Teoría de la Información
- Clase práctica -

Teoría de las Comunicaciones

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

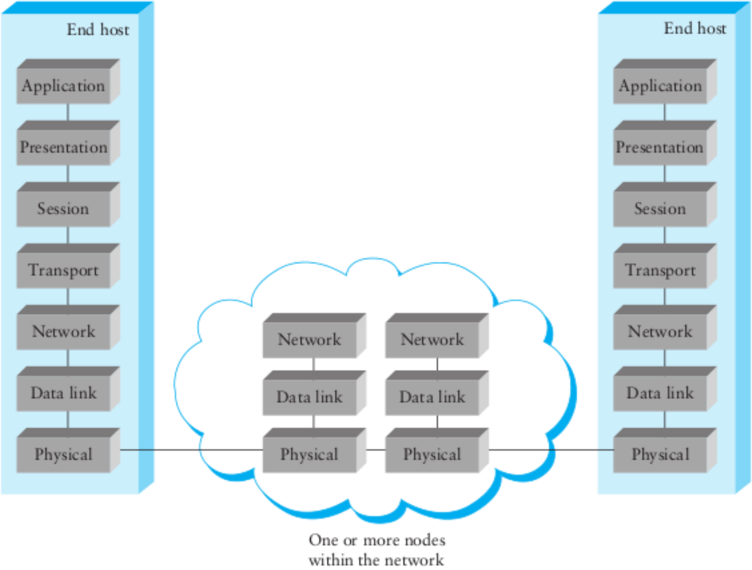
23.08.2017

Agenda

Agenda

Miscelánea de temas organizativos de la materia

Miscelánea de temas organizativos de la materia



Agenda

Información y entropía

Información de un evento e

$$I(e) = -\log_2 P(e) \text{ bits}$$

Información y entropía

Información de un evento e

$$I(e) = -\log_2 P(e) \text{ bits}$$

Bit

Cantidad de información obtenida al especificar una de dos posibles alternativas igualmente probables

Información y entropía

Información de un evento e

$$I(e) = -\log_2 P(e) \text{ bits}$$

Bit

Cantidad de información obtenida al especificar una de dos posibles alternativas igualmente probables

Fuente de memoria nula

Fuente en la que cada emisión es estadísticamente independiente

Información y entropía

Información de un evento e

$$I(e) = -\log_2 P(e) \text{ bits}$$

Entropía de una fuente S

$$H(S) = -\sum_{s \in S} P(s) \cdot \log_2 P_S(s)$$

Bit

Cantidad de información obtenida al especificar una de dos posibles alternativas igualmente probables

Fuente de memoria nula

Fuente en la que cada emisión es estadísticamente independiente

Información y entropía

Información de un evento e

$$I(e) = -\log_2 P(e) \text{ bits}$$

Entropía de una fuente S

$$H(S) = -\sum_{s \in S} P(s) \cdot \log_2 P_S(s)$$

Entropía bajo equiprobabilidad

$$H(S) = \log_2 |S|$$

Bit

Cantidad de información obtenida al especificar una de dos posibles alternativas igualmente probables

Fuente de memoria nula

Fuente en la que cada emisión es estadísticamente independiente

Agenda

¿Qué es un código?

- Un *alfabeto* es un conjunto de símbolos.
- Dado un alfabeto fuente Σ, un *código* es una correspondencia entre todas las secuencias posibles de símbolos de Σ a secuencias de símbolos de otro alfabeto X (alfabeto código).
- Muchas veces son utilizados a los efectos de lograr una representación más eficiente de la información (i.e., para eliminar redundancia).

Código bloque y código no singular

- Un *código bloque* es aquél que asigna cada símbolo de Σ a una secuencia fija de símbolos de X:

$$C : \Sigma \to X^*$$

- Ejemplo:
  - $C_1 : \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \to \{0, 1\}^*$

$$\begin{aligned} C_1(s_1) &= 0 \\ C_1(s_2) &= 11 \\ C_1(s_3) &= 01 \\ C_1(s_4) &= 101 \end{aligned}$$

- Un código C se dice *no singular* si todas sus palabras son distintas (i.e., si C es una función inyectiva).
  - C_1 es no singular.

Código instantáneo y código unívocamente decodificable

- Un código es *unívocamente decodificable* si ninguna tira de símbolos del alfabeto código admite más de una única decodificación.
  - Definición más formal: si su extensión de orden n es no singular $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Un código es *instantáneo* cuando es posible decodificar las palabras sin necesidad de conocer los símbolos que la suceden.
  - Condición necesaria y suficiente: ser *libre de prefijos*, no codificar ningún símbolo como prefijo de otro.

Código instantáneo y código unívocamente decodificable

- Un código es *unívocamente decodificable* si ninguna tira de símbolos del alfabeto código admite más de una única decodificación.
  - Definición más formal: si su extensión de orden n es no singular $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Un código es *instantáneo* cuando es posible decodificar las palabras sin necesidad de conocer los símbolos que la suceden.
  - Condición necesaria y suficiente: ser *libre de prefijos*, no codificar ningún símbolo como prefijo de otro.

C_1 no es unívocamente decodificable:

Código instantáneo y código unívocamente decodificable

- Un código es *unívocamente decodificable* si ninguna tira de símbolos del alfabeto código admite más de una única decodificación.
  - Definición más formal: si su extensión de orden n es no singular $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Un código es *instantáneo* cuando es posible decodificar las palabras sin necesidad de conocer los símbolos que la suceden.
  - Condición necesaria y suficiente: ser *libre de prefijos*, no codificar ningún símbolo como prefijo de otro.

C_1 no es unívocamente decodificable:

$$0101$$

Código instantáneo y código unívocamente decodificable

- Un código es *unívocamente decodificable* si ninguna tira de símbolos del alfabeto código admite más de una única decodificación.
  - Definición más formal: si su extensión de orden n es no singular $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Un código es *instantáneo* cuando es posible decodificar las palabras sin necesidad de conocer los símbolos que la suceden.
  - Condición necesaria y suficiente: ser *libre de prefijos*, no codificar ningún símbolo como prefijo de otro.

C_1 no es unívocamente decodificable:

$$0101$$

$$\underbrace{01}_{s_3}\underbrace{01}_{s_3}$$

Código instantáneo y código unívocamente decodificable

- Un código es *unívocamente decodificable* si ninguna tira de símbolos del alfabeto código admite más de una única decodificación.
  - Definición más formal: si su extensión de orden n es no singular $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Un código es *instantáneo* cuando es posible decodificar las palabras sin necesidad de conocer los símbolos que la suceden.
  - Condición necesaria y suficiente: ser *libre de prefijos*, no codificar ningún símbolo como prefijo de otro.

C_1 no es unívocamente decodificable:

$$0101$$

$$\underbrace{01}_{s_3}\underbrace{01}_{s_3} \qquad\qquad \underbrace{0}_{s_1}\underbrace{101}_{s_4}$$

Código instantáneo y código unívocamente decodificable

- Un código es *unívocamente decodificable* si ninguna tira de símbolos del alfabeto código admite más de una única decodificación.
  - Definición más formal: si su extensión de orden n es no singular $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Un código es *instantáneo* cuando es posible decodificar las palabras sin necesidad de conocer los símbolos que la suceden.
  - Condición necesaria y suficiente: ser *libre de prefijos*, no codificar ningún símbolo como prefijo de otro.

C_1 no es unívocamente decodificable:

$$0101$$

$$\underbrace{01}_{s_3}\underbrace{01}_{s_3} \qquad \underbrace{0}_{s_1}\underbrace{101}_{s_4}$$

...y tampoco es instantáneo:

$$C_1(s_3) = \mathbf{0}1 = C_1(s_1) = \mathbf{0}$$

Resultado

Teorema

Código instantáneo $\Rightarrow$ código unívocamente decodificable

Longitud de código

- Dado un código C sobre una fuente S, la *longitud media* de C, $L(C)$, se define como

$$L(C) = \sum_{s \in S} |C(s)| \cdot P_S(s)$$

- Un código se dice *óptimo* si no existe un código para la misma fuente con menor longitud media. En otras palabras, utiliza en promedio el menor número posible de bits para codificar un mensaje.

Longitud de código

- Dado un código C sobre una fuente S, la *longitud media* de C, $L(C)$, se define como

$$L(C) = \sum_{s \in S} |C(s)| \cdot P_S(s)$$

- Un código se dice *óptimo* si no existe un código para la misma fuente con menor longitud media. En otras palabras, utiliza en promedio el menor número posible de bits para codificar un mensaje.

Teorema: codificación sin pérdida de información

$$H(S) \leq L(C) \cdot \log r$$

Donde r es la cantidad de símbolos del alfabeto código. Para códigos binarios,

$$H(S) \leq L(C)$$

- Todo código que satisface esto se dice que codifica *sin pérdida de información.*

Ejercicio

Para la siguiente fuente

$$S = \left[P(A) = 0{,}4;\, P(B) = 0{,}3;\, P(C) = 0{,}2;\, P(D) = 0{,}1\right]$$

se proponen 3 códigos posibles:

- C_1: $A = 001$; $B = 01$; $C = 11$; $D = 010$
- C_2: $A = 0$; $B = 01$; $C = 011$; $D = 111$
- C_3: $A = 1$; $B = 01$; $C = 001$; $D = 0001$

a. ¿Cuáles son instantáneos?

b. ¿Cuáles son unívocamente decodificables?

c. De los unívocamente decodificables, ¿Cuál es más eficiente (H/L)?

d. De los unívocamente decodificables, ¿Alguno presenta *pérdida de información*?

Ejercicio - Primer parcial 1C2015

Sea $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $n > 2$, una fuente de información de memoria nula. Supongamos que s_1 es emitido con cierta probabilidad p_1 y que todo otro símbolo distinto de s_1 es emitido con probabilidad p_{all} (i.e., $P_S(s_i) = P_S(s_j) = p_{\text{all}},\ 1 < i, j \leq n$). Sean C_1, C_2 y C_3 tres códigos binarios sobre S definidos como sigue:

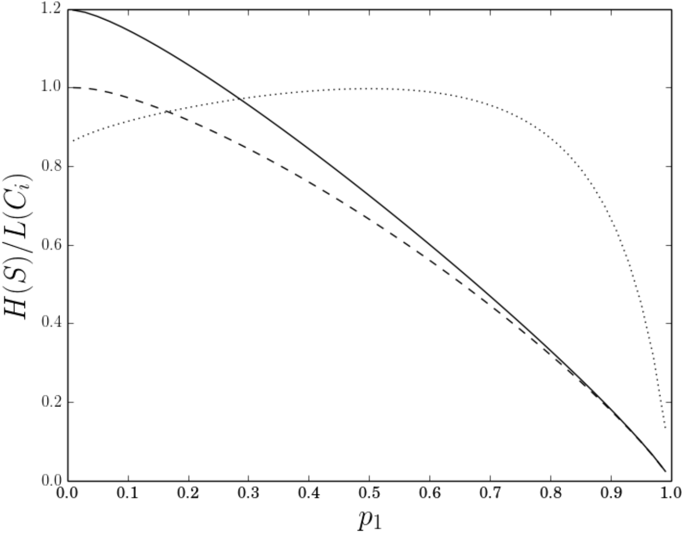
$$C_1(s_i) = \text{bin}_n(i) \qquad C_2(s_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1\,\text{bin}_{n-1}(i-1) & \text{si } i > 1 \end{cases} \qquad C_3(s_i) = \begin{cases} \text{bin}_n(0) & \text{si } i = 1 \\ \text{bin}_{n/2}(\lfloor i/2 \rfloor) & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

En estas definiciones, $\text{bin}_k(j)$ indica la representación binaria de j utilizando exactamente $\lceil \log_2(k+1) \rceil$ bits.

A partir de la siguiente gráfica de $H(S)/L(C_i)$, en función de p_1, para un valor fijo de n, indicar:

a. Qué curva corresponde a cada uno de los códigos.

Ejercicio (cont.)



Agenda

Capacidad y teorema de Shannon

La *capacidad* C de un canal es la velocidad teórica máxima de transmisión, y viene dada por el...

Capacidad y teorema de Shannon

La *capacidad* C de un canal es la velocidad teórica máxima de transmisión, y viene dada por el...

Teorema de Shannon

$$C = B \cdot \log_2(1 + \mathrm{SNR})$$

Capacidad y teorema de Shannon

La *capacidad* C de un canal es la velocidad teórica máxima de transmisión, y viene dada por el...

Teorema de Shannon

$$C = B \cdot \log_2(1 + \mathrm{SNR})$$

- B: ancho de banda (medido en Hz)

Capacidad y teorema de Shannon

La *capacidad* C de un canal es la velocidad teórica máxima de transmisión, y viene dada por el...

Teorema de Shannon

$$C = B \cdot \log_2(1 + \text{SNR})$$

- B: ancho de banda (medido en Hz)
- SNR: relación señal-ruido (medida en *veces*)

Capacidad y teorema de Shannon

La *capacidad* C de un canal es la velocidad teórica máxima de transmisión, y viene dada por el...

Teorema de Shannon

$$C = B \cdot \log_2(1 + \mathrm{SNR})$$

- B: ancho de banda (medido en Hz)
- SNR: relación señal-ruido (medida en *veces*)
  - También expresable en *decibeles*. Conversión: $\mathrm{SNR} = 10^{\mathrm{dB}/10}$

Ejercicio

Considerar una señal de video en escala de grises que transmite imágenes a una resolución de 640×480 píxeles, de los cuales cada uno puede asumir 10 niveles diferentes de brillo. Supongamos que la tasa de transmisión es de 30 imágenes por segundo y que la relación señal a ruido es de 30 dB.

a. Calcular la entropía de la fuente si todas las imágenes fueran equiprobables.
b. ¿Cuántos bits son necesarios para codificar cada imagen de manera óptima con un código que asigne el mismo largo a todas las imágenes?
c. Calcular el ancho de banda mínimo requerido para soportar la transmisión de la señal resultante.

Agenda

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

$$\text{Delay} = T_{\text{tx}} + T_{\text{prop}} + T_{\text{queue}}$$

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

$$\text{Delay} = T_{\text{tx}} + T_{\text{prop}} + \cancel{T_{\text{queue}}}$$

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

$$\text{Delay} = T_{\text{tx}} + T_{\text{prop}}$$

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

$$\text{Delay} = T_{\text{tx}} + T_{\text{prop}}$$

- T_{tx}: tiempo de transmisión

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

$$\text{Delay} = T_{\text{tx}} + T_{\text{prop}}$$

- T_{tx}: tiempo de transmisión
  - $= |\text{datos}| / V_{\text{tx}}$

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

$$\text{Delay} = T_{\text{tx}} + T_{\text{prop}}$$

- T_{tx}: tiempo de transmisión
  - $= |\text{datos}|/V_{\text{tx}}$
- T_{prop}: tiempo de propagación

Delay, propagación y transmisión

El *delay* representa el tiempo total que tardamos en enviar información de un punto a otro:

$$\text{Delay} = T_{\text{tx}} + T_{\text{prop}}$$

- T_{tx}: tiempo de transmisión
  - $= |\text{datos}| / V_{\text{tx}}$
- T_{prop}: tiempo de propagación
  - $= D / V_{\text{prop}}$

Capacidad de volumen

La *Capacidad de volumen* la cantidad de bits que entran en el medio desde que se envía el primer bit hasta que éste llega al receptor:

Capacidad de volumen

La *Capacidad de volumen* la cantidad de bits que entran en el medio desde que se envía el primer bit hasta que éste llega al receptor:

$$C_{vol} = \text{Delay} * V_{tx}$$

Ejercicio

Calcule la Capacidad de Volumen (cantidad de bits que entran simultáneamente) en cada uno de los siguientes medios físicos de transmisión, asumiendo que se los utiliza a su máxima Capacidad de Transmisión (es decir, sin pérdida de información):

a. $D = 100km$, $V_{prop} = 200000km/s$, $SNR = 100dB$, $B = 400Hz$

b. $D = 100km$, $V_{prop} = 200000km/s$, $SNR = 10dB$, $B = 400kHz$

c. $D = 100km$, $V_{prop} = 300000km/s$, $SNR = 10dB$, $B = 400kHz$

d. $D = 100m$, $V_{prop} = 300000km/s$, $SNR = 10dB$, $B = 400kHz$

Ejercicio - Parcial

Un robot trepador sube escalando el monte Everest con una cámara. La señal de video de la cámara se transmite sobre un enlace inalámbrico que tiene una relación señal a ruido del orden de los 30dB, usando 50KHz del espectro. A su vez, se modela la señal de video como una fuente de información, definiendo cada símbolo como cada una de las imágenes posibles y asumiendo que son todas equiprobables.

1. Si queremos enviar 26 imágenes por segundo, ¿cuál es el máximo valor de entropía que puede adoptar la fuente?
2. ¿Cuál es la distancia para la cual el Ttx de una imagen representa el 50 % del delay? (V prop = 300000km/s)

Referencias

N. Abramson,
Teoría de la Información y Codificación
5ta edición.

W. Stallings,
Data and Computer Communications
5ta edición. Capítulo 2: Data Transmission.