Primer Orden

Interpretaciones y distinguibilidad

Herman Schinca

18 de Febrero, 2016

Un repasito

¿Qué es un lenguaje de Primer Orden?

Un repasito

- símbolos lógicos y auxiliares: $x \quad ' \quad \forall \quad \neg \quad \rightarrow \quad (\quad)$
- símbolos de cada lenguaje particular $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, donde
    - $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos de constantes (puede ser $\mathcal{C} = \emptyset$)
    - $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos de funciones (puede ser $\mathcal{F} = \emptyset$)
    - $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos de predicados ($\mathcal{P} \neq \emptyset$)

Un repasito

- Tenemos términos y fórmulas.
- Podemos utilizar los símbolos $\exists \quad \vee \quad \wedge$ en reemplazo de las fórmulas correspondientes.

Un repasito: interpretación de un lenguaje

Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ de un lenguaje $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ es

- un conjunto A no vacío, se lo llama universo o dominio
- las siguientes asignaciones:
  - para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$, un elemento fijo

    $$c_{\mathcal{A}} \in A$$

  - para cada símbolo de función n-aria $f \in \mathcal{F}$, una función

    $$f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$$

  - para cada símbolo de predicado n-ario $P \in \mathcal{P}$, una relación

    $$P_{\mathcal{A}} \subseteq A^n$$

Las funciones $f_{\mathcal{A}}$ y predicados $P_{\mathcal{A}}$ son siempre totales.

Ejercicio 1: Enunciado

Decidir si las siguientes interpretaciones son apropiadas para los siguientes lenguajes, en donde f es un símbolo unario y g es binario:

Ejercicio 1: Enunciado

1.

$$\mathcal{C} = \{c\}, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{P, =\}$$
$$U_A = \mathbb{Q}$$
$$c_A = \frac{2}{3}$$
$$f_A(a) = \frac{a}{a^2 + 1}$$
$$g_A(a, b) = a + b$$
$$a \; P_A \; b \quad \text{sii} \quad a \leq b$$

Ejercicio 1: Enunciado

2.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} = \{c\}, \mathcal{F} = \{f, g\}&, \mathcal{P} = \{P, =\} \\
U_B &= \text{cjto. de todas las listas de enteros} \\
c_B &= [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] \\
f_B(l) &= \text{quedarse únicamente con las posiciones pares de } l \\
g_B(l_1, l_2) &= \text{concatenar } l_1 \text{ con } l_2 \\
l_1 \ P_B \ l_2 \quad &\text{sii} \quad \text{la long. de } l_1 \text{ es menor o igual que la long. de } l_2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1: Enunciado

3.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} = \emptyset, \mathcal{F} = \{h\}, \mathcal{P} = \{=\} \\
U_C = \text{cjto. de todas las listas de enteros} \\
h_C(l) = \text{longitud de } l
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1: Resolución

Debemos chequear:

a) El universo U es no vacío;

b) la interpretación de cada constante pertenece al universo U elegido;

c) la interpretación de cada función es total y tiene como imagen a elementos del universo U;

d) la interpretación de cada predicado es total.

Ejercicio 2: Enunciado

Decidir si las siguientes fórmulas son *i)* universalmente válidas, *ii)* válidas en alguna interpretación del ejercicio anterior, *iii)* satisfacibles, o *iv)* insatisfacibles.

a) $\exists x(f(x) = x)$

b) $\forall x(P(x, f(x)))$

c) $P(x, f(y))$

Ejercicio 2.a: Resolución

Veamos que no es universalmente válida. Sea I una interpretación donde el universo son los naturales y $f_I(n) = n + 1$. Sea v una valuación cualquiera.

Ejercicio 2.a: Resolución

I, v $\models \exists$ x (f(x) = x)

sii hay algún valor n en U_I tal que $I, v[x \mapsto n] \models f(x) = x$

sii hay algún valor n en U_I tal que $v[x \mapsto n](f(x)) =_I v[x \mapsto n](x)$

sii hay algún valor n en U_I tal que $f_I(v[x \mapsto n](x)) =_I v[x \mapsto n](x)$

sii hay algún valor n en U_I tal que $f_I(n) =_I n$

sii hay algún valor n en U_I tal que $n + 1 =_I n$

Ejercicio 2.a: Resolución

Veamos ahora si la fórmula vale en la estructura A del ejercicio anterior.

Ejercicio 2.a: Resolución

$$\mathcal{C} = \{c\}, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{P, =\}$$

$$U_A = \mathbb{Q}$$

$$c_A = \frac{2}{3}$$

$$f_A(a) = \frac{a}{a^2 + 1}$$

$$g_A(a, b) = a + b$$

$$a \; P_A \; b \quad \text{sii} \quad a \leq b$$

Ejercicio 2.a: Resolución

Sea v una valuación cualquiera: A, v $\models \exists$ x (f(x) = x)

sii hay algún valor a en U_A tal que $A, v[x \mapsto a] \models f(x) = x$

sii hay algún valor a en U_A tal que $v[x \mapsto a](f(x)) =_A v[x \mapsto a](x$

sii hay algún valor a en U_A tal que $f_A(v[x \mapsto a](x)) =_A v[x \mapsto a](x$

sii hay algún valor a en U_A tal que $f_A(a) =_A a$

sii hay algún valor a en U_A tal que $\dfrac{a}{a^2+1} =_A a$

Ejercicio 2.a: Resolución

Veamos ahora si la fórmula vale en la estructura B del ejercicio anterior.

Ejercicio 2.a: Resolución

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{c\}, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{P, =\} \\
U_B &= \text{cjto. de todas las listas de enteros} \\
c_B &= [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] \\
f_B(l) &= \text{quedarse únicamente con las posiciones pares de } l \\
g_B(l_1, l_2) &= \text{concatenar } l_1 \text{ con } l_2 \\
l_1 \; P_B \; l_2 \quad &\text{sii} \quad \text{la long. de } l_1 \text{ es menor o igual que la long. de } l_2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.a: Resolución

B, v $\models \exists$ x (f(x) = x)

sii hay algún valor l en U_B tal que $B, v[x \mapsto l] \models f(x) = x$
sii hay algún valor l en U_B tal que $v[x \mapsto l](f(x)) =_B v[x \mapsto l](x)$
sii hay algún valor l en U_B tal que $f_B(v[x \mapsto l](x)) =_B v[x \mapsto l](x)$
sii hay algún valor l en U_B tal que $f_B(l) =_B l$

Ejercicio 2.b: Resolución

$\forall x(P(x, f(x)))$, ¿es universalmente válida?

Ejercicio 2.b: Resolución

Veamos qué sucede en la interpretación A. Tomemos una valuación v cualquiera.

A, v $\models \forall$ x (P(x,f(x)))

sii todo valor a en U_A cumple $A, v[x \mapsto a] \models P(x, f(x))$

sii todo valor a en U_A cumple $v[x \mapsto a](x)\ P_A\ v[x \mapsto a](f(x))$

sii todo valor a en U_A cumple $a\ P_A\ f_A(v[x \mapsto a](x))$

sii todo valor a en U_A cumple $a\ P_A\ f_A(a)$

sii todo valor a en U_A cumple $a \ \leq \ \dfrac{a}{a^2+1}$

Ejercicio 2.b: Resolución

De modo similar, tomemos una valuación v cualquiera para la interpretación B.

Ejercicio 2.b: Resolución

B, v $\models \forall$ x (P(x,f(x)))

sii todo valor l en U_B cumple $B, v[x \mapsto l] \models P(x, f(x))$

sii todo valor l en U_B cumple $v[x \mapsto l](x)\ P_B\ v[x \mapsto l](f(x))$

sii todo valor l en U_B cumple $l\ P_B\ f_B(v[x \mapsto l](x))$

sii todo valor l en U_B cumple $l\ P_B\ f_B(l)$

sii todo valor l en U_B cumple $|l| \leq$ |posiciones pares de l|

Ejercicio 2.b: Resolución

¿Será válida bajo alguna interpretación?

Ejercicio 2.b: Resolución

Veamos qué sucede en una interpretación I tal que su universo son los naturales, P_A es la operación de menor o igual y f_A es la identidad.

Ejercicio 2.b: Resolución

I, v $\models \forall$ x (P(x,f(x)))

sii todo valor n en U_I cumple $I, v[x \mapsto n] \models P(x, f(x))$

sii todo valor n en U_I cumple $v[x \mapsto n](x)\ P_I\ v[x \mapsto n](f(x))$

sii todo valor n en U_I cumple $n\ P_I\ f_I(v[x \mapsto n](x))$

sii todo valor n en U_I cumple $n\ P_I\ f_I(n)$

sii todo valor n en U_I cumple $n \leq\ n$

Ejercicio 2.c: Resolución

$$P(x, f(y))$$

¿Será universalmente válida? ¿Válida en las interpretaciones del ejercicio anterior? ¿Satisfacible al menos?

Por ejemplo, tomemos la estructura A y sea v_1 una valuación tal que $v_1(x) = 10, v_1(y) = 0$

Ejercicio 2.c: Resolución

$$
\begin{aligned}
A, v_1 \models P(x, f(y)) \quad & \text{sii} \quad v_1(x)\ P_A\ v_1(f(y)) \\
& \text{sii} \quad 10\ P_A\ f_A(v_1(y)) \\
& \text{sii} \quad 10\ P_A\ \frac{0}{0^2+1} \\
& \text{sii} \quad 10 \leq 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.c: Resolución

¿Es satisfacible en esta interpretación?

Ejercicio 2.c: Resolución

Sea v_2 otra valuación tal que $v_2(x) = 0, v_2(y) = 1$, luego:

$$\begin{array}{rll} A, v_2 \models P(x, f(y)) & \text{sii} & v_2(x)\ P_A\ v_2(f(y)) \\ & \text{sii} & 0\ P_A\ f_A(v_2(y)) \\ & \text{sii} & 0\ P_A\ \dfrac{1}{1^2+1} \\ & \text{sii} & 0 \leq \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Ejercicio 2.c: Resolución

Análogamente con la interpretación B. Tomemos una valuación v_3 tal que $v_3(x) = [3,1], v_3(y) = []$:

$$
\begin{array}{rll}
B, v_3 \models P(x, f(y)) & \text{sii} & v_3(x)\ P_B\ v_3(f(y)) \\
 & \text{sii} & [3,1]\ P_B\ f_B(v_3(y)) \\
 & \text{sii} & [3,1]\ P_B\ f_B([]) \\
 & \text{sii} & |[3,1]| \leq |[]| \\
 & \text{sii} & 2 \leq 0
\end{array}
$$

Ejercicio 2.c: Resolución

¿Es satisfacible en esta interpretación?

¡Tarea!

Definición: Distinguibilidad

Dada una interpretación I, se dice que un elemento a de un universo de interpretación U_I es distinguible sii existe una fórmula ϕ tal que tiene una única variable libre x que cumple:

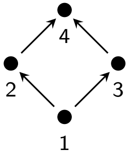
$$\text{I, v} \models \phi \quad \text{sii} \quad v(x) = a$$

En otras palabras, hay una fórmula que es cierta para a y falsa para todo otro elemento del universo de interpretación.

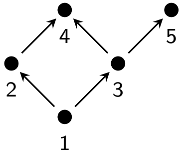
Ejercicio 3: Enunciado

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario $\leq$. Decidir si todos los elementos del universo de las siguientes interpretaciones son distinguibles (suponiendo clausura reflexotransitiva de $\leq$).

a)



b)



Ejercicio 3: Notación

Para mayor comodidad definimos la igualdad como una reescritura:

$$x = y \equiv x \leq y \wedge y \leq x$$

De forma similar definimos el menor estricto como:

$$x < y \equiv x \leq y \wedge \neg(x = y)$$

Ejercicio 3.a: Resolución

¿Es el elemento 4 distinguible del resto de los nodos?

Ejercicio 3.a: Resolución

Sea $\phi_4 = \forall y(y \leq x)$

Ejercicio 3.a: Resolución

I,v $\models \forall$ y (y $\leq$ x)

sii todo valor a en U_I cumple $I, v[y \mapsto a] \models y \leq x$

sii todo valor a en U_I cumple $v[y \mapsto a](y) \leq_I v[y \mapsto a](x)$

sii todo valor a en U_I cumple $a \leq_I v(x)$

sii todas las siguientes se cumplen $\begin{cases} 1 \leq_I v(x) \\ 2 \leq_I v(x) \\ 3 \leq_I v(x) \\ 4 \leq_I v(x) \end{cases}$

sii $v(x) = 4$

Ejercicio 3.a: Resolución

¿Y el elemento 1 es distinguible? ¿Qué fórmula definiría? ¿Y los elementos 2 y 3?

Ejercicio 3.b: Resolución

¿Puedo distinguir a todos los elementos?

El 1 se distingue de la misma forma que en 3.a.

Veamos cómo distinguir el 4.

Ejercicio 3.b: Resolución

El 4 ya no es mayor o igual a todos pues no es más grande que el 5.

Es el único elemento que tiene 3 elementos distintos que son menores que él.

$$\phi_4 = \exists y, z, w (y \neq z \wedge z \neq w \wedge w \neq y \wedge y < x \wedge z < x \wedge w < x)$$

Ejercicio 3.b: Resolución

Análogamente, el 5 es el único elemento que tiene exactamente 2 elementos distintos menores que él.

$$\phi_5 = \exists y, z(y \neq z \land y < x \land z < x)$$

✗

$$\phi_5 = \exists y, z(y \neq z \land y < x \land z < x \land \forall w(w < x \rightarrow (w = y \lor w = z)))$$

✓

Ejercicio 3.b: Resolución

Por último, veamos cómo distinguir al 2 y al 3.

$$\phi_2 = \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \to z = y))$$

$$\phi_3 = \exists y, z(y \neq z \wedge x < y \wedge x < z \wedge \forall w(x < w \to (w = y \vee w = z)))$$

Ejercicio 3.b: Resolución

En todos los casos falta probar que efectivamente las ϕ cumplen lo deseado en la interpretación dada, es decir, como hicimos para ϕ_4 en 3.a.

¡Tarea!

Ejercicio 4: Enunciado

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario $\leq$. Considerar una interpretación I tal que U_I es un universo finito y totalmente ordenado. Probar que todos los elementos de U_I son distinguibles.

Ejercicio 4: Resolución

Como U_I es un universo finito y totalmente ordenado podemos reescribirlo como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ donde $e_i \leq e_j$ si y sólo si $i \leq j$.

Además sabemos que $e_i < e_j$ pues $e_i \neq e_j$.

Ejercicio 4: Resolución

Debemos definir n predicados $\phi_1, \ldots, \phi_n$ tales que cada uno tiene una única variable libre x y cada ϕ_i es válido únicamente en valuaciones v tales que $v(x) = e_i$.

Ejercicio 4: Resolución

Distingamos primero a e_1.

e_1 cumple que es menor o igual a todos los demás.

$$\phi_1(x) = \forall y(x \leq y)$$

Ejercicio 4: Resolución

¿Cómo distinguimos a 2?

e_2 es el único elemento estrictamente mayor a e_1 que es más cercano a e_1.

$$\phi_2(x) = \exists z(\phi_1(z) \wedge z < x \wedge \forall w((z \leq w \wedge w \leq x) \rightarrow (w = z \vee w = x)))$$

Ejercicio 4: Resolución

En general, podemos definir ϕ_i recursivamente:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \forall y(x \leq y) \\
\phi_{i+1}(x) &= \exists z(\phi_i(z) \wedge z < x \wedge \\
&\quad \forall w((z \leq w \wedge w \leq x) \rightarrow (w = z \vee w = x)))
\end{aligned}$$

Ejercicio 4: Resolución

Sólo resta mostrar, vía inducción, que $\phi_i(x)$ es verdadera sólo si la valuación hace a $x = e_i$.

Ejercicio 4: Resolución

Caso base.

La fórmula $\phi_1(x)$ es cierta sólo cuando x es un elemento menor o igual a todos los demás. Tal elemento es e_1.

Ejercicio 4: Resolución

Paso inductivo.

H.I.: la fórmula $\phi_i(z)$ es únicamente verdadera en valuaciones v tales que $v(z) = e_i$.

Partiendo de esto, queremos ver que $\phi_{i+1}(x)$ sólo es verdadera cuando $v(x) = e_{i+1}$.

Ejercicio 4: Resolución

Por hipótesis inductiva sabemos que la valuación v es tal que $v(z) = e_i$.

Por lo tanto, para que la valuación haga verdadera a $z < x$ debe suceder que $v(x)$ sea un elemento mayor estricto que $v(z)$.

Además, como $\forall w((z \leq w \wedge w \leq x) \rightarrow (w = z \vee w = x))$ sabemos que todo elemento entre z y x es necesariamente z o necesariamente x, es decir, no hay elementos entre z y x.

Ejercicio 4: Resolución

Finalmente, teniendo en cuenta que x es un elemento estrictamente mayor a z y tal que está a distancia mínima de z, y $z = e_i$, luego $x = e_{i+1}$.