Álgebra 3 - 2° cuatrimestre 2016
Práctica 1

1. Ejercicio 1

Demostración *a*) Sea $I \subsetneq A$ un ideal y consideremos $\mathcal{P} = \{R \subsetneq A\ ,\ R\ ideal\ ,\ I \subseteq R\}$ ordenado por la inclusión. Luego $\mathcal{P}$ es un poset y sea $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ una cadena. Tomemos $B = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$ que cumple que $L \subseteq B$ para todo $L \in \mathcal{L}$, luego veamos que $B \in \mathcal{P}$.

Como $1 \notin L$ para todo $L \in \mathcal{L}$, luego $1 \notin B$ y concluímos que $B \subsetneq A$. Además como $I \subseteq L$ para todo $L \in L$ entonces $I \subseteq B = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$. Finalmente sean $r \in A; a, b \in B$ luego $a \in L_a,\ b \in L_b \subseteq L_a$ y por lo tanto $a, b \in L_a$ con lo que $a + b \in L_a \subseteq B$; además $ra \in L_a \subseteq B$ por lo que B es ideal.

Concluímos que toda cadena en $\mathcal{P}$ tiene cota superior y por lo tanto por el Lema de Zorn tiene un elemento maximal P que es un ideal maximal.

b) Sea $\mathbf{p}$ un ideal primo de A y sean $\overline{a}\overline{b} = 0 \in A/\mathbf{p}$, luego $ab \in \mathbf{p}$ y como $\mathbf{p}$ es primo (sin pérdida de generalidad podemos suponer que) $a \in \mathbf{p}$, luego $\overline{a} = 0$. Concluímos que $A/\mathbf{p}$ es íntegro.

Recíprocamente sean $ab \in \mathbf{p}$, luego $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b} = 0 \in A/\mathbf{p}$, como $A/\mathbf{p}$ es íntegro (sin pérdida de generalidad podemos suponer que) $\overline{a} = 0$, por lo que $a \in \mathbf{p}$. Concluímos que $\mathbf{p}$ es primo.

c) Sea $\mathbf{m}$ un ideal maximal de A y sea $\overline{x} \neq 0 \in A/\mathbf{m}$ luego $K = \mathbf{m} + Ax$ es un ideal que cumple que $\mathbf{m} \subsetneq K \subseteq A$, como $\mathbf{m}$ es maximal se tiene que $K = A$ por lo que existe $s \in A; m \in \mathbf{m}$ tal que $1 = m + sx$ con lo que $\overline{1} = \overline{sx} \in A/\mathbf{m}$. Concluímos que $A/\mathbf{m}$ es un cuerpo.

Sea $K \subseteq A$ ideal tal que $\mathbf{m} \subsetneq K \subseteq A$, luego existe $x \in K, x \notin \mathbf{m}$ y por lo tanto $\overline{x} \neq 0 \in A/\mathbf{m}$. Como es un cuerpo entonces existe $y \in A$ tal que $\overline{1} = \overline{xy}$. Como K es ideal $1 = yx \in K$ por lo que $K = A$, concluímos que $\mathbf{m}$ es maximal.

d) Sea $f^{-1}(\mathbf{m}) \subsetneq I \subseteq A$ un ideal y consideremos $f(f^{-1}(\mathbf{m})) \subseteq f(I) \subseteq B$ luego como existe $I \ni x \notin f^{-1}(\mathbf{m})$ entonces por definición $K = f(I) \ni f(x) \notin f(f^{-1}(\mathbf{m})) = \mathbf{m}$ pues f es suryectiva. Por otro lado sean $f(a), f(b) \in K$, entonces $f(a) + f(b) = f(a + b) \in K$ pues I es ideal y f morfismo de anillos; además si $r \in B$ como f es epi entonces existe $j \in A$ tal que $f(j) = r$, luego $rf(a) = f(j)f(a) = f(ja) \in K$ pues I es ideal y f morfismo. Concluímos que K es ideal y como $\mathbf{m}$ es maximal entonces $K = B$, por lo que $I = f^{-1}(B) = A$ y entonces $f^{-1}(\mathbf{m})$ es maximal (es claro que era ideal por la misma cuenta).

e) Sea $Ker(f) \subseteq K$ el nucleo de f, luego como K es cuerpo $ker(f) = 0$ o $ker(f) = K$, como $f \neq 0$ entonces $ker(f) = 0$ y f es inyectivo.

f) Sea $a \neq 0 \in D$, consideremos $f : D \to D$ dado por $f(x) = ax$, luego si $f(x) = ax = 0$ entonces como D es dominio y $a \neq 0$ se tiene que $x = 0$. Por lo tanto f es inyectiva y por cardinalidad es sobreyectiva, luego es biyectiva y entonces existe $b \in R$ tal que $1 = f(b) = ab$; concluímos que D es cuerpo. ∎

2. Ejercicio 2

Demostración Sea $ev_b : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[b]$ el morfismo evaluación, veamos que $ker(ev_b) \neq 0$ para los b dados:

- Si $b = \sqrt{2}$ entonces $ev_b(X^2 - 2) = 0$
- Si $b = \sqrt{3}$ entonces $ev_b(X^2 - 3) = 0$
- Si $b = i$ entonces $ev_b(X^2 + 1) = 0$
- Si $b = 2^{\frac{1}{3}}$ entonces $ev_b(X^3 - 2) = 0$

Luego en cada caso como $\mathbb{Q}$ es DIP entonces $\mathbb{Q}[X]$ es DIP y $ker(ev_b) = \langle f \rangle$ con f el polinomio minimal de b sobre $\mathbb{Q}$, luego como $\langle f \rangle$ es maximal por 1 se tiene que $\mathbb{Q}[X] \big/ \langle f \rangle$ es cuerpo, pero por el Primero Teo de isomorfismo $\mathbb{Q}[X] \big/ \langle f \rangle \simeq \mathbb{Q}[b]$, luego es cuerpo. ∎

3. Ejercicio 3

Demostración *a)* Sea $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ un morfismo, luego $\phi(1) = 1$ por lo que $0 = \phi(-1+1) = \phi(-1) + \phi(1) = \phi(-1) + 1$; concluímos que $\phi(-1) = -1$. Supongamos que $\phi(i) = a$, luego $-1 = \phi(-1) = \phi(i^2) = a^2$ pero $X^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[X]$, luego no existe tal ϕ.

b) Por el item anterior no existe un morfismo de cuerpos de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$.

c) Sea $\phi : K \to L$ un morfismo de cuerpos, y sea $j : \mathbb{Z} \to L$ el morfismo inicial de L e $i : \mathbb{Z} \to K$ el de K, luego tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "j"'] \\ K \arrow[r, "\phi"'] & L \end{tikzcd}$$

Luego ϕ induce un morfismo $\psi : \mathbb{Z} \big/ Ker(i) \to \mathbb{Z} \big/ ker(j)$ y como $1_{\mathbb{Z}}$ es isomorfismo, resulta que ψ también lo es. Concluímos que si $Char(k) = p$, luego $Char(L) = p$. Por lo tanto no existen morfismos de $\mathbb{Q} \to \mathbb{F}_p$

d) Sea $j : \mathbb{Z} \to K$ el morfismo inicial, luego por lo visto anteriormente si la característica de K no es 0 no hay morfismos, por otro lado si la característica de K es 0 entonces existe un único morfismo pues j es único y pasa al cuerpo de fracciones de manera única. Es más, este morfismo $\overline{j} : \mathbb{Q} \to K$ es $\overline{j}(\frac{n}{m}) = (n1_K)(m1_K)^{-1}$.

e) Por lo visto en 2 queremos un morfismo $\phi : \mathbb{Q}[X] \big/ \langle X^2 - 2 \rangle \to \mathbb{Q}[X] \big/ \langle X^2 - 3 \rangle$, para eso notemos que $\phi|_{\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Q}}$ por lo que $\phi(a + b\sqrt{2}) = a + b\phi(\sqrt{2})$, luego $2 = \phi((\sqrt{2})^2) = \phi(\sqrt{2})^2$. No obstante $(a + b\sqrt{3})^2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}$, pero no existen $a, b \in \mathbb{Q}$ que cumplan, por lo que no hay tal morfismo.

f) Sea $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\phi|_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}}$, luego $\phi(a + bi) = a + b\phi(i)$ y $-1 = \phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i)^2$ por lo que $\phi(i) = \pm i$. Luego $\left\{ \mathbb{C} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C} \text{ , } \phi \textit{ morfismo de cuerpos} \text{ , } \phi|_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}} \right\} = \{1_{\mathbb{C}}, a + bi \mapsto a + bi\}$.

g) Es claro que $\mathbb{Q}[i] \subseteq \mathbb{C}$ es un subcuerpo y viendo la demostración anterior nunca se pide que $a, b \notin \mathbb{Q}$ por lo que vale igual.

h) Ambos morfismos del item anterior además son isomorfismos

i) Por el primer item no hay morfismo de $\mathbb{Q}[i]$ a $\mathbb{R}$ pues -1 es un cuadrado en el primero pero no en el segundo

j) Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es morfismo de cuerpos luego $\phi|_{\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Q}}$ como ya vimos, además si $x > 0$ entonces $x = y^2$ por lo que $\phi(x) = \phi(y^2) = \phi(y)^2 > 0$. Por lo tanto sean $x > y$, entonces $\phi(x - y) > 0$ con lo que $\phi(x) > \phi(y)$; luego finalmente si $x \in \mathbb{R}$ supongamos que $x \neq \phi(x)$ entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q = \phi(q) < \phi(x)$ pero como $x < q$ entonces $\phi(x) < \phi(q)$. Concluímos que el único morfismo de cuerpos sobre $\mathbb{R}$ es la identidad. ∎

4. Ejercicio 4

Demostración Sea $0 \neq a \in A$ y consideremos $L_a : A \to A$ dado por $L_a(x) = ax$, luego L_a es un morfismo $\mathbb{K}$ lineal, como A es un dominio entonces L_a es inyectiva. Luego por ser de dimensión finita es suryectiva y entonces existe a^{-1}. ∎

5. Ejercicio 5

Demostración
- Es claro que si $a, b \in \mathcal{U}(A)$ entonces $b^{-1}a^{-1}$ es una inversa de ab por lo que el producto es cerrado, además trivialmente la unidad es 1 y el producto es asociativo. Finalmente si $a \in \mathcal{U}(A)$ entonces $aa^{-1} = 1$ por lo que $a^{-1} \in \mathcal{U}(A)$.
- Veamos uno por uno:
  a) Es claro que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$
  b) Como K es cuerpo entonces $\mathcal{U}(K) = K \setminus \{0\}$
  c) Sea $a + bi = \alpha \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$, luego existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $\alpha\beta = 1$ por lo que $|\alpha|^2 |\beta|^2 = 1$ y concluímos que $a^2 + b^2 = 1$ de lo que:

$$a^2 = 1 y \quad b^2 = 0$$
$$o$$
$$a^2 = 0 y \quad b^2 = 1$$

  Y concluímos que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$
  d) Sea $a + b\sqrt{5}i = \alpha \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}i])$, luego existe $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ tal que $\alpha\beta = 1$ por lo que $|\alpha|^2 |\beta|^2 = 1$ y concluímos que $a^2 + 5b^2 = 1$ de lo que:

$$a^2 = 1$$
$$b^2 = 0$$

  Y concluímos que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]) = \{\pm 1\}$
  e) Es claro que si $p \in \mathcal{U}(A[X])$ entonces como todos los términos no constantes deben ser 0 se concluye que $\mathcal{U}(A[X]) = \mathcal{U}(A)$.
  f) Si $a \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ entonces $ab \cong 1 \ (mod\ n)$ si y sólo si $ab - kn = 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $mcd(a, n) = 1$. ∎

6. Ejercicio 6

Demostración a) Es claro que K es cuerpo.

b) Si $a, b \in A$ entonces $f(ab) = (ab, 1) = (a, 1).(b, 1) = f(a)f(b)$, $f(a+b) = (a+b, 1) = (a, 1)+(b, 1) = f(a) + f(b)$ y $f(1) = (1, 0)$ por lo que f es morfismo de anillos. Además como el neutro de la suma es $(0, 1)$ tenemos que $f(a) = (0, 1)$ si y sólo si $a = 0$ por lo que es monomorfismo.

c) Para un lado si D es dominio entonces tomemos K el cuerpo de fracciones de D. Recíprocamente sea $a, b \in D$ tal que $0 = ab$, luego $0 = f(ab) = f(a)f(b) \in K$ Como K es cuerpo entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(a) = 0$ y como f es mono $a = 0$; concluímos que D es íntegro. ∎

7. Notemos F_A como el cuerpo de fracciones de A. Vayamos uno por uno:

a) Afirmamos que $\mathbb{Q} = F_{\mathbb{Z}}$, para esto sea $j : \mathbb{Z} \to K$ el morfismo inicial, luego si consideramos $\psi : \mathbb{Q} \to K$ dado por $\psi(n, m) = j(n)(j(m))^{-1}$ y $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dado por $i(n) = (n, 1)$; luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \mathbb{Q} \arrow[d, "\psi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como $\mathbb{Q}$ cumple la propiedad universal, entonces $\mathbb{Q} = F_{\mathbb{Z}}$.

b) Sea $\phi : \mathbb{Z}[i] \to K$, luego es claro que $\phi(a+bi) = j(a)+j(b)\phi(i)$ con $j : \mathbb{Z} \to K$ el morfimso inicial. Si identificamos $n := n1_K = j(n)$ luego notemos que $\phi(a+bi)^{-1} = \frac{(a+b)}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)}{a^2+b^2} i \in \mathbb{Q}[i]$; por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[i] \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathbb{Q} \arrow[d, "\psi"'] \\ & K \end{tikzcd}$$

Con $\psi(c+di, a+bi) = (c+d\phi(i))(a+b\phi(i))^{-1} = \left(\frac{c(a+b)}{a^2+b^2} - \frac{d(a-b)}{a^2+b^2}\right) + \frac{d(a+b)}{a^2+b^2} + \left(\frac{c(a-b)}{a^2+b^2}\right)\phi(i)$

c) Más generalmente si α es raíz de $X^2 - \alpha$ entonces como ese polinomio es irreducible en $\mathbb{Q}$ tenemos que $Q[\alpha] = Q(\alpha)$ su propio cuerpo de fracciones, por lo que si $\phi : \mathbb{Z}[\alpha] \to K$ entonces induce $\psi : \mathbb{Q}[\alpha] \to K$ tal que:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[\alpha] \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathbb{Q}[\alpha] \arrow[d, "\psi"'] \\ & K \end{tikzcd}$$

Y como $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$ es un cuerpo tenemos que $\mathbb{Q}[\alpha] = F_{\mathbb{Z}[\alpha]}$ es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

d) Finalmente si K es cuerpo entonces es su propio cuerpo de fracciones mediante $i : K \to K$ al identidad. $\blacksquare$