Topología – 2° cuatrimestre 2015
Espacios topológicos

Ejercicio para entregar

Sea X un espacio topológico con la propiedad de que toda intersección arbitraria de abiertos es abierta. Para cada $x \in X$, denotamos U_x a la intersección de todos los abiertos que contienen a x. Definimos una relación $\leq$ en X vía $x \leq y$ si y sólo si $x \in U_y$.

Pruebe que $\leq$ es de equivalencia si y sólo si $\forall F \subseteq X$ cerrado, $\forall x \notin F$, $\exists f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = \{1\}$.

Demostración Notemos primero que $\leq$ siempre es reflexiva y transitiva!

- Reflexiva

  Como $x \in U_x$ entonces $x \leq x$

- transitiva

  Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $y \in U_z$ y $x \in U_y$. Sea $U \ni z$ entorno abierto, entonces como $y \in U_z \subset U$ tenemos que $y \in U$, por ende $x \in U_y \subset U$, o sea que $x \in U$. Por ende como U era arbitrario $x \in U_z$.

Ahora si veamos la proposición!

- $\Longrightarrow)$

  Supongamos que $\leq$ es de equivalencia, o sea que si $x \in U_y$ entonces $y \in U_x$! Sea F un cerrado tal que $x \notin F$ y sea $f = \chi_F$, es claro que $f(F) = \{1\}$ y que $f(x) = 0$, veamos que f es continua! Por el ejercicio 23 esto es equivalente a que $x \notin \partial(E)$!, afirmo que $\partial(F) = \emptyset$.

  En efecto, $X = \bigcup_{\overline{x}} U_x$ y es una unión disjunta pues si $x \sim y$ entonces $U_x = U_y$, o sea que tenemos la partición en abiertos dada por $X = \coprod_x U_x$ donde uno sobre x no relacionados, por ende $F = \coprod_x U_x \cap F$. Supongamos que $x \in F$, $y \in F^c$ pero $x \sim y$, entonces como $y \in F^c$ tenemos que $U_y \subset F^c$, pero entonces $x \in U_y \subset F^c$ ABS! Por ende $U_x \cap F = U_x$ o $U_x \cap F = \emptyset$ y por ende F es abierto. Por lo tango $\partial F = \emptyset$ y f es continua.

- $\Longleftarrow)$

  Supongamos que $x \leq y$ pero $y \not\leq x$, entonces $x \in U_y$ pero $y \notin U_x$, entonces $\exists U \ni x$ tal que $y \notin U$, sea entonces $F = U^c$, entonces $\exists f$ continua tal que $f(U^c) = \{1\}$ y $f(x) = 0$ por ende U^c es abierto y cerrado. Por ende $U^c \ni y$ es un abierto que contiene a y pero que $x \notin U^c$ ABS! Pues $x \in U_y$. Entonces $y \leq x$ y $\leq$ es de equivalencia. ∎

1. Ejercicio 1

   Demostración Veamos que es una topología!

   - $\emptyset, Y \in \tau_Y$
     Como $\emptyset \in \tau$ entonces $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \tau_Y$, análogo $Y = X \cap Y \in \tau_Y$.
   - $\cup_j U_j$
     Sean $U_j \in \tau_Y$ entonces $U_j = Y \cap V_j$ con $V_j \in \tau$, entonces $\cup_j U_j = Y \cap \cup_j V_j \in \tau_Y$ pues $\cup_j V_j \in \tau$.
   - $F_1 \cap F_2$ Análogo. ∎

2. Ejercicio 2

Demostración Es claro y los cerrados son los conjuntos finitos ∎

3. Ejercicio 3

   Demostración Sea $\tau_A = \{\cap U_i \subset \mathbb{R}\ ,\ \texttt{intersecciones finitas de abiertos}\ /\ diam(U_i) = \infty\} \cup \{\emptyset\}$, entonces veamos que τ_A es una topología!

   - $\emptyset, \mathbb{R}$ Por definición $\emptyset \in \tau_A$ y como $\mathbb{R}$ es abierto y no acotado, entonces $\mathbb{R} \in \tau_A$.
   - $\cup_j U_j$
     Es claro que $\cup_j U_j$ es abierto pues es unión de abiertos, mientras que $U_j \subset \cup_j U_j$ entonces $diam(\cup_j U_j) \geq diam(U_j) = \infty$, por lo que $\cup_j U_j \in \tau_A$.
   - $U_1 \cap U_2$
     Por definición.

   Por ende τ_A es una topología, cuyos cerrados son las uniones finitas de cerrados acotados, pero eso es un cerrado acotado (pues unión finita de cerrados es cerrado). ∎

4. Ejercicio 4

   Demostración Es claro que es una topología! Afirmo que es más fina que la usual! En efecto, basta verlo en las bolas, y aquí es trivial ver que toda bola es radialmente abierta. No obstante $B(0,1) \cup \{y = 0\}$ es radialmente abierto (tomo $p = (0,0)$) pero no es abierto con la topología usual! Por ende $\tau_{met} \subsetneq \tau_{rad}$ ∎

5. Ejercicio 5

   Demostración *a*) Trivial

   b) Trivial

   c) Molesto ∎

6. Ejercicio 6

   Demostración Tan molesto como el anterior, es simplemente jugar con conjuntos.

7. Ejercicio 7

   Demostración Es claro que es un operador clausura pues $A \subseteq A \cup B$ y $A \cup B \cup B = A \cup B$, y los cerrados son los puntos fijos de c, o sea $A\ /A \cup B = A$, o sea que $B \subseteq A$. Por ende los abiertos son los $A \subseteq X$ tal que $A \subseteq B^c$

8. Ejercicio 8

   Demostración Trivial y tengo tiempo finito

9. Ejercicio 9

   Demostración Los cerrados son los finitos y los abiertos son los de complemento finito, por ende es ver dependiendo si X es finito o no. ∎

10. Ejercicio 10

   Demostración Si $x_0 \in U$ etonces U es abierto y su clausura es X y al revés si no. $\blacksquare$

11. Ejercicio 11

   Demostración *a)* $\{(\frac{1}{n}, 0)\ ,\ n \in \mathbb{N}\} := B$

   Notemos que $A \subseteq \mathring{A}$ sii $A \subseteq B$ y A abierto, pero si $A \subseteq B$ entonces $\exists J \subset \mathbb{N}$ tal que $A = \{(\frac{1}{m}, 0), m \in J\}$ pero si $(\frac{1}{m}, 0) \in A$ entonces un entorno abierto $V \ni x$ vale que $(\frac{1}{m+1}, 1) \in V$ y $(\frac{1}{m+1}, 1) \notin A$, por ende el único subconjunto abierto de B es $\emptyset$, por ende $\mathring{B} = \emptyset$. Por otro lado si $B \subseteq C$ con C cerrado, entonces $\lim_n (\frac{1}{n}, 0) \in C$. Afirmo que $\lim_n (\frac{1}{n}, 0) = (0, 1)$! En efecto sea $V \ni (0, 1)$ entorno, entonces $((0, 1-\epsilon), (\delta, \gamma)) \subset V$, por Arquimedianidad $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$ y por ende $(\frac{1}{n}, 0) \in V\ \forall n \geq N$, entonces $\lim_n (\frac{1}{n}, 0) = (1, 0)$. Por ende $\overline{B} = B \cup \{(0, 1)\}$.

   b) $\{(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2})\ ,\ n \in \mathbb{N}\} := B$

   Por el mismo motivo que el item anterior tenemos que $\mathring{B} = \emptyset$, por otro lado afirmo que B es cerrado. En efecto si $(x, y) \in I^2$ entonces $((x, y-\epsilon), (x, y+\epsilon)) := V$ es un entorno abierto de (x, y) y si $x \neq 1 - \frac{1}{n}$ entonces $b_n \notin V\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por ende si $B \subseteq F$ cerrado, entonces $B = F$, por ende $\overline{B} = F$.

   c) $\{(x, 0)\ ,\ 0 < x < 1\} := B$

   Sea $x \in B$ entonces $((x-\epsilon, 1-\delta), (x, \gamma)) \ni x$ es un entorno abierto de x, pero $(1-\epsilon, 1) \in V$ *y* $(1-\epsilon, 1) \notin B$, por ende $\mathring{B} = \emptyset$. Por otro lado si (x, δ) con $0 < x < 1$ entonces $V := ((x, \delta - \frac{\delta}{2}), (x, \delta + \frac{\delta}{2}))$ cumple que $b \notin V\ \forall b \in B$, por ende (si hacemos como en a)) es fácil ver que $\overline{B} = B \cup \{(0, 1), (1, 0)\}$.

   d) $\{(x, \frac{1}{2}\ ,\ 0 < x < 1)\} := B$

   Sea $x \in B$, entonces $((x, \frac{1}{3}), (x, \frac{2}{3})) := V$ cumple que $V \subsetneq B$ y por ende $\mathring{B} = \emptyset$. Por otro lado como hicimos antes tenemos que $\overline{B} = B$.

   e) $\{(\frac{1}{2}, y)\ ,\ 0 < y < 1\}$

   Es claro que $\mathring{B} = B$, por otro lado $\overline{B} = [(\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2}, 1]$ $\blacksquare$

12. Ejercicio 12

   Demostración Sea F cerrado, basta hallar A tal que $\overline{A} = F$ y que $\mathring{A} = \emptyset$, entonces tomemos $A = F \cap \mathbb{Q}$, entonces como A tiene la topología subespacio, vale lo pedido pues $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\blacksquare$

13. Ejercicio 13

   Demostración Es claro que $\cap \tau_\alpha$ es topología verificando los axiomas, por otro lado sea $X \times Y$ el producto de dos espacios topológicos, y sea $\tau' = \{U \times Y, U \in \tau_X\}$ y sea $\tau'' = \{X \times Y, V \in \tau_Y\}$ entonces $U \times Y \cap X \times V \notin \tau_X \cup \tau_Y$ y por ende no es topología. $\blacksquare$

14. Ejercicio 14

   Demostración Sea $\sigma(A) = \bigcap_{A \in \tau_i} \tau_i$, entonces es claro que $\sigma(A)$ cumple las dos propiedades! Es claro que $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \mathcal{A}, \{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{a, b, c\}\{b, c, d\}\}$.

15. Ejercicio 15

   Demostración Para verlo notemos que $X = \bigcup_{x \in X} S_x$ y por ende generan, y además $S_y \cap R_x = (x, y)$ y por ende intersecciones finitas de $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ genera la base de τ_{ord}. $\blacksquare$

16. Ejercicio 16

Demostración *a*) Veamoslo de a poquito!

Por un lado es claro que son base! Además tenemos que:

- $(a,b) = \bigcup_n [a - \frac{1}{n}, b)$
- $(a,b) = \bigcup_n (a, b - \frac{1}{n}]$
- $(a,b) \in \mathcal{B}_4$
- $(a,\infty) = \bigcup_n (a,n)$
- $(-\infty,a) = \bigcup_n (-n,a)$
- $B \in \tau_{cofin} \implies B = (-\infty,a_1) \cup \bigcup (a_i,a_{i+1}) \cup (a_n,\infty)$
- $x \in (a,b) - K$ entonces si $x \leq 0$tenemos que $x \in (a,x] \subset U$, sino sea N el más chico tal que $\frac{1}{N} < x$ entonces $U \cap (\frac{1}{N}, x] = (y,x]$ con $y = \frac{1}{N}\chi_{\frac{1}{N}>a} + a\chi_{a>\frac{1}{N}}$ entonces $x \in (y,x] \subset (a,b) - K$
- Idem antes con $[y,x)$

Por ende $\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_5 \subsetneq \mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{B}_4 \subsetneq \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2$.

b) Es claro

c) De a uno!

1) $\overline{K} = K \cup \{0\}$ en τ_1
2) Idem anterior pues $0 \in [0,\epsilon) := V$ y $x_n \in V \forall n$ grande
3) $\overline{K} = K$ en τ_3 pues $(-\epsilon, 0] \ni 0$ es un entorno abierto que no incluye a K! Es más afirmo que $x_n \to x$ en τ_3 sii $x_n \to x$ por la izquierda en la topo usual! Por ende $\frac{1}{n} \not\to x$ para ningún x.
4) Es claro que $(-\epsilon + x, x + \epsilon) - K \ni x$ es un entorno de $x \notin K$ tal que $K \subsetneq V$ por ende $K = \overline{K}$ en τ_4
5) Idem τ_1
6) Idem τ_1
7) Sea $x \notin K$ y sea $V \ni x$ entorno abierto, entonces $V = \mathbb{R} - J$ con $x \notin J$ finito y como K es numerable, tenemos por cardinalidad que $\exists N$ tal que $\frac{1}{n} \in V \ \forall n \geq N$, por ende $\overline{K} = \mathbb{R}$ en τ_7 ∎

17. Ejercicio 17

18. Ejercicio 18

Demostración Ambos son re vagancia hacerlos...

19. Ejercicio 19

Demostración *a*) Sea a tal que $x_\alpha = a \quad \forall \alpha \geq \gamma$ dado, entonces sea $U \ni a$ entorno abierto, entonces $a = x_\alpha \in U \quad \forall \alpha \geq \gamma$ y por ende $x_\alpha \to a$ ∎

b) Sea $x_\alpha \to a$ y sea $f : \Omega \to \Lambda$ cofinal y consideremos $x_{f(\omega)}$ la subred. Sea $U \ni a$ entorno abierto y α' el que cumple que $x_\alpha \in U \ \forall \alpha \geq \alpha'$, entonces como f es cofinal $\exists \omega' \ / \ f(\omega') \geq \alpha'$ y por ende $f(\omega) \geq f(\omega') \geq \alpha' \ \forall \ \omega \geq \omega'$ (pues f preserva el orden). Por ende $x_{f(\omega)} \in U \quad \forall \omega \geq \omega'$y entonces $x_{f(\omega)} \to a$ ∎

c) Supongamos que $x_\alpha \not\to x$, entonces $\exists U \ni x$ tal que $\forall \alpha \exists \alpha' \ / \ x_{\alpha'} \notin U$. Dado $\alpha \in \Lambda$ sea $\beta(\alpha)$ tal que $x_{beta(\alpha)} \notin U$ y sea $D = \{\beta(\alpha), \ \alpha \in \Lambda\}$, entonces D es dirigido y $f = id$ es cofinal, por ende $x_{\beta(\alpha)}$ es una subred de x_α tal que $x_{\beta(\alpha)} \notin U \quad \forall \beta(\alpha)$ por ende no tiene subred convergente. ABS! Por ende $x_\alpha \to x$ ∎

d) Preguntar...

20. Ejercicio 20

Demostración Veamos las dos inclusiones!

- $\subset$)
  Sea $x \in \overline{A}$ entonces dado $U \ni x$ tenemos que $U \cap A \neq \emptyset$. Sea $\Lambda = \{U\ ,\ U \ni x abierto\}$ y le damos el orden $U \geq V \iff U \subset V$, entonces sea $f : \Lambda \to X$ tal que $U \mapsto x_U \in U \cap A$. Entonces x_U es una red y $x_U \to x$!
- $\supseteq$)
  Sea $x \in X$ tal que $\exists x_\alpha \to x$ con $x_\alpha \in A$, y sea $U \ni x$ entorno de x, entonces $x_\alpha \in U \cap A\ \forall \alpha \geq \alpha'$ y por ende $U \cap A \neq \emptyset$! Por ende $x \in \overline{A}$ ∎

21. Ejercicio 21

Demostración
- $\Longrightarrow$)
  Sea $D = \{(\alpha, U)\ ,\ \alpha \in \Lambda\ ,\ x \in U \textit{ abierto tal que } x_\alpha \in U\}$ y démosle el orden $(\alpha, U) \leq (\beta, V)$ *sii* $\alpha \leq \beta\ ,\ V \subseteq U$, veamos que es dirigido! Sean $(\alpha, U), (\beta, V)$ y sea $\gamma \geq \alpha, \beta$ pues Λ es dirigido, entonces como x es punto de acumulación tenemos que $\{\alpha, x_\alpha \in U\}, \{\alpha, x_\alpha \in V\}$ son cofinales y por ende $x_\gamma \in U \cap V$, por ende $(\gamma, U \cap V) \geq (\alpha, U), (\beta, V)$ y por ende D es dirigido. Sea entonces $U \ni x$ entorno abierto, entonces $(\alpha, U) \mapsto x_\alpha$ es una red tal que $x_\alpha \in U \forall (\beta, V) \geq (\alpha, U)$, por ende $x_\alpha \to x$.
- $\Longleftarrow$)
  Sea $A \in \mathcal{F}_x$ entonces $\exists U$ abierto tal que $x \in U \subseteq A$, por ende $\exists \alpha'\ /\ x_\alpha \in U \subset A\ ,\ \alpha \geq \alpha'$, por ende $\{\alpha, x_\alpha \in A\}$ es cofinal ∎.

22. Ejercicio 22

Demostración Teorica ∎

23. Ejercicio 23

Demostración
- $\Longrightarrow$)
  Supongamos que $x \in \partial E$, entonces como $\partial(E) = \partial(E^c)$ tenemos que si $x \in E$ podemos tomar $x_\alpha \in E^c$ y si $x \notin E$ podemos tomar $x_\alpha \in E$, tal que de todos modos $x_\alpha \to x$. Tomamos sin pérdida de generalidad el primer caso, entonces tenemos que $\chi_E(x_\alpha) = 0$ y $\chi_E(x) = 1$ y por ende $\chi_E(x_\alpha) \not\to \chi_E(x)$, por ende χ_E no es continua.
- $\Longleftarrow$)
  Como $x \notin \partial(E)$ tenemos que $x \in \mathring{E}$ o $x \in \mathring{(E^c)}$, tomemos spdg el primer caso. Sea $x_\alpha \to x$ y sea $U \ni x$ entorno abierto de x, notemos que podemos tomar $U \subseteq \mathring{E}$ pues sino tomo $V = U \cap \mathring{E}$. Entonces como $x_\alpha \to x$ tenemos que $x_\alpha \in U \quad \forall \alpha \geq \alpha'$ y por ende $x_\alpha \in E \quad \forall \alpha \geq \alpha'$. Entonces $\chi_E(x_\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \geq \alpha'$ y entonces $\chi_E(x_\alpha) \to \chi_E(x) \quad \forall x_\alpha \to x$, por ende χ_E es continua en x. ∎

24. Ejercicio 24

Demostración
a) Como f es morfismo de orden y biyectivo, entonces es isomorfismo de orden, entonces $f(a,b) = (f(a), f(b))$ y $f^{-1}(a,b) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$, por ende f, f^{-1} son abiertas y por ende f es homeo.
b) Aplicar item a)

c) Trivial que es biytectiva y preserva el orden, pero no es homoe pues uno es conexo y el otro no. ∎

25. Ejercicio 25

Demostración a) Sea $A = \{x \in X \ / \ f(x) \leq g(x)\}$ y notemos que si $f(x) > g(x)$ entonces $\exists U_1 \ni f(x)$ y $U_2 \ni g(x)$ tal que $f(y) > g(z) \quad \forall y \in U_1, z \in U_2$, entonces sea $U = f^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$, entonces U es abierto pues f, g son continuas y cumple que $x \in U \subseteq A^c$, por ende A^c es abierto y entonces A es cerrado.

b) Notemos que $X = A \cup B$ donde A es cerrado y $B = \{x \in X \ / \ f(x) \geq g(x)\}$ también es cerrado. Además tenemos que $h|_A = f$ es continua y $h|_B = g$ es continua, por el lema del pegado h es continua. ∎

26. Ejercicio 26

Demostración a) a),b),c) son de la teórica donde el contraejemplo es $f = \chi_{\{0\}}$ y $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$

b) Sea $x \in X$ y U_x es de la local finitud, entonces $f|_{U_x} = \bigcup_i^n f|_{A_i}$ pues $U \cap A_i = \emptyset$ salvo para finitos, como $f|_{A_i}$ es continua y $U_x = \bigcup_i^n A_i$ entonces por el lema del pegado parte b) tenemos que $f|_{U_x}$ es continua. Ahora como $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ entonces como $f|_{U_x}$ es continua, por el lema del pegado parte a) tenemos que f es continua. ∎