Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017
FINAL

Índice

1. Espacios Vectoriales

1.1. Propiedades Elementales

Definición Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un conjunto $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ se dice:

1. *Linealmente independiente* si dados $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$ implica que $\lambda_{i_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.
2. *Sistema de generadores* si dado $v \in \mathcal{X}$ entonces existen $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = v$.
3. *Base* si es a la vez un sistema de generadores linealmente independiente.

Ejemplo

- $X = \mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2, \dots\right\} = \left\{X^j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es base.
- $X = \mathcal{C}[a,b]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{e^{\alpha x}, \alpha \in [0,1]\}$ veamos que es linealmente independiente.

  Demostración Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$ para todo $x \in [a,b]$; luego si derivamos $n-1$ veces tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Y como los α_i son distintos entonces la matriz de Vandermonde es inversible y el sistema admite una única solución, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. ∎

Recordemos:

Proposición 1.1 (Lema de Zorn) *Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que todo subconjunto no vacío $S \subseteq P$ totalmente ordenado admite una cota superior; entonces existe un elemento maximal en P.*

Proposición 1.2 *Si E es un espacio vectorial, entonces E admite una base.*

Demostración Consideremos $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ es li}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup_{i \in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in T$ y $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k} \ in \mathcal{F}$ tales que $\sum_k \lambda_i v_i = 0$. Como son finitos existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \in S_{k_0}$ para todo i, que al ser un conjunto linealmente independiente resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente, sea $v \in E \backslash < M >$ (el conjunto generado por combinaciones lineales de M), luego $M \cup \{v\}$ sería un conjunto li lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta base. ∎

Proposición 1.3 *Sea E un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases de Hamel de E. Luego $\#B_1 = \#B_2$.*

Demostración Sea $x \in \mathcal{B}_1$ y llamemos $S(x)$ al conjunto de los elementos $v \in \mathcal{B}_2$ tal que al escribir a x como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_2$ aparece v, por lo que si $x = \sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k}$ entonces $S(x) = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$.

Lema 1.4 $\bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x) = \mathcal{B}_2$

Demostración Del lema Si $v \in \bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x)$ luego existe $x_0 \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x_0)$ por lo que $v \in \mathcal{B}_2$ por definición de $S(x)$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{B}_2$ pero no existe $x \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x)$, entonces $v \notin < \mathcal{B}_1 >= E =< \mathcal{B}_2 >$. ∎

Por 1.4 tenemos que $\#\mathcal{B}_2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_1} \#S(x) \leq \#\mathbb{N} \#\mathcal{B}_1 \leq \#B_1$.

Razonando al revés obtenemos la otra desigualdad. ∎

1.2. Normas y productos internos

Definición Si E es un espacio vectorial, una norma definida en E es una aplicación $\|.\| : E \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Observación Todo espacio normado es un espacio métrico pero no viceversa.

Definición Si E es un espacio vectorial, un producto interno definido en E es una aplicación $\langle ., . \rangle : E \times E \mapsto F$ tal que:

1. $\langle ., z \rangle$ es lineal
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Observación Todo espacio con producto interno es un espacio normado pero no viceversa.

Teorema 1.5 (Cauchy-Schwartz) *Sea E un espacio vectorial y $\langle . \rangle$ un producto interno definido en E; luego si $x, y \in E$ se tiene que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.*

Demostración Sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $z = x - \lambda y$, luego $\langle z, z\rangle = \langle x, x\rangle + \left|\lambda^2\right| \langle y, y\rangle - 2\Re(\lambda \langle y, x\rangle) \geq 0$.
Si $\langle y, x\rangle = re^{i\theta}$ sea $\lambda = e^{-i\theta} t$ con $t \in \mathbb{R}$; luego:

$$0 \geq \langle x, x\rangle + t^2 \langle y, y\rangle - 2bt \equiv c - 2bt + at^2 := q(t)$$

Luego como la cuadrática dada es positiva, eso implica que $0 \leq 4b^2 - 4ac$ por lo que:

$$0 \leq b^2 - ac = |\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

Si $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \|y\|$, entonces $b^2 = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$ por lo que $b^2 - ac = 0$. Esto implica que existe t_0 tal que $q(t_0) = 0$, por lo tanto eso implica que $\left\langle x - e^{-i\theta} t_0 y, x - e^{-i\theta} t_0 y\right\rangle \equiv 0$ y por lo tanto $x = e^{-i\theta} t_0 y$. ∎

Definición Un espacio normado que es completo respecto a la distancia inducida por la norma se llama *Espacio de Banach*

Definición Un *Espacio de Hilbert* es un espacio de Banach donde la norma proviene de un producto interno mediante $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Proposición 1.6 *Sea E un espacio con producto interno, entonces:*

- $\mathcal{R}(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
- $\mathcal{I}(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)$

Demostración Por un lado $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathcal{R}(\langle x, y\rangle)$ y $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathcal{R}(\langle x, y\rangle)$; por lo que restando se obtiene:

$$4\mathcal{R}(\langle x, y\rangle) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Por el otro:

$$\begin{aligned}
\|x + iy\|^2 &= \langle x + iy, x + iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i| \|y\|^2 - i \langle x, y\rangle + i\overline{\langle x, y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - i2\mathcal{I}(\langle x, y\rangle) \\
\|x - iy\|^2 &= \langle x - iy, x - iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i| \|y\|^2 + i \langle x, y\rangle - i\overline{\langle x, y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i2\mathcal{I}(\langle x, y\rangle)
\end{aligned}$$

Por lo tanto restando ambas obtenemos:

$$4\mathcal{I}(\langle x, y\rangle) = \|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2$$

∎

Proposición 1.7 (Ley del paralelogramo) *Sea E un espacio normado real, entonces existe $\langle ., .\rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ si y sólo si para todos $x, y \in E$ vale:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Demostración Si $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ entonces de la demostración de 1.6 se da el resultado. Recíprocamente definamos:

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

Luego verifiquemos que es un producto interno.

1. $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$

2. Como $\|x+y\| = \|y+x\|$ y $\|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\|$ concluímos que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

3. Dado que $\|.\|, +, -, *$ son $\|.\|$-continuas entonces $\langle ., x\rangle, \langle x, .\rangle$ es $\|.\|$-continua.

4. Sean $x, y, z \in E$ entonces:

$$\|x+y+z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 = \quad 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2$$

Luego como $A = B$ y $A = C$ implica $A = \frac{B+C}{2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 &= \|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2 \\
\|x+y-z\|^2 &= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y-z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x-z\|^2 \\
&= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|-x+y+z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|-y+x+z\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle =& \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right) \\
=& \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \\
=& \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle
\end{aligned}$$

5. Por el item anterior es claro por inducción que $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{N}$ y como vale para $\lambda = -1$ tenemos que vale para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$. Si $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ entonces si llamamos $x' = \frac{x}{q}$ tenemos:

$$q\langle \lambda x, y\rangle = q\left\langle px', y\right\rangle = p\left\langle qx', y\right\rangle = p\langle x, y\rangle$$

Luego $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto probamos que fijados $x, y \in E$ la función $g(t) = \frac{1}{t}\langle tx, y\rangle$ y la función constante $h(t) = \langle x, y\rangle$ cumplen que $h|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ y por continuidad entonces $h \equiv g$ para todo $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; como el caso $\lambda = 0$ es trivial concluímos que $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle$. ∎

2. Espacios de Hilbert

2.1. Preliminares

Proposición 2.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego el producto interno es continuo.*

Demostración Sea $x_n, (y_n)$ tales que $x_n \to x, y_n \to y$, luego:

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq \|x_n - x\|\,\|y\| + \|x\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y_n - y\| \to 0
\end{aligned}$$

∎

2.2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego dados dos vectores $x, y \in E$ decimos que son *ortogonales* si $\langle x, y \rangle = 0$.

A su vez decimos que son *ortonormales* si osn ortogonales y $\|x\| = \|y\| = 1$

Finalmente dado un conjunto $S \subseteq E$ entonces decimos que es *ortogonal / ortonormal* si dados cualesquiera $x, y \in S$ resulta que son *ortogonales / ortonormales*

Ejemplo El conjunto $\left\{e^{inx} \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ x \in [0, 2\pi]\right\}$ es ortonormal.

Teorema 2.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego si $x \in \langle S \rangle$ entonces existe una única escritura de x dada por:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i \qquad u_i \in S$$

Demostración Como $x \in \langle S \rangle$ entonces existen únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tal que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Luego:

$$\langle x, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \lambda_j$$

∎

Teorema 2.3 (Desigualdad de Bessel) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *SI $x \in E$ y $u_1, \ldots, u_n \in S$ luego $\sum\limits_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$*
2. *Si $x \in E$ entonces $\{u \in S \ / \ \langle x, u \rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable*
3. *Si $x, y \in E$ entonces $\left|\sum\limits_{u \in S} \langle x, u \rangle \overline{\langle y, u \rangle}\right| \leq \|x\| \|y\|$*

Demostración

1. Sean $u_1, \ldots, u_n \in S$ y sea $z = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle$, luego:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle z, z \rangle \\
&= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle, x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \right\rangle \\
&= \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \right\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle, x \right\rangle\right) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i \rangle\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2\right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i \rangle\|^2.
\end{aligned}$$

2. Notemos que $S = \{u \in S \ / \ |\langle x, u \rangle| > 0\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{u \in S \ / \ |\langle x, u \rangle| \geq \frac{1}{m}\right\}}_{T_m}$.

   Ahora sean $u_1, \ldots, u_n \in T$ por el item anterior sabemos que:

$$\frac{n}{m^2} \leq \sum_{1\leq k\leq n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Por lo que $n \leq m^2 \|x\|^2$ y entonces $\#T_m \leq m^2 \|x\|^2 < \infty$ para todo m, por lo tanto $\#S \leq \#\mathbb{N} * \#T_m \leq \#\mathbb{N}$.

3. Sean $x, y \in E$ y $u_1, \ldots, u_n \in S$, luego:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \overline{\langle y, u_i\rangle}\right| \leq_{\text{C-S}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle y, u_i\rangle|^2}$$
$$\leq_{\text{a}} \|x\| \|y\|$$

∎

Teorema 2.4 *Si E es un espacio vectorial con producto interno tal que E es separable, entonces todo conjunto ortonormal es a lo sumo numerable*

Demostración Sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal y sean $u \neq v \in S$, luego $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2$ y por lo tanto $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v) = \emptyset$.

Sea $D \subseteq E$ un subconjunto denso numerable, luego $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D \neq \emptyset$ para todo $u \in S$. Consideremos $f : S \to D$ dado por $f(u) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D$, luego si $f(u) = f(v)$ entonces $f(v) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v)$ y por lo tanto $u = v$. Como f es inyectiva concluímos que S es a lo sumo numerable. ∎

Teorema 2.5 *Sean H un espacio de Hilbert, u_n una sucesión de vectores ortonormales y c_n una sucesión de numeros complejos. Luego:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty \tag{1}$$

Más aún, $c_n = \left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n, u_n \right\rangle$

Demostración Sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$, luego como (u_n) son ortonormales dos a dos y H es completo:

$$\left\|\sum_{i=k+1}^{k'} c_n u_n\right\|^2 = \sum_{i=k+1}^{k'} |c_n|^2$$

Por ende:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty$$

Finalmente, notemos que $\langle S_k, u_j\rangle = c_j$ para todo $k \geq j$ y ,además si $(c_n)_i nl^2$, entonces $S_k \to \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n =: x$; por lo tanto por 2.1 $c_n = \langle S_k, u_n\rangle \to \langle x, u_n\rangle$. ∎

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y $M \subseteq E$, definimos *el ortogonal a* M como $M^\perp = \{x \in E \ / \ \langle x, m\rangle = 0 \ \forall m \in M\}$.

Proposición 2.6 *$M^\perp$ es un subespacio cerrado de E*

Demostración Si $(x_n) \subset M$ es tal que $x_n \to x$ entonces por 2.1 $0 = \langle m, x_n\rangle \to \langle m, x\rangle$, por lo que $x \in M$. ∎

Teorema 2.7 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *Si $x \in H$ entonces $x_S = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u$ esta bien definido*

2. *Si $M = \langle S \rangle$ entonces $x \in M$ si y solo si $x = x_S$. Es más si $x \in H$ entonces $x - x_S \in M^\perp$.*

Demostración

1. Dado $x \in H$, de 2.3 sea (u_n) una numeración de $S = \{u \in S \ / \ \langle x, u \rangle = 0\}$ y sea (v_n) otra ordenación de los u_n; notemos $x_1 = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n$ y $x_2 = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n$ que por 2.5 y 2.3 están bien definidos.

   Luego:

$$\begin{aligned}
\langle x_1 - x_2, u_n \rangle &= \langle x_1, u_n \rangle - \langle x_2, u_n \rangle \\
&\underbrace{=}_{u_n = v_{m_n} \text{ para algún } m_n} \langle x, u_n \rangle - \langle x, v_{m_n} \rangle \\
&= \langle x, u_n \rangle - \langle x, u_n \rangle = \quad 0
\end{aligned}$$

   Por ende, $\langle x_1 - x_2, u_n \rangle = \langle x_1 - x_2, v_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se concluye que $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = 0$ por lo que $x_1 = x_2$ y entonces x_S esta bien definido y no depende del orden de la suma.

2. Sea $x_{S_k} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i \in M$, luego como M es cerrado se tiene que $x_{S_k} \to x_S \in M$. Ahora sea $s \in S$, entonces:

$$\langle x - x_S, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x_S, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x, v \rangle = 0$$

   Por lo que $x - x_S \in M^\perp$. Finalmente, si $x \in M$ entonces como $x_S \in M$ entonces $x - x_S \in M \cap M^\perp = \{0\}$, luego $x = x_S$. ∎

2.3. Conjuntos ortonormales completos

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ ortonormal, diremos que S es *completo* si $S \subseteq T$ y T es ortonormal, entonces $S = T$.

Proposición 2.8 *Sea S un conjunto ortonormal tal que $S^\perp = \{0\}$, entonces S es completo*

Demostración Sea T ortonormal y sea $v \in T \setminus S$, luego $v \in S^\perp = 0$ por lo que S es completo. ∎

Teorema 2.9 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, $S \subseteq E$ ortonormal y sea $M = \langle S \rangle$, entonces:*

1. *Si $M = E$ entonces S es completo*

2. *Si S es completo y E es de Hilbert entonces $M = E$*

Demostración

1. Si $x \in S^\perp$ entonces $x \in M^\perp = E^\perp = \{0\}$, por lo tanto S es completo

2. Sea $x \in E$, luego por 2.7 x_S esta bien definido y $x - x_S \in M^\perp$, luego como S es completo $x - x_S = 0$ y por 2.7 se tiene que $x \in M$. ∎