Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017
FINAL

Índice

1. Espacios Vectoriales

1.1. Propiedades Elementales

Definición Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un conjunto $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ se dice:

1. *Linealmente independiente* si dados $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$ implica que $\lambda_{i_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.

2. *Sistema de generadores* si dado $v \in \mathcal{X}$ entonces existen $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum\limits_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = v$.

3. *Base* si es a la vez un sistema de generadores linealmente independiente.

Ejemplo

- $X = \mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \left\{1, X, X^2, \dots\right\} = \left\{X^j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es base.

- $X = \mathcal{C}[a,b]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{e^{\alpha x}, \alpha \in [0,1]\}$ veamos que es linealmente independiente.

  Demostración Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_i \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$ para todo $x \in [a,b]$; luego si derivamos $n-1$ veces tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \ldots & e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Y como los α_i son distintos entonces la matriz de Vandermonde es inversible y el sistema admite una única solución, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. ∎

Recordemos:

Proposición 1.1.1 (Lema de Zorn) *Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que todo subconjunto no vacío $S \subseteq P$ totalmente ordenado admite una cota superior; entonces existe un elemento maximal en P.*

Proposición 1.1.2 *Si E es un espacio vectorial, entonces E admite una base.*

Demostración Consideremos $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ es li}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup_{i \in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in T$ y $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k} \ in\mathcal{F}$ tales que $\sum_k \lambda_i v_i = 0$. Como son finitos existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \in S_{k_0}$ para todo i, que al ser un conjunto linealmente independiente resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente, sea $v \in E \setminus < M >$ (el conjunto generado por combinaciones lineales de M), luego $M \cup \{v\}$ sería un conjunto li lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta base. ∎

Proposición 1.1.3 *Sea E un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases de Hamel de E. Luego $\#B_1 = \#B_2$.*

Demostración Sea $x \in \mathcal{B}_1$ y llamemos $S(x)$ al conjunto de los elementos $v \in \mathcal{B}_2$ tal que al escribir a x como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_2$ aparece v, por lo que si $x = \sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k}$ entonces $S(x) = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$.

Lema 1.1.4 $\bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x) = \mathcal{B}_2$

Demostración Del lema Si $v \in \bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x)$ luego existe $x_0 \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x_0)$ por lo que $v \in \mathcal{B}_2$ por definición de $S(x)$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{B}_2$ pero no existe $x \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x)$, entonces $v \notin < \mathcal{B}_1 > = E = < \mathcal{B}_2 >$. ∎

Por 1.1.4 tenemos que $\#\mathcal{B}_2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_1} \#S(x) \leq \#\mathbb{N}\#\mathcal{B}_1 \leq \#B_1$.

Razonando al revés obtenemos la otra desigualdad. ∎

1.2. Normas y productos internos

Definición Si E es un espacio vectorial, una norma definida en E es una aplicación $\|.\| : E \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Observación Todo espacio normado es un espacio métrico pero no viceversa.

Definición Si E es un espacio vectorial, un producto interno definido en E es una aplicación $\langle ., . \rangle : E \times E \mapsto F$ tal que:

1. $\langle ., z \rangle$ es lineal
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Observación Todo espacio con producto interno es un espacio normado pero no viceversa.

Teorema 1.2.1 (Cauchy-Schwartz) *Sea E un espacio vectorial y $\langle . \rangle$ un producto interno definido en E; luego si $x, y \in E$ se tiene que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.*

Demostración Sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $z = x - \lambda y$, luego $\langle z, z \rangle = \langle x, x \rangle + \left|\lambda^2\right| \langle y, y \rangle - 2\Re(\lambda \langle y, x \rangle) \geq 0$.
Si $\langle y, x \rangle = re^{i\theta}$ sea $\lambda = e^{-i\theta} t$ con $t \in \mathbb{R}$; luego:

$$0 \geq \langle x, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle - 2bt \equiv c - 2bt + at^2 := q(t)$$

Luego como la cuadrática dada es positiva, eso implica que $0 \leq 4b^2 - 4ac$ por lo que:

$$0 \leq b^2 - ac = |\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Si $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\|$, entonces $b^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ por lo que $b^2 - ac = 0$. Esto implica que existe t_0 tal que $q(t_0) = 0$, por lo tanto eso implica que $\left\langle x - e^{-i\theta} t_0 y, x - e^{-i\theta} t_0 y \right\rangle \equiv 0$ y por lo tanto $x = e^{-i\theta} t_0 y$. $\blacksquare$

Definición Un espacio normado que es completo respecto a la distancia inducida por la norma se llama *Espacio de Banach*

Definición Un *Espacio de Hilbert* es un espacio de Banach donde la norma proviene de un producto interno mediante $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposición 1.2.2 *Sea E un espacio con producto interno, entonces:*

- $\mathcal{R}(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$
- $\mathcal{I}(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{4} \left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 \right)$

Demostración Por un lado $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathcal{R}(\langle x,y\rangle)$ y $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathcal{R}(\langle x,y\rangle)$; por lo que restando se obtiene:

$$4\mathcal{R}(\langle x,y\rangle) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

Por el otro:

$$\begin{aligned}
\|x+iy\|^2 &= \langle x+iy, x+iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i|\,\|y\|^2 - i\,\langle x,y\rangle + i\overline{\langle x,y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - i2\mathcal{I}(\langle x,y\rangle) \\
\|x-iy\|^2 &= \langle x-iy, x-iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i|\,\|y\|^2 + i\,\langle x,y\rangle - i\overline{\langle x,y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i2\mathcal{I}(\langle x,y\rangle)
\end{aligned}$$

Por lo tanto restando ambas obtenemos:

$$4\mathcal{I}(\langle x,y\rangle) = \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2$$

■

Proposición 1.2.3 (Ley del paralelogramo) *Sea E un espacio normado real, entonces existe $\langle .,.\rangle : E\times E \to \mathbb{C}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ si y sólo si para todos $x,y\in E$ vale:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

Demostración Si $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ entonces de la demostración de 1.2.2 se da el resultado. Recíprocamente definamos:

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Luego verifiquemos que es un producto interno.

1. $\sqrt{\langle x,x\rangle} = \|x\|$
2. Como $\|x+y\| = \|y+x\|$ y $\|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\|$ concluímos que $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.
3. Dado que $\|.\|, +, -, *$ son $\|.\|$-continuas entonces $\langle .,x\rangle, \langle x,.\rangle$ es $\|.\|$-continua.
4. Sean $x,y,z\in E$ entonces:

$$\|x+y+z\|^2 = 2\,\|x+z\|^2 + 2\,\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 = \quad 2\,\|y+z\|^2 + 2\,\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2$$

Luego como $A=B$ y $A=C$ implica $A=\frac{B+C}{2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 &= \|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\,\|x-y+z\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\,\|y-x+z\|^2 \\
\|x+y-z\|^2 &= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\,\|x-y-z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\,\|y-x-z\|^2 \\
&= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\,\|-x+y+z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\,\|-y+x+z\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\langle x+y,z\rangle =&\frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2\right)\\ =&\frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2\right)+\frac{1}{4}\left(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2\right)\\ =&\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle\end{aligned}$$

5. Por el item anterior es claro por inducción que $\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle$ para todo $\lambda\in\mathbb{N}$ y como vale para $\lambda=-1$ tenemos que vale para todo $\lambda\in\mathbb{Z}$. Si $\lambda=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ entonces si llamamos $x'=\frac{x}{q}$ tenemos:

$$q\langle\lambda x,y\rangle=q\left\langle px',y\right\rangle=p\left\langle qx',y\right\rangle=p\langle x,y\rangle$$

Luego $\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle$ para todo $\lambda\in\mathbb{Q}$. Por lo tanto probamos que fijados $x,y\in E$ la función $g(t)=\frac{1}{t}\langle tx,y\rangle$ y la función constante $h(t)=\langle x,y\rangle$ cumplen que $h|_{\mathbb{Q}}=g|_{\mathbb{Q}}$ y por continuidad entonces $h\equiv g$ para todo $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; como el caso $\lambda=0$ es trivial concluímos que $\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle$. ∎

2. Espacios de Hilbert

2.1. Preliminares

Proposición 2.1.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego el producto interno es continuo.*

Demostración Sea $x_n,(y_n)$ tales que $x_n\to x, y_n\to y$, luego:

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| &=|\langle x_n-x,y_n\rangle+\langle x,y_n-y\rangle|\\ &\le|\langle x_n-x,y_n\rangle|+|\langle x,y_n-y\rangle|\\ &\le|\langle x_n-x,y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x,y\rangle|+|\langle x,y_n-y\rangle|\\ &\le\|x_n-x\|\,\|y\|+\|x\|\,\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y_n-y\|\to 0\end{aligned}$$

∎

2.2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego dados dos vectores $x,y\in E$ decimos que son *ortogonales* si $\langle x,y\rangle=0$.

A su vez decimos que son *ortonormales* si osn ortogonales y $\|x\|=\|y\|=1$

Finalmente dado un conjunto $S\subseteq E$ entonces decimos que es *ortogonal / ortonormal* si dados cualesquiera $x,y\in S$ resulta que son *ortogonales / ortonormales*

Ejemplo El conjunto $\left\{e^{inx}\ ,\ n\in\mathbb{N}\ ,\ x\in[0,2\pi]\right\}$ es ortonormal.

Teorema 2.2.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S\subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego si $x\in\langle S\rangle$ entonces existe una única escritura de x dada por:*

$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,u_i\rangle\,u_i\qquad u_i\in S$$

Demostración Como $x\in\langle S\rangle$ entonces existen únicos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tal que $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i$. Luego:

$$\langle x,u_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle u_i,u_j\rangle=\lambda_j$$

∎

Teorema 2.2.2 (Desigualdad de Bessel) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *SI $x \in E$ y $u_1, \dots, u_n \in S$ luego $\sum\limits_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$*

2. *Si $x \in E$ entonces $\{u \in S \ / \ \langle x, u \rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable*

3. *Si $x, y \in E$ entonces $\left| \sum\limits_{u \in S} \langle x, u \rangle \overline{\langle y, u \rangle} \right| \leq \|x\| \, \|y\|$*

Demostración 1. Sean $u_1, \dots, u_n \in S$ y sea $z = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle$, luego:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle z, z \rangle \\ &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle, x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \right\rangle \\ &= \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \right\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle, x \right\rangle \right) \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i \rangle\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2 \right) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i \rangle\|^2. \end{aligned}$$

2. Notemos que $S = \{u \in S \ / \ |\langle x, u \rangle| > 0\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ u \in S \ / \ |\langle x, u \rangle| \geq \frac{1}{m} \right\}}_{T_m}$.

   Ahora sean $u_1, \dots, u_n \in T$ por el item anterior sabemos que:

$$\frac{n}{m^2} \leq \sum_{1 \leq k \leq n} |\langle x, u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

   Por lo que $n \leq m^2 \|x\|^2$ y entonces $\# T_m \leq m^2 \|x\|^2 < \infty$ para todo m, por lo tanto $\# S \leq \# \mathbb{N} * \# T_m \leq \# \mathbb{N}$.

3. Sean $x, y \in E$ y $u_1, \dots, u_n \in S$, luego:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle} \right| &\leq_{\text{C-S}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i \rangle|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle y, u_i \rangle|^2} \\ &\leq_{\text{a}} \|x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.3 *Si E es un espacio vectorial con producto interno tal que E es separable, entonces todo conjunto ortonormal es a lo sumo numerable*

Demostración Sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal y sean $u \neq v \in S$, luego $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2$ y por lo tanto $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v) = \emptyset$.

Sea $D \subseteq E$ un subconjunto denso numerable, luego $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D \neq \emptyset$ para todo $u \in S$. Consideremos $f : S \to D$ dado por $f(u) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D$, luego si $f(u) = f(v)$ entonces $f(v) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v)$ y por lo tanto $u = v$. Como f es inyectiva conclúimos que S es a lo sumo numerable. ■

Teorema 2.2.4 *Sean H un espacio de Hilbert, u_n una sucesión de vectores ortonormales y c_n una sucesión de numeros complejos. Luego:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty \tag{1}$$

Más aún, $c_n = \left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n, u_n \right\rangle$

Demostración Sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$, luego como (u_n) son ortonormales dos a dos y H es completo:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{k'} c_n u_n \right\|^2 = \sum_{i=k+1}^{k'} |c_n|^2$$

Por ende:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty$$

Finalmente, notemos que $\langle S_k, u_j\rangle = c_j$ para todo $k \geq j$ y ,además si $(c_n)_i n l^2$, entonces $S_k \to \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n =: x$; por lo tanto por 2.1.1 $c_n = \langle S_k, u_n\rangle \to \langle x, u_n\rangle$. ∎

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y $M \subseteq E$, definimos *el ortogonal a* M como $M^\perp = \{x \in E \ / \ \langle x, m\rangle = 0 \ \forall m \in M\}$.

Proposición 2.2.5 *$M^\perp$ es un subespacio cerrado de E*

Demostración Si $(x_n) \subset M$ es tal que $x_n \to x$ entonces por 2.1.1 $0 = \langle m, x_n\rangle \to \langle m, x\rangle$, por lo que $x \in M$. ∎

Teorema 2.2.6 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *Si $x \in H$ entonces $x_S = \sum_{u\in S} \langle x, u\rangle u$ esta bien definido*
2. *Si $M = \langle S\rangle$ entonces $x \in M$ si y solo si $x = x_S$. Es más si $x \in H$ entonces $x - x_S \in M^\perp$.*

Demostración

1. Dado $x \in H$, de 2.2.2 sea (u_n) una numeración de $S = \{u \in S \ / \ \langle x, u\rangle = 0\}$ y sea (v_n) otra ordenación de los u_n; notemos $x_1 = \sum_n \langle x, u_n\rangle u_n$ y $x_2 = \sum_n \langle x, u_n\rangle u_n$ que por 2.2.4 y 2.2.2 están bien definidos.

   Luego:

   $$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, u_n\rangle &= \langle x_1, u_n\rangle - \langle x_2, u_n\rangle \\ \underbrace{=}_{u_n = v_{m_n} \text{ para algún } m_n} & \ \langle x, u_n\rangle - \langle x, v_{m_n}\rangle \\ &= \langle x, u_n\rangle - \langle x, u_n\rangle = 0 \end{aligned}$$

   Por ende, $\langle x_1 - x_2, u_n\rangle = \langle x_1 - x_2, v_n\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se concluye que $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = 0$ por lo que $x_1 = x_2$ y entonces x_S esta bien definido y no depende del orden de la suma.

2. Sea $x_{S_k} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i \in M$, luego como M es cerrado se tiene que $x_{S_k} \to x_S \in M$. Ahora sea $s \in S$, entonces:

   $$\langle x - x_S, v\rangle = \langle x, v\rangle - \langle x_S, v\rangle = \langle x, v\rangle - \langle x, v\rangle = 0$$

   Por lo que $x - x_S \in M^\perp$. Finalmente, si $x \in M$ entonces como $x_S \in M$ entonces $x - x_S \in M \cap M^\perp = \{0\}$, luego $x = x_S$. ∎

2.3. Conjuntos ortonormales completos

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ ortonormal, diremos que S es *completo* si $S \subseteq T$ y T es ortonormal, entonces $S = T$.

Proposición 2.3.1 *Sea S un conjunto ortonormal tal que $S^{\perp} = \{0\}$, entonces S es completo*

Demostración Sea T ortonormal y sea $v \in T \setminus S$, luego $v \in S^{\perp} = 0$ por lo que S es completo. ∎

Teorema 2.3.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, $S \subseteq E$ ortonormal y sea $M = \langle S \rangle$, entonces:*

1. *Si $M = E$ entonces S es completo*
2. *Si S es completo y E es de Hilbert entonces $M = E$*

Demostración 1. Si $x \in S^{\perp}$ entonces $x \in M^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto S es completo

2. Sea $x \in E$, luego por 2.2.6 x_S esta bien definido y $x - x_S \in M^{\perp}$, luego como S es completo $x - x_S = 0$ y por 2.2.6 se tiene que $x \in M$. ∎

Corolario 2.3.3 *Sea H de Hilbert y $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal completo, luego si $x \in H$ entonces $x = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u$.*

Demostración Como H es Hilbert y S es completo entonces por 2.3.2 tenemos que $\langle S \rangle = H$, luego por 2.2.6 si $x \in H$ entonces $x = x_S$. ∎

Teorema 2.3.4 (Identidad de Parseval) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal tal que para todo $x \in E$ vale:*

$$\|x\|^2 = \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2 \tag{2}$$

Luego S es completo. Más aún si E es Hilbert y S es completo entonces vale 2

Demostración Sea $x \in E$ tal que $x \in S^{\perp}$, luego por 2 $\|x\| = \sum_{u \in S} \left| \underbrace{\langle x, u \rangle}_{=0} \right|^2 = 0$, luego $x = 0$ y S es completo.

Si E es Hilbert y S es completo entonces por 2.3.3 y 2.2.2 vale que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n$ por lo que:

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle x, x \rangle \\
&= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n \right\rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle x, u_n \rangle} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, u_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2
\end{aligned}$$

∎

Corolario 2.3.5 *Sea H Hilbert y $m \in M = \langle S \rangle$ con $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal, luego $\|x - m\| \geq \|x - x_S\|$*

Demostración $\|x - m\|^2 = \left\| \underbrace{x - x_S}_{\in M^{\perp}} + \underbrace{x_S - m}_{\in M} \right\|^2 = \|x - x_S\|^2 + \|x_S - M\|^2 \geq \|x - x_S\|^2$ ∎

2.4. Ortogonalización de Gram Schmitt

Teorema 2.4.1 (Ortogonalización de Gram-Schmidt) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea D un conjunto linealmente independiente no vacío, luego si D es a lo sumo numerable existe $S \subseteq E$ ortonormal tal que:*

- $\#S = \#D$
- $\langle D \rangle = \langle S \rangle$

Demostración Sea $D = \{x_n\}$ y definamos:

$$\begin{array}{cccccc} y_1 = & x_1 & , & u_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|} & , & S_1 = \{u_1\} \\ y_2 = & x_2 - x_{S_1} & , & u_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|} & , & S_2 = \{u_1, u_2\} \\ \vdots & \vdots & , & \vdots & , & \vdots \\ y_n = & x_n - x_{S_{n-1}} & , & u_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|} & , & S_n = \{u_1, \dots, u_n\} \end{array}$$

Luego sea $S = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$ y es claro verificar ambas propiedades. ∎

Proposición 2.4.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno de dimensión infinita, luego si E es separable existe $S \subseteq E$ ortonormal, completo y numerable tal que $\overline{\langle S \rangle} = E$.*

Demostración Como E es separable existe $D = \{x_n\} \subseteq E$ denso numerable. Sea $n_1 = \text{mín}\,\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \neq 0\}$ y $y_1 = x_{n_1}$ e inductivamente sea $n_k = \text{mín}\,\underbrace{\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \notin \langle y_1, \dots, y_{k-1} \rangle \ , \ n_k > n_{k-1}\}}_{A_k}$ y $y_k = x_{n_k}$, luego por la buena ordenación de $\mathbb{N}$ y el hecho que D es denso y $dim(E) = \infty$ entonces $A_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por lo que n_k esta bien definido. Sea $Y = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{y_k\}$

Lema 2.4.3 *$\langle D \rangle = \langle Y \rangle$ e Y es linealmente independiente.*

Demostración (del Lema) Si $x_{n_0} \in D$ luego si $n_0 = n_k$ para algún k se concluye que $x_{n_0} \in Y$, si no entonces por Arquimedianidad $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n > n_0 \ , \ \exists k \in \mathbb{N} \ , \ n = n_k \ \} \neq \emptyset$ y sea $\hat{k} = \text{mín}\, A$; luego $x_{n_0} \in \left\langle A_{\hat{k}-1} \right\rangle \subseteq \langle Y \rangle$. Se concluye que $D \subseteq \langle Y \rangle$ y entonces $\langle D \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.

Recíprocamente sea $y \in Y$, luego por definición de y se tiene que $y = x_{n_k} \in \langle D \rangle$ para algún k y entonces $Y \subseteq \langle D \rangle$ por lo que $\langle Y \rangle = \langle D \rangle$.

Finalmente por construcción Y es linealmente independiente. ∎

Luego por 2.4.1 existe $S \subseteq E$ ortonormal tal que $\langle S \rangle = \langle Y \rangle \underbrace{=}_{2,4,3} \langle D \rangle$, y como D es denso se tiene que $\overline{\langle S \rangle} = \overline{\langle D \rangle} \supseteq \overline{D} = E$. ∎

2.5. Dimensión de un espacio de Hilbert

Proposición 2.5.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sean $S_1, S_2 \subseteq E$ conjuntos ortonormales y completos, luego $\#S_1 = \#S_2$*

Demostración Si S_1 es finito entonces $S = \{u_1, \dots, u_k\}$, sea $x \in E$ entonces $x - x_{S_1} = x - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle \, u_i \in S_1^{\perp} = \{0\}$ por lo que S_1 es generador y ortonormal; concluímos que S_1 es base y $\dim_E = k$. Análogamente $S_2 = \{v_1, \dots, v_j\}$ es base y finalmente sea $T \in End(E)$ dada por $T(u_i) = v_i$, luego T es biyectiva y $\#S_1 = \#S_2$.

Si S_1 es infinito entonces para $x \in S_1$ sea $S_2(x) = \{u \in S_2 \ / \ \langle u, x \rangle \neq 0\}$, luego por 2.2.2 sabemos que $S_2(x)$ es a lo sumo numerable.

Lema 2.5.2 $\bigcup\limits_{x\in S_1} S_2(x) = S_2$

Demostración (del Lema) Supongamos que existe $y \in S_2$ tal que $y \notin S_2(x)$ para todo $x \in S_1$, luego $y \in S_1^{\perp} = \{0\}$; concluímos que $S_2 \subseteq \bigcup\limits_{x\in S_1} S_2(x)$ pues S_2 es ortonormal.

Trivialmente se da la otra inclusión. ∎

Por lo tanto $\# S_2 \leq \#(\mathbb{N} \times S_1) = \# S_1$; análogamente $\# S_1 \leq \# S_2$ y se concluye el resultado. ∎

Definición Se define $dim(E) = \# S$ donde $S \subseteq E$ es un sistema ortonormal completo.

Definición Sean E y F dos espacios vectoriales con producto interno, decimos que son *congruentes* si existe $T \in L(E, F)$ isomorfismo tal que $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$

Definición Sea $Q \neq \emptyset$, luego definimos $l^2(Q) = \left\{ f : Q \to \mathbb{R} \ / \ \# \{q \in Q \ / \ f(q) \neq 0\} \leq \aleph_0 \ , \ \sum\limits_{q\in Q} |f(q)|^2 < \infty \right\}$.

Proposición 2.5.3 *Valen:*

1. *$l^2(Q)$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{q\in Q} f(q)\overline{g(q)}$*
2. *Sea $S = \left\{\chi_{\{q\}}\right\}_{q\in Q}$ es ortonormal y completo*
3. *Si $\# Q > \# \mathbb{N}$ entonces $l^2(Q)$ no es separable*

Proposición 2.5.4 *Todo espacio vectorial con producto interno admite un sistema ortonormal completo.*

Demostración Sea $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ ortonormal}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup\limits_{i\in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_1, v_2 \in T$, luego existe S_i tal que $v_1, v_2 \in S_i$ y como este es ortonormal resulta que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ y $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente sea $v \in M^{\perp}$, luego $M \cup \left\{\dfrac{v}{\|v\|}\right\}$ sería un conjunto ortonormal lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta completo. ∎

Teorema 2.5.5 *Sea H Hilbert tal que $\dim H = \alpha$ entonces $H \cong l^2(Q)$ con $\# Q = \alpha$*

Demostración Sea $S_\alpha = \{u_i\}_{i\in Q}$ un sistema ortonormal, completo de H que existe por 2.5.4; luego $x \in H$ entonces $x = \sum\limits_{i\in Q} \langle x, u_i\rangle u_i$, y debido a 2.3.4 y 2.2.2 $\{\langle x, u_i\rangle\}_{i\in Q} \subset l^2(Q)$. Definimos $T : H \to l^2(Q)$ dado por $T(x) = (\langle x, u_i\rangle)_{i\in Q}$ y veamos que es la indicada.

1. T es lineal

   Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, luego $T(x + \lambda y) = (\langle x + \lambda y, u_i\rangle) = (\langle x, u_i\rangle + \lambda \langle y, u_i\rangle) = T(x) + \lambda T(y)$.

2. T es monomorfismo

   Si $T(x) = (0)$ luego $\langle x, u_i\rangle = 0$ para todo $i \in Q$, luego $x \in S^{\perp} = \{0\}$ pues S es completo.

3. T es epimorfimso

   Si $(c_i) \in l^2(Q)$ luego por 2.2.4 $x = \sum\limits_{i\in Q} c_i u_i \in H$ y $T(x) = (c_i)$

4. T es isometría

   Por 2.3.4

Corolario 2.5.6 *Sea H Hilbert separable de dimensión infinita, luego H es congruente a l^2*

2.6. Proyección ortogonal

Ejemplo El sistema $\left\{ \dfrac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \ , \ t \in [0, 2\pi] \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo.

Demostración Supongamos que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $g(t) = \int_{-\pi}^{t} f(t)dt$, luego g es continua y $g' = f$ ctp por el teorema de diferenciación de Lebesgue. Notemos que:

$$g(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{i0t}dt = 0 = g(-\pi)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = \frac{g(t)e^{int}}{ni}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}}{in} = 0$$

Por lo tanto tenemos que $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = 0$ donde g es continua y $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, por Stone-Weirstrass existe $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de polinomios trigonométricos tal que $p_n \rightrightarrows g$, por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(t)e^{int} \to \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

No obstante, si $p_k \neq cte$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ $\langle p_k, e^{int} \rangle \neq 0$ para algún n, luego $p_k = cte = g(\pi) = 0$. Concluímos que $g = 0$ y entonces $f = 0$ ctp. ∎

Teorema 2.6.1 *Sea H Hilbert y K cerrado y convexo, luego si $x \in H$ entonces existe un único $k \in K$ tal que $\|x - k\| = d(x, K)$*

Demostración Sea $d_n = \|x - k_n\|$ una sucesión minimizante, luego para todo $n \geq N \in \mathbb{N}$ vale que $d + \frac{1}{N} \geq \|x - k_n\|$ por lo que por 1.2.3:

$$\|(x - k_n) - (x - k_m)\|^2 + \|(x - k_n) + (x - k_m)\|^2 = 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\|k_n - k_m\|^2 =& 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2 - \|2x - k_n - k_m\|^2 \\
=& 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2 - 4\left\| x - \underbrace{\frac{k_n - k_m}{2}}_{\in K} \right\|^2 \\
\leq& 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \\
=& \frac{4d}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{m^2} \quad \xrightarrow{n, m \to \infty} \quad 0
\end{aligned}$$

Luego (k_n) es de Cauchy y como H es completo existe $k \in K$ tal que $k_n \to K$; por 2.1.1 $d = \|x - k\|$. Si $h \in K$ tal que $\|x - h\| = d$ luego como K es convexo $\frac{k+h}{2} \in K$ por lo que:

$$d \leq \left\| x - \frac{k + h}{2} \right\| \leq \frac{\|x - k\| + \|x - h\|}{2} = d$$

Luego por 1.2.3:

$$\|k - h\|^2 = 2\|x - k\|^2 + 2\|x - h\|^2 - 4\left\| x - \frac{k - h}{2} \right\|^2 = 0$$

Por lo que $k = h$. ∎

Definición Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado de H Hilbert, luego por 2.6.1 existe un único $f_0 \in M$ tal que para todo $x \in H$ vale $\|x - f_0\| = d(x, M)$. A su vez como M es cerrado también es un espacio de Hilbert, luego por 2.5.4 existe $S \subseteq M$ tal que $M = \langle S \rangle$, finalmente por 2.2.4 vale que $f_0 = x_S$.

En resumen, dado $M \subseteq H$ subespacio cerrado y $h \in H$ existe un único elemento f_0 tal que $h - f_0 \in M^\perp$. Definimos la *proyección ortogonal sobre* M $P_M : H \to M$ dado por $P_M(h) = f_0$.

Proposición 2.6.2 *Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado en un Hilbert, sea $h \in H$ y $Ph := P_M(h)$ el único elemento tal que $h - Ph \in M^\perp$, luego:*

1. *P es lineal*
2. $\|Ph\| \leq \|h\|$
3. $P^2 = P$
4. $\ker P = M^\perp$ *y* $ranP = M$

Demostración 1. *Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{F}$ y $m \in M$; luego $\langle x + \lambda y - Px + \lambda Py, f \rangle = \langle x - Px, f \rangle + \lambda \langle y - Py, f \rangle = 0$. Por unicidad en 2.6.1 vale que $P(x + \lambda y) = Px + \lambda Py$.*

2. *Notemos que* $\|h\|^2 = \left\| \underbrace{h - Ph}_{\in M^\perp} + \underbrace{Ph}_{\in M} \right\|^2 = \|h - Ph\|^2 + \|Ph\|^2 \geq \|Ph\|^2$.

3. *Como $P|_M = Id_M$ entonces $P(Ph) = Ph$ para todo $h \in H$.*

4. *Si $Ph = 0$ entonces $h - Ph = h \in M^\perp$; recíprocamente si $h \in M^\perp$ entonces $h - 0 \in M^\perp$ por lo que $h \in \ker P$.* ∎

Corolario 2.6.3 *Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado en un Hilbert, entonces $(M^\perp)^\perp = M$*

Demostración Primero notemos que:

Lema 2.6.4 $Id - P_M = P_{M^\perp}$

Demostración del lema Sea $m \in M^\perp$ y $h \in H$, luego $\langle h - (Id - P_M)(h), m \rangle = \langle h - h + P_M(h), m \rangle = \langle P_M(h), m \rangle = 0$, por la unicidad de 2.6.1 vale que $P_{M^\perp} = Id - P_M$. ∎

Luego por 2.6.2 vale que $\left(M^\perp\right)^\perp = \ker P_{M^\perp} = \ker(Id - P_M) \underbrace{=}_{0=h-Ph \Leftrightarrow h=Ph} ran\ P = M$. ∎

Corolario 2.6.5 *Sea $A \subseteq H$ un conjunto en un Hilbert, luego $(A^\perp)^\perp = \overline{\langle A \rangle}$*

Demostración Para esto vamos a utilizar dos lemas:

Lema 2.6.6 $\langle A \rangle^\perp = A^\perp$

Demostración Por un lado si $f \in A^\perp$ luego $\left\langle f, \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle f, a_i \rangle = 0$ por lo que $f \in \langle A \rangle^\perp$.

Recíprocamente si $f \in \langle A \rangle^\perp$ y sea $a \in A$, luego $\left\langle f, \underbrace{a}_{A \subseteq \langle A \rangle} \right\rangle = 0$ por lo que $f \in A^\perp$. ∎

Lema 2.6.7 *Sea $U \subseteq H$ un conjunto en un Hilbert, entonces $U^\perp = \overline{U}^\perp$.*

Demostración Sea $h \in U^{\perp}$, luego si $u \in \overline{U}$ entonces existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $u_n \to u$. Por 2.1.1 entonces $0 = \langle h, u_n\rangle \to \langle h, u\rangle$ por lo que $h \in \overline{U}^{\perp}$.

Recíprocamente, si $h \in \overline{U}^{\perp}$ y $u \in U \subseteq \overline{U}$ entonces $\langle h, u\rangle = 0$; concluímos que $h \in U^{\perp}$. ∎

Luego por el corolario previo $\overline{\langle A\rangle} = \left(\overline{\langle A\rangle}^{\perp}\right)^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,7} \left(\langle A\rangle^{\perp}\right)^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,6} \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. ∎

Corolario 2.6.8 *Sea $M \subseteq H$ una variedad lineal en un Hilbert, luego M es denso si y sólo si $M^{\perp} = \{0\}$*

Demostración Si $\overline{M} = H$ entonces $M^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,7} = \overline{M}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

Recíprocamente de 2.6.5 sabemos que $\overline{M} = \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. ∎

2.7. Teorema de representación de Riesz

Proposición 2.7.1 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $L : H \to \mathbb{F}$ un funcional lineal, entonces son equivalentes:*

1. *L es continua*
2. *L es continua en 0*
3. *L es continua en algún punto*
4. *Existe $c > 0$ tal que:*

$$|L(h)| \leq c\,\|h\| \quad \forall h \in H \tag{3}$$

Demostración Es claro que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) y que 4) $\Longrightarrow$ 2), veamos las que faltan:

3) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que L es continua en $h_0 \in H$ y sea $h \in H$; luego si $h_n \to h$ entonces $h_n - h + h_0 \to h_0$, por lo tanto $L(h_0) = \lim L(h_n - h + h_0) = \lim L(h_n) - L(h) + L(h_0)$ y concluímos que $L(h) = \lim L(h_n)$.

2) $\Longrightarrow$ 4) Como L es continua en 0 entonces si $V = \{\alpha \in \mathbb{F} \;/\; |\alpha| < 1\}$ entonces $L^{-1}(V)$ es abierto; es decir existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $|L(h)| < 1$.

Si $h \in H$ y $\epsilon > 0$ entonces $\left\|\dfrac{\delta h}{\|h\| + \epsilon}\right\| < \delta$ por lo que:

$$1 > \left|L\left[\frac{\delta h}{\|h\| + \epsilon}\right]\right| = \frac{\delta}{\|h\| + \epsilon}\,|L(h)|$$

Por lo que si $\epsilon \to 0$:

$$|L(h)| < \frac{1}{\delta}\left(\|h\|\right) := c\,\|h\|$$

∎

Definición Decimos que $L : H \to \mathbb{F}$ es *acotado* si vale 3. De 2.7.1 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|L\| = \sup\{|L(h)| : \;\|h\| \leq 1\}$$

Proposición 2.7.2 *Si L es un funcional acotado entonces:*

$$\begin{aligned} \|L\| :=& \sup\{|L(h)| : \ \|h\| \leq 1\} \\ =& \sup\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \\ =& \sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\} \\ =& \inf\{c > 0 : \ |L(h)| \leq c\|h\| \ \ h \in H\} \end{aligned} \tag{4}$$

Es más, vale que $|L(h)| \leq \|L\|\,\|h\|$ para todo $h \in H$.

Demostración Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned} \|L\|_2 &= \sup\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \\ \|L\|_3 &= \sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\} \\ \|L\|_4 &= \inf\{c > 0 : \ |L(h)| \leq c\|h\| \ \ h \in H\} \end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como $\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \subseteq \{|L(h)| : \ \|h\| \leq 1\}$ entonces vale que $\|L\|_2 \leq \|L\|$.

  Recíprocamente, si $\|h\| \leq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{\|h\|}|L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq \|L\|_2\|h\| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \sup_{\|h\|\leq 1} |L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \|L\| \leq \|L\|_2 \end{aligned}$$

- Si $h \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{\|h\|}|L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \sup_{h\neq 0}\left\{\frac{1}{\|h\|}|L(h)|\right\} \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \|L\|_3 \leq \|L\|_2 \end{aligned}$$

  Recíprocamente notemos que $\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} = \left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ \|h\| = 1\right\} \subseteq \left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\}$ por lo tanto $\|L\|_2 \leq \|L\|_3$.

- Sea $\epsilon > 0$, luego:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\|+\epsilon}\right)\right| \leq \|L\| \\ \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq (\|h\|+\epsilon)\|L\| \\ \text{Si } \epsilon \to 0 \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq \|L\|\,\|h\| \\ \Longrightarrow \quad & \|L\|_4 \leq \|L\| \end{aligned}$$

  Recíprocamente, si $\|L(h)\| \leq c\|h\|$ entonces $\|L\| \leq c$ por lo que $\|L\| \leq \|L\|_4$. ∎

Teorema 2.7.3 (Teorema de Representación de Riesz) *Sea $L : H \to \mathbb{F}$ un funcional, entonces L es acotado si y sólo si existe un único $h_0 \in H$ tal que $L(h) = \langle h, h_0\rangle$. En ese caso $\|L\| = \|h_0\|$.*

Demostración Sea $M = \ker L$, como L es acotada entonces M es cerrado y como $L \neq 0$ (en cuyo caso $h_0 = 0$) entonces $M^\perp \neq \{0\}$. Como $H = M \oplus M^\perp$ entonces existe $f_0 \in M^\perp$ tal que $L(f_0) = 1$.

Sea $h \in H$, entonces $L(h - L(h)f_0) = 0$ por lo que $h - L(h)f_0 \in M$; de aquí concluímos:

$$\begin{array}{rcc} 0 & = & \langle h - L(h)f_0, f_0\rangle \\ \Longrightarrow \quad 0 & = & \langle h, f_0\rangle - L(h)\|f_0\|^2 \\ \Longrightarrow \quad L(h) & = & \dfrac{1}{\|f_0\|^2}\langle h, f_0\rangle \\ \Longrightarrow \quad L(h) & \underbrace{=}_{h_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|^2}} & \langle h, h_0\rangle \end{array}$$

Si h_0' es tal que $\langle h, h_0\rangle = L(h) = \langle h, h_0'\rangle$ entonces $0 = \langle h, h_0 - h_0'\rangle$ para todo $h \in H$, en particular $0 = \langle h_0 - h_0', h_0 - h_0'\rangle = \|h_0 - h_0'\|^2$ por lo que $h_0 = h_0'$.

Recíprocamente, si $L(h) = \langle h, h_0\rangle$ entonces por 1.2.1 $|L(h)| \leq \|h\|\,\|h_0\|$ por lo tanto $\|L\| \leq \|h_0\|$.

En ese caso, $L\left(\dfrac{h_0}{\|h_0\|}\right) = \dfrac{1}{\|h_0\|}\langle h_0, h_0\rangle = \|h_0\|$ por lo que $\|L\| = \|h_0\|$. ∎

3. Espacios de Banach

3.1. Operadores entre espacios normados

Proposición 3.1.1 *Sea E un espacio normado, entonces:*

1. *La suma es continua*
2. *El producto por un escalar es continuo*
3. *La norma es continua*

Demostración

1. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ entonces $\|x + y - x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$
2. Si $x_n \to x$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ entonces $\|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda|\,\|x_n - x\| \to 0$.
3. Si $x_n \to x$ entonces por definición $\|x_n - x\| \to 0$. ∎

Proposición 3.1.2 *Sea E un espacio normado y $x_0 \in E$ entonces $\overline{B_r(x_0)} = B_r[x_0]$.*

Demostración Si $x \in \overline{B_r(x_0)}$ entonces existe $\{x_n\} \subset B_r(x_0)$ tal que $x_n \to x$, como $\|x_n - x_0\| < r$ entonces por 3.1.1 se tiene que $\|x_n - x_0\| \to \|x - x_0\|$ por lo que $x \in B_r[x_0]$.

Recíprocamente si $x \notin \overline{B_r(x_0)}$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0) = \emptyset$; luego $\|x - x_0\| > \epsilon + r > r$ por lo que $x \notin B_r[x_0]$. ∎

Teorema 3.1.3 *Sea X un espacio normado, entonces X es de Banach si y sólo si vale:*

$$\textit{Si } (x_n) \textit{ cumple que } \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X \tag{5}$$

Demostración Sea $S_k = \sum_{n\leq k} x_n$, entonces si $k > k'$, $\|S_k - S_{k'}\| = \left\|\sum_{n=k'+1}^{k} x_n\right\| \leq \sum_{n=k'+1}^{k} \|x_n\| \xrightarrow{k,k'\to\infty} 0$. Luego S_k es de Cauchy y como X es Banach $S_k \to \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X$.

Recíprocamente, sea $(x_n) \subset X$ de Cauchy y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\epsilon = \frac{1}{2^k}$ y $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$ si $n, m \geq n_k$. Luego si $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ entonces $\sum\limits_k \|z_k\| < \sum\limits_k \frac{1}{2^k} < \infty$; luego por hipótesis $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} z_k$ converge, pero $S_m = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$, luego $\lim\limits_m x_{n_m} = x_{n_1} + \lim S_m \in X$; como x_n es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente entonces (x_n) es convergente. ∎

Definición Si X, Y son espacios normados un *isomorfismo topológico* es $T : X \to Y$ tal que:

- T es isomorfismo lineal
- T y T^{-1} son continuas

Proposición 3.1.4 *Seax X, Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces son equivalentes:*

1. *T es continua*
2. *T es continua en 0*
3. *T es continua en algún punto*
4. *Existe $c > 0$ tal que:*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X \quad \forall x \in X \tag{6}$$

5. *T está acotado en $B_1[0]$*
6. *T está acotado en $B_r[x_0]$ para todos $x_0 \in X$ y $r > 0$*
7. *T está acotado en $\partial B_r[x_0]$ para todos $x_0 \in X$ y $r > 0$*

Demostración Es claro que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3), que 4) $\Longrightarrow$ 2) y que 6) $\Longrightarrow$ 7), veamos las que faltan:

3) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que T es continua en $x_0 \in X$ y sea $x \in X$; luego si $x_n \to x$ entonces $x_n - x + x_0 \to x_0$, por lo tanto $T(x_0) = \lim T(x_n - x + x_0) = \lim T(x_n) - T(x) + T(x_0)$ y concluímos que $T(x) = \lim T(x_n)$.

2) $\Longrightarrow$ 4) Como T es continua en 0 entonces si $V = \{y \in Y \ / \ \|y\|_Y < 1\}$ entonces $T^{-1}(V)$ es abierto; es decir existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|_X < \delta$ implica $\|T(x)\|_Y < 1$.

Si $x \in X$ y $\epsilon > 0$ entonces $\left\| \dfrac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon} \right\|_X < \delta$ por lo que:

$$1 > \left\| T\left[\frac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon} \right] \right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X + \epsilon} \|T(x)\|_Y$$

Por lo que si $\epsilon \to 0$:

$$\|T(x)\|_Y < \frac{1}{\delta} \left(\|x\|_X\right) := c\,\|x\|_X$$

4) $\Longrightarrow$ 5) Sea $x \in B_1[0]$, luego $\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X \leq c$.

5) $\Longrightarrow$ 6) Sea $r > 0$ y $x_0 \in X$, luego si $x \in B_r[x_0]$ entonces existe $M > 0$ tal que $\left\| T\left(\dfrac{x - x_0}{r} \right) \right\|_Y \leq M$ pues $\dfrac{x - x_0}{r} \in B_1[0]$

Por lo tanto $\|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq Mr$ lo que implica que $\|T(x)\|_Y \leq rM + \|T(x_0)\|_Y := C$.

7) $\Longrightarrow$ 1) Sea $x_0 \in X$, luego por hipótesis si $\|x - x_0\|_X = 1$ entonces $\|T(x - x_0)\|_Y \leq C$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \left\| T\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_X}\right)\right\|_Y \leq C \\ \Longrightarrow \quad & \|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq C\,\|x - x_0\|_X \end{aligned}$$

Cuando $\|x - x_0\|_X < \delta = \frac{\epsilon}{C}$. ∎

Ejemplo Si $X = Y = C[a,b]$ dotados de la norma supremo entonces $T(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ es un operador lineal acotado que no es un isomorfismo topológico.

Corolario 3.1.5 *Sean X, Y normados y sea $T : X \to Y$ un isomorfismo lineal. Entonces T es isomorfismo topológico si y sólo si existen $C_1, C_2 > 0$ tal que* $C_1\|x\| \underbrace{\leq}_{\star} \|T(x)\| \underbrace{\leq}_{*} C_2\|x\|$

Demostración Si T es isomorfimso topológico entonces:

$$\begin{aligned} T \text{ continua} \quad & \Longrightarrow \quad \exists C_2 > 0 \ / \ \|T(x)\| \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in X \\ T^{-1} \text{ continua} \quad & \Longrightarrow \quad \exists D_1 > 0 \ / \ \left\|T^{-1}(y)\right\| \leq D_1\|y\| \quad \forall y \in Y \\ & \Longrightarrow \quad \|x\| \leq D_1\|T(x)\| \quad \forall x \in X \\ & \Longrightarrow \quad C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Por lo tanto vale que:

$$C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$$

Recíprocamente, por $*$ se concluye que T es acotado y por 3.1.4 es continua; asimismo de $\star$ si $x = T^{-1}(y)$ se ve que T^{-1} es continua.

3.2. Espacios vectoriales de dimensión finita

Definición Si $\|.\|_1, \|.\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X entonces decimos que son *equivalentes* si $1_X : (X, \|.\|_1) \to (X, \|.\|_2)$ es un isomorfismo topológico.

Teorema 3.2.1 *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita, entonces:*

1. *Dos normas siempre son equivalentes*
2. *X es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n = \dim X$*

Demostración 1. Sea $\|.\|$ una norma en X y veamos que $\|.\|$ y $\|.\|_\infty$ son equivalentes.

Sea $a = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$, luego $\|a\| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|\,\|e_i\| \leq \|a\|_\infty C$.

Luego sea $id : (X, \|.\|_\infty) \to (X, \|.\|)$

Sabemos que $B_1[0]$ es compacta en $(X, \|.\|_\infty)$ y por la cuenta anterior id es continua, por lo tanto $id(S) = S$ es compacta en $(X, \|.\|)$ y por ende alcanza mínimo y máximo.

Sean $C_1 = \min_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|$ y $C_2 = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|$, por lo tanto si $x \in X$ entonces:

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \leq C_2$$

2. Si $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ definimos $T(x) = (a_1, \ldots, a_n)$, luego:

$$C_1\|x\| \leq \|T(x)\|_\infty = \|x\|_\infty \leq C_2\|x\|$$

Por lo que T es isomorfismo topológico. ∎

Corolario 3.2.2 *Todo espacio vectorial de dimensión finita es Banach.*

Corolario 3.2.3 *Si X es normado de dimensión finita, entonces todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

Demostración Si $A \subseteq X$ es cerrado y acotado, entonces existe $x_0 \in X, r > 0$ tal que $A \subset B_r[x_0]$ y $B_r[x_0]$ es compacto pues $B_1[0]$ lo es. Por lo tanto A es un cerrado en un compacto. ∎

Teorema 3.2.4 *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces $B_1[0]$ no es compacta*

Demostración Veamos primero el siguiente lema:

Lema 3.2.5 (Lema de Riesz) *Sea $M \subseteq X$ un subespacio no denso en un Banach, dado $r \in (0,1)$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ pero $d(x, M) \geq r$*

Demostración del lema Sea $y \in X \setminus \overline{M}$ y notemos$R = d(y, M)$, luego si $\epsilon > 0$ existe $m_1 \in M$ tal que $\|m_1 - y\| < R + \epsilon$. Sea $x = \dfrac{y - m_1}{\|y - m_1\|}$, luego $\|x\| = 1$ y:

$$\begin{aligned} d(x, M) &= \inf_{m \in M} \|x - m\| \\ &= \inf_{m \in M} \left\| m - \frac{y}{\|y - m_1\|} + \frac{m_1}{\|y - m_1\|} \right\| \\ &= \frac{\inf_{m \in M} \|m - y\|}{\|m_1 - y\|} \\ &= \frac{R}{R + \epsilon} \nearrow 1 \end{aligned}$$

∎

Sea $x_1 \in \partial B_1[0]$, luego por 3.2.5 aplicado a $S_1 = \langle x_1 \rangle$ existe $x_2 \in \partial B_1[0]$ tal que $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$.

Inductivamente sea $x_n \in \partial B_1[0]$ tal que $d(x_n, S_{n-1}) = d(x_n, \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}) > \frac{1}{2}$. Luego por construcción $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1[0]$ es una sucesión tal que $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ para todos $n \neq m$ por lo tanto es una sucesión acotada que no admite subsucesión convergente. Concluímos que $B_1[0]$ no es compacto ∎

3.3. Espacio de Operadores entre espacios normados

Definición Dados X, Y normados decimos que $T : X \to Y$ es *acotado* si vale 6. De 3.1.4 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

Proposición 3.3.1 *Si T es un operador acotado entonces:*

$$\begin{aligned} \|T\| :&= \sup \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} \\ &= \inf \{c > 0 : \|T(x)\| \leq c \|x\| \ \ x \in X\} \end{aligned} \tag{7}$$

Es más, vale que $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ para todo $x \in X$.

Demostración Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned} \|T\|_2 &= \sup\{|T(x)|: \|x\|=1\} \\ \|T\|_3 &= \sup\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|}: x\neq 0\right\} \\ \|T\|_4 &= \text{ínf}\{c>0: |T(x)|\leq c\|x\| \ x\in X\} \end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como $\{|T(x)|: \|x\|=1\}\subseteq\{|T(x)|: \|x\|\leq 1\}$ entonces vale que $\|T\|_2\leq\|T\|$.

  Recíprocamente, si $\|x\|\leq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{1}{\|x\|}|T(x)|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\quad & |T(x)|\leq\|T\|_2\|x\|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\quad & \sup_{\|x\|\leq 1}|T(x)|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\quad & \|T\|\leq\|T\|_2 \end{aligned}$$

- Si $x\neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{1}{\|x\|}|T(x)|\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\quad & \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{1}{\|x\|}|T(x)|\right\}\leq\|T\|_2 \\ \Longrightarrow\quad & \|T\|_3\leq\|T\|_2 \end{aligned}$$

  Recíprocamente notemos que $\{|T(x)|: \|x\|=1\}=\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|}: \|x\|=1\right\}\subseteq\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|}: x\neq 0\right\}$ por lo tanto $\|T\|_2\leq\|T\|_3$.

- Sea $\epsilon>0$, luego:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|+\epsilon}\right)\right|\leq\|T\| \\ \Longrightarrow\quad & |T(x)|\leq(\|x\|+\epsilon)\|T\| \\ \text{Si } \epsilon\to 0\longrightarrow\quad & |T(x)|\leq\|T\|\|x\| \\ \longrightarrow\quad & \|T\|_4\leq\|T\| \end{aligned}$$

  Recíprocamente, si $\|T(x)\|\leq c\|x\|$ entonces $\|T\|\leq c$ por lo que $\|T\|\leq\|T\|_4$. ∎

Definición Sean X,Y normados, definimos $L(X,Y)=\{T: X\to Y\ /\ T\text{lineal y acotado}\}$

Proposición 3.3.2 *Si X,Y son normados entonces $L(X,Y)$ es normado*

Demostración Probemos al desigualdad triangular pues las demás son triviales:

Sean $T,W: X\to Y$ lineales y acotadas, entonces $\|T+W\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|(T+W)(x)\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx+Wx\|\leq\sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|+\|Wx\|\leq\sup_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\|+\sup_{\|x\|\leq 1}\|W(x)\|=\|T\|+\|W\|$. ∎

Teorema 3.3.3 *Sean X,Y normados, entonces Y es de Banach si y sólo si $L(X,Y)$ es de Banach*

Demostración Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ una sucesión de Cauchy, y sea $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todos $n, m \geq N$.

En particular dado $x \in B_1[0]$ vale que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|T_n - T_m\| < \epsilon$ por lo que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ es una sucesión de Cauchy; como Y es Banach $\lim T_n(x) \in Y$. Además si $\|x\| \geq 1$ entonces $\lim T_n(x) = \lim \|x\|\, T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \lim T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in Y$; luego definimos:

$$T(x) = \lim T_n(x) \quad \forall x \in X$$

Veamos que $T_n \to T$ y que $T \in L(X,Y)$.

- Por 3.1.1 y la linealidad de T_n vale que T es lineal
- Sea $x \in B_1[0]$ y $\epsilon > 0$, luego sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todos $n, m \geq N$; entonces $\|T(x)\| = \|T(x) - T_N(x) + T_N(x)\| \leq \|T(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\| < \epsilon + C$.
- Sea $\epsilon > 0$, luego $\epsilon > \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| \xrightarrow{m\to\infty} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T(x)\| = \|T_n - T\|$.

La vuelta la probaremos con Hanh-Banach. ∎

Definición Sea X espacio normado, luego notamos $X^\star := L(X, \mathbb{F})$ y se llama *espacio dual topológico.*

Si pensamos a X como espacio vectorial solamente también esta definido $X^{'} := \{T : X \to \mathbb{F},\ /\ T \text{ lineal}\}$ el *dual algebraico.*

3.4. Espacios cocientes

Sea X un espacio vectorial normado y $S \subseteq X$ un subespacio cerrado. Definimos la siguiente relación de equivalencia en X:

$$x \sim_S y \iff x - y \in S$$

y definimos $\|[x]\|_S := \inf\{\|t\| \ :\ x \in [t]\}$.

Proposición 3.4.1 *El espacio* $\left({}^{X}/_{S}, \|.\|_S\right)$ *es un espacio normado con la suma definida por* $[x] + [y] = [x+y], [\lambda x] = \lambda.[x]$

Demostración

- Sean $x, x' \in X$ tal que $[x] = [x']$, entonces $x - x' \in S$ por lo que $\lambda(x - x') \in S$; en conclusión $\lambda.[x] := [\lambda x] = [\lambda x'] =: \lambda.[x']$.
- Sean $x, x'y, y' \in X$ tal que $[x] = [x']$, $[y] = [y']$, luego $x - x' \in S$ y $y - y' \in S$ por lo que $(x-x') + (y-y') = (x+y) - (x'+y') \in S$; en conclusión $[x] + [y] := [x+y] = [x'+y'] =: [x'] + [y']$.
- Sean $[x] \in {}^{X}/_{S}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, luego $\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{t\in[\lambda x]} \|t\| = \inf_{t\in[x]} \|\lambda t\| = |\lambda|\, \|[x]\|$
- Sean $[x], [y] \in {}^{X}/_{S}$, luego $\|[x] + [y]\| = \|[x+y]\| = \inf_{t\in[x+y]} \|t\| \leq \inf_{t\in[x] w\in[y]} \|t + w\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$
- Si $\|[x]\| = 0$ entonces existe t_n tal que $\|t_n\| < \frac{1}{n}$ con $t_n \in [x]$, por lo tanto $x + s_n = t_n \to 0$ y entonces $s_n \to -x$. Como S es cerrado $-x \in S$ y como es subespacio $x \in S$; luego $[x] = [0]$

  Trivialmente si $x \in S$ entonces $[x] = [0]$ y entonces $\|[x]\| = 0$. ∎

Proposición 3.4.2 *Sean* $S \subseteq X$ *un subespacio cerrado en un normado, entonces:*

$$\|[x]\| = d(x, S)$$

Demostración $d(x,S) = \inf_{s\in S} \|x - s\|_X = \inf_{-s\in S} \|x + s\|_X = \inf_{t\in[x]} \|t\|_X$. ∎

Teorema 3.4.3 *Sea $M \subseteq X$ un subespacio cerrado de un espacio normado y notemos $Q : X \to {}^{X}/_{M}$ la proyección canónica, entonces:*

1. *Q es continua y $\|Q\| \leq 1$.*
2. *Si X es de Banach entonces ${}^{X}/_{M}$ lo es.*
3. *Si $W \subset {}^{X}/_{M}$ entonces W es abierto si y sólo si $Q^{-1}(W)$ es abierto.*
4. *Si $U \subset X$ es abierto entonces $Q(U) \subset {}^{X}/_{M}$ es abierto.*

Demostración Vayamos de a partes:

1. $\|Q(x)\| = \|[x]\| = d(x, M) \leq \|x\|$ pues $0 \in M$; concluímos por 3.1.4.
2. Sea $([x_n]) \subset {}^{X}/_{M}$ una sucesión tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|[x_n]\| \neq 0$ sea $\epsilon_n = \|[x_n]\|$. Luego $\|[x_n]\| + \epsilon_n = 2\|[x_n]\| > \|x_n + m_n\|$ para cierto $m_n \in M$ (Si $\|[x_n]\| = 0$ entonces $x_n \in M$ y tomamos $m_n = -x_n \in M$), como $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|m_n + x_n\| < \infty$ y por 3.1.3 $\sum_{n\in\mathbb{N}} m_n + x_n \in X$. Como $S_p = \sum_{n=1}^{p} x_n + m_n \to \sum_{n\in\mathbb{N}} m_n + x_n := v \in X$ y Q es continua entonces $\sum_{n=1}^{p} [x_n] = Q(S_p) \to Q(v) \in {}^{X}/_{M}$; concluímos por 3.1.3 que ${}^{X}/_{M}$ es de Banach.
3. Sea $W \subset {}^{X}/_{M}$ tal que $Q^{-1}(W)$ es abierto, luego si $[x_0] \in W$ entonces $x_0 \in Q^{-1}(W)$ y existe un $r > 0$ tal que $x_0 + B_r(0) \subset Q^{-1}(W)$. Veamos el siguiente lema:

   Lema 3.4.4 $Q(B_r(0)) = B_r([0])$

   Demostración del lema Si $\|x\| < r$, entonces $\|[x]\| = \|Qx\| \leq \|x\| < r$. Recíprocamente si $\|[x]\| < r$ entonces existe $y \in M$ tal que $\|x + y\| < r$ por lo que $[x] = Q(x + y) \in Q(B_r(0))$. ∎

   Por el lema $W = QQ^{-1}(W) \supset Q(x_0 + B_r(0)) = B_r([x_0])$ por lo que W es abierto.
4. Si $U \subset X$ es abierto entonces $Q^{-1}(Q(U)) = U + M = \bigcup_{m\in M} U + y$ que es una unión de abiertos, por lo que $Q^{-1}(Q(U))$ es abierto; por el punto anterior $Q(U)$ es abierto. ∎

Proposición 3.4.5 *Si X es normado, $M \subseteq X$ es un subespacio cerrado y $N \subseteq X$ es de dimensión finita entonces $M + N$ es un subespacio cerrado.*

Demostración Consideremos $Q : X \to {}^{X}/_{M}$, como $\dim Q(N) \leq \dim N < \infty$ entonces $Q(N)$ es cerrado y como Q es continua entonces $Q^{-1}(Q(N)) = N + M$ es cerrado . ∎

4. Teorema de Hahn-Banach

4.1. Funcionales Lineales

Definición Sea X un $\mathbb{F}$ espacio vectorial, un *hiperplano* en X es una variedad lineal M tal que $\dim {}^{X}/_{M}$

Proposición 4.1.1 *Una variedad lineal es un hiperplano si y sólo si existe $f \neq 0 \in X'$ tal que $M = \ker f$*

Demostración Si $f \in X'$ es no nulo entonces f induce $\bar{f} : {}^{X}/_{\ker f} \to \mathbb{F}$ isomorfismo por lo que $\ker f$ es un hiperplano.

Recíprocamente, si M es un hiperplano entonces existe $T : {}^{X}/_{M} \to \mathbb{F}$ un isomorfismo; luego si consideramos $f = Q \circ T$ cumple que $f \in X'$ y $M = \ker f$. ∎

Proposición 4.1.2 *Sean $f, g \in X'$, luego* $\ker f = \ker g$ *si y sólo si* $g = \alpha f$ *con* $\alpha \in \mathbb{F}$

Demostración Sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 1$, luego $g(x_0) = \alpha \neq 0$ y entonces $x - f(x)x_0 \in \ker f = \ker g$; por lo tanto $g(x) = \alpha f(x)$. ∎

Proposición 4.1.3 *Si X es un espacio normado y M es un hiperplano entonces M es denso o cerrado.*

Demostración Sabemos que $\overline{M}$ es una variedad lineal y vale que $M \subset \overline{M}$ por lo que $\dim {}^{X}/_{\overline{M}} \leq \dim {}^{X}/_{M} = 1$. ∎

Teorema 4.1.4 *Si X es normado y $f \in X'$ entonces f es acotada si y sólo si* $\ker f$ *es cerrado.*

Demostración Sea $M = \ker f$ cerrado, entonces por 3.4.3 Q es continua y sea $T : {}^{X}/_{\ker f} \to \mathbb{F}$ un isomorfismo entonces T es continua pues $\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \, \|Te_i\| \leq C \, \|x\|_\infty \underbrace{\leq}_{3,2,1} D \, \|x\|$. Luego $g = T \circ Q \in X^*$ y $\ker g = \ker f$, por 4.1.2 vale que $f = \alpha g \in X^*$. ∎

Proposición 4.1.5 *Si X es normado de dimensión finita e Y es normado, luego si $T : X \to Y$ es lineal entonces es continua.*

Demostración Ver arriba. ∎

4.2. El Teorema de Hanh-Banach

Definición Sea X un espacio vectorial, un *funcional sublineal* es una $q : X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Dados $x, y \in X$ vale $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$
2. Dado $x \in X$ vale $q(\alpha x) = \alpha q(x)$ para todo $\alpha \geq 0$

Proposición 4.2.1 *Sea X un $\mathbb{C}$ espacio vectorial, entonces:*

1. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$ funcional lineal, entonces $\tilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$ es un $\mathbb{C}$ funcional lineal.*
2. *Si $g : X \to \mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$ funcional lineal y $f = \Re g$, entonces $g = \tilde{f}$.*
3. *Si p es una seminorma entonces $|f| \leq p \iff \left|\tilde{f}\right| \leq p$*
4. *Si X es normado entonces $\|f\| = \left\|\tilde{f}\right\|$*

Demostración 1. Es claro que $\tilde{f}$ es $\mathbb{R}$ lineal y además notemos que $\tilde{f}(ix) = f(ix) - if(-x) = if(x) + f(ix) = i(f(x) - if(ix)) = i\tilde{f}(x)$; por lo tanto $\tilde{f}$ es $\mathbb{C}$ lineal.

2. Como g es $\mathbb{C}$ lineal entonces $g(ix) = ig(x)$ y luego $\Im g(ix) = \Im ig(x) = \Re g = f(x)$ por lo que $-f(ix) = \Im g(x)$ y concluímos que $g = \tilde{f}$.

3. Si $|f| \leq p$ luego como $\tilde{f} = e^{i\theta}\left|\tilde{f}\right|$ entonces $\left|\tilde{f}\right| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \Re\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = f(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = \left|e^{-i\theta}\right| p(x)$.

   Recíprocamente si $\left|\tilde{f}\right| \leq p$ entonces $\pm f(x) = \Re f(\tilde{\pm x}) \leq \left|\tilde{f}(\pm x)\right| \leq p$ por lo que $|f| \leq p$.

4. Como $\|f\|$ es una seminorma, entonces $\left\|\tilde{f}\right\| \leq \|f\|$. ∎

Lema 4.2.2 *Sea X un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea q un funcional sublineal en X. Si $M \subseteq X$ es un hiperplano y $f : M \to \mathbb{R}$ es un funcional tal que $f \leq q$ para todo $x \in M$ entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ una extensión tal que $F \leq q$.*

Demostración Sea $x_0 \in X \setminus M$ por lo que $X = M \oplus \langle x_0 \rangle$, asumamos que existe tal extensión F y notemos $\alpha_0 = F(x_0)$. Si $t > 0$ y $y_1 \in M$ entonces $F(tx_0 + y_1) = t\alpha_0 + f(y_1) \leq q(tx_0 + y_1)$ por lo que $\alpha_0 \leq q(x_0 + \frac{y_1}{t}) - f(\frac{y_1}{t})$ para todo $y_1 \in M$ que se reduce a (M variedad):

$$\alpha_0 \leq q(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad \forall y_1 \in M$$

Además si $t \geq 0$, $y_2 \in M$ entonces $F(-tx_0 + y_2) = -t\alpha_0 + f(y_2) \leq q(-tx_0 + y_2)$ y concluímos:

$$q(-x_0 + y_2) + f(y_2) \leq \alpha_0 \leq q(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad \forall y_1 y_2 \in M \tag{8}$$

Y recíprocamente si α_0 cumple 8 entonces volviendo se cumple lo necesitado para F. Reordenando necesitamos probar que $f(y_1 + y_2) \leq q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2)$; pero:

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2) \leq& q(y_1 + y_2) = q(x_0 + y_1 - x_0 + y_2) \\ \leq& q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2) \end{aligned}$$

Luego, elegimos α_0 tal que $\sup\limits_{y_2 \in M} \{f(y_2) - q(-x_0 + y_2)\} \leq \alpha_0 \leq \inf\limits_{y_1 \in M} \{q(x_0 + y_1) - f(y_1)\}$ y definimos $F(tx_0 + y) := t\alpha_0 + f(y)$ y F es una extensión de f tal que $F \leq q$. ∎

Teorema 4.2.3 (Teorema de Hanh-Banach (Versión real)) *Sea X un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea q un funcional sublineal en X. Si $M \subseteq X$ es un subespacio y $f : M \to \mathbb{R}$ es un funcional tal que $f \leq q$ para todo $x \in M$ entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ una extensión tal que $F \leq q$.*

Demostración Sea $\mathcal{S} = \left\{(M_1, f_1)\ ,\ M_1 \supseteq M\ ,\ M_1 \text{ variedad }\ ,\ f_1 \in M_1^{'}\ ,\ f_1|_M = f\ ,\ f_1 \leq q|_{M_1}\right\}$ y lo dotamos del orden dado por:

$$(M_1, f_1) \leq_S (M_2, f_2) \iff M_1 \subseteq M_2\ ,\ f_2|_{M_1} = f_1$$

Luego $(\mathcal{S}, \leq_S)$ es un poset. Sea $\mathcal{C} = \{(M_i, f_i)\}_{i \in I}$ una cadena en $\mathcal{S}$ y sea $N = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$, luego N es variedad y definimos $F : N \to \mathbb{R}$ dado por $F(x) = f_i(x)$ si $x \in M_i$.

Si $x \in M_i, M_j$ entonces como $\mathcal{C}$ esa cadena $M_i \subseteq M_j$ y $F(x) = f_j(x) = f_i(x)$ pues $f_j|_{M_i} = f_i$ por lo que F esta bien definida. Con una cuenta análoga se ve que F es lineal y que $F \leq q$ por lo que $(N, F) \in \mathcal{S}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$.

Por 1.1.1 existe (Y, F) un elemento maximal y por 4.2.2 $Y = X$. ∎

Teorema 4.2.4 (Teorema de Hanh-Banach) *Sea X un espacio vectorial (real o complejo) y sea p una seminorma en X. Si $M \subseteq X$ es un subespacio y $f : M \to \mathbb{C}$ es un funcional tal que $|f| \leq q$ para todo $x \in M$ entonces existe $F : X \to \mathbb{C}$ una extensión tal que $|F| \leq q$.*

Demostración Por 4.2.1(2) si notamos $f_1 = \Re f$ entonces $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$ y además de la cuenta de la demostración de la vuelta de 4.2.1(3) $|f_1| \leq p$ para todo $x \in M$, luego por 4.2.3 existe $F_1 \in X^{'}$ extensión de f_1 tal que $|F_1| \leq p$ por la misma cuenta que antes en 4.2.1(3).

Sea $F = \tilde{F_1}$ y por 4.2.1(3) vale que $|F| \leq p$. ∎

4.3. Corolarios de Hanh-Banach

Corolario 4.3.1 *Si X es normado, M es subespacio y $f \in M^*$ entonces existe $F \in X^*$ tal que $F|_M = f$ y $\|F\| = \|f\|$*

Demostración Sea $p(x) = \|f\|\,\|x\|$, luego $|f(x)| \leq p$ y por 4.2.4 existe $F : X \to \mathbb{F}$ extensión tal que $|F(x)| \leq p = \|f\|\,\|x\|$ por lo que $\|F\| \leq \|f\|$; finalmente $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup\limits_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} |F(x)| \leq \|F\|$ entonces $\|f\| = \|F\|$. ∎

Corolario 4.3.2 *Si X es normado y $\{x_1, \ldots, x_d\}$ es un conjunto linealmente independiente y $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{F}$ entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x_i) = \alpha_i$ para todo $1 \leq i \leq d$.*

Demostración Sea $M = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$ y sea $g(\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i \in M^*$ por 4.1.5, sea f la extensión dada por 4.3.1. ∎

Corolario 4.3.3 *Si X es normado y $x \in X$ entonces:*

$$\|x\| = \text{máx}\,\{|f(x)| \ \ , \ f \in X^* \ , \ \|f\| \leq 1\} \tag{9}$$

Demostración Sea $f \in X^*$ tal que $\|f\| \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| \leq \|x\|$ por lo que $\sup\{|f(x)| \ , \ f \in X^* \ , \ \|f\| \leq 1\}$ $\|x\|$.

Sea ahora $M = \langle x \rangle$ y definamos $g \in M^*$ dado por $g(\beta x) = \beta\,\|x\|$ que es continua por 4.1.5 y $\|g\| = 1$. Por 4.3.1 existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = g(x) = \|x\|$. ∎

Corolario 4.3.4 *Si X es normado, $M \subseteq X$ es un subespacio cerrado, $x_0 \in X \setminus M$ y $d = dist\,(x_0, M)$ entonces existe $f \in X^*$ tal que $M \subset \ker f$, $f(x_0) = 1$ y $\|f\| = \frac{1}{d}$*

Demostración Sea $Q : X \to {}^{X}/_{M}$ la proyección al cociente, como $\|[x_0]\| = d$ entonces por 4.3.3 existe $g \in \left({}^{X}/_{M}\right)^*$ tal que $g\,([x_0]) = d$ y $\|g\| = 1$. Luego si consideramos $f = d^{-1} \circ g \circ Q : X \to \mathbb{F}$ cumple que $f \in X^*$, $f(x_0) = 1$ y $M \subseteq \ker f$; además $|f(x)| = d^{-1}\,|g(Q(x))| \leq d^{-1}\,\|g\|\,\|Q\|\,\|x\|$ por lo que $\|f\| \leq d^{-1}$.

Por otro lado, como $\|g\| = 1$ existe $[x_n] \subset B_1([0]) \subseteq {}^{X}/_{M}$ tal que $|g([x_n])| \to 1$, sea $y_n \in Q^{-1}[x_n]$ que cumple que $\|x_n + y_n\| < 1$, entonces $|f(x_n + y_n)| = d^{-1}\,|g([x_n])| \to d^{-1}$ por lo que $\|f\| = d^{-1}$. ∎

Corolario 4.3.5 *Si X es normado y M es un subespacio, entonces:*

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f \tag{10}$$

Demostración Si $f \in X^*$, $x \in \overline{M}$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ con $x_n \to x$ tal que $f(x_n) = 0$, entonces como f es continua $0 = f(x_n) \to f(x) = 0$ por lo que $x \in \ker f$.

Recíprocamente si $x_0 \notin \overline{M}$ entonces por 4.3.4 existe $f \in X^*$ tal que $M \subset \ker f \not\ni x_0$ por lo que $x_0 \notin \bigcap_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f$. ∎

Corolario 4.3.6 *Si X es normado y M es subespacio, entonces M es denso si y sólo si dado $f \in X^*$ tal que $M \subseteq \ker f$ implique que $f = 0$.*

Demostración Si $\overline{M} = X$ dado $x \in X$ existe $m_n \subset M$ tal que $m_n \to x$ por lo que $0 = f(m_n) \to f(x) = 0$ por lo que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Recíprocamente, si $\bigcap_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f = \ker 0 = X$ entonces por 4.3.5 vale que $X = \overline{M}$. ∎

4.4. Separabilidad y Reflexividad

Teorema 4.4.1 *Sea X normado tal que X^* es separable, entonces X es separable*

Demostración Como X^* es separable entonces $B = \partial B_1[0]$ lo es, sea $D = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en B. Sea $0 < \epsilon < 1$, como $\|f_n\| = 1$ entonces existe x_n tal que $\|x_n\| = 1$ y $|f(x_n)| \geq \epsilon$ y sea $M = \overline{\langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle}$.

Sea $x_0 \in X \setminus M$, luego por 4.3.6 existe $f \in X^*$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y $M \subseteq \ker f$. Luego $\epsilon \leq |f_n(x_n)| = \left| f_n(x_n) - \underbrace{f(x_n)}_{x_n \in M \subset \ker f} \right| = |(f - f_n)(x_n)| \leq \|x_n\|\,\|f - f_n\| = \|f - f_n\|$, por lo que $\|f - f_n\| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$; como D era denso concluímos que $X = M$.

Finalmente si $F = \left\langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$ con las combinaciones lineales con escalares racionales de M, entonces $\overline{F} = M = X$ por lo que X es separable. ∎

Teorema 4.4.2 *Sea X normado, S subespacio y $S^\circ = \{f \in X^* \ / \ S \subset \ker f\}$; luego S° es un subespacio cerrado y ${X^*}/{S^\circ} \simeq S^*$.*

Demostración Sea $s \in S$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^\circ$ tal que $f_n \to f$, luego $|f(s)| = \left|(f - f_n)(s) + \underbrace{f_n(s)}_{f_n \in S^\circ}\right| \leq \|f - f_n\| \, \|s\| \to 0$ por lo que $f \in S^\circ$ y S° es cerrado.

Sea entonces $F : S^* \to {X^*}/{S^\circ}$ dada por $F(f) = [\hat{f}]$ donde $\hat{f}$ es la de 4.3.1, F esta bien definida pues si g es otra extensión continua entonces $[g] = [\hat{f}]$ pues $g|_S = \hat{f}|_S = f$.

Es claro que F es lineal e inyectiva, si $h \in {X^*}/{S^\circ}$ entonces $F(f) = h$ si y sólo si $[\hat{f}] = h = [\hat{h}]$, luego si $f = \hat{h}|_S$ entonces $F(f) = h$ por lo que F es sobreyectiva.

Finalmente, si $f \in S^*$ entonces $\|F(f)\| = \left\|[\hat{f}]\right\| = dist(\hat{f}, S^\circ) \leq \left\|\hat{f}\right\| \underbrace{=}_{4,3,1} \|f\|$; por lo que $\|F\| \leq 1$; recíprocamente si $f \in S^*$ y $g \in S^\circ$ entonces $\|f\| = \|f + g|_S\| \leq \left\|\hat{f} + g\right\|$, luego $\|f\| \leq \inf_{g \in S^\circ} \left\|\hat{f} + g\right\| = \left\|[\hat{f}]\right\| = \|F(f)\|$. Concluímos que F es un isomorfismo. ∎

Definición Sea X normado y $(X^*)^*$ su doble dual, definimos la *aplicación canónica* $p : X \to (X^*)^*$ dada por $P(x)(f) = f(x)$.

Observación Si p es la aplicación canónica luego vale que:

1. $p(x) \in (X^*)^*$ para todo $x \in X$
2. p es lineal y monomorfismo
3. $\|p\| = 1$

Demostración Si $x \in X$ luego $|p(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$ por lo que $\|p\| \leq 1$ y $p \in (X^*)^*$; es más $\|p(x)\| = \sup_{\substack{f \in (X)^* \\ \|f\|=1}} |p(x)(f)| = \sup_{\substack{f \in (X)^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \underbrace{=}_{4,3,3} \|x\|$. ∎

Definición Sea X normado, decimos que es un espacio *reflexivo* si p es sobreyectiva.

Ejemplo Todo espacio de dimensión finita es reflexivo

Demostración Como $\dim X = n$ y p es monomorfismo entonces es isomorfismo y luego en particular es sobreyectiva.

Observación Si $f, g \in (H)^*$ entonces por 2.7.3 existen $x_0, y_0 \in H$ tal que $f(z) = \langle z, x_0 \rangle, g(z) = \langle z, y_0 \rangle$. Luego el producto interno que refiere a $\|\|_{(H)^*}$ es $\langle f, g \rangle_{(H)^*} = \langle y_0, x_0 \rangle_H$

Teorema 4.4.3 *Sea H Hilbert entonces H es reflexivo.*

Demostración Ya sabemos de 2.7.3 que la aplicación $F : H \to (H)^*$ dada por $F(h)(x) = f(x) = \langle x, h \rangle$ es una isometría lineal. Sea $g \in (H^*)^*$ por lo que $g(f) = \langle f, f_0 \rangle$ para algún $f_0 \in (H)^*$, que a su vez existe $z_0 \in H$ tal que $f_0(x) = \langle x, z_0 \rangle$; luego $p(z_0)(f) = f(z_0) = \langle x, z_0 \rangle = \langle f, f_0 \rangle_{(H)^*} = g(f)$.

Proposición 4.4.4 *Si $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ es base ortonormal de H Hilbert entonces si definimos $f_{v_i}(x) = \langle x, v_i \rangle \in (H)^*$ vale que $\mathcal{F} = \{f_{v_i}\}_{i\in I}$ es base ortonormal de $(H)^*$*

Demostración Sean $f_{vi}, f_{v_j} \in \mathcal{F}$ luego $\langle f_{v_i}, f_{v_j} \rangle = \langle v_j, v_i \rangle = \delta_{i,j}$ por lo que $\mathcal{F}$ es ortonormal. Finalmente si $f \in (H)^*$ entonces existe $x \in H$ tal que $f(z) = \langle z, x \rangle$ y entonces $0 = \langle f, f_{v_i} \rangle = \langle v_i, x \rangle$ para todo $i \in I$, por la completitud de $\mathcal{B}$ concluímos que $x = 0$ por lo que $f = 0$. ∎

Corolario 4.4.5 *Si H es Hilbert entonces $H \simeq (H)^*$*

Demostración Por 2.5.5 dos veces tenemos que $H, (H)^* \simeq l^2(I)$, luego por transitividad $H \simeq (H)^*$. ∎

Teorema 4.4.6 *Sea X normado y reflexivo, entonces $(X)^*$ es reflexivo*

Demostración Sea $(p)^* : (X)^* \to ((X^*)^*)^*$, $g \in ((X^*)^*)^*$, $h \in (X^*)^*$ y definimos $f := g \circ p \in (X)^*$. Como $h \in (X^*)^*$ entonces existe $x_h \in X$ tal que $p(x_h) = h$ y luego:

- $(p)^*(f)(h) = h(f) = p(x_h)(f) = f(x_h)$
- $g(h) = g \circ p(x_h) = f(x_h)$

Luego $(p)^*(f) = g$ y concluímos que $(X)^*$ es reflexivo. ∎

Teorema 4.4.7 *Si X es reflexivo y $S \subsetneq X$ subespacio cerrado entonces S es reflexivo*

Demostración Sea $g \in (S^*)^*$ y consideremos $(x^*)^* \in (X^*)^*$ dada por $(x^*)^*(f) = g \circ T \circ \pi(f)$ donde $T : {(X)^*}/{S^\circ} \to (S)^*$ es el isomorfismo isométrico dado en 4.4.2, $\pi : (X)^* \to {(X)^*}/{S^\circ}$ la proyección al cociente dada por 3.4.3. Como X es reflexivo entonces existe $x \in X$ tal que $p(x) = (x^*)^*$, si $x \notin S$ entonces por 4.3.4 existe $f \in (X)^*$ tal que $f|_S = 0$ y $f(x) \neq 0$ por lo que $f(x) = p(x)(f) = (x^*)^*(f) = g \circ T \circ \pi(f) \underbrace{=}_{f|_S=0} 0$ y concluímos que $x \in S$.

Sea $f \in (S)^*$ y $\hat{f}$ su extensión dada por 4.3.1, entonces $g(f) = g \circ T \circ \pi(\hat{f}) = (x^*)^*(\hat{f}) = p(x)(\hat{f}) = \hat{f}(x) = f(x) = p(x)(f)$ y concluímos que $p(x) = g$ por lo que S es reflexivo. ∎

Observación l^1 no es reflexivo

Demostración Si l^1 fuese reflexivo entonces $l^1 \simeq (l^\infty)^*$ y como l^1 es separable entonces por 4.4.1 concluímos que l^∞ es separable, concluímos que l^1 no es reflexivo. ∎

4.5. Consecuencias Geométricas de Hahn-Banach

Definición Sea X un espacio vectorial real y $K \subset X$ convexo, decimos que es *absorbente* si para todo $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha x \in K$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \epsilon$

Definición Sea X un espacio vectorial real y $K \subset X$ convexo absorbente tal que $0 \in K$, definimos la *funcional de Minkowsky asociada a* K como la aplicación $p_K(x) = \inf \{\alpha > 0 \ / \ {x}/{\alpha} \in K\}$

Definición Sea X un espacio vectorial real y sea f un funcional lineal, llamaremos *hiperplano* a los conjuntos $f^{-1}(\alpha)$. Si $S \subset X$ decimos que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ *deja a un lado(estrictamente) a* S si $S \subset \{x \in X \ \ f(x) \leq \alpha\}$ $(\{x \in X \ / \ f(x) < \alpha\})$ u el análogo con los signos opuestos.

Proposición 4.5.1 *Si H es hiperplano y $K \subseteq X$ es convexo entonces H deja a un lado estrictamente a K si y sólo si $K \cap H = \emptyset$*

Demostración Sea α tal que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ y supongamos que existe $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) < \alpha$ y $f(x_2) > \alpha$, luego si consideramos $g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1 - x_2) + (1-t)f(x_2)$ por Bonzano existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $g(t_0) = \alpha$ por lo que $t_0 x_1 + (1-t_0)x_2 \in H \cap K$ pues K es convexo ∎

Proposición 4.5.2 *Si H es un hiperplano y K es convexo absorbente disjunto de H entonces existe g funcional lineal tal que:*

1. $H = g^{-1}(1)$
2. $-p_K(-x) \leq g(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in X$

Demostración Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X'$ tal que $H = f^{-1}(\alpha)$, luego si $g = \dfrac{f}{\alpha}$ entonces $x \in H$ si y sólo si $f(x) = \alpha$ si y sólo si $\dfrac{f(x)}{\alpha} = g(x) = 1$ por lo que $H = g^{-1}(x)$. Como $K \cap H = \emptyset$ entonces por 4.5 entonces $K \subset g^{-1}((-\infty, 1))$ o $K \subset g^{-1}((1,\infty))$ pero como $g(\underbrace{0}_{0\in K}) = 0$ entonces $K \subset g^{-1}((1,\infty))$.

Como K es absorbente dado $x \in X$ existe $\beta > 0$ tal que $\dfrac{x}{\beta} < 1$ por lo que $g(x) < \beta$ y concluímos que $g(x) \leq p(x)$. ∎

Proposición 4.5.3 *Sea $H \subseteq X$ un hiperplano en un espacio normado, $S \subset X$ tal que $\mathring{S} \neq \emptyset$ entonces H es cerrado.*

Demostración Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X'$ tal que $H_\alpha = f^{-1}(\alpha)$, si $H_{\alpha+1}$ no fuera cerrado entonces por 4.1.3 es denso y como $\mathring{S} \neq \emptyset$ eso implica que $S \cap H_{\alpha+1} \neq \emptyset$. Luego si $x_n \subset \ker f$ e $y \in H_{\alpha+1}$ entonces $H_{\alpha+1} \ni z \underbrace{=}_{x_n+y\in H_{\alpha+1}} \lim (x_n + y) = \lim x_n + y$ pero $f(z-y) = f(z) - f(y) = 0$ por lo que $\lim x_n \in \ker f$ y por 4.1.4 f es continua; concluímos que H es cerrado. ∎

Definición Sea $K \subset X$ un conjunto, decimos que es *balanceado* si $\alpha x \in K$ para todo $x \in K$ y $|\alpha| \leq 1$.

Proposición 4.5.4 *Si $K \subset X$ es convexo, absorbente tal que $0 \in K$ entonces p_K es sublineal. Más aún si K es balanceado entonces p_K es seminorma y $K = \{x \in X \ / \ p_K(x) < 1\}$.*

Demostración Como K es absorbente entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nK$ por lo que $p_K(x)$ está bien definido para todo $x \in X$. Como $p_K(0) = 0$ trivialmente, si $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} p_K(\alpha x) &= \inf \{t \geq 0 \ / \ \alpha x \in tV\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0 \ / \ x \in \left(\frac{t}{\alpha} V\right)\right\} \\ &= \alpha \inf \left\{ \frac{t}{\alpha} \geq 0 \ / \ x \in \left(\frac{t}{\alpha} V\right)\right\} \\ &= \alpha p_K(x) \end{aligned}$$

Por otro lado si $\alpha, \beta \geq 0$ y $a, b \in K$ entonces:

$$\alpha a + \beta b = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} a + \frac{\beta}{\alpha+\beta} b\right) \in (\alpha+\beta) K$$

Por la convexidad de K, luego si $x, y \in K$ y $p_K(x) = \alpha, p_K(y) = \beta$ y $\delta > 0$ entonces $x \in (\alpha+\delta) K, y \in (\beta + \delta) K$ pues K es absorbente. Entonces por convexidad $x + y \in (\alpha + \beta + 2\delta) K$ y si $\delta \to 0$ entonces $p_K(x+y) \leq \alpha + \beta = p_K(x) + p_K(y)$.

Supongamos ahora que K es balanceado, si $p_K(x) = \alpha < 1$ entonces para $\alpha < \beta < 1$ vale que $x \in \beta K \subset K$ por lo que $\{x \in X \ / \ p_K(x) < 1\} \subseteq K$. Recíprocamente si $x \in K$ entonces $p_K(x) \leq 1$ y como K es absorbente existe $\epsilon > 0$ tal que si $0 < t < \epsilon$ entonces $y = (1+t)x = x + tx \in K$, luego $p_K(x) = (1+t)^{-1} p_K(y) \leq (1+t)^{-1} < 1$. ∎

Teorema 4.5.5 (Hanh-Banach Geométrico) *Si X es normado, $K \subset X$ es un convexo absorbente abierto tal que $0 \in K$ y $V \subset X$ es una variedad lineal tal que $V \cap K = \emptyset$ entonces existe H hiperplano cerrado tal que $V \subset H$ y H deja a un lado estrictamente a K.*

Demostración Sea $x_0 \in V$ y $S = V - x_0$ un subespacio tal que $x_0 \notin S$, definimos $T = \langle S, x_0 \rangle$ entonces $\dim {}^{T}/_{S} = 1$ y $K \cap S$ es un convexo absorbente abierto en T tal que $V := S + x_0 \cap (K \cap S) = \emptyset$, luego por 4.5.2 existe $g \in T'$ tal que $V = g^{-1}(1)$ y $g \leq p_K$ que es sublineal por 4.5.4. Por 4.2.3 existe $f \in X'$ extensión dominada por p_K, luego si $H = f^{-1}(1)$ es un hiperplano que contiene a V y por 4.5.1 deja estrictamente a un lado a K. Finalmente como K es abierto por 4.5.3 f es continua. ∎

Teorema 4.5.6 *Si X es normado real y A, B son conjuntos disjuntos convexos con A abierto, entonces existe $f \in (X)^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f|_A < \alpha$ y $f|_B \geq \alpha$. Más aún si B es abierto entonces la separación es estricta.*

Demostración Sea $G = A - B$, entonces usemos:

Lema 4.5.7 *G es convexo, abierto y $0 \notin G$*

Demostración del lema Si $x, y \in G$ entonces $x = a_x - b_x, y = a_y - b_y$, luego $tx + (1-t)y = ta_x - tb_x + (1-t)a_y - (1-t)b_y = \left(\underbrace{ta_x + (1-t)a_y}_{\in A}\right) - \left(\underbrace{tb_x + (1-t)b_y}_{\in B}\right) = a_{tx+(1-t)y} - b_{tx+(1-t)y} \in G$.

Además $G = \bigcup\limits_{b \in B} A - b$ por lo que G es abierto. Finalmente como $A \cap B = \emptyset$ enotnces $0 \notin G$ ∎

Por 4.5.7 y 4.5.5 existe H hiperplano cerrado tal que $H \cap G = \emptyset$ y sea $f \in (X)^*$ tal que $H = f^{-1}(0)$ que existe por 4.5.2. Luego $f(G)$ es convexo y $0 \notin f(G)$, luego $f|_G > 0$ (sino lo es para $-f$), lo que implica que $f(a) > f(b)$ para todos $a \in A,\ b \in B$; sea α tal que:

$$\sup\{f(b),\ b \in B\} \leq \alpha \leq \inf\{f(a),\ a \in A\}$$

Luego α es el buscado.
Si B es abierto, notemos:

Lema 4.5.8 *Si $f \in (X)^*$ y A es abierto convexo entonces $f(A)$ es un intervalo abierto*

Demostración del lema Sea $a, b \in A$, luego $tf(a) + (1-t)f(b) = f(ta + (1-t)b) \in f(A)$ por lo tanto $f(A)$ es convexo y como los únicos convexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos, $f(A)$ es un intervalo.

Sea x_0 tal que $f(x_0) = 1$ y $x \in A$, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $x \pm \epsilon x_0 \in A$, luego $f(x \pm \epsilon x_0) = f(x) \pm \epsilon \in f(A)$, luego $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset f(A)$ y $f(A)$ es abierto. ∎

Luego por 4.5.8 $f(A), f(B)$ son intervalo abiertos por lo que α separa de manera estricta. ∎

Teorema 4.5.9 *Sea X normado y $A, B \subset X$ dos subconjuntos cerrados, convexos y disjuntos; luego si B es compacto entonces A y B se separan de manera estricta.*

Demostración Primero notemos:

Lema 4.5.10 *Si X es normado, $K \subseteq X$ es un compacto y $K \subseteq V \subseteq X$ es abierto entonces existe $U \ni 0$ un entorno tal que $K + U \subset V$*

Demostración del lema Sea $\mathcal{U}_0$ todos los entornos abiertos de 0 y supongamos que para todo $U \in \mathcal{U}_0$, $K + U \nsubseteq V$, luego para cada U existe $x_u \in K,\ y_u \in U$ tal que $x_u + y_u \in V^c$ y ordenemos $\mathcal{U}_0$ por la inclusión inversa; luego $\{x_u\}, \{y_u\}$ son redes en X, más aún $y_u \to 0$ y existe $x \in X$ tal que x es punto de acumulación de la red. Luego, x es punto de acumulación de $x_u + y_u$ y entonces $x \in \overline{V^c} = V^c$; pero $x \in K \subset V$ por lo que existe dicho $U \in \mathcal{U}_0$. ∎

Usando 4.5.10 sobre B, A^c existe U_1 entorno de 0 tal que $B + U_1 \subset A^c$ y por 4.5.4 existe p seminorma tal que $\{x \in X,\ p(x) < 1\} \subset U_1$. Sea $U = \left\{x \in X,\ p(x) < \frac{1}{2}\right\}$, notemos:

Lema 4.5.11 *$(B + U) \cap (A + U) = \emptyset$ y ambos son abiertos convexos.*

Luego por 4.5.11 y 4.5.6 se concluye que A y B se separan estrictamente.

5. Teoremas fundamentales de espacios de Banach

5.1. Teorema de la aplicación abierta

Definición Un espacio topológico X es de *primera cvategoría* si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$. Decimos que es de *segunda categoria* si no es de primera categoría.

Teorema 5.1.1 *Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$ tal que $\operatorname{ran} T$ es de segunda categoría. Entonces si $U \ni 0$ es un entorno abierto en X luego existe $V \ni 0$ entorno abierto en Y tal que $V \subseteq \overline{T(U)}$.*

Demostración Sea $U \ni 0$ un entorno abierto en X y $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha(0) \subseteq U$, finalmente sea $W = B_{\frac{\alpha}{2}}(0)$. Notemos:

Lema 5.1.2 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nW) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(W) = \operatorname{ran} T$

Demostración del lema Si $y \in \operatorname{ran} T$ entonces existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$; por arquimedianidad esta bien definido $n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{\|x\|}{n} < \frac{\alpha}{2}\right\}$ por lo que $x \in n_0 W$ y se concluye que $y \in T(n_0 W)$.

Trivialmente $T(nW) \subset \operatorname{ran} T$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nW) \subset \operatorname{ran} T$. ∎

Como $\operatorname{ran} T$ es de segunda categoría existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{\overline{n_0 T(W)}} \neq \emptyset$; como además $f(x) = \frac{x}{n_0} \in \operatorname{Hom}(Y)$ entonces concluímos que $\overset{\circ}{\overline{T(W)}} \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $z_0 \in Y$ y $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z_0) \cap T(W) \neq \emptyset$, sea $T(\underbrace{x_0}_{\in W}) = y_0 \in B_\delta(z_0) \cap T(W)$ y $r > 0$ tal que $B_r(y_0) \subseteq B_\delta(z_0) \subseteq \overline{T(W)}$.

Como $B_r(y_0) \subseteq \overline{T(W)}$ entonces $B_r(0) \subseteq \overline{T(W)} - y_0 = \overline{T(W) - y_0} = \overline{T(W - x_0)} \subseteq \overline{T(B_\alpha(0))} \subseteq \overline{T(U)}$.
∎

Teorema 5.1.3 (Teorema de la aplicación abierta) *Sean X, Y normados con X Banach y sea $T \in L(X,Y)$ tal que $\operatorname{ran} T$ es de segunda categoría, entonces:*

1. *Si $\alpha > 0$ entonces existe $\beta > 0$ tal que $B_\beta[0] \subseteq T(B_\alpha[0])$*
2. *$\operatorname{ran} T = Y$*
3. *T es abierta.*

Demostración Vayamos de a partes:

1. Sea $\alpha > 0$ y consideremos $B_{\frac{\alpha}{2}}(0) \subset B_\alpha[0]$, por 5.1.1 existe $\beta > 0$ tal que $B_\beta(0) \subseteq \overline{T(B_{\frac{\alpha}{2}}(0))}$, sea $t > \frac{\alpha}{2}$ y veamos que $B_\beta(0) \subset T(B_t(0))$.

   Sea $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < t - \frac{\alpha}{2}$, por 5.1.1 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ tal que $B_{\delta_n}(0) \subseteq \overline{T_{\epsilon_n}(0)}$ y llamando $\tilde{\delta_n} = \dfrac{\delta_n}{2^n}$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta_n \to 0$.

   Sea $y \in B_\beta(0)$, luego $B_{\delta_1}(y) \cap T\left(B_{\frac{\alpha}{2}}(0)\right) \neq \emptyset$ por lo que existe $T(x_0) = y_0 \in Y$ tal que $\|y - y_0\| < \delta_1$ con $\|x_0\| \leq \frac{\alpha}{2}$. Como $y - y_0 \in B_{\delta_1}(0) \subseteq \overline{T(B_{\epsilon_1}(0))}$ entonces existe $T(\underbrace{x_1}_{\in B_{\epsilon_1}(0)}) = y_1 \in Y$ tal que $\|y - y_0 - y_1\| < \delta_2$. Inductivamente contruímos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $\left\|y - \left(\sum_{1\leq n\leq k} y_n\right)\right\| < \delta_{k+1}$, $y_n = T(x_n)$ y $x_n \in B_{\epsilon_n}(0)$. Notemos que como $\delta_n \to 0$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} y_n = y$; por otro lado $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < t - \frac{\alpha}{2}$ luego por 3.1.3 $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n = x \in X$ y como T es continua, $T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} T(x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} y_n = y$.

Finalmente notemos que $\|x\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|x_n\| = \underbrace{\|x_0\|}_{<\frac{\alpha}{2}} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|}_{<t-\frac{\alpha}{2}} < t$; por lo tanto $B_\beta(0) \subseteq T(B_t(0))$.

2. Sea $y \in Y$ y $\alpha, \beta > 0$ que cumplan 1, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{y}{n} \in B_{\frac{\beta}{2}}[0]$, entonces por 1 $\frac{y}{n} \in \operatorname{ran} T$ por lo que $y \in \operatorname{ran} T$.

3. Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $T(x_0) = y_0 \in T(U)$, luego $U - x_0 \ni 0$ es un entorno abierto. Sea $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq U - x_0$ luego $T(B_{\frac{r}{2}[0]}) \subseteq T(B_r(0)) \subseteq T(U) - y_0$; por 1 existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta[0]} \subseteq T\left(B_{\frac{r}{2}}[0]\right) \subseteq T(U) - y_0$ por lo que $B_{\frac{\delta}{2}(y_0)} \subseteq T(U)$. ∎

Corolario 5.1.4 (Teorema de la inversa acotada) *Sean X, Y Banach y sea $T \in L(X, Y)$ tal que T es isomorfismo lineal, entonces T es isomorfismo de Banach.*

Demostración Como T es isomorfismo lineal entonces $\operatorname{ran} T = Y$ y como Y es Banach, es completo y por el teorema de Baire es de segunda categoría; luego por 5.1.3 T es abierta si y sólo si T^{-1} es acotada. ∎

5.2. Teorema del Gráfico cerrado

Definición Sean X, Y normados y $T : X \to Y$ un operador lineal cuyo dominio $D(T) \subset X$ es subespacio y $\operatorname{ran} T \subset Y$ es subespacio a su vez. Luego diremos que T es *cerrado* si $\operatorname{Gr} T \subset X \times Y$ es cerrado.

Proposición 5.2.1 *Sean X, Y normados y $T \in L(D(T), Y)$ con $D(T)$ subespacio cerrado de X, entonces T es cerrado.*

Demostración Si $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, luego por 3.1.4 $T(x) \leftarrow T(x_n) \to y$ por lo que $y = T(X)$. ∎

Proposición 5.2.2 *Sean X, Y normados con Y Banach y $T : X \to Y$ un operador cerrado y acotado, entonces $D(T)$ es subespacio cerrado.*

Demostración Sea $x_n \subset D(T)$ tal que $x_n \to x$, luego como T es acotado y lineal $\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\| \to 0$ y como Y es Banach existe $y = \lim T(x_n)$.

Luego como $x_n \to x$, $T(x_n) \to y$ y T es cerrada entonces $x \in D(T)$ y $T(x) = y$. ∎

Teorema 5.2.3 (Teorema del gráfico cerrado) *Sean X, Y Banach y $T : X \to Y$ lineal, entonces $T \in L(X, Y)$ si y sólo si T es cerrada.*

Demostración Como T es cerrada entonces $\operatorname{Gr} T$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$ que es Banach con la norma suma directa. Consideremos $\pi : \operatorname{Gr} T \to X$ dada por $\pi(x, T(x)) = x$, entonces:

- π es lineal
- $\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|$
- π es isomorfismo lineal

Entonces por 5.1.3 resulta que π^{-1} es continua. Por lo tanto si $x_n \to x$ entonces:

$$(x_n, T(x_n)) = \pi^{-1}(x_n) \to \pi^{-1}(x) = (x, T(x))$$

Por lo que $T(x_n) \to T(x)$ y por 3.1.4 $T \in L(X, Y)$.

Recíprocamente, por 5.2.1 y 5.2.2 vale que T es cerrada. ∎

Ejemplo Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ tal que para todo $p \in (1, \infty)$ toda sucesión $x_n \in l^p$ cumple $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in \mathbb{C}$ entonces $a_n \in l^q$

6. Topologías débiles

Definición Sea X normado, la *topología débil* en X es la topología inicial respecto a la familia $\mathcal{B} = \left\{p_{(x)^*} \ : \ (x)^* \in (X)^*\right\}$, donde:

$$p_{(x)^*}(x) = |\langle x, (x)^* \rangle|$$

Y la notaremos wk o $\sigma(X, (X)^*)$. Asimismo la *topología débil estrella* en $(X)^*$ es la topología inicial respecto a la familia $\mathcal{F} = \{p_x \ : \ x \in X\}$ donde:

$$p_x((x)^*) = |\langle x, (x)^* \rangle|$$

Observación $U \subset X$ es $wk-$abierto si y sólo si para todo $x_0 \in U$ existen $\epsilon > 0$ y $(x_1)^*, \ldots, (x_n)^* \in (X)^*$ tal que:

$$\bigcap_{1 \leq k \leq n} \left\{x \in X \ : \ p_{(x_k)^*}(x - x_0) < \epsilon\right\} \subset U$$

Por lo que $\{x_i\} \subset X$ converge débilmente a x_0 si y sólo si $\langle x_i, (x)^* \rangle \to \langle x_0, (x)^* \rangle$ para todo $(x)^* \in (X)^*$.

Recíprocamente, $U \subset (X)^*$ es $(wk)^*$ $-$abierto si y sólo si para todo $(x_0)^* \in U$ existen $\epsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que:

$$\bigcap_{1 \leq k \leq n} \{(x)^* \in (X)^* \ : \ p_{x_k}((x)^* - (x_0)^*) < \epsilon\} \subset U$$

Por lo que $\{(x_i)^*\} \subset (X)^*$ converge débil estrella a $(x_0)^*$ si y sólo si $\langle (x_i)^*, x \rangle \to \langle (x_0)^*, x \rangle$ para todo $x \in X$.

Proposición 6.0.1 *Sea X normado, entonces $(X, wk)^* = (X)^*$*

Demostración Sea $f \in (X, wk)^*$ y $V \subset \mathbb{F}$ un abierto, luego $f^{-1}(V)$ es wk-abierto en X, luego al ser intersección e abiertos (pues $p_{(x)^*}$ son continuas) $f^{-1}(V)$ es abierto fuertemente por lo que $f \in (X)^*$.

Recíprocamente, sea $f \in (X)^*$ y $\{x_i\} \subset X$ una red tal que $x_i \underrightarrow{wk} x_0$, luego $f(x_i) \to f(x_0)$ si y sólo si $\langle f(x_i), (x)^* \rangle \to \langle f(x_0), (x)^* \rangle$ si y sólo si $p_{(x)^*} \circ f(x_i) \to p_{(x)^*} \circ f(x_0)$ que vale pues ambas son continuas. ∎