Lógica proposicional - P5

Natalia Rodríguez

Miércoles 17 de febrero de 2016

Ejercicio 1. Recordemos el sistema axiomático SP:

$$\begin{array}{ll}
\text{SP1}: & \vdash \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\text{SP2}: & \vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\text{SP3}: & \vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) \\
\text{MP}: & \vdash \alpha \text{ y } \vdash \alpha \to \beta \text{ entonces } \vdash \beta
\end{array}$$

a) Demostrar que toda instancia de SP1 es tautología.

b) Mostrar que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$. O sea, que a partir de $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\}$ hay una demostración de $\varphi \to \theta$.

Resolución. .
a) Tenemos que probar que todas las valuaciones hacen verdadera a todas las instancias de SP1. Supongamos que no es el caso. Entonces, deben existir α, β y v tal que $v \not\models \alpha \to (\beta \to \alpha)$. Luego,

$$\begin{array}{llll}
v \not\models \alpha \to (\beta \to \alpha) & \text{entonces} & v \models \alpha \text{ y } v \not\models \beta \to \alpha & \text{(por definición de } \models) \\
& \text{entonces} & v \models \alpha,\ v \models \beta \text{ y } v \not\models \alpha & \text{(por definición de } \models)
\end{array}$$

lo cuál es absurdo, al que arribamos por suponer que existía una instancia de SP1 no era una tautología.

b) Recordemos que una demostración de $\Gamma \vdash \varphi$ es una lista finita de fórmulas en la que cada una puede ser

- una instancia de un axioma, sustituyendo uniformemente cada fórmula por otra arbitraria
- un elemento de Γ
- el resultado de la aplicación de *modus ponens* de dos elementos anteriores

y además el último elemento en la lista es φ. Siguiendo este esquema, una posible demostración es

1. $(\psi \to \theta) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))$ (SP1: $\alpha \mapsto (\psi \to \theta), \beta \mapsto \varphi$)
2. $\psi \to \theta$ (del conjunto de hipótesis)
3. $(\varphi \to (\psi \to \theta))$ (MP: 1,2)
4. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$ (SP2: $\alpha \mapsto \varphi, \beta \mapsto \psi, \gamma \mapsto \theta$)
5. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$ (MP: 3,4)
6. $\varphi \to \psi$ (del conjunto de hipótesis)
7. $\varphi \to \theta$ (MP: 5,6)

Este tipo de demostraciones suelen ser muy engorrosas. Muchas veces no queda claro por dónde empezar ni resulta evidente cómo instanciar axiomas y aplicar *modus ponens*. Para sufrir (un poco) menos al realizarlas, recordemos el teorema de la deducción:

$$\text{Si } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ entonces } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Este teorema nos permite tomar algunos atajos. Si logramos demostrar ψ usando $\Gamma \cup \{\varphi\}$ como hipótesis, entonces también existe una demostración de $\varphi \to \psi$ usando sólo Γ como hipótesis. Demostremos nuevamente $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$, pero ahora usando el teorema. Con este propósito veamos primero que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta, \varphi\} \vdash \theta$.

1. $\psi \to \theta$ (del conjunto de hipótesis)
2. $\varphi \to \psi$ (del conjunto de hipótesis)
3. φ (del conjunto de hipótesis)
4. ψ (MP: 2,3)
5. θ (MP: 1,4)

Ahora, usando el teorema de la deducción podemos concluir que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$. □

Ejercicio 2. *Dados $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que Γ_i es satisfacible y $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. ¿$\Gamma^\infty = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ es satisfacible?*

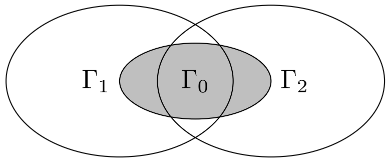
Resolución. Vamos a probar que todo subconjunto finito es satisfacible entonces por compacidad Γ^∞ será satisfacible. Tomemos un conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma^\infty$, como es finito y está incluido en Γ^∞ entonces existe un Γ_k que contiene a todo Δ. Este Γ_k es satisfacible y como $\Delta \subseteq \Gamma_k$ entonces Δ es satisfacible. Al haber tomado un Δ genérico probamos que todo subconjunto finito de Γ^∞ es satisfacible entonces por compacidad Γ^∞ es satisfacible. □

Ejercicio 3. *Sean Γ_1, Γ_2 satisfacibles, tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existe un φ tal que $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \models \neg\varphi$.*

Resolución. Sabemos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible, entonces por compacidad debe existir un $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ insatisfacible *finito*.

Observación 1. *Γ_0 no está completamente incluido en Γ_1 ni en Γ_2. Si así fuera entonces Γ_1 y Γ_2 serían insatisfacibles ya que contienen un conjunto insatisfacible.*

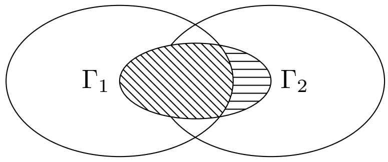
Entonces la relación entre los conjuntos debe ser la siguiente, Γ_0 tiene elementos tanto de Γ_1, Γ_2 inclusive algunos que no están en su intersección.



Podemos dividir a Γ_0 como

$$\Gamma_0 = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{\in \Gamma_1}, \underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_m}_{\in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1}\}$$

quedando en el siguiente diagrama los α_i como la parte rayada en diagonal y los β_j como la parte rayada horizontalmente.



Veamos primero que

$$\Gamma_1 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \tag{1}$$

Por un lado sabemos que Γ_1 es satisfacible, entonces existe una valuación v tal que $v \models \Gamma_1$. Como para todo $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \in \Gamma_1$ entonces para toda valuación v tal que $v \models \Gamma_1$ entonces $v \models \alpha_i$ y, por lo tanto, $v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$. En consecuencia, como toda valuación v que $v \models \Gamma_1$ es tal que $v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \Gamma_1 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$.
Veamos ahora que

$$\Gamma_2 \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \tag{2}$$

Por definición sabemos que si v es una valuación que satisface Γ_2 entonces $v \models \beta_j$ para todo $1 \leq j \leq m$ (ya que $\beta_j \in \Gamma_2$). Sabemos también que al menos existe una $v \models \Gamma_2$ porque Γ_2 es satisfacible. Sea v una valuación que cumple que $v \models \Gamma_2$ luego, como Γ_0 es insatisfacible, debe existir algún α_i tal que $v \not\models \alpha_i$ y, por lo tanto, $v \models \neg\alpha_i$. Luego $v \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$. En consecuencia, como toda valuación v que $v \models \Gamma_2$ es tal que $v \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \Gamma_2 \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$.
Podemos concluir entonces que

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \\ \Gamma_2 &\models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto si tomamos $\varphi = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ tenemos que $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \models \neg\varphi$ que era lo pedido. $\square$