indistinguibilidad de orden k: $\overset{k}{\equiv}$)

Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *un AFD sin estados inaccesibles, y sea* k *un entero no negativos. Sean* $p, q \in Q$*. Decimos* $p \overset{k}{\equiv} q$ *si*
$\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k)$ *implica* $\left(\widehat{\delta}\,(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q, \alpha) \in F\right)$.

Teorema (Propiedades de la indistinguibilidad de orden k)

1. $\overset{k}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia*
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$
3. *Si* $Q - F \neq \emptyset$ *y* $F \neq \emptyset$ *entonces* $\left(Q/ \overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$.
4. $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta\,(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta\,(r, a)$
5. *Si* $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ *entonces* $\forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

1. $\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia: ejercicio.

1. $\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia: ejercicio.
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$.

1. $\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia: ejercicio.
2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$. Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} q$.

1. $\overset{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia: ejercicio.

2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$. Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} q$.
   Si $\forall \alpha \in \Sigma^*(|\alpha| \leq k+1)$ entonces $\left(\widehat{\delta}\,(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q, \alpha) \in F\right)$.
   Por lo tanto,

1. $\stackrel{k}{\equiv}$ es una relación de equivalencia: ejercicio.

2. $\stackrel{k+1}{\equiv} \subseteq \stackrel{k}{\equiv}$. Supongamos $p \stackrel{k+1}{\equiv} q$.
   Si $\forall \alpha \in \Sigma^*(|\alpha| \leq k+1)$ entonces $\left(\widehat{\delta}\,(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q, \alpha) \in F\right)$.
   Por lo tanto,
   Si $\forall \alpha \in \Sigma^*, \quad (|\alpha| \leq k)$ entonces $\left(\widehat{\delta}\,(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}\,(q, \alpha) \in F\right)$.
   Por definición de $\stackrel{k}{\equiv}$, $p \stackrel{k}{\equiv} q$.

3. Supongamos $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$.
Debemos ver que $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$.

3. Supongamos $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$.
Debemos ver que $\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$.

$$\begin{aligned}\left(Q/\overset{0}{\equiv}\right) &= \left\{\{q \in Q : \widehat{\delta}(q, \lambda) \notin F\}, \{q \in Q : \widehat{\delta}(q, \lambda) \in F\}\right\} \\ &= \{\{q \in Q : q \notin F\}, \{q \in Q : q \in F\}\} \\ &= \{Q - F, F\}\,.\end{aligned}$$

4. Debemos probar $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta\left(p, a\right) \overset{k}{\equiv} \delta\left(r, a\right)$.

4. Debemos probar $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta\,(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta\,(r, a)$.

$\Rightarrow$) Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} r$ pero no es cierto que $\forall a \in \Sigma, \delta\,(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta\,(r, a)$.

4. Debemos probar $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)$.

$\Rightarrow$) Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} r$ pero no es cierto que $\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)$.
Entonces $\exists a \in \Sigma, \exists \alpha \in \Sigma^*$, $(|\alpha| \leq k) \wedge$

$$\left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(p,a\right),\alpha\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(r,a\right),\alpha\right) \notin F\right).$$ O viceversa.

4. Debemos probar $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)$.

$\Rightarrow$) Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} r$ pero no es cierto que $\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)$.

Entonces $\exists a \in \Sigma, \exists \alpha \in \Sigma^*$, $(|\alpha| \leq k) \wedge$

$$\left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(p,a\right),\alpha\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta\left(r,a\right),\alpha\right) \notin F\right).$$ O viceversa.

Por lo tanto $\left(\widehat{\delta}\left(p,a\alpha\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(r,a\alpha\right) \notin F\right)$. O viceversa.

Entonces, $p \overset{k+1}{\not\equiv} r$, ya que $|a\alpha| \leq k+1$, contradiciendo $p \overset{k+1}{\equiv} r$.

4. Debemos probar $p \overset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)$.

$\Rightarrow$) Supongamos $p \overset{k+1}{\equiv} r$ pero no es cierto que $\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)$.
Entonces $\exists a \in \Sigma, \exists \alpha \in \Sigma^*$, $(|\alpha| \leq k) \wedge$

$$\left(\widehat{\delta}\left(\delta(p,a), \alpha\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta(r,a), \alpha\right) \notin F\right). \text{ O viceversa.}$$

Por lo tanto $\left(\widehat{\delta}(p, a\alpha) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}(r, a\alpha) \notin F\right)$. O viceversa.

Entonces, $p \overset{k+1}{\not\equiv} r$, ya que $|a\alpha| \leq k+1$, contradiciendo $p \overset{k+1}{\equiv} r$.

$\Leftarrow$) Demostramos el contrapositivo. Supongamos que $p \overset{k+1}{\not\equiv} q$. Entonces $\exists \alpha = a\alpha'$, con $|\alpha| \leq k+1$ que distingue p de q, o sea que

$$\left(\widehat{\delta}\left(\delta(p,a), \alpha'\right) \in F\right) \wedge \left(\widehat{\delta}\left(\delta(q,a), \alpha'\right) \notin F\right). \text{ O viceversa}$$

Por lo tanto $\delta(p,a) \overset{k}{\not\equiv} \delta(q,a)$.

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:

Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.
Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.
Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:
Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.
Debemos probar que Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:

Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Debemos probar que Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Supongamos $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$. Veamos $\forall q, p \in Q$, $\left(q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r\right)$.

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:

Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Debemos probar que Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Supongamos $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$. Veamos $\forall q, p \in Q$, $\left(q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r\right)$.

$q \overset{k+n+1}{\equiv} r$

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:

Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Debemos probar que Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Supongamos $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$. Veamos $\forall q, p \in Q$, $\left(q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r\right)$.

$$q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \overset{k+n}{\equiv} \delta(r,a)\right) \qquad \text{por definición } \overset{k+n}{\equiv}$$

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:

Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Debemos probar que Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Supongamos $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$. Veamos $\forall q, p \in Q$, $\left(q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r\right)$.

$$q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \overset{k+n}{\equiv} \delta(r,a)\right) \qquad \text{por definición } \overset{k+n}{\equiv}$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)\right) \qquad \text{por HI}$$

5. Debemos probar que si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\overset{k+0}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:

Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Debemos probar que Si $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$.

Supongamos $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$. Veamos $\forall q, p \in Q$, $\left(q \overset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \overset{k}{\equiv} r\right)$.

$$
\begin{aligned}
q \overset{k+n+1}{\equiv} r &\Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \overset{k+n}{\equiv} \delta(r,a)\right) && \text{por definición } \overset{k+n}{\equiv} \\
&\Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \overset{k}{\equiv} \delta(r,a)\right) && \text{por HI} \\
&\Leftrightarrow q \overset{k+1}{\equiv} r && \text{por definición } \overset{k+1}{\equiv}.
\end{aligned}
$$

5. Debemos probar que si $\left(\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$ entonces $\forall n \geq 0$, $\left(\stackrel{k+n}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$:

Inducción en n.

Caso base: $n = 0$. Trivial ya que $\stackrel{k+0}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}$.

Caso inductivo. Suponemos cierto para n con $n \geq 0$:

Si $\left(\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\stackrel{k+n}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$.

Debemos probar que Si $\left(\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$ entonces $\left(\stackrel{k+n+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$.

Supongamos $\left(\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right)$. Veamos $\forall q, p \in Q$, $\left(q \stackrel{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow q \stackrel{k}{\equiv} r\right)$.

$$
\begin{aligned}
q \stackrel{k+n+1}{\equiv} r &\Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \stackrel{k+n}{\equiv} \delta(r,a)\right) && \text{por definición } \stackrel{k+n}{\equiv} \\
&\Leftrightarrow \left(\forall a \in \Sigma,\ \delta(q,a) \stackrel{k}{\equiv} \delta(r,a)\right) && \text{por HI} \\
&\Leftrightarrow q \stackrel{k+1}{\equiv} r && \text{por definición } \stackrel{k+1}{\equiv}. \\
&\Leftrightarrow q \stackrel{k}{\equiv} r && \text{por suposición } \left(\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}\right).
\end{aligned}
$$

Recordemos

Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD sin estados inaccesibles.
El AFD mínimo equivalente $M_{min} =< Q_{min}, \Sigma, \delta_{min}, q_{min_0}, F_{min} >$ es

$$\begin{aligned} Q_{min} &= (Q\,/\equiv) \ \text{(las clases de equivalencia de } \equiv \text{)} \\ \delta_{min}\left([q], a\right) &= \left[\delta\left(q, a\right)\right] \\ q_{min_0} &= [q_0] \\ F_{min} &= \{[q] \in Q_{min} : q \in F\} \end{aligned}$$

Algoritmo de minimización de un AFD

Input AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
Output $Q/\equiv$
$P = \{Q\}$
$i = 0$
while $\left(P \neq \bigcup_{X \in P} X/\overset{i}{\equiv}\right)$ **do**

$$P = \bigcup_{X \in P} X/\overset{i}{\equiv}$$

$$i = i + 1$$

end while
return P

Algoritmos de Minimización de AFD

AFD $\langle Q, \Sigma, \delta, q_, F\rangle$, con $|Q| = n$ y $|\Sigma| = s$.

Hopcroft (1971)	$O(ns\ \log n)$	refinamiento (equivalencia Myhill Nerode)
Moore (1956)	$O(n^2 s)$	radix sort
Brzozowski (1963)	$O(2^n)$	revierte a NDA determiniza

Algoritmo de Hopcroft en página 161, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Algoritmo de minimización de autómatas finitos de Hopcroft

Sea AFD $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde Q no tiene inaccesibles.

```
P := {F, Q \ F};
W := {F};
while (W is not empty) do
     choose and remove a set A from W
     for each c in Σ do
          let X be the set of states for which a transition on c leads to a state in A
          for each set Y in P for which X ∩ Y is nonempty and Y \ X is nonempty do
               replace Y in P by the two sets X ∩ Y and Y \ X
               if Y is in W
                    replace Y in W by the same two sets
               else
                    if |X ∩ Y| <= |Y \ X|
                         add X ∩ Y to W
                    else
                         add Y \ X to W
          end;
     end;
end;
```

.

Algoritmo de minimización de autómatas finitos de Hopcroft

Sea AFD $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde Q no tiene inaccesibles.

```
P := {F, Q \ F};
W := {F};
while (W is not empty) do
     choose and remove a set A from W
     for each c in Σ do
          let X be the set of states for which a transition on c leads to a state in A
          for each set Y in P for which X ∩ Y is nonempty and Y \ X is nonempty do
               replace Y in P by the two sets X ∩ Y and Y \ X
               if Y is in W
                    replace Y in W by the same two sets
               else
                    if |X ∩ Y| <= |Y \ X|
                         add X ∩ Y to W
                    else
                         add Y \ X to W
          end;
     end;
end;
```

.

La complejidad peor caso es $O(n|\Sigma| \log n)$, donde $n = |Q|$.
Esta cota proviene de que cada una de las $n|\Sigma|$ transiciones participa en, a lo sumo, $O(\log n)$ pasos del algoritmo que realizan refinamiento.
Esta cantidad se debe a que en cada paso los conjuntos considerados de Q decrecen a la mitad de su tamaño.

Teorema

Sea AFD $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *y sea* M_{min} *el autómata mínimo equivalente. Entonces, cualquier AFD* M' *que reconozca el mismo lenguaje tiene al menos tantos estados como* M_{min}. *Es decir,*

$$\forall M', \left(\textit{Si } \mathcal{L}\left(M'\right) = \mathcal{L}\left(M_{min}\right) \ \textit{ entonces } \ |Q'| \geq |Q_{min}| \right)$$

Teorema

Sea AFD $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *y sea* M_{min} *el autómata mínimo equivalente. Entonces, cualquier AFD* M' *que reconozca el mismo lenguaje tiene al menos tantos estados como* M_{min}*. Es decir,*

$$\forall M', \left(\textit{Si } \mathcal{L}\left(M'\right) = \mathcal{L}\left(M_{min}\right) \textit{ entonces } \left|Q'\right| \geq \left|Q_{min}\right|\right)$$

Para demostrarlo usaremos el siguiente lema.

Lema

Sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *y* $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ *y* M *no posee estados inaccesibles.*

Si $|Q'| < |Q|$ *entonces existen dos cadenas* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ *tales que*

Teorema

Sea AFD $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *y sea* M_{min} *el autómata mínimo equivalente. Entonces, cualquier AFD* M' *que reconozca el mismo lenguaje tiene al menos tantos estados como* M_{min}*. Es decir,*

$$\forall M', \left(\text{Si } \mathcal{L}\left(M'\right) = \mathcal{L}\left(M_{min}\right) \text{ entonces } |Q'| \geq |Q_{min}|\right)$$

Para demostrarlo usaremos el siguiente lema.

Lema

Sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *y* $M' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ *y* M *no posee estados inaccesibles.*

Si $|Q'| < |Q|$ *entonces existen dos cadenas* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ *tales que*

$$\left(\widehat{\delta}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right).$$

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata M_{min},

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata M_{min}, $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F.$$

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \beta)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\,(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}\,(q_0', \beta)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \alpha)$ y $\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \beta)$ son distinguibles por pertenecer al autómata M_{min}, $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \alpha\gamma) \in F \wedge \widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \beta\gamma) \notin F.$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}\,(M_{min}) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin \mathcal{L}\,(M_{min})$.

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata M_{min}, $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F.$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}\left(M_{min}\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin \mathcal{L}\left(M_{min}\right)$.
Por otro lado, como $\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)$,

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata M_{min}, $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F.$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}\left(M_{min}\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin \mathcal{L}\left(M_{min}\right)$.
Por otro lado, como $\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)$,

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\gamma\right) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\right)$ y $\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\right)$ son distinguibles por pertenecer al autómata M_{min}, $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta_{min}}\left(q_0, \beta\gamma\right) \notin F.$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}\left(M_{min}\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin \mathcal{L}\left(M_{min}\right).$
Por otro lado, como $\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\right)$,

$$\widehat{\delta'}\left(q_0', \alpha\gamma\right) \in F \wedge \widehat{\delta'}\left(q_0', \beta\gamma\right) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}\left(M'\right) \Leftrightarrow \beta\gamma \in \mathcal{L}\left(M'\right).$

Demostración del Teorema.

Por el absurdo. Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_{min}|$.
Según el lema anterior existen dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\left(\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \beta)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\,(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}\,(q_0', \beta)\right),$$

Dado que $\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \alpha)$ y $\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \beta)$ son distinguibles por pertenecer al autómata M_{min}, $\exists \gamma \in \Sigma^*$

$$\widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \alpha\gamma) \in F \wedge \widehat{\delta_{min}}\,(q_0, \beta\gamma) \notin F.$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}\,(M_{min}) \Leftrightarrow \beta\gamma \notin \mathcal{L}\,(M_{min})$.
Por otro lado, como $\widehat{\delta'}\,(q_0', \alpha) = \widehat{\delta'}\,(q_0', \beta)$,

$$\widehat{\delta'}\,(q_0', \alpha\gamma) \in F \wedge \widehat{\delta'}\,(q_0', \beta\gamma) \in F, \text{ o ambos } \notin F,$$

Entonces, $\alpha\gamma \in \mathcal{L}\,(M') \Leftrightarrow \beta\gamma \in \mathcal{L}\,(M')$.
Por lo tanto $\mathcal{L}\,(M_{min}) \neq \mathcal{L}\,(M')$, lo que contradice la hipótesis $\mathcal{L}\,(M') = \mathcal{L}\,(M_{min})$. $\square$

El lema pendiente

Lema

Sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *y* $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' >$ *y* M *no posee estados inaccesibles.*

Si $|Q'| < |Q|$ *entonces existen dos cadenas* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ *tales que*

El lema pendiente

Lema

Sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ *y* $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' >$ *y* M *no posee estados inaccesibles.*

Si $|Q'| < |Q|$ *entonces existen dos cadenas* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ *tales que*

$$\left(\widehat{\delta}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, \beta\right)\right) \wedge \left(\widehat{\delta'}\left(q'_0, \alpha\right) = \widehat{\delta'}\left(q'_0, \beta\right)\right).$$

Demostración. Equivalentemente, sean AFDs $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ y $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' >$ y M no posee estados inaccesibles.
Supongamos que todo par de cadenas que conducen a estados diferentes en M conducen también a estados diferentes en M', es decir,

$$\forall \alpha, \beta \in \Sigma^* \left(\text{ Si } \widehat{\delta}\left(q_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta}\left(q_0, \beta\right) \text{ entonces } \widehat{\delta'}\left(q'_0, \alpha\right) \neq \widehat{\delta'}\left(q'_0, \beta\right)\right).$$

Entonces, la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M, es decir

$$|Q| \leq |Q'|.$$

Es suficiente definir una función inyectiva f de Q en Q'.

Es suficiente definir una función inyectiva f de Q en Q'.
Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min_{long-lex} \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q \right\}$$

($g(q)$ es el camino mínimo desde q_0 a q.)

Es suficiente definir una función inyectiva f de Q en Q'.
Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min_{long-lex} \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q \right\}$$

($g(q)$ es el camino mínimo desde q_0 a q.)

Sea $f : Q \to Q'$ mediante $f(q) = \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.
($f(q)$ es el estado al que llego en M' usando el camino mínimo en M.)

Es suficiente definir una función inyectiva f de Q en Q'.
Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min_{long-lex} \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q \right\}$$

($g(q)$ es el camino mínimo desde q_0 a q.)

Sea $f : Q \to Q'$ mediante $f(q) = \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.
($f(q)$ es el estado al que llego en M' usando el camino mínimo en M.)

Si $p, q \in Q$ son diferentes, $\widehat{\delta}(q_0, g(p)) \neq \widehat{\delta}(q_0, g(q))$.
Y, por hipotesis,
$\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \Big(\text{ Si } \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \text{ entonces } \widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, \beta) \Big).$

Es suficiente definir una función inyectiva f de Q en Q'.
Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min_{long-lex} \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q \right\}$$

($g(q)$ es el camino mínimo desde q_0 a q.)

Sea $f : Q \to Q'$ mediante $f(q) = \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.
($f(q)$ es el estado al que llego en M' usando el camino mínimo en M.)

Si $p, q \in Q$ son diferentes, $\widehat{\delta}(q_0, g(p)) \neq \widehat{\delta}(q_0, g(q))$.
Y, por hipotesis,
$\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \Big(\text{ Si } \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \text{ entonces } \widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, \beta) \Big)$.
Entonces, si p y q en Q son diferentes, $\widehat{\delta'}(q'_0, g(p)) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.

Es suficiente definir una función inyectiva f de Q en Q'.
Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min_{long-lex} \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q \right\}$$

($g(q)$ es el camino mínimo desde q_0 a q.)

Sea $f : Q \to Q'$ mediante $f(q) = \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.
($f(q)$ es el estado al que llego en M' usando el camino mínimo en M.)

Si $p, q \in Q$ son diferentes, $\widehat{\delta}(q_0, g(p)) \neq \widehat{\delta}(q_0, g(q))$.
Y, por hipotesis,
$\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \left(\text{ Si } \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \text{ entonces } \widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, \beta) \right)$.
Entonces, si p y q en Q son diferentes, $\widehat{\delta'}(q'_0, g(p)) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.
Usando la definición de f, tenemos $f(p) \neq f(q)$.

Es suficiente definir una función inyectiva f de Q en Q'.
Consideremos la función $g : Q \to \Sigma^*$ definida por

$$g(q) = \min_{long-lex} \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, \alpha) = q \right\}$$

($g(q)$ es el camino mínimo desde q_0 a q.)

Sea $f : Q \to Q'$ mediante $f(q) = \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.
($f(q)$ es el estado al que llego en M' usando el camino mínimo en M.)

Si $p, q \in Q$ son diferentes, $\widehat{\delta}(q_0, g(p)) \neq \widehat{\delta}(q_0, g(q))$.
Y, por hipotesis,
$\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \Big(\text{ Si } \widehat{\delta}(q_0, \alpha) \neq \widehat{\delta}(q_0, \beta) \text{ entonces } \widehat{\delta'}(q'_0, \alpha) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, \beta) \Big)$.
Entonces, si p y q en Q son diferentes, $\widehat{\delta'}(q'_0, g(p)) \neq \widehat{\delta'}(q'_0, g(q))$.
Usando la definición de f, tenemos $f(p) \neq f(q)$.
Concluímos $f : Q \to Q'$ es inyectiva, y por lo tanto $|Q| \leq |Q'|$.

Ejercicios

1. Dar un autómata AFD tal que $Q/\stackrel{2}{\equiv}$ sea distinto de $Q/\stackrel{3}{\equiv}$.

Ejercicios

1. Dar un autómata AFD tal que $Q/\overset{2}{\equiv}$ sea distinto de $Q/\overset{3}{\equiv}$.
2. Sea un AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Mostrar que para todo entero $k \geq 0$,

$$((Q/\overset{k}{\equiv}))/\overset{k}{\equiv}) \text{ es igual a } Q/\overset{k}{\equiv}.$$

Ejercicios

1. Dar un autómata AFD tal que $Q/\overset{2}{\equiv}$ sea distinto de $Q/\overset{3}{\equiv}$.
2. Sea un AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Mostrar que para todo entero $k \geq 0$,

$$((Q/\overset{k}{\equiv}))/\overset{k}{\equiv}) \text{ es igual a } Q/\overset{k}{\equiv}\ .$$

3. Consideremos el algoritmo de minimización de autómatas dado aquí y reemplacemos la instrucción $i = i + 1$ por la instrucción $i = i + 2$. ¿Terminará la ejecución del ciclo? En caso de que sí, ¿Con qué resultado?

Ejercicios

1. Dar un autómata AFD tal que $Q/\stackrel{2}{\equiv}$ sea distinto de $Q/\stackrel{3}{\equiv}$.
2. Sea un AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Mostrar que para todo entero $k \geq 0$,

$$((Q/\stackrel{k}{\equiv}))/\stackrel{k}{\equiv}) \text{ es igual a } Q/\stackrel{k}{\equiv}.$$

3. Consideremos el algoritmo de minimización de autómatas dado aquí y reemplacemos la instrucción $i = i + 1$ por la instrucción $i = i + 2$. ¿Terminará la ejecución del ciclo? En caso de que sí, ¿Con qué resultado?
4. Un transductor es un autómata con entrada y con salida (también llamado "Mealy machine"). Formalmente un transductor finito determinístico es una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \rho, q_0, F)$ donde Q, Σ, δ y q_0 son como en un DFA, Δ es el alfabeto de salida y ρ es la función que mapea $Q \times \Sigma$ en Δ.

   Es decir $\rho(q, a)$ es salida de la transición del estado q con entrada a.

   La salida de M con entrada $a_1 \dots a_n$ es $\rho(q_0, a_1)\rho(q_1, a_2) \dots \rho(q_{n-1}, a_n)$ donde q_0, $q_1 \dots q_{n-1}$ es la secuencia de estados tal que $\delta(q_{i-1}, a) = q_i$ para $i = 1, \dots, n$.

   ¿Cómo es el algoritmo de minimización para transductores?