Topología– 2° cuatrimestre 2015
HOMOLOGÍA

1. Halle todos los grupos abelianos posibles M en la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$$

Demostración Si tengo tiempo la hago...

2. Pruebe que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga de homología

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_n} H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}} \ldots$$

Demostración Básicamente es probar el lema de la serpiente... Veamoslo porque es divertido!

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & ker(d_n) \arrow[r, "\tilde{f_n}"] \arrow[d, hook, "i"'] & ker(d'_n) \arrow[r, "\tilde{g_n}"] \arrow[d, hook, "i"'] & ker(d''_n) \arrow[d, hook, "i"'] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n"'] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "d'_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] & B_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] & C_{n-2} \arrow[r] & 0 \\
 & ker(d_{n-1}) \arrow[r, "\tilde{f_{n-1}}"] \arrow[u, hook, "i"'] & ker(d'_{n-1}) \arrow[r, "\tilde{g_{n-1}}"] \arrow[u, hook, "i"'] & ker(d''_{n-1}) \arrow[u, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora si sea $c \in ker(d''_n)$, como g_n es epi $\exists b \in B_n \ / g_n(b) = c$, pero entonces $g_{n-1}d'_n(b) = d''_n g_n(b) = d''_n(c) = 0$ por la conmutatividad del diagrama, por lo que $d'_n(b) \in Ker(g_{n-1}) = Im(f_{n-1})$ por lo que $\exists a \in A_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(a) = d'_n(b)$ y notemos que $f_{n-2}d_{n-1}a = d'_{n-1}f_{n-1}(a) = d'_{n-1}d'_n(b) = 0$ pues $Im(d'_n) \subset Ker(d'_{n-1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$; por ende como f_{n-2} es mono tenemos que $d_{n-1}(a) = 0$ por lo que $a \in ker(d_{n-1})$!! Definimos entonces $\partial([c]) = [a]$ y afirmamos que está bien definido en el cociente y la sucesión es exacta! Veamoslo!

- ∂ esta bien definida
  Sean $c \in ker(d''_n)$ y $b, b' \in B_n$ / $g_n(b) = c = g_n(b')$ y sean $a, a' \in A_{n-1}$ los únicos (pues f_{n-1} es mono) tal que $f_{n-1}(a) = d'_n(b)$ y $f_{n-1}(a') = d'_n(b')$. Entonces por hipótesis tenemos que $b - b' \in ker(g_n) = Im(f_n)$ y entonces $b - b' = f_n(z)$ para algún $z \in A_n$, pero entonces $f_{n-1}d_n(z) = d'_n f_n(z) = d'_n(b - b') = f_{n-1}(a - a')$ por lo que como f_{n-1} es mono tenemos que $d_n(z) = a - a'$ y $a - a' \in Im(d_n)$ y por ende $[a] = [a']$ en $ker(d_{n-1})/Im(d_n) := H_{n-1}(A)$
- La sucesión es exacta Uhh este da re vagancia, da...

Por ende por lo probado tenemos que ∂ pasa bien al cociente y entonces cocientando los ker tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(A) \arrow[r, "\tilde{f_n}"] \arrow[d, hook, "i"'] & H_n(B) \arrow[r, "\tilde{g_n}"] \arrow[d, hook, "i"'] & H_n(C) \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[ddddll, red, "\partial" description] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n"'] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "d'_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] & B_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] & C_{n-2} \arrow[r] & 0 \\
 & H_{n-1}(A) \arrow[r, "\tilde{f_{n-1}}"] \arrow[u, hook, "i"'] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "\tilde{g_{n-1}}"] \arrow[u, hook, "i"'] & H_{n-1}(C) \arrow[u, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Que es la sucesión exacta larga pedida ∎

3. Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Pruebe que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que

$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

Demostración Veamos que cumple la propiedad universal! Recordamos que la propiedad universal del coproducto es:

Observación Consideremos $f_i : M_i \to M$ morfismos de grupos $\forall i \in I$ entonces si llamamos $j_i : M_i \to \bigoplus_i M_i$ dado por $m_j \mapsto \sum_i \delta_{i,j} m_j$ tenemos que $\exists! f : \bigoplus_i M_i :\to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "j_i"'] & M \\
\bigoplus_i M_i \arrow[ur, dashed, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Entonces si notamos $i_1 : C \to C \oplus D$ tal que $c \mapsto c + 0$ y i_2 la análoga veamos que todo funciona! Sea M un grupo abeliano, $f_1 : H_n(C) \to M$ y $f_2 : H_n(D) \to M$; definimos $j_1 : H_n(C) \to H_n(C \oplus D)$ dado por $[c] \mapsto [i_1(c)]$ y j_2 análogo y definimos $f : H_n(C \oplus D) \to M$ dado por $[c + d] \mapsto f_1([i_1(c)]) + f_2([i_2(d)])$. Entonces tenemos que $f_i = f \circ j_i$ para $i \in \{0, 1\}$ y $H_n(C \oplus D)$ cumple la PU, entonces $H_n(C \oplus D) = H_n(C) \oplus H_n(D)$ ∎

4. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcule la homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \ldots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

Demostración Por definición tenemos que $H_n = Ker(d_n)/Im(d_{n+1})$ entonces separemos!

- $n = 2k$

  Entonces tenemos que $d_n = 0$ y $d_{n+1} = mx$ por lo cual tenemos que $Ker(d_n) = \mathbb{Z}$ y $Im(d_{n+1}) = m\mathbb{Z}$ por lo que $H_n = \mathbb{Z}_m$

- $n = 2k+1$
  Entonces tenemos que $d_n = mx$ y $d_{n+1} = 0$ por lo que $Ker(d_n) = 0$ y $Im(d_{n+1}) = 0$ por lo que $H_n = 0$

5. Pruebe que si $i : A \to X$ es un retracto, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geqslant 0$, y que si i es retracto por deformación débil, entonces i_* es isomorfismo.

   Demostración Sea $r : X \to A$ tal que $ri = 1_A$ pero tenemos por la teórica que la aplicación $f : A \to X \mapsto f_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es functorial, por ende $1_{H_n(A)} = (1_A)_* = (ri)_* = r_* i_*$, entonces como $1_{H_n(A)}$ es isomorfismo, tenemos que i_* es monomorfismo y r_* es epimorfismo. Si además se tiene que $ir \simeq 1_X$ entonces, como por la teórica sabemos que $f \simeq g \implies f_* = g_*$, tenemos que $r_* i_* = 1_{H_n(X)}$ y por lo mismo entonces i_* y r_* son isomorfismos. ∎

6. Sea X espacio topológico, $x_0 \in X$. Pruebe que $H_n(X, x_0) \simeq \tilde{H}_n(X)$ para todo n.

   Demostración Como $\{x_0\} \subset X$ es subespacio, entonces (X, x_0) es un par topológico y sabemos que existe la siguiente SEL:

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H_n}(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H_n}(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\partial} \ldots \longrightarrow H_0(X, \{x_0\}) \longrightarrow 0$$

   Pero nosotros sabemos que $\widetilde{H_n}(\{x_0\}) = 0$ y por ende $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $q_* : \widetilde{H_n}(X) \to H_n(X, \{x_0\})$ es isomorfismo ∎

7. Pruebe que si A es un retracto por deformación débil de un espacio X entonces $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

   Demostración Como A es RDD de X, en particular (X, A) es un par topológico y entonces, como antes, existe la SEL:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

   Ahora por el ejercicio 5 sabemos que $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es isomorfismo, entonces por la exactitud tenemos que $Im(\partial) = Ker(i_*) = 0$ y $Ker(q_*) = Im(i_*) = H_n(X)$, por lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] & H_n(X) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, equal] & H_n(X, A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

   Y entonces por conmutatividad tenemos que $H_n(X, A) = 0$ ∎

8. Pruebe que si (X, A, B) es una terna con $B \subseteq A \subseteq X$, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

Demostración Notemos que si probamos que:

$$0 \longrightarrow S_*(A,B) \xrightarrow{i_*} S(X,B) \xrightarrow{j_*} S(X,A) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Es una SEC de complejos, entonces el resultado es corolario de la existencia de la SEL de homologías para una SEC de complejos!

Vayamos a eso!

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces recordemos que $S_n(A,B) = S_n(A)/S_n(B)$, $S_n(X,B) = S_n(X)/S_n(B)$ y que $S_n(X,A) = S_n(X)/S_n(A)$.

Por otro lado como $A \subset X$ tenemos que $i : A \to X$ induce $i_\eta : S_n(A) \to S_n(B)$ dado por $\sigma \mapsto i \circ \sigma$, pero entonces si $\sigma \sim \sigma'$ entonces $i_\eta(\sigma) \sim i_\eta(\sigma')$ trivialmente! Entonces $i_* := \overline{q_{S_n(B)} \circ i_\eta}$ el bajado al cociente que ya vimos que está bien definido y es continuo. Similarmente como $B \subseteq A$ tenemos que $S_n(B) \subset S_n(A)$ y entonces si $\sigma \in S_n(B) \Longrightarrow \sigma \in S_n(A)$, por ende $j_* := \overline{q_{S_n(A) \circ 1_X}}$ donde la bajada al cociente es sobre $S_n(B)$.

Es claro entonces por definición que i_* es mono y j_* es epi; además como $Im(i_*) = [S_n(A)]_{S_n(B)}$ por la definición y $Ker(j_*) = [S_n(A)]_{S_n(B)}$ pues son los que identifica $q_{S_n(A)}$, tenemos de yapa que $Im(i_*) = Ker(j_*)$, o sea que 1 es una SEC de complejos, y entonces existe la SEL del enunciado ∎

9. Sea X un espacio contráctil y sea A un subespacio de X. Pruebe que $H_n(X,A)$ es isomorfo a $\tilde{H}_{n-1}(A)$.

Demostración Nuevamente tenemos la SEL:

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H_n}(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H_{n-1}}(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H_{n-1}}(X) \xrightarrow{q_*} \ldots$$

Y ahora como X es contráctil entonces tenemos que $H_n(X) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que ∂ es un isomorfismo. ∎

10. Sea X espacio topológico, y $A \subset X$ tal que (X,A) es bueno. Si CA es el *cono* $(A \times I)/(A \times \{0\})$ de A, considere $X \cup CA$ el espacio que se obtiene de identificar la base del cono $A \times \{1\}$ con $A \subseteq X$. Pruebe que $H_n(X,A) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA)$.

Demostración Â¿ $X/A \simeq X \coprod CA/A$?

11. *a*) Sea $\{X_i\}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos base x_i, probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.
    b) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee_{i \in I} S^k)$.

Demostración *a*) Notemos que si $\{(X_\alpha, x_\alpha)\ ,\ \alpha \in I\}$ son pares buenos, entonces $(\coprod_\alpha X_\alpha, \{x_\alpha\})$ es un par bueno pues tomo $U = \coprod_\alpha U_\alpha$ como entorno abierto y RDF de $\{x_\alpha\}$ (pues son finitos). Entonces por el corolario del teorema de escisión tenemos que $H_n(\coprod_\alpha X_\alpha, \{x_\alpha\}) = \widetilde{H_n}(\bigvee_i X_i)$. Solo nos faltaría probar que $H_n(\coprod_\alpha X_\alpha, \{x_\alpha\}) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha, x_\alpha)$ pues nuevamente como (X_α, x_α) es bueno entonces $H_n(X_\alpha, x_\alpha) = \widetilde{H_n}(X_\alpha)$!! Pero notemos que como I es finito esto es lo que hicimos en el ejercicio 3, pues la suma directa es un coproducto, y la demostración sería textual cambiando $j_1 : C \to C \oplus D$ por $j_1 : X_\alpha \to \coprod X_\alpha$. ∎

b) Como (S^k, x_0) es un par bueno pues $U = S^k - \{x_0\}$ es RDF de $\{x_0\}$ tenemos por el item anterior que $\widetilde{H_n}(\bigvee_J S^k) = \bigoplus_J \widetilde{H_n}(S^k) = \bigoplus_J \mathbb{Z}\ \chi_{k=n}$ $\blacksquare$

12. Calcule los grupos de homología de $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \cdots, x_m\}$

Demostración Copiemos nuestra idea de Van Kampen! Sea $C = \{r > 0\ ,\ \{x_1, \ldots, x_m\} \subsetneq B(x_1, r)\}$ y entonces como justificamos allí tomamos $A = B(x_1, inf(A) + \epsilon)$ y notemos que por las mismas técnicas de Van Kampen tenemos que $A \simeq \bigvee_{i=1}^m S^n$ (homotópica) por ende $\widetilde{H_k}(A) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\chi_{k=n}$. Además como $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_m\} \simeq A$ entonces $\widetilde{H_k}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\chi_{k=n}$ $\blacksquare$

13. Calcule la homología del cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto.

Demostración Forma trucha: Ya se que $S^2/S^0 \simeq S^1$ donde la equivalencia es homotópica, como los grupos de homología son un invariante homotópico, entonces $H_n(S^2/S^0) = H_n(S^1) = \mathbb{Z}\ \chi_{n=1}$ $\blacksquare$

14. Sea X espacio topológico. Muestre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$ para todo $n \geq 0$, donde ΣX es la *suspensión* de X, que se define como sigue $\Sigma X = X \times I/\sim$, $(x, 0) \sim (x', 0)$, $(x, 1) \sim (x', 1)$ para todo $x, x' \in X$.

Demostración Esto tiene toda la pinta de usar Mayer- Vietoris!! (Vamos a pensar a $\Sigma X = X \times [-1, 1]/\sim$) Notemos que $\Sigma X = CX \coprod -CX/X$ Entonces sea $A = -CX \coprod X \times [0, \delta)/X$ que es el cono inferior y un cachito por arriba; similarmente sea $B = CX \coprod X \times [0, -\delta)/X$ lo mismo por debajo! Entonces es claro que A, B son abiertos y $A \cup B = \Sigma X$

- Es claro que $A, B \simeq -CX$ entonces $\widetilde{H_n}(A) = \widetilde{H_n}(B) = 0$ pues el cono es contráctil.
- Por otro lado $A \cap B \simeq X$ y por ende $\widetilde{H_n}(A \cap B) = \widetilde{H_n}(X)$

En resumen tenemos la siguiente SEL:

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \widetilde{H_n}(\Sigma X) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H_{n-1}}(X) \longrightarrow 0$$

Pues $\widetilde{H_n}(A) \oplus \widetilde{H_n}(B) = 0$ y $\widetilde{H_n}(A \cap B) = \widetilde{H_n}(X)$. Por ende ∂ es un isomorfismo y $\widetilde{H_{n+1}}(\Sigma X) = \widetilde{H_n}(X)$ $\blacksquare$

15. Sea X un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ con U_i abiertos tales que toda intersección $\bigcap_{i=1}^k U_{i_k}$ es vacía o tiene homología reducida trivial. Pruebe que $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i \geq n - 1$ y muestre con un ejemplo que la desigualdad es óptima.

Demostración Hagamos inducción!

- $n = 2$
  Tenemos que $X = U_1 \cup U_2$, con $\widetilde{H_k}(U_i) = 0$ y $\widetilde{H_k}(U_1 \cap U_2) = 0$ entonces por Mayer Vietoris tenemos que $0 \to 0 \to \widetilde{H_k}(X) \to 0$ y por ende $\widetilde{H_k} = 0\ n \geq 0$
- $n - 1 \Longrightarrow n$
  Sea $A = \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ y $B = U_n$, entonces tenemos que $\widetilde{H_k}(A) = 0\ \forall k \geq n - 2$ por HI, por otro lado $\widetilde{H_k}(B) = 0$ por HI, y quiero ver que $\widetilde{H_k}(X) = 0\ \forall k \geq n - 1$ entonces por Mayer Vietoris:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \widetilde{H}_n(A)\oplus\widetilde{H}_n(B) \arrow[r] & \widetilde{H}_n(X) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- (\tikztotarget) \tikztonodes}, "\partial"] \\
\widetilde{H_{n-1}}(A\cap B) \arrow[r] & \widetilde{H_{n-1}}(A)\oplus\widetilde{H_{n-1}} \arrow[r] & \widetilde{H_{n-1}}(X) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- (\tikztotarget) \tikztonodes}, "\partial"] \\
\widetilde{H_{n-2}}(A\cap B) \arrow[r] & \dots &
\end{tikzcd}$$

Y aquí se ve claramente lo pedido porque tenemos $0 \to \widetilde{H}_k(X) \to 0$ para $k \geq n-1$ ∎