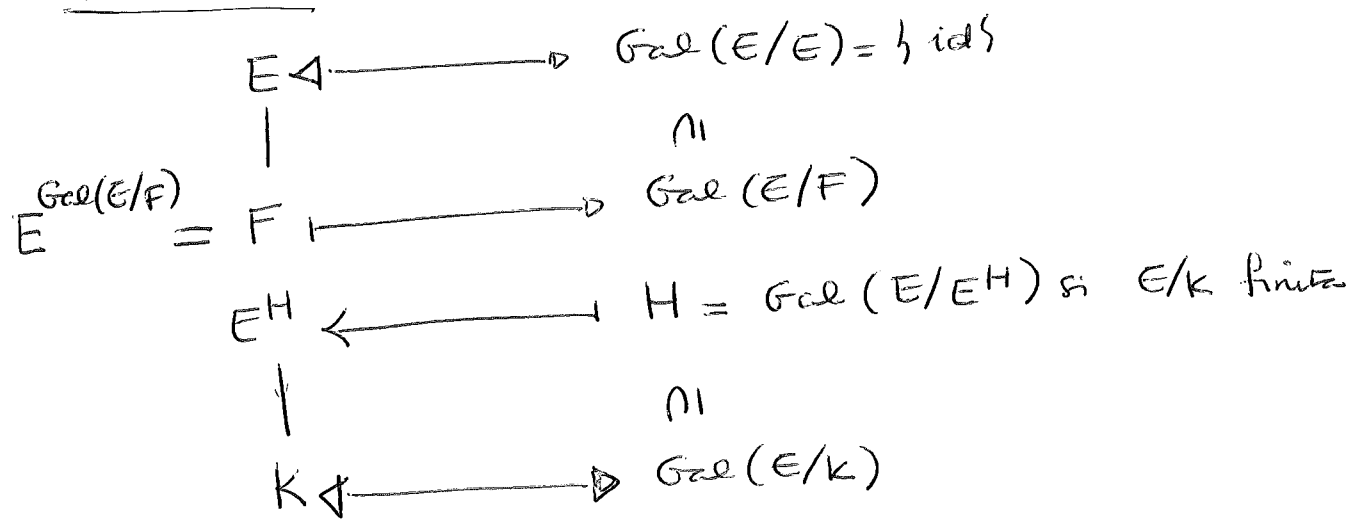
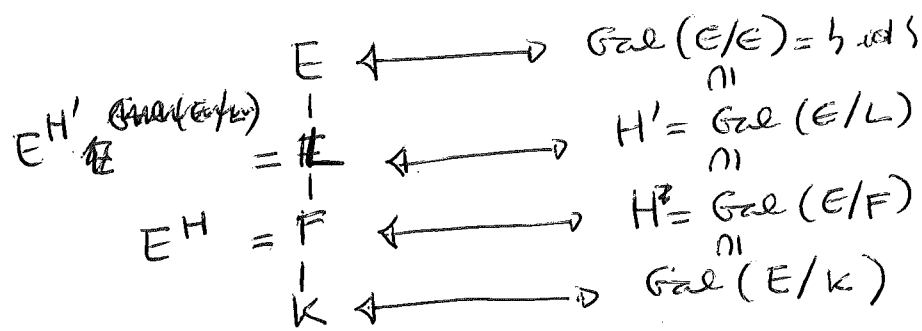


Teorema de correspondencia de Galois E/K Galois: E/K Galois finita:Propiedades 1) E/K Galois Entonces

$$\text{Gal}(E/F) \cap \text{Gal}(E/L) = \text{Gal}(E/FL)$$

Demostración

$$(\subseteq) \quad \sigma \in \text{Gal}(E/F) \cap \text{Gal}(E/L) \Rightarrow \sigma \text{ fija a } F \text{ y } L \Rightarrow$$

$$\sigma \text{ fija a } FL \Rightarrow \sigma \in \text{Gal}(E/FL)$$

$$(\supseteq) \quad \sigma \in \text{Gal}(E/FL) \Rightarrow \sigma|_{FL} = \text{id} \Rightarrow \sigma|_F = \text{id} \text{ y } \sigma|_L = \text{id}$$

$$\Rightarrow \sigma \in \text{Gal}(E/F) \cap \text{Gal}(E/L)$$

Propiedades 2) Sea E/K Galois

Sea G el menor subgrupo de $\text{Gal}(E/K)$ que contiene tanto a H y a H' ($H, H' < \text{Gal}(E/K)$). Entonces

$$E^G = E^H \cap E^{H'} \quad (G \text{ generado por los elts de } H \cup H')$$

Demostación

$$(\subseteq) \quad x \in E^G \Rightarrow \sigma(x) = x, \forall \sigma \in G \Rightarrow \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H, \forall \sigma \in H'$$

$$\Rightarrow x \in E^H \text{ y } x \in E^{H'} \Rightarrow x \in E^H \cap E^{H'}$$

$$(\supseteq) \quad x \in E^H \cap E^{H'} \Rightarrow \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H \text{ y } \forall \sigma \in H' \Rightarrow$$

$$\sigma(x) = x \Rightarrow \sigma(x) = x, \forall \sigma \in \langle H \cup H' \rangle = G \Rightarrow x \in E^G \quad \square$$

Investigar que valdría y en qué condiciones para

$$\text{Gal}(E/F \cap L)$$

$$\text{y para } E^H \cdot E^{H'}$$

Correspondencia de Galois y normalidad

Def: $H \triangleleft G \iff \forall \sigma \in G, \sigma H \sigma^{-1} = H$
 det

y en ese caso el cpto de cosetos G/H tiene estructura de grupo.

Lema: Sea E/K algebraica y F/K subextensión. Entonces

$$F/K \text{ normal} \iff \sigma(F) = F, \forall \sigma: E \xrightarrow{\bar{\sigma}} \bar{E}$$

Demostación

$$F/K \text{ normal} \iff \psi(F) = F, \forall \psi \in \text{Hom}(F/K, \bar{K}/K)$$

$$\iff \sigma(F) = F, \forall \sigma \in \text{Hom}(E/K, \bar{K}/K)$$

pues todo $\psi \in \text{Hom}(F/K, \bar{K}/K)$ se extiende a $\sigma \in \text{Hom}(E/K, \bar{K}/K)$
 y $\sigma|_F \in \text{Hom}(F/K, \bar{K}/K)$.

Lema: Sea E/K Galois y $\sigma \in \text{Gal}(E/K)$.

Sea F/K subextensión. Entonces $\sigma(F)/K$ también es subextensión

$$\text{y } \text{Gal}(E/\sigma(F)) = \sigma \text{Gal}(E/F) \sigma^{-1}$$

Demostación $\sigma(F)$ cpo y $K \subseteq \sigma(F) \subseteq E$.

$$\left(\begin{array}{ccc} \sigma(x) & + & \sigma(y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & & F \end{array} \right) \iff \sigma(x+y) \text{ y } \sigma(x)\sigma(y) = \sigma(xy)$$

$$\tau \in \text{Gal}(E/\sigma(F)) \iff \tau(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha), \forall \alpha \in F$$

$$\iff \tau \circ \sigma(\alpha) = \sigma(\alpha) \forall \alpha \in F \iff \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in F$$

$$\iff \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma \in \text{Gal}(E/F) \iff \exists \psi \in \text{Gal}(E/F): \psi = \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma$$

$$\iff \tau = \sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1} \iff \tau \in \sigma \text{Gal}(E/F) \sigma^{-1}$$

Proposición Sea E/K Galois. Entonces

$$\textcircled{1} F/K \text{ normal (i.e. Galois)} \iff \text{Gal}(E/F) \triangleleft \text{Gal}(E/K)$$

$$\text{y en ese caso } \text{Gal}(F/K) \cong \text{Gal}(E/K) / \text{Gal}(E/F)$$

$$\textcircled{2} \text{ si } E/K \text{ finita: } H \triangleleft \text{Gal}(E/K) \iff E^H/K \text{ Galois}$$

Demostación

(4)

$$\textcircled{1} \quad F/k \text{ normal} \iff \sigma(F)=F, \forall \sigma \in \text{Gal}(E/k)$$

$$\iff \# \text{Gal}(E/\sigma(F)) = \text{Gal}(E/F), \forall \sigma \in \text{Gal}(E/k)$$

$$\left(\text{pues } (\implies) \text{ obvio y } (\impliedby) \text{ pues } \sigma(F) = E^{\text{Gal}(E/\sigma(F))} = E^{\text{Gal}(E/F)} = F \right)$$

$$\iff \sigma \text{Gal}(E/F) \sigma^{-1} = \text{Gal}(E/F), \forall \sigma \in \text{Gal}(E/k)$$

$$\iff \text{Gal}(E/F) \triangleleft \text{Gal}(E/k)$$

y en consecuencia:

$$\text{Gal}(E/k) \xrightarrow{\psi} \text{Gal}(F/k)$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_F$$

Sobreyectiva pues todo $\tau \in \text{Gal}(F/k)$ se extiende a σ

$$\ker(\psi) = \{ \sigma \in \text{Gal}(E/k) / \sigma|_F = \text{id}_F \} = \text{Gal}(E/F)$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \text{Gal}(F/k) \cong \text{Gal}(E/k) / \text{Gal}(E/F)$$

$\textcircled{2}$ Caso finito:

$$H \triangleleft \text{Gal}(E/k) \iff \text{Gal}(E/E^H) \triangleleft \text{Gal}(E/k)$$

$$H = \text{Gal}(E/E^H)$$

$$\iff E^H \text{ normal } / k \text{ (o sea Galois)} \quad \square$$

Proposición

E/k Galois, F/k arbitraria ($E, F \subseteq L$)

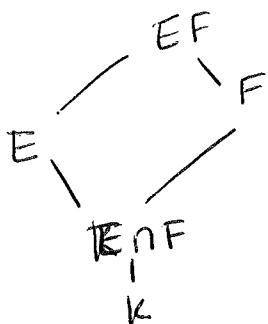
Entonces: EF/F Galois

E/EF Galois

y si E/k finita,

$$\text{Gal}(EF/F) \cong \text{Gal}(E/EF)$$

(o sea aquí los grupos coinciden !)



Demostración

(5)

Ya vimos EF/F y E/ENF Galois.

$$\text{Sea } \psi: \text{Gal}(EF/F) \longrightarrow \text{Gal}(E/ENF)$$
$$\sigma \longmapsto \sigma|_E$$

Vamos a probar que ψ está bien def., es homomorfismo de grupos y es isomorfismo.

$$\text{bien def.: } \sigma|_F = \text{id}_F \Rightarrow \sigma|_{ENF} = \text{id}_{ENF} \checkmark$$

$$\sigma \text{ homomorfismo } \checkmark$$

$$\sigma \text{ monomorfismo: } \sigma|_E = \text{id}_E \Rightarrow \begin{matrix} \sigma|_{EF} = \text{id}_{EF} \\ \sigma|_F = \text{id}_F \end{matrix}$$

σ epimorfismo:

$$\text{Im}(\text{Gal}(EF/F)) < \text{Gal}(E/ENF)$$
$$\parallel$$
$$H < \text{Gal}(E/ENF)$$

$$\text{q.p.d. } E^H = ENF \text{ ya que aún tendríamos } H = \text{Gal}(E/E^H) = \text{Gal}(E/ENF)$$

$$(2) \text{ Sea } x \in ENF, \text{ y sea } \tau \in H, \text{ i.e. } \exists \sigma \in \text{Gal}(EF/F) / \tau = \sigma|_E$$

$$\text{luego } \tau(x) = \sigma(x) = x \text{ pues } x \in F \Rightarrow x \in E^H.$$

$$(3) \text{ Sea } x \in E^H, \text{ i.e. } \tau(x) = x, \forall \tau \in H = \text{Im}(\text{Gal}(EF/F))$$

$$\text{i.e. } \tau = \sigma|_E \text{ para } \sigma \in \text{Gal}(EF/F)$$

$$\Rightarrow \text{ ~~para } x \in F \text{ para } x \in ENF~~ \text{ pues } \sigma(x) = x, \forall \sigma \in \text{Gal}(EF/F) \quad \square$$

$$\Rightarrow x \in E \text{ y } x \in EF^{\text{Gal}(EF/F)} = F$$

Corolario E/K Galois finito. Entonces $[EF:F] | [E:K], \forall F/K$

$$\text{y } [EF:F] = [E:ENF] \quad (\text{pues } |\text{Gal}(EF/F)| = |\text{Gal}(E/ENF)|)$$

Lema de Artin

Sea E cuerpo y $G < \text{Aut}(E)$ un subgrupo finito de automorfismos de E . Sea $K := E^G$. Entonces

E/K es Galois finita y $\text{Gal}(E/K) = G$.

Obs: la demostración de la correspondencia de Galois es directa a partir de esto (para E/K Galois finita)

Sea $G = \text{Gal}(E/K)$: entonces

$$\text{Gal}(E/E^{\text{Gal}(E/K)}) = \text{Gal}(E/K)$$

Sea $H < \text{Gal}(E/K)$ y $F := E^H$

entonces $\text{Gal}(E/E^H) = H$

$$\left. \begin{array}{l} \text{y } E^{\text{Gal}(E/E^H)} = E^{\text{Gal}(E/F)} \\ \parallel \\ H = F. \end{array} \right] ?$$

Lema auxiliar para el lema de Artin

Sea E/K separable y supongamos que existe $n / [K(\alpha):K] \leq n, \forall \alpha \in E$.

Entonces E/K es finita y por lo tanto monógena:

$\exists \theta \in E / E = K[\theta]$ y se tiene $[E:K] \leq n$ también.

Demostración

Sea $\theta \in E$ con $[K(\theta):K] \leq n$ máximo. Entonces $E = K[\theta]$ pues sino $\exists \beta \notin K[\theta] / K[\theta, \beta]$ es finita separable $\Rightarrow K[\theta, \beta] = K[\gamma]$ y $[K[\gamma]:K] > \text{máximo}$.

Absurdo.



Demostación del lema de Artin

Dado $\alpha \in E$. $\text{gp } G$ de α es separable / K .

Como G es finito, considero los finitos $\sigma_i(\alpha)$, con $\sigma \in G$,

$$\text{o sea } \{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_m(\alpha)\} = \{\sigma(\alpha), \sigma \in G\}$$

Sea $f = \prod_{1 \leq i \leq m} (x - \sigma_i(\alpha)) \in E[x]$ pues $\sigma_i \in \text{Aut}(E/K)$

Probamos que $f \in E^G[x] = K[x]$:

$$\forall \sigma \in G, \quad \sigma(f) = \prod (x - \sigma \circ \sigma_i(\alpha)) = f.$$

$\Rightarrow \alpha$ es raíz de un polinomio separable en $K[x]$.

Pero además $\forall \alpha \in E, [K(\alpha):K] \leq |G| \Rightarrow$

E/K es finita de grado $\leq |G|$, y $E = K[\theta]$

donde $f(\theta, K) = \prod_{\sigma \in G} (x - \sigma(\theta))$ tiene todas sus raíces en E

$\Rightarrow E/K$ es el cuerpo de descomposición de un pol. separable

$\Rightarrow E/K$ Galois finita.

Mas aún, $[E:K] \leq |G|$, i.e. $|\text{Gal}(E/K)| \leq |G|$

Pero por otro lado

$$G \subseteq \text{Gal}(E/K):$$

$\forall \sigma \in G, \forall \alpha \in K = E^G, \sigma(\alpha) = \alpha$ por def

(También se puede ver que en realidad
 $f(\theta, K) = \prod_{\sigma \in G} (x - \sigma(\theta))$)

□