Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017
FINAL

Índice

1. Espacios Vectoriales

1.1. Propiedades Elementales

Definición Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un conjunto $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ se dice:

1. *Linealmente independiente* si dados $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$ implica que $\lambda_{i_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.
2. *Sistema de generadores* si dado $v \in \mathcal{X}$ entonces existen $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = v$.
3. *Base* si es a la vez un sistema de generadores linealmente independiente.

Ejemplo
- $X = \mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2, \dots\right\} = \left\{X^j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es base.
- $X = \mathcal{C}[a, b]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{e^{\alpha x}, \alpha \in [0, 1]\}$ veamos que es linealmente independiente.

  Demostración Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$ para todo $x \in [a, b]$; luego si derivamos $n - 1$ veces tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y como los α_i son distintos entonces la matriz de Vandermonde es inversible y el sistema admite una única solución, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. ∎

Recordemos:

Proposición 1.1.1 (Lema de Zorn) *Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que todo subconjunto no vacío $S \subseteq P$ totalmente ordenado admite una cota superior; entonces existe un elemento maximal en P.*

Proposición 1.1.2 *Si E es un espacio vectorial, entonces E admite una base.*

Demostración Consideremos $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ es li}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup_{i \in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in T$ y $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}\ in \mathcal{F}$ tales que $\sum_k \lambda_i v_i = 0$. Como son finitos existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \in S_{k_0}$ para todo i, que al ser un conjunto linealmente independiente resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente, sea $v \in E \backslash < M >$ (el conjunto generado por combinaciones lineales de M), luego $M \cup \{v\}$ sería un conjunto li lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta base. ∎

Proposición 1.1.3 *Sea E un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases de Hamel de E. Luego $\#B_1 = \#B_2$.*

Demostración Sea $x \in \mathcal{B}_1$ y llamemos $S(x)$ al conjunto de los elementos $v \in \mathcal{B}_2$ tal que al escribir a x como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_2$ aparece v, por lo que si $x = \sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k}$ entonces $S(x) = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$.

Lema 1.1.4 $\bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x) = \mathcal{B}_2$

Demostración Del lema Si $v \in \bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x)$ luego existe $x_0 \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x_0)$ por lo que $v \in \mathcal{B}_2$ por definición de $S(x)$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{B}_2$ pero no existe $x \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x)$, entonces $v \notin < \mathcal{B}_1 >= E =< \mathcal{B}_2 >$. ∎

Por 1.1.4 tenemos que $\#\mathcal{B}_2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_1} \#S(x) \leq \#\mathbb{N}\#\mathcal{B}_1 \leq \#B_1$.

Razonando al revés obtenemos la otra desigualdad. ∎

1.2. Normas y productos internos

Definición Si E es un espacio vectorial, una norma definida en E es una aplicación $\|.\| : E \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Observación Todo espacio normado es un espacio métrico pero no viceversa.

Definición Si E es un espacio vectorial, un producto interno definido en E es una aplicación $\langle ., . \rangle : E \times E \mapsto F$ tal que:

1. $\langle ., z \rangle$ es lineal

2. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Observación Todo espacio con producto interno es un espacio normado pero no viceversa.

Teorema 1.2.1 (Cauchy-Schwartz) *Sea E un espacio vectorial y $\langle . \rangle$ un producto interno definido en E; luego si $x, y \in E$ se tiene que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.*

Demostración Sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $z = x - \lambda y$, luego $\langle z, z\rangle = \langle x, x\rangle + \left|\lambda^2\right| \langle y, y\rangle - 2\Re(\lambda \langle y, x\rangle) \geq 0$.
Si $\langle y, x\rangle = re^{i\theta}$ sea $\lambda = e^{-i\theta}t$ con $t \in \mathbb{R}$; luego:

$$0 \geq \langle x, x\rangle + t^2 \langle y, y\rangle - 2bt \equiv c - 2bt + at^2 := q(t)$$

Luego como la cuadrática dada es positiva, eso implica que $0 \leq 4b^2 - 4ac$ por lo que:

$$0 \leq b^2 - ac = |\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

Si $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$, entonces $b^2 = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$ por lo que $b^2 - ac = 0$. Esto implica que existe t_0 tal que $q(t_0) = 0$, por lo tanto eso implica que $\left\langle x - e^{-i\theta}t_0 y, x - e^{-i\theta}t_0 y\right\rangle \equiv 0$ y por lo tanto $x = e^{-i\theta}t_0 y$. ∎

Definición Un espacio normado que es completo respecto a la distancia inducida por la norma se llama *Espacio de Banach*

Definición Un *Espacio de Hilbert* es un espacio de Banach donde la norma proviene de un producto interno mediante $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Proposición 1.2.2 *Sea E un espacio con producto interno, entonces:*

- $\mathcal{R}(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
- $\mathcal{I}(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)$

Demostración Por un lado $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathcal{R}(\langle x, y\rangle)$ y $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathcal{R}(\langle x, y\rangle)$; por lo que restando se obtiene:

$$4\mathcal{R}(\langle x, y\rangle) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Por el otro:

$$\begin{aligned}
\|x + iy\|^2 &= \langle x + iy, x + iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i| \, \|y\|^2 - i \langle x, y\rangle + i\overline{\langle x, y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - i2\mathcal{I}(\langle x, y\rangle) \\
\|x - iy\|^2 &= \langle x - iy, x - iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i| \, \|y\|^2 + i \langle x, y\rangle - i\overline{\langle x, y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i2\mathcal{I}(\langle x, y\rangle)
\end{aligned}$$

Por lo tanto restando ambas obtenemos:

$$4\mathcal{I}(\langle x, y\rangle) = \|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2$$

∎

Proposición 1.2.3 (Ley del paralelogramo) *Sea E un espacio normado real, entonces existe $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ si y sólo si para todos $x,y \in E$ vale:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Demostración Si $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ entonces de la demostración de 1.2.2 se da el resultado. Recíprocamente definamos:

$$\langle x,y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Luego verifiquemos que es un producto interno.

1. $\sqrt{\langle x,x \rangle} = \|x\|$
2. Como $\|x+y\| = \|y+x\|$ y $\|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\|$ concluímos que $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$.
3. Dado que $\|.\|, +, -, *$ son $\|.\|$-continuas entonces $\langle ., x \rangle, \langle x, . \rangle$ es $\|.\|$-continua.
4. Sean $x,y,z \in E$ entonces:

$$\|x+y+z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 = \quad 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2$$

   Luego como $A = B$ y $A = C$ implica $A = \frac{B+C}{2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \|x+y+z\|^2 &= \|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2 \\ \|x+y-z\|^2 &= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y-z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x-z\|^2 \\ &= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|-x+y+z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|-y+x+z\|^2 \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle x+y, z \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \\ &= \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle \end{aligned}$$

5. Por el item anterior es claro por inducción que $\lambda \langle x,y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{N}$ y como vale para $\lambda = -1$ tenemos que vale para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$. Si $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ entonces si llamamos $x' = \frac{x}{q}$ tenemos:

$$q \langle \lambda x, y \rangle = q \left\langle p x', y \right\rangle = p \left\langle q x', y \right\rangle = p \langle x,y \rangle$$

   Luego $\lambda \langle x,y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto probamos que fijados $x,y \in E$ la función $g(t) = \frac{1}{t}\langle tx, y \rangle$ y la función constante $h(t) = \langle x,y \rangle$ cumplen que $h|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ y por continuidad entonces $h \equiv g$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; como el caso $\lambda = 0$ es trivial concluímos que $\lambda \langle x,y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$. ∎

2. Espacios de Hilbert

2.1. Preliminares

Proposición 2.1.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego el producto interno es continuo.*

Demostración Sea $x_n, (y_n)$ tales que $x_n \to x, y_n \to y$, luego:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y\| + \|x\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y_n - y\| \to 0 \end{aligned}$$

∎

2.2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego dados dos vectores $x, y \in E$ decimos que son *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$.

A su vez decimos que son *ortonormales* si osn ortogonales y $\|x\| = \|y\| = 1$

Finalmente dado un conjunto $S \subseteq E$ entonces decimos que es *ortogonal / ortonormal* si dados cualesquiera $x, y \in S$ resulta que son *ortogonales / ortonormales*

Ejemplo El conjunto $\left\{e^{inx} \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ x \in [0, 2\pi]\right\}$ es ortonormal.

Teorema 2.2.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego si $x \in \langle S\rangle$ entonces existe una única escritura de x dada por:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i \qquad u_i \in S$$

Demostración Como $x \in \langle S\rangle$ entonces existen únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tal que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Luego:

$$\langle x, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = \lambda_j$$

∎

Teorema 2.2.2 (Desigualdad de Bessel) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *SI $x \in E$ y $u_1, \ldots, u_n \in S$ luego $\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$*
2. *Si $x \in E$ entonces $\{u \in S \ / \ \langle x, u\rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable*
3. *Si $x, y \in E$ entonces $\left|\sum_{u \in S} \langle x, u\rangle \overline{\langle y, u\rangle}\right| \leq \|x\| \|y\|$*

Demostración 1. Sean $u_1, \ldots, u_n \in S$ y sea $z = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle$, luego:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle z, z\rangle \\
&= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle, x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \right\rangle \\
&= \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \right\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle, x \right\rangle \right) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i\rangle\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2 \right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i\rangle\|^2.
\end{aligned}$$

2. Notemos que $S = \{u \in S \ / \ |\langle x, u\rangle| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{u \in S \ / \ |\langle x, u\rangle| \geq \frac{1}{m}\right\}}_{T_m}$.

   Ahora sean $u_1, \ldots, u_n \in T$ por el item anterior sabemos que:

$$\frac{n}{m^2} \leq \sum_{1\leq k\leq n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

   Por lo que $n \leq m^2 \|x\|^2$ y entonces $\#T_m \leq m^2 \|x\|^2 < \infty$ para todo m, por lo tanto $\#S \leq \#\mathbb{N} * \#T_m \leq \#\mathbb{N}$.

3. Sean $x, y \in E$ y $u_1, \ldots, u_n \in S$, luego:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \overline{\langle y, u_i\rangle} \right| &\leq_{\text{C-S}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle y, u_i\rangle|^2} \\
&\leq_{\text{a}} \|x\| \, \|y\|
\end{aligned}$$

∎

Teorema 2.2.3 *Si E es un espacio vectorial con producto interno tal que E es separable, entonces todo conjunto ortonormal es a lo sumo numerable*

Demostración Sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal y sean $u \neq v \in S$, luego $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2$ y por lo tanto $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v) = \emptyset$.

Sea $D \subseteq E$ un subconjunto denso numerable, luego $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D \neq \emptyset$ para todo $u \in S$. Consideremos $f : S \to D$ dado por $f(u) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D$, luego si $f(u) = f(v)$ entonces $f(v) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v)$ y por lo tanto $u = v$. Como f es inyectiva conclu\'imos que S es a lo sumo numerable. ∎

Teorema 2.2.4 *Sean H un espacio de Hilbert, u_n una sucesión de vectores ortonormales y c_n una sucesión de numeros complejos. Luego:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty \tag{1}$$

Más aún, $c_n = \left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n, u_n \right\rangle$

Demostración Sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$, luego como (u_n) son ortonormales dos a dos y H es completo:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{k'} c_n u_n \right\|^2 = \sum_{i=k+1}^{k'} |c_n|^2$$

Por ende:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty$$

Finalmente, notemos que $\langle S_k, u_j \rangle = c_j$ para todo $k \geq j$ y ,además si $(c_n)_i n l^2$, entonces $S_k \to \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u_n =: x$; por lo tanto por 2.1.1 $c_n = \langle S_k, u_n \rangle \to \langle x, u_n \rangle$. ∎

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y $M \subseteq E$, definimos *el ortogonal a* M como $M^\perp = \{x \in E \ / \ \langle x, m \rangle = 0 \ \forall m \in M\}$.

Proposición 2.2.5 *$M^\perp$ es un subespacio cerrado de E*

Demostración Si $(x_n) \subset M$ es tal que $x_n \to x$ entonces por 2.1.1 $0 = \langle m, x_n \rangle \to \langle m, x \rangle$, por lo que $x \in M$. ∎

Teorema 2.2.6 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *Si $x \in H$ entonces $x_S = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u$ esta bien definido*

2. *Si $M = \langle S \rangle$ entonces $x \in M$ si y solo si $x = x_S$. Es más si $x \in H$ entonces $x - x_S \in M^\perp$.*

Demostración

1. Dado $x \in H$, de 2.2.2 sea (u_n) una numeración de $S = \{u \in S \ / \ \langle x, u \rangle = 0\}$ y sea (v_n) otra ordenación de los u_n; notemos $x_1 = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n$ y $x_2 = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n$ que por 2.2.4 y 2.2.2 están bien definidos.

   Luego:

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, u_n \rangle &= \langle x_1, u_n \rangle - \langle x_2, u_n \rangle \\ &\underbrace{=}_{u_n = v_{m_n} \text{ para algún } m_n} \langle x, u_n \rangle - \langle x, v_{m_n} \rangle \\ &= \langle x, u_n \rangle - \langle x, u_n \rangle = 0 \end{aligned}$$

   Por ende, $\langle x_1 - x_2, u_n \rangle = \langle x_1 - x_2, v_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se concluye que $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = 0$ por lo que $x_1 = x_2$ y entonces x_S esta bien definido y no depende del orden de la suma.

2. Sea $x_{S_k} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i \in M$, luego como M es cerrado se tiene que $x_{S_k} \to x_S \in M$. Ahora sea $s \in S$, entonces:

$$\langle x - x_S, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x_S, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x, v \rangle = 0$$

   Por lo que $x - x_S \in M^\perp$. Finalmente, si $x \in M$ entonces como $x_S \in M$ entonces $x - x_S \in M \cap M^\perp = \{0\}$, luego $x = x_S$. ∎

2.3. Conjuntos ortonormales completos

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ ortonormal, diremos que S es *completo* si $S \subseteq T$ y T es ortonormal, entonces $S = T$.

Proposición 2.3.1 *Sea S un conjunto ortonormal tal que $S^{\perp} = \{0\}$, entonces S es completo*

Demostración Sea T ortonormal y sea $v \in T \setminus S$, luego $v \in S^{\perp} = 0$ por lo que S es completo. ∎

Teorema 2.3.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, $S \subseteq E$ ortonormal y sea $M = \langle S \rangle$, entonces:*

1. *Si $M = E$ entonces S es completo*
2. *Si S es completo y E es de Hilbert entonces $M = E$*

Demostración

1. Si $x \in S^{\perp}$ entonces $x \in M^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto S es completo
2. Sea $x \in E$, luego por 2.2.6 x_S esta bien definido y $x - x_S \in M^{\perp}$, luego como S es completo $x - x_S = 0$ y por 2.2.6 se tiene que $x \in M$. ∎

Corolario 2.3.3 *Sea H de Hilbert y $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal completo, luego si $x \in H$ entonces $x = \sum\limits_{u \in S} \langle x, u \rangle u$.*

Demostración Como H es Hilbert y S es completo entonces por 2.3.2 tenemos que $\langle S \rangle = H$, luego por 2.2.6 si $x \in H$ entonces $x = x_S$. ∎

Teorema 2.3.4 (Identidad de Parseval) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal tal que para todo $x \in E$ vale:*

$$\|x\|^2 = \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2 \tag{2}$$

Luego S es completo. Más aún si E es Hilbert y S es completo entonces vale 2

Demostración Sea $x \in E$ tal que $x \in S^{\perp}$, luego por 2 $\|x\| = \sum\limits_{u \in S} \Big| \underbrace{\langle x, u \rangle}_{=0} \Big|^2 = 0$, luego $x = 0$ y S es completo.

Si E es Hilbert y S es completo entonces por 2.3.3 y 2.2.2 vale que $x = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n$ por lo que:

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle x, x \rangle \\
&= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n \right\rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle x, u_n \rangle} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, u_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2
\end{aligned}$$

∎

Corolario 2.3.5 *Sea H Hilbert y $m \in M = \langle S \rangle$ con $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal, luego $\|x - m\| \geq \|x - x_S\|$*

Demostración $\|x - m\|^2 = \Big\| \underbrace{x - x_S}_{\in M^{\perp}} + \underbrace{x_S - m}_{\in M} \Big\|^2 = \|x - x_S\|^2 + \|x_S - M\|^2 \geq \|x - x_S\|^2$ ∎

2.4. Ortogonalización de Gram Schmitt

Teorema 2.4.1 (Ortogonalización de Gram-Schmidt) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea D un conjunto linealmente independiente no vacío, luego si D es a lo sumo numerable existe $S \subseteq E$ ortonormal tal que:*

- $\#S = \#D$
- $\langle D \rangle = \langle S \rangle$

Demostración Sea $D = \{x_n\}$ y definamos:

$$\begin{array}{cccccc} y_1 = & x_1 & , & u_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|} & , & S_1 = \{u_1\} \\ y_2 = & x_2 - x_{S_1} & , & u_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|} & , & S_2 = \{u_1, u_2\} \\ \vdots & \vdots & , & \vdots & , & \vdots \\ y_n = & x_n - x_{S_{n-1}} & , & u_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|} & , & S_n = \{u_1, \ldots, u_n\} \end{array}$$

Luego sea $S = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$ y es claro verificar ambas propiedades. ∎

Proposición 2.4.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno de dimensión infinita, luego si E es separable existe $S \subseteq E$ ortonormal, completo y numerable tal que $\overline{\langle S \rangle} = E$.*

Demostración Como E es separable existe $D = \{x_n\} \subseteq E$ denso numerable. Sea $n_1 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \neq 0\}$ y $y_1 = x_{n_1}$ e inductivamente sea $n_k = \text{mín} \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \notin \langle y_1, \ldots, y_{k-1} \rangle \ , \ n_k > n_{k-1}\}}_{A_k}$ y $y_k = x_{n_k}$, luego por la buena ordenación de $\mathbb{N}$ y el hecho que D es denso y $dim(E) = \infty$ entonces $A_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por lo que n_k esta bien definido. Sea $Y = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{y_k\}$

Lema 2.4.3 $\langle D \rangle = \langle Y \rangle$ *e* Y *es linealmente independiente.*

Demostración (del Lema) Si $x_{n_0} \in D$ luego si $n_0 = n_k$ para algún k se concluye que $x_{n_0} \in Y$, si no entonces por Arquimedianidad $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n > n_0 \ , \ \exists k \in \mathbb{N} \ , \ n = n_k \ \} \neq \emptyset$ y sea $\hat{k} = \text{mín} A$; luego $x_{n_0} \in \left\langle A_{\hat{k}-1} \right\rangle \subseteq \langle Y \rangle$. Se concluye que $D \subseteq \langle Y \rangle$ y entonces $\langle D \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.

Recíprocamente sea $y \in Y$, luego por definición de y se tiene que $y = x_{n_k} \in \langle D \rangle$ para algún k y entonces $Y \subseteq \langle D \rangle$ por lo que $\langle Y \rangle = \langle D \rangle$.

Finalmente por construcción Y es linealmente independiente. ∎

Luego por 2.4.1 existe $S \subseteq E$ ortonormal tal que $\langle S \rangle = \langle Y \rangle \underbrace{=}_{2,4,3} \langle D \rangle$, y como D es denso se tiene que $\overline{\langle S \rangle} = \overline{\langle D \rangle} \supseteq \overline{D} = E$. ∎

2.5. Dimensión de un espacio de Hilbert

Proposición 2.5.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sean $S_1, S_2 \subseteq E$ conjuntos ortonormales y completos, luego $\#S_1 = \#S_2$*

Demostración Si S_1 es finito entonces $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$, sea $x \in E$ entonces $x - x_{S_1} = x - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i \in S_1^{\perp} = \{0\}$ por lo que S_1 es generador y ortonormal; concluímos que S_1 es base y $\dim_E = k$. Análogamente $S_2 = \{v_1, \ldots, v_j\}$ es base y finalmente sea $T \in End(E)$ dada por $T(u_i) = v_i$, luego T es biyectiva y $\#S_1 = \#S_2$.

Si S_1 es infinito entonces para $x \in S_1$ sea $S_2(x) = \{u \in S_2 \ / \ \langle u, x \rangle \neq 0\}$, luego por 2.2.2 sabemos que $S_2(x)$ es a lo sumo numerable.

Lema 2.5.2 $\bigcup_{x \in S_1} S_2(x) = S_2$

Demostración (del Lema) Supongamos que existe $y \in S_2$ tal que $y \notin S_2(x)$ para todo $x \in S_1$, luego $y \in S_1^{\perp} = \{0\}$; concluímos que $S_2 \subseteq \bigcup_{x \in S_1} S_2(x)$ pues S_2 es ortonormal.

Trivialmente se da la otra inclusión. ∎

Por lo tanto $\#S_2 \leq \#(\mathbb{N} \times S_1) = \#S_1$; análogamente $\#S_1 \leq \#S_2$ y se concluye el resultado. ∎

Definición Se define $dim(E) = \#S$ donde $S \subseteq E$ es un sistema ortonormal completo.

Definición Sean E y F dos espacios vectoriales con producto interno, decimos que son *congruentes* si existe $T \in L(E, F)$ isomorfismo tal que $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$

Definición Sea $Q \neq \emptyset$, luego definimos $l^2(Q) = \left\{ f : Q \to \mathbb{R} \ / \ \#\{q \in Q \ / \ f(q) \neq 0\} \leq \aleph_0 \ , \ \sum_{q \in Q} |f(q)|^2 < \infty \right\}$.

Proposición 2.5.3 *Valen:*

1. *$l^2(Q)$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por* $\langle f, g \rangle = \sum_{q \in Q} f(q)\overline{g(q)}$
2. *Sea* $S = \left\{ \chi_{\{q\}} \right\}_{q \in Q}$ *es ortonormal y completo*
3. *Si* $\#Q > \#\mathbb{N}$ *entonces* $l^2(Q)$ *no es separable*

Proposición 2.5.4 *Todo espacio vectorial con producto interno admite un sistema ortonormal completo.*

Demostración Sea $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ ortonormal}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup_{i \in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_1, v_2 \in T$, luego existe S_i tal que $v_1, v_2 \in S_i$ y como este es ortonormal resulta que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ y $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente sea $v \in M^{\perp}$, luego $M \cup \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$ sería un conjunto ortonormal lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta completo. ∎

Teorema 2.5.5 *Sea H Hilbert tal que* $\dim H = \alpha$ *entonces* $H \cong l^2(Q)$ *con* $\#Q = \alpha$

Demostración Sea $S_\alpha = \{u_i\}_{i \in Q}$ un sistema ortonormal, completo de H que existe por 2.5.4; luego $x \in H$ entonces $x = \sum_{i \in Q} \langle x, u_i \rangle u_i$, y debido a 2.3.4 y 2.2.2 $\{\langle x, u_i \rangle\}_{i \in Q} \subset l^2(Q)$. Definimos $T : H \to l^2(Q)$ dado por $T(x) = (\langle x, u_i \rangle)_{i \in Q}$ y veamos que es la indicada.

1. T es lineal

   Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, luego $T(x + \lambda y) = (\langle x + \lambda y, u_i \rangle) = (\langle x, u_i \rangle + \lambda \langle y, u_i \rangle) = T(x) + \lambda T(y)$.

2. T es monomorfismo

   Si $T(x) = (0)$ luego $\langle x, u_i \rangle = 0$ para todo $i \in Q$, luego $x \in S^{\perp} = \{0\}$ pues S es completo.

3. T es epimorfimso

   Si $(c_i) \in l^2(Q)$ luego por 2.2.4 $x = \sum_{i \in Q} c_i u_i \in H$ y $T(x) = (c_i)$

4. T es isometría

   Por 2.3.4

Corolario 2.5.6 *Sea H Hilbert separable de dimensión infinita, luego H es congruente a* l^2

2.6. Proyección ortogonal

Ejemplo El sistema $\left\{\dfrac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ t\in[0,2\pi]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo.

Demostración Supongamos que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt = 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y sea $g(t)=\int_{-\pi}^{t} f(t)dt$, luego g es continua y $g'=f$ ctp por el teorema de diferenciación de Lebesgue. Notemos que:

$$g(\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{i0t}dt = 0 = g(-\pi)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = \frac{g(t)e^{int}}{ni}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}}{in} = 0$$

Por lo tanto tenemos que $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = 0$ donde g es continua y $g(-\pi)=g(\pi)=0$, por Stone-Weirstrass existe $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de polinomios trigonométricos tal que $p_n \rightrightarrows g$, por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(t)e^{int} \to \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = 0 \quad n\in\mathbb{N}$$

No obstante, si $p_k \neq cte$ entonces para todo $k\in\mathbb{N}$ $\langle p_k, e^{int}\rangle \neq 0$ para algún n, luego $p_k = cte = g(\pi) = 0$. Concluímos que $g=0$ y entonces $f=0$ ctp. ∎

Teorema 2.6.1 *Sea H Hilbert y K cerrado y convexo, luego si $x\in H$ entonces existe un único $k\in K$ tal que $\|x-k\| = d(x,K)$*

Demostración Sea $d_n = \|x-k_n\|$ una sucesión minimizante, luego para todo $n\geq N\in\mathbb{N}$ vale que $d+\frac{1}{N}\geq \|x-k_n\|$ por lo que por 1.2.3:

$$\|(x-k_n)-(x-k_m)\|^2 + \|(x-k_n)+(x-k_m)\|^2 = 2\|x-k_n\|^2 + 2\|x-k_m\|^2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\|k_n-k_m\|^2 =& 2\|x-k_n\|^2 + 2\|x-k_m\|^2 - \|2x-k_n-k_m\|^2 \\
=& 2\|x-k_n\|^2 + 2\|x-k_m\|^2 - 4\left\|x - \underbrace{\frac{k_n-k_m}{2}}_{\in K}\right\|^2 \\
\leq& 2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \\
=& \frac{4d}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{m^2} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Luego (k_n) es de Cauchy y como H es completo existe $k\in K$ tal que $k_n\to K$; por 2.1.1 $d=\|x-k\|$. Si $h\in K$ tal que $\|x-h\|=d$ luego como K es convexo $\frac{k+h}{2}\in K$ por lo que:

$$d \leq \left\|x-\frac{k+h}{2}\right\| \leq \frac{\|x-k\|+\|x-h\|}{2} = d$$

Luego por 1.2.3:

$$\|k-h\|^2 = 2\|x-k\|^2 + 2\|x-h\|^2 - 4\left\|x-\frac{k-h}{2}\right\|^2 = 0$$

Por lo que $k=h$. ∎

Definición Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado de H Hilbert, luego por 2.6.1 existe un único $f_0 \in M$ tal que para todo $x \in H$ vale $\|x - f_0\| = d(x, M)$. A su vez como M es cerrado también es un espacio de Hilbert, luego por 2.5.4 existe $S \subseteq M$ tal que $M = \langle S \rangle$, finalmente por 2.2.4 vale que $f_0 = x_S$.

En resumen, dado $M \subseteq H$ subespacio cerrado y $h \in H$ existe un único elemento f_0 tal que $h - f_0 \in M^\perp$. Definimos la *proyección ortogonal sobre* M $P_M : H \to M$ dado por $P_M(h) = f_0$.

Proposición 2.6.2 *Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado en un Hilbert, sea $h \in H$ y $Ph := P_M(h)$ el único elemento tal que $h - Ph \in M^\perp$, luego:*

1. *P es lineal*
2. $\|Ph\| \leq \|h\|$
3. $P^2 = P$
4. $\ker P = M^\perp$ *y* $ranP = M$

Demostración 1. *Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{F}$ y $m \in M$; luego $\langle x + \lambda y - Px + \lambda Py, f \rangle = \langle x - Px, f \rangle + \lambda \langle y - Py, f \rangle = 0$. Por unicidad en 2.6.1 vale que $P(x + \lambda y) = Px + \lambda Py$.*

2. *Notemos que* $\|h\|^2 = \left\| \underbrace{h - Ph}_{\in M^\perp} + \underbrace{Ph}_{\in M} \right\|^2 = \|h - Ph\|^2 + \|Ph\|^2 \geq \|Ph\|^2$.

3. *Como $P|_M = Id_M$ entonces $P(Ph) = Ph$ para todo $h \in H$.*

4. *Si $Ph = 0$ entonces $h - Ph = h \in M^\perp$; recíprocamente si $h \in M^\perp$ entonces $h - 0 \in M^\perp$ por lo que $h \in \ker P$.* ∎

Corolario 2.6.3 *Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado en un Hilbert, entonces $(M^\perp)^\perp = M$*

Demostración Primero notemos que:

Lema 2.6.4 $Id - P_M = P_{M^\perp}$

Demostración del lema Sea $m \in M^\perp$ y $h \in H$, luego $\langle h - (Id - P_M)(h), m \rangle = \langle h - h + P_M(h), m \rangle = \langle P_M(h), m \rangle = 0$, por la unicidad de 2.6.1 vale que $P_{M^\perp} = Id - P_M$. ∎

Luego por 2.6.2 vale que $\left(M^\perp\right)^\perp = \ker P_{M^\perp} = \ker(Id - P_M) \underbrace{=}_{0=h-Ph \Leftrightarrow h=Ph} ran\ P = M$. ∎

Corolario 2.6.5 *Sea $A \subseteq H$ un conjunto en un Hilbert, luego $(A^\perp)^\perp = \overline{\langle A \rangle}$*

Demostración Para esto vamos a utilizar dos lemas:

Lema 2.6.6 $\langle A \rangle^\perp = A^\perp$

Demostración Por un lado si $f \in A^\perp$ luego $\left\langle f, \sum_{i=1}^n c_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle f, a_i \rangle = 0$ por lo que $f \in \langle A \rangle^\perp$.

Recíprocamente si $f \in \langle A \rangle^\perp$ y sea $a \in A$, luego $\left\langle f, \underbrace{a}_{A \subseteq \langle A \rangle} \right\rangle = 0$ por lo que $f \in A^\perp$. ∎

Lema 2.6.7 *Sea $U \subseteq H$ un conjunto en un Hilbert, entonces $U^\perp = \overline{U}^\perp$.*

Demostración Sea $h \in U^{\perp}$, luego si $u \in \overline{U}$ entonces existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $u_n \to u$. Por 2.1.1 entonces $0 = \langle h, u_n\rangle \to \langle h, u\rangle$ por lo que $h \in \overline{U}^{\perp}$.

Recíprocamente, si $h \in \overline{U}^{\perp}$ y $u \in U \subseteq \overline{U}$ entonces $\langle h, u\rangle = 0$; concluímos que $h \in U^{\perp}$. ∎

Luego por el corolario previo $\overline{\langle A\rangle} = \left(\overline{\langle A\rangle}^{\perp}\right)^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,7} \left(\langle A\rangle^{\perp}\right)^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,6} \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. ∎

Corolario 2.6.8 *Sea $M \subseteq H$ una variedad lineal en un Hilbert, luego M es denso si y sólo si $M^{\perp} = \{0\}$*

Demostración Si $\overline{M} = H$ entonces $M^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,7} = \overline{M}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

Recíprocamente de 2.6.5 sabemos que $\overline{M} = \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. ∎

2.7. Teorema de representación de Riesz

Proposición 2.7.1 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $L : H \to \mathbb{F}$ un funcional lineal, entonces son equivalentes:*

1. *L es continua*
2. *L es continua en 0*
3. *L es continua en algún punto*
4. *Existe $c > 0$ tal que:*

$$|L(h)| \leq c\,\|h\| \quad \forall h \in H \tag{3}$$

Demostración Es claro que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) y que 4) $\Longrightarrow$ 2), veamos las que faltan:

3) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que L es continua en $h_0 \in H$ y sea $h \in H$; luego si $h_n \to h$ entonces $h_n - h + h_0 \to h_0$, por lo tanto $L(h_0) = \lim L(h_n - h + h_0) = \lim L(h_n) - L(h) + L(h_0)$ y concluímos que $L(h) = \lim L(h_n)$.

2) $\Longrightarrow$ 4) Como L es continua en 0 entonces si $V = \{\alpha \in \mathbb{F} \;/\; |\alpha| < 1\}$ entonces $L^{-1}(V)$ es abierto; es decir existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $|L(h)| < 1$.

Si $h \in H$ y $\epsilon > 0$ entonces $\left\|\dfrac{\delta h}{\|h\| + \epsilon}\right\| < \delta$ por lo que:

$$1 > \left|L\left[\frac{\delta h}{\|h\| + \epsilon}\right]\right| = \frac{\delta}{\|h\| + \epsilon}\,|L(h)|$$

Por lo que si $\epsilon \to 0$:

$$|L(h)| < \frac{1}{\delta}\left(\|h\|\right) := c\,\|h\|$$

∎

Definición Decimos que $L : H \to \mathbb{F}$ es *acotado* si vale 3. De 2.7.1 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|L\| = \sup\{|L(h)| : \; \|h\| \leq 1\}$$

Proposición 2.7.2 *Si L es un funcional acotado entonces:*

$$\begin{aligned} \|L\| :=& \sup\{|L(h)| : \ \|h\| \leq 1\} \\ =& \sup\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \\ =& \sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\} \\ =& \inf\{c > 0 : \ |L(h)| \leq c\,\|h\| \ \ h \in H\} \end{aligned} \tag{4}$$

Es más, vale que $|L(h)| \leq \|L\|\,\|h\|$ *para todo* $h \in H$.

Demostración Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned} \|L\|_2 &= \sup\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \\ \|L\|_3 &= \sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\} \\ \|L\|_4 &= \inf\{c > 0 : \ |L(h)| \leq c\,\|h\| \ \ h \in H\} \end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como $\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \subseteq \{|L(h)| : \ \|h\| \leq 1\}$ entonces vale que $\|L\|_2 \leq \|L\|$.

  Recíprocamente, si $\|h\| \leq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{\|h\|}\,|L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq \|L\|_2\,\|h\| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \sup_{\|h\|\leq 1} |L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \|L\| \leq \|L\|_2 \end{aligned}$$

- Si $h \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{\|h\|}\,|L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \sup_{h\neq 0}\left\{\frac{1}{\|h\|}\,|L(h)|\right\} \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \|L\|_3 \leq \|L\|_2 \end{aligned}$$

  Recíprocamente notemos que $\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} = \left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ \|h\| = 1\right\} \subseteq \left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\}$ por lo tanto $\|L\|_2 \leq \|L\|_3$.

- Sea $\epsilon > 0$, luego:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\| + \epsilon}\right)\right| \leq \|L\| \\ \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq (\|h\| + \epsilon)\,\|L\| \\ \text{Si } \epsilon \to 0 \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq \|L\|\,\|h\| \\ \Longrightarrow \quad & \|L\|_4 \leq \|L\| \end{aligned}$$

  Recíprocamente, si $\|L(h)\| \leq c\,\|h\|$ entonces $\|L\| \leq c$ por lo que $\|L\| \leq \|L\|_4$. ∎

Teorema 2.7.3 (Teorema de Representación de Riesz) *Sea $L : H \to \mathbb{F}$ un funcional, entonces L es acotado si y sólo si existe un único $h_0 \in H$ tal que $L(h) = \langle h, h_0\rangle$. En ese caso $\|L\| = \|h_0\|$.*

Demostración Sea $M = \ker L$, como L es acotada entonces M es cerrado y como $L \neq 0$ (en cuyo caso $h_0 = 0$) entonces $M^\perp \neq \{0\}$. Como $H = M \oplus M^\perp$ entonces existe $f_0 \in M^\perp$ tal que $L(f_0) = 1$.

Sea $h \in H$, entonces $L(h - L(h)f_0) = 0$ por lo que $h - L(h)f_0 \in M$; de aquí concluímos:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & = & \langle h - L(h)f_0, f_0\rangle \\ \Longrightarrow & 0 & = & \langle h, f_0\rangle - L(h)\|f_0\|^2 \\ \Longrightarrow & L(h) & = & \dfrac{1}{\|f_0\|^2}\langle h, f_0\rangle \\ \Longrightarrow & L(h) & \underbrace{=}_{h_0=\frac{f_0}{\|f_0\|^2}} & \langle h, h_0\rangle \end{array}$$

Si h_0' es tal que $\langle h, h_0\rangle = L(h) = \langle h, h_0'\rangle$ entonces $0 = \langle h, h_0 - h_0'\rangle$ para todo $h \in H$, en particular $0 = \langle h_0 - h_0', h_0 - h_0'\rangle = \|h_0 - h_0'\|^2$ por lo que $h_0 = h_0'$.

Recíprocamente, si $L(h) = \langle h, h_0\rangle$ entonces por 1.2.1 $|L(h)| \leq \|h\|\,\|h_0\|$ por lo tanto $\|L\| \leq \|h_0\|$.

En ese caso, $L\left(\dfrac{h_0}{\|h_0\|}\right) = \dfrac{1}{\|h_0\|}\langle h_0, h_0\rangle = \|h_0\|$ por lo que $\|L\| = \|h_0\|$. ∎

3. Espacios de Banach

3.1. Operadores entre espacios normados

Proposición 3.1.1 *Sea E un espacio normado, entonces:*

1. *La suma es continua*
2. *El producto por un escalar es continuo*
3. *La norma es continua*

Demostración 1. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ entonces $\|x + y - x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$

2. Si $x_n \to x$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ entonces $\|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda|\,\|x_n - x\| \to 0$.

3. Si $x_n \to x$ entonces por definición $\|x_n - x\| \to 0$. ∎

Proposición 3.1.2 *Sea E un espacio normado y $x_0 \in E$ entonces $\overline{B_r(x_0)} = B_r[x_0]$.*

Demostración Si $x \in \overline{B_r(x_0)}$ entonces existe $\{x_n\} \subset B_r(x_0)$ tal que $x_n \to x$, como $\|x_n - x_0\| < r$ entonces por 3.1.1 se tiene que $\|x_n - x_0\| \to \|x - x_0\|$ por lo que $x \in B_r[x_0]$.

Recíprocamente si $x \notin \overline{B_r(x_0)}$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0) = \emptyset$; luego $\|x - x_0\| > \epsilon + r > r$ por lo que $x \notin B_r[x_0]$. ∎

Teorema 3.1.3 *Sea X un espacio normado, entonces X es de Banach si y sólo si vale:*

$$\textit{Si } (x_n) \textit{ cumple que } \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X \tag{5}$$

Demostración Sea $S_k = \sum_{n\leq k} x_n$, entonces si $k > k'$, $\|S_k - S_{k'}\| = \left\|\sum_{n=k'+1}^{k} x_n\right\| \leq \sum_{n=k'+1}^{k} \|x_n\| \xrightarrow{k,k' \to \infty} 0$.
Luego S_k es de Cauchy y como X es Banach $S_k \to \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X$.

Recíprocamente, sea $(x_n) \subset X$ de Cauchy y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\epsilon = \frac{1}{2^k}$ y $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$ si $n, m \geq n_k$. Luego si $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ entonces $\sum\limits_k \|z_k\| < \sum\limits_k \frac{1}{2^k} < \infty$; luego por hipótesis $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} z_k$ converge, pero $S_m = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$, luego $\lim\limits_m x_{n_m} = x_{n_1} + \lim S_m \in X$; como x_n es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente entonces (x_n) es convergente. ∎

Definición Si X, Y son espacios normados un *isomorfismo topológico* es $T : X \to Y$ tal que:

- T es isomorfismo lineal
- T y T^{-1} son continuas

Proposición 3.1.4 *Seax X, Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces son equivalentes:*

1. *T es continua*
2. *T es continua en 0*
3. *T es continua en algún punto*
4. *Existe $c > 0$ tal que:*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X \quad \forall x \in X \tag{6}$$

5. *T está acotado en $B_1[0]$*
6. *T está acotado en $B_r[x_0]$ para todos $x_0 \in X$ y $r > 0$*
7. *T está acotado en $\partial B_r[x_0]$ para todos $x_0 \in X$ y $r > 0$*

Demostración Es claro que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3), que 4) $\Longrightarrow$ 2) y que 6) $\Longrightarrow$ 7), veamos las que faltan:

3) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que T es continua en $x_0 \in X$ y sea $x \in X$; luego si $x_n \to x$ entonces $x_n - x + x_0 \to x_0$, por lo tanto $T(x_0) = \lim T(x_n - x + x_0) = \lim T(x_n) - T(x) + T(x_0)$ y concluímos que $T(x) = \lim T(x_n)$.

2) $\Longrightarrow$ 4) Como T es continua en 0 entonces si $V = \{y \in Y \;/\; \|y\|_Y < 1\}$ entonces $T^{-1}(V)$ es abierto; es decir existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|_X < \delta$ implica $\|T(x)\|_Y < 1$.

Si $x \in X$ y $\epsilon > 0$ entonces $\left\| \dfrac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon} \right\|_X < \delta$ por lo que:

$$1 > \left\| T\left[\frac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon} \right] \right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X + \epsilon} \|T(x)\|_Y$$

Por lo que si $\epsilon \to 0$:

$$\|T(x)\|_Y < \frac{1}{\delta} \left(\|x\|_X\right) := c\,\|x\|_X$$

4) $\Longrightarrow$ 5) Sea $x \in B_1[0]$, luego $\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X \leq c$.

5) $\Longrightarrow$ 6) Sea $r > 0$ y $x_0 \in X$, luego si $x \in B_r[x_0]$ entonces existe $M > 0$ tal que $\left\| T\left(\dfrac{x - x_0}{r}\right) \right\|_Y \leq M$ pues $\dfrac{x - x_0}{r} \in B_1[0]$

Por lo tanto $\|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq Mr$ lo que implica que $\|T(x)\|_Y \leq rM + \|T(x_0)\|_Y := C$.

7) $\Longrightarrow$ 1) Sea $x_0 \in X$, luego por hipótesis si $\|x - x_0\|_X = 1$ entonces $\|T(x - x_0)\|_Y \leq C$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \left\| T\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_X}\right)\right\|_Y \leq C \\ \Longrightarrow \quad & \|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq C\, \|x - x_0\|_X \end{aligned}$$

Cuando $\|x - x_0\|_X < \delta = \frac{\epsilon}{C}$. ∎

Ejemplo Si $X = Y = C[a, b]$ dotados de la norma supremo entonces $T(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ es un operador lineal acotado que no es un isomorfismo topológico.

Corolario 3.1.5 *Sean X, Y normados y sea $T : X \to Y$ un isomorfismo lineal. Entonces T es isomorfismo topológico si y sólo si existen $C_1, C_2 > 0$ tal que* $C_1 \|x\| \underbrace{\leq}_{\star} \|T(x)\| \underbrace{\leq}_{*} C_2 \|x\|$

Demostración Si T es isomorfimso topológico entonces:

$$\begin{array}{rcl} T \text{ continua} & \Longrightarrow & \exists C_2 > 0 \ / \ \|T(x)\| \leq C_2 \|x\| \quad \forall x \in X \\ T^{-1} \text{ continua} & \Longrightarrow & \exists D_1 > 0 \ / \ \left\|T^{-1}(y)\right\| \leq D_1 \|y\| \quad \forall y \in Y \\ & \Longrightarrow & \|x\| \leq D_1 \|T(x)\| \quad \forall x \in X \\ & \Longrightarrow & C_1 \|x\| \leq \|T(x)\| \quad \forall x \in X \end{array}$$

Por lo tanto vale que:

$$C_1 \|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2 \|x\|$$

Recíprocamente, por $*$ se concluye que T es acotado y por 3.1.4 es continua; asimismo de $\star$ si $x = T^{-1}(y)$ se ve que T^{-1} es continua.

3.2. Espacios vectoriales de dimensión finita

Definición Si $\|.\|_1, \|.\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X entonces decimos que son *equivalentes* si $1_X : (X, \|.\|_1) \to (X, \|.\|_2)$ es un isomorfismo topológico.

Teorema 3.2.1 *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita, entonces:*

1. *Dos normas siempre son equivalentes*
2. *X es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n = \dim X$*

Demostración 1. Sea $\|.\|$ una norma en X y veamos que $\|.\|$ y $\|.\|_\infty$ son equivalentes.

Sea $a = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$, luego $\|a\| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \|e_i\| \leq \|a\|_\infty C$.

Luego sea $id : (X, \|.\|_\infty) \to (X, \|.\|)$

Sabemos que $B_1[0]$ es compacta en $(X, \|.\|_\infty)$ y por la cuenta anterior id es continua, por lo tanto $id(S) = S$ es compacta en $(X, \|.\|)$ y por ende alcanza mínimo y máximo.

Sean $C_1 = \min\limits_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|$ y $C_2 = \max\limits_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|$, por lo tanto si $x \in X$ entonces:

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \leq C_2$$

2. Si $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ definimos $T(x) = (a_1, \ldots, a_n)$, luego:

$$C_1 \|x\| \leq \|T(x)\|_\infty = \|x\|_\infty \leq C_2 \|x\|$$

Por lo que T es isomorfismo topológico. ∎

Corolario 3.2.2 *Todo espacio vectorial de dimensión finita es Banach.*

Corolario 3.2.3 *Si X es normado de dimensión finita, entonces todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

Demostración Si $A \subseteq X$ es cerrado y acotado, entonces existe $x_0 \in X, r > 0$ tal que $A \subset B_r[x_0]$ y $B_r[x_0]$ es compacto pues $B_1[0]$ lo es. Por lo tanto A es un cerrado en un compacto. ∎

Teorema 3.2.4 *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces $B_1[0]$ no es compacta*

Demostración Veamos primero el siguiente lema:

Lema 3.2.5 (Lema de Riesz) *Sea $M \subseteq X$ un subespacio no denso en un Banach, dado $r \in (0,1)$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ pero $d(x, M) \geq r$*

Demostración del lema Sea $y \in X \setminus \overline{M}$ y notemos$R = d(y, M)$, luego si $\epsilon > 0$ existe $m_1 \in M$ tal que $\|m_1 - y\| < R + \epsilon$. Sea $x = \dfrac{y - m_1}{\|y - m_1\|}$, luego $\|x\| = 1$ y:

$$\begin{aligned} d(x, M) &= \inf_{m \in M} \|x - m\| \\ &= \inf_{m \in M} \left\| m - \frac{y}{\|y - m_1\|} + \frac{m_1}{\|y - m_1\|} \right\| \\ &= \frac{\inf_{m \in M} \|m - y\|}{\|m_1 - y\|} \\ &= \frac{R}{R + \epsilon} \nearrow 1 \end{aligned}$$

∎

Sea $x_1 \in \partial B_1[0]$, luego por 3.2.5 aplicado a $S_1 = \langle x_1 \rangle$ existe $x_2 \in \partial B_1[0]$ tal que $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$.

Inductivamente sea $x_n \in \partial B_1[0]$ tal que $d(x_n, S_{n-1}) = d(x_n, \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}) > \frac{1}{2}$. Luego por construcción $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1[0]$ es una sucesión tal que $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ para todos $n \neq m$ por lo tanto es una sucesión acotada que no admite subsucesión convergente. Concluímos que $B_1[0]$ no es compacto ∎

3.3. Espacio de Operadores entre espacios normados

Definición Dados X, Y normados decimos que $T : X \to Y$ es *acotado* si vale 6. De 3.1.4 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\| : \ \|x\| \leq 1\}$$

Proposición 3.3.1 *Si T es un operador acotado entonces:*

$$\begin{aligned} \|T\| :=& \sup \{\|T(x)\| : \ \|x\| \leq 1\} \\ =& \sup \{\|T(x)\| : \ \|x\| = 1\} \\ =& \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : \ x \neq 0 \right\} \\ =& \inf \{c > 0 : \ \|T(x)\| \leq c \|x\| \ \ x \in X\} \end{aligned} \tag{7}$$

Es más, vale que $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ para todo $x \in X$.

Demostración Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned} \|T\|_2 &= \sup\{|T(x)|: \ \|x\|=1\} \\ \|T\|_3 &= \sup\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|}: \ x\neq 0\right\} \\ \|T\|_4 &= \text{ínf}\{c>0: \ |T(x)|\leq c\,\|x\| \ \ x\in X\} \end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como $\{|T(x)|: \ \|x\|=1\}\subseteq\{|T(x)|: \ \|x\|\leq 1\}$ entonces vale que $\|T\|_2\leq\|T\|$.

  Recíprocamente, si $\|x\|\leq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{\|x\|}\,|T(x)|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\ & |T(x)|\leq\|T\|_2\,\|x\|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\ & \sup_{\|x\|\leq 1}|T(x)|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\ & \|T\|\leq\|T\|_2 \end{aligned}$$

- Si $x\neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{\|x\|}\,|T(x)|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\ & \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{1}{\|x\|}\,|T(x)|\right\}\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\ & \|T\|_3\leq\|T\|_2 \end{aligned}$$

  Recíprocamente notemos que $\{|T(x)|: \ \|x\|=1\}=\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|}: \ \|x\|=1\right\}\subseteq\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|}: \ x\neq 0\right\}$ por lo tanto $\|T\|_2\leq\|T\|_3$.

- Sea $\epsilon>0$, luego:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|+\epsilon}\right)\right|\leq\|T\| \\ \Longrightarrow\ & |T(x)|\leq(\|x\|+\epsilon)\,\|T\| \\ \text{Si } \epsilon\to 0\longrightarrow\ & |T(x)|\leq\|T\|\,\|x\| \\ \longrightarrow\ & \|T\|_4\leq\|T\| \end{aligned}$$

  Recíprocamente, si $\|T(x)\|\leq c\,\|x\|$ entonces $\|T\|\leq c$ por lo que $\|T\|\leq\|T\|_4$. ∎

Definición Sean X,Y normados, definimos $L(X,Y)=\{T:X\to Y\ /\ T\text{lineal y acotado}\}$

Proposición 3.3.2 *Si X,Y son normados entonces $L(X,Y)$ es normado*

Demostración Probemos al desigualdad triangular pues las demás son triviales:

Sean $T,W:X\to Y$ lineales y acotadas, entonces $\|T+W\|=\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|(T+W)(x)\|=\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Tx+Wx\|\leq\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|+\|Wx\|\leq\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\|+\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|W(x)\|=\|T\|+\|W\|$. ∎

Teorema 3.3.3 *Sean X,Y normados, entonces Y es de Banach si y sólo si $L(X,Y)$ es de Banach*

Demostración Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ una sucesión de Cauchy, y sea $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todos $n, m \geq N$.

En particular dado $x \in B_1[0]$ vale que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|T_n - T_m\| < \epsilon$ por lo que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ es una sucesión de Cauchy; como Y es Banach $\lim T_n(x) \in Y$. Además si $\|x\| \geq 1$ entonces $\lim T_n(x) = \lim \|x\|\, T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \lim T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in Y$; luego definimos:

$$T(x) = \lim T_n(x) \quad \forall x \in X$$

Veamos que $T_n \to T$ y que $T \in L(X,Y)$.

- Por 3.1.1 y la linealidad de T_n vale que T es lineal
- Sea $x \in B_1[0]$ y $\epsilon > 0$, luego sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todos $n, m \geq N$; entonces $\|T(x)\| = \|T(x) - T_N(x) + T_N(x)\| \leq \|T(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\| < \epsilon + C$.
- Sea $\epsilon > 0$, luego $\epsilon > \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| \xrightarrow{m\to\infty} \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T(x)\| = \|T_n - T\|$.

La vuelta la probaremos con Hanh-Banach. ∎

Definición Sea X espacio normado, luego notamos $X^\star := L(X, \mathbb{F})$ y se llama *espacio dual topológico.*

Si pensamos a X como espacio vectorial solamente también esta definido $X^{'} := \{T : X \to \mathbb{F},\ /\ T \text{ lineal}\}$ el *dual algebraico.*

3.4. Espacios cocientes

Sea X un espacio vectorial normado y $S \subseteq X$ un subespacio cerrado. Definimos la siguiente relación de equivalencia en X:

$$x \sim_S y \iff x - y \in S$$

y definimos $\|[x]\|_S := \inf\{\|t\| \ :\ x \in [t]\}$.

Proposición 3.4.1 *El espacio* $\left({}^{X}/_{S}, \|.\|_S\right)$ *es un espacio normado con la suma definida por* $[x] + [y] = [x+y], [\lambda x] = \lambda.[x]$

Demostración

- Sean $x, x' \in X$ tal que $[x] = [x']$, entonces $x - x' \in S$ por lo que $\lambda(x - x') \in S$; en conclusión $\lambda.[x] := [\lambda x] = [\lambda x'] =: \lambda.[x']$.
- Sean $x, x'y, y' \in X$ tal que $[x] = [x'], [y] = [y']$, luego $x - x' \in S$ y $y - y' \in S$ por lo que $(x-x') + (y-y') = (x+y) - (x'+y') \in S$; en conclusión $[x] + [y] := [x+y] = [x'+y'] =: [x'] + [y']$.
- Sean $[x] \in {}^{X}/_{S}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, luego $\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf\limits_{t\in[\lambda x]} \|t\| = \inf\limits_{t\in[x]} \|\lambda t\| = |\lambda|\, \|[x]\|$
- Sean $[x], [y] \in {}^{X}/_{S}$, luego $\|[x] + [y]\| = \|[x+y]\| = \inf\limits_{t\in[x+y]} \|t\| \leq \inf\limits_{t\in[x] w\in[y]} \|t + w\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$
- Si $\|[x]\| = 0$ entonces existe t_n tal que $\|t_n\| < \frac{1}{n}$ con $t_n \in [x]$, por lo tanto $x + s_n = t_n \to 0$ y entonces $s_n \to -x$. Como S es cerrado $-x \in S$ y como es subespacio $x \in S$; luego $[x] = [0]$

  Trivialmente si $x \in S$ entonces $[x] = [0]$ y entonces $\|[x]\| = 0$. ∎

Proposición 3.4.2 *Sean* $S \subseteq X$ *un subespacio cerrado en un normado, entonces:*

$$\|[x]\| = d(x, S)$$

Demostración $d(x,S) = \inf\limits_{s\in S} \|x - s\|_X = \inf\limits_{-s\in S} \|x + s\|_X = \inf\limits_{t\in[x]} \|t\|_X$. ∎

Teorema 3.4.3 *Sea $M \subseteq X$ un subespacio cerrado de un espacio normado y notemos $Q : X \to {}^{X}/_{M}$ la proyección canónica, entonces:*

1. *Q es continua y $\|Q\| \leq 1$.*
2. *Si X es de Banach entonces ${}^{X}/_{M}$ lo es.*
3. *Si $W \subset {}^{X}/_{M}$ entonces W es abierto si y sólo si $Q^{-1}(W)$ es abierto.*
4. *Si $U \subset X$ es abierto entonces $Q(U) \subset {}^{X}/_{M}$ es abierto.*

Demostración Vayamos de a partes:

1. $\|Q(x)\| = \|[x]\| = d(x, M) \leq \|x\|$ pues $0 \in M$; concluímos por 3.1.4.
2. Sea $([x_n]) \subset {}^{X}/_{M}$ una sucesión tal que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|[x_n]\| \neq 0$ sea $\epsilon_n = \|[x_n]\|$. Luego $\|[x_n]\| + \epsilon_n = 2\,\|[x_n]\| > \|x_n + m_n\|$ para cierto $m_n \in M$ (Si $\|[x_n]\| = 0$ entonces $x_n \in M$ y tomamos $m_n = -x_n \in M$), como $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$ entonces $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|m_n + x_n\| < \infty$ y por 3.1.3 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} m_n + x_n \in X$. Como $S_p = \sum\limits_{n=1}^{p} x_n + m_n \to \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} m_n + x_n := v \in X$ y Q es continua entonces $\sum\limits_{n=1}^{p} [x_n] = Q\left(S_p\right) \to Q(v) \in {}^{X}/_{M}$; concluímos por 3.1.3 que ${}^{X}/_{M}$ es de Banach.
3. Sea $W \subset {}^{X}/_{M}$ tal que $Q^{-1}(W)$ es abierto, luego si $[x_0] \in W$ entonces $x_0 \in Q^{-1}(W)$ y existe un $r > 0$ tal que $x_0 + B_r(0) \subset Q^{-1}(W)$. Veamos el siguiente lema:

   Lema 3.4.4 $Q(B_r(0)) = B_r([0])$

   Demostración del lema Si $\|x\| < r$, entonces $\|[x]\| = \|Qx\| \leq \|x\| < r$. Recíprocamente si $\|[x]\| < r$ entonces existe $y \in M$ tal que $\|x + y\| < r$ por lo que $[x] = Q(x + y) \in Q(B_r(0))$. ∎

   Por el lema $W = QQ^{-1}(W) \supset Q(x_0 + B_r(0)) = B_r([x_0])$ por lo que W es abierto.
4. Si $U \subset X$ es abierto entonces $Q^{-1}(Q(U)) = U + M = \bigcup\limits_{m\in M} U + y$ que es una unión de abiertos, por lo que $Q^{-1}(Q(U))$ es abierto; por el punto anterior $Q(U)$ es abierto. ∎

Proposición 3.4.5 *Si X es normado, $M \subseteq X$ es un subespacio cerrado y $N \subseteq X$ es de dimensión finita entonces $M + N$ es un subespacio cerrado.*

Demostración Consideremos $Q : X \to {}^{X}/_{M}$, como $\dim Q(N) \leq \dim N < \infty$ entonces $Q(N)$ es cerrado y como Q es continua entonces $Q^{-1}(Q(N)) = N + M$ es cerrado . ∎

4. Teorema de Hahn-Banach