Geometría Diferencial

Final

Axel Sirota

Índice

1. Teorema de Stokes

Teorema 1.0.1 *Sea M una $n-$variedad diferenciable orientable con frontera, ω una $(n-1)-$forma diferenciable con soporte compacto en M. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{1}$$

Observación Algunas interpretaciones:

1. ∂M la tomamos con la orientacion de Stokes
2. $\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} i^*_{\partial m}\omega$
3. Si $\partial M = \emptyset$ entonces $\int_{\partial M} \omega = 0$

Demostración Vayamos por partes:

$\_\mathbf{M} = \mathbb{H}^\mathbf{n}$

Como ω es de soporte compacto, existe $R > 0$ tal que *supp* $\omega \subset A := [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R]$ y podemos escribir ω en coordenadas como:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} d\omega = & \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ = & \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\omega_i}{dx^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\omega_i}{dx^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \frac{\omega_i}{dx^i} dx^1 \dots dx^n = & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \frac{\omega_i}{dx^i} dx^i dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \\ = & \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_i|_{-R}^{R} dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \\ = & 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \frac{\omega_i}{dx^i} dx^1 \dots dx^n \\ = & (-1)^{n-1} \int_{-R}^{R} \cdots \int_{0}^{R} \frac{\omega_n}{dx^n} dx^n dx^1 \dots dx^{n-1} \\ = & (-1)^n \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1} \end{aligned}$$

Por el otro lado:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{H}^n}\omega =& \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{A\cap\partial\mathbb{H}^n}\omega_i(x^1,\ldots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\\
=& \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{A\cap\partial\mathbb{H}^n}\omega_i(x^1,\ldots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&+\int\limits_{A\cap\partial\mathbb{H}^n}\omega_n(x^1,\ldots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\\
=& \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{A\cap\partial\mathbb{H}^n}\omega_i(x^1,\ldots,x^{n-1},0)d(i^*_{\partial\mathbb{H}^n}x^1)\wedge\cdots\wedge d(\widehat{i^*_{\partial\mathbb{H}^n}x^i})\wedge\cdots\wedge\underbrace{\overset{d(i^*_{\partial\mathbb{H}^n}x^n)}{=0}}\\
&+\int\limits_{A\cap\partial\mathbb{H}^n}\omega_n(x^1,\ldots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}\\
=& \int\limits_{A\cap\partial\mathbb{H}^n}\omega_n(x^1,\ldots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}
\end{aligned}$$

Luego concluímos que:

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n}\omega=\int_{\mathbb{H}^n}d\omega$$

_$\mathbf{M}=\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

En este caso notemos que $\int_{\partial\mathbb{R}^n}\omega=0$ y por el otro lado:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R}\cdots\int\limits_{-R}^{R}\frac{\omega_i}{dx^i}dx^1\ldots dx^n =& \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R}\cdots\int\limits_{-R}^{R}\frac{\omega_i}{dx^i}dx^i dx^1\ldots\widehat{dx^i}\ldots dx^n\\
=& \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R}\cdots\int\limits_{-R}^{R}\omega_i|_{-R}^{R}dx^1\ldots\widehat{dx^i}\ldots dx^n\\
=& 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n}d\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R}\cdots\int\limits_{-R}^{R}\frac{\omega_i}{dx^i}dx^1\ldots dx^n=0=\int_{\partial\mathbb{R}^n}\omega$$

_**supp** $\omega\subset$ **U con** (U,ϕ) **carta**

En este caso:

$$\int\limits_{M}d\omega=\int\limits_{\mathbb{H}^n}(\phi^{-1})^*d\omega=\int\limits_{\mathbb{H}^n}d((\phi^{-1})^*\omega)=\int\limits_{\partial\mathbb{H}^n}(\phi^{-1})^*\omega$$

Como $d\phi$ lleva vectores externos de ∂M a vectores externos de $\partial\mathbb{H}^n$ entonces $\phi|_{U\cap\partial M}$ es un difeomorfismo que preserva la orientación a $\phi(U)\cap\partial\mathbb{H}^n$, luego:

$$\int\limits_{\partial M}\omega=\int\limits_{\partial\mathbb{H}^n}(\phi^{-1})^*\omega=\int\limits_{M}d\omega$$

M y *supp* ω arbitrarios

Como *supp* ω es compacto, existen finitos U_i cartas tal que *supp* $\omega \subset \bigcup_i U_i$ y sea $\{\psi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$, luego *supp* $\psi_i\omega \subset U_i$ y juntando todo:

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \psi_i\omega = \sum_i \int_M d(\psi_i\omega) = \sum_i \int_M d(\psi_i) \wedge \omega + \psi_i d\omega = \int_M d\left(\sum_i \psi_i\right) \wedge \omega + \int_M \left(\sum_i \psi_i\right) d\omega = \int_M d\omega$$

∎

2. Teorema de Frobenius

Definición Sea $D \subset TM$ una k distribución, definimos:

1. $N \subset M$ subvariedad se dice integral si para todo $p \in N$ vale que $T_pN = D_p$
2. D se dice integrable si para todo $p \in M$ existe N variedad integral para D.
3. Una carta (U, ϕ) se dice plana para D si $\phi(U)$ es un cubo y para todo $p \in U$ vale que $D =< \partial x_1, \dots, \partial x_k >$
4. D se dice completamente integrable si para todo $p \in M$ existe una carta plana.

Teorema 2.0.1 *Sea D una distribución en M, luego son equivalentes:*

1. *D es involutiva*
2. *D es integrable*
3. *D es completamente integrable*

Demostración Completamente integrable implica integrable

Sea (U, ϕ) es una carta plana para $p \in M$, entonces tomemos $N = \phi^{-1}\left(\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_{k+i} = c_i\}\right)$ para $c_1, \dots, c_{n-k}$ constantes y veamos que es una subvariedad integral de dimensión k.

En efecto, es una subvariedad de dimensión k pues admite un slice de codimensión $n-k$, y es integral pues $T_pN =< \partial x_1, \dots, \partial x_k >= D_p$.

Integrable implica involutiva

Sean $X, Y \in \Gamma(D)$ definidas en un abietro $U \subset M$, sea $p \in U$ y N la variedad integral a D que contiene a p. Como $X_p, Y_p \in D_p = T_pN$ entonces vale que $[X,Y]_p \in T_pN$, por lo que $[X,Y]_p \in D_p$; concluímos que D es involutiva.

Involutiva implica completamente integrable

Dividamos la prueba en dos subsecciones, primero probemos que toda distribución involutiva esta localmente generada por campos suaves que conmutan; con eso probemos que es completamente integrable.

<u>D es generada por campos que conmutan</u>

Consideremos primero $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ y sea $X_1, \dots, X_k$ una base de campos suaves que generan D y sin pérdida de generalidad podemos asumir que $D_p^{\perp} =< \partial x_{k+1}|_p, \dots, \partial x_n|_p >$. Sea $\pi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ y notemos que induce $d\pi : T\mathbb{R}^n \mapsto T\mathbb{R}^k$ dada por:

$$d\pi\left(\sum_{i \leq n} v^i \partial x_i|_q\right) = \sum_{i \leq k} v^i \partial x_i|_{\pi(q)}$$

Ahora notemos que $d\pi|_D = d\pi \circ i_{D \hookrightarrow TU}$ por lo que es suave y $d\pi_q|_{D_q}$ es difeomorfismo local por la elección de orden de la base. Sean $\{V_1, \dots, V_k\}$ otra base de D es un entorno de p dado por:

$$V_i|_q = \left(d\pi|_{D_q}\right)^{-1} \partial x_i|_{\pi(q)}$$

Luego por la naturalidad del corchete de Lie:

$$d\pi_q\left([V_i, V_j]_q\right) = [\partial x_i, \partial x_i]_{\pi(q)} = 0$$

Pero como $V_i, V_j \in D$ para todo $i, j \leq k$ entonces $[V_i, V_j] \in D$ y como $d\pi|_D$ es difeomorfismo local, esto implica que:

$$[V_i, V_j]_q = 0 \qquad \forall q \in U$$

Finalmente, si $p \in M$ esta en una carta (U, ϕ), como ϕ es difeomorfismo local es trivial ver que $\tilde{V}_i = d\left(\phi^{-1}\right)(V_i)$ cumple lo dicho, con V_i la base encontrada para $d\phi(D)$.

<u>D es completamente integrable</u>

Sea nuevamente $p \in U \subset M$, luego por el punto anterior sabemos que $D =< V_1, \ldots, V_k >$ y sea S una subvariedad de codimensión k tal que $T_qS = Dq^{\perp}$ para todo $q \in U$, notemos que $\left\{V_1|_q, \ldots, V_k|_q, \partial x^{k+1}|_q, \ldots, \partial x^n|_q\right\}$ son base de T_qM. Procediendo como antes podemos suponer que $U \subset \mathbb{R}^n$ y $S \subset U$ tal que $x_i = 0$ para $i \leq k$.

Sea θ_i el flujo de V_i y sea $\epsilon > 0$, $Y \subset U$ entorno tal que $(\theta_1)_{t_1} \circ \ldots (\theta_k)_{t_k}$ esta bien definido cuando $\max\limits_{i \leq k} |t_i| < \epsilon$; definamos $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-k}$ dado por:

$$\Omega = \left\{(s^{k+1}, \ldots, s^n) \in \mathbb{R}^{n-k} \ : \ (0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n) \in Y\right\}$$

Y definamos $\Phi : (-\epsilon, \epsilon)^k \times \Omega \mapsto U$ dado por:

$$\Phi(s^1, \ldots, s^k, s^{k+1}, \ldots, s^n) = (\theta_1)_{s_1} \circ \ldots (\theta_k)_{s_k}(0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n)$$

Notemos que $\Phi\left(\{0\} \times \Omega\right) = S \times Y$. Sea entonces $s_0 \in (-\epsilon, \epsilon)^k \times \Omega$ y $i \in \{1, \ldots, k\}$, notemos que:

$$\begin{aligned}
d\Phi_{s_0}\left(\partial s^i|_{s_0}\right) f =& \partial s^i|_{s_0} f\left(\Phi(s^1, \ldots, s^n)\right) \\
=& \partial s^i|_{s_0} f\left((\theta_1)_{s_1} \circ \ldots (\theta_k)_{s_k}(0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n)\right) \\
=& \partial s^i|_{s_0} f\left((\theta_i)_{s_i} \circ (\theta_1)_{s_1} \circ (\theta_{i-1})_{s_{i-1}} \circ (\theta_{i+1})_{s_{i+1}} \circ \ldots (\theta_k)_{s_k}(0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n)\right) \\
=& \partial s^i|_{s_0} f\left((\theta_i)_{s_i}(q)\right) \qquad q \in M \\
=& V_i|_{\Phi(s_0)} f \qquad \text{(pues } t \mapsto (\theta_i)_t(q) \text{ es una curva integral de } V_i)
\end{aligned}$$

Luego para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$d\Phi_0\left(\partial s^i|_0\right) = V_i|_{\Phi(0)} = V_i|_p \tag{2}$$

Por otro lado como $\Phi(0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n) = (0, \ldots, 0, s^{k+1}, \ldots, s^n)$ tenemos que para todo $i \in \{k+1, \ldots, n\}$:

$$d\Phi_0\left(\partial s^i|_0\right) = \partial x^i|_p \tag{3}$$

Como $d\Phi_0$ lleva bases en bases, es inversible, por lo que Φ es un difeomorfismo local en un entorno $W \ni 0$ y $(\Phi^{-1}, \Phi^{-1}(W))$ es la carta plana de p que queríamos. ∎