EXTENSIONES NORMALES

ALGEBRA 3 2017
Clase 6 - 1/9/17 ①

Vimos que si E/K es algebraica, entonces todo K-endomorfismo de E es en realidad un K-automorfismo de E.

Para cuerpos de descomposición pasa algo aún más fuerte: toda K-inmersión de E en $\overline{K}$ es en realidad un K-endomorfismo y por lo tanto un K-automorfismo:

Proposición (inmersiones de cuerpos de descomposición)

Sea $E = K(f)$ cuerpo de desc de $f \in K[X]$ sobre K, y sea $\sigma : E \to \overline{K}$ una K-inmersión. Entonces $\sigma(E) \subseteq E$ y por lo tanto $\sigma \in Gal(E/K)$

Demostración:

Tenemos $E = K[\alpha_1, .., \alpha_n]$ donde $\alpha_1, .., \alpha_n \in E$ son las raíces de f

Pero si $\sigma \in Hom(E/K, \overline{K}/K)$, para cada i $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$ para algún j (permuta las raíces) pues, recordemos

$$f(\alpha_i) = 0 \Rightarrow 0 = \sigma(f(\alpha_i)) = f(\sigma(\alpha_i)) \Rightarrow \sigma(\alpha_i) \text{ es raíz de } f$$

Y por lo tanto $\sigma(\alpha_i) \in E$, $\forall i$.

Claramente, recordemos también, que σ está determinada por donde van a parar los α_i pues si $g(\alpha_1, .., \alpha_n)$ es un elto de E, $\sigma(g(\alpha_1, .., \alpha_n)) = g(\sigma(\alpha_1), .., \sigma(\alpha_n))$

Concluimos que $\sigma(g(\alpha_1, .., \alpha_n)) \in E$, i.e $\sigma(E) \subseteq E$

$\boxtimes$

Los cpos de descomposición son más fuertes aún que lo que parecen

<u>PROPOSICIÓN</u> (cpos de descomp y pols irreducibles)

Sea $E = K(\beta)$ cpo de desc de $f \in K[X]$ sobre K, y sea $h \in K[X]$ un polinomio irreducible. Si h tiene una raíz en E, entonces h tiene todas sus raíces en E (o sea h se descompone linealmente en $E[X]$)

<u>Demostración</u>

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dashed, "\bar\sigma"] \arrow[d, dash] & \bar K \\
K(\alpha) \arrow[r, "\sigma", "\simeq"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] \arrow[d, dash] & K(\beta) \arrow[u, "i"'] \\
K \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Sea α raíz de h en E y sea β otra raíz de h en $\bar K$

Sea $\sigma : K(\alpha) \xrightarrow[K]{} K(\beta)$, $\alpha \mapsto \beta$

Entonces $\sigma : K(\alpha) \to \bar K$ se extiende a $\bar\sigma : E \to \bar K$ (por ser alg) pero por la prop anterior, $\bar\sigma$ automorfismo de $E/K \Rightarrow \beta \in E$.

<u>Nota</u>: Estamos usando (o probando) que si α, β son dos raíces de h pol. irred en $K[X]$ que están en E, entonces existe un K-automorfismo σ de E tq $\sigma(\alpha) = \beta$.

pues $\sigma : K(\alpha) \xrightarrow[K]{} K(\beta)$ se extiende a un automorfismo de E

Todo esto motiva la definición de extensión normal

Definición (Extensión normal)

~~Sea E/K algebraica.~~ Se dice que E es una extensión normal de K si E/K es algebraica y para todo $h \in K[X]$ irreducible, si h tiene una raíz en E, entonces h tiene todas sus raíces en E.

Ejemplos

- $\overline{K}/K$ es normal
- $E = K(f)$ cpo de desc de $f \in K[X]$ sobre K es normal
- $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ no es normal

PROPOSICIÓN (Normal finita y cpo de desc)

Sea E/K finita. Entonces

E/K normal $\Longleftrightarrow$ $E = K(f)$ para algún $f \in K[X]$

Demostración

$(\Longleftarrow)$ ✓

$(\Longrightarrow)$ $E = K[\alpha_1, .., \alpha_n]$ por ser finita, con $\alpha_1, .., \alpha_n$ algs

Sea $f = f(\alpha_1, K) \cdots f(\alpha_n, K)$: E contiene todas las raíces de f por ser normal, y es el más chico.

TEOREMA (Caracterización de extensiones normales de K)

Sea E/K algebraica. Son equivalentes

1. E/K normal
2. Toda K-inmersión de E en $\overline{K}$ es un K-automorfismo de E
3. E es el cpo de desc de una flia $\{f_i\}_{i \in I}$ de pols en $K[X]$

(imaginar def de cpo de desc de una flia de pols)

Demostración

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea $\alpha \in E$. Qpq $\sigma(\alpha) \in E$. Luego $\sigma \in End(E/K) = Gal(E/K)$ por ser E/K algebraica.
Sea $h = f(\alpha, K)$. Entonces $\sigma(\alpha)$ es raíz de h y h tiene todas sus raíces en E por ser normal ✓

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $\alpha \in E$ raíz de h irreducible. Entonces si $\sigma : E \xrightarrow[K]{} \overline{K}$, $E \ni \sigma(\alpha)$ es raíz de h también, por ser $\sigma \in Gal(E/K)$

$(2 \Rightarrow 3)$ E es el cpo de desc de $\{ f(\alpha, K), \alpha \in E \}$

$(3 \Rightarrow 2)$ Qpq si $\sigma \in Hom(E/K, \overline{K}/K)$, entonces $\sigma(E) \subseteq E$.
pero E generado por las raíces de $\{f_i\}_{i \in I}$. Alcanza con probar que si α es raíz de algún f_i, entonces $\sigma(\alpha) \in E$. Lo que vale pues $\sigma(\alpha)$ es otra raíz de f_i, que está en E. $\boxtimes$

Comportamiento de normalidad con ~~extensiones~~, torres y comp.

① $\begin{array}{c} F \\ | \\ E \\ | \\ K \end{array}$ F/K normal $\Rightarrow$ F/E normal
$\not\Rightarrow$ E/K normal : $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta_3]$

② $\begin{array}{c} F \\ | \\ E \\ | \\ K \end{array}$ F/E normal y E/K normal $\not\Rightarrow$ F/K normal

$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ es normal siempre: $X^2 - d = (X - \sqrt{d})(X + \sqrt{d})$

$$\left.\begin{array}{cc} & \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] \\ X^2 - \sqrt{2} & |\ 2 \\ & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ X^2 - 2 & |\ 2 \\ & \mathbb{Q} \end{array}\right) \quad X^4 - 2$$

: falta i ...

③ E, F normales$/K$ $\Rightarrow \begin{cases} EF/K \text{ normal (cpo de desc.)} \\ E \cap F/K \text{ normal } (\sigma : E \cap F \xrightarrow[K]{} \overline{K} \\ \qquad \Rightarrow \sigma : E \cap F \to E \cap F) \end{cases}$

Clausura normal

Sea E/K algebraica, $E \subseteq \overline{K}$

~~Existe~~ Sea $N \subseteq \overline{K}$ extensión de E/K definida como el cpo de descomposición de la flia de polinomios $\{f(\alpha, K), \alpha \in E\}$

Entonces N/K es normal y es la menor extensión normal de K que contiene a E: se llama la clausura normal de E/K

i.e: $N = \bigcap \{L : E \subseteq L, \ L/K \text{ normal}\}$.

Va a ser muy útil en el futuro trabajar con clausuras normales

La clausura normal N de E/K es única salvo isomorfismos

Observación

E/K finita $\Rightarrow$ N/K finita

pues si $E = K[\alpha_1, .., \alpha_n]$, entonces $N = K(f(\alpha_1, K) \cdot \ldots \cdot f(\alpha_n, K))$:

$E \subseteq N$ pues $\alpha_1, .., \alpha_n \in N \Rightarrow g(\alpha_1, .., \alpha_n) \in N$, $\forall g \in K[X_1, .., X_n]$

y N/K normal por ser cpo de desc de un pol.

Ejemplos

$E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, entonces $N = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$