Geometría Proyectiva - 2° cuatrimestre 2016
Práctica 5

1. Ejercicio 1

   Demostración Primero:

   Recuerdo: Dada una carta (U,x) de M centrada en p, entonces $g_{i,j}\circ x^{-1}(a) = \left\langle \partial x_i|_{x^{-1}(a)}, \partial x_j|_{x^{-1}(a)} \right\rangle = \left\langle dx^{-1}(e_i)|_{x^{-1}(a)}, dx^{-1}(e_j)|_{x^{-1}(a)} \right\rangle$. Luego si notamos $f := x^{-1}$ a la parametrización de la carta (U,x) y notamos $f_{u_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_i}|_a, \frac{\partial f_2}{\partial u_i}|_a, \frac{\partial f_3}{\partial u_i}|_a \right)$ entonces se tiene que $g_{i,j}\circ x^{-1}(a) = \left\langle f_{u_i}(a), f_{u_j}(a) \right\rangle$.

   a) Notemos aquí que $f(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(u))$ por lo tanto tenemos que calcular f_u, f_v:

   $$\begin{aligned} f_u &= (a\cos(u)\cos(v), b\cos(u)\sin(v), -c\cos(u)) \\ f_v &= (-a\sin(u)\sin(v), b\sin(u)\cos(v), 0) \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

   $$\begin{aligned} \|g\|_E &= \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_v, f_u \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2\cos^2(u)\cos^2(v) + b^2\cos^2(u)\sin^2(v) + c^2\cos^2(u) & (b^2-a^2)\cos(u)\sin(u)\cos(v)\sin(v) \\ (b^2-a^2)\cos(u)\sin(u)\cos(v)\sin(v) & a^2\sin^2(u)\sin^2(v) + b^2\sin^2(u)\cos^2(v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   b) Notemos aquí que $f(u,v) = \left(au\cos(v), bu\sin(v), u^2\right)$ por lo tanto tenemos que calcular f_u, f_v:

   $$\begin{aligned} f_u &= (a\cos(v), b\sin(v), 2u) \\ f_v &= (-au\sin(v), bu\cos(v), 0) \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

   $$\begin{aligned} \|g\|_E &= \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_v, f_u \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2\cos^2(v) + b^2\sin^2(v) + 4u^2 & (b^2-a^2)u\cos(v)\sin(v) \\ (b^2-a^2)u\cos(v)\sin(v) & a^2u^2\sin^2(v) + b^2u^2\cos^2(v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   c) Se entiende la idea para el resto... ∎

2. Ejercicio 2

   Demostración Recordemos que del ejercicio 13 de la práctica 4 que $f(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}\left(2u, 2v, u^2+v^2-1\right)$ es una parametrización de S^2 dada por la proyección estereográfica. Luego:

   $$\begin{aligned} f_u &= \frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}\left(-u^2+v^2+1, -2uv, 2u\right) \\ f_v &= \frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}\left(-2uv, +u^2-v^2+1, 2v\right) \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\|g\|_E =& \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u\rangle & \langle f_u, f_v\rangle \\ \langle f_v, f_u\rangle & \langle f_v, f_v\rangle \end{pmatrix} \\
=& \frac{4}{(u^2+v^2+1)^4}\begin{pmatrix} (-u^2+v^2+1)^2+4u^2v^2+4u^2 & 0 \\ 0 & (-v^2+u^2+1)^2+4u^2v^2+4v^2 \end{pmatrix} \\
=& \frac{4}{(u^2+v^2+1)^4}\begin{pmatrix} u^4+2u^2v^2+2u^2+v^4+2v^2+1 & 0 \\ 0 & v^4+2u^2v^2+2uv2+u^4+2u^2+1 \end{pmatrix} \\
=& \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

3. Ejercicio 3

Demostración *a*) Sean $a_0 < a_1$ y $b_0 < b_1$ tal que formen un cuadrilátero en $x(U)$ con (U, x) carta de S, luego notemos que por hipótesis tenemos que $\int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{df(s,a_0)}{ds}\right\| ds = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{df(s,a_1)}{ds}\right\| ds$ y que $\int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{df(b_0,s)}{ds}\right\| ds = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{df(b_1,s)}{ds}\right\| ds$.

Para la primera hipótesis, notemos que si llamamos $\phi(s) = f(s, a_0)$ y $\psi(s) = f(s, a_1)$ luego $\left\|\dot{\phi}\right\|^2(u) = \langle f_{u_1}(u, a_0), f_{u_1}(u, a_0)\rangle = E(u, a_0)$ y similarmente $\left\|\dot{\phi}\right\|^2(u) = \langle f_{u_1}(u, a_1), f_{u_1}(u, a_1)\rangle = E(u, a_1)$. Por lo tanto $\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{a_1-a_0}(E(s, a_1) - E(s, a_0))ds = 0$ para todos $a_0 < a_1$ y $t_0 < t_1$, concluímos que $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$. Análogamente con G para las otras curvas.

Recíprocamente es trivial que si $E(u, v) = E(u)$ y $G(u, v) = G(v)$ entonces va a valer la condición de la hipótesis.

b) Sea (U, x) una carta de S que cumplen la condición de i) y sean E, F, G los coeficientes del primer tensor fundamental en esa carta. Consideremos $\phi(u, v) = \left(\int_{u_0}^{u} \sqrt{E(x, v)}dx, \int_{v_0}^{v} \sqrt{G(u, x)}dx\right)$, luego $\phi_u = \left(\sqrt{E}, 0\right)$ y $\phi_v = \left(0, \sqrt{G}\right)$ y por lo tanto ϕ es una reparametrización por el teorema de la función inversa. Notemos $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ a los coeficientes del primer tensor fundamental respecto a la carta $(U, \phi \circ x)$, luego:

$$
\begin{aligned}
\tilde{E} =& \left\langle \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u}(u, v), \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u} \right\rangle \\
=& \left\langle f_u.\frac{1}{\sqrt{E}}, f_u.\frac{1}{\sqrt{E}} \right\rangle \\
=& 1 \\
\tilde{G} =& \left\langle \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial v}(u, v), \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial v} \right\rangle \\
=& \left\langle f_v.\frac{1}{\sqrt{G}}, f_v.\frac{1}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
=& 1
\end{aligned}
$$

Luego por Cauchy-Schwartz tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F} =& \left\langle \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u}(u, v), \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial v}(u, v) \right\rangle \\
\leq& \left\|\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u}(u, v)\right\|^2 \left\|\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial v}(u, v)\right\|^2 = 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $\tilde{F} = \cos(\theta)$. ∎

4. Ejercicio 4

Demostración Notemos que al ser S una superficie de revolución si suponemos que la curva generatriz c admite una parametrización inyectiva $c(t) = (x(t), 0, z(t))$ con $x(t) > 0$, luego podemos parametrizar S por $f(t, u) = x(t)\,(\cos(u), \sin(u), 0) + z(t)\,(0, 0, 1)$. En esta parametrización tenemos que:

$$
\begin{aligned}
E =& \langle f_t, f_t \rangle \\
=& \langle \dot{x}(t)\,(\cos(u), \sin(u), 0) + \dot{z}(t)(0,0,1), \dot{x}(t)\,(\cos(u), \sin(u), 0) + \dot{z}(t)(0,0,1) \rangle \\
=& \dot{x}^2(t) + \dot{z}^2(t) \\
=& \left\| \dot{c(t)} \right\|^2 \\
F =& \langle f_t, f_u \rangle \\
=& \langle \dot{x}(t)\,(\cos(u), \sin(u), 0) + \dot{z}(t)(0,0,1), x(t)\,(-\sin(u), \cos(u), 0) \rangle \\
=& 0 \\
G =& \langle f_u, f_u \rangle \\
=& \langle x(t)\,(-\sin(u), \cos(u), 0)\,, x(t)\,(-\sin(u), \cos(u), 0) \rangle \\
=& x^2(t)
\end{aligned}
$$

Por ende tomemos la reparametrización $\phi(t, u) = (h(t), u)$ donde h es la reparametrización por longitud de arco de c, luego es claro que ϕ es una reparametrización y respecto a la carta $(U, \phi \circ x)$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\tilde{E} =& 1 \\
\tilde{F} =& 0 \\
\tilde{G} =& x^2(h^{-1}(t))
\end{aligned}
$$

. ∎

5. Ejercicio 5

Demostración *a*) Sea $f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ una parametrización del paraboloide, luego recordemos que dada una carta (U, f^{-1}), localmente (en este caso al ser una carta global local es globalmente) tenemos que la aplicación de Gauss $N_U(p) = \dfrac{\partial x|_p \times \partial x|_p}{\|\partial x|_p \times \partial x|_p\|} = \dfrac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$, por lo tanto tenemos:

$$
\begin{aligned}
f_u =& (1, 0, 2u) \\
f_v =& (0, 1, 2v) \\
f_u \times f_v =& det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \\ i & j & k \end{pmatrix} = (-2u, -2v, 1) \\
\|f_u \times f_v\| =& \sqrt{4(u^2 + v^2) + 1} = 2\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto concluímos que $N = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}\left(-u, -v, \frac{1}{2}\right)$

b) Sea $f(u,v) = \left(\sqrt{1+u^2}\cos(v), \sqrt{1+u^2}\sin(v), u\right)$ una parametrización del hiperboloide, luego reproduciendo lo anterior:

$$\begin{aligned}
f_u =& \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos(v), \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\sin(v), 1\right) \\
f_v =& \left(-\sqrt{1+u^2}\sin(v), \sqrt{1+u^2}\cos(v), 0\right) \\
f_u \times f_v =& \, det \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos(v) & \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\sin(v) & 1 \\ -\sqrt{1+u^2}\sin(v) & \sqrt{1+u^2}\cos(v) & 0 \\ i & j & k \end{pmatrix} = \left(-\sqrt{1+u^2}\cos(v), -\sqrt{1+u^2}\sin(v), u\right) \\
\|f_u \times f_v\| =& \sqrt{1+2u^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto conluímos que $N = \frac{1}{\sqrt{1+2u^2}}\left(-\sqrt{1+u^2}\cos(v), -\sqrt{1+u^2}\sin(v), u\right)$

Otra forma mas genial sería usar el ejercicio 15 de la práctica 4 con $F = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, ver que cumple con las hipótesis del ejercicio 3 de la práctica 4 y por lo tanto automáticamente $T_pM = (\nabla F_p)^{\perp} = (x, y, -z)^{\perp}$ y esa, módulo la normalización, es la normal! Y es la que obtuvimos bajo la identificación $x := \sqrt{1+u^2}\cos(v)$, $y := \sqrt{1+u^2}\sin(v)$, $z = u$

c) Para la catenoide vamos a ir por la última estrategia porque nos evitamos dar una parametrización de la catenoide! Sea $F = x^2 + y^2 - \cosh^2(z)$, luego notemos que:

$$dF_p = (2x, 2y, -2\cosh(z)\sinh(z)) = 0 \iff (x,y,z) = (0,0,0)$$

Y por lo tanto $dF_p \neq 0$ para todo $p \in S$. Concluímos que:

$$\begin{aligned}
N(p) =& \frac{\nabla F_p}{\|\nabla F_p\|} \\
=& \frac{1}{2(x^2 + y^2 + \cosh^2(z)}(x, y, -\cosh(z)\sinh(z))
\end{aligned}$$

6. Ejercicio 6

Demostración Sea S la superficie de revolución de una curva $c(t) = (x(t), 0, z(t)$ dada por la parametrización $f(t,u) = x(t)(\cos(u), \sin(u), 0) + z(t)(0,0,1)$, luego de 4 ya tenemos calculados los coeficientes de la primera forma fundamental y en particular se obtiene que:

$$det(g_{i,j} \circ x^{-1}(a)) = \begin{pmatrix} \dot{x}^2 + \dot{z}^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = (x\,\|\dot{c}\|)^2$$

Por otro para calcular la segunda forma fundamental necesitamos las derivadas segundas:

$$\begin{aligned}
f_{tt} =& \ddot{x}(t)(\cos(u), \sin(u), 0) + \ddot{z}(t)(0,0,1) \\
f_{tu} =& \dot{x}(t)(-\sin(u), \cos(u), 0) \\
f_{uu} =& x(t)(-\cos(u), -\sin(u), 0)
\end{aligned}$$

Y de la teórica obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
l_{11} \circ x^{-1}(a) =& \frac{1}{\sqrt{det(g_{i,j} \circ x^{-1}(a))}} \langle f_t \times f_u, f_{tt} \rangle (a) \\
=& \frac{1}{x\, \|\dot{c}\|}\ det \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\,(\cos(u),\sin(u),0) + \dot{z}(t)(0,0,1) \\ x(t)\,(-\sin(u),\cos(u),0) \\ \ddot{x}(t)\,(\cos(u),\sin(u),0) + \ddot{z}(t)(0,0,1) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{x\, \|\dot{c}\|}\ det \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\cos(u) & \dot{x}(t)\sin(u) & \dot{z}(t) \\ -x(t)\sin(u) & x(t)\cos(u) & 0 \\ \ddot{x}(t)\cos(u) & \ddot{x}(t)\sin(u) & \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{x\, \|\dot{c}\|} \left(\ddot{z}\dot{x}x - \dot{z}x\ddot{x} \right) \\
=& \frac{\ddot{z}\dot{x} - \dot{z}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}} \\
=& K_c(t)\, \|\dot{c}\| \\
l_{12} \circ x^{-1}(a) =& \frac{1}{\sqrt{det(g_{i,j} \circ x^{-1}(a))}} \langle f_t \times f_u, f_{tu} \rangle (a) \\
=& \frac{1}{x\, \|\dot{c}\|}\ det \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\,(\cos(u),\sin(u),0) + \dot{z}(t)(0,0,1) \\ x(t)\,(-\sin(u),\cos(u),0) \\ \dot{x}(t)\,(-\sin(u),\cos(u),0) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{x\, \|\dot{c}\|}\ det \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\cos(u) & \dot{x}(t)\sin(u) & \dot{z}(t) \\ -x(t)\sin(u) & x(t)\cos(u) & 0 \\ -\dot{x}(t)\sin(u) & \dot{x}(t)\cos(u) & 0 \end{pmatrix} \\
=& 0 \\
l_{22} \circ x^{-1}(a) =& \frac{1}{\sqrt{det(g_{i,j} \circ x^{-1}(a))}} \langle f_t \times f_u, f_{uu} \rangle (a) \\
=& \frac{1}{x\, \|\dot{c}\|}\ det \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\,(\cos(u),\sin(u),0) + \dot{z}(t)(0,0,1) \\ x(t)\,(-\sin(u),\cos(u),0) \\ x(t)\,(-\cos(u),-\sin(u),0) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{x\, \|\dot{c}\|}\ det \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\cos(u) & \dot{x}(t)\sin(u) & \dot{z}(t) \\ -x(t)\sin(u) & x(t)\cos(u) & 0 \\ -x(t)\cos(u) & -x(t)\sin(u) & 0 \end{pmatrix} \\
=& -\frac{\dot{z}x}{\|\dot{c}\|}
\end{aligned}
$$

Por simplicidad supongamos que c esta reparametrizada por longitud de arco, recopilando tenemos que:

$$
\begin{aligned}
g_{i,j} \circ x^{-1}(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \\
l_{i,j} \circ x^{-1}(a) &= \begin{pmatrix} K_c(t) & 0 \\ 0 & -\dot{z}x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que si representamos $\|dN_p\| = (a_{i,j})$ entonces:

$$
\begin{aligned}
a_{i,j} \circ x^{-1}(a) =& (g_{i,j} \circ x^{-1}(a))^{-1} (l_{i,j} \circ x^{-1}(a)) \\
=& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} K_c(t) & 0 \\ 0 & -\dot{z}x \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} K_c(t) & 0 \\ 0 & \frac{-\dot{z}}{x} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Concluímos que:

$$\begin{aligned} K =& \frac{-K_c \dot{z}}{x} \\ k_1 =& \frac{l_{11}}{g_{11}} = K_c \\ k_2 =& \frac{l_{22}}{g_{22}} = \frac{-\dot{z}}{x} \\ H =& \frac{1}{2} \frac{-\dot{z} + xK_c}{x} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

7. Ejercicio 7

Demostración Sea $P \in C$ la curva tangente al plano Π_P y sea (U, x) una carta centrada en P, luego existe $c : (-\epsilon, \epsilon) \to x(U)$ tal que $g = x^{-1} \circ c$ es una parametrización de $C \cap U$. Sea $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi_P = \left\{q \in \mathbb{R}^3 \ / \ \langle q, v\rangle = 0\right\}$ y notemos que por hipótesis $\Pi_p = T_pM$ para todo $p \in C \cap U$, por lo tanto $N_{U \cap C}(q) = v$. Concluímos que $II_p(q) = \langle -dN_p(q), q\rangle = 0$ pues $dN_p(q) = \dfrac{dN \circ g}{dt}|_0 = 0$, por lo tanto $K(p) = 0$ para todo $p \in C \cap U$. $\blacksquare$

8. Ejercicio 8

Demostración De la teórica sabemos que como $K > 0$ ambas curvaturas principales tienen el mismo signo, sin pérdida de generalidad tomemos $0 < k_1 \leq k_2$. También por la teórica para todo $v \in T_pM$ se cumple que $k_1(p) \leq II_p(v) \leq k_2(p)$; y finalmente también sabemos que $II_p(v) = K_C(p)\cos(\theta)$ donde θ es el ángulo entre la normal y $\ddot{c}$. Juntando todo concluímos el resultado. $\blacksquare$

9. Ejercicio 9

Demostración Sabemos que la curva mencionada es la tactriz, descripta en el ejercicio 2 de la práctica 2 por $c(t) = (\sin(t), \cos(t) + \log(\tan(t/2)))$, por lo tanto una parametrización de la superficie de revolución C es $f(t, v) = (\sin(t)\cos(v), \sin(t)\sin(v), \cos(t) + \log(\tan(t/2)))$ y como es la superficie de revolución de una parametrización inyectiva y con $x(t) > 0$ se tiene que f define una superficie regular po el ejercicio 12 de la práctica 4.

De 6 $K = \dfrac{\dot{y}K_c}{x\,\|\dot{c}\|} = \dfrac{(1 - \sin^2(t))}{\cos(t)\,\|\dot{c}\|} = -1.$ $\blacksquare$

10. Ejercicio 10

Demostración De 6 se tiene que $K = 0$ para todo p si y sólo si $\dot{y} = 0$ por lo que la superficie rotada es un plano, o $K_c = 0$ por lo que c es una recta inclinada. Por lo tanto al rotar por revolución una recta obtenemos un cilindro o un cono. $\blacksquare$

11. Ejercicio 11

Demostración Sea $p \in S$ tal que $K(p) > 0$, luego ambas curvaturas principales son positivas o negativas. Suponiendo lo primero sin pérdida de generalidad y notando v_1, v_2 a los autovectores asociados a

k_1, k_2 respectivamente, se tiene que $II_p(w) = \langle -dN_p(v), v\rangle = \langle ak_1v_1 + bk_2v_2, av_1, bv_2\rangle = a^2k_1 + b^2k_2 = \left(\dfrac{a}{\frac{1}{\sqrt{k_1}}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\frac{1}{\sqrt{k_2}}}\right)$. Concluímos que el conjunto:

$$\{w \in T_pS \ / \ II_p(v) = 1\} = \left\{ a, b \in \mathbb{R} / \left(\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{k_1}}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\frac{1}{\sqrt{k_2}}}\right)^2 = 1 \right\} = \mathcal{E}$$

Similarmente si los autovalores fuesen negativos entonces $-dN_p(v_i) = -k_iv_i$ y por lo tanto la elipse sería con $II_p(v) = -1$.

Si p fuese umbílico entonces $k = k_1 = k_2$ y obtenemos que $\mathcal{E}$ es una circunsferencia de radio $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. ∎

12. Ejercicio 12

Demostración Sea $f(u, v) = (a\cos(u)\sin(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(v))$, luego calculemos las derivadas de f:

$$\begin{aligned}
f_u &= (-a\sin(u)\sin(v), b\cos(u)\sin(v), 0)\\
f_v &= (a\cos(u)\cos(v), b\sin(u)\cos(v), -c\sin(v))\\
f_u \times f_v &= det\begin{pmatrix} -a\sin(u)\sin(v) & b\cos(u)\sin(v) & 0\\ a\cos(u)\cos(v) & b\sin(u)\cos(v) & -c\sin(v)\\ i & j & k \end{pmatrix}\\
&= \left(-bc\cos(u)\sin^2(v), -ac\sin(u)\sin^2(v), -ab\sin(v)\cos(v)\right)\\
\|f_u \times f_v\| &= \sqrt{b^2c^2\cos^2(u)\sin^4(v) + a^2c^2\sin^2(u)\sin^4(v) + a^2b^2\sin^2(v)\cos^2(v)}\\
f_{uu} &= (-a\cos(u)\sin(v), -b\sin(u)\sin(v), 0)\\
f_{uv} &= (-a\sin(u)\cos(v), b\cos(u)\cos(v), 0)\\
f_{vv} &= (-a\cos(u)\sin(v), -b\sin(u)\sin(v), -c\cos(v))
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}
det\left(g_{i,j} \circ x^{-1}(a)\right) &= det\begin{pmatrix} \langle f_u, f_u\rangle & \langle f_u, f_v\rangle\\ \langle f_v, f_u\rangle & \langle f_v, f_v\rangle \end{pmatrix}\\
&= det\begin{pmatrix} \left(a^2\sin^2(u) + b^2\cos^2(u)\right)\sin^2(v) & (b^2 - a^2)\cos(u)\sin(u)\cos(v)\sin(v)\\ (b^2 - a^2)\cos(u)\sin(u)\cos(v)\sin(v) & \left(a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u)\right)\cos^2(v) + c^2\sin^2(v) \end{pmatrix}\\
&= \left(a^2\sin^2(u) + b^2\cos^2(u)\right)\left(a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u)\right)\sin^2(v)\cos^2(v)\\
&\quad + \left(a^2\sin^2(u) + b^2\cos^2(u)\right)c^2\sin^4(v) -\\
&\quad (b^2 - a^2)^2\cos^2(u)\sin^2(u)\cos^2(v)\sin^2(v)
\end{aligned}$$

Por el otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{det(g_{i,j}\circ x^{-1}(a))}(l_{11}\circ x^{-1}(a)) =& \langle f_u \times f_v, f_{uu}\rangle \\
=& det\begin{pmatrix} -a\sin(u)\sin(v) & b\cos(u)\sin(v) & 0 \\ a\cos(u)\cos(v) & b\sin(u)\cos(v) & -c\sin(v) \\ -a\cos(u)\sin(v) & -b\sin(u)\sin(v) & 0 \end{pmatrix} \\
=& abc\sin^3(v) \\
\sqrt{det(g_{i,j}\circ x^{-1}(a))}(l_{12}\circ x^{-1}(a)) =& \langle f_u \times f_v, f_{uv}\rangle \\
=& det\begin{pmatrix} -a\sin(u)\sin(v) & b\cos(u)\sin(v) & 0 \\ a\cos(u)\cos(v) & b\sin(u)\cos(v) & -c\sin(v) \\ -a\sin(u)\cos(v) & b\cos(u)\cos(v) & 0 \end{pmatrix} \\
=& 0 \\
\sqrt{det(g_{i,j}\circ x^{-1}(a))}(l_{22}\circ x^{-1}(a)) =& \langle f_u \times f_v, f_{vv}\rangle \\
=& det\begin{pmatrix} -a\sin(u)\sin(v) & b\cos(u)\sin(v) & 0 \\ a\cos(u)\cos(v) & b\sin(u)\cos(v) & -c\sin(v) \\ -a\cos(u)\sin(v) & -b\sin(u)\sin(v) & -c\cos(v) \end{pmatrix} \\
=& abc\sin^3(v) + 2abc\cos^2(v)\sin(v) \\
=& abc\sin(v)\left(1+\cos^2(v)\right)
\end{aligned}$$

13. Ejercicio 13

Demostración De 6 sabemos que vale que $k = \dfrac{-K_c\dot{z}}{x} = cte$. Pero además sabemos que $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1$ por lo que derivando concluímos:

$$0 = \dot{x}\ddot{x} + \dot{z}\ddot{z}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
k =& \frac{-\dot{z}\left(\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}\right)}{x} \\
=& \frac{-\dot{z}^2\ddot{x} - \dot{x}^2\ddot{x}}{x} \\
=& \frac{-\ddot{x}}{x}
\end{aligned}$$

Y concluímos por un lado que $\ddot{x} + kx = 0$ y de antes que $z = \int \sqrt{1+\dot{x}^2}ds$. La recíproca es clara pues para todo $k \in \mathbb{R}$ existe una solución de la ecuación diferencial y luego haciendo la integral obtenemos una superficie de revolución dada. ∎