Subtipado

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

14 de Noviembre de 2017

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \mathrm{Nat}\} \; . \; r.x) \; \{x = 1, y = 2\}$$

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \mathrm{Nat}\} \ . \ r.x) \ \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \mathrm{Nat} \ \ . \ ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \mathrm{Nat}\} \ . \ r.x) \ \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \mathrm{Nat} \ . \ ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?
y si lo hago con un Float, ¿funcionará?

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \ . \ r.x) \ \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} \ . \ ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?
y si lo hago con un Float, ¿funcionará? ¿siempre?

Sustitutividad

La relación de subtipado

$$S <: T$$

- Cualquier término de tipo S puede ser usado en forma segura en un contexto en el cual un término de tipo T es esperado

Sustitutividad

La relación de subtipado

$$S <: T$$

- Cualquier término de tipo S puede ser usado en forma segura en un contexto en el cual un término de tipo T es esperado

Principio de Sustitutividad

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} \; (\text{T-S}\textsc{ub})$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}}\ (\text{S-}\textsc{BoolNat}) \qquad \frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}}\ (\text{S-}\textsc{NatInt})$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}}\ (\text{S-}\textsc{IntFloat}) \qquad \frac{}{\sigma <: \text{Top}}\ (\text{S-}\textsc{Top})$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma}\ (\text{S-}\textsc{Refl}) \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho}\ (\text{S-}\textsc{Trans})$$

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool}$ reemplazable por un par $\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}$?
- ¿Es un par de $\mathrm{Nat} \times \mathrm{Bool}$ reemplazable por un par $\mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool}$?

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool}$ reemplazable por un par $\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}$?
- ¿Es un par de $\mathrm{Nat} \times \mathrm{Bool}$ reemplazable por un par $\mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool}$?

$$\frac{\sigma <: \tau \qquad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2} \text{(S-PAIR)}$$

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool}$ reemplazable por un par $\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}$?
- ¿Es un par de $\mathrm{Nat} \times \mathrm{Bool}$ reemplazable por un par $\mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool}$?

$$\frac{\sigma <: \tau \qquad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2} \text{(S-}\textsc{Pair}\text{)}$$

- Probar el siguiente juicio (¿quién es σ?)

$$\{y \ : \ \mathrm{Bool}\} \triangleright (\lambda p : \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat} \ . \ succ(\pi_1(p))) \ (y, y) \ : \ \sigma$$

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo una función es reemplazable por otra?

$$\frac{\sigma' \ ? \ \sigma \qquad \tau' \ ? \ \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \ (\textsc{S-Arrow})$$

Ejercicio 1

¿Cuál de estas dos expresiones es tipable? ¿Qué tipo tiene?

$$(\lambda f : \text{Nat} \to \text{Nat} \,.\; f\ 3) \quad (\lambda x : \text{Float} \,.\; \text{true})$$
$$(\lambda f : \text{Nat} \to \text{Nat} \,.\; f\ 3) \quad (\lambda b : \text{Bool} \,.\; 0,5)$$

Suponemos

$$\frac{}{\Gamma \triangleright 3 : \text{Nat}}\ (\text{T-}\textsc{Three}) \qquad \frac{}{\Gamma \triangleright 0,5 : \text{Float}}\ (\text{T-}\textsc{Half})$$

Reglas de subtipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{(T-Sub)}$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \text{(S-BoolNat)} \qquad \frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}} \text{(S-NatInt)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \text{(S-IntFloat)} \qquad \frac{}{\sigma <: \text{Top}} \text{(S-Top)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \text{(S-Refl)} \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} \text{(S-Trans)}$$

$$\frac{\sigma <: \sigma' \qquad \tau' <: \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(S-Arrow)}$$

$$\frac{\{l_i | 1 \leq i \leq n\} \subseteq \{k_j | 1 \leq j \leq m\} \qquad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\{k_j : \sigma_j | 1 \leq j \leq m\} <: \{l_i : \tau_i | 1 \leq i \leq n\}} \text{(S-RCD)}$$

¿Cómo extender λ-cálculo desde el subtipado?

Ejercicio 2 (tipo parcial)

1. Expresar con reglas de subtipado que el tipo de la *currificación* de una función es equivalente al tipo de dicha función. Es decir, cualquier función *currificada* mantiene el mismo tipo que la misma sin *currificar* y viceversa.
2. Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente término tiene tipo $\mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat}$.

$$(\lambda y : \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\, .\ \pi_1(y))\ 0$$

Una ejercitación mas completa sobre la currificación puede encontrarse en el ejercicio 9 de la práctica del tema.

¿Cómo extender λ-cálculo desde el subtipado?

Ejercicio 2 (tipo parcial)

1.
$$\frac{}{\sigma \times \tau \to \rho <: \sigma \to \tau \to \rho}\ (\textsc{S-Curry})$$

$$\frac{}{\sigma \to \tau \to \rho <: \sigma \times \tau \to \rho}\ (\textsc{S-Uncurry})$$

2. Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente término tiene tipo $\mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat}$.

$$(\lambda y : \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\, .\ \pi_1(y))\ 0$$

Una ejercitación mas completa sobre la currificación puede encontrarse en el ejercicio 9 de la práctica del tema.

Ejercicio II: Solución

$$
\dfrac{\dfrac{\textit{sigue en la próxima slide}}{\emptyset \triangleright (\lambda y{:}\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\ .\ \pi_1(y)){:}\mathrm{Nat}{\to}(\mathrm{Nat}{\to}\mathrm{Nat})}\,(\text{T-}\textsc{Sub}) \qquad \dfrac{}{\emptyset \triangleright 0{:}\mathrm{Nat}}\,(\text{T-}\textsc{Zero})}{\emptyset \triangleright (\lambda y{:}\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\ .\ \pi_1(y))\ 0{:}\mathrm{Nat}{\to}\mathrm{Nat}}\,(\text{T-}\textsc{App})
$$

Ejercicio II: Solución

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{\{y{:}\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\} \rhd (\pi_1(y)){:}\mathrm{Nat}}\ (\textsc{T-proy})
  }{
    \emptyset \rhd (\lambda y{:}\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\ .\ \pi_1(y)){:}\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat}
  }\ (\textsc{T-Abs})
  \qquad
  \dfrac{}{\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat} <: \mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat}}\ (\textsc{S-Curry})
}{
  \emptyset \rhd (\lambda y{:}\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\ .\ \pi_1(y)){:}\mathrm{Nat} \to (\mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat})
}\ (\textsc{T-Sub})
$$

Ejercicio III

Supongamos que agregamos al lenguaje el tipo *Comp*$_\sigma$, para representar *comparadores* de términos de tipo σ. Los comparadores tienen la operación mejorSegún, que indica si el primer término es mejor que el segundo.

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \mathit{Comp}_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{mejorSegún}(M, N, O) : \text{Bool}} \text{ (T-Comp)}$$

a) El siguente término:

$$\lambda c\colon \mathit{Comp}_{\{x:\text{Int}\}}.\text{mejorSegún}(c, \{x = 1, y = 2\}, \{x = 0\})$$

¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad? ¿Lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright \{x = 1, y = 2\} : \{x : \text{Int}, y : \text{Int}\} \qquad \Gamma \triangleright \{x = 0\} : \{x : \text{Int}\}$$

Ejercicio III

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \textit{Comp}_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{mejorSegún}(M, N, O) : \text{Bool}} \text{(T-Comp)}$$

b) Dar la o las reglas de subtipado para comparadores.

c) El siguiente término:

$$\lambda c\colon \textit{Comp}_{\text{Float}}.(\lambda x\colon \textit{Comp}_{\text{Nat}}.\text{mejorSegún}(x, 3, 4))\ c$$

¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad? ¿Según las reglas dadas, lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright 3 : \text{Nat} \qquad \Gamma \triangleright 4 : \text{Nat}$$

Reglas de subtipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{(T-Sub)}$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \text{(S-BoolNat)} \qquad \frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}} \text{(S-NatInt)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \text{(S-IntFloat)} \qquad \frac{}{\sigma <: \text{Top}} \text{(S-Top)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \text{(S-Refl)} \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} \text{(S-Trans)}$$

$$\frac{\sigma <: \sigma' \qquad \tau' <: \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(S-Arrow)}$$

$$\frac{\{l_i | 1 \leq i \leq n\} \subseteq \{k_j | 1 \leq j \leq m\} \qquad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\{k_j : \sigma_j | 1 \leq j \leq m\} <: \{l_i : \tau_i | 1 \leq i \leq n\}} \text{(S-RCD)}$$

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿Preguntas? ? ? ? ? ? ?