Análisis Funcional

Final

Axel Sirota

Índice

1. Problemas

Ejercicio 1.

Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferencial, exhibir un atlas y hallar la dimensión en cada caso.

1. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$.
2. La esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
3. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$, donde $x \sim y$ si $x = -y$.
4. El toro $T_n = S^1 \times \cdots \times S^1$.
5. El cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.
6. El grupo general lineal $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$.
7. El grupo especial lineal $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.
8. El grupo ortogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A \cdot A^\intercal = 1\}$.
9. El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

Ejercicio 2.

Sea M una variedad diferencial de dimensión d y sea $U \subseteq M$ abierto.

1. Probar que U hereda una estructura de variedad con $\dim(U) = \dim(M)$ y que la inclusión $U \hookrightarrow M$ es diferenciable para esa estructura.
2. Probar que un subconjunto $S \subseteq M$ (con la topología subespacio) es una variedad de dimensión d si y sólo si S es abierto en M.

Ejercicio 3.

Sea M una variedad diferencial conexa. Probar que para cada par de puntos $p, q \in M$ existe un camino suave $c : [0, 1] \to M$ que los une (es decir, c es una función continua en $[0, 1]$, diferenciable en $(0, 1)$, y $c(0) = p$, $c(1) = q$).

Ejercicio 4.

Sean M, N variedades diferenciales. Probar que una función $f : M \to N$ es diferenciable si y sólo si $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable para toda $g : N \to \mathbb{R}$ diferenciable.

Ejercicio 5.

Sea M una variedad diferencial y $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proyección canónica. Probar que $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to M$ es diferenciable si y sólo si $f \circ p : S^n \to M$ es diferenciable. Comparar el rango de f con el de $f \circ p$.

Ejercicio 6.

Sea M una variedad diferencial de dimensión d y (U, ϕ) una carta de M.

1. Probar que si $V \subseteq U$ es un abierto, entonces $(V, \phi|_V)$ es una carta compatible de M.
2. Probar que si $f : \phi(U) \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ es un difeomorfismo, $(U, f \circ \phi)$ es una carta compatible de M.

Ejercicio 7.

Sea M una variedad diferencial de dimensión d.

1. Probar que M admite un atlas $\mathscr{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ tal que para todo $i \in I$ se tiene que $\phi_i(U_i)$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$.

2. Probar que M admite un atlas $\mathscr{B} = \{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ tal que para todo $j \in J$ se tiene que $\psi_j(V_i) = \mathbb{R}^d$.

Ejercicio 8.

Considerar en $\mathbb{R}$ las cartas $(\mathbb{R}, id)$ y $(\mathbb{R}, \phi)$ donde $\phi(t) = t^3$. Probar que las dos cartas no son compatibles pero que las variedades definidas por el atlas formado por cada una de las cartas son difeomorfas.

Ejercicio 9.

Sea M la imagen de la función $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ donde $f(t) = (\sin(t), \sin(2t))$ con la estructura inducida por la carta (M, f^{-1}). Probar que la función $F : M \to M$ definida por $F(x, y) = (x, -y)$ no es diferenciable.

Ejercicio 10.

Probar que $SO_3(\mathbb{R})$ es difeomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Ejercicio 11.

Probar que $\mathbb{R}$ y S^1 son las únicas variedades diferenciales conexas de dimensión 1 salvo difeomorfismo.

Ejercicio 12.

Preimagen de valor regular: Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $F : U \to \mathbb{R}^m$ $(n \geq m)$ una función diferenciable tal que $c \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de F (es decir, para cada punto $x \in U$ con $F(x) = c$ el rango de $\mathrm{D}F(x)$ es m). Probar que $M = F^{-1}(c)$ es una variedad de dimensión $n - m$ y la inclusión $M \hookrightarrow U$ es diferenciable.

Ejercicio 13.

Producto cartesiano: Sean M y N variedades diferenciales.

1. Probar que el producto cartesiano $M \times N$ es naturalmente una variedad diferencial con $\dim(M \times N) = \dim(M) + \dim(N)$ y que las proyecciones canónicas $\pi_1 : M \times N \to M$ y $\pi_2 : M \times N \to N$ son diferenciables.

2. El producto de variedades diferenciales está caracterizado por la siguiente *propiedad universal*: Si P es una variedad diferencial junto con funciones diferenciables $p_1 : P \to M, p_2 : P \to N$ entonces existe una única función diferenciable $f : P \to M \times N$ tal que $\pi_1 \circ f = p_1$ y $\pi_2 \circ f = p_2$.

Ejercicio 14.

Pegado de variedades: Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia numerable de variedades diferenciales, todas de dimensión n. Supongamos que para cada par $i \neq j$ están dados: dos abiertos $U_{ij} \subseteq M_i$ y $U_{ji} \subseteq M_j$, y un difeomorfismo $f_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ que no puede extenderse continuamente a ningún punto de ∂U_{ij}, tales que se satisfacen las siguientes propiedades:

- $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$.
- $f_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$.
- $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.

Mostrar que existe una variedad diferencial M y morfismos $\psi_i : M_i \to M$ tales que ψ_i es un difeomorfismo entre M_i y un abierto de M y

1. los abiertos $\psi_i(M_i)$ cubren M,

2. $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(M_i) \cap \psi_j(M_j)$,
3. $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$ en U_{ij}.

Ejercicio 15.

Suma conexa de variedades: Sean M y N dos variedades conexas de la misma dimensión d. Se consideran cartas (U, ϕ) y (V, ψ) de M y N respectivamente tales que $\phi(U) = \psi(V) = B(0,1)$ y pongamos $p = \phi^{-1}(0)$ y $q = \psi^{-1}(0)$. Definimos una nueva variedad $M \# N$ como el pegado de $M \smallsetminus \{p\}$ y $N \smallsetminus \{q\}$ por los abiertos U y V a través del difeomorfismo $f : U \to V$ determinado por la ecuación

$$\psi f \phi^{-1}(x) = \frac{1 - \|x\|}{\|x\|} x \ \ \forall x \in B(0,1) \smallsetminus \{0\}.$$

La variedad $M \# N$ se llama la suma conexa de M y N. Convencerse de que esta construcción no depende de las cartas utilizadas.
Probar que $M \# S^d$ es difeomorfa a M y que la operación $\#$ es conmutativa y asociativa.

Observación: Se puede probar que cualquier variedad compacta de dimensión 2 es difeomorfa a la esfera S^2, a la suma de n toros $T \# \cdots \# T$ o a la suma de n planos proyectivos $\mathbb{P}(\mathbb{R})^2 \# \cdots \# \mathbb{P}(\mathbb{R})^2$. Es más, estas variedades no son homeomorfas entre sí.

Ejercicio 16.

Cociente por la acción de un grupo: Sea M una variedad diferencial y G un grupo que actúa en M por difeomorfismos: para cada $g \in G$ se tiene $\phi_g : M \to M$ difeomorfismo de modo que $\phi_{1_G} = 1_M$ y $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$. Supongamos además que la acción es propiamente discontinua (es decir, todo $p \in M$ está contenido en un abierto U tal que $\phi_g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq 1_G$) y para todos $p, q \in M$ en distintas órbitas existen abiertos U y V que los contienen respectivamente tales que $\phi_g(U) \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G$.

1. Probar que el conjunto de órbitas M/G es una variedad diferencial con la estructura inducida por M, la proyección canónica $M \to M/G$ es diferenciable y $\dim(M) = \dim(M/G)$.
2. Expresar el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y el toro n-dimensional T_n como cocientes S^n/G y $\mathbb{R}^n/H$ para grupos y acciones convenientes.

Álgebras de funciones

Ejercicio 17.

Probar que $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}) = \{f : M \to \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$ es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Probar que si $g : M \to N$ es diferenciable, entonces $g^* : \mathscr{C}^\infty(N, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ es un morfismo de anillos.

Ejercicio 18.

Dadas M y N variedades diferenciales compactas, probar que:

1. Los ideales maximales de $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ son de la forma
$$\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : f(p) = 0\}.$$
2. Todo morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathscr{C}^\infty(N, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ viene de una función diferenciable $M \to N$.

Observación: Por **a.** podemos recuperar la variedad M como conjunto a partir de $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, por **b.** también recuperamos su estructura diferenciable. Â¿Qué pasa si M y N no son compactas? Â¿Vale **b.** si sólo pedimos morfismo de anillos?

Ejercicio 19.

Probar que el conjunto $\mathscr{D}_p(M)$ de gérmenes de funciones diferenciables a valores reales alrededor de un punto $p \in M$ es un anillo y si $g : M \to N$ es diferenciable entonces $g^* : \mathscr{D}_{g(p)}(N) \to \mathscr{D}_p(M)$ es un morfismo de anillos.

Ejercicio 20.

Dado $p \in M$ probar que la aplicación cociente $f \mapsto \overline{f}$ da un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})/\mathfrak{m}_p^0 \to \mathscr{D}_p(M)$$

donde $\mathfrak{m}_p^0 = \{f \in \mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : f \text{ se anula en un entorno de } p\}$.

Observación: Las $\mathbb{R}$-álgebras $\mathscr{D}_p(M)$ son anillos locales cuyo único ideal maximal son los gérmenes de funciones que se anulan en p. Más aún, $\mathscr{D}_p(M)$ es la localización de $\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ en el complemento del ideal maximal $\mathfrak{m}_p$.

2. Soluciones

Solución a la pregunta 1

Vayamos por partes:

1. Sea d la dimensión de V, luego fijada una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_d\} \subset V$ existe un isomorfismo $T : V \to \mathbb{R}^d$ dado por $T(x^1 v_1 + \cdots + x^d v_d) = (x^1, \ldots, x^d)$, por lo tanto notemos que $\mathcal{A} = \{(V,T)\}$ es una atlas sobre V por álgebra lineal. Finalmente como $V \simeq \mathbb{R}^d$ como espacios topológicos entonces V es Haussdorf y tiene base numerable. Concluímos que V es una variedad de dimensión d

2. Por ser subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ sabemos que S^n es Haussdorf y tiene base numerable por lo que debemos exhibir un conjunto de cartas diferencialmente compatibles.

   Pensando en esto, consideremos $f_i^+ = (x^1, \ldots, x^{i-1}, \sqrt{1-(x^1)^2 - \cdots - (x^n)^2}, x^{i+1}, \ldots, x^n)$ y $f_i^- = -f_i^+, U_i^+ = \{x \in B_1(0) \ : \ x_i > 0\}, U_i^- = \{x \in B_1(0) \ : \ x_i < 0\}, \pi_i(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \big(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}\big)$ y finalmente $V_i^+ = f_i^+(U_i^+)$ y $V_i^- = f_i^-(U_i^-)$. Afirmo que $\mathcal{A} = \big\{(V_i^+, \pi_i), (V_i^-, \pi_i) \ : \ 1 \leq i \leq n+1\big\}$ es un atlas para S^n.

   En efecto, fijado V_i^j ($j \in \{+,-\}$) entonces $\pi_i : V_i^j \to U_i^j$ es homeomorfismo con inversa f_i^j y finalmente donde tenga sentido como todas las funciones son suaves la composicion $\pi_k \circ f_i^j$ es suave.

3. Notemos que si $\mathcal{B}$ es la base contable de bolas de centro y radio racional en $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces sabemos que $\mathcal{B} \cap S^n$ es una base contable de S^n. Finalmente es un ejrcicio de topología ver que $q(\mathcal{B} \cap S^n)$ es una base contable de $\mathbb{P}^n$.

   Por otro lado, si $[x] \neq [y] \in \mathbb{P}^n$ entonces notemos que $q^{-1}([x]) = \{x, -x\}, q^{-1}([y]) = \{y, -y\}$, como S^n es Haussdorf entonces existe $U \ni x, V \ni y$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Notemos que como $y \neq \pm x$ entonces existe $\tilde{V} \subset V, \tilde{U} \subset U$ tal que $\{x, -x\} \subset \tilde{U} \cup -\tilde{U}, \{y, -y\} \subset \tilde{V} \cup -\tilde{V}$ pero que ambos son entornos disjuntos. Concluímos que $[U] \ni [x], [V] \ni [y]$ son entornos abiertos disjuntos pues su preimagen es la unión de abiertos.

   Para encontrar un atlas, sea $U_i = \big\{x \in \mathbb{P}^n \ : \ x^i \neq 0\big\}$ que es un entorno abierto de $\mathbb{P}^n$ y consideremos $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ dado por $\phi_i([x^1 : \cdots : x^i \cdots : x^{n+1}]) = (\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i})$ con inversa $\psi_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ dada por $\psi_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n) = [x^1 : \cdots : x^{i-1} : 1 : x^{i+1} : \cdots : x^n]$. Es muy simple ver usando la propiedad universal del cociente y a mano para el otro lado que estas son inversas y continuas, por lo cual son homeomorfismos y falta ver la compatibilidad suave.

   En pos de esto, sea $i < j$ y consideremos $\phi_i \circ \psi_j : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$:

$$\begin{aligned}\phi_i \circ \psi_j(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^n) =& \phi_i([x^1 : \cdots : x^{i-1} : x^i : x^{i+1} : \cdots : x^{j-1} : 1 : x^{j+1} : \cdots : x^n]) \\ =& (\frac{x^1}{x^i}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^j - 1}{x^i}, \frac{1}{x^i}, \frac{x^{j+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^n}{x^i})\end{aligned}$$

Que es trivialmente diferenciable.

4. Va a ser trivial consecuencia que producto de variedades es variedad

5. Idem antes

6. Es trivial que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ pues $det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua y $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, por lo tanto esto quedara probado cuando en el proximo ejercicio veamos que los abiertos son variedades de la misma dimensión.

7. Asumamos el resultado del problema 12 por ahora, entonces afirmo que si consideramos $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ entonces afirmo que 1 es un valor regular de det, con lo que concluímos que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ es variedad de dimensión $n^2 - 1$

   En efecto, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ notemos que:

$$\begin{aligned} \det(A) =& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} M_{i,1} \\ \implies \quad \frac{\partial \det(A)}{\partial a_{i,j}} =& (-1)^{i+1} M_{i,1} \end{aligned}$$

   Por lo tanto concluímos que $D(\det)(A) = 0$ si y sólo si $M_{i,1} = 0$ para todo i si y sólo si $\det(A) = 0$

8. Sea $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ dada por $f(A) = AA^t$ que es trivialmente una aplicacion diferenciable entre espacios vectoriales; nuevamente si asumimos el ejercicio 12 para probar que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ es una variedad de dimensión $n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ tenemos que ver que Id_n es una valor regular de f.

   En efecto, sea $A \in f^{-1}(Id_n)$ y $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, luego:

$$\begin{aligned} d_A(f)(B) =& \lim_{h \to 0} \frac{f(A+hB) - f(A)}{h} \\ =& \lim_{h \to 0} \frac{(A+hB)(A+hB)^t - AA^T}{h} \\ =& \lim_{h \to 0} \frac{(A+hB)(A^t+hB^t) - AA^T}{h} \\ =& \lim_{h \to 0} \frac{AA^t + hBA^t + hAB^t + h^2BB^t - AA^T}{h} \\ =& AB^t + BA^t \end{aligned}$$

   Es claro que esta aplicación es suryectiva pues dado $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ entonces si $B = \dfrac{CA}{2}$ entonces $d_A(f)(B) = AB^t + BA^t = \frac{AA^tC^t}{2} + \frac{CAA^t}{2} = \frac{C+C^t}{2} = \frac{2C}{2} = C$; luego Id_n es un valor regular de f.

9. Es claro que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ es un conjunto abierto pues es $\det^{-1}(\mathbb{R}^*) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, luego si asumimos el ejercicio siguiente concluímos que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ es una variedad de dimensión $\dfrac{n(n-1)}{2}$

. $\blacksquare$

Solución a la pregunta 2

Vayamos de a uno:

1. Dado que $U \subset M$ es subespacio entonces de topología sabemos que U es Haussdorf y admite base numerable; es más notemos que si $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ es un atlas para M entonces $\{(U_i \cap U, \phi_i|_U)\}_{i\in I}$ es un atlas para U.

   En efecto, como $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$ entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \cap U = U$ y ademas como ϕ_i son homeomorfismos entonces $\phi_i|_U$ también lo son. Finalmente como $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ es suave entonces $\phi_j|_U \circ \phi_i^{-1}|_U = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j \cap U) \to \phi_j(U_i \cap U_j \cap U)$ también lo es.

   Finalmente, para ver que $i : U \hookrightarrow M$ es diferenciable tenemos que ver que $\phi_j \circ i \circ (\phi_i|_U)^{-1}$ es diferenciable para todos i, j, pero:

$$\phi_j \circ i \circ (\phi_i|_U)^{-1} = \phi_j \circ i \circ (\phi_i)^{-1} = \phi_j \circ (\phi_i)^{-1}$$

   Que ya era diferenciable por ser $\mathcal{A}$ atlas.

2. Recíprocamente, supongamos que S es una variedad de dim $= d$, luego si $\mathcal{S} = \{s_i\}$ es un atlas de S y $\mathcal{A} = \{\phi_i\}$ es un atlas de M entonces $\phi_j \circ i \circ s_i^{-1} : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ es una función continua e inyectiva, luego por invariance de dominio es abierta por lo que $i(S) = S$ es abierto.(Notemos que lo demostramos para una variedad topológica arbitraria, en el caso suave podemos recurrir a que $rk(i)$ es completo y por teorema de la funci
   on inversa tenemos un difeomorfismo local) ∎

Solución a la pregunta 3

Veamos primero el siguiente resultado útil:

Proposición 2.0.1 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión d, luego existe una base $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad que para cada B_n existe una carta ϕ tal que $\phi(B_n) = B_r(0)$ para algún r. Es más dicha base se la puede tomar de modo que dado B_n existe una carta (B', ϕ) con $B' \supset \overline{B_n}$ y $r < r'$ tal que:*

$$\phi(B) = B_r(0) \quad \phi(\overline{B}) = \overline{B_r(0)} \quad \phi(B') = B_{r'}(0)$$

Demostración Supongamos primero que existe una única carta $\phi : M \to \tilde{U}$ y consideremos:

$$\mathcal{B} = \left\{B_r(x) \;:\; r \in \mathbb{Q},\; x \in \mathbb{Q}^d,\; B_{r'}(x) \subset \tilde{U}\right\}$$

Notemos entonces que $\phi^{-1}(\mathcal{B})$ cumple que es una base contable que cumple lo pedido pues ϕ es un homeomorfismo.

Ahora sea M una variedad arbitraria y consideremos $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ su atlas, luego como M admite base numerable existe un subcubrimiento abierto $\mathcal{A}' = \{U_n, \phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M y por lo anteriormente demostrado cada U_i (que ya probamos que era variedad) admite una base numerable $\mathcal{B}_n^k$ con las características pedidas. Consideremos $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n,k\in\mathbb{N}} B_n^k$ que es base numerable luego si $V \in \mathcal{B}$ entonces $V \subset U_n$ para algún n y concluímos que existe (B, ϕ) carta con los requerimientos; concluímos que $\mathcal{B}$ es la base pedida. ∎

Ahora si notemos que como cada $V \in \mathcal{B}$ es localmente conexa (por ser homeomorfa a una bola de $\mathbb{R}^n$) entonces es conexa por el arco si y sólo si es conexa.

A continuación, dados $x \neq y \in M$ entonces existe γ camino continuo y como $[0,1]$ es compacto existe finitos $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma([0,1]) \subset \bigcup\limits_{1\leq i\leq n} V_i$; como $V_i \in \mathcal{B}$ podemos tomar $\tilde{V}_i \subset V_i$ para todo i tal que $\gamma([0,1]) \subset \bigcup\limits_{1\leq i\leq n} \tilde{V}_i$ y $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_{i+1} = \{x_i\}$ pues los achico en el sentido de tomar los que en su imagen den bolas de radio menor.

Finalmente notemos que dados x_i, x_{i+1} existe un camino suave α_i entre $\phi_{i+1}(x_i), \phi_{i+1}(x_{i+1}) \in \mathbb{R}^d$ por teorema de existencia y unicidad de curvas, por lo que $\phi_{i+1}^{-1}(\alpha)$ es un camino trivialmente suave (componiendo con la carta queda la misma α) entre x_i, x_{i+1}. Concatenando las curvas obtenidasd obtenemos el camino suave entre $x = x_1$ e $y = x_{n+1}$. ∎

Solución a la pregunta 4

Supongamos que f es diferenciable, entonces dado $p \in M$ existe (U, ϕ) carta en M y (V, ψ) carta en N con $f(U) \subset V$ tal que $\psi \circ f \circ \phi{-}1 : \phi(U) \to \psi(V)$ es diferenciable. Asimismo por ser g diferenciable entonces dada (V, ψ) sabemos que $g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \mathbb{R}$ es diferenciable, por lo tanto $g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi{-}1 = g \circ f \circ \phi{-}1$ es diferenciable y concluímos que $g \circ f$ es diferenciable. Notemos que usamos el resultado de la teorica que es equivalente pedir que existan un par de cartas conla condición de diferenciabilidad a que para todos las cartas valga.

Recíprocamente, como $g \circ f$ para toda $g : N \to \mathbb{R}$ diferenciable, podemos tomar $\pi_i : N \to \mathbb{R}$ dada por $\pi_i(x^1, \ldots, x^d) = x^i$ y como esta es diferenciable sabemos que $\pi_i \circ f = f^i$ es diferenciable. Como f^i es diferenciable para cada $1 \leq i \leq d$ entonces f es diferenciable. ∎

Solución a la pregunta 5

Veamoslo en dos partes, primero veamos que $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una submersión suryectiva.

Lema 2.0.2 *$\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una submersión suryectiva*

Demostración Es trivial que es suryectiva y si consideramos una carta (V_j^i, π_i) de S^n y (U_k, ϕ_k) donde k es tal que $\pi \circ \pi_i^{-1}(U_j^i) \subset U_k$, entonces $\phi_k \circ \pi \circ \pi_i^{-1} : U_j^i \to \phi_k(U_k)$ esta dada por (supongamos $j = +$):

$$\begin{aligned}
\phi_k \circ \pi \circ \pi_i^{-1}(x^1, \ldots, x^n) =& g \circ \pi \circ \left(f_+^i\right)(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n) \\
=& \phi_k \circ \pi\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, \sqrt{1 - (x^1)^2 - \cdots - (x^n)^2}, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) \\
=& \phi_k([x^1 : \cdots : x^{i-1} : \sqrt{1 - (x^1)^2 - \cdots - (x^n)^2} : x^{i+1} : \cdots : x^n]) \\
=& \left(\frac{x^1}{x^k}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^k}, \frac{\sqrt{1 - (x^1)^2 - \cdots - (x^n)^2}, x^{i+1}}{x^k}, \ldots, \frac{x^{k-1}}{x^k}, \frac{x^{k+1}}{x^k}, \ldots, \frac{x^n}{x^k}\right) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Finalmente de lo mismo notemos que:

$$D(\pi)(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_k} & \ldots & \ldots & -\frac{x_1}{x_k^2} & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_k} & \ldots & -\frac{x_2}{x_k^2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & -\frac{x_n}{x_k^2} & \ldots & \frac{1}{x_k} \end{bmatrix}.$$

Que tiene rango n, por lo tanto resulta que $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una submersión suryectiva. ∎

Recordemos el siguiente resultado:

Teorema 2.0.3 (Teorema del Rango constante) *Sean M, N de dimensiones m, n respectivamente y sea $F : M \to N$ una función suave de rango constante r. Entonces para cada $p \in M$ existen cartas (U, ϕ) de M centrada en p y (V, ψ) de N centrada en $F(p)$ tal que $F(U) \subset V$ y:*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^r, 0 \ldots, 0)$$

Ahora veamos la existencia local de secciones:

Proposición 2.0.4 *Sean M, N variedades y $\pi : M \to N$ suave, luego π es una submersión si y sólo si para todo $p \in M$ existe una sección local*

Demostración Si π es una submersión dado $p \in M$ sea $q = \pi(p)$, luego por 2.0.3 existen cartas (U, ϕ) de M centrada en p y (V, ψ) de N centrada en q tal que:

$$\psi \circ \pi \circ \phi^{-1}\left(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m\right) = (x^1, \ldots, x^n)$$

Luego tomemos $\epsilon > 0$ tal que $C_\epsilon = \left\{x \ : \ \left|x^i\right| < \epsilon \ 1 \le i \le m\right\} \subset U$ sea un entorno de p que cumpla que $\pi(C_\epsilon) = C'_\epsilon = \left\{y \ : \ \left|y^i\right| < \epsilon \ 1 \le i \le n\right\} \subset V$ sea un entorno de q. Con estos entornos sea $\sigma : C'_\epsilon \to C_\epsilon$ dada por:

$$\sigma(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$$

y es claro que es suave, de rango constante y cumple que $\pi \circ \sigma = Id_{C_\epsilon}$.

Recíprocamente si $\pi \circ \sigma = Id_U$ entonces es claro que (veremos mas tarde) $d\pi_p \circ d\sigma_q = Id_q$ con lo que $d\pi_p$ es suryectiva. (Lo usaremos en el caso real donde basta usar $D(\pi)$ la diferencial total peor el resultado es abstracto tomando en cuesta la diferencial entre espacios tangentes.) ∎

Finalmente probemos la siguiente proposición

Proposición 2.0.5 (Propiedad universal de las submerciones suryectivas) *Sean M, N variedades diferenciables y $\pi_M \to N$ una submersión suryectiva, entonces para toda variedad diferenciable P una función $F : N \to P$ es suave si y sólo si $F \circ \pi$ es suave.*

Demostración Si F es suave entonces $F \circ \pi$ es suave.

Recíprocamente, si $F \circ \pi$ es suave, sea $q \in N$ y sea $p \in \pi^{-1}(q)$, luego por el resultado previo existe $U \ni q$ entorno abierta y $\sigma : U \to M$ suave tal que $\sigma(q) = p$ y $\pi \circ \sigma = Id_U$; finalmente notemos que:

$$F|_U = F|_U \circ Id_U = F \circ \pi \circ \sigma = (F \circ \pi) \circ \sigma$$

Que es composición de suaves, por lo tanto F es suave en todo entorno U, concluímos que F es suave. ∎

Por todo lo visto queda resuelto el punto. Finalmente es trivial usando la regla de la cadena $F(f \circ p)(q) = D(f)(p) \circ \underbrace{D(p)}_{rg(p)=n}(q)$ por lo que el rango de f es el mismo que el rango de $f \circ p$ pues p es submersión. ∎

Solución a la pregunta 6

Vayamos por partes:

1. Resuelto arriba
2. Trivial ∎

Solución a la pregunta 7

Notemos que resolvimos arriba ambos en 2.0.1 si consideramos luego que existe el obvio difeomorfismo $f : B_r(x) \to \mathbb{R}^d$ para todos $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. ∎