Teoría de la Información

Resolución de ejercicios vistos en clase

23.08.2017

1. Primer ejercicio

1.1. Enunciado

Para la siguiente fuente

$$S = [P(A) = 0{,}4; P(B) = 0{,}3; P(C) = 0{,}2; P(D) = 0{,}1]$$

se proponen 3 códigos posibles:

- C_1: A = 001 ; B = 01 ; C = 11 ; D = 010
- C_2: A = 0 ; B = 01 ; C = 011 ; D = 111
- C_3: A = 1 ; B = 01 ; C = 001 ; D = 0001

a. ¿Cuáles son instantáneos?

b. ¿Cuáles son unívocamente decodificables?

c. ¿Cuál es más eficiente (H/L)?

d. ¿Alguno presenta *pérdida de información*?

1.2. Resolución

a. Recordemos que un código C se dice *instantáneo* o *libre de prefijos* sii ninguna codificación bajo C es prefijo de alguna otra. Considerando esto, podemos ver lo siguiente:

- C_1 **no** es instantáneo pues $C_1(B) = 01$ es prefijo de $C_1(D) = \mathbf{01}0$.
- C_2 tampoco: $C_2(A) = 0$ es prefijo de $C_2(B) = \mathbf{0}1$ y de $C_2(C) = \mathbf{0}11$.
- C_3 **sí** es instantáneo. Puede verse además que el bit 1 sirve en este caso como *delimitador*, dado que una lectura de 1 nos indica el final de un símbolo.

b. Un código es *unívocamente decodificable* cuando no es posible interpretar una tira de codificaciones como dos sucesiones de símbolos diferentes. En este caso tenemos que C_1 **no** es unívocamente decodificable puesto que la tira de bits 01001 puede formarse a partir de la codificación de DB tanto como de BA. Por otra parte, podemos afirmar que C_3 **sí** es unívocamente decodificable a partir del resultado conocido de C instantáneo $\Rightarrow$ C unívocamente decodificable[1]. Finalmente, C_2 también lo es, aunque en este caso no disponemos de un atajo para demostrarlo. Si bien la prueba formal puede ser difícil, una opción es enumerar muchas combinaciones de símbolos codificados hasta lograr cierta confianza de que no aparecerán múltiples interpretaciones para ninguna tira de bits.

[1] ¡Ojo con la recíproca! Encontrar un código que constituya un contraejemplo para ésta.

c. Dado que las probabilidades no cambian, la entropía de S es siempre igual (puntualmente, su valor es $H(S) \approx 1{,}85$). Luego, ofrecerá mejor rendimiento aquél código que minimice su longitud media. A simple vista queda claro que el código buscado es C_2, cuya longitud media es $L(C_2) \approx 1{,}9$.

d. Esta pregunta sólo tiene sentido contestarla para C_2 y C_3 que, por lo visto más arriba, son códigos unívocos. Tenemos que $H(S) < L(C_2) < L(C_3)$. Luego, ninguna de las dos longitudes medias es menor que la entropía de la fuente, lo cual garantiza que ambas codificaciones son sin pérdida de información.

2. Segundo ejercicio

2.1. Enunciado

Considerar una señal de video en escala de grises que transmite imágenes a una resolución de 640×480 píxeles, de los cuales cada uno puede asumir 10 niveles diferentes de brillo. Supongamos que la tasa de transmisión es de 30 imágenes por segundo y que la relación señal a ruido es de 30 dB.

a. Calcular la entropía de la fuente si todas las imágenes fueran equiprobables.

b. ¿Cuántos bits son necesarios para codificar cada imagen de manera óptima e instantánea con un código que asigne el mismo largo a todas las imágenes?

c. Calcular el ancho de banda mínimo requerido para soportar la transmisión de la señal resultante.

2.2. Resolución

a. La señal de video tiene 640 x 480 píxeles con 10 posibles niveles de brillo cada uno. Cada configuración de brillo en cada uno de los píxeles definirá una imagen distinta que puede ser potencialmente transmitida por la fuente. En otras palabras, cada una de estas imágenes equivale a un símbolo distinto. Ahora bien, para calcular cuántos símbolos tenemos en total, a lo que notaremos n, debemos hacer la combinatoria de todos los niveles de brillo por píxel, lo cual da como resultado $n = 10^{640\times480}$ símbolos distintos. Como la fuente es equiprobable, concluimos que $H(S) = \log_2(n) = 640 \cdot 480 \cdot \log_2(10)$.

b. En esta fuente equiprobable, tenemos que $H(S) = \log_2(n)$, no siendo n una potencia de 2. Esto implica que no podemos pensar en recurrir a un código (óptimo) que asigne $\log_2(n)$ bits por imagen, pues por supuesto estos valores deben ser números enteros. No obstante, la aproximación más cercana a este valor es tomar exactamente $\lceil \log_2(n) \rceil$ bits por imagen. De esta forma podremos armar un código que sea unívocamente decodificable (cada imagen recibe una tira de bits distinta) y *localmente óptimo*, entendiendo por esto que todo otro código que mapee cada imagen a una tira de bits de igual largo debe necesariamente poseer una longitud media igual o mayor.

Como nota adicional, extrapolando los conceptos plasmados en la resolución de este ejercicio, es interesante pensar en si, efectivamente, dada una fuente equiprobable S' de m símbolos, y dado un código C que actúe sobre S' definiendo para cada símbolo una codificación de largo $\lceil \log_2(m) \rceil$ bits, se tiene que C es óptimo. Cuando m es potencia de 2, la respuesta es afirmativa (¿por qué?). En cualquier otro caso, y quizás yendo a contramano de la intuición, la respuesta es que no. Como ejemplo sencillo, considerar el caso en el que $m = 3$. Como $\lceil \log_2(m) \rceil = 2$, tenemos que $L(C) = 2$. Sin embargo, podemos proponer un código alternativo C' que asigne un **0** a un símbolo, un **10** a otro y un **11** al restante. Es claro que C' es instantáneo, y además se ve claramente que $L(C') < 2 = L(C)$.

c. Para responder este ítem, hay que usar el teorema de Shannon: $C = B \cdot \log_2(1 + \mathrm{SNR})$. Primero, la relación señal-ruido hay que pasarla de decibeles a *veces*: $\mathrm{SNR} = 10^{30/10} = 1000$. Luego, como se necesitan 30 imágenes por segundo, la capacidad de canal debe ser mayor o igual que $\lceil 640 \cdot 480 \cdot \log_2(10) \rceil \cdot 30$ bps. Entonces, $B = (\lceil 640 \cdot 480 \cdot \log_2(10) \rceil \cdot 30) / \log_2(1001)$ Hz.

3. Tercer ejercicio

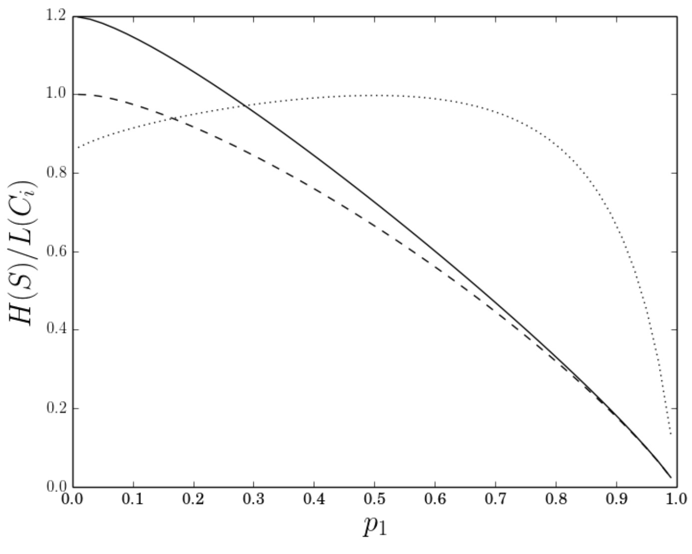
3.1. Enunciado

Sea $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $n > 2$, una fuente de información de memoria nula. Supongamos que s_1 es emitido con cierta probabilidad p_1 y que todo otro símbolo distinto de s_1 es emitido con probabilidad p_{all} (i.e., $P_S(s_i) = P_S(s_j) = p_{\text{all}},\ 1 < i, j \leq n$). Sean C_1, C_2 y C_3 tres códigos binarios sobre S definidos como sigue:

$$C_1(s_i) = \mathrm{bin}_n(i) \qquad C_2(s_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ 1\,\mathrm{bin}_{n-1}(i-1) & \text{si } i > 1 \end{cases} \qquad C_3(s_i) = \begin{cases} \mathrm{bin}_n(0) & \text{si } i = 1 \\ \mathrm{bin}_{n/2}(\lfloor i/2 \rfloor) & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

En estas definiciones, $\mathrm{bin}_k(j)$ indica la representación binaria de j utilizando exactamente $\lceil \log_2(k+1) \rceil$ bits.

La figura que sigue muestra la gráfica de $H(S)/L(C_i)$ en función de p_1, para un valor fijo de n.



a. Determinar qué curva corresponde a cada uno de los códigos.

3.2. Resolución

a. La idea es desplegar la expresión de $L(C_i)$ a partir de los datos que nos dan para luego poder llevar lo que observamos en el gráfico a las expresiones y así determinar la correspondencia. No obstante, observemos primero que de la definición de S se desprende que

$$p_{\text{all}} = \frac{1-p_1}{n-1}$$

Tenemos entonces:

- $L(C_1) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$
  Esto es así pues todo símbolo asume una codificación de este largo.
- $L(C_2) = p_1 + (1-p_1)\,(1 + \lceil \log_2(n) \rceil)$
  En este caso, s_1 tiene una codificación de un bit, y los demás símbolos tienen todos igual largo: un bit (por el prefijo 1) más los bits de la representación binaria.
- $L(C_3) = p_1\, \lceil \log_2(n+1) \rceil + (1-p_1)\, \lceil \log_2(n/2+1) \rceil$
  Similar al anterior. Cambia el largo de la codificación de s_1 y y el largo constante de los demás símbolos.

Por otra parte, tenemos que la entropía viene dada por

$$H(S) = -p_1\, \log_2(p_1) + (1-p_1)\, \log_2\left(\frac{n-1}{1-p_1}\right)$$

Ahora bien, analicemos qué ocurre cuando p_1 se aproxima a 0. En esta situación, la entropía de S crecerá y se asemejará a la entropía de una fuente equiprobable de $n-1$ símbolos:

$$H(S) \underset{p_1 \to 0}{\longrightarrow} H = \log_2(n-1)$$

Por otro lado, las longitudes medias tenderán a los siguientes valores:

- $L(C_1) \underset{p_1 \to 0}{\longrightarrow} L_1 = \lceil \log_2(n+1) \rceil$
- $L(C_2) \underset{p_1 \to 0}{\longrightarrow} L_2 = 1 + \lceil \log_2(n) \rceil$
- $L(C_3) \underset{p_1 \to 0}{\longrightarrow} L_3 = \lceil \log_2(n/2+1) \rceil = \lceil \log_2(n+2) \rceil - 1$

Es claro que $L_1, L_2 \geq H$. Por este motivo, ya podemos afirmar que la curva de línea completa corresponde a C_3. Por otra parte, n tiene que ser mayor a 2 porque si fuese 2 la entropía tendería a 0 cuando p1 tiende a cero. Para $n > 2$, se tiene que siempre $L_2 > L_1$. De esta forma, la curva punteada representa a C_2 y, por descarte, la curva a rayas representa a C_1.

4. Cuarto ejercicio

4.1. Enunciado

Calcule la Capacidad de Volumen (cantidad de bits que entran simultáneamente) en cada uno de los siguientes medios físicos de transmisión, asumiendo que se los utiliza a su máxima Capacidad de Transmisión (es decir, sin pérdida de información):

a. $D = 100km$, $V_{prop} = 200000km/s$, $SNR = 100dB$, $B = 400Hz$

b. $D = 100km$, $V_{prop} = 200000km/s$, $SNR = 10dB$, $B = 400kHz$

c. $D = 100km$, $V_{prop} = 300000km/s$, $SNR = 10dB$, $B = 400kHz$

d. $D = 100m$, $V_{prop} = 300000km/s$, $SNR = 10dB$, $B = 400kHz$

4.2. Resolución

Para calcular la capacidad de volumen, necesitamos $Delay$ y V_{tx}. Primero calculamos la Capacidad de Transmisión de Shannon para obtener la V_{tx} (dejamos la resolución para el inciso b):

$C = B * log_2(1 + SNR[dB])$
$C = 400kHz * log_2(1 + 10[dB])$
$C = 400kHz * log_2(1 + 10[veces])$
$\Rightarrow V_{tx} \leq 1383{,}7Kbps$

Ahora $Delay$:
$Delay = T_{prop} + T_{tx}$
$Delay = \frac{D}{V_{prop}} + \frac{|Unidad\ de\ Datos|}{V_{tx}}$
$Delay = \frac{100km}{200000km/s} + \frac{1bit}{1383Kbps} =$
$Delay = 0{,}0005seg = 0{,}5ms$

Finalmente:
$C_{vol} = Delay * V_{tx} = 691bits$

5. Quinto Ejercicio

5.1. Enunciado

Un robot trepador sube escalando el monte Everest con una cámara. La señal de video de la cámara se transmite sobre un enlace inalámbrico que tiene una relación señal a ruido del orden de los 30dB, usando 50KHz del espectro. A su vez, se modela la señal de video como una fuente de información, definiendo cada símbolo como cada una de las imágenes posibles y asumiendo que son todas equiprobables.

a. Si queremos enviar 26 imágenes por segundo, ¿cuál es el máximo valor de entropía que puede adoptar la fuente?

b. ¿Cuál es la distancia para la cual el T_{tx} de una imagen representa el 50 % del delay? ($V_{prop} = 300000$km/s)

5.2. Resolución

a. Si queremos poder transmitir 26 imágenes por segundo, necesitaremos una velocidad de transmisión $V_{tx} \geq L \cdot 26$ bps, en donde L indica la longitud media de cada imagen. Tenemos entonces que $L \leq V_{tx}/26$. Como además la transmisión debe darse sin pérdida de información (de lo contrario la señal del robot perdería toda utilidad), sabemos que $H(S) \leq L$. Luego, juntando ambas desigualdades, llegamos a que $H(S) \leq V_{tx}/26$. Ahora bien, para calcular V_{tx} podemos usar el teorema de Shannon con los datos suministrados por el ejercicio:

$$V_{tx} = B \cdot \log_2(1 + \text{SNR}) = 50\,\text{KHz} \cdot \log_2(1 + 10^{30/10}) \approx 498{,}36\,\text{Kbps}$$

b. Ahora nos piden hallar la distancia D que verifica que $\text{Delay}/2 = T_{tx}$. De la definición de delay, tenemos entonces que

$$\text{Delay} = T_{tx} + T_{prop} = 2 \cdot T_{tx} \Rightarrow T_{prop} = T_{tx}$$

Utilizando las definiciones de tiempo de propagación y de tiempo de transmisión,

$$\begin{aligned} T_{prop} = T_{tx} \quad &\Leftrightarrow \quad D/V_{prop} = |\text{imagen}|/V_{tx} \\ &\Rightarrow \quad D = \frac{V_{prop} \cdot |\text{imagen}|}{V_{tx}} \end{aligned}$$

Luego, basta sustituir en esta ecuación los valores conocidos de V_{tx} y V_{prop}, teniendo en cuenta que, por equiprobabilidad, $|\text{imagen}| = \lceil V_{tx}/26 \rceil$.