Utilización de listas y pares en funciones PRC

Rodrigo Castaño

14 de octubre de 2016

Ejercicio 1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$. Demostrar los siguientes puntos:*

a. Si Γ es un conjunto maximal consistente, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\alpha \in \Gamma$.

b. Γ es un conjunto maximal consistente sii sucede simultáneamente:

1. *Para toda α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg\alpha \in \Gamma$.*
2. *Todos los axiomas de SP están en Γ.*
3. *Γ está cerrado por MP, es decir: si $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$.*

Resolución. El item a fue resuelto en la clase teórica, pero lo enunciamos ya que lo usaremos en las demostraciones.

La idea de la demostración será ver ambas implicaciones por separado, es decir, por un lado que dado Γ, un conjunto maximal consistente, cada una de las propiedades se cumplen. Y por otro lado que, todo conjunto Γ que cumple las 3 propiedades, necesariamente es maximal consistente.

Empecemos con el primer caso.

$\Rightarrow$ $b1$

Si no se cumple que para toda α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg\alpha \in \Gamma$, luego puede pasar:

1. $\alpha \in \Gamma$ y $\neg\alpha \in \Gamma$ o
2. $\alpha \notin \Gamma$ y $\neg\alpha \notin \Gamma$

Supongamos que ocurre lo primero: Luego la siguiente es una derivación a partir de Γ:

1. α porque $\alpha \in \Gamma$

Y la siguiente también:

1. $\neg\alpha$ porque $\neg\alpha \in \Gamma$

luego $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Por lo tanto Γ es inconsistente, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, no puede ocurrir que $\alpha \in \Gamma$ y a la vez $\neg\alpha \in \Gamma$.

Supongamos entonces lo segundo:

Recordemos de la teórica (p. 170):

Lema 1. *(de la teórica)*

1. *$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente sii $\Gamma \vdash \varphi$*
2. *$\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente sii $\Gamma \vdash \neg\varphi$*

Luego, por ser Γ maximal consistente, $\alpha \notin \Gamma$ y $\neg\alpha \notin \Gamma$ se dan las siguientes condiciones:

1. $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente

2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente

Por Lema 1 y por condicion 1, $\Gamma \vdash \alpha$.
Y por Lema 1 y por condicion 2, $\Gamma \vdash \neg\alpha$.
Luego Γ es inconsistente, lo cual es un absurdo.
Por lo tanto, no puede ocurrir que $\alpha \notin \Gamma$ y $\neg\alpha \notin \Gamma$.
Habiendo agotado las opciones, se debe cumplir que, o bien $\alpha \in \Gamma$, o bien $\neg\alpha \in \Gamma$, pero no ambos.

$\Rightarrow$ $b2$

Tomemos α, una instanciación arbitraria de los axiomas de SP.
Por ser α un axioma, la siguiente es una derivación de α a partir de Γ de longitud 1.

1. α por ser axioma de SP

Luego $\Gamma \vdash \alpha$.
Por inciso a, $\alpha \in \Gamma$, que era lo que buscábamos demostrar.

$\Rightarrow$ $b3$

Dados α y β tales que $(\alpha \to \beta) \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$, la siguiente es una derivación de β a partir de Γ.

1. $(\alpha \to \beta)$ porque $(\alpha \to \beta) \in \Gamma$
2. α porque $\alpha \in \Gamma$
3. β por MP de 1 y 2

Luego $\Gamma \vdash \beta$.
Por inciso a, $\beta \in \Gamma$, que es lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$

Supongamos Γ no maximal consistente.
Esto ocurre sii Γ es no consistente o existe una fórmula $\varphi \notin \Gamma$ tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es consistente.
Supongamos lo primero: Γ no consistente. Luego, para alguna fórmula α, $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$.
Por definición de consecuencia sintáctica, existe una derivación $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de α donde $\alpha_i \in \Gamma$, o es un axioma de SP, o se obtiene a partir de MP de $1 \leq j, k < i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
$\Rightarrow$
Existe una derivación $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de α donde $\alpha_i \in \Gamma$, o se obtiene a partir de MP de $1 \leq j, k < i$ para todo $1 \leq i \leq n$, ya que si α_i es un axioma, también $\alpha_i \in \Gamma$, por b2.
$\Rightarrow$
Existe una derivación $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de α donde $\alpha_i \in \Gamma$, para todo $1 \leq i \leq n$, ya que si α_i se obtiene aplicando MP, también $\alpha_i \in \Gamma$, por b3
$\Rightarrow$
$\alpha \in \Gamma$, ya que $\alpha_n \in \Gamma$ y $\alpha_n = \alpha$, por ser $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una derivación de α.
El mismo razonamiento se aplica para $\neg\alpha$ y se concluye que $\neg\alpha \in \Gamma$.
Pero por b1, no puede pasar que $\alpha \in \Gamma$ y $\neg\alpha \in \Gamma$, por lo que llegamos a un absurdo.
Por lo tanto, no puede ser Γ inconsistente.
Supongamos ahora que Γ es consistente pero no maximal.
Luego, existe $\alpha \notin \Gamma$ tal que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente. Por Lema 1, $\Gamma \nvdash \neg\alpha$. Pero, por b1 y por $\alpha \notin \Gamma$, luego $\neg\alpha \in \Gamma$. Luego $\Gamma \vdash \neg\alpha$ (por la siguiente derivación a partir de Γ de longitud 1: $\neg\alpha$ por $\neg\alpha \in \Gamma$).

Por lo tanto, Γ debe ser maximal consistente.

$\square$