

## Análisis Funcional - 1º cuatrimestre 2017

## FINAL

## Índice

<b>1. Espacios Vectoriales</b>	<b>1</b>
1.1. Propiedades Elementales . . . . .	1
1.2. Normas y productos internos . . . . .	2
<b>2. Espacios de Hilbert</b>	<b>5</b>
2.1. Preliminares . . . . .	5
2.2. Conjuntos ortogonales y ortonormales . . . . .	5
2.3. Conjuntos ortonormales completos . . . . .	8
2.4. Ortogonalización de Gram Schmitt . . . . .	9
2.5. Dimensión de un espacio de Hilbert . . . . .	9
2.6. Proyección ortogonal . . . . .	11
2.7. Teorema de representación de Riesz . . . . .	13
<b>3. Espacios de Banach</b>	<b>15</b>
3.1. Operadores entre espacios normados . . . . .	15
3.2. Espacios vectoriales de dimensión finita . . . . .	17
3.3. Espacio de Operadores entre espacios normados . . . . .	18
3.4. Espacios cocientes . . . . .	20
<b>4. Teorema de Hahn-Banach</b>	<b>21</b>
4.1. Funcionales Lineales . . . . .	21
4.2. El Teorema de Hanh-Banach . . . . .	22
4.3. Corolarios de Hanh-Banach . . . . .	23
4.4. Separabilidad y Reflexividad . . . . .	24

## 1. Espacios Vectoriales

## 1.1. Propiedades Elementales

**Definición** Si  $\mathcal{X}$  es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$ , un conjunto  $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$  se dice:

1. *Linealmente independiente* si dados  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$  y  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$  tal que  $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$  implica que  $\lambda_{i_i} = 0$  para todo  $1 \leq i \leq k$ .
2. *Sistema de generadores* si dado  $v \in \mathcal{X}$  entonces existen  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$  y  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$  tal que  $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = v$ .
3. *Base* si es a la vez un sistema de generadores linealmente independiente.

**Ejemplo** ■  $X = \mathbb{R}[X]$  es un espacio vectorial, si consideramos  $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots\} = \{X^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  es base.

- $X = \mathcal{C}[a, b]$  es un espacio vectorial, si consideramos  $\mathcal{B} = \{e^{\alpha x}, \alpha \in [0, 1]\}$  veamos que es linealmente independiente.

**Demostración** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tal que  $\sum_i \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$  para todo  $x \in [a, b]$ ; luego si derivamos  $n - 1$  veces tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y como los  $\alpha_i$  son distintos entonces la matriz de Vandermonde es inversible y el sistema admite una única solución,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . ■

Recordemos:

**Proposición 1.1.1 (Lema de Zorn)** Si  $(P, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que todo subconjunto no vacío  $S \subseteq P$  totalmente ordenado admite una cota superior; entonces existe un elemento maximal en  $P$ .

**Proposición 1.1.2** Si  $E$  es un espacio vectorial, entonces  $E$  admite una base.

**Demostración** Consideremos  $P = \{S \subseteq E / S \text{ es li}\}$  y dotemoslo del orden dado por la inclusión, luego  $P \neq \emptyset$  pues si  $v \in E$  entonces  $\{v\} \in P$ .

Sea  $\{S_i\}$  una colección de subconjuntos de  $P$  totalmente ordenada y sea  $T = \bigcup_{i \in I} S_i$ , luego es claro que  $S_i \leq T$ ; faltaría ver que  $T \in P$ .

Para eso sean  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in T$  y  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$  tales que  $\sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k} = 0$ . Como son finitos existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $v_i \in S_{k_0}$  para todo  $i$ , que al ser un conjunto linealmente independiente resulta que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Concluimos que  $T \in P$ , luego por 1.1.1 existe  $M \in P$  elemento maximal.

Finalmente, sea  $v \in E \setminus \langle M \rangle$  (el conjunto generado por combinaciones lineales de  $M$ ), luego  $M \cup \{v\}$  sería un conjunto li lo que contradice la maximalidad de  $M$ ; por ende no existe tal  $v$  y  $M$  resulta base. ■

**Proposición 1.1.3** Sea  $E$  un espacio vectorial y sean  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  dos bases de Hamel de  $E$ . Luego  $\#\mathcal{B}_1 = \#\mathcal{B}_2$ .

**Demostración** Sea  $x \in \mathcal{B}_1$  y llamemos  $S(x)$  al conjunto de los elementos  $v \in \mathcal{B}_2$  tal que al escribir a  $x$  como combinación lineal de elementos de  $\mathcal{B}_2$  aparece  $v$ , por lo que si  $x = \sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k}$  entonces  $S(x) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ .

**Lema 1.1.4**  $\bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x) = \mathcal{B}_2$

**Demostración** Del lema Si  $v \in \bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x)$  luego existe  $x_0 \in \mathcal{B}_1$  tal que  $v \in S(x_0)$  por lo que  $v \in \mathcal{B}_2$  por definición de  $S(x)$ . Recíprocamente, si  $v \in \mathcal{B}_2$  pero no existe  $x \in \mathcal{B}_1$  tal que  $v \in S(x)$ , entonces  $v \notin \langle \mathcal{B}_1 \rangle = E = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ . ■

Por 1.1.4 tenemos que  $\#\mathcal{B}_2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_1} \#S(x) \leq \#\mathbb{N} \# \mathcal{B}_1 \leq \#\mathcal{B}_1$ .

Razonando al revés obtenemos la otra desigualdad. ■

## 1.2. Normas y productos internos

**Definición** Si  $E$  es un espacio vectorial, una norma definida en  $E$  es una aplicación  $\|\cdot\| : E \mapsto \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\|x\| \geq 0$
2.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Observación** Todo espacio normado es un espacio métrico pero no viceversa.

**Definición** Si  $E$  es un espacio vectorial, un producto interno definido en  $E$  es una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \mapsto F$  tal que:

1.  $\langle \cdot, z \rangle$  es lineal
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

**Observación** Todo espacio con producto interno es un espacio normado pero no viceversa.

**Teorema 1.2.1 (Cauchy-Schwartz)** Sea  $E$  un espacio vectorial y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno definido en  $E$ ; luego si  $x, y \in E$  se tiene que  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .

**Demostración** Sean  $x, y \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  y sea  $z = x - \lambda y$ , luego  $\langle z, z \rangle = \langle x, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle - 2\Re(\lambda \langle y, x \rangle) \geq 0$ . Si  $\langle y, x \rangle = re^{i\theta}$  sea  $\lambda = e^{-i\theta}t$  con  $t \in \mathbb{R}$ ; luego:

$$0 \geq \langle x, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle - 2bt \equiv c - 2bt + at^2 := q(t)$$

Luego como la cuadrática dada es positiva, eso implica que  $0 \leq 4b^2 - 4ac$  por lo que:

$$0 \leq b^2 - ac = |\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Si  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ , entonces  $b^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$  por lo que  $b^2 - ac = 0$ . Esto implica que existe  $t_0$  tal que  $q(t_0) = 0$ , por lo tanto eso implica que  $\langle x - e^{-i\theta}t_0y, x - e^{-i\theta}t_0y \rangle \equiv 0$  y por lo tanto  $x = e^{-i\theta}t_0y$ . ■

**Definición** Un espacio normado que es completo respecto a la distancia inducida por la norma se llama *Espacio de Banach*

**Definición** Un *Espacio de Hilbert* es un espacio de Banach donde la norma proviene de un producto interno mediante  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Proposición 1.2.2** Sea  $E$  un espacio con producto interno, entonces:

- $\mathcal{R}(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$
- $\mathcal{I}(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{4} \left( \|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 \right)$

**Demostración** Por un lado  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathcal{R}(\langle x, y \rangle)$  y  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathcal{R}(\langle x, y \rangle)$ ; por lo que restando se obtiene:

$$4\mathcal{R}(\langle x, y \rangle) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Por el otro:

$$\begin{aligned} \|x + iy\|^2 &= \langle x + iy, x + iy \rangle \\ &= \|x\|^2 + |i|^2 \|y\|^2 - i \langle x, y \rangle + i \overline{\langle x, y \rangle} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - i2\mathcal{I}(\langle x, y \rangle) \\ \|x - iy\|^2 &= \langle x - iy, x - iy \rangle \\ &= \|x\|^2 + |i|^2 \|y\|^2 + i \langle x, y \rangle - i \overline{\langle x, y \rangle} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i2\mathcal{I}(\langle x, y \rangle) \end{aligned}$$

Por lo tanto restando ambas obtenemos:

$$4\mathcal{I}(\langle x, y \rangle) = \|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2$$

■

**Proposición 1.2.3 (Ley del paralelogramo)** Sea  $E$  un espacio normado real, entonces existe  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  si y sólo si para todos  $x, y \in E$  vale:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

**Demostración** Si  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  entonces de la demostración de 1.2.2 se da el resultado. Recíprocamente definamos:

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} \left( \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

Luego verifiquemos que es un producto interno.

1.  $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$
2. Como  $\|x + y\| = \|y + x\|$  y  $\|x - y\| = \|(y - x)\| = \|y - x\|$  concluimos que  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
3. Dado que  $\|\cdot\|, +, -, *$  son  $\|\cdot\|$ -continuas entonces  $\langle \cdot, x \rangle, \langle x, \cdot \rangle$  es  $\|\cdot\|$ -continua.
4. Sean  $x, y, z \in E$  entonces:

$$\|x + y + z\|^2 = 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y + z\|^2 = 2\|y + z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y - x + z\|^2$$

Luego como  $A = B$  y  $A = C$  implica  $A = \frac{B+C}{2}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \|x + y + z\|^2 &= \|x + z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|x - y + z\|^2 + \|y + z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2} \|y - x + z\|^2 \\ \|x + y - z\|^2 &= \|x - z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|x - y - z\|^2 + \|y - z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2} \|y - x - z\|^2 \\ &= \|x - z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|-x + y + z\|^2 + \|y - z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2} \|-y + x + z\|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \frac{1}{4} \left( \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 \right) + \frac{1}{4} \left( \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2 \right) \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

5. Por el item anterior es claro por inducción que  $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$  para todo  $\lambda \in \mathbb{N}$  y como vale para  $\lambda = -1$  tenemos que vale para todo  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Si  $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  entonces si llamamos  $x' = \frac{x}{q}$  tenemos:

$$q \langle \lambda x, y \rangle = q \langle p x', y \rangle = p \langle q x', y \rangle = p \langle x, y \rangle$$

Luego  $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$  para todo  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Por lo tanto probamos que fijados  $x, y \in E$  la función  $g(t) = \frac{1}{t} \langle tx, y \rangle$  y la función constante  $h(t) = \langle x, y \rangle$  cumplen que  $h|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$  y por continuidad entonces  $h \equiv g$  para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; como el caso  $\lambda = 0$  es trivial concluimos que  $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$ . ■

## 2. Espacios de Hilbert

### 2.1. Preliminares

**Proposición 2.1.1** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno, luego el producto interno es continuo.

**Demostración** Sea  $x_n, (y_n)$  tales que  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ , luego:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y\| + \|x\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y_n - y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

■

### 2.2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

**Definición** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno, luego dados dos vectores  $x, y \in E$  decimos que son *ortogonales* si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

A su vez decimos que son *ortonormales* si son ortogonales y  $\|x\| = \|y\| = 1$

Finalmente dado un conjunto  $S \subseteq E$  entonces decimos que es *ortogonal* / *ortonormal* si dados cualesquiera  $x, y \in S$  resulta que son *ortogonales* / *ortonormales*

**Ejemplo** El conjunto  $\{e^{inx}, n \in \mathbb{N}, x \in [0, 2\pi]\}$  es ortonormal.

**Teorema 2.2.1** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno y sea  $S \subseteq E$  un conjunto ortonormal, luego si  $x \in \langle S \rangle$  entonces existe una única escritura de  $x$  dada por:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \quad u_i \in S$$

**Demostración** Como  $x \in \langle S \rangle$  entonces existen únicos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tal que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ . Luego:

$$\langle x, u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \lambda_j$$

■

**Teorema 2.2.2 (Desigualdad de Bessel)** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno y sea  $S \subseteq E$  un conjunto ortonormal, luego:

1. Si  $x \in E$  y  $u_1, \dots, u_n \in S$  luego  $\sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
2. Si  $x \in E$  entonces  $\{u \in S / \langle x, u \rangle \neq 0\}$  es a lo sumo numerable
3. Si  $x, y \in E$  entonces  $\left| \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle \overline{\langle y, u \rangle} \right| \leq \|x\| \|y\|$

**Demostración** 1. Sean  $u_1, \dots, u_n \in S$  y sea  $z = x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$ , luego:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle z, z \rangle \\
&= \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, x - \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \right\rangle \\
&= \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i \right\|^2 - 2\mathcal{R} \left( \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i, x \right\rangle \right) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^n \|\langle x, u_i \rangle u_i\|^2 - 2\mathcal{R} \left( \sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2 \right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \|\langle x, u_i \rangle\|^2.
\end{aligned}$$

2. Notemos que  $S = \{u \in S / |\langle x, u \rangle| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ u \in S / |\langle x, u \rangle| \geq \frac{1}{n} \right\}}_{T_n}$ .

Ahora sean  $u_1, \dots, u_n \in T$  por el item anterior sabemos que:

$$\frac{n}{m^2} \leq \sum_{1 \leq k \leq n} |\langle x, u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Por lo que  $n \leq m^2 \|x\|^2$  y entonces  $\#T_m \leq m^2 \|x\|^2 < \infty$  para todo  $m$ , por lo tanto  $\#S \leq \#\mathbb{N} * \#T_m \leq \#\mathbb{N}$ .

3. Sean  $x, y \in E$  y  $u_1, \dots, u_n \in S$ , luego:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle} \right| &\leq_{\text{C-S}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\langle x, u_i \rangle|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\langle y, u_i \rangle|^2} \\
&\leq_a \|x\| \|y\|
\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.2.3** Si  $E$  es un espacio vectorial con producto interno tal que  $E$  es separable, entonces todo conjunto ortonormal es a lo sumo numerable

**Demostración** Sea  $S \subseteq E$  un conjunto ortonormal y sean  $u \neq v \in S$ , luego  $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2$  y por lo tanto  $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v) = \emptyset$ .

Sea  $D \subseteq E$  un subconjunto denso numerable, luego  $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D \neq \emptyset$  para todo  $u \in S$ . Consideremos  $f : S \rightarrow D$  dado por  $f(u) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D$ , luego si  $f(u) = f(v)$  entonces  $f(v) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v)$  y por lo tanto  $u = v$ . Como  $f$  es inyectiva concluimos que  $S$  es a lo sumo numerable. ■

**Teorema 2.2.4** Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $u_n$  una sucesión de vectores ortonormales y  $c_n$  una sucesión de números complejos. Luego:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty \quad (1)$$

$$\text{Más aún, } c_n = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u_n, u_n \right\rangle$$

**Demostración** Sea  $S_k = \sum_{i=1}^k c_i u_i$ , luego como  $(u_n)$  son ortonormales dos a dos y  $H$  es completo:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{k'} c_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=k+1}^{k'} |c_i|^2$$

Por ende:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty$$

Finalmente, notemos que  $\langle S_k, u_j \rangle = c_j$  para todo  $k \geq j$  y, además si  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , entonces  $S_k \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u_n =: x$ ; por lo tanto por 2.1.1  $c_n = \langle S_k, u_n \rangle \rightarrow \langle x, u_n \rangle$ . ■

**Definición** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno y  $M \subseteq E$ , definimos *el ortogonal a  $M$*  como  $M^\perp = \{x \in E / \langle x, m \rangle = 0 \ \forall m \in M\}$ .

**Proposición 2.2.5**  $M^\perp$  es un subespacio cerrado de  $E$

**Demostración** Si  $(x_n) \subset M$  es tal que  $x_n \rightarrow x$  entonces por 2.1.1  $0 = \langle m, x_n \rangle \rightarrow \langle m, x \rangle$ , por lo que  $x \in M$ . ■

**Teorema 2.2.6** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $S \subseteq H$  un conjunto ortonormal, luego:

1. Si  $x \in H$  entonces  $x_S = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u$  esta bien definido
2. Si  $M = \langle S \rangle$  entonces  $x \in M$  si y solo si  $x = x_S$ . Es más si  $x \in H$  entonces  $x - x_S \in M^\perp$ .

**Demostración** 1. Dado  $x \in H$ , de 2.2.2 sea  $(u_n)$  una numeración de  $S = \{u \in S / \langle x, u \rangle \neq 0\}$  y sea  $(v_n)$  otra ordenación de los  $u_n$ ; notemos  $x_1 = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n$  y  $x_2 = \sum_n \langle x, v_n \rangle v_n$  que por 2.2.4 y 2.2.2 están bien definidos.

Luego:

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, u_n \rangle &= \langle x_1, u_n \rangle - \langle x_2, u_n \rangle \\ &= \underbrace{\langle x, u_n \rangle - \langle x, v_{m_n} \rangle}_{u_n = v_{m_n} \text{ para algún } m_n} \\ &= \langle x, u_n \rangle - \langle x, u_n \rangle = 0 \end{aligned}$$

Por ende,  $\langle x_1 - x_2, u_n \rangle = \langle x_1 - x_2, v_n \rangle = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y se concluye que  $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = 0$  por lo que  $x_1 = x_2$  y entonces  $x_S$  esta bien definido y no depende del orden de la suma.

2. Sea  $x_{S_k} = \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle u_i \in M$ , luego como  $M$  es cerrado se tiene que  $x_{S_k} \rightarrow x_S \in M$ . Ahora sea  $s \in S$ , entonces:

$$\langle x - x_S, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x_S, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x, v \rangle = 0$$

Por lo que  $x - x_S \in M^\perp$ . Finalmente, si  $x \in M$  entonces como  $x_S \in M$  entonces  $x - x_S \in M \cap M^\perp = \{0\}$ , luego  $x = x_S$ . ■

### 2.3. Conjuntos ortonormales completos

**Definición** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno y sea  $S \subseteq E$  ortonormal, diremos que  $S$  es *completo* si  $S \subseteq T$  y  $T$  es ortonormal, entonces  $S = T$ .

**Proposición 2.3.1** Sea  $S$  un conjunto ortonormal tal que  $S^\perp = \{0\}$ , entonces  $S$  es completo

**Demostración** Sea  $T$  ortonormal y sea  $v \in T \setminus S$ , luego  $v \in S^\perp = \{0\}$  por lo que  $S$  es completo. ■

**Teorema 2.3.2** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno,  $S \subseteq E$  ortonormal y sea  $M = \langle S \rangle$ , entonces:

1. Si  $M = E$  entonces  $S$  es completo
2. Si  $S$  es completo y  $E$  es de Hilbert entonces  $M = E$

**Demostración** 1. Si  $x \in S^\perp$  entonces  $x \in M^\perp = E^\perp = \{0\}$ , por lo tanto  $S$  es completo

2. Sea  $x \in E$ , luego por 2.2.6  $x_S$  esta bien definido y  $x - x_S \in M^\perp$ , luego como  $S$  es completo  $x - x_S = 0$  y por 2.2.6 se tiene que  $x \in M$ . ■

**Corolario 2.3.3** Sea  $H$  de Hilbert y  $S \subseteq H$  un conjunto ortonormal completo, luego si  $x \in H$  entonces  $x = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u$ .

**Demostración** Como  $H$  es Hilbert y  $S$  es completo entonces por 2.3.2 tenemos que  $\langle S \rangle = H$ , luego por 2.2.6 si  $x \in H$  entonces  $x = x_S$ . ■

**Teorema 2.3.4 (Identidad de Parseval)** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno y  $S \subseteq E$  un conjunto ortonormal tal que para todo  $x \in E$  vale:

$$\|x\|^2 = \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2 \quad (2)$$

Luego  $S$  es completo. Más aún si  $E$  es Hilbert y  $S$  es completo entonces vale 2

**Demostración** Sea  $x \in E$  tal que  $x \in S^\perp$ , luego por 2  $\|x\| = \sum_{u \in S} \underbrace{|\langle x, u \rangle|}_{=0}^2 = 0$ , luego  $x = 0$  y  $S$  es completo.

Si  $E$  es Hilbert y  $S$  es completo entonces por 2.3.3 y 2.2.2 vale que  $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n$  por lo que:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle x, u_n \rangle} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, u_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2 \end{aligned}$$

■

**Corolario 2.3.5** Sea  $H$  Hilbert y  $m \in M = \langle S \rangle$  con  $S \subseteq H$  un conjunto ortonormal, luego  $\|x - m\| \geq \|x - x_S\|$

**Demostración**  $\|x - m\|^2 = \left\| \underbrace{x - x_S}_{\in M^\perp} + \underbrace{x_S - m}_{\in M} \right\|^2 = \|x - x_S\|^2 + \|x_S - m\|^2 \geq \|x - x_S\|^2$  ■





**Lema 2.5.2**  $\bigcup_{x \in S_1} S_2(x) = S_2$

**Demostración (del Lema)** Supongamos que existe  $y \in S_2$  tal que  $y \notin S_2(x)$  para todo  $x \in S_1$ , luego  $y \in S_1^\perp = \{0\}$ ; concluimos que  $S_2 \subseteq \bigcup_{x \in S_1} S_2(x)$  pues  $S_2$  es ortonormal.

Trivialmente se da la otra inclusión. ■

Por lo tanto  $\#S_2 \leq \#(\mathbb{N} \times S_1) = \#S_1$ ; análogamente  $\#S_1 \leq \#S_2$  y se concluye el resultado. ■

**Definición** Se define  $\dim(E) = \#S$  donde  $S \subseteq E$  es un sistema ortonormal completo.

**Definición** Sean  $E$  y  $F$  dos espacios vectoriales con producto interno, decimos que son *congruentes* si existe  $T \in L(E, F)$  isomorfismo tal que  $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$

**Definición** Sea  $Q \neq \emptyset$ , luego definimos  $l^2(Q) = \left\{ f : Q \rightarrow \mathbb{R} / \# \{q \in Q / f(q) \neq 0\} \leq \aleph_0, \sum_{q \in Q} |f(q)|^2 < \infty \right\}$ .

**Proposición 2.5.3** *Valen:*

1.  $l^2(Q)$  es un espacio de Hilbert con producto interno dado por  $\langle f, g \rangle = \sum_{q \in Q} f(q) \overline{g(q)}$
2. Sea  $S = \{\chi_{\{q\}}\}_{q \in Q}$  es ortonormal y completo
3. Si  $\#Q > \#\mathbb{N}$  entonces  $l^2(Q)$  no es separable

**Proposición 2.5.4** *Todo espacio vectorial con producto interno admite un sistema ortonormal completo.*

**Demostración** Sea  $P = \{S \subseteq E / S \text{ ortonormal}\}$  y dotemoslo del orden dado por la inclusión, luego  $P \neq \emptyset$  pues si  $v \in E$  entonces  $\{v\} \in P$ .

Sea  $\{S_i\}$  una colección de subconjuntos de  $P$  totalmente ordenada y sea  $T = \bigcup_{i \in I} S_i$ , luego es claro que  $S_i \leq T$ ; faltaría ver que  $T \in P$ .

Para eso sean  $v_1, v_2 \in T$ , luego existe  $S_i$  tal que  $v_1, v_2 \in S_i$  y como este es ortonormal resulta que  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  y  $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ . Concluimos que  $T \in P$ , luego por 1.1.1 existe  $M \in P$  elemento maximal.

Finalmente sea  $v \in M^\perp$ , luego  $M \cup \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$  sería un conjunto ortonormal lo que contradice la maximalidad de  $M$ ; por ende no existe tal  $v$  y  $M$  resulta completo. ■

**Teorema 2.5.5** *Sea  $H$  Hilbert tal que  $\dim H = \alpha$  entonces  $H \cong l^2(Q)$  con  $\#Q = \alpha$*

**Demostración** Sea  $S_\alpha = \{u_i\}_{i \in Q}$  un sistema ortonormal, completo de  $H$  que existe por 2.5.4; luego  $x \in H$  entonces  $x = \sum_{i \in Q} \langle x, u_i \rangle u_i$ , y debido a 2.3.4 y 2.2.2  $\{\langle x, u_i \rangle\}_{i \in Q} \subset l^2(Q)$ . Definimos  $T : H \rightarrow l^2(Q)$  dado por  $T(x) = (\langle x, u_i \rangle)_{i \in Q}$  y veamos que es la indicada.

1.  $T$  es lineal  
Sean  $x, y \in H$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ , luego  $T(x + \lambda y) = (\langle x + \lambda y, u_i \rangle) = (\langle x, u_i \rangle + \lambda \langle y, u_i \rangle) = T(x) + \lambda T(y)$ .
2.  $T$  es monomorfismo  
Si  $T(x) = (0)$  luego  $\langle x, u_i \rangle = 0$  para todo  $i \in Q$ , luego  $x \in S^\perp = \{0\}$  pues  $S$  es completo.
3.  $T$  es epimorfismo  
Si  $(c_i) \in l^2(Q)$  luego por 2.2.4  $x = \sum_{i \in Q} c_i u_i \in H$  y  $T(x) = (c_i)$
4.  $T$  es isometría

Por 2.3.4

**Corolario 2.5.6** *Sea  $H$  Hilbert separable de dimensión infinita, luego  $H$  es congruente a  $l^2$*

## 2.6. Proyección ortogonal

**Ejemplo** El sistema  $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, t \in [0, 2\pi] \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es completo.

**Demostración** Supongamos que  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $g(t) = \int_{-\pi}^t f(t) dt$ , luego  $g$  es continua y  $g' = f$  ctp por el teorema de diferenciación de Lebesgue. Notemos que:

$$\begin{aligned} g(\pi) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{i0t} dt = 0 = g(-\pi) \\ \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int} dt &= \frac{g(t)e^{int}}{ni} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt}{in} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que  $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int} dt = 0$  donde  $g$  es continua y  $g(-\pi) = g(\pi) = 0$ , por Stone-Weirstrass existe  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de polinomios trigonométricos tal que  $p_n \rightrightarrows g$ , por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(t)e^{int} dt \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int} dt = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

No obstante, si  $p_k \neq cte$  entonces para todo  $k \in \mathbb{N}$   $\langle p_k, e^{int} \rangle \neq 0$  para algún  $n$ , luego  $p_k = cte = g(\pi) = 0$ . Concluimos que  $g = 0$  y entonces  $f = 0$  ctp. ■

**Teorema 2.6.1** Sea  $H$  Hilbert y  $K$  cerrado y convexo, luego si  $x \in H$  entonces existe un único  $k \in K$  tal que  $\|x - k\| = d(x, K)$

**Demostración** Sea  $d_n = \|x - k_n\|$  una sucesión minimizante, luego para todo  $n \geq N \in \mathbb{N}$  vale que  $d + \frac{1}{N} \geq \|x - k_n\|$  por lo que por 1.2.3:

$$\|(x - k_n) - (x - k_m)\|^2 + \|(x - k_n) + (x - k_m)\|^2 = 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|k_n - k_m\|^2 &= 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2 - \|2x - k_n - k_m\|^2 \\ &= 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2 - 4\left\|x - \underbrace{\frac{k_n - k_m}{2}}_{\in K}\right\|^2 \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \\ &= \frac{4d}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{m^2} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Luego  $(k_n)$  es de Cauchy y como  $H$  es completo existe  $k \in K$  tal que  $k_n \rightarrow K$ ; por 2.1.1  $d = \|x - k\|$ . Si  $h \in K$  tal que  $\|x - h\| = d$  luego como  $K$  es convexo  $\frac{k+h}{2} \in K$  por lo que:

$$d \leq \left\|x - \frac{k+h}{2}\right\| \leq \frac{\|x - k\| + \|x - h\|}{2} = d$$

Luego por 1.2.3:

$$\|k - h\|^2 = 2\|x - k\|^2 + 2\|x - h\|^2 - 4\left\|x - \frac{k-h}{2}\right\|^2 = 0$$

Por lo que  $k = h$ . ■

**Definición** Sea  $M \subseteq H$  un subespacio cerrado de  $H$  Hilbert, luego por 2.6.1 existe un único  $f_0 \in M$  tal que para todo  $x \in H$  vale  $\|x - f_0\| = d(x, M)$ . A su vez como  $M$  es cerrado también es un espacio de Hilbert, luego por 2.5.4 existe  $S \subseteq M$  tal que  $M = \langle S \rangle$ , finalmente por 2.2.4 vale que  $f_0 = x_S$ .

En resumen, dado  $M \subseteq H$  subespacio cerrado y  $h \in H$  existe un único elemento  $f_0$  tal que  $h - f_0 \in M^\perp$ . Definimos la *proyección ortogonal sobre  $M$*   $P_M : H \rightarrow M$  dado por  $P_M(h) = f_0$ .

**Proposición 2.6.2** Sea  $M \subseteq H$  un subespacio cerrado en un Hilbert, sea  $h \in H$  y  $Ph := P_M(h)$  el único elemento tal que  $h - Ph \in M^\perp$ , luego:

1.  $P$  es lineal
2.  $\|Ph\| \leq \|h\|$
3.  $P^2 = P$
4.  $\ker P = M^\perp$  y  $\text{ran} P = M$

**Demostración** 1. Sean  $x, y \in H$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$  y  $m \in M$ ; luego  $\langle x + \lambda y - Px + \lambda Py, f \rangle = \langle x - Px, f \rangle + \lambda \langle y - Py, f \rangle = 0$ . Por unicidad en 2.6.1 vale que  $P(x + \lambda y) = Px + \lambda Py$ .

$$2. \text{ Notemos que } \|h\|^2 = \left\| \underbrace{h - Ph}_{\in M^\perp} + \underbrace{Ph}_{\in M} \right\|^2 = \|h - Ph\|^2 + \|Ph\|^2 \geq \|Ph\|^2.$$

3. Como  $P|_M = \text{Id}_M$  entonces  $P(Ph) = Ph$  para todo  $h \in H$ .

4. Si  $Ph = 0$  entonces  $h - Ph = h \in M^\perp$ ; recíprocamente si  $h \in M^\perp$  entonces  $h - 0 \in M^\perp$  por lo que  $h \in \ker P$ . ■

**Corolario 2.6.3** Sea  $M \subseteq H$  un subespacio cerrado en un Hilbert, entonces  $(M^\perp)^\perp = M$

**Demostración** Primero notemos que:

**Lema 2.6.4**  $\text{Id} - P_M = P_{M^\perp}$

**Demostración del lema** Sea  $m \in M^\perp$  y  $h \in H$ , luego  $\langle h - (\text{Id} - P_M)(h), m \rangle = \langle h - h + P_M(h), m \rangle = \langle P_M(h), m \rangle = 0$ , por la unicidad de 2.6.1 vale que  $P_{M^\perp} = \text{Id} - P_M$ . ■

Luego por 2.6.2 vale que  $(M^\perp)^\perp = \ker P_{M^\perp} = \ker(\text{Id} - P_M) \underset{0=h-Ph \Leftrightarrow h=Ph}{=} \text{ran } P = M$ . ■

**Corolario 2.6.5** Sea  $A \subseteq H$  un conjunto en un Hilbert, luego  $(A^\perp)^\perp = \overline{\langle A \rangle}$

**Demostración** Para esto vamos a utilizar dos lemas:

**Lema 2.6.6**  $\langle A \rangle^\perp = A^\perp$

**Demostración** Por un lado si  $f \in A^\perp$  luego  $\left\langle f, \sum_{i=1}^n c_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle f, a_i \rangle = 0$  por lo que  $f \in \langle A \rangle^\perp$ .

Recíprocamente si  $f \in \langle A \rangle^\perp$  y sea  $a \in A$ , luego  $\left\langle f, \underbrace{a}_{A \subseteq \langle A \rangle} \right\rangle = 0$  por lo que  $f \in A^\perp$ . ■

**Lema 2.6.7** Sea  $U \subseteq H$  un conjunto en un Hilbert, entonces  $U^\perp = \overline{U}^\perp$ .

**Demostración** Sea  $h \in U^\perp$ , luego si  $u \in \overline{U}$  entonces existe  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$  tal que  $u_n \rightarrow u$ . Por 2.1.1 entonces  $0 = \langle h, u_n \rangle \rightarrow \langle h, u \rangle$  por lo que  $h \in \overline{U}^\perp$ .

Recíprocamente, si  $h \in \overline{U}^\perp$  y  $u \in U \subseteq \overline{U}$  entonces  $\langle h, u \rangle = 0$ ; concluimos que  $h \in U^\perp$ . ■

Luego por el corolario previo  $\overline{\langle A \rangle} = \left( \overline{\langle A \rangle}^\perp \right)^\perp \underset{2,6,7}{=} \left( \langle A \rangle^\perp \right)^\perp \underset{2,6,6}{=} (A^\perp)^\perp$ . ■

**Corolario 2.6.8** Sea  $M \subseteq H$  una variedad lineal en un Hilbert, luego  $M$  es denso si y sólo si  $M^\perp = \{0\}$

**Demostración** Si  $\overline{M} = H$  entonces  $M^\perp \underset{2,6,7}{=} \overline{M}^\perp = H^\perp = \{0\}$ .

Recíprocamente de 2.6.5 sabemos que  $\overline{M} = (M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$ . ■

## 2.7. Teorema de representación de Riesz

**Proposición 2.7.1** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $L : H \rightarrow \mathbb{F}$  un funcional lineal, entonces son equivalentes:

1.  $L$  es continua
2.  $L$  es continua en 0
3.  $L$  es continua en algún punto
4. Existe  $c > 0$  tal que:

$$|L(h)| \leq c \|h\| \quad \forall h \in H \quad (3)$$

**Demostración** Es claro que  $1) \implies 2) \implies 3)$  y que  $4) \implies 2)$ , veamos las que faltan:

- 3)  $\implies$  1) Supongamos que  $L$  es continua en  $h_0 \in H$  y sea  $h \in H$ ; luego si  $h_n \rightarrow h$  entonces  $h_n - h + h_0 \rightarrow h_0$ , por lo tanto  $L(h_0) = \lim L(h_n - h + h_0) = \lim L(h_n) - L(h) + L(h_0)$  y concluimos que  $L(h) = \lim L(h_n)$ .
- 2)  $\implies$  4) Como  $L$  es continua en 0 entonces si  $V = \{\alpha \in \mathbb{F} / |\alpha| < 1\}$  entonces  $L^{-1}(V)$  es abierto; es decir existe  $\delta > 0$  tal que  $\|h\| < \delta$  implica  $|L(h)| < 1$ .

Si  $h \in H$  y  $\epsilon > 0$  entonces  $\left\| \frac{\delta h}{\|h\| + \epsilon} \right\| < \delta$  por lo que:

$$1 > \left| L \left[ \frac{\delta h}{\|h\| + \epsilon} \right] \right| = \frac{\delta}{\|h\| + \epsilon} |L(h)|$$

Por lo que si  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$|L(h)| < \frac{1}{\delta} (\|h\|) := c \|h\|$$

■

**Definición** Decimos que  $L : H \rightarrow \mathbb{F}$  es *acotado* si vale 3. De 2.7.1 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|L\| = \sup \{|L(h)| : \|h\| \leq 1\}$$

**Proposición 2.7.2** Si  $L$  es un funcional acotado entonces:

$$\begin{aligned}
 \|L\| &:= \sup \{|L(h)| : \|h\| \leq 1\} \\
 &= \sup \{|L(h)| : \|h\| = 1\} \\
 &= \sup \left\{ \frac{|L(h)|}{\|h\|} : h \neq 0 \right\} \\
 &= \inf \{c > 0 : |L(h)| \leq c \|h\| \quad h \in H\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Es más, vale que  $|L(h)| \leq \|L\| \|h\|$  para todo  $h \in H$ .

**Demostración** Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned}
 \|L\|_2 &= \sup \{|L(h)| : \|h\| = 1\} \\
 \|L\|_3 &= \sup \left\{ \frac{|L(h)|}{\|h\|} : h \neq 0 \right\} \\
 \|L\|_4 &= \inf \{c > 0 : |L(h)| \leq c \|h\| \quad h \in H\}
 \end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como  $\{|L(h)| : \|h\| = 1\} \subseteq \{|L(h)| : \|h\| \leq 1\}$  entonces vale que  $\|L\|_2 \leq \|L\|$ .  
Recíprocamente, si  $\|h\| \leq 1$  entonces:

$$\begin{aligned}
 &\left| L\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \right| \leq \|L\|_2 \\
 \Rightarrow &\frac{1}{\|h\|} |L(h)| \leq \|L\|_2 \\
 \Rightarrow &|L(h)| \leq \|L\|_2 \|h\| \leq \|L\|_2 \\
 \Rightarrow &\sup_{\|h\| \leq 1} |L(h)| \leq \|L\|_2 \\
 \Rightarrow &\|L\| \leq \|L\|_2
 \end{aligned}$$

- Si  $h \neq 0$  entonces:

$$\begin{aligned}
 &\left| L\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \right| \leq \|L\|_2 \\
 \Rightarrow &\frac{1}{\|h\|} |L(h)| \leq \|L\|_2 \\
 \Rightarrow &\sup_{h \neq 0} \left\{ \frac{1}{\|h\|} |L(h)| \right\} \leq \|L\|_2 \\
 \Rightarrow &\|L\|_3 \leq \|L\|_2
 \end{aligned}$$

Recíprocamente notemos que  $\{|L(h)| : \|h\| = 1\} = \left\{ \frac{|L(h)|}{\|h\|} : \|h\| = 1 \right\} \subseteq \left\{ \frac{|L(h)|}{\|h\|} : h \neq 0 \right\}$  por lo tanto  $\|L\|_2 \leq \|L\|_3$ .

- Sea  $\epsilon > 0$ , luego:

$$\begin{aligned}
 &\left| L\left(\frac{h}{\|h\| + \epsilon}\right) \right| \leq \|L\| \\
 \Rightarrow &|L(h)| \leq (\|h\| + \epsilon) \|L\| \\
 \text{Si } \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow &|L(h)| \leq \|L\| \|h\| \\
 \Rightarrow &\|L\|_4 \leq \|L\|
 \end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $\|L(h)\| \leq c \|h\|$  entonces  $\|L\| \leq c$  por lo que  $\|L\| \leq \|L\|_4$ . ■

**Teorema 2.7.3 (Teorema de Representación de Riesz)** Sea  $L : H \rightarrow \mathbb{F}$  un funcional, entonces  $L$  es acotado si y sólo si existe un único  $h_0 \in H$  tal que  $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$ . En ese caso  $\|L\| = \|h_0\|$ .

**Demostración** Sea  $M = \ker L$ , como  $L$  es acotada entonces  $M$  es cerrado y como  $L \neq 0$  (en cuyo caso  $h_0 = 0$ ) entonces  $M^\perp \neq \{0\}$ . Como  $H = M \oplus M^\perp$  entonces existe  $f_0 \in M^\perp$  tal que  $L(f_0) = 1$ .

Sea  $h \in H$ , entonces  $L(h - L(h)f_0) = 0$  por lo que  $h - L(h)f_0 \in M$ ; de aquí concluimos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h - L(h)f_0, f_0 \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \langle h, f_0 \rangle - L(h) \|f_0\|^2 \\ \Rightarrow L(h) &= \frac{1}{\|f_0\|^2} \langle h, f_0 \rangle \\ \Rightarrow L(h) &= \underbrace{\frac{f_0}{\|f_0\|^2}}_{h_0} \langle h, f_0 \rangle \end{aligned}$$

Si  $h'_0$  es tal que  $\langle h, h_0 \rangle = L(h) = \langle h, h'_0 \rangle$  entonces  $0 = \langle h, h_0 - h'_0 \rangle$  para todo  $h \in H$ , en particular  $0 = \langle h_0 - h'_0, h_0 - h'_0 \rangle = \|h_0 - h'_0\|^2$  por lo que  $h_0 = h'_0$ .

Recíprocamente, si  $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$  entonces por 1.2.1  $|L(h)| \leq \|h\| \|h_0\|$  por lo tanto  $\|L\| \leq \|h_0\|$ .

En ese caso,  $L\left(\frac{h_0}{\|h_0\|}\right) = \frac{1}{\|h_0\|} \langle h_0, h_0 \rangle = \|h_0\|$  por lo que  $\|L\| = \|h_0\|$ . ■

### 3. Espacios de Banach

#### 3.1. Operadores entre espacios normados

**Proposición 3.1.1** Sea  $E$  un espacio normado, entonces:

1. La suma es continua
2. El producto por un escalar es continuo
3. La norma es continua

**Demostración** 1. Si  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$  entonces  $\|x + y - x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0$

2. Si  $x_n \rightarrow x$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$  entonces  $\|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda| \|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

3. Si  $x_n \rightarrow x$  entonces por definición  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ . ■

**Proposición 3.1.2** Sea  $E$  un espacio normado y  $x_0 \in E$  entonces  $\overline{B_r(x_0)} = B_r[x_0]$ .

**Demostración** Si  $x \in \overline{B_r(x_0)}$  entonces existe  $\{x_n\} \subset B_r(x_0)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , como  $\|x_n - x_0\| < r$  entonces por 3.1.1 se tiene que  $\|x_n - x_0\| \rightarrow \|x - x_0\|$  por lo que  $x \in B_r[x_0]$ .

Recíprocamente si  $x \notin \overline{B_r(x_0)}$  entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0) = \emptyset$ ; luego  $\|x - x_0\| > \epsilon + r > r$  por lo que  $x \notin B_r[x_0]$ . ■

**Teorema 3.1.3** Sea  $X$  un espacio normado, entonces  $X$  es de Banach si y sólo si vale:

$$\text{Si } (x_n) \text{ cumple que } \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \in X \quad (5)$$

**Demostración** Sea  $S_k = \sum_{n \leq k} x_n$ , entonces si  $k > k'$ ,  $\|S_k - S_{k'}\| = \left\| \sum_{n=k'+1}^k x_n \right\| \leq \sum_{n=k'+1}^k \|x_n\| \xrightarrow{k, k' \rightarrow \infty} 0$ .  
Luego  $S_k$  es de Cauchy y como  $X$  es Banach  $S_k \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \in X$ .

Recíprocamente, sea  $(x_n) \subset X$  de Cauchy y para cada  $k \in \mathbb{N}$  sea  $\epsilon = \frac{1}{2^k}$  y  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$  si  $n, m \geq n_k$ . Luego si  $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$  entonces  $\sum_k \|z_k\| < \sum_k \frac{1}{2^k} < \infty$ ; luego por hipótesis  $S_m = \sum_{k=1}^m z_k$  converge, pero  $S_m = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$ , luego  $\lim_m x_{n_m} = x_{n_1} + \lim S_m \in X$ ; como  $x_n$  es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente entonces  $(x_n)$  es convergente. ■

**Definición** Si  $X, Y$  son espacios normados un *isomorfismo topológico* es  $T : X \rightarrow Y$  tal que:

- $T$  es isomorfismo lineal
- $T$  y  $T^{-1}$  son continuas

**Proposición 3.1.4** Sea  $X, Y$  espacios normados y sea  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal, entonces son equivalentes:

1.  $T$  es continua
2.  $T$  es continua en 0
3.  $T$  es continua en algún punto
4. Existe  $c > 0$  tal que:

$$\|T(x)\|_Y \leq c \|x\|_X \quad \forall x \in X \quad (6)$$

5.  $T$  está acotado en  $B_1[0]$
6.  $T$  está acotado en  $B_r[x_0]$  para todos  $x_0 \in X$  y  $r > 0$
7.  $T$  está acotado en  $\partial B_r[x_0]$  para todos  $x_0 \in X$  y  $r > 0$

**Demostración** Es claro que  $1) \implies 2) \implies 3)$ , que  $4) \implies 2)$  y que  $6) \implies 7)$ , veamos las que faltan:

- 3)  $\implies$  1) Supongamos que  $T$  es continua en  $x_0 \in X$  y sea  $x \in X$ ; luego si  $x_n \rightarrow x$  entonces  $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0$ , por lo tanto  $T(x_0) = \lim T(x_n - x + x_0) = \lim T(x_n) - T(x) + T(x_0)$  y concluimos que  $T(x) = \lim T(x_n)$ .
- 2)  $\implies$  4) Como  $T$  es continua en 0 entonces si  $V = \{y \in Y / \|y\|_Y < 1\}$  entonces  $T^{-1}(V)$  es abierto; es decir existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x\|_X < \delta$  implica  $\|T(x)\|_Y < 1$ .

Si  $x \in X$  y  $\epsilon > 0$  entonces  $\left\| \frac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon} \right\|_X < \delta$  por lo que:

$$1 > \left\| T \left[ \frac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon} \right] \right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X + \epsilon} \|T(x)\|_Y$$

Por lo que si  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\|T(x)\|_Y < \frac{1}{\delta} (\|x\|_X) := c \|x\|_X$$

- 4)  $\implies$  5) Sea  $x \in B_1[0]$ , luego  $\|T(x)\|_Y \leq c \|x\|_X \leq c$ .

- 5)  $\implies$  6) Sea  $r > 0$  y  $x_0 \in X$ , luego si  $x \in B_r[x_0]$  entonces existe  $M > 0$  tal que  $\left\| T \left( \frac{x - x_0}{r} \right) \right\|_Y \leq M$  pues  $\frac{x - x_0}{r} \in B_1[0]$

Por lo tanto  $\|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq Mr$  lo que implica que  $\|T(x)\|_Y \leq rM + \|T(x_0)\|_Y := C$ .



7)  $\implies$  1) Sea  $x_0 \in X$ , luego por hipótesis si  $\|x - x_0\|_X = 1$  entonces  $\|T(x - x_0)\|_Y \leq C$ ; por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \left\| T \left( \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_X} \right) \right\|_Y \leq C \\ \implies & \|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq C \|x - x_0\|_X \end{aligned}$$

Cuando  $\|x - x_0\|_X < \delta = \frac{\epsilon}{C}$ . ■

**Ejemplo** Si  $X = Y = C[a, b]$  dotados de la norma supremo entonces  $T(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$  es un operador lineal acotado que no es un isomorfismo topológico.

**Corolario 3.1.5** Sean  $X, Y$  normados y sea  $T : X \rightarrow Y$  un isomorfismo lineal. Entonces  $T$  es isomorfismo topológico si y sólo si existen  $C_1, C_2 > 0$  tal que  $C_1 \|x\| \underset{*}{\leq} \|T(x)\| \underset{*}{\leq} C_2 \|x\|$

**Demostración** Si  $T$  es isomorfismo topológico entonces:

$$\begin{aligned} T \text{ continua} & \implies \exists C_2 > 0 / \|T(x)\| \leq C_2 \|x\| \quad \forall x \in X \\ T^{-1} \text{ continua} & \implies \exists D_1 > 0 / \|T^{-1}(y)\| \leq D_1 \|y\| \quad \forall y \in Y \\ & \implies \|x\| \leq D_1 \|T(x)\| \quad \forall x \in X \\ & \implies C_1 \|x\| \leq \|T(x)\| \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Por lo tanto vale que:

$$C_1 \|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2 \|x\|$$

Recíprocamente, por  $*$  se concluye que  $T$  es acotado y por 3.1.4 es continua; asimismo de  $\star$  si  $x = T^{-1}(y)$  se ve que  $T^{-1}$  es continua.

### 3.2. Espacios vectoriales de dimensión finita

**Definición** Si  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  son dos normas en un espacio vectorial  $X$  entonces decimos que son *equivalentes* si  $1_X : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  es un isomorfismo topológico.

**Teorema 3.2.1** Sea  $X$  un espacio vectorial de dimensión finita, entonces:

1. Dos normas siempre son equivalentes
2.  $X$  es topológicamente isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  con  $n = \dim X$

**Demostración** 1. Sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $X$  y veamos que  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|_\infty$  son equivalentes.

$$\text{Sea } a = \sum_{i=1}^k a_i e_i, \text{ luego } \|a\| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| \|e_i\| \leq \|a\|_\infty C.$$

Luego sea  $id : (X, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$

Sabemos que  $B_1[0]$  es compacta en  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  y por la cuenta anterior  $id$  es continua, por lo tanto  $id(S) = S$  es compacta en  $(X, \|\cdot\|)$  y por ende alcanza mínimo y máximo.

Sean  $C_1 = \min_{\|x\|_\infty=1} \|x\|$  y  $C_2 = \max_{\|x\|_\infty=1} \|x\|$ , por lo tanto si  $x \in X$  entonces:

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \leq C_2$$

2. Si  $x = \sum_{i=1}^k a_i e_i$  definimos  $T(x) = (a_1, \dots, a_n)$ , luego:

$$C_1 \|x\| \leq \|T(x)\|_\infty = \|x\|_\infty \leq C_2 \|x\|$$

Por lo que  $T$  es isomorfismo topológico. ■

**Corolario 3.2.2** *Todo espacio vectorial de dimensión finita es Banach.*

**Corolario 3.2.3** *Si  $X$  es normado de dimensión finita, entonces todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

**Demostración** Si  $A \subseteq X$  es cerrado y acotado, entonces existe  $x_0 \in X, r > 0$  tal que  $A \subset B_r[x_0]$  y  $B_r[x_0]$  es compacto pues  $B_1[0]$  lo es. Por lo tanto  $A$  es un cerrado en un compacto. ■

**Teorema 3.2.4** *Si  $X$  es un espacio normado de dimensión infinita, entonces  $B_1[0]$  no es compacta*

**Demostración** Veamos primero el siguiente lema:

**Lema 3.2.5 (Lema de Riesz)** *Sea  $M \subseteq X$  un subespacio no denso en un Banach, dado  $r \in (0, 1)$  existe  $x \in X$  tal que  $\|x\| = 1$  pero  $d(x, M) \geq r$*

**Demostración del lema** Sea  $y \in X \setminus \overline{M}$  y notemos  $R = d(y, M)$ , luego si  $\epsilon > 0$  existe  $m_1 \in M$  tal que  $\|m_1 - y\| < R + \epsilon$ . Sea  $x = \frac{y - m_1}{\|y - m_1\|}$ , luego  $\|x\| = 1$  y:

$$\begin{aligned} d(x, M) &= \inf_{m \in M} \|x - m\| \\ &= \inf_{m \in M} \left\| m - \frac{y}{\|y - m_1\|} + \frac{m_1}{\|y - m_1\|} \right\| \\ &= \inf_{m \in M} \frac{\|m - y\|}{\|m_1 - y\|} \\ &= \frac{R}{R + \epsilon} \nearrow 1 \end{aligned}$$

■

Sea  $x_1 \in \partial B_1[0]$ , luego por 3.2.5 aplicado a  $S_1 = \langle x_1 \rangle$  existe  $x_2 \in \partial B_1[0]$  tal que  $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$ .

Inductivamente sea  $x_n \in \partial B_1[0]$  tal que  $d(x_n, S_{n-1}) = d(x_n, \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}) > \frac{1}{2}$ . Luego por construcción  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1[0]$  es una sucesión tal que  $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$  para todos  $n \neq m$  por lo tanto es una sucesión acotada que no admite subsucesión convergente. Concluimos que  $B_1[0]$  no es compacto ■

### 3.3. Espacio de Operadores entre espacios normados

**Definición** Dados  $X, Y$  normados decimos que  $T : X \rightarrow Y$  es *acotado* si vale 6. De 3.1.4 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

**Proposición 3.3.1** *Si  $T$  es un operador acotado entonces:*

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \sup \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} \\ &= \inf \{c > 0 : \|T(x)\| \leq c \|x\| \quad x \in X\} \end{aligned} \tag{7}$$

Es más, vale que  $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$  para todo  $x \in X$ .

**Demostración** Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned}\|T\|_2 &= \sup \{|T(x)| : \|x\| = 1\} \\ \|T\|_3 &= \sup \left\{ \frac{|T(x)|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} \\ \|T\|_4 &= \inf \{c > 0 : |T(x)| \leq c \|x\| \ x \in X\}\end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como  $\{|T(x)| : \|x\| = 1\} \subseteq \{|T(x)| : \|x\| \leq 1\}$  entonces vale que  $\|T\|_2 \leq \|T\|$ .

Recíprocamente, si  $\|x\| \leq 1$  entonces:

$$\begin{aligned}& \left| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq \|T\|_2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\|x\|} |T(x)| \leq \|T\|_2 \\ \Rightarrow & |T(x)| \leq \|T\|_2 \|x\| \leq \|T\|_2 \\ \Rightarrow & \sup_{\|x\| \leq 1} |T(x)| \leq \|T\|_2 \\ \Rightarrow & \|T\| \leq \|T\|_2\end{aligned}$$

- Si  $x \neq 0$  entonces:

$$\begin{aligned}& \left| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq \|T\|_2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\|x\|} |T(x)| \leq \|T\|_2 \\ \Rightarrow & \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{1}{\|x\|} |T(x)| \right\} \leq \|T\|_2 \\ \Rightarrow & \|T\|_3 \leq \|T\|_2\end{aligned}$$

Recíprocamente notemos que  $\{|T(x)| : \|x\| = 1\} = \left\{ \frac{|T(x)|}{\|x\|} : \|x\| = 1 \right\} \subseteq \left\{ \frac{|T(x)|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\}$  por lo tanto  $\|T\|_2 \leq \|T\|_3$ .

- Sea  $\epsilon > 0$ , luego:

$$\begin{aligned}& \left| T\left(\frac{x}{\|x\| + \epsilon}\right) \right| \leq \|T\| \\ \Rightarrow & |T(x)| \leq (\|x\| + \epsilon) \|T\| \\ \text{Si } \epsilon \rightarrow 0 \rightarrow & |T(x)| \leq \|T\| \|x\| \\ \rightarrow & \|T\|_4 \leq \|T\|\end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $\|T(x)\| \leq c \|x\|$  entonces  $\|T\| \leq c$  por lo que  $\|T\| \leq \|T\|_4$ . ■

**Definición** Sean  $X, Y$  normados, definimos  $L(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y / T \text{ lineal y acotado}\}$

**Proposición 3.3.2** Si  $X, Y$  son normados entonces  $L(X, Y)$  es normado

**Demostración** Probemos la desigualdad triangular pues las demás son triviales:

$$\begin{aligned}& \text{Sean } T, W : X \rightarrow Y \text{ lineales y acotadas, entonces } \|T + W\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T + W)(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx + Wx\| \leq \\ & \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| + \|Wx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|W(x)\| = \|T\| + \|W\|. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Teorema 3.3.3** Sean  $X, Y$  normados, entonces  $Y$  es de Banach si y sólo si  $L(X, Y)$  es de Banach

**Demostración** Sea  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$  una sucesión de Cauchy, y sea  $\epsilon > 0$  entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|T_n - T_m\| < \epsilon$  para todos  $n, m \geq N$ .

En particular dado  $x \in B_1[0]$  vale que  $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|T_n - T_m\| < \epsilon$  por lo que  $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  es una sucesión de Cauchy; como  $Y$  es Banach  $\lim T_n(x) \in Y$ . Además si  $\|x\| \geq 1$  entonces  $\lim T_n(x) = \lim \|x\| T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \lim T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in Y$ ; luego definimos:

$$T(x) = \lim T_n(x) \quad \forall x \in X$$

Veamos que  $T_n \rightarrow T$  y que  $T \in L(X, Y)$ .

- Por 3.1.1 y la linealidad de  $T_n$  vale que  $T$  es lineal
- Sea  $x \in B_1[0]$  y  $\epsilon > 0$ , luego sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|T_n - T_m\| < \epsilon$  para todos  $n, m \geq N$ ; entonces  $\|T(x)\| = \|T(x) - T_N(x) + T_N(x)\| \leq \|T(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\| < \epsilon + C$ .
- Sea  $\epsilon > 0$ , luego  $\epsilon > \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n(x) - T(x)\| = \|T_n - T\|$ .

La vuelta la probaremos con Hanh-Banach. ■

**Definición** Sea  $X$  espacio normado, luego notamos  $X^* := L(X, \mathbb{F})$  y se llama *espacio dual topológico*.

Si pensamos a  $X$  como espacio vectorial solamente también está definido  $X' := \{T : X \rightarrow \mathbb{F}, / T \text{ lineal}\}$  el *dual algebraico*.

### 3.4. Espacios cocientes

Sea  $X$  un espacio vectorial normado y  $S \subseteq X$  un subespacio cerrado. Definimos la siguiente relación de equivalencia en  $X$ :

$$x \sim_S y \iff x - y \in S$$

y definimos  $\|[x]\|_S := \inf \{\|t\| : x \in [t]\}$ .

**Proposición 3.4.1** *El espacio  $(X/S, \|\cdot\|_S)$  es un espacio normado con la suma definida por  $[x] + [y] = [x + y]$ ,  $[\lambda x] = \lambda[x]$*

**Demostración** ■ Sean  $x, x' \in X$  tal que  $[x] = [x']$ , entonces  $x - x' \in S$  por lo que  $\lambda(x - x') \in S$ ; en conclusión  $\lambda[x] := [\lambda x] = [\lambda x'] =: \lambda[x']$ .

- Sean  $x, x', y, y' \in X$  tal que  $[x] = [x']$ ,  $[y] = [y']$ , luego  $x - x' \in S$  y  $y - y' \in S$  por lo que  $(x - x') + (y - y') = (x + y) - (x' + y') \in S$ ; en conclusión  $[x] + [y] := [x + y] = [x' + y'] =: [x'] + [y']$ .
- Sean  $[x] \in X/S$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$ , luego  $\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{t \in [\lambda x]} \|t\| = \inf_{t \in [x]} \|\lambda t\| = |\lambda| \| [x] \|$
- Sean  $[x], [y] \in X/S$ , luego  $\|[x] + [y]\| = \|[x + y]\| = \inf_{t \in [x + y]} \|t\| \leq \inf_{t \in [x] w \in [y]} \|t + w\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$
- Si  $\|[x]\| = 0$  entonces existe  $t_n$  tal que  $\|t_n\| < \frac{1}{n}$  con  $t_n \in [x]$ , por lo tanto  $x + s_n = t_n \rightarrow 0$  y entonces  $s_n \rightarrow -x$ . Como  $S$  es cerrado  $-x \in S$  y como es subespacio  $x \in S$ ; luego  $[x] = [0]$

Trivialmente si  $x \in S$  entonces  $[x] = [0]$  y entonces  $\|[x]\| = 0$ . ■

**Proposición 3.4.2** *Sean  $S \subseteq X$  un subespacio cerrado en un normado, entonces:*

$$\|[x]\| = d(x, S)$$

**Demostración**  $d(x, S) = \inf_{s \in S} \|x - s\|_X = \inf_{-s \in S} \|x + s\|_X = \inf_{t \in [x]} \|t\|_X$ . ■

**Teorema 3.4.3** Sea  $M \subseteq X$  un subespacio cerrado de un espacio normado y notemos  $Q : X \rightarrow X/M$  la proyección canónica, entonces:

1.  $Q$  es continua y  $\|Q\| \leq 1$ .
2. Si  $X$  es de Banach entonces  $X/M$  lo es.
3. Si  $W \subset X/M$  entonces  $W$  es abierto si y sólo si  $Q^{-1}(W)$  es abierto.
4. Si  $U \subset X$  es abierto entonces  $Q(U) \subset X/M$  es abierto.

**Demostración** Vayamos de a partes:

1.  $\|Q(x)\| = \|[x]\| = d(x, M) \leq \|x\|$  pues  $0 \in M$ ; concluimos por 3.1.4.
2. Sea  $([x_n]) \subset X/M$  una sucesión tal que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$ , y para cada  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|[x_n]\| \neq 0$  sea  $\epsilon_n = \|[x_n]\|$ . Luego  $\|[x_n]\| + \epsilon_n = 2\|[x_n]\| > \|x_n + m_n\|$  para cierto  $m_n \in M$  (Si  $\|[x_n]\| = 0$  entonces  $x_n \in M$  y tomamos  $m_n = -x_n \in M$ ), como  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$  entonces  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|m_n + x_n\| < \infty$  y por 3.1.3  $\sum_{n \in \mathbb{N}} m_n + x_n \in X$ . Como  $S_p = \sum_{n=1}^p x_n + m_n \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} m_n + x_n := v \in X$  y  $Q$  es continua entonces  $\sum_{n=1}^p [x_n] = Q(S_p) \rightarrow Q(v) \in X/M$ ; concluimos por 3.1.3 que  $X/M$  es de Banach.
3. Sea  $W \subset X/M$  tal que  $Q^{-1}(W)$  es abierto, luego si  $[x_0] \in W$  entonces  $x_0 \in Q^{-1}(W)$  y existe un  $r > 0$  tal que  $x_0 + B_r(0) \subset Q^{-1}(W)$ . Veamos el siguiente lema:

**Lema 3.4.4**  $Q(B_r(0)) = B_r([0])$

**Demostración del lema** Si  $\|x\| < r$ , entonces  $\|[x]\| = \|Qx\| \leq \|x\| < r$ . Recíprocamente si  $\|[x]\| < r$  entonces existe  $y \in M$  tal que  $\|x + y\| < r$  por lo que  $[x] = Q(x + y) \in Q(B_r(0))$ . ■

Por el lema  $W = QQ^{-1}(W) \supset Q(x_0 + B_r(0)) = B_r([x_0])$  por lo que  $W$  es abierto.

4. Si  $U \subset X$  es abierto entonces  $Q^{-1}(Q(U)) = U + M = \bigcup_{m \in M} U + y$  que es una unión de abiertos, por lo que  $Q^{-1}(Q(U))$  es abierto; por el punto anterior  $Q(U)$  es abierto. ■

**Proposición 3.4.5** Si  $X$  es normado,  $M \subseteq X$  es un subespacio cerrado y  $N \subseteq X$  es de dimensión finita entonces  $M + N$  es un subespacio cerrado.

**Demostración** Consideremos  $Q : X \rightarrow X/M$ , como  $\dim Q(N) \leq \dim N < \infty$  entonces  $Q(N)$  es cerrado y como  $Q$  es continua entonces  $Q^{-1}(Q(N)) = N + M$  es cerrado. ■

## 4. Teorema de Hahn-Banach

### 4.1. Funcionales Lineales

**Definición** Sea  $X$  un  $\mathbb{F}$  espacio vectorial, un *hiperplano* en  $X$  es una variedad lineal  $M$  tal que  $\dim X/M = 1$ .

**Proposición 4.1.1** Una variedad lineal es un hiperplano si y sólo si existe  $f \neq 0 \in X'$  tal que  $M = \ker f$

**Demostración** Si  $f \in X'$  es no nulo entonces  $f$  induce  $\bar{f} : X/\ker f \rightarrow \mathbb{F}$  isomorfismo por lo que  $\ker f$  es un hiperplano.

Recíprocamente, si  $M$  es un hiperplano entonces existe  $T : X/M \rightarrow \mathbb{F}$  un isomorfismo; luego si consideramos  $f = Q \circ T$  cumple que  $f \in X'$  y  $M = \ker f$ . ■

**Proposición 4.1.2** Sean  $f, g \in X'$ , luego  $\ker f = \ker g$  si y sólo si  $g = \alpha f$  con  $\alpha \in \mathbb{F}$

**Demostración** Sea  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = 1$ , luego  $g(x_0) = \alpha \neq 0$  y entonces  $x - f(x)x_0 \in \ker f = \ker g$ ; por lo tanto  $g(x) = \alpha f(x)$ . ■

**Proposición 4.1.3** Si  $X$  es un espacio normado y  $M$  es un hiperplano entonces  $M$  es denso o cerrado.

**Demostración** Sabemos que  $\overline{M}$  es una variedad lineal y vale que  $M \subset \overline{M}$  por lo que  $\dim X / \overline{M} \leq \dim X / M = 1$ . ■

**Teorema 4.1.4** Si  $X$  es normado y  $f \in X'$  entonces  $f$  es acotada si y sólo si  $\ker f$  es cerrado.

**Demostración** Sea  $M = \ker f$  cerrado, entonces por 3.4.3  $Q$  es continua y sea  $T : X / \ker f \rightarrow \mathbb{F}$  un isomorfismo entonces  $T$  es continua pues  $\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \|Te_i\| \leq C \|x\|_\infty \underbrace{\leq}_{3,2,1} D \|x\|$ . Luego  $g = T \circ Q \in X^*$  y  $\ker g = \ker f$ , por 4.1.2 vale que  $f = \alpha g \in X^*$ . ■

**Proposición 4.1.5** Si  $X$  es normado de dimensión finita e  $Y$  es normado, luego si  $T : X \rightarrow Y$  es lineal entonces es continua.

**Demostración** Ver arriba. ■

## 4.2. El Teorema de Hahn-Banach

**Definición** Sea  $X$  un espacio vectorial, un *funcional sublineal* es una  $q : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1. Dados  $x, y \in X$  vale  $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$
2. Dado  $x \in X$  vale  $q(\alpha x) = \alpha q(x)$  para todo  $\alpha \geq 0$

**Proposición 4.2.1** Sea  $X$  un  $\mathbb{C}$  espacio vectorial, entonces:

1. Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es un  $\mathbb{R}$  funcional lineal, entonces  $\tilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$  es un  $\mathbb{C}$  funcional lineal.
2. Si  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  es un  $\mathbb{C}$  funcional lineal y  $f = \Re g$ , entonces  $g = \tilde{f}$ .
3. Si  $p$  es una seminorma entonces  $|f| \leq p \iff |\tilde{f}| \leq p$
4. Si  $X$  es normado entonces  $\|f\| = \|\tilde{f}\|$

**Demostración** 1. Es claro que  $\tilde{f}$  es  $\mathbb{R}$  lineal y además notemos que  $\tilde{f}(ix) = f(ix) - if(-x) = if(x) + f(ix) = i(f(x) - if(ix)) = i\tilde{f}(x)$ ; por lo tanto  $\tilde{f}$  es  $\mathbb{C}$  lineal.

2. Como  $g$  es  $\mathbb{C}$  lineal entonces  $g(ix) = ig(x)$  y luego  $\Im g(ix) = \Im ig(x) = \Re g = f(x)$  por lo que  $-f(ix) = \Im g(x)$  y concluimos que  $g = \tilde{f}$ .

3. Si  $|f| \leq p$  luego como  $\tilde{f} = e^{i\theta} |f|$  entonces  $|\tilde{f}| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \Re \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = f(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}| p(x)$ .

Recíprocamente si  $|\tilde{f}| \leq p$  entonces  $\pm f(x) = \Re f(\pm x) \leq |\tilde{f}(\pm x)| \leq p$  por lo que  $|f| \leq p$ .

4. Como  $\|f\|$  es una seminorma, entonces  $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ . ■

**Lema 4.2.2** Sea  $X$  un  $\mathbb{R}$  espacio vectorial y sea  $q$  un funcional sublineal en  $X$ . Si  $M \subseteq X$  es un hiperplano y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional tal que  $f \leq q$  para todo  $x \in M$  entonces existe  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  una extensión tal que  $F \leq q$ .

**Demostración** Sea  $x_0 \in X \setminus M$  por lo que  $X = M \oplus \langle x_0 \rangle$ , asumamos que existe tal extensión  $F$  y notemos  $\alpha_0 = F(x_0)$ . Si  $t > 0$  y  $y_1 \in M$  entonces  $F(tx_0 + y_1) = t\alpha_0 + f(y_1) \leq q(tx_0 + y_1)$  por lo que  $\alpha_0 \leq q(x_0 + \frac{y_1}{t}) - f(\frac{y_1}{t})$  para todo  $y_1 \in M$  que se reduce a ( $M$  variedad):

$$\alpha_0 \leq q(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad \forall y_1 \in M$$

Además si  $t \geq 0$ ,  $y_2 \in M$  entonces  $F(-tx_0 + y_2) = -t\alpha_0 + f(y_2) \leq q(-tx_0 + y_2)$  y concluimos:

$$q(-x_0 + y_2) + f(y_2) \leq \alpha_0 \leq q(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad \forall y_1, y_2 \in M \quad (8)$$

Y recíprocamente si  $\alpha_0$  cumple 8 entonces volviendo se cumple lo necesitado para  $F$ . Reordenando necesitamos probar que  $f(y_1 + y_2) \leq q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2)$ ; pero:

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2) &\leq q(y_1 + y_2) = q(x_0 + y_1 - x_0 + y_2) \\ &\leq q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2) \end{aligned}$$

Luego, elegimos  $\alpha_0$  tal que  $\sup_{y_2 \in M} \{f(y_2) - q(-x_0 + y_2)\} \leq \alpha_0 \leq \inf_{y_1 \in M} \{q(x_0 + y_1) - f(y_1)\}$  y definimos  $F(tx_0 + y) := t\alpha_0 + f(y)$  y  $F$  es una extensión de  $f$  tal que  $F \leq q$ . ■

**Teorema 4.2.3 (Teorema de Hanh-Banach (Versión real))** Sea  $X$  un  $\mathbb{R}$  espacio vectorial y sea  $q$  un funcional sublineal en  $X$ . Si  $M \subseteq X$  es un subespacio y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional tal que  $f \leq q$  para todo  $x \in M$  entonces existe  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  una extensión tal que  $F \leq q$ .

**Demostración** Sea  $\mathcal{S} = \{(M_1, f_1) \mid M_1 \supseteq M, M_1 \text{ variedad}, f_1 \in M'_1, f_1|_M = f, f_1 \leq q|_{M_1}\}$  y lo dotamos del orden dado por:

$$(M_1, f_1) \leq_S (M_2, f_2) \iff M_1 \subseteq M_2, f_2|_{M_1} = f_1$$

Luego  $(\mathcal{S}, \leq_S)$  es un poset. Sea  $\mathcal{C} = \{(M_i, f_i)\}_{i \in I}$  una cadena en  $\mathcal{S}$  y sea  $N = \bigcup_{i \in I} M_i$ , luego  $N$  es variedad y definimos  $F : N \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $F(x) = f_i(x)$  si  $x \in M_i$ .

Si  $x \in M_i, M_j$  entonces como  $\mathcal{C}$  es una cadena  $M_i \subseteq M_j$  y  $F(x) = f_j(x) = f_i(x)$  pues  $f_j|_{M_i} = f_i$  por lo que  $F$  está bien definida. Con una cuenta análoga se ve que  $F$  es lineal y que  $F \leq q$  por lo que  $(N, F) \in \mathcal{S}$  es una cota superior para  $\mathcal{C}$ .

Por 1.1.1 existe  $(Y, F)$  un elemento maximal y por 4.2.2  $Y = X$ . ■

**Teorema 4.2.4 (Teorema de Hanh-Banach)** Sea  $X$  un espacio vectorial (real o complejo) y sea  $p$  una seminorma en  $X$ . Si  $M \subseteq X$  es un subespacio y  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  es un funcional tal que  $|f| \leq p$  para todo  $x \in M$  entonces existe  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  una extensión tal que  $|F| \leq p$ .

**Demostración** Por 4.2.1(2) si notamos  $f_1 = \Re f$  entonces  $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$  y además de la cuenta de la demostración de la vuelta de 4.2.1(3)  $|f_1| \leq p$  para todo  $x \in M$ , luego por 4.2.3 existe  $F_1 \in X'$  extensión de  $f_1$  tal que  $|F_1| \leq p$  por la misma cuenta que antes en 4.2.1(3).

Sea  $F = F_1$  y por 4.2.1(3) vale que  $|F| \leq p$ . ■

### 4.3. Corolarios de Hanh-Banach

**Corolario 4.3.1** Si  $X$  es normado,  $M$  es subespacio y  $f \in M^*$  entonces existe  $F \in X^*$  tal que  $F|_M = f$  y  $\|F\| = \|f\|$

**Demostración** Sea  $p(x) = \|f\| \|x\|$ , luego  $|f(x)| \leq p$  y por 4.2.4 existe  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  extensión tal que  $|F(x)| \leq p = \|f\| \|x\|$  por lo que  $\|F\| \leq \|f\|$ ; finalmente  $\|f\| = \sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} |F(x)| \leq \|F\|$  entonces

$$\|f\| = \|F\|. \quad \blacksquare$$

**Corolario 4.3.2** Si  $X$  es normado y  $\{x_1, \dots, x_d\}$  es un conjunto linealmente independiente y  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{F}$  entonces existe  $f \in X^*$  tal que  $f(x_i) = \alpha_i$  para todo  $1 \leq i \leq d$ .

**Demostración** Sea  $M = \langle x_1, \dots, x_d \rangle$  y sea  $g(\sum_{i=1}^d \beta_i x_i) = \sum_{i=1}^d \beta_i \alpha_i \in M^*$  por 4.1.5, sea  $f$  la extensión dada por 4.3.1. ■

**Corolario 4.3.3** Si  $X$  es normado y  $x \in X$  entonces:

$$\|x\| = \max \{ |f(x)|, f \in X^*, \|f\| \leq 1 \} \quad (9)$$

**Demostración** Sea  $f \in X^*$  tal que  $\|f\| \leq 1$ , entonces  $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$  por lo que  $\sup \{ |f(x)|, f \in X^*, \|f\| \leq 1 \} \leq \|x\|$ .

Sea ahora  $M = \langle x \rangle$  y definamos  $g \in M^*$  dado por  $g(\beta x) = \beta \|x\|$  que es continua por 4.1.5 y  $\|g\| = 1$ . Por 4.3.1 existe  $f \in X^*$  tal que  $\|f\| = 1$  y  $f(x) = g(x) = \|x\|$ . ■

**Corolario 4.3.4** Si  $X$  es normado,  $M \subseteq X$  es un subespacio cerrado,  $x_0 \in X \setminus M$  y  $d = \text{dist}(x_0, M)$  entonces existe  $f \in X^*$  tal que  $M \subset \ker f$ ,  $f(x_0) = 1$  y  $\|f\| = \frac{1}{d}$ .

**Demostración** Sea  $Q : X \rightarrow X/M$  la proyección al cociente, como  $\|[x_0]\| = d$  entonces por 4.3.3 existe  $g \in (X/M)^*$  tal que  $g([x_0]) = d$  y  $\|g\| = 1$ . Luego si consideramos  $f = d^{-1} \circ g \circ Q : X \rightarrow \mathbb{F}$  cumple que  $f \in X^*$ ,  $f(x_0) = 1$  y  $M \subseteq \ker f$ ; además  $|f(x)| = d^{-1} |g(Q(x))| \leq d^{-1} \|g\| \|Q\| \|x\|$  por lo que  $\|f\| \leq d^{-1}$ .

Por otro lado, como  $\|g\| = 1$  existe  $[x_n] \subset B_1([0]) \subseteq X/M$  tal que  $|g([x_n])| \rightarrow 1$ , sea  $y_n \in Q^{-1}[x_n]$  que cumple que  $\|x_n + y_n\| < 1$ , entonces  $|f(x_n + y_n)| = d^{-1} |g([x_n])| \rightarrow d^{-1}$  por lo que  $\|f\| = d^{-1}$ . ■

**Corolario 4.3.5** Si  $X$  es normado y  $M$  es un subespacio, entonces:

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f \quad (10)$$

**Demostración** Si  $f \in X^*$ ,  $x \in \overline{M}$  y sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  con  $x_n \rightarrow x$  tal que  $f(x_n) = 0$ , entonces como  $f$  es continua  $0 = f(x_n) \rightarrow f(x) = 0$  por lo que  $x \in \ker f$ .

Recíprocamente si  $x_0 \notin \overline{M}$  entonces por 4.3.4 existe  $f \in X^*$  tal que  $M \subset \ker f \not\ni x_0$  por lo que  $x_0 \notin \bigcap_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f$ . ■

**Corolario 4.3.6** Si  $X$  es normado y  $M$  es subespacio, entonces  $M$  es denso si y sólo si dado  $f \in X^*$  tal que  $M \subseteq \ker f$  implique que  $f = 0$ .

**Demostración** Si  $\overline{M} = X$  dado  $x \in X$  existe  $m_n \in M$  tal que  $m_n \rightarrow x$  por lo que  $0 = f(m_n) \rightarrow f(x) = 0$  por lo que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in X$ .

Recíprocamente, si  $\bigcap_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f = \ker 0 = X$  entonces por 4.3.5 vale que  $X = \overline{M}$ . ■

## 4.4. Separabilidad y Reflexividad

**Teorema 4.4.1** Sea  $X$  normado tal que  $X^*$  es separable, entonces  $X$  es separable

**Demostración** Como  $X^*$  es separable entonces  $B = \partial B_1[0]$  lo es, sea  $D = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un conjunto denso en  $B$ . Sea  $0 < \epsilon < 1$ , como  $\|f_n\| = 1$  entonces existe  $x_n$  tal que  $\|x_n\| = 1$  y  $|f(x_n)| \geq \epsilon$  y sea  $M = \overline{\langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle}$ .

Sea  $x_0 \in X \setminus M$ , luego por 4.3.6 existe  $f \in X^*$  tal que  $f(x_0) \neq 0$  y  $M \subseteq \ker f$ . Luego  $\epsilon \leq |f_n(x_n)| =$

$$\left| f_n(x_n) - \underbrace{f(x_n)}_{x_n \in M \subseteq \ker f} \right| = |(f - f_n)(x_n)| \leq \|x_n\| \|f - f_n\| = \|f - f_n\|, \text{ por lo que } \|f - f_n\| \geq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}; \text{ como } D \text{ era denso concluimos que } X = M.$$



Finalmente si  $F = \langle \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{Q}}$  con las combinaciones lineales con escalares racionales de  $M$ , entonces  $\overline{F} = M = X$  por lo que  $X$  es separable. ■

**Teorema 4.4.2** Sea  $X$  normado,  $S$  subespacio y  $S^\circ = \{f \in X^* / S \subset \ker f\}$ ; luego  $S^\circ$  es un subespacio cerrado y  $X^*/S^\circ \simeq S^*$ .

**Demostración** Sea  $s \in S$  y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S^\circ$  tal que  $f_n \rightarrow f$ , luego  $|f(s)| = \left| (f - f_n)(s) + \underbrace{f_n(s)}_{f_n \in S^\circ} \right| \leq$

$\|f - f_n\| \|s\| \rightarrow 0$  por lo que  $f \in S^\circ$  y  $S^\circ$  es cerrado.

Sea entonces  $F: S^* \rightarrow X^*/S^\circ$  dada por  $F(f) = [\hat{f}]$  donde  $\hat{f}$  es la de 4.3.1,  $F$  esta bien definida pues si  $g$  es otra extensión continua entonces  $[g] = [\hat{f}]$  pues  $g|_S = \hat{f}|_S = f$ .

Es claro que  $F$  es lineal e inyectiva, si  $h \in X^*/S^\circ$  entonces  $F(f) = h$  si y sólo si  $[\hat{f}] = h = [\hat{h}]$ , luego si  $f = \hat{h}|_S$  entonces  $F(f) = h$  por lo que  $F$  es sobreyectiva.

Finalmente, si  $f \in S^*$  entonces  $\|F(f)\| = \left\| [\hat{f}] \right\| = \text{dist}(\hat{f}, S^\circ) \leq \left\| \hat{f} \right\| \underbrace{=}_{4.3.1} \|f\|$ ; por lo que  $\|F\| \leq 1$ ;

recíprocamente si  $f \in S^*$  y  $g \in S^\circ$  entonces  $\|f\| = \|f + g|_S\| \leq \left\| \hat{f} + g \right\|$ , luego  $\|f\| \leq \inf_{g \in S^\circ} \left\| \hat{f} + g \right\| = \left\| [\hat{f}] \right\| = \|F(f)\|$ . Concluimos que  $F$  es un isomorfismo. ■