Correctitud y Completitud

Lógica y Computabilidad

Notación 1. Sea $\mathcal{M}$ un modelo y v una valuación usaremos $\mathcal{M}, v \models \varphi$ en lugar de $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.

Ejercicio 1. Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario P y un símbolo de constante r. Sea la clase de modelos $\mathcal{A} = \{\mathcal{M} \mid P^{\mathcal{M}}$ define un árbol con raíz r sobre todos los elementos de $\mathcal{M}\}$, donde por árbol se entiende cualquier árbol dirigido donde cada nodo puede tener una cantidad arbitraria de hijos ($P(x,y)^{\mathcal{M}}$ afirma que $x^{\mathcal{M}}$ es el padre de $y^{\mathcal{M}}$). Considerar la axiomatización SQ_{Tree}, que extiende a la axiomatización SQ vista en clase de la siguiente manera

$$\begin{array}{rl} \textbf{SQ8} & (\forall x)\big(\neg P(x,r) \wedge \neg P(x,x)\big) \\ \textbf{SQ9} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y,x) \wedge P(z,x)) \to (y=z)\big) \\ \textbf{SQ10} & (\forall x)\big(((\forall y)\neg P(y,x)) \to x = r\big) \end{array}$$

Sabiendo que SQ es correcta y completa con respecto a la clase de todos los modelos

a) Demostrar que los axiomas $SQ8, SQ9$ y $SQ10$ son válidos en $\mathcal{A}$. Demostrar que SQ_{Tree} es correcta con respecto a $\mathcal{A}$.

b) Sea $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big)$. Demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

c) Demostrar que φ es válida en $\mathcal{A}$ y concluir que SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

Resolución (a). Para ver que los axiomas son válidos en la clase $\mathcal{A}$ primero interpretemos que significarían las fórmulas interpretadas en un modelo de la clase $\mathcal{A}$.

SQ8: Los nodos son irreflexivos y ningún nodo tiene a la raiz como hijo.
SQ9: Los nodos no comparten hijos.
SQ10: El único nodo sin padre es la raiz r.

Todas estas propiedades suenan razonables para un modelo de la clase, probemos formalmente que valen. Si probamos que para cualquier modelo de la clase y cualquier valuación, los axiomas son verdaderos entonces habremos probado que son válidos en la clase. Fijado un modelo arbitrario $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ y una valuación v, veamos axioma por axioma

SQ8. $\mathcal{M}, v \models (\forall x)\big(\neg P(x,r) \wedge \neg P(x,x)\big)$ si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \big(\neg P(x,r) \wedge \neg P(x,x)\big)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Y esto ocurre si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x,r) \ \text{ y } \ \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x,x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Siguiendo las definiciones semanticas, lo anterior sucede si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x,r) \ \text{ y } \ \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x,x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Finalmente llegamos a que debe suceder

$$(a, r^M) \notin P^M \ \text{ y } \ (a,a) \notin P^M \tag{1}$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Es **muy importante** llegar hasta esta instancia para luego poder justificar la validez de la fórmula. Al principio sólo tenemos una fórmula, y una fórmula es solamente una serie de símbolos. Recien en esta instancia tenemos una (o más) condición sobre una relación (que es un elemento matemático) y sabemos que esta relación se interpretara como dicta la definición de $\mathcal{A}$.

Ahora podemos decir que, en la clase $\mathcal{A}$, todo elemento es reflexivo asi que, en particular para un a cualquiera sucede que $(a, a) \notin P^M$. De igual manera justificamos que, al ser r la raiz, no puede tener padre, por lo tanto $(a, r^M) \notin P^M$. Concluimos que SQ8 es válido en la clase.

SQ9. En este caso saltearé algunos pasos en la demostración de validez, para los parciales es necesario que si saltean algunos pasos los justifiquen adecuadamente. En este punto veremos un ejemplo del tipo de cosas que pueden "saltearse con justificación adecuada". Siempre usen las definiciones de satisfacción hasta llegar a las condiciones sobre elementos del modelo para luego poder justificar su validez.

$$\mathcal{M}, v \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y,x) \wedge P(z,x)) \to (y = z)\big)$$

si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c] \models (P(y,x) \wedge P(z,x)) \to (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Para ahorrar espacio llamemos a una valuación $v' = v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$. La ultima fórmula equivale a

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \wedge P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \not\models P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$(b, a) \notin P^M \;\text{ o }\; P(c, a) \notin P^M \;\text{ o }\; (b, c) \in =^M \tag{2}$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Ahora que tenemos una condición sobre los elementos del modelo tenemos que probar que se cumple.

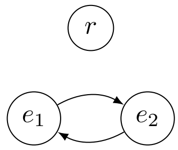
Como tengo 3 disyunciones, en lugar de ver que siempre se cumple alguna de las 3 voy a suponer que no se cumple ninguna y ver que eso no es posible. Eso quiere decir que tengo dos elementos distintos b, c tal que ambos tienen como hijo al elemento a. En un árbol eso no puede suceder. Absurdo.

SQ10. Este punto queda como ejercicio.

¿Qué probamos con esto? Probamos que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{A}$. También sabemos que MP preserva validez, ya que, si $\mathcal{A} \models \alpha \to \beta$, $\mathcal{A} \models \alpha$ entonces $\mathcal{A} \models \beta$.

Juntando estas dos cosas probamos que si $SQ_{\text{Tree}} \vdash \varphi$ entonces $\mathcal{A} \models \varphi$, o sea, que el sistema axiomático es *correcto* con respecto a la clase $\mathcal{A}$. □

Resolución (b). La fórmula $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big)$ indica que la relación es antisimétrica. Por lo tanto debemos concentrarnos en dar un modelo donde la relación no sea antisimétrica, de todas maneras no debemos perder de vista que queremos que cumpla con todos los axiomas. Este es el punto en el que debemos notar que "algo" le falta a la axiomatización. Nosotros pensamos en árboles antisimétricos pero evidentemente nuestros axiomas no lo están forzando. Consideremos el siguiente modelo



$\mathcal{M}$

Debemos mostrar que todos los axiomas son válidos en el modelo… ¿Debemos hacer **todo** ese trabajo infernal nuevamente? No. Gracias al análisis que ya hicimos sobre las fórmulas ya sabemos que condiciones imponen sobre el modelo y podemos partir directamente de ahí.

Veamos que SQ8 (1) vale en el modelo para cualquier a. No hay elementos reflexivos y tampoco hay elementos que tengan a r como hijo. Vale.

Veamos que SQ9 (2) vale en el modelo para cualquier a, b, c. No hay elementos con dos hijos. Vale (en los parciales deben justificar mucho más, por favor).

Veamos que SQ10 (ejercicio) vale en el modelo para cualquier a, b. Todos tienen padre menos r. Vale.

El paso siguiente es ver que φ no vale en el modelos. Queda como ejercicio ver que para la valuación donde $v(x) = e_1, v(y) = e_2$ la fórmula es falsa. $\square$

Resolución (c). Todo árbol es antisimétrico por lo tanto φ valdrá en todo modelo donde P sea interpretada como un árbol. En un caso real (parcial) deberíamos demostrar esta propiedad como hicimos en el punto (a).

¿Cómo podemos concluir lo que nos piden? Notemos que, como todos nuestros axiomas son válidos en el modelo $\mathcal{M}$ y modus ponens preserva validez, todo teorema de esta teoría será válido en $\mathcal{M}$. Escrito de otra manera, si $SQ_{\text{Tree}} \vdash \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi$. Este punto es **crucial**, si no queda claro por favor preguntá a los docentes.

También probamos que φ es válida en la clase, entonces nos gustaría que fuera un teorema de nuestra teoría pero, como $\mathcal{M} \not\models \varphi$, usando el contrarecíproco de la observación anterior llegamos a que $SQ_{\text{Tree}} \nvdash \varphi$.

Por lo tanto tenemos una fórmula φ (la de la antisimetría) tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ (es válida en la clase) y $SQ_{\text{Tree}} \nvdash \varphi$ (no es teorema). Concluimos que la teoría es incompleta respecto a $\mathcal{A}$. $\square$

No expresabilidad en primer orden*

Autor del apunte: Herman Schinca

Clase del 4 de noviembre de 2016

Definición. Decimos que una propiedad es expresable en primer orden si vale

$$\mathcal{M} \models \varphi \textit{ sii } \mathcal{M} \in K$$

donde K es la clase de modelos que cumplen dicha propiedad.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de predicado binario R. Decidir si es posible expresar en primer orden la propiedad que afirma que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todo elemento se relaciona a lo sumo con k elementos distintos.

Resolución. En primer lugar, supongamos que sí es posible y tratemos de escribir dicha fórmula. Que los elementos del dominio se relacionen con a lo sumo k elementos, para algún k, lo podemos expresar con una gran disyunción en donde cada disyunto expresa que todo elemento se relaciona con a lo sumo i elementos, es decir:

$$\psi_0 : \neg(\exists x)[(\exists y)R(x, y)]$$

$$\psi_1 : \neg(\exists x)[(\exists y, z)y \neq z \wedge R(x, y) \wedge R(x, z)]$$

$$\psi_2 : \neg(\exists x)[(\exists y, z, w)y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge \\ R(x, y) \wedge R(x, z) \wedge R(x, w)]$$

$$\dots$$

La fórmula que obtendríamos sería $\psi_0 \vee \psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots$ Pero, ¿es ésta una fórmula bien formada? ¿Qué me indican los 3 puntos suspensivos, que la fórmula continúa indefinidamente hasta el infinito? Recordemos que la cantidad de símbolos de una fórmula debe ser necesariamente finita. Sin embargo, al limitar la cantidad de ψ_i que podemos utilizar no estaríamos logrando capturar la propiedad pedida ya que existirán modelos en los cuales sus elementos se relacionen con una cantidad mayor de elementos que la indicada por todas las ψ_i de la fórmula. Por ejemplo, si fijáramos en 10 la cantidad de ψ_i de nuestra fórmula entonces estamos dejando fuera a todos los modelos en donde haya elementos del dominio que se relacionen con 11 o más elementos.

Esta primera aproximación nos debería dar la intuición de que quizás no es posible escribir una fórmula en primer orden que pueda describir esta propiedad que sí pudimos describir en *lenguaje natural*. Sin embargo, simplemente nos debe dar esa intuición. De ninguna manera lo anterior es una prueba formal acerca de la imposibilidad de escritura de dicha fórmula ya que sólo vimos que tratar de escribir la fórmula como una unión de muchas disyunciones no funcionaba pero podría ser que con otra estrategia sí se pudiera.

Una segunda intuición que debería estarnos abordando en este mismo instante es que la demostración tampoco podría encararse por el camino de "te muestro que probé con un montón

Este apunte fue hecho con mucho amor. Si encuentras algún error repórtalo a hschinca@dc.uba.ar de potenciales fórmulas y ninguna da. Luego, por inducción en la cantidad de esfuerzo, no es expresable".

La demostración, en cambio, la encararemos por el absurdo, es decir, supondremos que sí la podemos escribir en primer orden y luego de varias implicaciones lógicas llegaremos a una contradicción, la cual sólo pudo haber ocurrido por esta suposición inicial.

Esta clase de demostraciones de la *no expresabilidad* de una propiedad en primer orden se caracteriza por una estructura muy bien definida que consta de 5 pasos:

a) **Suponemos que sí es expresable**. Sea φ_α la fórmula de primer orden que describe la propiedad del enunciado.

b) El segundo paso es clave. Aquí es donde tenemos que apelar a nuestra creatividad y al entendimiento preciso de lo que está enunciando la propiedad. El objetivo es crear un conjunto de fórmulas tales que para poder satisfacer a todas a la vez, φ_α debe ser falsa. Resulta trivial ver que si φ_α no es expresable entonces tampoco podrá serlo su negación. Por este motivo **debemos definir infinitas fórmulas con las cuales vayamos negando incrementalmente a** φ_α. En nuestro caso podríamos definir:

φ_1 : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 1 elemento".
φ_2 : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 2 elementos".
φ_3 : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 3 elementos".
...

De este modo, y uniendo todas las fórmulas, no podemos dar un k fijo tal que satisfaga a todas las φ_i puesto que, en particular, no sería verdad para φ_{k+1}.

En primer orden, la definición de estas fórmulas quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\varphi_1 : (\exists x)(\exists y)R(x, y)$$

$$\varphi_2 : (\exists x)(\exists y, z)y \neq z \wedge R(x, y) \wedge R(x, z)$$

...

$$\begin{aligned}\varphi_i : &(\exists x)(\exists y_1, y_2, \dots, y_i)todosDistintos(y_1, \dots, y_i)\wedge\\ &R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \dots \wedge R(x, y_i)\end{aligned}$$

donde $todosDistintos(y_1, \dots, y_n) \equiv y_1 \neq y_2 \wedge \dots \wedge y_1 \neq y_n \wedge y_2 \neq y_3 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \neq y_n$.

Es importante notar el paralelismo existente entre las ψ_i del comienzo y estas φ_i que acabamos de definir puesto que unas son exactamente la negación de las otras.

c) Definimos el siguiente conjunto $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\varphi_\alpha\}$.

d) Vamos a mostrar que el conjunto Γ es tanto satisfacible como insatisfacible para llegar al absurdo prometido.

d.1) Queremos ver que Γ es insatisfacible.

Suponemos que es satisfacible, entonces $\exists\ \mathcal{M}, v\ /\ \mathcal{M} \models \Gamma[v]$. Luego, φ_α es vedadera en el modelo $\mathcal{M}$ y la valuación v pues $\varphi_\alpha \in \Gamma$. De aquí se desprende que existe $k \in \mathbb{N}$ fijo tal que todo elemento de $\mathcal{M}$ se relaciona a lo sumo con k elementos distintos de $\mathcal{M}$.

Por otro lado, como $\mathcal{M} \models \Gamma[v]$, entonces φ_{k+1} es verdadera en $\mathcal{M}, v$. Por definición de φ_{k+1}, existe un elemento en $\mathcal{M}$ tal que se relaciona con al menos $k+1$ elementos distintos, lo que representa un **absurdo** puesto que habíamos dicho que todos los elementos de $\mathcal{M}$ se relacionaban con a lo sumo k elementos. Por ende, Γ **es insatisfacible**.

d.2) Queremos ver que Γ es satisfacible.

Por compacidad vale que si todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito es satisfacible entonces Γ también lo es.

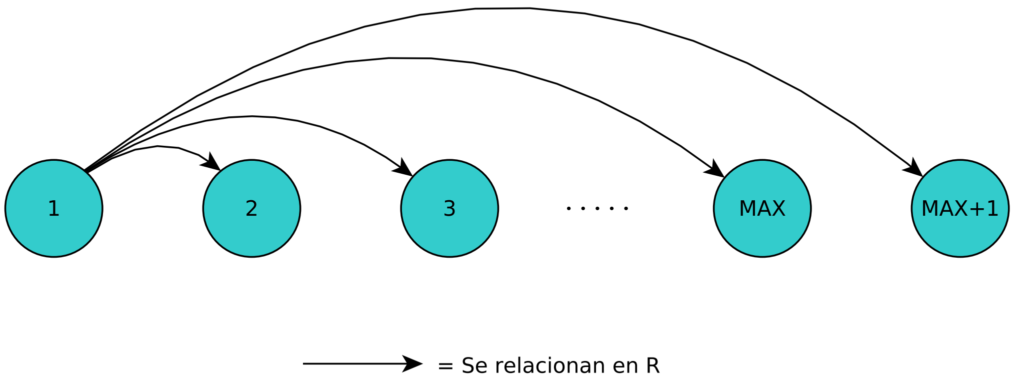
Tomemos $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finito y mostremos que dicho conjunto es satisfacible.

Como Γ_1 es finito contiene una cantidad finita de φ_i (en particular, puede que no contenga ninguna φ_i). Lo que tenemos que ver es que existe un modelo $\mathcal{M}$ y una valuación v que hacen verdaderas a todas las fórmulas de Γ_1.

Tomemos $MAX = max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_1\} \bigcup \{1\})$. La unión con el conjunto que sólo tiene al 1 se debe a que el primer conjunto podría ser vacío y queremos darle un valor a MAX.

Sólo resta construir el modelo $\mathcal{M}$ y ver que se satisfacen todas las fórmulas de Γ_1.

Sea $\mathcal{M}$:



En primer lugar, notar que el valor de verdad de ninguna de nuestras φ_i depende de la valuación v puesto que se tratan de sentencias, es decir, fórmulas con todas sus variables ligadas. Instanciando x en el elemento 1 se satisfacen todas las φ_i en Γ_1 pues se relaciona con, al menos, MAX elementos. También se satisface φ_α, en caso de que estuviera en Γ_1, pues todo elemento de $\mathcal{M}$ se relaciona con a lo sumo MAX elementos. Por ende, Γ_1 es satisfacible.

Como no dimos ninguna condición acerca de Γ_1 entonces se concluye que, por compacidad, Γ **es satisfacible**.

e) Como probamos que Γ es insatisfacible por (d.1) y, a la vez, satisfacible por (d.2) entonces llegamos a un absurdo, que provino de suponer que φ_α era expresable en primer orden.

$\square$

Ejercicio 2. Considerar un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con igualdad y un símbolo de predicado binario $\lhd$. Demostrar que no es posible expresar en primer orden la proposición que afirma: "para todo par de elementos x e y, si $x \lhd y$, entonces hay una cantidad finita de elementos x_i que cumplen que $x_i \lhd y$ y $x \lhd x_i$".

Resolución. Utilizaremos el mismo esquema de demostración que en el ejercicio anterior.

a) **Suponemos que la propiedad es expresable por una fórmula** en primer orden. Sea φ_β dicha fórmula.

b) Definimos una serie de fórmulas que intenten contradecir incrementalmente a φ_β:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 : (\exists x, y) x \lhd y \\
&\varphi_1 : (\exists x, y)(\exists z) x \lhd y \wedge x \lhd z \wedge z \lhd y \\
&\dots \\
&\varphi_i : (\exists x, y)(\exists z_1, z_2, \dots, z_i) todosDistintos(z_1, \dots, z_i) \wedge \\
&\qquad x \lhd y \wedge x \lhd z_1 \wedge \dots \wedge x \lhd z_i \wedge z_1 \lhd y \wedge \dots \wedge z_i \lhd y
\end{aligned}$$

c) Sea $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}_0\} \bigcup \{\varphi_\beta\}$.

d) Ahora debemos mostrar que Γ es tanto satisfacible como insatisfacible.

d.1) Veamos que Γ es insatisfacible. Pero... ¿Lo es? Si tomamos $\mathcal{M}$ la interpretación usual de los enteros interpretando a $\lhd$ como $<_\mathbb{Z}$ entonces $\mathcal{M}$ satisface a φ_β pues es cierto que entre todo par de enteros x, y hay una cantidad finita de elementos menores que y y no menores que x. También satisface a todas las φ_i ya que para cualquier i podemos encontrar un par de enteros x, y entre los cuales haya i elementos menores que y y no menores que x. El problema estuvo en que no definimos de manera adecuada las fórmulas φ_i. La estrategia debería haber sido utilizar 2 variables libres x, y para de este modo predicar siempre sobre el mismo par y que, incrementalmente, existan cada vez más elementos entre ese par fijo de elementos x e y.

Por lo tanto, acabamos de comprobar que la parte crítica de la demostración reside en definir correctamente las infinitas fórmulas en el segundo punto del esquema.

Retomemos entonces desde allí:

b)

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x, y) : x \lhd y \\
&\varphi_1(x, y) : (\exists z) x \lhd y \wedge x \lhd z \wedge z \lhd y \\
&\qquad \dots \\
&\varphi_i(x, y) : (\exists z_1, z_2, \dots, z_i) todosDistintos(z_1, \dots, z_i) \wedge \\
&\qquad\qquad x \lhd y \wedge x \lhd z_1 \wedge \dots \wedge x \lhd z_i \wedge z_1 \lhd y \wedge \dots \wedge z_i \lhd y
\end{aligned}$$

c) Sea $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}_0\} \bigcup \{\varphi_\beta\}$.

d) Ahora debemos mostrar que Γ es tanto satisfacible como insatisfacible.

d.1) Probaremos que Γ es insatisfacible.

Suponemos que es satisfacible. Luego, hay un modelo y una valuación que hacen verdaderas a todas las fórmulas de Γ, es decir:

$$\exists\ \mathcal{M}, v \ / \ \mathcal{M} \models \Gamma[v]$$

En particular, φ_β es verdadera en dicho modelo y dicha valuación por lo que para todo par de elementos existe una cantidad finita de elementos entre ambos (según la relación $\lhd$). Por otro lado, las φ_i nos dicen que hay un par de elementos del dominio para los cuales no existe una cantidad acotada de elementos entre ellos. Este razonamiento se desprende por cómo construimos las fórmulas en (b). Utilizamos dos variables libres para poder luego instanciarlas en un valor particular del dominio. Sin pérdida de generalidad digamos que instanciamos x en 1 e y en 2. Luego, las φ_i nos dicen que:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(1,2) : \text{“entre 1 y 2 hay al menos 0 elementos que se relacionan según } \lhd\text{”}.\\
&\varphi_1(1,2) : \text{“entre 1 y 2 hay al menos 1 elemento que se relacionan según } \lhd\text{”}.\\
&\qquad \dots\\
&\varphi_i(1,2) : \text{“entre 1 y 2 hay al menos } i \text{ elementos que se relacionan según } \lhd\text{”}.\\
&\qquad \dots
\end{aligned}$$

De esta manera, para el par $(1,2)$ llegamos a una contradicción: existen a la vez una cantidad finita e infinita de elementos entre ellos. Por lo tanto, Γ **es insatisfacible**.

d.2) Queremos ver que Γ es satisfacible.

Apelando a compacidad, basta con ver que todo subconjunto finito incluido en Γ lo es. Sea $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finito y veamos que existe un modelo y una valuación que hacen verdaderas a todas las fórmulas en Γ_1, es decir:

$$\exists\ \mathcal{M}, v\ /\ \mathcal{M} \models \Gamma_1[v]$$

Tomamos $MAX = max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_1\} \bigcup \{1\})$, al igual que en el ejercicio anterior.

En este caso, nos basta con tomar el modelo usual de los enteros interpretando a $\lhd$ como $<_{\mathbb{Z}}$. En él vale que para todo par de elementos hay una cantidad finita de elementos entre ellos por lo que satisfaceríamos φ_β. Si la valuación v instancia a x e y en 1 y $MAX + 1$ respectivamente, entonces es cierto que entre esos dos números hay al menos MAX elementos, por lo que satisfaceríamos a cada una de las φ_i. Notar que aquí sí fue importante la valuación que utilizamos ya que necesitamos que entre x e y hubiera al menos MAX elementos. Luego, satisfacimos a todas las fórmulas en Γ_1 sin dar ninguna condición sobre este conjunto. Luego, por compacidad, Γ **es satisfacible**.

e) Como probamos que Γ es insatisfacible por (d.1) y, a la vez, satisfacible por (d.2) entonces llegamos a un absurdo, que provino de suponer que φ_β era expresable en primer orden.

□

Lógica proposicional - P5

Natalia Rodríguez

Miércoles 17 de febrero de 2016

Ejercicio 1. Recordemos el sistema axiomático SP:

$$
\begin{array}{ll}
\text{SP1}: & \vdash \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\text{SP2}: & \vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\text{SP3}: & \vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) \\
\text{MP}: & \vdash \alpha \text{ y } \vdash \alpha \to \beta \text{ entonces } \vdash \beta
\end{array}
$$

a) Demostrar que toda instancia de SP1 es tautología.

b) Mostrar que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$. O sea, que a partir de $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\}$ hay una demostración de $\varphi \to \theta$.

Resolución. .
a) Tenemos que probar que todas las valuaciones hacen verdadera a todas las instancias de SP1. Supongamos que no es el caso. Entonces, deben existir α, β y v tal que $v \not\models \alpha \to (\beta \to \alpha)$. Luego,

$$
\begin{array}{llll}
v \not\models \alpha \to (\beta \to \alpha) & \text{entonces} & v \models \alpha \text{ y } v \not\models \beta \to \alpha & (\text{por definición de } \models) \\
& \text{entonces} & v \models \alpha,\ v \models \beta \text{ y } v \not\models \alpha & (\text{por definición de } \models)
\end{array}
$$

lo cuál es absurdo, al que arribamos por suponer que existía una instancia de SP1 no era una tautología.

b) Recordemos que una demostración de $\Gamma \vdash \varphi$ es una lista finita de fórmulas en la que cada una puede ser

- una instancia de un axioma, sustituyendo uniformemente cada fórmula por otra arbitraria
- un elemento de Γ
- el resultado de la aplicación de *modus ponens* de dos elementos anteriores

y además el último elemento en la lista es φ. Siguiendo este esquema, una posible demostración es

1. $(\psi \to \theta) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))$ (SP1: $\alpha \mapsto (\psi \to \theta), \beta \mapsto \varphi$)
2. $\psi \to \theta$ (del conjunto de hipótesis)
3. $(\varphi \to (\psi \to \theta))$ (MP: 1,2)
4. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$ (SP2: $\alpha \mapsto \varphi, \beta \mapsto \psi, \gamma \mapsto \theta$)
5. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$ (MP: 3,4)
6. $\varphi \to \psi$ (del conjunto de hipótesis)
7. $\varphi \to \theta$ (MP: 5,6)

Este tipo de demostraciones suelen ser muy engorrosas. Muchas veces no queda claro por dónde empezar ni resulta evidente cómo instanciar axiomas y aplicar *modus ponens*. Para sufrir (un poco) menos al realizarlas, recordemos el teorema de la deducción:

$$\text{Si } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ entonces } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Este teorema nos permite tomar algunos atajos. Si logramos demostrar ψ usando $\Gamma \cup \{\varphi\}$ como hipótesis, entonces también existe una demostración de $\varphi \to \psi$ usando sólo Γ como hipótesis. Demostremos nuevamente $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$, pero ahora usando el teorema. Con este propósito veamos primero que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta, \varphi\} \vdash \theta$.

1. $\psi \to \theta$ (del conjunto de hipótesis)
2. $\varphi \to \psi$ (del conjunto de hipótesis)
3. φ (del conjunto de hipótesis)
4. ψ (MP: 2,3)
5. θ (MP: 1,4)

Ahora, usando el teorema de la deducción podemos concluir que $\{\varphi \to \psi, \psi \to \theta\} \vdash \varphi \to \theta$.

□

Ejercicio 2. *Dados $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que Γ_i es satisfacible y $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. ¿$\Gamma^\infty = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ es satisfacible?*

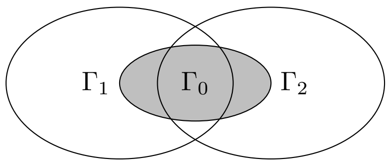
Resolución. Vamos a probar que todo subconjunto finito es satisfacible entonces por compacidad Γ^∞ será satisfacible. Tomemos un conjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma^\infty$, como es finito y está incluido en Γ^∞ entonces existe un Γ_k que contiene a todo Δ. Este Γ_k es satisfacible y como $\Delta \subseteq \Gamma_k$ entonces Δ es satisfacible. Al haber tomado un Δ genérico probamos que todo subconjunto finito de Γ^∞ es satisfacible entonces por compacidad Γ^∞ es satisfacible. □

Ejercicio 3. *Sean Γ_1, Γ_2 satisfacibles, tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existe un φ tal que $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \models \neg\varphi$.*

Resolución. Sabemos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible, entonces por compacidad debe existir un $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ insatisfacible *finito*.

Observación 1. *Γ_0 no está completamente incluido en Γ_1 ni en Γ_2. Si así fuera entonces Γ_1 y Γ_2 serían insatisfacibles ya que contienen un conjunto insatisfacible.*

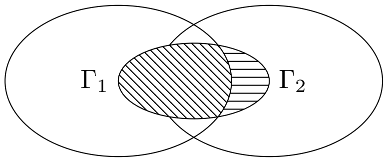
Entonces la relación entre los conjuntos debe ser la siguiente, Γ_0 tiene elementos tanto de Γ_1, Γ_2 inclusive algunos que no están en su intersección.



Podemos dividir a Γ_0 como

$$\Gamma_0 = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{\in \Gamma_1}, \underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_m}_{\in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1}\}$$

quedando en el siguiente diagrama los α_i como la parte rayada en diagonal y los β_j como la parte rayada horizontalmente.



Veamos primero que

$$\Gamma_1 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \tag{1}$$

Por un lado sabemos que Γ_1 es satisfacible, entonces existe una valuación v tal que $v \models \Gamma_1$. Como para todo $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \in \Gamma_1$ entonces para toda valuación v tal que $v \models \Gamma_1$ entonces $v \models \alpha_i$ y, por lo tanto, $v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$. En consecuencia, como toda valuación v que $v \models \Gamma_1$ es tal que $v \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \Gamma_1 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$.
Veamos ahora que

$$\Gamma_2 \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \tag{2}$$

Por definición sabemos que si v es una valuación que satisface Γ_2 entonces $v \models \beta_j$ para todo $1 \leq j \leq m$ (ya que $\beta_j \in \Gamma_2$). Sabemos también que al menos existe una $v \models \Gamma_2$ porque Γ_2 es satisfacible. Sea v una valuación que cumple que $v \models \Gamma_2$ luego, como Γ_0 es insatisfacible, debe existir algún α_i tal que $v \not\models \alpha_i$ y, por lo tanto, $v \models \neg\alpha_i$. Luego $v \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$. En consecuencia, como toda valuación v que $v \models \Gamma_2$ es tal que $v \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \Gamma_2 \models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$.
Podemos concluir entonces que

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \\ \Gamma_2 &\models \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto si tomamos $\varphi = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ tenemos que $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \models \neg\varphi$ que era lo pedido. $\square$

Práctica 5 - Sistemas deductivos para lógica proposicional y aplicaciones de compacidad -

---

Salvo que se indique lo contrario, *no* asumir que SP es correcto ni completo.

Ejercicio 1. Considerar la axiomatización SP para la lógica proposicional dada en la teórica. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas

a. $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$
b. $\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Sugerencia: recordar que en SP vale el teorema de la deducción.

Ejercicio 2.

a. Demostrar que (toda instanciación de) SP3 es una tautología.
b. Demostrar que si las premisas de la regla MP son tautologías, el resultado es una tautología.
c. Suponiendo además que (todas las instanciaciones de) SP1 y SP2 también son tautologías, demostrar que SP es correcto.

Ejercicio 3. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \to\}$. Demostrar que Γ es inconsistente (i.e. existe β tal que $\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$) sii $\Gamma \vdash \alpha$ para todo α.

Ejercicio 4. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \to\}$. Demostrar los siguientes puntos:

a. Si Γ es un conjunto maximal consistente, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\alpha \in \Gamma$.

b. Γ es un conjunto maximal consistente sii sucede simultáneamente:

1. Para toda α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg\alpha \in \Gamma$.
2. Todos los axiomas de SP están en Γ.
3. Γ está cerrado por MP, es decir: si $(\alpha \to \beta) \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$.

c. Si Γ es maximal consistente y $(\neg\alpha \to \beta) \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ ó $\beta \in \Gamma$.

Ejercicio 5. Recordemos el procedimiento de Lindenbaum para obtener un conjunto maximal consistente a partir de un conjunto consistente Γ.

1) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

2) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma_0 & = & \Gamma \\
\Gamma_{n+1} & = & \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\Gamma^+ & = & \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n
\end{array}
$$

Demostrar los siguientes puntos:

a. Cada Γ_i es consistente.
b. Exactamente una de las fórmulas α y $\neg\alpha$ está en Γ^+ para cada fórmula α.
c. Todos los teoremas están en Γ^+.
d. Γ^+ es un conjunto maximal consistente.

Ejercicio 6. Demostrar que las siguientes definiciones de compacidad son equivalentes:

a. Si $\Gamma \models \alpha$ entonces para algún subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \models \alpha$.

b. Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

c. Si Γ es insatisfacible, entonces algún subconjunto finito de Γ es insatisfacible.

En los siguientes ejercicios se puede asumir que SP es correcto y completo.

Ejercicio 7. Sea α una fórmula que no es una tautología, y sea Γ el conjunto de todas las instanciaciones de α (por instancia de α nos referimos a reemplazar uniformemente las variables proposicionales de α por fórmulas arbitrarias). Demostrar que Γ es inconsistente.

Ejercicio 8. Sea β una fórmula fija y Γ un conjunto consistente, mostrar que si $\Gamma \nvdash \beta$ y $\Gamma \nvdash \neg\beta$, entonces existen Γ_1 y Γ_2 maximales consistentes, tales que $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$, y $\Gamma_1 \vdash \beta$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\beta$.

Ejercicio 9. Demostrar que si Γ es un conjunto maximal consistente entonces $\Gamma = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 10. Dados $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que Γ_i es satisfacible y $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. ¿Es $\Gamma^\infty = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ satisfacible?

Ejercicio 11. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existen fórmulas $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ tales que $\alpha \to \neg\beta$ es una tautología. *Sugerencia*: usar el Teorema de Compacidad.

Ejercicio 12. Sea Γ un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas α, β se cumple que $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$. Probar que Γ es satisfacible.

Ejercicio 13. * Sea Γ un conjunto de fórmulas tal que cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ. Probar que existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

Ejercicio 14. Sea Γ un conjunto de fórmulas que verifica la siguiente propiedad: si $\alpha, \beta \in \Gamma$, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología ó $\beta \to \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe $\delta \in \Gamma$ tal que $\{\delta\} \models \gamma$.

Ejercicio 15. Sean Γ_1, Γ_2 satisfacibles, tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existe un α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.

Ejercicio 16. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera ó falsa y justificar: Si Γ_1 y Γ_2 son consistentes, entonces o bien a partir de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ se demuestra una contradicción o bien existe Δ maximal consistente tal que $\Gamma_1 \subseteq \Delta$ y $\Gamma_2 \subseteq \Delta$.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.