Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2015

2° Parcial

Demostración 1. Punto a

Primero como $f \in L^1$ sabemos que $\hat{f}$ esta bien definida, y estamos suponiendo que es impar. Notemos que esto implica que $0 = \hat{f}(\xi) + \hat{f}(-\xi) = ctes * \int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{(-i\xi x)} + e^{(ix\xi)})dx = ctes * \int_{\mathbb{R}}(f(x)cos(\xi x)dx)$. Por ende $\hat{f} = iC \int_{\mathbb{R}} f(x)\operatorname{sen}(x\xi)dx$.

Ahora si nos daban $b > 0$ y nos pedían probar que $|\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi| \leq A$ con A que no dependa de b. Para eso debíamos escribir lo que ya sabemos!! Tenemos que $\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi = \int_1^b \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}dxd\xi$ y como $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\frac{\sin(x\xi)}{\xi} \in L^1([1,b])$ $\forall b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Pues por ejemplo esta acotada es continua y el soporte es de medida finita), esto dice que $f\frac{\sin(x\xi)}{\xi} \in L^1([1,b] \otimes \mathbb{R})$ CTP B entonces por Fubini tenemos que $\int_1^b \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}dxd\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_1^b \frac{f(x)\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi dx$. Este es un punto crucial, porque $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$!!

Reescribiendo tenemos que $\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_1^b \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi dx$.

Pasemos a acotar $\int_1^b \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi$, para eso notemos que si $b \geq 1$ entonces $\int_1^b \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi = \int_x^{xb} \frac{\sin(x)}{x}dx$:

- $b \leq 1$

  Entonces tenemos $\int_b^1 \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi$, donde $\frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}$ es continua en un compacto y esta acotada, por ende $\int_b^1 \frac{\operatorname{sen}(x\xi)}{\xi}d\xi \leq \|sinc(x)\|_{L^1([0,1])}$.

- $b \geq 1$

  Aca una forma era simplemente llamar $s_{2n} = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} gdx$ con $g = sinc(x)$, y llamar $s_{2n+1} = \int_{(2n+1)\pi}^{(2(n+1)\pi)} gdx$ entonces tenemos que $s_{2n} - s_{sn+1} \to 0$. Pero simplemente $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} sinc(x)dx = \sum_n (-1)^n s_n < \infty$ por el criterio de Liebniz.

- De yapa veamos como calcular $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} sinc(x)dx$!! donde $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

  a) My personal favorite

  Sea $I_1(t) = \int_t^\infty \frac{\sin(x-t)}{x}dx$ y $I_2(t) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}dx$, entonces I_1 y I_2 son soluciones de $y'' + y = \frac{1}{t}$ $\quad t > 0$. Por ende $I_1 - I_2$ satisface $y'' + y = 0$, pero la solución de eso es $I(t) = A\sin(t+B)$! Ahora como (ej) $I_1, I_2 \to 0$ tenemos que $A = 0$ por lo que $I_1(t) = B = I_2(t) \quad t \geq 0$. O sea que $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} sinc(x)dx = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_n \arctan(n) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$ ∎

  b) A trickyy

  Del último ejercicio de la práctica de Fourier tenemos que $\mathcal{L}(1) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-tx}dx = \frac{1}{t}$ donde $\mathcal{L}$ es el operador transformada de Laplace. Entonces $\int_{\mathbb{R}\geq 0} sinc(x)dx = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-xt}\sin(x)dtdx = \int_{\mathbb{R}\geq 0} sinc(x)dx = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-xt}\sin(x)dxdt$ (Por Fubini) Y como $\mathcal{L}(\sin(x)) = \dfrac{1}{1+t^2}$ tenemos que $\int_{\mathbb{R}\geq 0} sinc(x)dx = \int_{\mathbb{R}\geq 0} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Por ende por h o por v tenemos que $|\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} d\xi| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\int_1^b \frac{\sin(x\xi)}{\xi} d\xi| dx \leq C \|f\|_{L^1} := A$ y A no depende de b. ∎

2. Punto b

   Aquí simplemente era hallar una $g \in C_0$ impar tal que la cota anterior no ande, y era notar que una función que tienda a 0 muy lentamente va a funcionar pues esa integral va a diverger! Por ejemplo si $f(x) = \frac{1}{ln(x)}$ andaría, pero hay que definirla bien. Buen entonces hacemos $\tilde{f}(x) = \frac{1}{ln(x)} \chi_{x \geq 2} + \alpha \chi_{0 \leq x \leq 2}$ donde α es lineal entre $\frac{1}{ln(2)}$ y 0. Entonces sea g la extensión impar de $\tilde{f}$, es claro que $g \in C_0$ y es impar. Además $\int_1^b \frac{g}{x} dx = A + \int_2^b \frac{1}{ln(x)x} dx = A + ln(ln(x))|_2^b \to \infty \quad (b \to \infty)$ y por ende $\nexists f \in L^1 \; / \hat{f} = g$ ∎

3. Punto c

   Tenemos que $C_c^\infty \subset S = \mathcal{F}(S) \subset \mathcal{F}(L^1) \subset C_0$ por ende como $\overline{C_c^\infty} = C_0$ entonces $\overline{\mathcal{F}(L^1)} = C_0$ ∎