BIẾN ĐỔI XÂU

Cho một xâu ký tự $S = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ chỉ gồm các ký tự ∈ {A,B}. Có hai phép biến đổi:

- $P(i)$: Thay ký tự s_i thành ký tự khác (từ A thành B hoặc từ B thành A)
- $Q(i)$: Thay toàn bộ các ký tự từ s_0 tới s_i bởi ký tự khác (từ A thành B hoặc từ B thành A).

Yêu cầu: Xác định số ít nhất các phép biến đổi để biến xâu S thành xâu gồm toàn chữ A

Ví dụ: Với xâu S là BBABBBBA ta có thể thực hiện phép $P(2)$ được xâu BBBBBBBA, sau đó thực hiện tiếp phép $Q(6)$ để được xâu AAAAAAA.

Dữ liệu: Vào từ file văn bản STR.INP gồm 1 dòng chứa xâu S gồm không quá 10^6 ký tự ∈ {A,B}

Kết quả: Ghi ra file văn bản STR.OUT một số nguyên duy nhất là số phép biến đổi theo phương án tìm được.

STR.INP	STR.OUT
BBABBBBA	2

Thuật toán

Trước hết cần nhận xét (*): **Thứ tự các phép biến đổi không quan trọng, một tập các phép biến đổi sẽ cho ra một xâu duy nhất bất kể ta thực hiện theo thứ tự nào.**

Hệ quả:

- Sẽ không có phép biến đổi nào được thực hiện hai lần tại cùng một vị trí
- Ta sẽ thực hiện các phép biến đổi theo thứ tự tăng dần của vị trí mà không ảnh hưởng tới kết quả

Với mỗi $i = 0,1,\dots,n-1$

- Gọi $f[i]$ là số phép biến đổi ít nhất để biến dãy $s_0 s_1 \dots s_i$ thành toàn chữ A
- Gọi $g[i]$ là số phép biến đổi ít nhất để biến dãy $s_0 s_1 \dots s_i$ thành toàn chữ B

(*) Dễ thấy rằng $f[i] \le g[i] + 1$ và $g[i] \le f[i] + 1$ vì ta có thể biến toàn dãy $s_0 \dots s_i$ thành toàn chữ A theo cách biến nó thành chữ B hết (mất $g[i]$ phép) rồi thực hiện $Q(i)$, cũng như có thể biến toàn dãy $s_0 \dots s_i$ thành toàn chữ B theo cách biến nó thành chữ A hết (mất $f[i]$ phép) rồi thực hiện $Q(i)$,

Trường hợp $i = 0$

- Nếu $s[0] = 'A'$, ta có $f[0] = 0$ và $g[0] = 1$
- Nếu $s[0] = 'B'$, ta có $f[0] = 1$ và $g[0] = 0$

Ta xây dựng công thức tính $f[i]$ và $g[i]$ trong trường hợp đã biết $f[0 \dots i-1]$ và $g[0 \dots i-1]$ như sau:

Xét trường hợp $s[i] = 'A'$, trường hợp $s[i] = 'B'$ tương tự.

Tính $f[i]$:

Có hai cách thức sau đây để biến dãy $s_0 s_1 \dots s_{i-1} s_i$ thành toàn chữ A

- Không tác động gì lên vị trí i: Khi đó ta phải biến dãy $s_0 s_1 \dots s_{i-1}$ thành toàn chữ A mất $f[i-1]$ phép biến đổi
- Có tác động lên vị trí i, khi đó theo nhận xét (*), ta phải thực hiện hai phép $P(i)$ và $Q(i)$. Tức là biến dãy $s_0 s_1 \dots s_{i-1}$ thành toàn chữ B trước (mất $g[i-1]$ phép) sau đó thực hiện $P(i)$ rồi $Q(i)$. Trong trường hợp này mất $g[i-1] + 2$ phép biến đổi và từ (*), phương án này tồi hơn phương án trước ($g[i-1] + 2 > f[i-1]$) nên sẽ không được xét

Vậy $f[i] = f[i-1]$

Tính $g[i]$:

Vì $s[i] = 'A'$, bắt buộc ta phải tác động một phép biến đổi $P(i)$ hoặc $Q(i)$ lên vị trí i. Tức là có hai cách thức sau để biến dãy $s_0 s_1 \dots s_{i-1}$ thành toàn chữ B:

- Biến dãy $s_0 s_1 \dots s_{i-1}$ thành toàn chữ B (mất $g[i-1]$ phép) rồi thực hiện $P(i)$, tổng cộng $g[i-1] + 1$ phép
- Biến dãy $s_0 s_1 \dots s_{i-1}$ thành toàn chữ A (mất $f[i-1]$ phép) rồi thực hiện $Q(i)$, tổng cộng $f[i-1] + 1$ phép

Vì ta muốn $g[i]$ bé nhất có thể, nên $g[i] = \min\{f[i-1] + 1, g[i-1] + 1\}$

Tổng hợp lại công thức tính:

khi $s[i] = 'A'$:

$$\begin{cases} f[i] = f[i-1] \\ g[i] = \min\{f[i-1], g[i-1]\} + 1 \end{cases}$$

Tương tự khi $s[i] = 'B'$:

$$\begin{cases} f[i] = \min\{f[i-1], g[i-1]\} + 1 \\ g[i] = g[i-1] \end{cases}$$

Dùng công thức này tính hai dãy $f[0 \dots n-1]$ và $g[0 \dots n-1]$, kết thúc quá trình tính toán đưa ra đáp số là $f[n-1]$