Álgebra 3 - 2° cuatrimestre 2017

Práctica 2

Nota: El polinomio minimal del elemento x sobre el cuerpo K se nota aquí $f(x,K)$, y ξ_n nota una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

1. Sea E/K una extensión, y sea $x \in E$ algebraico sobre K. Dada una subextensión F/K de E/K, probar que $f(x,F)$ divide a $f(x,K)$. Dar ejemplos con $f(x,F) = f(x,K)$ y con $f(x,F) \neq f(x,K)$.

   Demostración Por definición como x es algebraico sobre K entonces existe $f \in K[X]$ tal que $f(x) = 0$, luego como $K \subset F$ entnces $f \in F[X]$ y x es algebraico sobre F. Sea $g = f(x,K)$, luego por lo dicho $g \in F[X]$ y $g(x) = 0$, por definición de polinomio minimal, $f(x,F)|f(x,K) = g$.

   Sean $K = \mathbb{Q}, F = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ y $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$, luego $f(\sqrt{2},\mathbb{Q}) = x^2 - 2$ como vimos en la teórica y veamos que también es el minimal sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Para esto notemos que $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}],\mathbb{Q}[\sqrt{3}]] > 1$ pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ y como $g = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}][X]$ y $g(\sqrt{2}) = 0$ entonces $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}],\mathbb{Q}[\sqrt{3}]] = 2$. Como g es mónico y de grado de la extension que anula a $\sqrt{2}$ por definición $g = f(\sqrt{2},\mathbb{Q}[\sqrt{3}])$.

   Por otro lado, $f(\sqrt{3},\mathbb{Q}) = x^2 - 3$ pero $f(\sqrt{3},\mathbb{Q}[\sqrt{3}]) = x - \sqrt{3}$. ∎

2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

   a) $f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q})$
   b) $f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$
   c) $f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$
   d) $f(i,\mathbb{Q})$
   e) $f(i,\mathbb{Q}[i])$
   f) $f(w,\mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C}$

   Demostración a) Notemos que $f = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible por Einsenstein, mónico y $f(\sqrt[4]{2}) = 0$, por ende $f = f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$

   b) Propongamos $f = x^2 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}][X]$ que es mónico y anula a $\sqrt[4]{2}$, por lo que nos queda ver que es irreducible.

   Vía 1: Como sabemos del punto anterior que $[Q[\sqrt[4]{2}],\mathbb{Q}] = 4$ y que $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}],\mathbb{Q}] = 2$, luego $[\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}],\mathbb{Q}[\sqrt{2}]] = 2$ por multiplicatividad en torres. Pero entonces $gf(f) = [\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}],\mathbb{Q}[\sqrt{2}]]$ con lo que f al ser mónico y anular a $\sqrt[4]{2}$ es $f(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ y por ende es irreducible.

   Vía 2: Las raíces de f son $\pm\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, por lo tanto f es irreducible.

   c) Proponemos $f = x - \sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}][X]$ pues trivialmente es mónico, irreducible y $f(\sqrt[4]{2}) = 0$.

   d) Proponemos $f = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ pues es mónico, $f(i) = 0$ y por Einsenstein es irreducible.

   e) Proponemos $f = x - i \in \mathbb{Q}[i][X]$ pues trivialmente es mónico, irreducible y $f(i) = 0$.

   f) Supongamos que $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, luego como $w = a + bi; a,b \in \mathbb{R}$ entonces proponemos $f = (x-a)^2 + b^2$ que es mónico, $f(w) = 0$ y es irreducible pues $[\mathbb{C},\mathbb{R}] = 2 = gf(f)$. ∎

3. Calcular:

   a) $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i] : \mathbb{Q}]$
   b) $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$
   c) $[\mathbb{Q}[\sqrt{2-\sqrt{3}}] : \mathbb{Q}]$

   Demostración a) Propongamos la torre $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subsetneq \mathbb{Q}[i,\sqrt{2}]$, luego sabemos que $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}],\mathbb{Q}] = 2$ pues $f(\sqrt{2},\mathbb{Q}) = x^2 - 2$ por lo visto antes. Finalmente como $f = x^2 + 1$ anula a i, y $i \notin Q[\sqrt{2}]$ entonces $f(i,\mathbb{Q}[\sqrt{2}]) = x^2 + 1$; luego $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}][\mathbb{Q}[\sqrt{2},i] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]] = 2 * 2 = 4$.

   b) Propongamos el rombo $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}],\mathbb{Q}[\sqrt[5]{7}] \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}]$, luego notemos que $f_3 = x^3 - 3, f_7 = x^5 - 7$ son Einsenstein por lo que $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}] : \mathbb{Q}] = 3, [\mathbb{Q}[\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}] = 5$. Por la multiplicatividad en torres, $3|[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}], 5|[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$ y como $(3,5) = 1$ entonces $15|[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}]$. Para finalizar recordemos que como $\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}$ son algebraicos entonces $15 \leq [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}] \leq gr(f(\sqrt[3]{3},Q)) * gr(f(\sqrt[5]{7},Q)) = 15$; concluímos que $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}] = 15$.

c) Llamemos $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \alpha$ y proponemos la torre $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \subsetneq \mathbb{Q}[\alpha]$, luego notemos que $f(\alpha, Q[\sqrt{3}]) = x^2 - (2-\sqrt{3})$ pues es mónico, anula a α y tiene grado mínimo entre los que anulan ($\alpha \notin Q[\sqrt{3}]$). Por lo tanto $[\mathbb{Q}[\sqrt{2-\sqrt{3}}] : \mathbb{Q}] = 4$. ∎

4. a) Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$. Deducir que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.
   b) Hallar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}]$.

Demostración a) Por lo mismo que hicimos el punto 1 sabemos que $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}] = 4$. Llamemos $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, luego:

$$\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{3}$$
$$3 = \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2$$

Por lo que $f = x^2 - 2\sqrt{2} - 1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, es mónico y $f(\alpha) = 0$. Como $\alpha \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ entonces tenemos que $[\mathbb{Q}[\alpha], \mathbb{Q}[\sqrt{2}]] = 2$ con lo que $[\mathbb{Q}[\alpha], \mathbb{Q}] = 4 = [\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3} : \mathbb{Q}]$ y como $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ entonces $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

5. Sea K un cuerpo y sea $E = K[a]$ una extensión finita de K. Para cada $\alpha \in E$ definimos $L_\alpha : E \to E$ la K-transformación lineal dada por $L_\alpha(x) = \alpha\, x$.
   a) Probar que $f(a, K) = \chi_{L_a} = \det(xI - L_a)$.
   b) ¿Para cuáles $\alpha \in E$ vale que $f(\alpha, K) = \chi_{L_\alpha}$?

6. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si y sólo si todo anillo A, con $K \subseteq A \subseteq E$, es un cuerpo.

Demostración Supongamos que E/K es algebraica, entonces por un lado A es conmutativo pues es subanillo de E veamos que es anillo de división.

Para esto sea $\alpha \in A \setminus K$, luego como $\alpha \in E$ que es algebraico sobre K existe $p \in K[X]$ tal que $0 = p(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i$ por lo que $\alpha * \underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha^{i-1}}{-a_0}\right)}_{\in K[\alpha] \subset A} = 1$ por lo que A es cuerpo.

Recíprocamente, sea $\alpha \in E$, luego podemos tener la torre $K \subsetneq \underbrace{K[\alpha]}_{cuerpo por Hip} \subsetneq E$ con lo que existe $\beta \in K[\alpha]$ tal que $\alpha * \beta = 1$ y existe $q \in K[X]$ tal que $\beta = q(\alpha)$, por lo tanto tomemos $f = q(x)x - 1$ que prueba que α es algebraico. ∎

7. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle$. Calcular $[\mathbb{Z}[i]/\langle a \rangle : K\,]$.

Demostración Notemos que de Álgebra 2 sabemos que tenemos tres chances: $N(a) = p$ con $p = 2$ o $p \cong 1(4)$, o $N(p) = p^2$ con $p \cong 3(4)$. En el primer caso demostremos el siguiente lema:

Lema 0.1 *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $(a, b) = 1$, entonces* $\mathbb{Z}[i] \big/ (a - ib) \simeq Z \big/ (a^2 + b^2)$

Del lema Notemos que $(a : b) = 1$ entonces $(b : a^2 + b^2) = 1$ por lo tanto $b^{-1} \in Z \big/ (a^2 + b^2)$, por lo tanto:

$$Z[i] \big/ (a - ib) \simeq Z[X] \big/ (X^2 + 1, a - bX) \simeq Z[x] \big/ (a^2 + b^2, x - r_{(b)}(a)) \simeq Z \big/ (a^2 + b^2) \qquad (1)$$

Con este lema es claro que para el caso de norma prima, $\mathbb{Z}[i] \Big/ (a+ib) \simeq \mathbb{Z}[i] \Big/ (a-ib) \simeq Z \Big/ (p) \simeq K$ por lo tanto trivialmente $[\mathbb{Z}[i] \Big/ (a) : K] = 1$.

Para el último caso notemos que $a = p \in Z$ y entonces $\mathbb{Z}[i] \Big/ (a) \simeq \mathcal{F}_p[i]$ por lo que $[\mathbb{Z}[i] \Big/ (a) : K] = 2$.
$\blacksquare$

8. Probar que si E/K es una extensión finita tal que $[E : K]$ es primo, entonces no hay cuerpos intermedios entre E y K.

   Demostración Trivialmente, si existiese $K \subset F \subset E$ entonces $p = [E : K] = [E : F][F : K]$ por lo tanto o $F \simeq K$ o $E \simeq F$. $\blacksquare$

9. Sea E/K una extensión algebraica y sea $a \in E$ tal que $[K[a] : K]$ es impar. Probar que $K[a] = K[a^2]$. Mostrar que eso no vale en general si $[K[a] : K]$ es par.

   Demostración Supongamos que $K \subset K[a^2] \subsetneq K[a] \subset E$, luego $[K[a] : K] = [K[a] : K[a^2]][K[a^2] : K] = 2k+1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Notemos no obstante que $f(a, K[a^2]) = x^2 - a^2$ por lo que $[K[a^2] : K[a]] = 2$ por lo que $[K[a] : K]$ es par; por lo que concluímos que $K[a] = K[a^2]$. $\blacksquare$
   Trivialmente si $a = \sqrt[4]{2}$ entonces ya sabemos dle ejercicio 2 que $K[a] \neq K[a^2]$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}$ coprimo con 6 y sea $F/\mathbb{Q}$ una extensión finita de grado n. Probar que $[F[\sqrt[3]{2}, i] : F] = 6$.

    Demostración Veamos primero que $i, \sqrt[3]{2} \notin F$.

    Supongamos que $i \in F$, luego tenemos la torre de extensiones $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[i] \subset F$ y luego $n = 2[f : \mathbb{Q}[i]]$ con lo que $2|n$, por lo tanto $i \notin F$; de similar manera $\sqrt[3]{2} \notin F$.

    Ahora notemos que tenemos:

$$
\begin{tikzcd}
 & F[\sqrt[3]{2}] & \\
\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \arrow[ur] & & F \arrow[ul] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "3"] \arrow[ur, "n"'] &
\end{tikzcd}
$$

    Por lo tanto por un lado del ejercicio 1 tenemos que $f(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) | f(\sqrt[3]{2}, F)$ con lo que $3 \leq gr(f(\sqrt[3]{2}, F))$; y por el otro del rombo sabemos que $gr(f(\sqrt[3]{2}, F)) \leq 3$, por lo tanto $gr(f(\sqrt[3]{2}, F)) = 3$ y de eso concluímos que $[F[\sqrt[3]{2}] : F] = 3$.

    Recíprocamente tenemos que $[F[i], F] = 2$.

    Finalmente tenemos el rombo:

$$
\begin{tikzcd}
 & F[\sqrt[3]{2}, i] & \\
F[\sqrt[3]{2}] \arrow[ur] & & F[i] \arrow[ul] \\
 & F \arrow[ul, "3"] \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Y como $(2:3)=1$ concluímos que $[F[i,\sqrt[3]{2}]:F]=6$. $\blacksquare$

11. Sea E/K una extensión finita y sean L_1 y L_2 subextensiones. Probar que:

    a) Si $[L_1:K]$ y $[L_2:K]$ son coprimos, entonces $[L_1L_2:K]=[L_1:K][L_2:K]$.

    b) Si $[L_1L_2:K]=[L_1:K][L_2:K]$ entonces $L_1\cap L_2=K$. ¿Vale la recíproca?

Demostración *a*) Trivialmente de la teórica sabíamos que $[L_1L_2:K]\leq[L_1:K][L_2:K]$, pero de las torres $K\subset L_1\subset L_1L_2$ y $K\subset L_2\subset L_1L_2$ se deduce que $n,m|[L_1L_2:K]$ y como $(n:m)=1$ entonces concluímos lo pedido. $\blacksquare$

b)

12. Mostrar que el polinomio $X^5+6X^3+15X^2+3$ es irreducible en $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}][X]$.

Demostración Notemos primero que f es irreducible en $\mathbb{Q}$ por Einsenstein, luego la extension $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}[\alpha]$ tiene grado 5 para $\alpha\in\mathbb{C}$ alguna raíz. Luego tenemos el siguiente rombo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3},\alpha] & \\
\mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{2}] \arrow[ur] & & \mathbb{Q}[\alpha] \arrow[ul] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "4"] \arrow[ur, "5"'] &
\end{tikzcd}$$

Y del ejercicio anterior sabemos que $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}][\alpha]:\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]]=5$, luego como f es mónico, anula a α y tiene grado de la extensión, es el minimal y por lo tanto irreducible en $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}][X]$. $\blacksquare$

13. *a*) Sea K un cuerpo con $\mathrm{car}(K)\neq 2$. Sea E/K un extensión de grado 2. Probar que existe $a\in E$ tal que $E=K[a]$ y $a^2\in K$.

    b) Sea $f=X^2+X+1\in\mathbb{Z}_2[X]$ y sea a una raíz de f en una clausura algebraica de $\mathbb{Z}_2$. Probar que no existe $b\in\mathbb{Z}_2[a]$ tal que $f(b,\mathbb{Z}_2)=X^2+c$ para algún $c\in\mathbb{Z}_2$.

Demostración *a*) Sea $x\in E\setminus K$, luego como $[E:K]=2$ entonces $f(x,K)=x^2+bx+c$ con lo que $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ que está bien definido pues $\mathrm{car}(K)\neq 2$, luego $K[x]=K[\sqrt{b^2-4ac}]$. Sea $a=\sqrt{b^2-4ac}$, luego con lo que $a\notin K, a^2\in K$ y $[K[a]:K]=[E:K]=2$ por lo que $E=K[a]$ (ya que $K[a]\subset E$). $\blacksquare$

b) Supongamos que existe tal b, luego $b=c_1+c_2a$ con $c_2\neq 0$ de donde sacamos que $0=(c_1+c_2a)^2+c=c_1^2+c_2^2a^2+c=(c_1^2+c-c_2^2)-c_2^2a$ y luego si llamamos $g=(c_1^2+c-c_2^2)-c_2^2x$ entonces $g(a)=0$. Concluímos por definición de minimal que $f|g$ pero $gr(g)=1$; por lo tanto no existía tal b. $\blacksquare$

14. Dado $c\in\mathbb{Q}$, sea α_c una raíz del polinomio X^2+cX+c^2. Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}[\alpha_c]$ de $\mathbb{Q}$ y determinar $[\mathbb{Q}[\alpha_c]:\mathbb{Q}]$.

Demostración Cuentitas... $\blacksquare$

15. *a*) Sea $p\in\mathbb{N}$ primo. Calcular $f(\xi_p,\mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p]:\mathbb{Q}]$.

b) Calcular $f(\xi_6, \mathbb{Q})$.

Demostración Teórica... $\blacksquare$

16. *a*) Probar que $f(\xi_5 + \xi_5^4,\, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$.

    b) Deducir que $\mathbb{Q}\,[\xi_5\,]$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.

    c) Calcular $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

    a) Veamos primero que f anula, simplemente verificamos que $(\xi_5 + \xi_5^4)^2 + \xi_5 + \xi_5^4 - 1 = \xi_5^2 + 2 * \xi_5\xi_5^4 + \xi_5^8 + \xi_5 + \xi_5^4 - 1 = \xi_5^2 + 2 + \xi_5^3 + \xi_5 + \xi_5^4 - 1 = 0$. Luego f anula, es mónico y es del grado de la extensión pues $\xi_5 + \xi_5^4 \notin \mathbb{Q}$, de lo que deducimos que $f(\xi_5 + \xi_5^4,\, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$ $\blacksquare$

    b) Justamente $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\xi_5 + \xi_5^4] \subset \mathbb{Q}[\xi_5]$.

    c) ??? $\blacksquare$

17. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.

    a) Probar que $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.

    b) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el menor cuerpo que contiene a todas las raices de $f(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

    a) Supongamos que existe $g \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $gr(g) < p$ y $g|f$, como p es primo entonces $g = \prod_{j\in I}(x - \sqrt[p]{a}\xi_p^j)$ para algunos $j \in I \subsetneq \{0, ..., p-1\}$, luego $-a = \prod_{j\in I}(-\sqrt[p]{a}\xi_p^j) = \sqrt[p]{a^{\#I}} * (-1)^{\#I} * \prod_{j\in I}\xi_p^j$ por lo que $a^{\#I} \in \mathbb{Q}^p$ que no puede pasar pues p es primo. Concluímos que no existía dicho g y entonces f es el minimal. $\blacksquare$

    b) Del ejercicio notamos que $K = \mathbb{Q}[\{\sqrt[p]{a}\xi_p^l\ ,\ j \in \{1, ..., p-1\}\}] = \mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}, \xi_p]$ y para ver el orden notemos que tenemos el siguiente rombo:

$$\begin{tikzcd}
 & K & \\
\mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}] \arrow[ur] & & \mathbb{Q}[\xi_p] \arrow[ul] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "p"'] \arrow[ur, "p-1"] &
\end{tikzcd}$$

    Y por el ejercicio previo se tiene que $[K : \mathbb{Q}] = p(p-1)$. $\blacksquare$

18. Sean $K = \mathbb{C}((X))$ y $L = \mathbb{C}((X^{1/2}))$. Probar que:

    a) Si $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ entonces existe $v \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ tal que $u = v^2$.

    b) Si $f \in K[Y]$ es de grado 2, entonces f tiene sus raíces en L.

Demostración Que es esa notaci"on ???

19. Sea $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C}\ :\ x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\overline{\mathbb{Q}}$ es un cuerpo que es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ que no es finita, y que es algebraicamente cerrado.

Demostración Teórica. $\blacksquare$

20. Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio $f \in K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

Demostración Teórica. $\blacksquare$

21. Sea K un cuerpo. Sea $A = K[\, X_f \ : \ f \in K[X] \text{ irreducible} \,]$. Sea $I \subseteq A$ el ideal generado por $\{\, f(X_f) \ : \ f \in K[X] \text{ irreducible} \,\}$. Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de A que contiene a I y sea $L = A/\mathcal{M}$. Sea $E = \{x \in L \ : \ x \text{ es algebraico sobre } K\}$. Probar que E es un cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a K y que E/K es algebraica.

Demostración Ni lo entiendo lo que dice jaja

22. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}]$.

   a) Probar que $[\, E : \mathbb{Q} \,] = 2^n$.

   b) Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Probar que $\pm\lambda_1\sqrt{p_1} \pm \lambda_2\sqrt{p_2} \pm \cdots \pm \lambda_n\sqrt{p_n}$ don distintos dos a dos.

   c) Sea $\alpha = \lambda_1\sqrt{p_1} + \lambda_2\sqrt{p_2} + \cdots + \lambda_n\sqrt{p_n}$, ver que $E = \mathbb{Q}[\alpha]$

Demostración *a*) Sea la torre de extensiones $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}] \subset \cdots \subset \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_n}]$ y hagamos inducción en n el tamaño de la torre.

Para $n = 1$ es claro pues es el ejercicio previo con $a = p$ y $p = 2$.

Si $n > 1$ sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_{n-2}}]$ la torre de altura $n-2$, notemos que podemos separar la torre final en $\mathbb{Q} \subset K$ de tamaño 2 y $K \subset K[\sqrt{p_{n-1}}] \subset E$, por hipótesis inductiva $[\mathbb{Q}, K] = 2^{n-2}$ por lo que si demostramos que $[E, K] = 4$ estamos hechos.

Para esto notemos que $K[\sqrt{p_{n-1}}, K] = 2$ pues $\sqrt{p_{n-1}} \notin K$ porque los primos son distintos, por lo que debemos ver que $\sqrt{p_n} \notin K[\sqrt{p_{n-1}}]$. Supongamos que si, entonces existen $r, s \in K$ tal que $p_n = r^2 + 2rs\sqrt{p_{n-1} + s^2 p_{n-1}}$. Veamos que esto no es posible:

- Si $rs \neq 0$ entonces como $\operatorname{car}(\mathbb{Q}) \neq 2$ entonces podríamos despejar $\sqrt{p_{n-1}} = \dfrac{p_n - r^2}{2rs} \in K$ que dijímos que no se podía.
- Si $s = 0$ entonces $\sqrt{p_n} \in K$, que no es posible pues los primos son distintos
- Si $r = 0$ entonces $\sqrt{p_{n-1}p_n} = sp_{n-1} \in K$

23. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande. ¿Qué pasa si E/K es puramente trascendente?

24. *a*) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

   b) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K.

   c) Deducir que para todo cardinal infinito a existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal a.

25. Sea K un cuerpo.

   a) Sea t trascendente sobre K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $f\,(t, K(t^n))$. Deducir $[K(t) : K(t^n)]$.

   b) Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ números naturales. Calcular $[K\,(t_1, \ldots, t_n\,) : K\,(t_1^{e_1}, \ldots, t_n^{e_n}\,)\,]$.

26. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X] - K$. Probar que $[K(X) : K(f)] = \operatorname{gr}(f)$.

27. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x+y$ o $x.y$ es trascendente sobre K.

b) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x+y$ es trascendente sobre K.

c) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x.y$ es trascendente sobre K.

d) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

e) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

28. *a*) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ y que en cada caso $f\big(\mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]\big) \subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]$ (de hecho, vale la igualdad).

b) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.

1) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big] \to \mathbb{C}$ pero, en general, $f\big(\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]\big) \not\subseteq \mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d}\,\big]$.

2) Considerar $\mathbb{Q}\big[\sqrt[3]{d},\, \xi_3\big]$. ¿Qué sucede en este caso?