



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

EA de recherche - Convergence de schémas numériques pour la simulation de processus d'Itô

BENYAMINE Axel, FÉVRIER Guillaume, LAMBERT Julien

Sommaire



Présentation du problème



p. 3

Résultats théoriques



p. 7

Recherche de solutions



p. 13

Simulations numériques



p. 21

Présentation du problème

Importance dans les faits

Les lois des processus d'Itô sont souvent très difficiles à déterminer analytiquement :

- Rôle de la simulation numérique
- Implique une discrétisation du temps et du processus

Problème

- Processus d'Itô : $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$
- Approximation par une chaîne de Markov : $\forall k \in \mathbb{N}, X_{t_{k+1}}^n = \phi\left(X_{t_k}^n, \frac{Z_{k+1}}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right)$
- La fonction ϕ est appelée *schéma*

Notion de convergence

- Convergence en variation totale (ordre h) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\mathbb{E}_x [f(X_T)] - \mathbb{E}_x [f(X_T^n)]| \leq C \frac{\|f\|_\infty}{n^h}$$

- Version affaiblie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\mathbb{E}_x [f(X_T)] - \mathbb{E}_x [f(X_T^n)]| \leq C \frac{\|f\|_{\infty,q}}{n^h}$$

Résultats théoriques

Passage du temps court au temps long

Théorème

Proposition 3.1. Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists L_n > 0, \forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \|P_{1/n}^n f\|_{\infty,q} \leq L_n \|f\|_{\infty,q} \quad (3.1)$$

et la suite $((L_n)^n)_n$ est bornée par un $L \geq 1$.

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \|P_{1/n} f - P_{1/n}^n f\|_{\infty} \leq C \|f\|_{\infty,q} n^{-(1+h)} \quad (3.2)$$

Alors il existe $K > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, |\mathbb{E}_x [f(X_1) - f(X_1^n)]| \leq K \frac{\|f\|_{\infty,q}}{n^h}$$

c'est-à-dire que le schéma est d'ordre h .

Conditions suffisantes

Deux développements

Proposition 3.2. Il existe $K > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \mathbb{E}_x \left[f \left(X_{\frac{1}{n}}^n \right) \right] - \sum_{s=0}^h n^{-s} \sum_{l=0}^s \frac{\mathbb{E}[Z^{2l}]}{(s-l)!(2l)!} \partial_z^{s-l} \partial_y^{2l} (f \circ \phi)(x, 0, 0) \right| \leq K \frac{\|f\|_{\infty, 2h+2}}{n^{1+h}} \quad (3.3)$$

Proposition 3.3. Il existe $K > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \mathbb{E}_x \left[f \left(X_{\frac{1}{n}}^n \right) \right] - \sum_{s=0}^h n^{-s} \frac{A^s f(x)}{s!} \right| \leq K \frac{\|f\|_{\infty, 2h+2}}{n^{1+h}} \quad (3.4)$$

Conditions suffisantes

Théorème 3.1. Si ϕ est tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R}), \forall s \in \llbracket 1, h \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{A^s f(x)}{s!} = \sum_{l=0}^s \frac{\mathbb{E}[Z^{2l}]}{(s-l)!(2l)!} \partial_z^{s-l} \partial_y^{2l} (f \circ \phi)(x, 0, 0) \quad (3.5)$$

alors ϕ est un schéma d'ordre h .

→ Principe d'invariance

Recherche de solutions

Forme polynomiale

- Recherche de schémas sous forme polynomiale :

$$\phi(x, y, z) = x + \sum_{k=1}^d \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} \partial_y^l \partial_z^{k-l} \phi(x, 0, 0) y^l z^{k-l}$$

- Polynôme de degré h pour une solution d'ordre h :

$$\forall k > h, \forall l \in \llbracket 0, k \rrbracket, \partial_y^l \partial_z^{k-l} \phi(x, 0, 0) = 0$$

- Résolution explicite à partir du théorème précédent en identifiant les coefficients devant les dérivées de f

Ordre 1 : Schéma d'Euler

Solution

- On retrouve le schéma d'Euler :

$$\partial_y \phi(\cdot, 0, 0) = \sigma$$

$$\partial_z \phi(\cdot, 0, 0) = b$$

Ordre 2

Solution

— — — — —

$$\partial_y \phi(\cdot, 0, 0) = \sigma$$

$$\partial_z \phi(\cdot, 0, 0) = b - \frac{\sigma\sigma'}{2}$$

$$\partial_y^2 \phi(\cdot, 0, 0) = \sigma\sigma'$$

$$\partial_z^2 \phi(\cdot, 0, 0) = bb' + \frac{\sigma^2}{2}b''$$

$$\partial_y \partial_z \phi(\cdot, 0, 0) = \frac{\sigma^2 \sigma''}{4} + \frac{b\sigma' + \sigma b'}{2}$$

Ordres supérieurs

Ordre 3 et supérieurs

Complexification des calculs à la main : peu de confiance dans nos résultats à l'ordre 3

→ Un logiciel de calcul formel serait plus adapté

$$\partial_y \phi(\cdot, 0, 0) = \sigma$$

$$\partial_z \phi(\cdot, 0, 0) = b - \frac{\sigma \sigma'}{2}$$

$$\partial_y^2 \phi(\cdot, 0, 0) = \sigma \sigma'$$

$$\partial_z^2 \phi(\cdot, 0, 0) = \frac{6bb' - 2b\sigma'^2 - 4b\sigma\sigma'' + b''\sigma^2 - 4b'\sigma\sigma' - 5\sigma^2\sigma'\sigma'' - 3\sigma\sigma'^3 - 2\sigma^3\sigma^{(3)}}{6}$$

$$\partial_y \partial_z \phi(\cdot, 0, 0) = \frac{\sigma'b + \sigma b'}{2} - \frac{\sigma^2\sigma'' + 2\sigma\sigma'^2}{4}$$

$$\partial_y^3 \phi(\cdot, 0, 0) = \sigma^2\sigma'' + \sigma\sigma'^2$$

$$\partial_z^3 \phi(\cdot, 0, 0) = \frac{4bb'^2 + 4b^2b'' + bb^{(3)}\sigma^2 + 6b'b''\sigma^2 + b^{(4)}\sigma^4 + 4b^{(3)}\sigma^3\sigma' + 2b''\sigma^2\sigma'^2 + 2b''\sigma^3\sigma''}{4}$$

$$\partial_y^2 \partial_z \phi(\cdot, 0, 0) = \frac{2b\sigma'^2 + 4b\sigma\sigma'' + 2b''\sigma^2 + 4b'\sigma\sigma' + 5\sigma^2\sigma'\sigma'' + 3\sigma\sigma'^3}{6}$$

$$\partial_y \partial_z^2 \phi(\cdot, 0, 0) = \frac{2b^2\sigma'^2 + 10b'^2\sigma^2 + 2.5\sigma^4\sigma''^2 - 56\sigma^2\sigma'^2 + 18bb'\sigma\sigma' - 5b\sigma^2\sigma'\sigma''}{24\sigma}$$

$$+ \frac{7\sigma^3\sigma'^2\sigma'' - 6b\sigma\sigma'^3 - 5b'\sigma^3\sigma'' - 6b'\sigma^2\sigma'^2 + 16bb''\sigma^2 + 6b''\sigma^3\sigma'}{24\sigma}$$

$$+ \frac{8\sigma^4\sigma'\sigma^{(3)} + 8b^2\sigma\sigma'' + b\sigma^3\sigma^{(3)} + 8b^{(3)}\sigma^2 + 2\sigma^5\sigma^{(4)}}{24\sigma}$$

Simulations numériques

Simulation et estimation des espérances

Estimation de la valeur exacte $\mathbb{E}[f(X_T)]$:

- La loi de X_T est connue
- Il faut simuler $\mathbb{E}[f(X_T)]$ avec une $|\mathbb{E}[f(X_T)] - f(X_T^N)|$

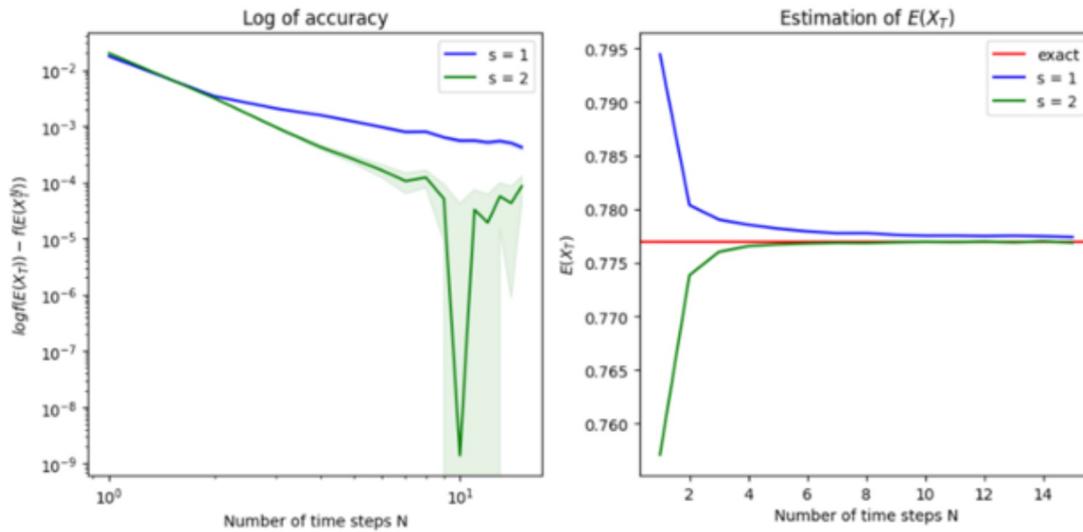
Simulations de Monte-Carlo :

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \ll \frac{1}{N^s}$$

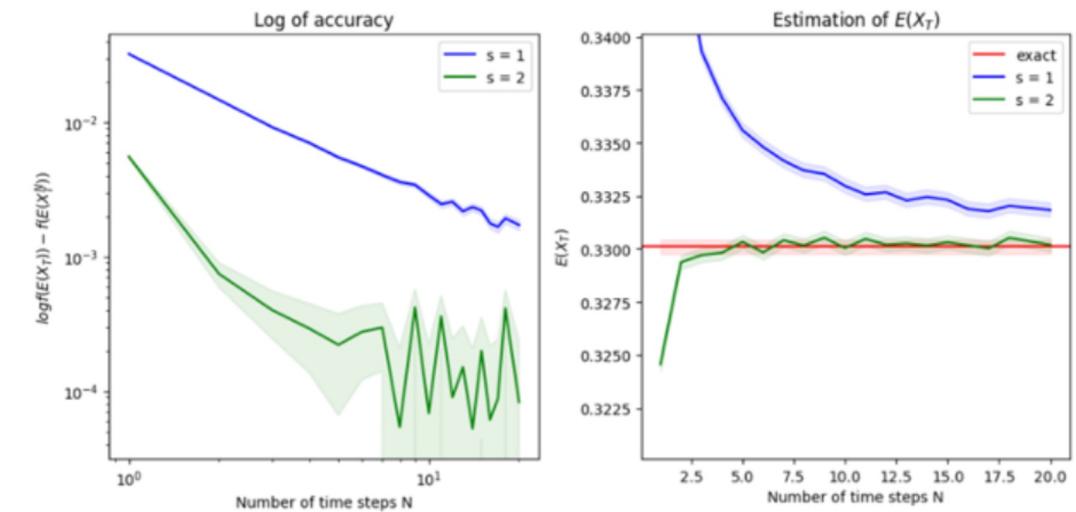
Cas de notre étude

Simulations

— — — — —



Etude de la convergence pour $b = \cos$, $\sigma = \sin$, $f = \text{sigmoid}$

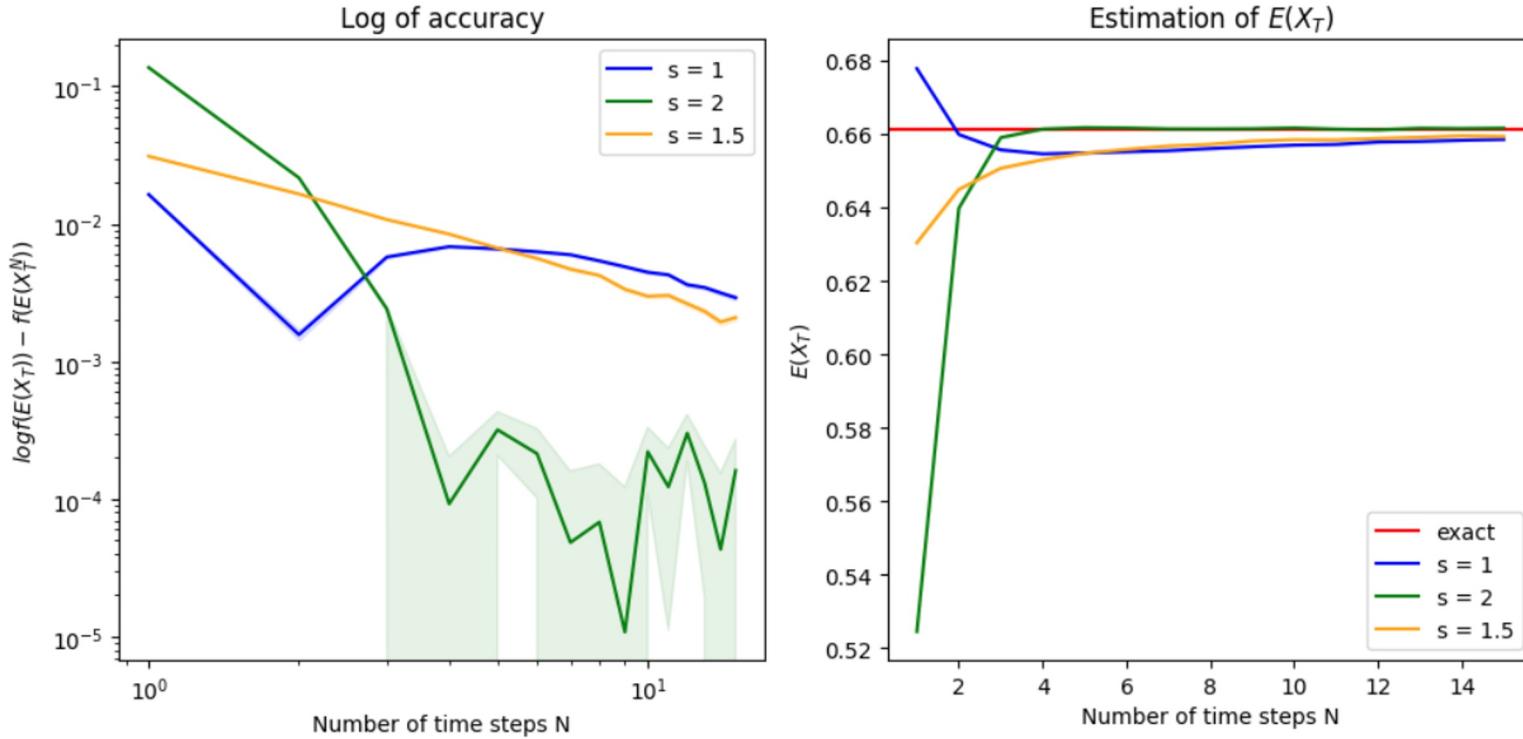


Etude de la convergence pour $f = \tanh$

$$X_t = h(h^{-1}(X_0) + W_t)$$

$$h(x) = x + \log(1 + e^x)$$

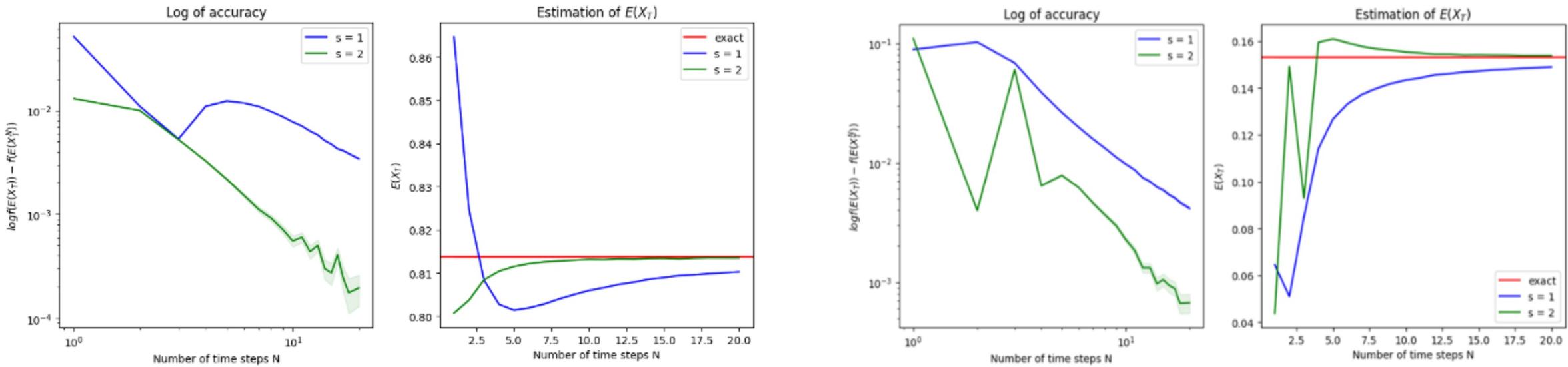
Principe d'Invariance



Etude de la convergence pour $b = \cos$, $\sigma = \sin$, $f = \text{sigmoid}$

Cas plus général

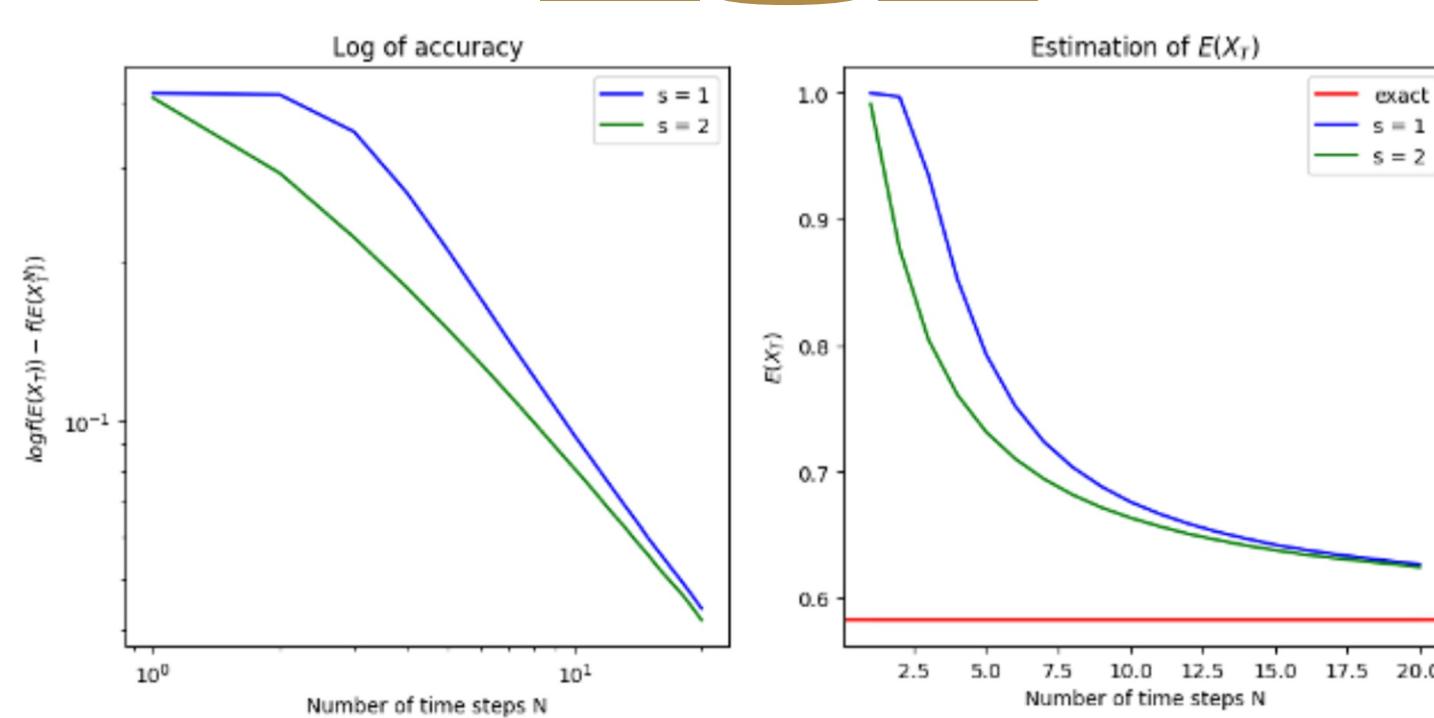
Simulations



Etude de la convergence pour $\mu = 1$, $\sigma = 1$, $f = \tanh$
 $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$

Figure 14: Etude de la convergence pour $b(x) = 5(1 - x)$, $\sigma = 1$, $f(x) = \mathbb{1}_{(0 \leq x \leq 0.5)}$ et différents ordres s

Simulations

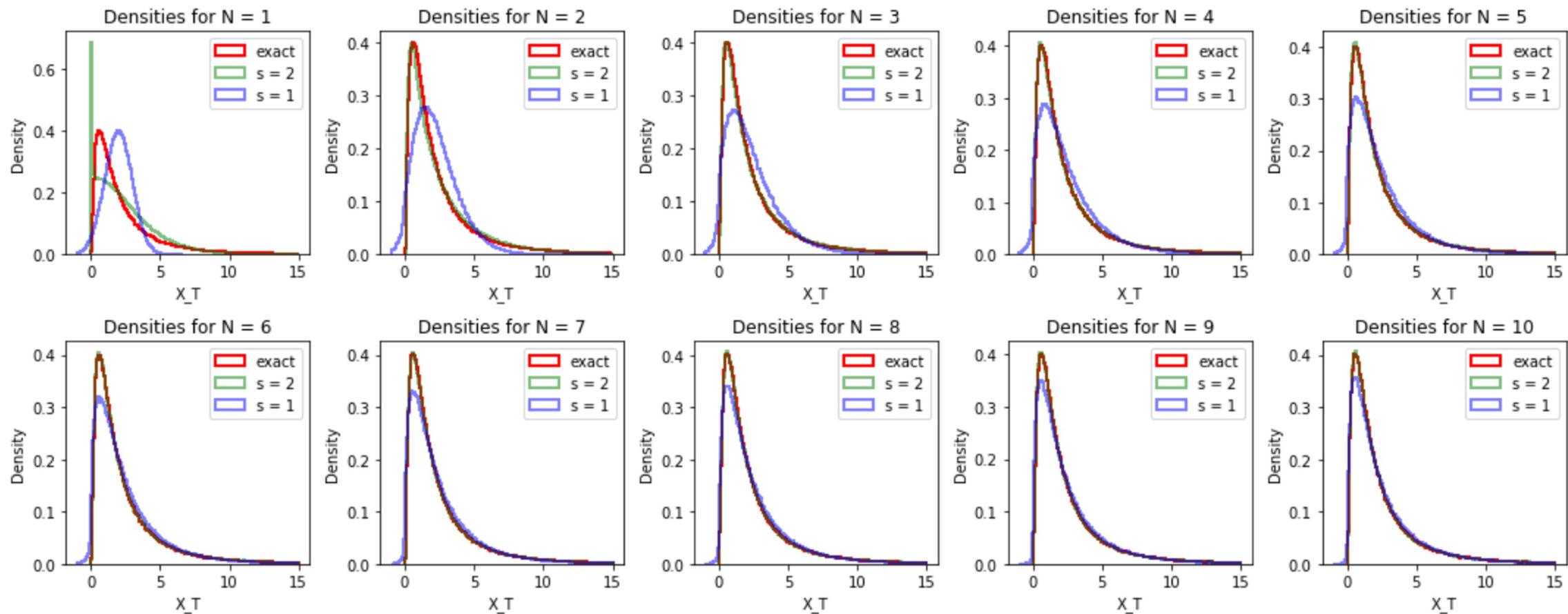


Etude de la convergence pour $\mu = 3$, $\sigma = 1$, $f(x) = \mathbb{1}_{(0 \leq x \leq 15)}$

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

Convergence de densités

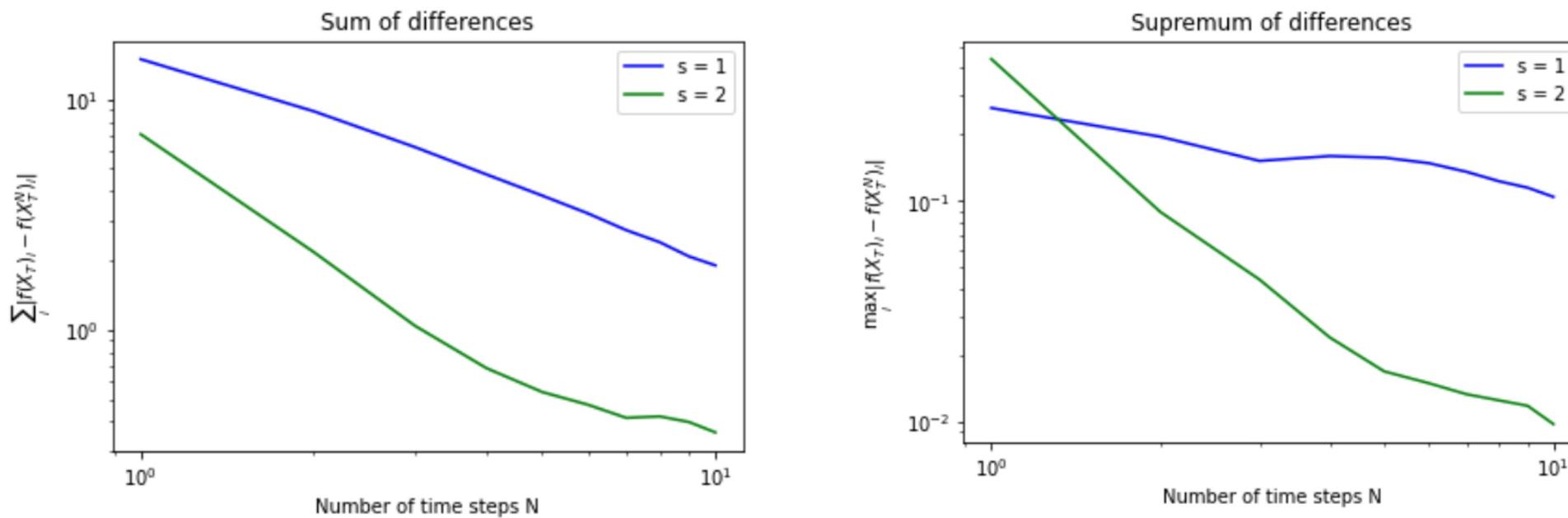
Simulations



Etude de la convergence pour $\mu = 1$, $\sigma = 1$

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

Simulations



Etude de la convergence pour $\mu = 1, \sigma = 1$

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

Merci



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS