Forma normal conjuntiva (FNC)

- Un Literal es una variable proposicional P o su negación $\neg P$
- Una proposición A está en FNC si es una conjunción

  $$C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$$

  donde cada C_i (llamado cláusula) es una disyunción

  $$B_{i1} \vee \ldots \vee B_{in_i}$$

  y cada B_{ij} es un literal
- Una FNC es una "conjunción de disyunciones de literales"

Forma clausal

- Es una forma normal conjuntiva, en notación de conjuntos.
- Análogo a la forma clausal del marco proposicional.
- Pero requiere tener en cuenta los cuantificadores.
- El pasaje a forma clausal consiste en seis pasos de conversión.
  1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación).
  2. Pasar a forma normal negada.
  3. Pasar a forma normal prenexa (opcional).
  4. Pasar a forma normal de Skolem.
  5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva.
  6. Distribuir cuantificadores universales.

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (FNN) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A, A y $\neg A$ están en FNN.
2. Si $A, B \in \mathrm{FNN}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \mathrm{FNN}$.
3. Si $A \in \mathrm{FNN}$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in \mathrm{FNN}$.

Ejemplos

- $\neg\exists x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \supset (\exists z.R(x,z) \vee P(a)))$ no está en FNN.
- $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \wedge (\forall z.\neg R(x,z) \wedge \neg P(a)))$ está en FNN.

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . B$, $n \geq 0$, donde

- B sin cuantificadores (llamada matriz)
- $x_1, \dots, x_n$ son variables
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Forma prenexa

Toda fórmula A es lógicamente equivalente a una fórmula B en forma prenexa.

Demostración

Por inducción estructural usando (las fórmulas se asumen rectificadas):

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
(\forall x.A) \wedge B & \iff & \forall x.(A \wedge B) & (\forall x.A) \vee B & \iff & \forall x.(A \vee B) \\
(A \wedge \forall x.B) & \iff & \forall x.(A \wedge B) & (A \vee \forall x.B) & \iff & \forall x.(A \vee B) \\
(\exists x.A) \wedge B & \iff & \exists x.(A \wedge B) & (\exists x.A) \vee B & \iff & \exists x.(A \vee B) \\
(A \wedge \exists x.B) & \iff & \exists x.(A \wedge B) & (A \vee \exists x.B) & \iff & \exists x.(A \vee B)
\end{array}
$$

- Nota: Con estas equivalencias basta, si asumimos que A está en FNN.

Ejemplo

1. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.Q(y) \vee \forall z.P(z))$
2. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.(Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
3. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
4. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge \forall z.(Q(y) \vee P(z)))$
5. $\exists y.\forall z.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$
6. $\exists y.\forall z.\forall x.(\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$

Forma normal de Skolem

- Hasta ahora tenemos una fórmula que:
  1. está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$,
  2. si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada),
  3. (opcionalmente) si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa).
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización.
- El objetivo de la skolemización es
  1. eliminar los cuantificadores existenciales
  2. sin alterar la satisfactibilidad.

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ¿Cómo eliminamos los $\exists$ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos.
  - Todo cuantificador existencial se instancia en una constante o función de skolem.
  - Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a $P(c)$ donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden.
  - Estas funciones y constantes se suelen conocer como parámetros.

Skolemización

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

donde

- $\bullet\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución (sustituir todas las ocurrencias libres de una variable en una expresión - fórmula o término - por otra expresión).
- Si $\exists x.B$ forma parte de una fórmula mayor, decimos que x depende de las variables libres de B, y sólo de ellas (por ejemplo, en $\forall z.\forall y.\exists x.P(y, x)$ la x depende de y).
- f es un símbolo de función nuevo y las $x_1, \ldots, x_n$ son las variables de las que depende x en B.

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x.\left(P(a) \vee \exists y.(Q(y) \wedge \forall z.(P(y,z) \vee \exists u.Q(x,u))) \right) \vee \exists w.Q(w)$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge \forall z.(P(g(x),z) \vee Q(x,f(x))))) \vee Q(c)$$

Ejemplos

- Considere la sentencia:

$$\forall x.\exists y.\exists z.R(x,y,z)$$

1. Alternativa 1 (rojo, azul)
   1.1 $\forall x.\exists y.\exists z.R(x,y,z)$
   1.2 $\forall x.\exists z.R(x,f(x),z)$
   1.3 $\forall x.R(x,f(x),g(x))$
2. Alternativa 2 (azul, rojo)
   2.1 $\forall x.\exists y.\exists z.R(x,y,z)$
   2.2 $\forall x.\exists y.R(x,y,h(x,y))$
   2.3 $\forall x.R(x,k(x),h(x,k(x)))$
3. La skolemización no es determinística.

- Es mejor skolemizar de afuera hacia adentro.

Forma clausal

$$\forall x_1 \dots \forall x_n . B$$

1. Pasar B a forma normal conjuntiva B' como si fuera una fórmula proposicional arrojando

$$\forall x_1 \dots \forall x_n . B'$$

2. Distribuir los cuantificadores sobre cada conjunción usando la fórmula válida $\forall x.(A \wedge B) \iff \forall x.A \wedge \forall x.B$ arrojando una conjunción de cláusulas

$$\forall x_1 \dots \forall x_n . C_1 \wedge \dots \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n . C_m$$

   donde cada C_i es una disyunción de literales

3. Se simplifica escribiendo $\{C_1, \dots, C_m\}$.

Ejemplo

$$\forall x.\forall z.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge (P(g(x), z) \vee Q(x, f(x))))) \vee Q(c)$$

1. Pasamos la matriz a forma normal conjuntiva
$$\forall x.\forall z.\big([P(a) \vee Q(g(x)) \vee Q(c)] \wedge [P(a) \vee P(g(x), z) \vee Q(x, f(x)) \vee Q(c)]\big)$$
2. Distribuimos los cuantificadores
$$\forall x.\forall z.\big[P(a) \vee Q(g(x)) \vee Q(c)\big] \wedge \forall x.\forall z.\big[P(a) \vee P(g(x), z) \vee Q(x, f(x)) \vee Q(c)]$$
3. Pasamos a notación de conjuntos
$$\Big\{\{P(a), Q(g(x)), Q(c)\}, \{P(a), P(g(x), z), Q(x, f(x)), Q(c)\}\Big\}$$

Ahora sí, la Regla de resolución

$$\frac{\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\} \quad \{\neg D_1, \ldots, \neg D_j, C_1, \ldots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B_1, \ldots, B_k, D_1, \ldots, D_j\}$.

- Asumimos que las cláusulas $\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \ldots, \neg D_j, C_1, \ldots, C_n\}$ no tienen variables en común; en caso contrario se renombran las variables.
- Observar que $\sigma(B_1) = \ldots = \sigma(B_k) = \sigma(D_1) = \ldots = \sigma(D_j)$.
- La cláusula $\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_n\})$ se llama resolvente (de $\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \ldots, \neg D_j, C_1, \ldots, C_n\}$).

Regla de resolución binaria

$$\frac{\{B, A_1, \ldots, A_m\} \quad \{\neg D, C_1, \ldots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B, D\}$.

- Es incompleta.
- Ejemplo: intentar refutar $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$

Regla de resolución binaria

- Se puede recuperar la completitud incorporando una regla adicional: factorización.

$$\frac{\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\}}{\sigma(\{B_1, A_1, \ldots, A_m\})}$$

  donde σ es el MGU de $\{B_1, \ldots, B_k\}$.

- En el ejemplo anterior
  1. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$
  2. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}\}$ (fact.)
  3. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}\}$ (fact.)
  4. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}, \square\}$ (resolución (binaria))