Práctica 3 - Funciones no-computables y conjuntos c.e. -

Ejercicio 1. Probar, usando una diagonalización, que las siguientes funciones no son computables:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_3(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 2. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\uparrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_2(x,y,z,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(w)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(w) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_3(x,y,z) = \begin{cases} z+1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_4(x,y,z) = \begin{cases} (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z) & \text{si } \Phi_y^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Probar que la siguiente función no es computable reduciendo la función f_4 del Ej. 1.

$$g_3'(x,y,z) = \begin{cases} z & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sugerencia: Revisar que la reducción maneje correctamente el caso $f_4(0)$.

Ejercicio 4. Decimos que una función parcial computable f es *extensible* si existe g computable tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \operatorname{Dom} f$. Probar que existe una función parcial computable que no es extensible (*Sugerencia*: considerar una función tal que con su extensión se podría computar alguna variante del halting problem).

Ejercicio 5. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1 y usando el teorema del parámetro, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{Halt}(1337, x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_2(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(z) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ es la constante 7} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_4(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq \Phi_y^{(1)}(x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 6. Demostrar que existe un programa p tal que $\Psi_p^{(1)}(x)\downarrow$ si y sólo si $x = \#p$.

Ejercicio 7. Demostrar, usando el teorema de la recursión, que las siguientes funciones no son computables:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \operatorname{Im} \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} \Phi_x^{(1)} \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)}| = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 8. Sean $C_1, \ldots, C_k$ conjuntos de índices de programas y sea $C = C_1 \cap \ldots \cap C_k$.

a. Demostrar que C es un conjunto de índices de programas (i.e., $C = \{x : \Phi_x \in \mathcal{C}\}$, con $\mathcal{C}$ una clase de funciones).

b. Proponer un conjunto que no sea un conjunto de índices de programas y no sea computable.

Ejercicio 9. Probar que son equivalentes

I. D es un conjunto de índices de programas.

II. Para todo par de programas p y q, si $\#p \in D$ y $\Psi_p = \Psi_q$ entonces $\#q \in D$.

Ejercicio 10. Demostrar, usando reducciones y el teorema de Rice, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)} = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)} \cup \operatorname{Dom} \Phi_y^{(1)} = \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_3(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_4(x,y) = \begin{cases} \Phi_x^{(1)}(\Phi_y^{(1)}(72)) & \text{si } \Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)} \text{ es total} \\ 73 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación: la composición de dos funciones parciales puede ser una función parcial.

Ejercicio 11. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si B es computable entonces es c.e.

b. Si B es c.e. entonces B es computable o su complemento lo es.

c. Si B es c.e. entonces su complemento es c.e.

Ejercicio 12. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son p.r., cuáles son computables, cuáles son c.e., cuáles son co-c.e. y demostrar en cada caso:

$$\begin{array}{ll} C_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(x) = 2 * x\} & C_4 = \{\langle x,y\rangle : \forall z \in (\operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)} \cap \operatorname{Dom} \Phi_y^{(1)})\ \Phi_x^{(1)}(z) < \Phi_y^{(1)}(z)\} \\ C_2 = \{x : 1 \in \operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)}\} & C_5 = \{\langle x,y,t,i\rangle : \exists \sigma. \mathrm{SNAP}^{(1)}(x,y,t) = \langle i,\sigma\rangle\} \\ *C_3 = \{x : \operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)} \subseteq \{0,\ldots,x\}\} & C_6 = \{\langle x,y,i\rangle : \exists \sigma, t. \mathrm{SNAP}^{(1)}(x,y,t) = \langle i,\sigma\rangle\} \end{array}$$

Ejercicio 13. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si $B_1, \ldots, B_k$ son c.e. entonces $\bigcup_{n\in\{1,\ldots,k\}} B_n$ es c.e.

b. Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es c.e.

c. Si $B_1, \ldots, B_k$ son c.e. entonces $\bigcap_{n\in\{1,\ldots,k\}} B_n$ es c.e.

d. Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es c.e.

Ejercicio 14. Sea B un conjunto *infinito*.

a. Probar que B es c.e. sii existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y computable tal que $\operatorname{Im} f = B$ (o sea, f es una *enumeración computable* de los elementos de B).

b. Probar que B es computable sii existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable y estrictamente creciente tal que $\operatorname{Im} f = B$ (o sea, f es una *enumeración ordenada y computable* de los elementos de B).

c. Probar que si B es c.e. entonces B contiene (al menos) un subconjunto computable infinito.

Ejercicio 15. Sea TOT $= \{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$.

a. Demostrar que TOT no es co-c.e.

b. Demostrar que TOT no es c.e. (*Sugerencia*: considerar la función $g(z) = \Phi_{f(z)}^{(1)}(z) + 9$ donde f es una enumeración computable de TOT).

Ejercicio 16. Demostrar que los siguientes conjuntos no son c.e. ni co-c.e.

$$\mathrm{ID} = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es la función identidad}\}$$
$$\mathrm{S} = \{x : \operatorname{Im} \Phi_x^{(1)} = \mathbb{N}\}$$

Sugerencia: utilice una reducción de TOT usando el Teorema del Parámetro.

Ejercicio 17. Exhibir un conjunto *no vacío* $C \subseteq \mathbb{N}$ tal que, para toda función f primitiva recursiva, exista un k que cumpla $k \in (C \cup \operatorname{Im} f)$ pero $k \notin (C \cap \operatorname{Im} f)$. Justificar apropiadamente.

Ejercicio 18. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Para toda funcion computable (total) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existe una función primitiva recursiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ son primitivas recursivas.

b. Sea C un conjunto infinito. Si para todo $x \in C$ vale $\neg\mathrm{Halt}(x, x)$ entonces C no es computable.

c. Si C y D son conjuntos c.e. infinitos, entonces existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, computable (total), inyectiva, y tal que $\operatorname{Im} f = C \cup D$.

d. Si $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es una función tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = f(n, x)$ es total y computable, entonces f es computable (total).

e. La siguiente función es primitiva recursiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} \Phi_x^{(1)} \text{ es un conjunto c.e.} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

f. Sea e un número fijo, la siguiente función no es computable:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } \mathrm{Halt}(e, e) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

g. Existe una función computable f tal que para todo programa p, la función computada por el programa con número $f(\#p)$ es *distinta* a la computada por p, es decir, $\Psi_p^{(1)} \neq \Phi_{f(\#p)}^{(1)}$.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.