Geometría Proyectiva - 2° cuatrimestre 2016
PRÁCTICA 2

Recuerdo: Sea $\mathbb{C}$ una curva parametrizada por longitud de arco por α, que es derivable y regular. Definimos el vector tangente a $\mathbb{C}$ en el punto $\alpha(s)$ como $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$, el vector normal $\mathbf{n}(s) = \alpha''(s)/|\alpha''(s)|$, y el binormal $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$. La curvatura de $\mathbb{C}$ es $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$, y su torsión es el único número $\tau(s)$ tal que $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$.

El plano generado por $\mathbf{t}, \mathbf{b}$ se llama *plano rectificante*; el generado por $\mathbf{n}, \mathbf{b}$, *plano normal*; y el generado por $\mathbf{t}, \mathbf{n}$, *plano osculador*.

1. Curvas en el espacio

1. Para cada curva parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, calcule la curvatura y la torsión (notar que las curvas *no* están parametrizadas por longitud de arco).

   - $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, con $I = \mathbb{R}$;
   - $\alpha(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$, con $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
   - $\alpha(t) = (t, f(t), g(t))$, con $I = \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables;
   - $\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(t - \cos(t)), bt)$, con $I = \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$;
   - $\alpha(t) = (a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3))$, con $I = \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

Demostración *a)* Notemos que $\dot{\alpha}(t) = (1, 2t, 3t^2)$ y $\ddot{\alpha}(t) = (0, 2, 6t)$, luego $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}(t) = (6t^2, -6t, 2)$. Por lo tanto sabemos que $\kappa_C(t) = \dfrac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{(4 + 36t^2)^{\frac{3}{2}}}$. Por otro lado como $\dddot{\alpha}(t) = (0, 0, 6)$ y que

$$\tau_C = \frac{1}{36t^4 + 36t^2 + 4} det \begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{12}{36t^4 + 36t^2 + 4}$$

b) Muchas cuentas

c) Idem

d) Notemos que $\dot{\alpha}(t) = (a(1 - \cos(t)), a(1 + \sin(t), b)$ y $\ddot{\alpha}(t) = (a\sin(t), a\cos(t), 0)$, luego $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}(t) = (-ab\cos(t), ab\sin(t), a^2((1 - \cos(t))\cos(t) - (1 + \sin(t))\sin(t)))$.
Por lo tanto Muchas cuentas.... ∎

2. Probar que si una curva satisface una de las siguientes condiciones, es una recta:

   - Existe un punto por el que pasan todas las tangentes a la curva.
   - Todas las tangentes a la curva son paralelas entre sí.
   - Todos los planos normales son paralelos entre sí.

Demostración *a)* Supongamos α parametrizada por longitud de arco y sea $Q = \alpha(s)$ un punto de la curva y $P = Q + t_s\dot{\alpha}(s)$ donde t_s es el t tal que $L_Q(t_s) = P$, luego $t_s = \langle P - Q(s), \dot{\alpha}(s)\rangle$ por lo que es diferenciable. Consideremos $0 = \dot{P} = \dot{\alpha}(s) + (\langle -\dot{\alpha}, \alpha\rangle + \langle P - \alpha, \ddot{\alpha}\rangle)\dot{\alpha} + \langle P - Q(s), \dot{\alpha}(s)\rangle\, \ddot{\alpha}$, por lo tanto se tiene que $\ddot{\alpha}(s) = -\frac{(1 + (\langle -\dot{\alpha}, \alpha\rangle + \langle P - \alpha, \ddot{\alpha}\rangle))}{\langle P - Q(s), \dot{\alpha}(s)\rangle}\dot{\alpha}(s)$. Pero por otro lado $\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha}\rangle = 0$ pues α esta parametrizada por longitud de arco. Luego se tiene que $\ddot{\alpha} = 0$ y α es una recta.

b) Sean $s \in I$ fijo, $s' \neq s \in I$, luego por hipótesis se tiene que $\dot{\alpha}(s') = \lambda\dot{\alpha}(s)$, por lo tanto si t es arbitrario se tiene que $\alpha(t) + h\dot{\alpha}(t) = \alpha(t) + h\lambda\dot{\alpha}(s)$. Por lo tanto dado $P = \alpha(t)$ se tiene que $\alpha(s') + h\dot{\alpha}(s')|_{\frac{\alpha(t)-\alpha(s')}{\dot{\alpha}(s)\lambda}} = P$ y entonces todas las tangentes se cruzan en P, luego por el item anterior α es una recta.

c) Justamente que todos los planos normales sean paralelos es lo mismo que dados $s \neq s' \in I$ entonces los ortogonales a los planos normales son paralelos entre sí, es decir $\mathbf{t}_s = \lambda \mathbf{t}_{s'}$, luego por el item anterior α es una recta. ∎

3. Probar que si una curva satisface una de las siguientes condiciones, entonces es plana:

   - La intersección de todos sus planos osculadores es no vacía;
   - Todos sus planos osculadores son paralelos.

Demostración a) Sea P un punto en la intersección de los planos osculadores y sea $\mathbf{b}$ tal que $\langle \mathbf{b}, P \rangle = 0$ algun vector que defina al plano en el que está P, luego existe s tal que $\mathbf{b} = \mathbf{b}_s$ es el vector binormal de la curva en s. Por construcción al estar P es todo plano osculador si consideramos $s' \neq s$ luego $\langle \mathbf{b}'_s, P \rangle = 0$ y por lo tanto $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}'_s$, luego $\dot{\mathbf{b_s}} = 0$ y entonces $\tau_C = 0$ por lo que la curva es planar.

b) Si todos los planos osculadores son paralelos, luego si llamamos $\mathbf{b}_s$ al vector normal unitario a algún plano osculador Π_s se tiene que $\langle \mathbf{b}_s, P \rangle = 0$ para todo $P \in \Pi_{s'}$ el plano osculador en $s' \neq s$, luego $\dot{\mathbf{b_s}} = 0$ y entonces $\tau_C = 0$. ∎

4. Sea $\mathbb{C}$ la curva parametrizada por $t \mapsto (a \sin^2(t), a \sin(t) \cos(t), a \cos(t))$. Probar que

   - $\mathbb{C}$ está contenida en la superficie de una esfera;
   - Todos sus planos normales pasan por el origen.

Demostración a) Ntemos que $|\alpha(t)|^2 = a^2(\sin^4(t)+\sin^2(t)\cos^2(t)+\cos^2(t)) = a^2(\sin^4(t)+2\cos^2(t)-\cos^4(t)) = a^2(1-2\cos^2(t)+\cos^4(t)+2\cos^2(t)-\cos^4(t)) = a^2$ por lo tanto $\alpha(I) \subseteq S^2$.

b) Notemos que $\dot{\alpha}(t) = (2a\sin(t)\cos(t), a(\cos^2(t)-\sin^2(t)), -a\sin(t))$, por lo tanto el plano normal pasando por el punto $\alpha(t)$ esta dado por la ecuación:

$$
\begin{aligned}
N_s =&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \langle (2a\sin(t)\cos(t), a(\cos^2(t)-\sin^2(t)), -a\sin(t)), (x,y,z)- \\
&(a\sin^2(t), a\sin(t)\cos(t), a\cos(t)) = 0 \rangle\} \\
=&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (2a\sin(t)\cos(t))(x - a\sin^2(t)) + (a(\cos^2(t)-\sin^2(t)))(y - a\sin(t)\cos(t)) + \\
&+ (-a\sin(t))(z - a\cos(t)) = 0\} \\
=&\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ F(x,y,z) = 0\right\}
\end{aligned}
$$

Luego si consideramos:

$$
\begin{aligned}
F(0,0,0) =&(2a\sin(t)\cos(t))(-a\sin^2(t)) + (a(\cos^2(t)-\sin^2(t)))(-a\sin(t)\cos(t)) + (-a\sin(t))(-a\cos(t)) \\
&- a^2\sin^3(t)\cos(t) - a^2\sin(t)\cos^3(t) + a^2\sin(t)\cos(t) \\
=&a^2\sin(t)\cos(t)(-\sin^2(t) - \cos^2(t) + 1) = 0
\end{aligned}
$$

Luego para todo $t \in I$ se tiene que $(0,0,0) \in N_s$. ∎

5. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por

$$
\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0. \end{cases}
$$

- Probar que la curva es diferenciable y regular.
- Calcular los puntos de curvatura 0 de la curva.
- Calcular los planos osculadores de la curva t tiende a 0.
- Probar que la torsión de la curva es 0, pero la curva no es plana.

Demostración *a*) Es sabido que esa curva es diferenciable y es regular pues la primer coordenada de la derivada es constantemente 1.

b) Sea primero $t < 0$, luego $\dot{\alpha}(t) = \left(1, \dfrac{2e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^3}, 0\right)$ y luego $\ddot{\alpha}(t) = \left(0, \dfrac{(4-6t^2)e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6}, 0\right)$ y por lo tanto $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = \left(0, 0, \dfrac{(4-6t^2)e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^6}\right)$.

De esto concluímos que $\kappa_C = 0$ si y sólo si $4 - 6t^2 = 0$ si y sólo si $t = -\dfrac{2}{3}$. Es claro que por simetría el punto $t = \dfrac{2}{3}$ es otro punto de curvatura 0. Fnalmente notemos que $\lim_{t \to 0} \ddot{\alpha} = 0$ por lo que $K_C(0) = 0$ también.

c) No entiendo la pregunta...

d) Notemos que $\ddot{\alpha} \in \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$ pues solo tiene segunda componente y por lo tanto $\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} \rangle = 0$ con lo que concluímos que $\tau_C = 0$ pero la curva no es plana pues cuando $t \to 0$ se tiene que $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} \to 0$ y se ve que no hay plano que contenga al cero donde la curva quede contenida. ∎

6. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y $[a, b] \subset I$ un subintervalo cerrado de I. Para cada partición $P = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b\}$ de $[a, b]$, consideremos la suma

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

y notemos $|P| = \max_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})$ a la norma de P. Pruebe que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|P| < \delta \implies \left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \epsilon.$$

Demostración Como $\alpha \in C^1$ entonces es absolutamente continua y por ende rectificable. ∎

7. Sean $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos funciones. Dé condiciones suficientes para que el sistema

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0$$

determine una curva regular. Calcule el vector tangente unitario en cada punto.

Demostración Sea $F = (F_1, F_2)$, luego si las F_i son diferenciables y $DF = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \end{pmatrix} \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$ entonces tenemos que para todo entorno $U \ni p_x$ se tiene que $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ F(x, y, z) = (0, 0)\right\} = \alpha(U)$ para alguna α única. Luego podemos definir (por unicidad) una única $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $F_1(\alpha(t)) = F_2(\alpha(t)) = 0$. Notemos que $DF \neq 0$ si y sólo si $\nabla F_1 \times \nabla F_2(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$. ∎

2. Fórmulas de Frenet

Las fórmulas de Frenet son las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = & \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} & & +\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = & -\tau\mathbf{n}. \end{cases}$$

8. Mostrar que si κ es la curvatura de una curva α, entonces su torsión es

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle}{\kappa^2(s)}.$$

Demostración Notemos que $\ddot{\alpha} = a\mathbf{t} + b\mathbf{n}$, luego $\dddot{\alpha} = \dot{a}\mathbf{t} + a\dot{\mathbf{t}} + \dot{b}\mathbf{n} + b\dot{\mathbf{n}}$. Por lo tanto $\langle \dddot{\alpha}, \mathbf{b}\rangle = \dot{a}\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle + a\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{b}\rangle + \dot{b}\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle + b\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b}\rangle = b\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b}\rangle = b\tau_C$. Concluímos que $\tau_C = \frac{1}{b}\langle \dddot{\alpha}, \mathbf{b}\rangle = \frac{1}{b|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|}\langle \dddot{\alpha}, \dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}\rangle$. Falta ver el valor de b, para eso notemos que $\mathbf{n} = \dfrac{\ddot{\alpha} - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\rangle \mathbf{t}}{|\ddot{\alpha} - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\rangle \mathbf{t}|}$, y por Lineal se sabe que $|\ddot{\alpha} - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\rangle \mathbf{t}| = |\ddot{\alpha}|\sin(\theta) = \dfrac{|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|}$ donde θ es el ángulo entre $\dot{\alpha}$ y $\ddot{\alpha}$; luego $\mathbf{n} = \dfrac{\ddot{\alpha} - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\rangle \mathbf{t}}{|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|}$. Concluímos que $b = |\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|$ y por lo tanto $\tau_C = \frac{1}{|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|^2}\langle \dddot{\alpha}, \dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}\rangle = \frac{\langle \alpha'(s)\times\alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle}{\kappa^2(s)}$. ∎

9. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva no necesariamente parametrizada por la longitud de arco y sea $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de α por la longitud de arco $s = s(t)$ medido desde $t_0 \in I$. Sea $t = t(s)$ la función inversa de s y denotemos $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \alpha'$, $\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \alpha''$ y $\frac{\mathrm{d}^3\alpha}{\mathrm{d}t^3} = \alpha'''$. Entonces

- $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\alpha'|}$ y $\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{\langle \alpha', \alpha''\rangle}{|\alpha'|^4}$;
- la curvatura de α en t es $\kappa(t) = \frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}$;
- la torsión de α en t es $\tau(t) = \frac{\langle \alpha'\times\alpha'', \alpha'''\rangle}{|\alpha'\times\alpha''|^2}$.

Demostración *a*) Es claro que $s(t) = \int_0^t \left|\dot{\alpha(\eta)}\right| \mathrm{d}\eta$ luego $\dfrac{ds}{dt} = |\dot{\alpha}|$ y por el teorema de la función inversa se tiene que $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{|\dot{\alpha}|}$. Por otro lado $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{dt}{ds}\right) = \dfrac{-\dfrac{d}{ds}|\dot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^2}$ y por cambio de variables

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{-\dfrac{d}{dt}|\dot{\alpha}| \cdot \dfrac{dt}{ds}}{|\dot{\alpha}|^2} = \frac{-\dfrac{d}{dt}|\dot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{2\langle \dot{\alpha}\ddot{\alpha}\rangle}{2|\dot{\alpha}|\,|\dot{\alpha}|^3} = -\frac{\langle \alpha', \alpha''\rangle}{|\alpha'|^4}$$

b) Como $\dot{\mathbf{t}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{|\dot{\alpha}|}\right)\dot{\alpha} + \dfrac{1}{|\dot{\alpha}|}\ddot{\alpha}$ luego si recordamos que $|\ddot{\alpha} - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\rangle \mathbf{t}| = |\ddot{\alpha}|\sin(\theta) = \dfrac{|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|}$ de 8 tenemos que $\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n}\rangle = \dfrac{\langle \ddot{\alpha}, \mathbf{n}\rangle}{|\dot{\alpha}|} = \dfrac{|\dot{\alpha}\times\ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^2} = |\dot{\alpha}|\,\kappa_C$ para que valga Serret-Frenet, concluímos que $\kappa_C = \dfrac{|\dot{\alpha}|\times\ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|^3}$

c) Hecho en la cuenta de 8. ∎

10. Una función $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *translación* si existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $A(x) = x + v$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Una función lineal $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una *transformación ortogonal* si $\langle \rho(u), \rho(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ para cada par de vectores u, $v \in \mathbb{R}^3$. Finalmente, una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un *movimiento rígido* si es la composición de una transformación ortogonal de determinante positivo y una translación.

- La norma de un vector y el ángulo entre dos vectores son preservados por transformaciones ortogonales de determinante positivo.
- Si T es una transformación ortogonal con determinante positivo, entonces el producto vectorial de dos vectores cumple que
$$T(u) \times T(v) = T(u \times v)$$
Â¿Qué ocurre si T tiene determinante negativo?
- La longitud, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por transformaciones rígidas.

Demostración *a*) Trivial

b) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base orientada positivamente de $\mathbb{R}^3$, luego $T(u)\times T(v) = T(u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3)\times T(v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3) = (u_1T(e_1)+u_2T(e_2)+u_3T(e_3))\times(v_1T(e_1)+v_2T(e_2)+v_3T(e_3)) = (u_1v_2-u_2v_1)T(e_1)\times T(e_2)+(u_1v_3-v_1u_3)T(e_1)\times T(e_3)+(u_2v_3-v_2u_3)T(e_2)\times T(e_3)$ y como T es ortogonal con determinante positivo se tiene que $T(e_1)\times T(e_2)$ es un vector ortogonal a $T(e_1), T(e_2)$ y por lo tanto es la imagen de un vector que es ortogonal a e_1, e_2, por lo que $T(e_1)\times T(e_2) = T(e_1\times e_2)$; por lo tanto $T(u)\times T(v) = (u_1v_2-u_2v_1)T(e_1\times e_2)+(u_1v_3-v_1u_3)T(e_1\times e_3)+(u_2v_3-v_2u_3)T(e_2\times e_3) = T(u\times v)$.

c) Si $T \in O(2)\cap det^{-1}(1)$ entonces $|\dot\alpha| = \left|\dot{T(\alpha)}\right|$, $\langle\dot\alpha,\ddot\alpha\rangle = \left\langle \dot{T(\alpha)}, \ddot{T(\alpha)}\right\rangle$, $|\dot\alpha\times\ddot\alpha| = |T(\dot\alpha\times\ddot\alpha)| = \left|\dot{T(\alpha)}\times\ddot{T(\alpha)}\right|$, $det\begin{pmatrix}\dot\alpha\\ \ddot\alpha\\ \dddot\alpha\end{pmatrix} = \det(T)det\begin{pmatrix}\dot\alpha\\ \ddot\alpha\\ \dddot\alpha\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}T(\dot\alpha)\\ T(\ddot\alpha)\\ T(\dddot\alpha)\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}\dot{T(\alpha)}\\ \ddot{T(\alpha)}\\ \dddot{T(\alpha)}\end{pmatrix}$. Luego la longitud, la curvatura y al torsión son invariantes antes transformaciones rígidas. ∎

11. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una *hélice* si existe una dirección con la cual todas sus tangentes forman un ángulo constante.

- Si $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, las siguientes condiciones son equivalentes:
  - *a*) la curva α es una hélice;
  - *b*) el cociente $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante;
  - *c*) las rectas normales —aquellas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector normal— son todas paralelas a un plano fijo;
  - *d*) las rectas binormales —aquellas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector binormal— forman un ángulo constante con una dirección fija.
- Si $s \in \mathbb{R}$ y a, b, c son tales que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces la curva
$$\alpha(s) = (a\cos(\tfrac{s}{c}), a\sin(\tfrac{s}{c}), b\tfrac{s}{c})$$
es una hélice parametrizada por longitud de arco con $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{b}{a}$.

Demostración Vayamos de a pasos:

i) $\cancel{a)}\Rightarrow$ ii) Supongamos que existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle v, \dot\alpha\rangle = K$, luego como $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ se tiene que $v = K\mathbf{t} + k_1\mathbf{n} + k_2\mathbf{b}$, por lo tanto $0 = \dot v = K\dot{\mathbf{t}} + \dot k_1\mathbf{n} + k_1\dot{\mathbf{n}} + \dot k_2\mathbf{b} + k_2\dot{\mathbf{b}} = K\kappa\mathbf{n} + \dot k_1\mathbf{n} + k_1(-\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}) + \dot k_2\mathbf{b} - k_2\tau\mathbf{n} = -\kappa k_1\mathbf{t} + (K\kappa + \dot k_1 - k_2\tau)\mathbf{n} + (k_1\tau + \dot k_2)\mathbf{b}$. Deducimos que:

$$\begin{array}{rcl} k_1 & = & 0 \\ K\kappa + \dot k_1 - k_2\tau & = & 0 \\ k_1\tau + \dot k_2 & = & 0 \end{array}$$

Luego tenemos que $k_1 = 0, k_2 = C$ de lo que deducimos que $K\kappa = C\tau$ y entonces $\dfrac{\kappa}{\tau}$ es constante.

ii) $\Longrightarrow$ iii) No vale...

ii) $\Longrightarrow$ iv) Sabemos que $\dfrac{\kappa}{\tau} = C$, luego si tomo $v = \mathbf{t} + C\mathbf{b}$ se tiene que $\langle v, \mathbf{b}\rangle = 1$ y que $\dot{v} = \dot{\mathbf{t}} + C\dot{\mathbf{b}} = \kappa\mathbf{n} + -C\tau\mathbf{n} = 0$ luego se tiene un vector fijo v tal que $\langle v, \mathbf{b}\rangle = cte.$

iv) $\Longrightarrow$ i) Sabemos que existe $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle u, \mathbf{b}\rangle = C$, luego $C = \langle u, \mathbf{t} \times \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \times u\rangle$, además $0 = \dfrac{d}{dt}\langle \mathbf{b}, u\rangle = \tau\,\langle \mathbf{n}, u\rangle$ por lo que $\langle u, \mathbf{n}\rangle = 0$. Por lo tanto sabemos que como $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ entonces $u = k(s)\mathbf{t} + C\mathbf{b}$, luego $0 = \dot{u} = \dot{k}\mathbf{t} + k\dot{\mathbf{t}} + C\dot{b}b = \dot{k}\mathbf{t} + (k\kappa - C\tau)\mathbf{n}$ y concluímos que $\dot{k} = 0$, o sea que $\langle u, \mathbf{t}\rangle = K = cte.$ ∎

b) Notemos que $\dot{\alpha} = (-\frac{a}{c}\sin(\frac{a}{c}), \frac{a}{c}\cos(\frac{a}{c}), \frac{b}{c})$ y entonces efectivamente $|\dot{\alpha}| = 1$. Si calculamos $\ddot{\alpha} = (-\frac{a}{c^2}\cos(\frac{a}{c}), -\frac{a}{c^2}\sin(\frac{a}{c}), 0)$ entonces $\kappa = |\ddot{\alpha}| = \frac{a}{c^2}$ y finalmente como $\dddot{\alpha} = (\frac{a}{c^3}\sin(\frac{a}{c}), -\frac{a}{c^3}\cos(\frac{a}{c}), 0)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\tau =& \frac{c^4}{a^2}.det\begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\sin(\frac{a}{c}) & \frac{a}{c}\cos(\frac{a}{c}) & \frac{b}{c} \\ -\frac{a}{c^2}\cos(\frac{a}{c}) & -\frac{a}{c^2}\sin(\frac{a}{c}) & 0 \\ \frac{a}{c^3}\sin(\frac{a}{c}) & -\frac{a}{c^3}\cos(\frac{a}{c}) & 0 \end{pmatrix} \\
=& \frac{c^4}{a^2}\frac{b}{c}\frac{a^2}{c^5} \\
=& \frac{b}{c^2}
\end{aligned}$$

Luego se tiene que $\dfrac{\kappa}{\tau} = \dfrac{\frac{a}{c^2}}{\frac{b}{c^2}} = \frac{a}{b}$.

12. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco, la *indicatriz esférica* de α es la curva $\beta = \mathbf{t}_\alpha : I \to \mathbb{R}^3$.

- La curvatura de la indicatriz esférica de α es $\kappa_\beta = \frac{\mathrm{d}s_\beta}{\mathrm{d}s_\alpha}$, donde s_α, s_β son reparametrizaciones por longitud de arco.
- Determine la indicatriz de una recta, de una hélice circular y de una curva plana.

Demostración a) Como $\sigma(t)$ es una curva no parametrizada por longitud de arco, sabemos que $\kappa_\sigma = \dfrac{|\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma}|}{|\dot{\sigma}|^3}$. Luego se tiene que $\dot{\sigma} = \kappa\mathbf{n}$ y que $\ddot{\sigma} = \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})$, por lo tanto $\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma} = \kappa^2(\kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t})$, por lo que $|\dot{\sigma} \times \ddot{\sigma}| = \kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, luego $\kappa_\sigma = \dfrac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa}$.

b) Sea $\alpha(t) = a + tv$, luego $\beta(t) = \dfrac{v}{|v|}$ es la indicatriz de α.

Por otro lado sea $\sigma = (\cos(t), \sin(t), t)$, luego $\beta(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ es la indicatriz de σ, o sea la indicatriz de una hélice es una circunferencia.

Fnalmente, el último ni sentido le veo... ∎

13. La indicatriz esférica de una curva es una circunferencia si y sólo si la curva es una hélice.

Demostración Supongamos que $\beta(I) \subseteq S^1$, entonces por un lado β es plana y si $\kappa_\beta = \dfrac{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}}{\kappa} > 0$ entonces por la teórica se tiene que $\tau_\beta = 0$. Como $\tau_\beta = \dfrac{\left\langle \dot{\beta} \times \ddot{\beta}, \dddot{\beta}\right\rangle}{\left|\dot{\beta} \times \ddot{\beta}\right|^2}$, notemos que $\dddot{\beta} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})\right) = \ddot{\kappa}\mathbf{n} + 2\dot{\kappa}(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + \kappa(-\dot{\kappa}\mathbf{t} + \kappa^2\mathbf{n} + \dot{\tau}\mathbf{b} - \tau^2\mathbf{n}) = (-3\kappa\dot{\kappa})\mathbf{t} + g(t)\mathbf{n} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{b} = \left(-\frac{3}{2}\dfrac{d\left(\kappa^2\right)}{dt}\right)\mathbf{t} + g(t)\mathbf{n} + \left(\tau\dot{\kappa} + \dfrac{d\left(\kappa\tau\right)}{dt}\right)\mathbf{b}$.

Por lo tanto como $\tau_\beta = 0$ concluímos que:

$$\begin{aligned} \tau\dot{\kappa} + \frac{d(\kappa\tau)}{dt} &= 0 \\ \frac{d(\kappa^2)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

O sea concluímos que $\kappa = \sqrt{C}$ y que $\tau = D$ ambas constantes y por lo tanto $\dfrac{\tau}{\kappa} = cte$ y entonces α es una hélice.

Para el otro lado si α es una hélice entonces existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle v, \beta \rangle = C$, luego $\left\langle v, \dot{\beta} \right\rangle = 0 = \left\langle v, \ddot{\beta} \right\rangle = \langle v, \dddot{\beta} \rangle$ y por lo tanto conluímos que $\tau_\beta = 0$. Además notemos que como α es hélice entonces $\dfrac{\tau}{\kappa} = C$ y entonces $\kappa_\beta = \sqrt{\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 1} = cte$; concluímos que β es una curva plana, de norma 1 y con curvatura constante, luego es una circunsferencia. ∎

14. Supongamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco tal que κ' y τ nunca se anulan. Entonces la curva trazada por α está contenida en una esfera si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$R^2 + (R')^2 T^2 = A,$$

con $R = \frac{1}{\kappa}$ y $T = \frac{1}{\tau}$.

Demostración Supongamos que α esta parametrizada por longitud de arco y que esta contenida en una esfera, luego existe $p \in \mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $ip\alpha - p, \alpha - p = r^2$ y entocnes $\langle \dot{\alpha}, \alpha - p \rangle = 0$ por lo que $\langle \ddot{\alpha}, \alpha - p \rangle + \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 0$. Como α esta parametrizada por longitud de arco se tiene que $\langle \ddot{\alpha}, \alpha - p \rangle = -1$ y entonces $\ddot{\alpha} \neq 0$ por lo que $\kappa > 0$ y esta definido el triedro de Frenet.

Notemos que $1 = \kappa \left| \langle \mathbf{n} \rangle, \alpha - p \right| \leq \kappa \left| \alpha - p \right| = \kappa r$ por lo que en efecto $\kappa \geq \frac{1}{r} > 0$. Además de lo mismo se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 =& \dot{\kappa} \langle \mathbf{n}, \alpha - p \rangle + \kappa \langle \dot{\mathbf{n}}, \alpha - p \rangle + \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \\ =& \dot{\kappa} \langle \mathbf{n}, \alpha - p \rangle + \kappa \langle \dot{\mathbf{n}}, \alpha - p \rangle \\ =& \dot{\kappa} \langle \mathbf{n}, \alpha - p \rangle + \kappa \langle -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \alpha - p \rangle \\ =& \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \langle \kappa\mathbf{n}, \alpha - p \rangle + \kappa \langle -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \alpha - p \rangle \\ =& \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \left\langle \dot{\mathbf{t}}, \alpha - p \right\rangle + \kappa \langle -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \alpha - p \rangle \\ =& -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \kappa^2 \langle \mathbf{t}, \alpha - p \rangle + \kappa\tau \langle \mathbf{b}, \alpha - p \rangle \\ =& -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} + \kappa\tau \langle \mathbf{b}, \alpha - p \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado si desarrollamos $\alpha - p = \langle \alpha - p, \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle \alpha - p, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle \alpha - p, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} = -\frac{1}{\kappa}\mathbf{n} + \frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}\mathbf{b}$ y entonces concluímos que:

$$r^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \frac{\dot{\kappa}^2}{\tau^2\kappa^4} = R^2 + T^2\dot{R}^2$$

Para el otro lado si α esta parametrizada por longitud de arco y cumple la condición anterior, entonces si consideramos $\gamma(t) = \alpha + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\mathbf{b}$ el centro de la esfera osculatriz de α notemos que:

$$|\gamma(t)-\alpha(t)|^2=\frac{1}{\kappa^2}+\frac{\dot\kappa^2}{\kappa^4\tau^2}=r^2$$

Y entonces si $\dot\gamma=0$ entonces probaríamos que $\alpha(I)\subseteq S^2$. Vayamos a ver eso:

$$\begin{aligned}\dot\gamma=&\dot\alpha-\frac{\dot\kappa}{\kappa^2}\mathbf{n}+\frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b})-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right)\mathbf{b}+\frac{\dot\kappa}{\kappa^2}\mathbf{n}\\ =&\left(\frac{\tau}{\kappa}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\kappa}{\kappa^2\tau}\right)\right)\mathbf{b}\end{aligned}$$

Por hipótesis sabemos que $r^2-\frac{1}{\kappa^2}=\left(\frac{\dot\kappa}{\tau\kappa^2}\right)^2$ y derivando se tiene que $\frac{2\kappa\dot\kappa}{\kappa^4}=2\left(\frac{\dot\kappa}{\tau\kappa^2}\right)\dfrac{d}{dt}\left(\frac{\dot\kappa}{\tau\kappa^2}\right)$ de donde $\frac{\tau}{\kappa}=\dfrac{d}{dt}\left(\frac{\dot\kappa}{\tau\kappa^2}\right)$ y concluímos que $\dot\gamma=0$. ■

15. Sean $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una curva, $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervalo cerrado no trivial, $p=\alpha(a)$ y $q=\alpha(b)$.

    - Si v es un vector unitario, entonces

    $$(q-p)\cdot v=\int_a^b\alpha'(t)\cdot v ds\leq\int_a^b\left|\alpha'(t)\right|\,\mathrm{d}t.$$

    - En particular, si $v=\frac{q-p}{|q-p|}$, tenemos que

    $$|\alpha(b)-\alpha(a)|\leq\int_a^b\left|\alpha'(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

    y, por lo tanto, la curva con menor longitud de arco que une los puntos p y q es la línea recta.

    Demostración Si $v\in\mathbb{R}^3$ es tal que $|v|=1$ entonces $\langle(q-p),v\rangle=\left\langle\int_a^b\dot{\alpha(s)}\,\mathrm{d}s,v\right\rangle=\int_a^b\left\langle\dot{\alpha(s)},v\right\rangle\,\mathrm{d}s=\int_a^b\left|\dot{\alpha(s)}\right||v|\cos(\theta)\,\mathrm{d}s\leq\int_a^b\left|\dot{\alpha(s)}\right|\,\mathrm{d}s$. ■

16. Sea $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura y torsión nunca nulas. Sea $s_0\in\mathbb{R}$ y sea P un plano que satisface las siguientes condiciones:

    - el punto P contiene la recta tangente en s_0, y
    - para todo entorno $I\subset\mathbb{R}$ de s_0, existen puntos de $\alpha(I)$ a ambos lados de P.

    Entonces P es el plano osculador de α en s_0.

    Demostración Sea $0\neq v\in\mathbb{R}^3$ tal que $P=\left\{x\in\mathbb{R}^3\ /\ \langle x-\alpha(s_0),v\rangle=0\right\}$, o sea el vector director del plano P, luego consideremos $x(t)=\langle\alpha(t)-\alpha(s_0),v\rangle$. Notemos que $x(s_0)=0$ y que $\dot x=\langle\dot\alpha,v\rangle$ y por hipótesis se tiene que $\dot x(s_0)=\langle\dot\alpha(s_0),v\rangle=\langle\mathbf{t}(s_0),v\rangle=0$.

    Sea ahora $h>0$, luego como α es diferenciable se tiene por el teorema de Taylor que:

    $$\begin{aligned}x(s_0+h)&=x(s_0)+h\dot x(s_0)+\tfrac{h^2}{2}\ddot x(s_0)+R(h)&=\tfrac{h^2}{2}\ddot x(s_0)+R(h)&\quad \textit{con}\ \lim_{h\to0}\tfrac{R(h)}{h^2}=0\\ x(s_0-h)&=x(s_0)-h\dot x(s_0)+\tfrac{h^2}{2}\ddot x(s_0)-R(h)&=\tfrac{h^2}{2}\ddot x(s_0)-R(h)&\quad \textit{con}\ \lim_{h\to0}\tfrac{R(h)}{h^2}=0\end{aligned}$$

    Por hipótesis se tiene que α cruza P por lo que se debe tener que (sin pérdida de generalidad) $\langle\alpha(s_0-h)-\alpha(s_0),v\rangle<0$ y $\langle\alpha(s_0+h)-\alpha(s_0),v\rangle>0$ para todo $h>0$. Por lo tanto si $\ddot x(s_0)>0$ entonces si tomamos $\varepsilon<\frac{\ddot x(s_0)}{2}$ se tiene que existe $h>0$ tal que $\left|\frac{R(h)}{h^2}\right|<\varepsilon$ y por ende $\left|\frac{x(s_0-h)}{h^2}\right|>$

$\left|\frac{\ddot{x}(s_0)}{2}\right| - \left|\frac{R(h)}{h^2}\right| > 0$; análogamente con $\ddot{x}(s_0) < 0$ y por lo tanto conclu\'imos que $0 = \ddot{x}(s_0) = \langle \ddot{\alpha}(s_0), v\rangle = \langle \kappa \mathbf{n}(s_0), v\rangle = \kappa \langle \mathbf{n}(s_0), v\rangle$. Luego $\langle \mathbf{n}(s_0), v\rangle = 0$ y entonces $\mathbf{n} \in P$ y concluímos que $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle \subseteq P$ y por teorema de la dimensión $P = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle$. ∎

17. * Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco con curvatura y torsión nunca nulas. Decimos que α es una *curva de Bertrand* si existe una curva $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las rectas normales de α y β en puntos correspondientes de I coinciden, y en ese caso β es la *compañera de Bertrand* de α y puede escribirse en la forma

$$\beta(t) = \alpha(t) + rn(t).$$

- En esa expresión para β, r es constante.
- α es una curva de Bertrand si y sólo si existe una relación lineal

$$A\kappa + B\tau = 1$$

  con A y B constantes no nulas.
- Si α tiene más de una compañera de Bertrand, entonces tiene infinitas y esto ocurre si y sólo si α es una hélice circular.