Álgebra 3

Primer Parcial

Axel Sirota

Ejercicio 1

- Primero recordemos el ejercicio 27 de la práctica 3 que dice:

$$Gal\left(K(t)/K\right) \simeq PGL_2(K)$$

Luego afirmo que en realidad $G = \langle \tau, \sigma, i \rangle = Gal\left(K(t)/K\right)$ de lo que el orden de G va a ser el orden de $PGL_2(K) = q^3 - q$.

En pos de eso, para un lado es claro que los tres generadores de G estan en $Gal\left(K(t)/K\right)$, luego $G \subseteq Gal\left(K(t)/K\right)$. Recíprocamente, notemos que si $f \in Gal\left(K(t)/K\right)$ entonces ya sabemos que $f(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$ donde $ac - bd \neq 0$; por lo tanto podemos representarlo como $f(t) = \dfrac{A}{Ct+D} + B$.

Luego, si notamos $\sigma_C(t) = Ct$, $t_B(t) = t + B$:

$$\begin{aligned} f(t) =& \sigma_C\left(\frac{A}{t+D} + B\right) \\ =& \sigma_C \circ \tau_D\left(\frac{A}{t} + B\right) \\ =& \sigma_C \circ \tau_D \circ -i\left(At + B\right) \\ =& \sigma_C \circ \tau_D \circ -i \circ \tau_B \circ \sigma_A(t) \end{aligned}$$

Para concluir, es claro que como $B \in K$ entonces $\tau_B = \tau^B$ y como $(8, 37) = 1$ y 37 es primo (acá usamos que $K = \mathbb{F}_{37}$) entonces existe $j_A, j_C \in \{1, \ldots, 36\}$ tal que $A = 8^{j_A}$ y $C = 8^{j_C}$. Luego tenemos que para $f \in Gal\left(K(t)/K\right)$ existe $j_A, B, D, j_C \in \mathbb{F}_{37}$ tal que $f = \sigma^{j_C} \circ \tau^D \circ -i \circ \tau^B \circ \sigma^{j_A}$; concluimos que $G = Gal\left(K(t)/K\right)$ y como $|Gal\left(K(t)/K\right)| = q^3 - q$ ya sabemos el orden de G.

- Sean $p, q \in \mathbb{F}_{37}[t]$ coprimos y analicemos que tiene que pasar para que $\frac{f}{g} \in \mathbb{F}_{37}(t)^{\langle h \rangle}$ donde h van a ser σ, τ, i respectivamente.

Para σ notemos que si $u = t^{36}$ entonces para $f \in \mathbb{F}_{37}[t]$ vale:

$$\begin{aligned} \sigma\left(f(t^{36})\right) &= \sum_{i \in sop(f)} \sigma\left(a_i (t^{36})^i\right) \\ &= \sum_{i \in sop(f)} a_i \left(\sigma(t^{36})\right)^i \\ &= \sum_{i \in sop(f)} a_i \left(\underbrace{8^{36}}_{\cong 1 \bmod (37)} (t^{36})\right)^i \\ &= f(t^{36}) \end{aligned}$$

Luego si $u = t^{36}$ vimos que $\mathbb{F}_{37}(t^{36}) \subset E^{\langle \sigma \rangle}$.

Por un lado, como $ord(\sigma) = 37$ pues $mcd(8, 37) = 1$ del teorema de Galois sabemos que $\left[E : E^{\langle \sigma \rangle}\right] = 36$; por el otro, como $f(x) = x^{36} - t^{36} \in \mathbb{F}_{37}(t^{36})[X]$ es mónico, irreducible (Einseinstein en t^{36} que es primo) y anula a t sabemos que $\left[\mathbb{F}_{37}(t^{36}) : \mathbb{F}_{37}(t)\right] = 36$. Luego, juntando todo, tenemos la torre $\mathbb{F}_{37}(t^{36}) \subseteq E^{\langle \sigma \rangle} \subseteq \mathbb{F}_{37}(t)$ donde:

$$\left[\mathbb{F}_{37}(t^{36}) : E^{\langle \sigma \rangle}\right] = \frac{\left[\mathbb{F}_{37}(t^{36}) : \mathbb{F}_{37}(t)\right]}{\left[\mathbb{F}_{37}(t) : E^{\langle \sigma \rangle}\right]} = 1$$

De lo que concuimos que $E^{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{F}_{37}(t^{36})$.

Ahora vayamos a i! Si $u = t^2 + t^{-2}$ entonces para $f \in \mathbb{F}_{37}[t]$ vale:

$$\begin{aligned} i\left(f(t^2+t^{-2})\right) &= \sum_{i\in sop(f)} i\left(a_i(t^2+t^{-2})^i\right) \\ &= \sum_{i\in sop(f)} a_i\left(i(t^2+t^{-2})\right)^i \\ &= \sum_{i\in sop(f)} a_i\left(i(t)^2+\left(\frac{1}{i(t)}\right)^2\right)^i \\ &= \sum_{i\in sop(f)} a_i\left(t^{-2}+t^2)\right)^i \\ &= f(t^2+t^{-2}) \end{aligned}$$

Luego si $u = t^2 + t^{-2}$ vimos que $\mathbb{F}_{37}(u) \subset E^{\langle i\rangle}$.

A continuación notemos que en realidad $i = i_1 \circ i_2$ donde $i_1(t) = -t$ y $i_2(t) = \frac{1}{t}$ cumplen las relaciones $i_1^2 = i_2^2 = Id$ y $i_1 \circ i_2 = i_2 \circ i_1$; por lo tanto $\langle i_1, i_2\rangle = \langle i\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Luego $4 = \left|Gal\left(\mathbb{F}_{37}(t)\,/E^{\langle i\rangle}\right)\right| = \left[E : E^{\langle i\rangle}\right]$ por el teorema de Galois.

Por otro lado, si $p(x) = x^4 - x^2\left(t^2+t^{-2}\right)+1$ entonces $p \in \mathbb{F}_{37}(t^2+t^{-2})[X]$ es mónico y $p(t) = 0$, por lo que $f\left(t, \mathbb{F}_{37}(t^2+t^{-2})\right) | p$ con lo que $[\mathbb{F}_{37}(u) : \mathbb{F}_{37}(t)] \leq 4$.

Luego, juntando todo, tenemos la torre $\mathbb{F}_{37}(u) \subseteq E^{\langle i\rangle} \subseteq \mathbb{F}_{37}(t)$ donde:

$$\left[\mathbb{F}_{37}(u) : E^{\langle i\rangle}\right] = \frac{[\mathbb{F}_{37}(u) : \mathbb{F}_{37}(t)]}{\left[\mathbb{F}_{37}(t) : E^{\langle i\rangle}\right]} = 1$$

Pues $1 \leq \left[\mathbb{F}_{37}(u) : E^{\langle i\rangle}\right] \leq 1$, de lo que concuimos que $E^{\langle i\rangle} = \mathbb{F}_{37}(t^2+t^{-2})$.

Finalmente analicemos a τ, si $u = t^{37} - t$ entonces para $f \in \mathbb{F}_{37}[t]$ vale:

$$\begin{aligned} \tau\left(f(t^{37}-t)\right) &= \sum_{i\in sop(f)} \tau\left(a_i(t^{37}-t)^i\right) \\ &= \sum_{i\in sop(f)} a_i\left(\tau(t^{37}-t)\right)^i \\ &= \sum_{i\in sop(f)} a_i\left((t+1)^{37}-t-1\right)^i \\ &= \sum_{i\in sop(f)} a_i\left(t^{37}+1^{37}-t-1\right)^i \\ &= f(t^{37}-t) \end{aligned}$$

Luego si $u = t^{37} - t$ vimos que $\mathbb{F}_{37}(u) \subset E^{\langle\tau\rangle}$.

Por un lado, como $ord(\tau) = 37$ del teorema de Galois sabemos que $\left[E : E^{\langle\tau\rangle}\right] = 37$; por el otro, como $f(x) = x^{37} - x - t^{37} + t \in \mathbb{F}_{37}(t^{37}-t)[X]$ es mónico, irreducible (Einseinstein en $t^{37}-t$ que es primo) y anula a t sabemos que $\left[\mathbb{F}_{37}(t^{37}-t) : \mathbb{F}_{37}(t)\right] = 37$. Luego, juntando todo, tenemos la torre $\mathbb{F}_{37}(t^{37}-t) \subseteq E^{\langle\tau\rangle} \subseteq \mathbb{F}_{37}(t)$ donde:

$$\left[\mathbb{F}_{37}(t^{37}-t) : E^{\langle\tau\rangle}\right] = \frac{\left[\mathbb{F}_{37}(t^{37}-t) : \mathbb{F}_{37}(t)\right]}{\left[\mathbb{F}_{37}(t) : E^{\langle\tau\rangle}\right]} = 1$$

De lo que concuimos que $E^{\langle\tau\rangle} = \mathbb{F}_{37}(t^{37}-t)$.

Para concluir el punto notemos que ahora simplemente tenemos que juntar lo que fuimos descubriendo! Es decir es claro que:

$$\begin{aligned} E^{\langle\sigma\rangle} &= \mathbb{F}_{37}\left(t^{36}\right) \\ E^{\langle\sigma,i\rangle} &= \mathbb{F}_{37}\left(\left(t^2-t^{-2}\right)^{36}\right) \\ E^{\langle\sigma,\tau\rangle} &= \mathbb{F}_{37}\left(\left(t^{37}-t\right)^{36}\right) \\ E^{\langle\tau,i\rangle} &= \mathbb{F}_{37}\left(\left(t^2+t^{-2}\right)^{37}-t^2+t^{-2}\right) \end{aligned}$$

- Afirmo que $f(t)=\dfrac{\left(t^{37^2}-t\right)^{38}}{\left(t^{37}-t\right)^{37^2+1}}$ cumple que $\mathbb{F}_{37}(t)^{\langle\sigma,i,\tau\rangle}=\mathbb{F}_{37}(t)^{Gal(\mathbb{F}_{37}(t))}=\mathbb{F}_{37}(f)$.

  Por un lado recordemos que $q^3-q=\left|Gal\left(\mathbb{F}_{37}(t)\,/E^G\right)\right|=\left[E:E^G\right]$ por el teorema de Galois y el primer punto; y por el otro del ejercicio 19 de la práctica 2 si $f=\frac{g}{h}\in E\setminus\mathbb{F}_{37}$ entonces $[E:E(f)]=\max\{gr(g),gr(h)\}$. Luego, si probamos que al reducir f a factores coprimos g,h vale que $\max\{gr(g),gr(h)\}=q^3-q$ podemos concluir, ya que claramente $\mathbb{F}_{37}(f)\subseteq E^G$, que $E^G=\mathbb{F}_{37}(f)$.
  Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\left(t^{37^2}-t\right)^{38}}{\left(t^{37}-t\right)^{37^2+1}} &= \frac{t^{q+1}\left(t^{q^2-1}-1\right)^{q+1}}{t^{q^2+1}\left(t^{q-1}-1\right)^{q^2+1}} \\ &= \frac{\left(\left(t^{q-1}\right)^{q+1}-1\right)^{q+1}}{t^{q^2-q}\left(t^{q-1}-1\right)^{q^2+1}} \\ &= \frac{\left(\left(t^{q-1}\right)-1\right)^{q+1}\left(\sum_{r=0}^{q}t^{(q-1)r}\right)^{q+1}}{t^{q^2-q}\left(t^{q-1}-1\right)^{q^2+1}} \\ &= \frac{\left(\sum_{r=0}^{q}t^{(q-1)r}\right)^{q+1}}{t^{q^2-q}\left(t^{q-1}-1\right)^{q^2-q}} \\ &= \frac{g}{h} \qquad \text{pues } (g,h)=1 \end{aligned}$$

  Y finalmente $\max\{gr(g),gr(h)\}=\max\left\{\underbrace{q^2-q+(q-1)\left(q^2-q\right)}_{q^3-q^2},\underbrace{(q-1)q(q+1)}_{q^3-q}\right\}=q^3-q$, luego conlcuimos que $E^G=\mathbb{F}_{37}(f)$. ∎

Ejercicio 2

- Notemos primero que $\beta^2=10+5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{10}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$; es más, notemos que de la misma cuenta $\beta^2\notin\mathbb{Q},\mathbb{Q}[\sqrt{2}],\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ que son (lo vimos en la práctica analizando $\mathbb{Q}[\sqrt{p_1},\sqrt{p_2}]$) las únicas subextensiones propias de $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$. Luego como $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]\,/\mathbb{Q}$ es separable, de la teórica sabemos que para todo $\alpha\in\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$ vale:

$$f\left(\alpha,\mathbb{Q}\right)=\prod_{i=1}^{4}\left(x-\sigma_i(\alpha)\right)$$

  Donde $\{\sigma_i(\alpha)\}_i$ son los valores diferentes que toma $\sigma(\alpha)$ con $\sigma\in Gal\left(\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]\,/\mathbb{Q}\right)$.

  Por otro lado, ya de la práctica sabemos que $Gal\left(\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]\,/\mathbb{Q}\right)\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ y los 4 morfismos están generados por las restricciones de la conjugación en $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]\,/\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\,/\mathbb{Q}$.

Como en nuestro caso $\beta^2 \notin \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ no está en ninguna subextensión de $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$ entonces por el teorema de correspondencia de Galois (es claramente normal) β^2 no esta en ningún cuerpo fijo, lo que es equivalente a que $\sigma(\beta) \neq \beta$ para ninguno de estos 4 morfismos. Luego podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\left\{\sigma_i(\beta^2)\right\}_i = \Big\{&\left(10-5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right), \left(10+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right),\\ &\left(10+5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right), \left(10-5\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\Big\}\end{aligned}$$

Es decir, β^2 evaluado en cada uno de los 4 morfismos que generan el grupo de Galois; pues si alguno fijara β^2 esto sería equivalente a que β^2 este en algún cuerpo fijo, lo que sería equivalente a que β^2 pertenezca a alguna subextensión propia de $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}f\left(\beta^2,\mathbb{Q}\right) =& \left(x-\left(10-5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(10+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\right)\\ &\left(x-\left(10+5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(10-5\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\right)\\ =&x^4-40x^3+440x^2-1600x+1600 \qquad \text{si hice bien las cuentas}\end{aligned}$$

De yapa, como ya sabemos que f es el minimal y tiene grado 4, sacamos que $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}] = \mathbb{Q}[\beta^2]$ pues ya habíamos visto una inclusón y sus grados sobre $\mathbb{Q}$ son iguales.

Para continuar, entonces tenemos la torre $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\beta^2] \subset \mathbb{Q}[\beta]$, veamos que las inclusiones son estrictas!

En pos de esto supongamos que $\beta \in \mathbb{Q}[\beta^2] = \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$, luego:

$$\beta = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10}$$

Notemos que las matrices de multiplicar por $\beta, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ en la base $\left\{1,\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{10}\right\}$ resultan respectivamente (esto es cuentitas):

$$m_\beta = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2b & a & 2d & c \\ 5c & 5d & a & b \\ 10 & 5c & 2b & a \end{pmatrix}$$

$$m_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego debe valer:

$$Tr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\beta) = a + bTr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) + cTr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{5}) + dTr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{10})$$

De lo que concluimos que $a = 0$. Apliquemos el mismo razonamiento para $\sqrt{2}\beta, \sqrt{5}\beta$ y $\sqrt{10}\beta$; no obstante, al solo interesarnos el término de la diagonal vamos a escribir el resto de los coeficientes

con * pues no afectan el cálculo de la traza. Continuando con $\sqrt{2}\beta$

$$m_{\sqrt{2}\beta} = \begin{pmatrix} 2b & * & * & * \\ * & 2b & * & * \\ * & * & 2b & * \\ * & * & * & 2b \end{pmatrix}$$

De lo que concluimos que:

$$Tr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{2}\beta) = 2b + cTr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{10}) + 2dTr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{5})$$

De lo que concluimos que $b = 0$. Continuando con $\sqrt{5}\beta$:

$$m_{\sqrt{5}\beta} = \begin{pmatrix} 5c & * & * & * \\ * & 5c & * & * \\ * & * & 5c & * \\ * & * & * & 5c \end{pmatrix}$$

De lo que concluimos que:

$$Tr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{5}\beta) = 5c + 5dTr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$$

De lo que concluimos que $c = 0$. Finalizando con $\sqrt{10}\beta$:

$$m_{\sqrt{10}\beta} = \begin{pmatrix} 10d & * & * & * \\ * & 10d & * & * \\ * & * & 10d & * \\ * & * & * & 10d \end{pmatrix}$$

De lo que concluimos que:

$$Tr_{\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]/\mathbb{Q}}(\sqrt{10}\beta) = 10d$$

De lo que concluimos que $d = 0$. Probamos que $\beta \notin \mathbb{Q}[\beta^2]$ y las inclusiones eran estrictas. Como $f = x^2 - \beta^2$ es un polinomio mónico que anula a β y $f \in \mathbb{Q}[\beta^2][X]$ podemos concluir que $1 < [\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}[\beta^2]] \leq 2$, o sea que la extensión es cuadrática. Por lo tanto por grados sabemos que $[\mathbb{Q}[\beta], \mathbb{Q}] = 8$.

Para concluir este punto, recordemos además que como $\mathbb{Q}$ es de característica 0 todas nuestras extensiones son separabales y eso implica que $Hom(\mathbb{Q}[\beta]/\mathbb{Q}) = Hom\left(\mathbb{Q}[\beta]/\mathbb{Q}[\beta^2]\right) \times Hom\left(\mathbb{Q}[\beta^2]/\mathbb{Q}\right)$. Similarmente al punto anterior, ya probamos que β no se encuentra en ninguna subextensión de $\mathbb{Q}[\beta]/\mathbb{Q}$ (esto es consecuencia de la cuenta anterior) por lo que por el teorema de correspondencia de Galois no es fijado por ningún elemento de $Hom(\mathbb{Q}[\beta]/\mathbb{Q})$. En consecuencia, $\{\sigma_i(\beta)\}_i$ es exactamente $\sigma(\beta)$ para cada una de los 8 morfismos que son base de $Hom(\mathbb{Q}[\beta]/\mathbb{Q})$ y entonces de lo que dedujimos en la teórica:

$$f(\beta, \mathbb{Q}) = \prod_{\psi \in Hom\left(\mathbb{Q}[\beta^2]/\mathbb{Q}\right)} \psi\left(f\left(\beta, \mathbb{Q}[\beta^2]\right)\right)$$

Como habíamos visto que $f\left(\beta, \mathbb{Q}[\beta^2]\right) = x^2 - \beta^2 = p$ entonces:

$$\sigma_1\left(x^2 - \left(10 + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{10}\right)\right) = \left(x^2 - \left(10 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}\right)\right)$$
$$\sigma_2\left(x^2 - \left(10 + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{10}\right)\right) = \left(x^2 - \left(10 + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10}\right)\right)$$
$$\sigma_3\left(x^2 - \left(10 + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{10}\right)\right) = \left(x^2 - \left(10 + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10}\right)\right)$$
$$\sigma_4\left(x^2 - \left(10 + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{10}\right)\right) = \left(x^2 - \left(10 - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{10}\right)\right)$$

De lo que deducimos que:

$$\begin{aligned} f(\beta,\mathbb{Q}) =& \left(x^2-\left(10-5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\right)\left(x^2-\left(10+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\right) \\ & \left(x^2-\left(10+5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\right)\left(x^2-\left(10-5\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\right) \\ =& x^8-40x^6+440x^4-1600x^2+1600 \qquad \text{si hice bien las cuentas} \end{aligned}$$

Y sabemos que es el minimal (además de por todos los teoremas) porque es mónico, anula a β (se ve) y es del grado correcto.

- Si recopilamos un poco lo que fuimos calculando notemos que llegamos a la conclusión que las 8 raíces del minimal son $\pm\sqrt{(2\pm\sqrt{2})(5\pm\sqrt{5})}$, veamos que todas están en $\mathbb{Q}[\beta]$ y para eso es claro que basta verlo para $\sqrt{(2\pm\sqrt{2})(5\pm\sqrt{5})}$.

  Sea $\alpha_1=\sqrt{(2-\sqrt{2})(5+\sqrt{5})}$, luego $\alpha_1\beta=\sqrt{(2^2-2)(5+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}(5+\sqrt{5})\in\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]=\mathbb{Q}[\beta]$. Similarmente sea $\alpha_2=\sqrt{(2+\sqrt{2})(5-\sqrt{5})}$ y vemos que $\alpha_2\beta=2\sqrt{5}(2+\sqrt{2})\in\mathbb{Q}[\beta]$; y $\alpha_3=\sqrt{(2-\sqrt{2})(5-\sqrt{5})}$ que se ve que $\alpha_3\beta=2\sqrt{2}\sqrt{5}\in\mathbb{Q}[\beta]$. Luego conlcuímos que $\pm\alpha_1,\pm\alpha_2,\pm\alpha_3\in\mathbb{Q}[\beta]$ de lo que deducimos que las 8 raíces de $f(\beta,\mathbb{Q})$ están en $\mathbb{Q}[\beta]$m, lo que dice que $\mathbb{Q}[\beta]$ es el cuerpo de descomposición de f y por ende es Galois.
- Sea $\sigma\in Gal\left(\mathbb{Q}[\beta]/\mathbb{Q}\right)$ un automorfismo que mande β a $\alpha_1:=\alpha$, luego por ser automorfismo sabemos que:

$$\left(2+\sigma(\sqrt{2})\right)\left(5+\sigma(\sqrt{5})\right)=\sigma\left(\left(2+\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)\right)=\sigma(\beta^2)=\sigma(\beta)^2=\alpha^2=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)$$

Y concluimos que $\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ y $\sigma(\sqrt{5})=\sqrt{5}$. Luego:

$$\sigma(\alpha)\alpha=\sigma(\alpha)\sigma(\beta)=\sigma(\alpha\beta)=\sigma(\sqrt{2})(5+\sigma(\sqrt{5}))=-\sqrt{2}(5+\sqrt{5})=-\alpha\beta$$

Por lo que $\sigma(\alpha)=-\beta$ y tenemos el siguiente diagrama de la acción de σ:

$$\beta\to\alpha\to-\beta\to-\alpha\to\beta$$

Y σ es un elemento de orden 4. Similarmente vamos a analizar $\tau\in Gal\left(\mathbb{Q}[\beta]/\mathbb{Q}\right)$ tal que $\tau(\beta)=\alpha_2:=\omega=\sqrt{(2+\sqrt{2})(5-\sqrt{5})}$.

$$\left(2+\tau(\sqrt{2})\right)\left(5+\tau(\sqrt{5})\right)=\tau\left(\left(2+\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)\right)=\tau(\beta^2)=\sigma(\beta)^2=\omega^2=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$$

Y concluimos que $\tau(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ y $\tau(\sqrt{5})=-\sqrt{5}$. Luego:

$$\tau(\omega)\omega=\tau(\omega)\tau(\beta)=\tau(\omega\beta)=2\tau(\sqrt{5})(2+\tau(\sqrt{2}))=-2\sqrt{5}(2+\sqrt{2})=-\omega\beta$$

Por lo que $\tau(\omega)=-\beta$ y tenemos el siguiente diagrama de la acción de τ:

$$\beta\to\omega\to-\beta\to-\omega\to\beta$$

Y τ es un elemento de orden 4. A su vez notamos que σ,τ generan y que $\sigma^2=\tau^2$ con lo que nos faltaría ver si conmutan; en pos de eso

$$\frac{\sigma(\beta)^2}{\beta^2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$
$$\frac{\tau(\beta)^2}{\beta^2} = \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

Lo que podemos deducir que (si notamos de igual manera a la extension):

$$\sigma(\beta) = \left(\sqrt{2}-1\right)\beta$$
$$\tau(\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\beta$$

Luego si vemos como actuan las composiciones en β:

$$\beta \xrightarrow{\tau} \frac{\sqrt{5}-1}{2}\beta \xrightarrow{\sigma} \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\beta$$
$$\beta \xrightarrow{\sigma} \left(\sqrt{2}-1\right)\beta \xrightarrow{\tau} \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\beta$$

Por lo que concluímos que una presentación de $Gal\left(\mathbb{Q}[\beta]\,/\mathbb{Q}\right)$ es
$\left\{\sigma,\tau \ : \ \sigma^4=\tau^4=Id \ , \ \sigma^2=\tau^2 \ , \ \sigma\tau=\tau\sigma\right\} \simeq \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$

- Este punto es muy parecido a la práctica asi que notemos que tenemos la torre de extensiones $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{10}]\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]$ y veamos que son inclusiones estrictas.
  Es simple y ya sabemos que $\sqrt{10}\notin\mathbb{Q}$, luego asumamos que $\sqrt{10+\sqrt{10}}\in\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$; entonces existen $a,b\in\mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{10+\sqrt{10}}=a+b\sqrt{10}$. Elevando al cuadrado e igualando término a término de la base $\left\{1,\sqrt{10}\right\}$ de $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ tenemos el sistema:

$$2ab = 1$$
$$a^2+10b^2 = 10$$

  Lo que lleva a que $b=\frac{1}{2a}$ y a cumpla $a^4+\frac{10}{4}-10a^2=0$ que podemos verificar que no tiene soluciones racionales; luego las inclusiones son estrictas.
  Pero como $p_1=x^2-10\in\mathbb{Q}[X]$ y $p_2=x^2-\left(10+\sqrt{10}\right)\in\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ son polinomios mónicos y anulan a $\sqrt{10}, \sqrt{10+\sqrt{10}}$ respectivamente podemos concluir que ambas extensiones son cuadráticas y esos son los polinomios minimales; es más, tenemos en conclusión que el grado de la extensión $\mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]\,/\mathbb{Q}$ es 4.
  Si hacemos lo mismo que en el primer punto, podemos verificar entonces que las 4 raíces del polinomio minimal resultan $\pm\sqrt{10\pm\sqrt{10}}$ y todas se encuentran en $\mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]$ pues:

$$\sqrt{10+\sqrt{10}}\sqrt{10-\sqrt{10}} = 3\sqrt{10} = 3\left[\left(\sqrt{10+\sqrt{10}}\right)^2-10\right] \in \mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]$$

  Por lo que $\mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]\,/\mathbb{Q}$ es Galois!
  Sea $\sigma\in Gal\left(\mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]\,/\mathbb{Q}\right)$ tal que $\sigma(\sqrt{10+\sqrt{10}})=\sqrt{10-\sqrt{10}}$, luego:

$$\begin{aligned}\sigma\left(\sqrt{10-\sqrt{10}}\right) =& \frac{3\left[\left(\sigma(\sqrt{10+\sqrt{10}})\right)^2-10\right]}{\sigma(\sqrt{10+\sqrt{10}})}\\ =& \frac{3\left[\left(\sqrt{10-\sqrt{10}}\right)^2-10\right]}{\sqrt{10-\sqrt{10}}}\\ =& \frac{-3\sqrt{10}}{\sqrt{10+\sqrt{10}}}\\ =& -\sqrt{10+\sqrt{10}}\end{aligned}$$

Luego tenemos la siguiente acción de σ sobre $\sqrt{10+\sqrt{10}}$

$$\gamma \to \sqrt{10-\sqrt{10}} \to -\gamma \to -\sqrt{10-\sqrt{10}} \to \gamma$$

Y σ resulta un generador de order 4 de $Gal\left(\mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]\,/\mathbb{Q}\right)$; luego $Gal\left(\mathbb{Q}[\sqrt{10+\sqrt{10}}]\,/\mathbb{Q}\right) \simeq \mathbb{Z}_4$

- Notemos que si tomamos ahora $\sigma\circ\tau$ entonces $\mathbb{Q}[\beta]^{\langle\sigma\circ\tau\rangle} = \mathbb{Q}[\gamma]$. Como $(\sigma\circ\tau)^2 = \sigma^2\circ\tau^2 = \sigma^4 = Id$ entonces sabemos que $\langle\sigma\circ\tau\rangle < \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ tiene índice 4; luego por el teorema de correspondencia de Galois sabemos que una subextensión de $\mathbb{Q}[\beta]\,/\mathbb{Q}$ de orden 4 es $\mathbb{Q}[\gamma]$. ∎

Ejercicio 3

- Primero veamos si podemos reducir a f a una forma más tratable. Para eso recordemos que si $p = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ entonces $\widetilde{p}(x) = \frac{p(x-\frac{b}{4a})}{a}$ cumple que no tiene término cúbico y que si $\widetilde{p}$ es irreducible entonces p lo es (esto lo vimos tanto en la práctica como la teórica).
  Luego:

$$\widetilde{f} = f(x+1) = x^4-x^2+1 \qquad \text{si hice bien las cuentas}$$

Con lo que llegamos a la hermosa conclusión que f es irreducible en K si y sólo si Φ_{12} es irreducible en $K[X]$.
Para el caso $K=\mathbb{Q}$ ya sabemos que todos los polinomios ciclotómicos son irreducibles asi que f lo es.
Ahora si $char(K)=2$ entonces notemos que $\Phi_{12}(x) = x^4-x^2+1 = \left(x^2-x+1\right)^2$ por lo que f no seria irreducible
Si $char(K)=3$ notemos que $\Phi_{12}(x) = x^4-x^2+1 = \left(x^2+1\right)^2$ por lo que f no sería irreducible.
Para finalizar, veamos el siguiente lema:

Lema 0.0.1 *Sobre F finito con característica p con $p\nmid n$ son equivalentes:*

a) *Φ_n es irreducible*
b) *$[F[\xi]:F] = \phi(n)$*
c) *$Gal\left(F[\xi]\,/F\right) \simeq \left(\mathbb{Z}\,/n\mathbb{Z}\right)^*$*
d) *p es un generador de $\left(\mathbb{Z}\,/n\mathbb{Z}\right)^*$*

Demostración En efecto, como ξ es una raíz de Φ_n entonces $f(\xi,F) = \Phi_n$ pues es irreducible, mónico y anula; luego $[F[\xi]:F] = \varphi(n) = gr(\Phi_n)$. Como $F[\xi]\,/F$ es Galois ($p\nmid n$), sabemos que $\varphi(n) = \left|Gal\left(F[\xi]\,/F\right)\right| = \left|\left(\mathbb{Z}\,/n\mathbb{Z}\right|\right. = \varphi(n)$, luego la inyección $Gal\left(F[\xi]\,/F\right) \hookrightarrow \left(\mathbb{Z}\,/n\mathbb{Z}\right)^*$ es un isomorfismo de grupos pues de Álgebra 2 sabemos que un homomorfismo inyectivo (esto

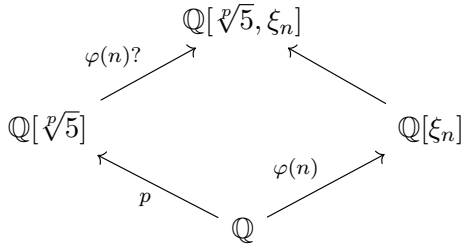
lo sabemos de la teórica) entre grupos de igual orden es isomorfismo. Finalmente de la teoría de cuerpos finitos sabemos que siempre:

$$p = f(\xi, F) = \prod_{i=1}^{k} x - \xi^{p^i}$$

donde $k = [F[\xi] : F]$. Luego sabemos que $p|\Phi_n$ y van a ser iguales si y sólo si sus raíces son iguales, es decir cuando $\xi^a \cong \xi^{p^i}$ para todo $a \leq n$ tal que $(a, n) = 1$. Esto vimos que pasa si y sólo si $a \cong p^i \mod (n)$ para algún i, lo que pasa si y sólo si p es generador de $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*$. ∎

Luego, Φ_n es irreducible en $\mathbb{F}_p$ con $p \nmid n$ si y sólo si $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*$ es cíclico, que de Álgebra 2 sabemos que pasa si y sólo si $n \in \{2, 4, l^s, 2l^s\}$ con l primo impar o $s \geq 1$; como 12 no entra en ninguna de esas posibilidades sabemos que Φ_{12} es reducible en $\mathbb{F}_p$ para $p \neq 2, 3$.
Resumiendo vimos que f es irreducible solo si $K = \mathbb{Q}$. ∎

- Notemos que podemos representar este problema con el siguiente diamante:



Pues Φ_n es irreducible en $\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]$ si y sólo si el polinomio minimal de ξ_n en $\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]$ es Φ_n si y sólo si $[\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}, \xi_n] : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]] = \varphi(n)$.
Luego, sabemos que si $p \nmid \varphi(n)$ entonces como los grados inferiores del diamante son coprimos $[\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}, \xi_n] : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]] = \varphi(n)$ y Φ_n resulta irreducible en $\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]$.
Supongamos ahora que $p|\varphi(n)$, veamos que $\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}] \cap \mathbb{Q}[\xi] = \mathbb{Q}$.
Supongamos que $\sqrt[p]{5} \in \mathbb{Q}[\xi_n]$, luego existe la torre de extensiones $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}] \subsetneq \mathbb{Q}[\xi_n]$ y por el teorema de correspondencia de Galois $Gal\left(\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]/\mathbb{Q}\right)$ resulta un subgrupo de $Gal(\mathbb{Q}[\xi_n]/\mathbb{Q})$.
Recordemos que vale:

$$Gal(\mathbb{Q}[\xi_n]/\mathbb{Q}) \simeq \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*$$

Y este grupo resulta abeliano, luego todo subgrupo de un grupo abeliano resulta normal al menos. Por lo tanto, eso implicaría que $Gal\left(\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]/\mathbb{Q}\right)$ es un subgrupo normal, lo que implicaría, por el teorema de correspondencia de Galois nuevamente, que la extensión $(\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]/\mathbb{Q}$ es normal. Esto es absurdo pues $p > 2$ y ya lo vimos varias veces en la materia.
Luego, como claramente además $\xi \notin \mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}] \subset \mathbb{R}$ entonces concluimos que $\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}] \cap \mathbb{Q}[\xi] = \mathbb{Q}$.
Recordemos el siguiente teorema:

Teorema 0.0.2 *Sean E, L extensiones de $F = E \cap L$ tal que E/F es Galois, luego EL/L es Galois y además $Gal(EL/L) \simeq Gal(E/F)$*

Luego entonces como $Q[\xi]/\mathbb{Q}$ es Galois y $\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}] \cap \mathbb{Q}[\xi] = \mathbb{Q}$, usando el teorema sabemos que $\mathbb{Q}[\xi, \sqrt[p]{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]$ es Galois y que $\varphi(n) = \left|Gal(Q[\xi]/\mathbb{Q})\right| = \left|Gal(\mathbb{Q}[\xi, \sqrt[p]{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}])\right| = [\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}, \xi_n] : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]]$ pues además es Galois.
Luego, $[\mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}, \xi_n] : \mathbb{Q}[\sqrt[p]{5}]] = \varphi(n)$ para este caso también y entonces concluímos que Φ_n resulta irreducible en $Q[\sqrt[p]{5}]$ para todo $p > 2$. ∎

Ejercicio 4

- Sea $S = \{K \text{ subextensiones de } {}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Q}} \ : \ \alpha \notin K\}$ y notemos que es no vacío pues $\mathbb{Q} \in S$; sea entonces $\mathcal{F}$ una cadena totalmente ordenada ee S y tomemos $L = \bigcup_{K \in \mathcal{F}} K$, afirmo que L es cota superior de S.

  En efecto, si $K \in \mathcal{F}$ entonces $K \subset L$ por definición, L es subextensión de ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Q}}$ pues todos los $K \in \mathcal{F}$ lo son y $\alpha \notin L$ pues si lo estuviese, entonces $\alpha \in K_{\mathcal{F}}$ para algún $K_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ lo que es absurdo pues $K_{\mathcal{F}} \in S$.

  Luego, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $K \in S$ que resulta la subextensión buscada.

- Sea $x \in \mathbb{C} - K$ y supongamos que es trascendente sobre K, lo esto implica que tenemos la torre de extesiones $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq K(x) \subset \mathbb{C}$ y $K(x)$ es una subextensión de ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Q}}$. Afirmo que no tiene a α.

  En efecto, supongamos que $\alpha = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $f, g \in K[X]$, luego por ser algebraico sobre $\mathbb{Q}$ sabemos que existe $h \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $h(\alpha) = 0$. En particular, si notamos $h_0, \ldots, h_n \in \mathbb{Q}$ a los coeficientes de h esto es equivalente a:

$$h_0 + h_1 \frac{f(x)}{g(x)} + \cdots + h_n \frac{f^n(x)}{g^n(x)} = 0$$

  Luego:

$$\begin{aligned} 0 =& h_0 g^n(x) + h_1 g^{n-1}(x) f(x) + \cdots + h_n f^n(x) \\ =& \left(h_0 g^n + h_1 g^{n-1} f + \cdots + h_n f^n\right)(x) \end{aligned}$$

  Y como $h_0 g^n + h_1 g^{x-1} f + \cdots + h_n f^n \in K[X]$ concluimos que x es algebraico sobre K, lo que es absurdo. Como K era maximal uno concluiría que $K = K(x)$ lo que es absurdo, luego ${}^{\mathbb{C}}/_{K}$ es algebraico.

- Sea ${}^{M}/_{K}$ una subextension finita de ${}^{\mathbb{C}}/_{K}$ luego, por un lado, sabemos que $\alpha \in M$ por la maximalidad de K.

  Consideremos ${}^{\widetilde{M}}/_{K}$ la clasura normal de ${}^{M}/_{K}$, como ${}^{\mathbb{C}}/_{K}$ es separable y $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado sabemos que ${}^{\widetilde{M}}/_{K}$ es una subextensión normal y separable de ${}^{\mathbb{C}}/_{K}$, luego Galois. Por ser Galois y $\alpha \notin K$ existe $\sigma \in Gal\left({}^{\widetilde{M}}/_{K}\right)$ tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$. Luego ${}^{\widetilde{M}^{\langle\sigma\rangle}}/_{K}$ es una extensión tal que $\alpha \notin \widetilde{M}^{\langle\sigma\rangle}$. Por la maximalidad de K concluimos que $K = \widetilde{M}^{\langle\sigma\rangle}$ y entonces por el teorema de correspondencia de Galois esto es si y sólo si $\langle\sigma\rangle = Gal\left({}^{\widetilde{M}}/_{K}\right)$. Concluimos que ${}^{M}/_{K}$ es cíclico al ser subextensión de ${}^{\widetilde{M}}/_{K}$ que lo es.

- Dijimos que no valia ∎

Ejercicio 5

- No se aun

- Veamos que es falso! Sea $f = x^4 - 4x + 2$ y su resolvente $g(x) = x^3 - 8x - 16$. Ambos resultan irreducibles pues f es Einsenstein con $p = 2$ y su resolvente pues $\widehat{g} = x^3 + 2x + 4$ es irreducible en $\mathbb{F}_5$.

  Como el discriminante de g es $-4864 \notin \mathbb{Q}^2$ entonces concluimos que $Gal(g) \simeq Gal({}^{L}/_{\mathbb{Q}[\alpha]}) \simeq S_3$ con α raíz de f y $Gal(f) = Gal({}^{L}/_{\mathbb{Q}}) \simeq S_4$.

  Supongamos que existe M subextensión de grado 2, luego tendríamos la torre $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq \mathbb{Q}[\alpha] \subseteq L$ (pues $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 4$ pues f irreducible) lo que implica que $S_3 \simeq Gal({}^{L}/_{\mathbb{Q}[\alpha]}) \leq Gal({}^{L}/_{M}) \leq Gal({}^{L}/_{\mathbb{Q}}) \simeq S_4$ (donde $\leq$ implica ser subgrupo) y veamos que eso no puede ser.

  En efecto, sea H un subgrupo entre S_3 y S_4 con esas características, entonces H es transitivo (por ser un grupo de Galois), tiene un $n-1$ ciclo y una transposición lo que implica que $H \simeq S_4$. Concluímos que tal subextensión cuadrática M no puede existir. ∎