Análisis Funcional
Final
Axel Sirota

Índice

1. Espacios Vectoriales

1.1. Propiedades Elementales

Definición Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un conjunto $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ se dice:

1. *Linealmente independiente* si dados $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$ implica que $\lambda_{i_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.
2. *Sistema de generadores* si dado $v \in \mathcal{X}$ entonces existen $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = v$.
3. *Base* si es a la vez un sistema de generadores linealmente independiente.

Ejemplo

- $X = \mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots\} = \{X^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es base.
- $X = \mathcal{C}[a,b]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{e^{\alpha x}, \alpha \in [0,1]\}$ veamos que es linealmente independiente.

  Demostración Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_i \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$ para todo $x \in [a,b]$; luego si derivamos $n-1$ veces tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Y como los α_i son distintos entonces la matriz de Vandermonde es inversible y el sistema admite una única solución, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. ∎

Recordemos:

Proposición 1.1.1 (Lema de Zorn) *Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que todo subconjunto no vacío $S \subseteq P$ totalmente ordenado admite una cota superior; entonces existe un elemento maximal en P.*

Proposición 1.1.2 *Si E es un espacio vectorial, entonces E admite una base.*

Demostración Consideremos $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ es li}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup_{i\in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in T$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}\ in \mathcal{F}$ tales que $\sum_k \lambda_i v_i = 0$. Como son finitos existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \in S_{k_0}$ para todo i, que al ser un conjunto linealmente independiente resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente, sea $v \in E \backslash < M >$ (el conjunto generado por combinaciones lineales de M), luego $M \cup \{v\}$ sería un conjunto li lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta base. ∎

Proposición 1.1.3 *Sea E un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases de Hamel de E. Luego $\#B_1 = \#B_2$.*

Demostración Sea $x \in \mathcal{B}_1$ y llamemos $S(x)$ al conjunto de los elementos $v \in \mathcal{B}_2$ tal que al escribir a x como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_2$ aparece v, por lo que si $x = \sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k}$ entonces $S(x) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$.

Lema 1.1.4 $\bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x) = \mathcal{B}_2$

Demostración Del lema Si $v \in \bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x)$ luego existe $x_0 \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x_0)$ por lo que $v \in \mathcal{B}_2$ por definición de $S(x)$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{B}_2$ pero no existe $x \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x)$, entonces $v \notin < \mathcal{B}_1 >= E =< \mathcal{B}_2 >$. ∎

Por 1.1.4 tenemos que $\#\mathcal{B}_2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_1} \#S(x) \leq \#\mathbb{N}\#\mathcal{B}_1 \leq \#B_1$.

Razonando al revés obtenemos la otra desigualdad. ∎

1.2. Normas y productos internos

Definición Si E es un espacio vectorial, una norma definida en E es una aplicación $\|.\| : E \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Observación Todo espacio normado es un espacio métrico pero no viceversa.

Definición Si E es un espacio vectorial, un producto interno definido en E es una aplicación $\langle ., . \rangle : E \times E \mapsto F$ tal que:

1. $\langle ., z \rangle$ es lineal
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Observación Todo espacio con producto interno es un espacio normado pero no viceversa.

Teorema 1.2.1 (Cauchy-Schwartz) *Sea E un espacio vectorial y $\langle . \rangle$ un producto interno definido en E; luego si $x, y \in E$ se tiene que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.*

Demostración Sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $z = x - \lambda y$, luego $\langle z, z \rangle = \langle x, x \rangle + \left|\lambda^2\right| \langle y, y \rangle - 2\Re(\lambda \langle y, x \rangle) \geq 0$.
Si $\langle y, x \rangle = re^{i\theta}$ sea $\lambda = e^{-i\theta} t$ con $t \in \mathbb{R}$; luego:

$$0 \geq \langle x, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle - 2bt \equiv c - 2bt + at^2 := q(t)$$

Luego como la cuadrática dada es positiva, eso implica que $0 \leq 4b^2 - 4ac$ por lo que:

$$0 \leq b^2 - ac = |\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Si $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, entonces $b^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ por lo que $b^2 - ac = 0$. Esto implica que existe t_0 tal que $q(t_0) = 0$, por lo tanto eso implica que $\left\langle x - e^{-i\theta} t_0 y, x - e^{-i\theta} t_0 y \right\rangle \equiv 0$ y por lo tanto $x = e^{-i\theta} t_0 y$. ∎

Definición Un espacio normado que es completo respecto a la distancia inducida por la norma se llama *Espacio de Banach*

Definición Un *Espacio de Hilbert* es un espacio de Banach donde la norma proviene de un producto interno mediante $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposición 1.2.2 *Sea E un espacio con producto interno, entonces:*

- $\mathcal{R}(\langle x,y\rangle) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$
- $\mathcal{I}(\langle x,y\rangle) = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$

Demostración Por un lado $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathcal{R}(\langle x,y\rangle)$ y $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathcal{R}(\langle x,y\rangle)$; por lo que restando se obtiene:

$$4\mathcal{R}(\langle x,y\rangle) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

Por el otro:

$$\begin{aligned}
\|x+iy\|^2 &= \langle x+iy, x+iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i|\,\|y\|^2 - i\,\langle x,y\rangle + i\overline{\langle x,y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - i2\mathcal{I}(\langle x,y\rangle) \\
\|x-iy\|^2 &= \langle x-iy, x-iy\rangle \\
&= \|x\|^2 + |i|\,\|y\|^2 + i\,\langle x,y\rangle - i\overline{\langle x,y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i2\mathcal{I}(\langle x,y\rangle)
\end{aligned}$$

Por lo tanto restando ambas obtenemos:

$$4\mathcal{I}(\langle x,y\rangle) = \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2$$

∎

Proposición 1.2.3 (Ley del paralelogramo) *Sea E un espacio normado real, entonces existe $\langle .,.\rangle : E\times E \to \mathbb{C}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ si y sólo si para todos $x,y\in E$ vale:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

Demostración Si $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ entonces de la demostración de 1.2.2 se da el resultado. Recíprocamente definamos:

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Luego verifiquemos que es un producto interno.

1. $\sqrt{\langle x,x\rangle} = \|x\|$
2. Como $\|x+y\| = \|y+x\|$ y $\|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\|$ concluímos que $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.
3. Dado que $\|.\|, +, -, *$ son $\|.\|$-continuas entonces $\langle ., x\rangle, \langle x, .\rangle$ es $\|.\|$-continua.
4. Sean $x,y,z\in E$ entonces:

$$\|x+y+z\|^2 = 2\,\|x+z\|^2 + 2\,\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 = \quad 2\,\|y+z\|^2 + 2\,\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2$$

Luego como $A=B$ y $A=C$ implica $A = \frac{B+C}{2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 &= \|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2 \\
\|x+y-z\|^2 &= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y-z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x-z\|^2 \\
&= \|x-z\|^2 + \|y\|^2 - \frac{1}{2}\|-x+y+z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\|-y+x+z\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\langle x+y,z\rangle =&\frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2\right)\\ =&\frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2\right)+\frac{1}{4}\left(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2\right)\\ =&\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle\end{aligned}$$

5. Por el item anterior es claro por inducción que $\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle$ para todo $\lambda\in\mathbb{N}$ y como vale para $\lambda=-1$ tenemos que vale para todo $\lambda\in\mathbb{Z}$. Si $\lambda=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ entonces si llamamos $x'=\frac{x}{q}$ tenemos:

$$q\langle\lambda x,y\rangle=q\left\langle px',y\right\rangle=p\left\langle qx',y\right\rangle=p\langle x,y\rangle$$

Luego $\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle$ para todo $\lambda\in\mathbb{Q}$. Por lo tanto probamos que fijados $x,y\in E$ la función $g(t)=\frac{1}{t}\langle tx,y\rangle$ y la función constante $h(t)=\langle x,y\rangle$ cumplen que $h|_{\mathbb{Q}}=g|_{\mathbb{Q}}$ y por continuidad entonces $h\equiv g$ para todo $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; como el caso $\lambda=0$ es trivial concluímos que $\lambda\langle x,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle$. ∎

2. Espacios de Hilbert

2.1. Preliminares

Proposición 2.1.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego el producto interno es continuo.*

Demostración Sea $x_n, (y_n)$ tales que $x_n \to x, y_n \to y$, luego:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \, \|y\| + \|x\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y_n - y\| \to 0 \end{aligned}$$

∎

2.2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno, luego dados dos vectores $x, y \in E$ decimos que son *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$.

A su vez decimos que son *ortonormales* si osn ortogonales y $\|x\| = \|y\| = 1$

Finalmente dado un conjunto $S \subseteq E$ entonces decimos que es *ortogonal / ortonormal* si dados cualesquiera $x, y \in S$ resulta que son *ortogonales / ortonormales*

Ejemplo El conjunto $\left\{e^{inx} \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ x \in [0, 2\pi]\right\}$ es ortonormal.

Teorema 2.2.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego si $x \in \langle S\rangle$ entonces existe una única escritura de x dada por:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \, u_i \qquad u_i \in S$$

Demostración Como $x \in \langle S\rangle$ entonces existen únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tal que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Luego:

$$\langle x, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = \lambda_j$$

∎

Teorema 2.2.2 (Desigualdad de Bessel) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *SI $x \in E$ y $u_1, \ldots, u_n \in S$ luego $\sum\limits_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$*
2. *Si $x \in E$ entonces $\{u \in S \ / \ \langle x, u\rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable*
3. *Si $x, y \in E$ entonces $\left|\sum\limits_{u \in S} \langle x, u\rangle \overline{\langle y, u\rangle}\right| \leq \|x\| \, \|y\|$*

Demostración 1. Sean $u_1, \ldots, u_n \in S$ y sea $z = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle$, luego:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle z, z\rangle \\
&= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle, x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \right\rangle \\
&= \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \right\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle, x \right\rangle \right) \\
&= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i\rangle\|^2 - 2\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2 \right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, u_i\rangle\|^2.
\end{aligned}$$

2. Notemos que $S = \{u \in S \ / \ |\langle x, u\rangle| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{u \in S \ / \ |\langle x, u\rangle| \geq \frac{1}{m}\right\}}_{T_m}$.

   Ahora sean $u_1, \ldots, u_n \in T$ por el item anterior sabemos que:

$$\frac{n}{m^2} \leq \sum_{1\leq k\leq n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

   Por lo que $n \leq m^2 \|x\|^2$ y entonces $\#T_m \leq m^2 \|x\|^2 < \infty$ para todo m, por lo tanto $\#S \leq \#\mathbb{N} * \#T_m \leq \#\mathbb{N}$.

3. Sean $x, y \in E$ y $u_1, \ldots, u_n \in S$, luego:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle \overline{\langle y, u_i\rangle} \right| &\leq_{\text{C-S}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle y, u_i\rangle|^2} \\
&\leq_{\text{a}} \|x\| \, \|y\|
\end{aligned}$$

∎

Teorema 2.2.3 *Si E es un espacio vectorial con producto interno tal que E es separable, entonces todo conjunto ortonormal es a lo sumo numerable*

Demostración Sea $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal y sean $u \neq v \in S$, luego $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2$ y por lo tanto $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v) = \emptyset$.

Sea $D \subseteq E$ un subconjunto denso numerable, luego $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D \neq \emptyset$ para todo $u \in S$. Consideremos $f : S \to D$ dado por $f(u) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap D$, luego si $f(u) = f(v)$ entonces $f(v) \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(u) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(v)$ y por lo tanto $u = v$. Como f es inyectiva concluímos que S es a lo sumo numerable. ∎

Teorema 2.2.4 *Sean H un espacio de Hilbert, u_n una sucesión de vectores ortonormales y c_n una sucesión de numeros complejos. Luego:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty \tag{1}$$

Más aún, $c_n = \left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n, u_n \right\rangle$

Demostración Sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$, luego como (u_n) son ortonormales dos a dos y H es completo:

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{k'} c_n u_n \right\|^2 = \sum_{i=k+1}^{k'} |c_n|^2$$

Por ende:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n \in H \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty$$

Finalmente, notemos que $\langle S_k, u_j\rangle = c_j$ para todo $k \geq j$ y ,además si $(c_n)_i nl^2$, entonces $S_k \to \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n =: x$; por lo tanto por 2.1.1 $c_n = \langle S_k, u_n\rangle \to \langle x, u_n\rangle$. ∎

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y $M \subseteq E$, definimos *el ortogonal a* M como $M^\perp = \{x \in E \ / \ \langle x, m\rangle = 0 \ \forall m \in M\}$.

Proposición 2.2.5 *$M^\perp$ es un subespacio cerrado de E*

Demostración Si $(x_n) \subset M$ es tal que $x_n \to x$ entonces por 2.1.1 $0 = \langle m, x_n\rangle \to \langle m, x\rangle$, por lo que $x \in M$. ∎

Teorema 2.2.6 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal, luego:*

1. *Si $x \in H$ entonces $x_S = \sum_{u\in S} \langle x, u\rangle u$ esta bien definido*
2. *Si $M = \langle S\rangle$ entonces $x \in M$ si y solo si $x = x_S$. Es más si $x \in H$ entonces $x - x_S \in M^\perp$.*

Demostración

1. Dado $x \in H$, de 2.2.2 sea (u_n) una numeración de $S = \{u \in S \ / \ \langle x, u\rangle = 0\}$ y sea (v_n) otra ordenación de los u_n; notemos $x_1 = \sum_n \langle x, u_n\rangle u_n$ y $x_2 = \sum_n \langle x, u_n\rangle u_n$ que por 2.2.4 y 2.2.2 están bien definidos.

   Luego:

   $$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, u_n\rangle &= \langle x_1, u_n\rangle - \langle x_2, u_n\rangle \\ \underbrace{=}_{u_n = v_{m_n} \text{ para algún } m_n} & \langle x, u_n\rangle - \langle x, v_{m_n}\rangle \\ &= \langle x, u_n\rangle - \langle x, u_n\rangle = 0 \end{aligned}$$

   Por ende, $\langle x_1 - x_2, u_n\rangle = \langle x_1 - x_2, v_n\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se concluye que $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = 0$ por lo que $x_1 = x_2$ y entonces x_S esta bien definido y no depende del orden de la suma.

2. Sea $x_{S_k} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i \in M$, luego como M es cerrado se tiene que $x_{S_k} \to x_S \in M$. Ahora sea $s \in S$, entonces:

   $$\langle x - x_S, v\rangle = \langle x, v\rangle - \langle x_S, v\rangle = \langle x, v\rangle - \langle x, v\rangle = 0$$

   Por lo que $x - x_S \in M^\perp$. Finalmente, si $x \in M$ entonces como $x_S \in M$ entonces $x - x_S \in M \cap M^\perp = \{0\}$, luego $x = x_S$. ∎

2.3. Conjuntos ortonormales completos

Definición Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea $S \subseteq E$ ortonormal, diremos que S es *completo* si $S \subseteq T$ y T es ortonormal, entonces $S = T$.

Proposición 2.3.1 *Sea S un conjunto ortonormal tal que $S^{\perp} = \{0\}$, entonces S es completo*

Demostración Sea T ortonormal y sea $v \in T \setminus S$, luego $v \in S^{\perp} = 0$ por lo que S es completo. ∎

Teorema 2.3.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno, $S \subseteq E$ ortonormal y sea $M = \langle S \rangle$, entonces:*

1. *Si $M = E$ entonces S es completo*
2. *Si S es completo y E es de Hilbert entonces $M = E$*

Demostración

1. Si $x \in S^{\perp}$ entonces $x \in M^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto S es completo
2. Sea $x \in E$, luego por 2.2.6 x_S esta bien definido y $x - x_S \in M^{\perp}$, luego como S es completo $x - x_S = 0$ y por 2.2.6 se tiene que $x \in M$. ∎

Corolario 2.3.3 *Sea H de Hilbert y $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal completo, luego si $x \in H$ entonces $x = \sum_{u \in S} \langle x, u \rangle u$.*

Demostración Como H es Hilbert y S es completo entonces por 2.3.2 tenemos que $\langle S \rangle = H$, luego por 2.2.6 si $x \in H$ entonces $x = x_S$. ∎

Teorema 2.3.4 (Identidad de Parseval) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y $S \subseteq E$ un conjunto ortonormal tal que para todo $x \in E$ vale:*

$$\|x\|^2 = \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2 \tag{2}$$

Luego S es completo. Más aún si E es Hilbert y S es completo entonces vale 2

Demostración Sea $x \in E$ tal que $x \in S^{\perp}$, luego por 2 $\|x\| = \sum_{u \in S} \left|\underbrace{\langle x, u \rangle}_{=0}\right|^2 = 0$, luego $x = 0$ y S es completo.

Si E es Hilbert y S es completo entonces por 2.3.3 y 2.2.2 vale que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n$ por lo que:

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle x, x \rangle \\
&= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle u_n \right\rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, u_n \rangle \overline{\langle x, u_n \rangle} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, u_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{u \in S} |\langle x, u \rangle|^2
\end{aligned}$$

∎

Corolario 2.3.5 *Sea H Hilbert y $m \in M = \langle S \rangle$ con $S \subseteq H$ un conjunto ortonormal, luego $\|x - m\| \geq \|x - x_S\|$*

Demostración $\|x - m\|^2 = \left\| \underbrace{x - x_S}_{\in M^{\perp}} + \underbrace{x_S - m}_{\in M} \right\|^2 = \|x - x_S\|^2 + \|x_S - M\|^2 \geq \|x - x_S\|^2$ ∎

2.4. Ortogonalización de Gram Schmitt

Teorema 2.4.1 (Ortogonalización de Gram-Schmidt) *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sea D un conjunto linealmente independiente no vacío, luego si D es a lo sumo numerable existe $S \subseteq E$ ortonormal tal que:*

- $\#S = \#D$
- $\langle D \rangle = \langle S \rangle$

Demostración Sea $D = \{x_n\}$ y definamos:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 = x_1 & , & u_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|} & , & S_1 = \{u_1\} \\ y_2 = x_2 - x_{S_1} & , & u_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|} & , & S_2 = \{u_1, u_2\} \\ \vdots \quad \vdots & , & \vdots & , & \vdots \\ y_n = x_n - x_{S_{n-1}} & , & u_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|} & , & S_n = \{u_1, \dots, u_n\} \end{array}$$

Luego sea $S = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$ y es claro verificar ambas propiedades. ∎

Proposición 2.4.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno de dimensión infinita, luego si E es separable existe $S \subseteq E$ ortonormal, completo y numerable tal que $\overline{\langle S \rangle} = E$.*

Demostración Como E es separable existe $D = \{x_n\} \subseteq E$ denso numerable. Sea $n_1 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \neq 0\}$ y $y_1 = x_{n_1}$ e inductivamente sea $n_k = \text{mín} \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \notin \langle y_1, \dots, y_{k-1} \rangle \ , \ n_k > n_{k-1}\}}_{A_k}$ y $y_k = x_{n_k}$, luego por la buena ordenación de $\mathbb{N}$ y el hecho que D es denso y $dim(E) = \infty$ entonces $A_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$ por lo que n_k esta bien definido. Sea $Y = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{y_k\}$

Lema 2.4.3 $\langle D \rangle = \langle Y \rangle$ *e* Y *es linealmente independiente.*

Demostración (del Lema) Si $x_{n_0} \in D$ luego si $n_0 = n_k$ para algún k se concluye que $x_{n_0} \in Y$, si no entonces por Arquimedianidad $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n > n_0 \ , \ \exists k \in \mathbb{N} \ , \ n = n_k \ \} \neq \emptyset$ y sea $\hat{k} = \text{mín} A$; luego $x_{n_0} \in \left\langle A_{\hat{k}-1} \right\rangle \subseteq \langle Y \rangle$. Se concluye que $D \subseteq \langle Y \rangle$ y entonces $\langle D \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.

Recíprocamente sea $y \in Y$, luego por definición de y se tiene que $y = x_{n_k} \in \langle D \rangle$ para algún k y entonces $Y \subseteq \langle D \rangle$ por lo que $\langle Y \rangle = \langle D \rangle$.

Finalmente por construcción Y es linealmente independiente. ∎

Luego por 2.4.1 existe $S \subseteq E$ ortonormal tal que $\langle S \rangle = \langle Y \rangle \underbrace{=}_{2,4,3} \langle D \rangle$, y como D es denso se tiene que $\overline{\langle S \rangle} = \overline{\langle D \rangle} \supseteq \overline{D} = E$. ∎

2.5. Dimensión de un espacio de Hilbert

Proposición 2.5.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno y sean $S_1, S_2 \subseteq E$ conjuntos ortonormales y completos, luego $\#S_1 = \#S_2$*

Demostración Si S_1 es finito entonces $S = \{u_1, \dots, u_k\}$, sea $x \in E$ entonces $x - x_{S_1} = x - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i \in S_1^{\perp} = \{0\}$ por lo que S_1 es generador y ortonormal; concluímos que S_1 es base y $\dim_E = k$. Análogamente $S_2 = \{v_1, \dots, v_j\}$ es base y finalmente sea $T \in End(E)$ dada por $T(u_i) = v_i$, luego T es biyectiva y $\#S_1 = \#S_2$.

Si S_1 es infinito entonces para $x \in S_1$ sea $S_2(x) = \{u \in S_2 \ / \ \langle u, x \rangle \neq 0\}$, luego por 2.2.2 sabemos que $S_2(x)$ es a lo sumo numerable.

Lema 2.5.2 $\bigcup\limits_{x \in S_1} S_2(x) = S_2$

Demostración (del Lema) Supongamos que existe $y \in S_2$ tal que $y \notin S_2(x)$ para todo $x \in S_1$, luego $y \in S_1^{\perp} = \{0\}$; concluímos que $S_2 \subseteq \bigcup\limits_{x \in S_1} S_2(x)$ pues S_2 es ortonormal.

Trivialmente se da la otra inclusión. ∎

Por lo tanto $\#S_2 \leq \#(\mathbb{N} \times S_1) = \#S_1$; análogamente $\#S_1 \leq \#S_2$ y se concluye el resultado. ∎

Definición Se define $dim(E) = \#S$ donde $S \subseteq E$ es un sistema ortonormal completo.

Definición Sean E y F dos espacios vectoriales con producto interno, decimos que son *congruentes* si existe $T \in L(E, F)$ isomorfismo tal que $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$

Definición Sea $Q \neq \emptyset$, luego definimos $l^2(Q) = \left\{ f : Q \to \mathbb{R} \ / \ \# \{q \in Q \ / \ f(q) \neq 0\} \leq \aleph_0 \ , \ \sum\limits_{q \in Q} |f(q)|^2 < \infty \right\}$.

Proposición 2.5.3 *Valen:*

1. *$l^2(Q)$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{q \in Q} f(q)\overline{g(q)}$*

2. *Sea $S = \left\{\chi_{\{q\}}\right\}_{q \in Q}$ es ortonormal y completo*

3. *Si $\#Q > \#\mathbb{N}$ entonces $l^2(Q)$ no es separable*

Proposición 2.5.4 *Todo espacio vectorial con producto interno admite un sistema ortonormal completo.*

Demostración Sea $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ ortonormal}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup\limits_{i \in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_1, v_2 \in T$, luego existe S_i tal que $v_1, v_2 \in S_i$ y como este es ortonormal resulta que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ y $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente sea $v \in M^{\perp}$, luego $M \cup \left\{ \dfrac{v}{\|v\|} \right\}$ sería un conjunto ortonormal lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta completo. ∎

Teorema 2.5.5 *Sea H Hilbert tal que $\dim H = \alpha$ entonces $H \cong l^2(Q)$ con $\#Q = \alpha$*

Demostración Sea $S_\alpha = \{u_i\}_{i \in Q}$ un sistema ortonormal, completo de H que existe por 2.5.4; luego $x \in H$ entonces $x = \sum\limits_{i \in Q} \langle x, u_i \rangle u_i$, y debido a 2.3.4 y 2.2.2 $\{\langle x, u_i \rangle\}_{i \in Q} \subset l^2(Q)$. Definimos $T : H \to l^2(Q)$ dado por $T(x) = (\langle x, u_i \rangle)_{i \in Q}$ y veamos que es la indicada.

1. T es lineal

   Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, luego $T(x + \lambda y) = (\langle x + \lambda y, u_i \rangle) = (\langle x, u_i \rangle + \lambda \langle y, u_i \rangle) = T(x) + \lambda T(y)$.

2. T es monomorfismo

   Si $T(x) = (0)$ luego $\langle x, u_i \rangle = 0$ para todo $i \in Q$, luego $x \in S^{\perp} = \{0\}$ pues S es completo.

3. T es epimorfimso

   Si $(c_i) \in l^2(Q)$ luego por 2.2.4 $x = \sum\limits_{i \in Q} c_i u_i \in H$ y $T(x) = (c_i)$

4. T es isometría

   Por 2.3.4

Corolario 2.5.6 *Sea H Hilbert separable de dimensión infinita, luego H es congruente a l^2*

2.6. Proyección ortogonal

Ejemplo El sistema $\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ t \in [0, 2\pi]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completo.

Demostración Supongamos que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $g(t) = \int_{-\pi}^{t} f(t)dt$, luego g es continua y $g' = f$ ctp por el teorema de diferenciación de Lebesgue. Notemos que:

$$g(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{i0t}dt = 0 = g(-\pi)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = \frac{g(t)e^{int}}{ni}|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}}{in} = 0$$

Por lo tanto tenemos que $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = 0$ donde g es continua y $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, por Stone-Weirstrass existe $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de polinomios trigonométricos tal que $p_n \rightrightarrows g$, por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(t)e^{int} \to \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

No obstante, si $p_k \neq cte$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ $\langle p_k, e^{int}\rangle \neq 0$ para algún n, luego $p_k = cte = g(\pi) = 0$. Concluímos que $g = 0$ y entonces $f = 0$ ctp. ∎

Teorema 2.6.1 *Sea H Hilbert y K cerrado y convexo, luego si $x \in H$ entonces existe un único $k \in K$ tal que $\|x - k\| = d(x, K)$*

Demostración Sea $d_n = \|x - k_n\|$ una sucesión minimizante, luego para todo $n \geq N \in \mathbb{N}$ vale que $d + \frac{1}{N} \geq \|x - k_n\|$ por lo que por 1.2.3:

$$\|(x - k_n) - (x - k_m)\|^2 + \|(x - k_n) + (x - k_m)\|^2 = 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\|k_n - k_m\|^2 =& 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2 - \|2x - k_n - k_m\|^2 \\
=& 2\|x - k_n\|^2 + 2\|x - k_m\|^2 - 4\left\|x - \underbrace{\frac{k_n - k_m}{2}}_{\in K}\right\|^2 \\
\leq& 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \\
=& \frac{4d}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{m^2} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Luego (k_n) es de Cauchy y como H es completo existe $k \in K$ tal que $k_n \to K$; por 2.1.1 $d = \|x - k\|$. Si $h \in K$ tal que $\|x - h\| = d$ luego como K es convexo $\frac{k+h}{2} \in K$ por lo que:

$$d \leq \left\|x - \frac{k + h}{2}\right\| \leq \frac{\|x - k\| + \|x - h\|}{2} = d$$

Luego por 1.2.3:

$$\|k - h\|^2 = 2\|x - k\|^2 + 2\|x - h\|^2 - 4\left\|x - \frac{k - h}{2}\right\|^2 = 0$$

Por lo que $k = h$. ∎

Definición Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado de H Hilbert, luego por 2.6.1 existe un único $f_0 \in M$ tal que para todo $x \in H$ vale $\|x - f_0\| = d(x, M)$. A su vez como M es cerrado también es un espacio de Hilbert, luego por 2.5.4 existe $S \subseteq M$ tal que $M = \langle S \rangle$, finalmente por 2.2.4 vale que $f_0 = x_S$.

En resumen, dado $M \subseteq H$ subespacio cerrado y $h \in H$ existe un único elemento f_0 tal que $h - f_0 \in M^\perp$. Definimos la *proyección ortogonal sobre* M $P_M : H \to M$ dado por $P_M(h) = f_0$.

Proposición 2.6.2 *Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado en un Hilbert, sea $h \in H$ y $Ph := P_M(h)$ el único elemento tal que $h - Ph \in M^\perp$, luego:*

1. *P es lineal*
2. $\|Ph\| \leq \|h\|$
3. $P^2 = P$
4. $\ker P = M^\perp$ *y* $ranP = M$

Demostración

1. *Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{F}$ y $m \in M$; luego $\langle x + \lambda y - Px + \lambda Py, f \rangle = \langle x - Px, f \rangle + \lambda \langle y - Py, f \rangle = 0$. Por unicidad en 2.6.1 vale que $P(x + \lambda y) = Px + \lambda Py$.*
2. *Notemos que* $\|h\|^2 = \Bigg\| \underbrace{h - Ph}_{\in M^\perp} + \underbrace{Ph}_{\in M} \Bigg\|^2 = \|h - Ph\|^2 + \|Ph\|^2 \geq \|Ph\|^2$.
3. *Como $P|_M = Id_M$ entonces $P(Ph) = Ph$ para todo $h \in H$.*
4. *Si $Ph = 0$ entonces $h - Ph = h \in M^\perp$; recíprocamente si $h \in M^\perp$ entonces $h - 0 \in M^\perp$ por lo que $h \in \ker P$.* ∎

Corolario 2.6.3 *Sea $M \subseteq H$ un subespacio cerrado en un Hilbert, entonces $(M^\perp)^\perp = M$*

Demostración Primero notemos que:

Lema 2.6.4 $Id - P_M = P_{M^\perp}$

Demostración del lema Sea $m \in M^\perp$ y $h \in H$, luego $\langle h - (Id - P_M)(h), m \rangle = \langle h - h + P_M(h), m \rangle = \langle P_M(h), m \rangle = 0$, por la unicidad de 2.6.1 vale que $P_{M^\perp} = Id - P_M$. ∎

Luego por 2.6.2 vale que $\left(M^\perp\right)^\perp = \ker P_{M^\perp} = \ker(Id - P_M) \underbrace{=}_{0 = h - Ph \Leftrightarrow h = Ph} ran\ P = M$. ∎

Corolario 2.6.5 *Sea $A \subseteq H$ un conjunto en un Hilbert, luego $(A^\perp)^\perp = \overline{\langle A \rangle}$*

Demostración Para esto vamos a utilizar dos lemas:

Lema 2.6.6 $\langle A \rangle^\perp = A^\perp$

Demostración Por un lado si $f \in A^\perp$ luego $\left\langle f, \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle f, a_i \rangle = 0$ por lo que $f \in \langle A \rangle^\perp$.

Recíprocamente si $f \in \langle A \rangle^\perp$ y sea $a \in A$, luego $\Bigg\langle f, \underbrace{a}_{A \subseteq \langle A \rangle} \Bigg\rangle = 0$ por lo que $f \in A^\perp$. ∎

Lema 2.6.7 *Sea $U \subseteq H$ un conjunto en un Hilbert, entonces $U^\perp = \overline{U}^\perp$.*

Demostración Sea $h \in U^{\perp}$, luego si $u \in \overline{U}$ entonces existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $u_n \to u$. Por 2.1.1 entonces $0 = \langle h, u_n\rangle \to \langle h, u\rangle$ por lo que $h \in \overline{U}^{\perp}$.

Recíprocamente, si $h \in \overline{U}^{\perp}$ y $u \in U \subseteq \overline{U}$ entonces $\langle h, u\rangle = 0$; concluímos que $h \in U^{\perp}$. ∎

Luego por el corolario previo $\overline{\langle A\rangle} = \left(\overline{\langle A\rangle}^{\perp}\right)^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,7} \left(\langle A\rangle^{\perp}\right)^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,6} \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. ∎

Corolario 2.6.8 *Sea $M \subseteq H$ una variedad lineal en un Hilbert, luego M es denso si y sólo si $M^{\perp} = \{0\}$*

Demostración Si $\overline{M} = H$ entonces $M^{\perp} \underbrace{=}_{2,6,7} = \overline{M}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

Recíprocamente de 2.6.5 sabemos que $\overline{M} = \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. ∎

2.7. Teorema de representación de Riesz

Proposición 2.7.1 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $L : H \to \mathbb{F}$ un funcional lineal, entonces son equivalentes:*

1. *L es continua*
2. *L es continua en 0*
3. *L es continua en algún punto*
4. *Existe $c > 0$ tal que:*

$$|L(h)| \leq c\,\|h\| \quad \forall h \in H \tag{3}$$

Demostración Es claro que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) y que 4) $\Longrightarrow$ 2), veamos las que faltan:

3) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que L es continua en $h_0 \in H$ y sea $h \in H$; luego si $h_n \to h$ entonces $h_n - h + h_0 \to h_0$, por lo tanto $L(h_0) = \lim L(h_n - h + h_0) = \lim L(h_n) - L(h) + L(h_0)$ y concluímos que $L(h) = \lim L(h_n)$.

2) $\Longrightarrow$ 4) Como L es continua en 0 entonces si $V = \{\alpha \in \mathbb{F} \ / \ |\alpha| < 1\}$ entonces $L^{-1}(V)$ es abierto; es decir existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $|L(h)| < 1$.

Si $h \in H$ y $\epsilon > 0$ entonces $\left\| \dfrac{\delta h}{\|h\| + \epsilon} \right\| < \delta$ por lo que:

$$1 > \left| L\left[\frac{\delta h}{\|h\| + \epsilon}\right] \right| = \frac{\delta}{\|h\| + \epsilon}\,|L(h)|$$

Por lo que si $\epsilon \to 0$:

$$|L(h)| < \frac{1}{\delta}\left(\|h\|\right) := c\,\|h\|$$

∎

Definición Decimos que $L : H \to \mathbb{F}$ es *acotado* si vale 3. De 2.7.1 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|L\| = \sup\{|L(h)| : \ \|h\| \leq 1\}$$

Proposición 2.7.2 *Si L es un funcional acotado entonces:*

$$\begin{aligned} \|L\| &:= \sup\{|L(h)| : \ \|h\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\} \\ &= \text{ínf}\{c > 0 : \ |L(h)| \leq c\,\|h\| \ \ h \in H\} \end{aligned} \tag{4}$$

Es más, vale que $|L(h)| \leq \|L\|\,\|h\|$ *para todo* $h \in H$.

Demostración Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned} \|L\|_2 &= \sup\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \\ \|L\|_3 &= \sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\} \\ \|L\|_4 &= \text{ínf}\{c > 0 : \ |L(h)| \leq c\,\|h\| \ \ h \in H\} \end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como $\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} \subseteq \{|L(h)| : \ \|h\| \leq 1\}$ entonces vale que $\|L\|_2 \leq \|L\|$.

  Recíprocamente, si $\|h\| \leq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{\|h\|}\,|L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq \|L\|_2\,\|h\| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \sup_{\|h\|\leq 1} |L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \|L\| \leq \|L\|_2 \end{aligned}$$

- Si $h \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{\|h\|}\,|L(h)| \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \sup_{h\neq 0}\left\{\frac{1}{\|h\|}\,|L(h)|\right\} \leq \|L\|_2 \\ \Longrightarrow \quad & \|L\|_3 \leq \|L\|_2 \end{aligned}$$

  Recíprocamente notemos que $\{|L(h)| : \ \|h\| = 1\} = \left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ \|h\| = 1\right\} \subseteq \left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : \ h \neq 0\right\}$ por lo tanto $\|L\|_2 \leq \|L\|_3$.

- Sea $\epsilon > 0$, luego:

$$\begin{aligned} & \left|L\left(\frac{h}{\|h\| + \epsilon}\right)\right| \leq \|L\| \\ \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq (\|h\| + \epsilon)\,\|L\| \\ \text{Si } \epsilon \to 0 \Longrightarrow \quad & |L(h)| \leq \|L\|\,\|h\| \\ \Longrightarrow \quad & \|L\|_4 \leq \|L\| \end{aligned}$$

  Recíprocamente, si $\|L(h)\| \leq c\,\|h\|$ entonces $\|L\| \leq c$ por lo que $\|L\| \leq \|L\|_4$. ∎

Teorema 2.7.3 (Teorema de Representación de Riesz) *Sea $L : H \to \mathbb{F}$ un funcional, entonces L es acotado si y sólo si existe un único $h_0 \in H$ tal que $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$. En ese caso $\|L\| = \|h_0\|$.*

Demostración Sea $M = \ker L$, como L es acotada entonces M es cerrado y como $L \neq 0$ (en cuyo caso $h_0 = 0$) entonces $M^\perp \neq \{0\}$. Como $H = M \oplus M^\perp$ entonces existe $f_0 \in M^\perp$ tal que $L(f_0) = 1$.

Sea $h \in H$, entonces $L(h - L(h)f_0) = 0$ por lo que $h - L(h)f_0 \in M$; de aquí concluímos:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \langle h - L(h)f_0, f_0 \rangle \\ \Longrightarrow \quad 0 & = & \langle h, f_0 \rangle - L(h) \|f_0\|^2 \\ \Longrightarrow \quad L(h) & = & \dfrac{1}{\|f_0\|^2} \langle h, f_0 \rangle \\ \Longrightarrow \quad L(h) & \underbrace{=}_{h_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|^2}} & \langle h, h_0 \rangle \end{array}$$

Si h_0' es tal que $\langle h, h_0 \rangle = L(h) = \langle h, h_0' \rangle$ entonces $0 = \langle h, h_0 - h_0' \rangle$ para todo $h \in H$, en particular $0 = \langle h_0 - h_0', h_0 - h_0' \rangle = \|h_0 - h_0'\|^2$ por lo que $h_0 = h_0'$.

Recíprocamente, si $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$ entonces por 1.2.1 $|L(h)| \leq \|h\| \|h_0\|$ por lo tanto $\|L\| \leq \|h_0\|$.

En ese caso, $L\left(\dfrac{h_0}{\|h_0\|}\right) = \dfrac{1}{\|h_0\|} \langle h_0, h_0 \rangle = \|h_0\|$ por lo que $\|L\| = \|h_0\|$. ∎

3. Espacios de Banach

3.1. Operadores entre espacios normados

Proposición 3.1.1 *Sea E un espacio normado, entonces:*

1. *La suma es continua*
2. *El producto por un escalar es continuo*
3. *La norma es continua*

Demostración

1. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ entonces $\|x + y - x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$
2. Si $x_n \to x$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ entonces $\|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda| \, \|x_n - x\| \to 0$.
3. Si $x_n \to x$ entonces por definición $\|x_n - x\| \to 0$. ∎

Proposición 3.1.2 *Sea E un espacio normado y $x_0 \in E$ entonces $\overline{B_r(x_0)} = B_r[x_0]$.*

Demostración Si $x \in \overline{B_r(x_0)}$ entonces existe $\{x_n\} \subset B_r(x_0)$ tal que $x_n \to x$, como $\|x_n - x_0\| < r$ entonces por 3.1.1 se tiene que $\|x_n - x_0\| \to \|x - x_0\|$ por lo que $x \in B_r[x_0]$.

Recíprocamente si $x \notin \overline{B_r(x_0)}$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap B_r(x_0) = \emptyset$; luego $\|x - x_0\| > \epsilon + r > r$ por lo que $x \notin B_r[x_0]$. ∎

Teorema 3.1.3 *Sea X un espacio normado, entonces X es de Banach si y sólo si vale:*

$$\textit{Si } (x_n) \textit{ cumple que } \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X \tag{5}$$

Demostración Sea $S_k = \sum_{n\leq k} x_n$, entonces si $k > k'$, $\|S_k - S_{k'}\| = \left\| \sum_{n=k'+1}^{k} x_n \right\| \leq \sum_{n=k'+1}^{k} \|x_n\| \xrightarrow{k,k'\to\infty} 0$. Luego S_k es de Cauchy y como X es Banach $S_k \to \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X$.

Recíprocamente, sea $(x_n) \subset X$ de Cauchy y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\epsilon = \frac{1}{2^k}$ y $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$ si $n, m \geq n_k$. Luego si $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ entonces $\sum_k \|z_k\| < \sum_k \frac{1}{2^k} < \infty$; luego por hipótesis $S_m = \sum_{k=1}^{m} z_k$ converge, pero $S_m = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$, luego $\lim_m x_{n_m} = x_{n_1} + \lim S_m \in X$; como x_n es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente entonces (x_n) es convergente. ∎

Definición Si X, Y son espacios normados un *isomorfismo topológico* es $T : X \to Y$ tal que:

- T es isomorfismo lineal
- T y T^{-1} son continuas

Proposición 3.1.4 *Seax X, Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces son equivalentes:*

1. *T es continua*
2. *T es continua en 0*
3. *T es continua en algún punto*
4. *Existe $c > 0$ tal que:*

$$\|T(x)\|_Y \leq c \, \|x\|_X \quad \forall x \in X \tag{6}$$

5. *T está acotado en $B_1[0]$*

6. *T está acotado en $B_r[x_0]$ para todos $x_0 \in X$ y $r > 0$*

7. *T está acotado en $\partial B_r[x_0]$ para todos $x_0 \in X$ y $r > 0$*

Demostración Es claro que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3), que 4) $\Longrightarrow$ 2) y que 6) $\Longrightarrow$ 7), veamos las que faltan:

3) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que T es continua en $x_0 \in X$ y sea $x \in X$; luego si $x_n \to x$ entonces $x_n - x + x_0 \to x_0$, por lo tanto $T(x_0) = \lim T(x_n - x + x_0) = \lim T(x_n) - T(x) + T(x_0)$ y concluímos que $T(x) = \lim T(x_n)$.

2) $\Longrightarrow$ 4) Como T es continua en 0 entonces si $V = \{y \in Y \ / \ \|y\|_Y < 1\}$ entonces $T^{-1}(V)$ es abierto; es decir existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|_X < \delta$ implica $\|T(x)\|_Y < 1$.

Si $x \in X$ y $\epsilon > 0$ entonces $\left\| \dfrac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon} \right\|_X < \delta$ por lo que:

$$1 > \left\| T\left[\frac{\delta x}{\|x\|_X + \epsilon}\right] \right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X + \epsilon} \|T(x)\|_Y$$

Por lo que si $\epsilon \to 0$:

$$\|T(x)\|_Y < \frac{1}{\delta}\left(\|x\|_X\right) := c\,\|x\|_X$$

4) $\Longrightarrow$ 5) Sea $x \in B_1[0]$, luego $\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X \leq c$.

5) $\Longrightarrow$ 6) Sea $r > 0$ y $x_0 \in X$, luego si $x \in B_r[x_0]$ entonces existe $M > 0$ tal que $\left\| T\left(\dfrac{x - x_0}{r}\right) \right\|_Y \leq M$ pues $\dfrac{x - x_0}{r} \in B_1[0]$

Por lo tanto $\|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq Mr$ lo que implica que $\|T(x)\|_Y \leq rM + \|T(x_0)\|_Y := C$.

7) $\Longrightarrow$ 1) Sea $x_0 \in X$, luego por hipótesis si $\|x - x_0\|_X = 1$ entonces $\|T(x - x_0)\|_Y \leq C$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \left\| T\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_X}\right) \right\|_Y \leq C \\ \Longrightarrow \quad & \|T(x) - T(x_0)\|_Y \leq C\,\|x - x_0\|_X \end{aligned}$$

Cuando $\|x - x_0\|_X < \delta = \frac{\epsilon}{C}$. ∎

Ejemplo Si $X = Y = C[a, b]$ dotados de la norma supremo entonces $T(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ es un operador lineal acotado que no es un isomorfismo topológico.

Corolario 3.1.5 *Sean X, Y normados y sea $T : X \to Y$ un isomorfismo lineal. Entonces T es isomorfismo topológico si y sólo si existen $C_1, C_2 > 0$ tal que $C_1\|x\| \underbrace{\leq}_{\star} \|T(x)\| \underbrace{\leq}_{*} C_2\|x\|$*

Demostración Si T es isomorfimso topológico entonces:

$$\begin{array}{rcc} T \text{ continua} & \Longrightarrow & \exists C_2 > 0 \ / \ \|T(x)\| \leq C_2\|x\| \quad \forall x \in X \\ T^{-1} \text{ continua} & \Longrightarrow & \exists D_1 > 0 \ / \ \left\|T^{-1}(y)\right\| \leq D_1\|y\| \quad \forall y \in Y \\ & \Longrightarrow & \|x\| \leq D_1\|T(x)\| \quad \forall x \in X \\ & \Longrightarrow & C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \quad \forall x \in X \end{array}$$

Por lo tanto vale que:

$$C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$$

Recíprocamente, por $*$ se concluye que T es acotado y por 3.1.4 es continua; asimismo de $\star$ si $x = T^{-1}(y)$ se ve que T^{-1} es continua.

3.2. Espacios vectoriales de dimensión finita

Definición Si $\|.\|_1, \|.\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X entonces decimos que son *equivalentes* si $1_X : (X, \|.\|_1) \to (X, \|.\|_2)$ es un isomorfismo topológico.

Teorema 3.2.1 *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita, entonces:*

1. *Dos normas siempre son equivalentes*
2. *X es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n = \dim X$*

Demostración 1. Sea $\|.\|$ una norma en X y veamos que $\|.\|$ y $\|.\|_\infty$ son equivalentes.

Sea $a = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i e_i$, luego $\|a\| \leq \sum\limits_{i=1}^{k} |a_i| \|e_i\| \leq \|a\|_\infty C$.

Luego sea $id : (X, \|.\|_\infty) \to (X, \|.\|)$

Sabemos que $B_1[0]$ es compacta en $(X, \|.\|_\infty)$ y por la cuenta anterior id es continua, por lo tanto $id(S) = S$ es compacta en $(X, \|.\|)$ y por ende alcanza mínimo y máximo.

Sean $C_1 = \min\limits_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|$ y $C_2 = \max\limits_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|$, por lo tanto si $x \in X$ entonces:

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \leq C_2$$

2. Si $x = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i e_i$ definimos $T(x) = (a_1, \ldots, a_n)$, luego:

$$C_1 \|x\| \leq \|T(x)\|_\infty = \|x\|_\infty \leq C_2 \|x\|$$

Por lo que T es isomorfismo topológico. ∎

Corolario 3.2.2 *Todo espacio vectorial de dimensión finita es Banach.*

Corolario 3.2.3 *Si X es normado de dimensión finita, entonces todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

Demostración Si $A \subseteq X$ es cerrado y acotado, entonces existe $x_0 \in X, r > 0$ tal que $A \subset B_r[x_0]$ y $B_r[x_0]$ es compacto pues $B_1[0]$ lo es. Por lo tanto A es un cerrado en un compacto. ∎

Teorema 3.2.4 *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces $B_1[0]$ no es compacta*

Demostración Veamos primero el siguiente lema:

Lema 3.2.5 (Lema de Riesz) *Sea $M \subseteq X$ un subespacio no denso en un Banach, dado $r \in (0,1)$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ pero $d(x, M) \geq r$*

Demostración del lema Sea $y \in X \setminus \overline{M}$ y notemos$R = d(y, M)$, luego si $\epsilon > 0$ existe $m_1 \in M$ tal que $\|m_1 - y\| < R + \epsilon$. Sea $x = \dfrac{y - m_1}{\|y - m_1\|}$, luego $\|x\| = 1$ y:

$$\begin{aligned} d(x, M) &= \inf_{m \in M} \|x - m\| \\ &= \inf_{m \in M} \left\| m - \frac{y}{\|y - m_1\|} + \frac{m_1}{\|y - m_1\|} \right\| \\ &= \frac{\inf\limits_{m \in M} \|m - y\|}{\|m_1 - y\|} \\ &= \frac{R}{R + \epsilon} \nearrow 1 \end{aligned}$$

∎

Sea $x_1 \in \partial B_1[0]$, luego por 3.2.5 aplicado a $S_1 = \langle x_1 \rangle$ existe $x_2 \in \partial B_1[0]$ tal que $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$.

Inductivamente sea $x_n \in \partial B_1[0]$ tal que $d(x_n, S_{n-1}) = d(x_n, \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}) > \frac{1}{2}$. Luego por construcción $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_1[0]$ es una sucesión tal que $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ para todos $n \neq m$ por lo tanto es una sucesión acotada que no admite subsucesión convergente. Concluímos que $B_1[0]$ no es compacto ∎

3.3. Espacio de Operadores entre espacios normados

Definición Dados X, Y normados decimos que $T : X \to Y$ es *acotado* si vale 6. De 3.1.4 vemos que un funcional es acotado si y sólo si es continuo.

En ese caso definimos:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\}$$

Proposición 3.3.1 *Si T es un operador acotado entonces:*

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= \inf\{c > 0 : \|T(x)\| \le c\|x\| \;\; x \in X\} \end{aligned} \tag{7}$$

Es más, vale que $\|T(x)\| \le \|T\|\,\|x\|$ para todo $x \in X$.

Demostración Notemos(solo por esta demostración):

$$\begin{aligned} \|T\|_2 &= \sup\{|T(x)| : \|x\| = 1\} \\ \|T\|_3 &= \sup\left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ \|T\|_4 &= \inf\{c > 0 : |T(x)| \le c\|x\| \;\; x \in X\} \end{aligned}$$

Vamos por partes,

- Primero como $\{|T(x)| : \|x\| = 1\} \subseteq \{|T(x)| : \|x\| \le 1\}$ entonces vale que $\|T\|_2 \le \|T\|$.

  Recíprocamente, si $\|x\| \le 1$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \le \|T\|_2 \\ \Longrightarrow\;& \frac{1}{\|x\|}|T(x)| \le \|T\|_2 \\ \Longrightarrow\;& |T(x)| \le \|T\|_2\|x\| \le \|T\|_2 \\ \Longrightarrow\;& \sup_{\|x\|\le 1} |T(x)| \le \|T\|_2 \\ \Longrightarrow\;& \|T\| \le \|T\|_2 \end{aligned}$$

- Si $x \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \le \|T\|_2 \\ \Longrightarrow\;& \frac{1}{\|x\|}|T(x)| \le \|T\|_2 \\ \Longrightarrow\;& \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{1}{\|x\|}|T(x)|\right\} \le \|T\|_2 \\ \Longrightarrow\;& \|T\|_3 \le \|T\|_2 \end{aligned}$$

  Recíprocamente notemos que $\{|T(x)| : \|x\| = 1\} = \left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|} : \|x\| = 1\right\} \subseteq \left\{\frac{|T(x)|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$ por lo tanto $\|T\|_2 \le \|T\|_3$.

- Sea $\epsilon > 0$, luego:

$$\begin{array}{rc} & \left|T\left(\dfrac{x}{\|x\|+\epsilon}\right)\right| \leq \|T\| \\ \Longrightarrow & |T(x)| \leq (\|x\|+\epsilon)\,\|T\| \\ \text{Si } \epsilon \to 0 \longrightarrow & |T(x)| \leq \|T\|\,\|x\| \\ \longrightarrow & \|T\|_4 \leq \|T\| \end{array}$$

Recíprocamente, si $\|T(x)\| \leq c\,\|x\|$ entonces $\|T\| \leq c$ por lo que $\|T\| \leq \|T\|_4$. ∎

Definición Sean X, Y normados, definimos $L(X,Y) = \{T : X \to Y \ / \ T \text{lineal y acotado}\}$

Proposición 3.3.2 *Si X, Y son normados entonces $L(X,Y)$ es normado*

Demostración Probemos al desigualdad triangular pues las demás son triviales:
Sean $T, W : X \to Y$ lineales y acotadas, entonces $\|T+W\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|(T+W)(x)\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx + Wx\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| + \|Wx\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| + \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|W(x)\| = \|T\| + \|W\|$. ∎

Teorema 3.3.3 *Sean X, Y normados, entonces Y es de Banach si y sólo si $L(X,Y)$ es de Banach*

Demostración Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ una sucesión de Cauchy, y sea $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todos $n, m \geq N$.

En particular dado $x \in B_1[0]$ vale que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|T_n - T_m\| < \epsilon$ por lo que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ es una sucesión de Cauchy; como Y es Banach $\lim T_n(x) \in Y$. Además si $\|x\| \geq 1$ entonces $\lim T_n(x) = \lim \|x\|\, T_n\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \lim T_n\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \in Y$; luego definimos:

$$T(x) = \lim T_n(x) \quad \forall x \in X$$

Veamos que $T_n \to T$ y que $T \in L(X,Y)$.

- Por 3.1.1 y la linealidad de T_n vale que T es lineal
- Sea $x \in B_1[0]$ y $\epsilon > 0$, luego sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todos $n, m \geq N$; entonces $\|T(x)\| = \|T(x) - T_N(x) + T_N(x)\| \leq \|T(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\| < \epsilon + C$.
- Sea $\epsilon > 0$, luego $\epsilon > \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| \xrightarrow{m\to\infty} \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x) - T(x)\| = \|T_n - T\|$.

La vuelta la probaremos con Hanh-Banach. ∎

Definición Sea X espacio normado, luego notamos $X^\star := L(X, \mathbb{F})$ y se llama *espacio dual topológico.*
Si pensamos a X como espacio vectorial solamente también esta definido $X' := \{T : X \to \mathbb{F}, \ / \ T \text{ lineal}\}$ el *dual algebraico.*

3.4. Espacios cocientes

Sea X un espacio vectorial normado y $S \subseteq X$ un subespacio cerrado. Definimos la siguiente relación de equivalencia en X:

$$x \sim_S y \Longleftrightarrow x - y \in S$$

y definimos $\|[x]\|_S := \inf\{\|t\| \ : \ x \in [t]\}$.

Proposición 3.4.1 *El espacio $\left({}^{X}/_{S}, \|.\|_S\right)$ es un espacio normado con la suma definida por $[x] + [y] = [x+y]$, $[\lambda x] = \lambda.[x]$*

Demostración
- Sean $x, x' \in X$ tal que $[x] = [x']$, entonces $x - x' \in S$ por lo que $\lambda(x - x') \in S$; en conclusión $\lambda.[x] := [\lambda x] = [\lambda x'] =: \lambda.[x']$.
- Sean $x, x'y, y' \in X$ tal que $[x] = [x'], [y] = [y']$, luego $x - x' \in S$ y $y - y' \in S$ por lo que $(x-x')+(y-y') = (x+y) - (x'+y') \in S$; en conclusión $[x] + [y] := [x+y] = [x'+y'] =: [x'] + [y']$.
- Sean $[x] \in {}^{X}/_{S}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, luego $\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf\limits_{t \in [\lambda x]} \|t\| = \inf\limits_{t \in [x]} \|\lambda t\| = |\lambda| \, \|[x]\|$
- Sean $[x], [y] \in {}^{X}/_{S}$, luego $\|[x] + [y]\| = \|[x+y]\| = \inf\limits_{t \in [x+y]} \|t\| \leq \inf\limits_{t \in [x] w \in [y]} \|t + w\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$
- Si $\|[x]\| = 0$ entonces existe t_n tal que $\|t_n\| < \frac{1}{n}$ con $t_n \in [x]$, por lo tanto $x + s_n = t_n \to 0$ y entonces $s_n \to -x$. Como S es cerrado $-x \in S$ y como es subespacio $x \in S$; luego $[x] = [0]$

  Trivialmente si $x \in S$ entonces $[x] = [0]$ y entonces $\|[x]\| = 0$. ∎

Proposición 3.4.2 *Sean $S \subseteq X$ un subespacio cerrado en un normado, entonces:*

$$\|[x]\| = d(x, S)$$

Demostración $d(x, S) = \inf\limits_{s \in S} \|x - s\|_X = \inf\limits_{-s \in S} \|x + s\|_X = \inf\limits_{t \in [x]} \|t\|_X$. ∎

Teorema 3.4.3 *Sea $M \subseteq X$ un subespacio cerrado de un espacio normado y notemos $Q : X \to {}^{X}/_{M}$ la proyección canónica, entonces:*

1. *Q es continua y $\|Q\| \leq 1$.*
2. *Si X es de Banach entonces ${}^{X}/_{M}$ lo es.*
3. *Si $W \subset {}^{X}/_{M}$ entonces W es abierto si y sólo si $Q^{-1}(W)$ es abierto.*
4. *Si $U \subset X$ es abierto entonces $Q(U) \subset {}^{X}/_{M}$ es abierto.*

Demostración Vayamos de a partes:

1. $\|Q(x)\| = \|[x]\| = d(x, M) \leq \|x\|$ pues $0 \in M$; concluímos por 3.1.4.
2. Sea $([x_n]) \subset {}^{X}/_{M}$ una sucesión tal que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|[x_n]\| \neq 0$ sea $\epsilon_n = \|[x_n]\|$. Luego $\|[x_n]\| + \epsilon_n = 2\|[x_n]\| > \|x_n + m_n\|$ para cierto $m_n \in M$ (Si $\|[x_n]\| = 0$ entonces $x_n \in M$ y tomamos $m_n = -x_n \in M$), como $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|[x_n]\| < \infty$ entonces $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|m_n + x_n\| < \infty$ y por 3.1.3 $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} m_n + x_n \in X$. Como $S_p = \sum\limits_{n=1}^{p} x_n + m_n \to \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} m_n + x_n := v \in X$ y Q es continua entonces $\sum\limits_{n=1}^{p} [x_n] = Q(S_p) \to Q(v) \in {}^{X}/_{M}$; concluímos por 3.1.3 que ${}^{X}/_{M}$ es de Banach.
3. Sea $W \subset {}^{X}/_{M}$ tal que $Q^{-1}(W)$ es abierto, luego si $[x_0] \in W$ entonces $x_0 \in Q^{-1}(W)$ y existe un $r > 0$ tal que $x_0 + B_r(0) \subset Q^{-1}(W)$. Veamos el siguiente lema:

   Lema 3.4.4 $Q(B_r(0)) = B_r([0])$

   Demostración del lema Si $\|x\| < r$, entonces $\|[x]\| = \|Qx\| \leq \|x\| < r$. Recíprocamente si $\|[x]\| < r$ entonces existe $y \in M$ tal que $\|x + y\| < r$ por lo que $[x] = Q(x + y) \in Q(B_r(0))$. ∎

   Por el lema $W = QQ^{-1}(W) \supset Q(x_0 + B_r(0)) = B_r([x_0])$ por lo que W es abierto.

4. Si $U \subset X$ es abierto entonces $Q^{-1}(Q(U)) = U + M = \bigcup\limits_{m \in M} U + y$ que es una unión de abiertos, por lo que $Q^{-1}(Q(U))$ es abierto; por el punto anterior $Q(U)$ es abierto. ∎

Proposición 3.4.5 *Si X es normado, $M \subseteq X$ es un subespacio cerrado y $N \subseteq X$ es de dimensión finita entonces $M + N$ es un subespacio cerrado.*

Demostración Consideremos $Q : X \to {}^{X}/_{M}$, como $\dim Q(N) \leq \dim N < \infty$ entonces $Q(N)$ es cerrado y como Q es continua entonces $Q^{-1}(Q(N)) = N + M$ es cerrado . ∎

4. Teorema de Hahn-Banach

4.1. Funcionales Lineales

Definición Sea X un $\mathbb{F}$ espacio vectorial, un *hiperplano* en X es una variedad lineal M tal que $\dim {}^{X}/_{M}$

Proposición 4.1.1 *Una variedad lineal es un hiperplano si y sólo si existe $f \neq 0 \in X^{'}$ tal que $M = \ker f$*

Demostración Si $f \in X^{'}$ es no nulo entonces f induce $\bar{f} : {}^{X}/_{\ker f} \to \mathbb{F}$ isomorfismo por lo que $\ker f$ es un hiperplano.

Recíprocamente, si M es un hiperplano entonces existe $T : {}^{X}/_{M} \to \mathbb{F}$ un isomorfismo; luego si consideramos $f = Q \circ T$ cumple que $f \in X^{'}$ y $M = \ker f$. ∎

Proposición 4.1.2 *Sean $f, g \in X^{'}$, luego $\ker f = \ker g$ si y sólo si $g = \alpha f$ con $\alpha \in \mathbb{F}$*

Demostración Sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 1$, luego $g(x_0) = \alpha \neq 0$ y entonces $x - f(x)x_0 \in \ker f = \ker g$; por lo tanto $g(x) = \alpha f(x)$. ∎

Proposición 4.1.3 *Si X es un espacio normado y M es un hiperplano entonces M es denso o cerrado.*

Demostración Sabemos que $\overline{M}$ es una variedad lineal y vale que $M \subset \overline{M}$ por lo que $\dim {}^{X}/_{\overline{M}} \leq \dim {}^{X}/_{M} = 1$. ∎

Teorema 4.1.4 *Si X es normado y $f \in X^{'}$ entonces f es acotada si y sólo si $\ker f$ es cerrado.*

Demostración Sea $M = \ker f$ cerrado, entonces por 3.4.3 Q es continua y sea $T : {}^{X}/_{\ker f} \to \mathbb{F}$ un isomorfismo entonces T es continua pues $\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| \|Te_i\| \leq C \|x\|_\infty \underbrace{\leq}_{3,2,1} D \|x\|$. Luego $g = T \circ Q \in X^*$ y $\ker g = \ker f$, por 4.1.2 vale que $f = \alpha g \in X^*$. ∎

Proposición 4.1.5 *Si X es normado de dimensión finita e Y es normado, luego si $T : X \to Y$ es lineal entonces es continua.*

Demostración Ver arriba. ∎

4.2. El Teorema de Hanh-Banach

Definición Sea X un espacio vectorial, un *funcional sublineal* es una $q : X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Dados $x, y \in X$ vale $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$
2. Dado $x \in X$ vale $q(\alpha x) = \alpha q(x)$ para todo $\alpha \geq 0$

Proposición 4.2.1 *Sea X un $\mathbb{C}$ espacio vectorial, entonces:*

1. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$ funcional lineal, entonces $\tilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$ es un $\mathbb{C}$ funcional lineal.*
2. *Si $g : X \to \mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$ funcional lineal y $f = \Re g$, entonces $g = \tilde{f}$.*
3. *Si p es una seminorma entonces $|f| \leq p \iff \left|\tilde{f}\right| \leq p$*
4. *Si X es normado entonces $\|f\| = \left\|\tilde{f}\right\|$*

Demostración 1. Es claro que $\tilde{f}$ es $\mathbb{R}$ lineal y además notemos que $\tilde{f}(ix) = f(ix) - if(-x) = if(x) + f(ix) = i(f(x) - if(ix)) = i\tilde{f}(x)$; por lo tanto $\tilde{f}$ es $\mathbb{C}$ lineal.

2. Como g es $\mathbb{C}$ lineal entonces $g(ix) = ig(x)$ y luego $\Im g(ix) = \Im ig(x) = \Re g = f(x)$ por lo que $-f(ix) = \Im g(x)$ y concluímos que $g = \tilde{f}$.

3. Si $|f| \leq p$ luego como $\tilde{f} = e^{i\theta}\left|\tilde{f}\right|$ entonces $\left|\tilde{f}\right| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \Re\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = f(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = \left|e^{-i\theta}\right| p(x)$.

   Recíprocamente si $\left|\tilde{f}\right| \leq p$ entonces $\pm f(x) = \Re f(\tilde{\pm} x) \leq \left|\tilde{f}(\pm x)\right| \leq p$ por lo que $|f| \leq p$.

4. Como $\|f\|$ es una seminorma, entonces $\left\|\tilde{f}\right\| \leq \|f\|$. ∎

Lema 4.2.2 *Sea X un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea q un funcional sublineal en X. Si $M \subseteq X$ es un hiperplano y $f : M \to \mathbb{R}$ es un funcional tal que $f \leq q$ para todo $x \in M$ entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ una extensión tal que $F \leq q$.*

Demostración Sea $x_0 \in X \setminus M$ por lo que $X = M \oplus \langle x_0 \rangle$, asumamos que existe tal extensión F y notemos $\alpha_0 = F(x_0)$. Si $t > 0$ y $y_1 \in M$ entonces $F(tx_0 + y_1) = t\alpha_0 + f(y_1) \leq q(tx_0 + y_1)$ por lo que $\alpha_0 \leq q(x_0 + \frac{y_1}{t}) - f(\frac{y_1}{t})$ para todo $y_1 \in M$ que se reduce a (M variedad):

$$\alpha_0 \leq q(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad \forall y_1 \in M$$

Además si $t \geq 0$, $y_2 \in M$ entonces $F(-tx_0 + y_2) = -t\alpha_0 + f(y_2) \leq q(-tx_0 + y_2)$ y concluímos:

$$q(-x_0 + y_2) + f(y_2) \leq \alpha_0 \leq q(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad \forall y_1 y_2 \in M \tag{8}$$

Y recíprocamente si α_0 cumple 8 entonces volviendo se cumple lo necesitado para F. Reordenando necesitamos probar que $f(y_1 + y_2) \leq q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2)$; pero:

$$\begin{aligned} f(y_1 + y_2) \leq& q(y_1 + y_2) = q(x_0 + y_1 - x_0 + y_2) \\ \leq& q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2) \end{aligned}$$

Luego, elegimos α_0 tal que $\sup\limits_{y_2 \in M} \{f(y_2) - q(-x_0 + y_2)\} \leq \alpha_0 \leq \inf\limits_{y_1 \in M} \{q(x_0 + y_1) - f(y_1)\}$ y definimos $F(tx_0 + y) := t\alpha_0 + f(y)$ y F es una extensión de f tal que $F \leq q$. ∎

Teorema 4.2.3 (Teorema de Hanh-Banach (Versión real)) *Sea X un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea q un funcional sublineal en X. Si $M \subseteq X$ es un subespacio y $f : M \to \mathbb{R}$ es un funcional tal que $f \leq q$ para todo $x \in M$ entonces existe $F : X \to \mathbb{R}$ una extensión tal que $F \leq q$.*

Demostración Sea $\mathcal{S} = \left\{(M_1, f_1)\ ,\ M_1 \supseteq M\ ,\ M_1 \text{ variedad }\ ,\ f_1 \in M_1^{'}\ ,\ f_1|_M = f\ ,\ f_1 \leq q|_{M_1}\right\}$ y lo dotamos del orden dado por:

$$(M_1, f_1) \leq_S (M_2, f_2) \iff M_1 \subseteq M_2\ ,\ f_2|_{M_1} = f_1$$

Luego $(\mathcal{S}, \leq_S)$ es un poset. Sea $\mathcal{C} = \{(M_i, f_i)\}_{i \in I}$ una cadena en $\mathcal{S}$ y sea $N = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$, luego N es variedad y definimos $F : N \to \mathbb{R}$ dado por $F(x) = f_i(x)$ si $x \in M_i$.

Si $x \in M_i, M_j$ entonces como $\mathcal{C}$ esa cadena $M_i \subseteq M_j$ y $F(x) = f_j(x) = f_i(x)$ pues $f_j|_{M_i} = f_i$ por lo que F esta bien definida. Con una cuenta análoga se ve que F es lineal y que $F \leq q$ por lo que $(N, F) \in \mathcal{S}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$.

Por 1.1.1 existe (Y, F) un elemento maximal y por 4.2.2 $Y = X$. ∎

Teorema 4.2.4 (Teorema de Hanh-Banach) *Sea X un espacio vectorial (real o complejo) y sea p una seminorma en X. Si $M \subseteq X$ es un subespacio y $f : M \to \mathbb{C}$ es un funcional tal que $|f| \leq q$ para todo $x \in M$ entonces existe $F : X \to \mathbb{C}$ una extensión tal que $|F| \leq q$.*

Demostración Por 4.2.1(2) si notamos $f_1 = \Re f$ entonces $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$ y además de la cuenta de la demostración de la vuelta de 4.2.1(3) $|f_1| \leq p$ para todo $x \in M$, luego por 4.2.3 existe $F_1 \in X^{'}$ extensión de f_1 tal que $|F_1| \leq p$ por la misma cuenta que antes en 4.2.1(3).

Sea $F = \tilde{F_1}$ y por 4.2.1(3) vale que $|F| \leq p$. ∎

4.3. Corolarios de Hanh-Banach

Corolario 4.3.1 *Si X es normado, M es subespacio y $f \in M^*$ entonces existe $F \in X^*$ tal que $F|_M = f$ y $\|F\| = \|f\|$*

Demostración Sea $p(x) = \|f\| \|x\|$, luego $|f(x)| \leq p$ y por 4.2.4 existe $F : X \to \mathbb{F}$ extensión tal que $|F(x)| \leq p = \|f\| \|x\|$ por lo que $\|F\| \leq \|f\|$; finalmente $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup\limits_{\substack{x \in S \\ \|x\|=1}} |F(x)| \leq \|F\|$ entonces $\|f\| = \|F\|$. ∎

Corolario 4.3.2 *Si X es normado y $\{x_1, \ldots, x_d\}$ es un conjunto linealmente independiente y $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{F}$ entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x_i) = \alpha_i$ para todo $1 \leq i \leq d$.*

Demostración Sea $M = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$ y sea $g(\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i \in M^*$ por 4.1.5, sea f la extensión dada por 4.3.1. ∎

Corolario 4.3.3 *Si X es normado y $x \in X$ entonces:*

$$\|x\| = \max \{|f(x)| \ , \ f \in X^* \ , \ \|f\| \leq 1\} \tag{9}$$

Demostración Sea $f \in X^*$ tal que $\|f\| \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$ por lo que $\sup \{|f(x)| \ , \ f \in X^* \ , \ \|f\| \leq 1\}$ $\|x\|$.

Sea ahora $M = \langle x \rangle$ y definamos $g \in M^*$ dado por $g(\beta x) = \beta \|x\|$ que es continua por 4.1.5 y $\|g\| = 1$. Por 4.3.1 existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = g(x) = \|x\|$. ∎

Corolario 4.3.4 *Si X es normado, $M \subseteq X$ es un subespacio cerrado, $x_0 \in X \setminus M$ y $d = dist\,(x_0, M)$ entonces existe $f \in X^*$ tal que $M \subset \ker f$, $f(x_0) = 1$ y $\|f\| = \frac{1}{d}$*

Demostración Sea $Q : X \to {}^{X}/_{M}$ la proyección al cociente, como $\|[x_0]\| = d$ entonces por 4.3.3 existe $g \in \left({}^{X}/_{M}\right)^*$ tal que $g([x_0]) = d$ y $\|g\| = 1$. Luego si consideramos $f = d^{-1} \circ g \circ Q : X \to \mathbb{F}$ cumple que $f \in X^*$, $f(x_0) = 1$ y $M \subseteq \ker f$; además $|f(x)| = d^{-1} |g(Q(x))| \leq d^{-1} \|g\| \|Q\| \|x\|$ por lo que $\|f\| \leq d^{-1}$.

Por otro lado, como $\|g\| = 1$ existe $[x_n] \subset B_1([0]) \subseteq {}^{X}/_{M}$ tal que $|g([x_n])| \to 1$, sea $y_n \in Q^{-1}[x_n]$ que cumple que $\|x_n + y_n\| < 1$, entonces $|f(x_n + y_n)| = d^{-1} |g([x_n])| \to d^{-1}$ por lo que $\|f\| = d^{-1}$. ∎

Corolario 4.3.5 *Si X es normado y M es un subespacio, entonces:*

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f \tag{10}$$

Demostración Si $f \in X^*$, $x \in \overline{M}$ y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ con $x_n \to x$ tal que $f(x_n) = 0$, entonces como f es continua $0 = f(x_n) \to f(x) = 0$ por lo que $x \in \ker f$.

Recíprocamente si $x_0 \notin \overline{M}$ entonces por 4.3.4 existe $f \in X^*$ tal que $M \subset \ker f \not\ni x_0$ por lo que $x_0 \notin \bigcap\limits_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f$. ∎

Corolario 4.3.6 *Si X es normado y M es subespacio, entonces M es denso si y sólo si dado $f \in X^*$ tal que $M \subseteq \ker f$ implique que $f = 0$.*

Demostración Si $\overline{M} = X$ dado $x \in X$ existe $m_n \subset M$ tal que $m_n \to x$ por lo que $0 = f(m_n) \to f(x) = 0$ por lo que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Recíprocamente, si $\bigcap\limits_{\substack{f \in X^* \\ M \subseteq \ker f}} \ker f = \ker 0 = X$ entonces por 4.3.5 vale que $X = \overline{M}$. ∎

4.4. Separabilidad y Reflexividad

Teorema 4.4.1 *Sea X normado tal que X^* es separable, entonces X es separable*

Demostración Como X^* es separable entonces $B = \partial B_1[0]$ lo es, sea $D = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en B. Sea $0 < \epsilon < 1$, como $\|f_n\| = 1$ entonces existe x_n tal que $\|x_n\| = 1$ y $|f(x_n)| \geq \epsilon$ y sea $M = \overline{\langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle}$.

Sea $x_0 \in X \setminus M$, luego por 4.3.6 existe $f \in X^*$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y $M \subseteq \ker f$. Luego $\epsilon \leq |f_n(x_n)| = \left| f_n(x_n) - \underbrace{f(x_n)}_{x_n \in M \subset \ker f} \right| = |(f - f_n)(x_n)| \leq \|x_n\| \|f - f_n\| = \|f - f_n\|$, por lo que $\|f - f_n\| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$; como D era denso concluímos que $X = M$.

Finalmente si $F = \left\langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$ con las combinaciones lineales con escalares racionales de M, entonces $\overline{F} = M = X$ por lo que X es separable. ∎

Teorema 4.4.2 *Sea X normado, S subespacio y $S^\circ = \{f \in X^* \ / \ S \subset \ker f\}$; luego S° es un subespacio cerrado y ${X^*}/{S^\circ} \simeq S^*$.*

Demostración Sea $s \in S$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^\circ$ tal que $f_n \to f$, luego $|f(s)| = \left| (f - f_n)(s) + \underbrace{f_n(s)}_{f_n \in S^\circ} \right| \leq \|f - f_n\| \|s\| \to 0$ por lo que $f \in S^\circ$ y S° es cerrado.

Sea entonces $F : S^* \to {X^*}/{S^\circ}$ dada por $F(f) = [\hat{f}]$ donde $\hat{f}$ es la de 4.3.1, F esta bien definida pues si g es otra extensión continua entonces $[g] = [\hat{f}]$ pues $g|_S = \hat{f}|_S = f$.

Es claro que F es lineal e inyectiva, si $h \in {X^*}/{S^\circ}$ entonces $F(f) = h$ si y sólo si $[\hat{f}] = h = [\hat{h}]$, luego si $f = \hat{h}|_S$ entonces $F(f) = h$ por lo que F es sobreyectiva.

Finalmente, si $f \in S^*$ entonces $\|F(f)\| = \left\| [\hat{f}] \right\| = dist(\hat{f}, S^\circ) \leq \left\| \hat{f} \right\| \underbrace{=}_{4,3,1} \|f\|$; por lo que $\|F\| \leq 1$; recíprocamente si $f \in S^*$ y $g \in S^\circ$ entonces $\|f\| = \|f + g|_S\| \leq \left\| \hat{f} + g \right\|$, luego $\|f\| \leq \inf_{g \in S^\circ} \left\| \hat{f} + g \right\| = \left\| [\hat{f}] \right\| = \|F(f)\|$. Concluímos que F es un isomorfismo. ∎

Definición Sea X normado y $(X^*)^*$ su doble dual, definimos la *aplicación canónica* $p : X \to (X^*)^*$ dada por $P(x)(f) = f(x)$.

Observación Si p es la aplicación canónica luego vale que:

1. $p(x) \in (X^*)^*$ para todo $x \in X$
2. p es lineal y monomorfismo
3. $\|p\| = 1$

Demostración Si $x \in X$ luego $|p(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ por lo que $\|p\| \leq 1$ y $p \in (X^*)^*$; es más $\|p(x)\| = \sup_{\substack{f \in (X)^* \\ \|f\|=1}} |p(x)(f)| = \sup_{\substack{f \in (X)^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \underbrace{=}_{4,3,3} \|x\|$. ∎

Definición Sea X normado, decimos que es un espacio *reflexivo* si p es sobreyectiva.

Ejemplo Todo espacio de dimensión finita es reflexivo

Demostración Como $\dim X = n$ y p es monomorfismo entonces es isomorfismo y luego en particular es sobreyectiva.

Observación Si $f, g \in (H)^*$ entonces por 2.7.3 existen $x_0, y_0 \in H$ tal que $f(z) = \langle z, x_0 \rangle, g(z) = \langle z, y_0 \rangle$. Luego el producto interno que refiere a $\|\|_{(H)^*}$ es $\langle f, g \rangle_{(H)^*} = \langle y_0, x_0 \rangle_H$

Teorema 4.4.3 *Sea H Hilbert entonces H es reflexivo.*

Demostración Ya sabemos de 2.7.3 que la aplicación $F : H \to (H)^*$ dada por $F(h)(x) = f(x) = \langle x, h \rangle$ es una isometría lineal. Sea $g \in (H^*)^*$ por lo que $g(f) = \langle f, f_0 \rangle$ para algún $f_0 \in (H)^*$, que a su vez existe $z_0 \in H$ tal que $f_0(x) = \langle x, z_0 \rangle$; luego $p(z_0)(f) = f(z_0) = \langle x, z_0 \rangle = \langle f, f_0 \rangle_{(H)^*} = g(f)$.

Proposición 4.4.4 *Si $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ es base ortonormal de H Hilbert entonces si definimos $f_{v_i}(x) = \langle x, v_i \rangle \in (H)^*$ vale que $\mathcal{F} = \{f_{v_i}\}_{i \in I}$ es base ortonormal de $(H)^*$*

Demostración Sean $f_{vi}, f_{v_j} \in \mathcal{F}$ luego $\left\langle f_{v_i}, f_{v_j} \right\rangle = \langle v_j, v_i \rangle = \delta_{i,j}$ por lo que $\mathcal{F}$ es ortonormal. Finalmente si $f \in (H)^*$ entonces existe $x \in H$ tal que $f(z) = \langle z, x \rangle$ y entonces $0 = \langle f, f_{v_i} \rangle = \langle v_i, x \rangle$ para todo $i \in I$, por la completitud de $\mathcal{B}$ concluímos que $x = 0$ por lo que $f = 0$. ∎

Corolario 4.4.5 *Si H es Hilbert entonces $H \simeq (H)^*$*

Demostración Por 2.5.5 dos veces tenemos que $H, (H)^* \simeq l^2(I)$, luego por transitividad $H \simeq (H)^*$. ∎

Teorema 4.4.6 *Sea X normado y reflexivo, entonces $(X)^*$ es reflexivo*

Demostración Sea $(p)^* : (X)^* \to ((X^*)^*)^*$, $g \in ((X^*)^*)^*$, $h \in (X^*)^*$ y definimos $f := g \circ p \in (X)^*$. Como $h \in (X^*)^*$ entonces existe $x_h \in X$ tal que $p(x_h) = h$ y luego:

- $(p)^*(f)(h) = h(f) = p(x_h)(f) = f(x_h)$
- $g(h) = g \circ p(x_h) = f(x_h)$

Luego $(p)^*(f) = g$ y concluímos que $(X)^*$ es reflexivo. ∎

Teorema 4.4.7 *Si X es reflexivo y $S \subseteq X$ subespacio cerrado entonces S es reflexivo*

Demostración Sea $g \in (S^*)^*$ y consideremos $(x^*)^* \in (X^*)^*$ dada por $(x^*)^*(f) = g \circ T \circ \pi(f)$ donde $T : {(X)^*}/{S^\circ} \to (S)^*$ es el isomorfismo isométrico dado en 4.4.2, $\pi : (X)^* \to {(X)^*}/{S^\circ}$ la proyección al cociente dada por 3.4.3. Como X es reflexivo entonces existe $x \in X$ tal que $p(x) = (x^*)^*$, si $x \notin S$ entonces por 4.3.4 existe $f \in (X)^*$ tal que $f|_S = 0$ y $f(x) \neq 0$ por lo que $f(x) = p(x)(f) = (x^*)^*(f) = g \circ T \circ \pi(f) \underbrace{=}_{f|_S = 0} 0$ y concluímos que $x \in S$.

Sea $f \in (S)^*$ y $\hat{f}$ su extensión dada por 4.3.1, entonces $g(f) = g \circ T \circ \pi(\hat{f}) = (x^*)^*(\hat{f}) = p(x)(\hat{f}) = \hat{f}(x) = f(x) = p(x)(f)$ y concluímos que $p(x) = g$ por lo que S es reflexivo. ∎

Observación l^1 no es reflexivo

Demostración Si l^1 fuese reflexivo entonces $l^1 \simeq (l^\infty)^*$ y como l^1 es separable entonces por 4.4.1 concluímos que l^∞ es separable, concluímos que l^1 no es reflexivo. ∎

4.5. Consecuencias Geométricas de Hahn-Banach

Definición Sea X un espacio vectorial real y $K \subset X$ convexo, decimos que es *absorbente* si para todo $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha x \in K$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \epsilon$

Definición Sea X un espacio vectorial real y $K \subset X$ convexo absorbente tal que $0 \in K$, definimos la *funcional de Minkowsky asociada a* K como la aplicación $p_K(x) = \inf \{\alpha > 0 \ / \ {x}/{\alpha} \in K\}$

Definición Sea X un espacio vectorial real y sea f un funcional lineal, llamaremos *hiperplano* a los conjuntos $f^{-1}(\alpha)$. Si $S \subset X$ decimos que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ *deja a un lado(estrictamente) a* S si $S \subset \{x \in X \;\; f(x) \leq \alpha\}$ ($\{x \in X \;/\; f(x) < \alpha\}$) u el análogo con los signos opuestos.

Proposición 4.5.1 *Si H es hiperplano y $K \subseteq X$ es convexo entonces H deja a un lado estrictamente a K si y sólo si $K \cap H = \emptyset$*

Demostración Sea α tal que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ y supongamos que existe $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) < \alpha$ y $f(x_2) > \alpha$, luego si consideramos $g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1 - x_2) + (1-t)f(x_2)$ por Bonzano existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $g(t_0) = \alpha$ por lo que $t_0x_1 + (1-t_0)x_2 \in H \cap K$ pues K es convexo ∎

Proposición 4.5.2 *Si H es un hiperplano y K es convexo absorbente disjunto de H entonces existe g funcional lineal tal que:*

1. $H = g^{-1}(1)$
2. $-p_K(-x) \leq g(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in X$

Demostración Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X'$ tal que $H = f^{-1}(\alpha)$, luego si $g = \dfrac{f}{\alpha}$ entonces $x \in H$ si y sólo si $f(x) = \alpha$ si y sólo si $\dfrac{f(x)}{\alpha} = g(x) = 1$ por lo que $H = g^{-1}(x)$. Como $K \cap H = \emptyset$ entonces por 4.5 entonces $K \subset g^{-1}((-\infty, 1))$ o $K \subset g^{-1}((1, \infty))$ pero como $g(\underbrace{0}_{0 \in K}) = 0$ entonces $K \subset g^{-1}((1, \infty))$.

Como K es absorbente dado $x \in X$ existe $\beta > 0$ tal que $\dfrac{x}{\beta} < 1$ por lo que $g(x) < \beta$ y concluímos que $g(x) \leq p(x)$. ∎

Proposición 4.5.3 *Sea $H \subseteq X$ un hiperplano en un espacio normado, $S \subset X$ tal que $\mathring{S} \neq \emptyset$ entonces H es cerrado.*

Demostración Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X'$ tal que $H_\alpha = f^{-1}(\alpha)$, si $H_{\alpha+1}$ no fuera cerrado entonces por 4.1.3 es denso y como $\mathring{S} \neq \emptyset$ eso implica que $S \cap H_{\alpha+1} \neq \emptyset$. Luego si $x_n \subset \ker f$ e $y \in H_{\alpha+1}$ entonces $H_{\alpha+1} \ni z \underbrace{=}_{x_n + y \in H_{\alpha+1}} \lim (x_n + y) = \lim x_n + y$ pero $f(z - y) = f(z) - f(y) = 0$ por lo que $\lim x_n \in \ker f$ y por 4.1.4 f es continua; concluímos que H es cerrado. ∎

Definición Sea $K \subset X$ un conjunto, decimos que es *balanceado* si $\alpha x \in K$ para todo $x \in K$ y $|\alpha| \leq 1$.

Proposición 4.5.4 *Si $K \subset X$ es convexo, absorbente tal que $0 \in K$ entonces p_K es sublineal. Más aún si K es balanceado entonces p_K es seminorma y $K = \{x \in X \;/\; p_K(x) < 1\}$.*

Demostración Como K es absorbente entonces $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nK$ por lo que $p_K(x)$ está bien definido para todo $x \in X$. Como $p_K(0) = 0$ trivialmente, si $\alpha > 0$:

$$
\begin{aligned}
p_K(\alpha x) &= \inf \{t \geq 0 \;/\; \alpha x \in tV\} \\
&= \inf \left\{ t \geq 0 \;/\; x \in \left(\frac{t}{\alpha} V \right) \right\} \\
&= \alpha \inf \left\{ \frac{t}{\alpha} \geq 0 \;/\; x \in \left(\frac{t}{\alpha} V \right) \right\} \\
&= \alpha p_K(x)
\end{aligned}
$$

Por otro lado si $\alpha, \beta \geq 0$ y $a, b \in K$ entonces:

$$\alpha a + \beta b = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} a + \frac{\beta}{\alpha + \beta} b \right) \in (\alpha + \beta) K$$

Por la convexidad de K, luego si $x, y \in K$ y $p_K(x) = \alpha, p_K(y) = \beta$ y $\delta > 0$ entonces $x \in (\alpha + \delta) K, y \in (\beta + \delta) K$ pues K es absorbente. Entonces por convexidad $x + y \in (\alpha + \beta + 2\delta) K$ y si $\delta \to 0$ entonces $p_K(x + y) \leq \alpha + \beta = p_K(x) + p_K(y)$.

Supongamos ahora que K es balanceado, si $p_K(x) = \alpha < 1$ entonces para $\alpha < \beta < 1$ vale que $x \in \beta K \subset K$ por lo que $\{x \in X \ / \ p_K(x) < 1\} \subseteq K$. Recíprocamente si $x \in K$ entonces $p_K(x) \leq 1$ y como K es absorbente existe $\epsilon > 0$ tal que si $0 < t < \epsilon$ entonces $y = (1 + t)x = x + tx \in K$, luego $p_K(x) = (1 + t)^{-1} p_K(y) \leq (1 + t)^{-1} < 1$. ∎

Teorema 4.5.5 (Hahn-Banach Geométrico) *Si X es normado, $K \subset X$ es un convexo absorbente abierto tal que $0 \in K$ y $V \subset X$ es una variedad lineal tal que $V \cap K = \emptyset$ entonces existe H hiperplano cerrado tal que $V \subset H$ y H deja a un lado estrictamente a K.*

Demostración Sea $x_0 \in V$ y $S = V - x_0$ un subespacio tal que $x_0 \notin S$, definimos $T = \langle S, x_0 \rangle$ entonces $\dim {}^{T}/_{S} = 1$ y $K \cap S$ es un convexo absorbente abierto en T tal que $V := S + x_0 \cap (K \cap S) = \emptyset$, luego por 4.5.2 existe $g \in T'$ tal que $V = g^{-1}(1)$ y $g \leq p_K$ que es sublineal por 4.5.4. Por 4.2.3 existe $f \in X'$ extensión dominada por p_K, luego si $H = f^{-1}(1)$ es un hiperplano que contiene a V y por 4.5.1 deja estrictamente a un lado a K. Finalmente como K es abierto por 4.5.3 f es continua. ∎

Teorema 4.5.6 *Si X es normado real y A, B son conjuntos disjuntos convexos con A abierto, entonces existe $f \in (X)^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f|_A < \alpha$ y $f|_B \geq \alpha$. Más aún si B es abierto entonces la separación es estricta.*

Demostración Sea $G = A - B$, entonces usemos:

Lema 4.5.7 *G es convexo, abierto y $0 \notin G$*

Demostración del lema Si $x, y \in G$ entonces $x = a_x - b_x, y = a_y - b_y$, luego $tx + (1 - t)y = ta_x - tb_x + (1 - t)a_y - (1 - t)b_y = \left(\underbrace{ta_x + (1 - t)a_y}_{\in A} \right) - \left(\underbrace{tb_x + (1 - t)b_y}_{\in B} \right) = a_{tx+(1-t)y} - b_{tx+(1-t)y} \in G$.

Además $G = \bigcup\limits_{b \in B} A - b$ por lo que G es abierto. Finalmente como $A \cap B = \emptyset$ enotnces $0 \notin G$ ∎

Por 4.5.7 y 4.5.5 existe H hiperplano cerrado tal que $H \cap G = \emptyset$ y sea $f \in (X)^*$ tal que $H = f^{-1}(0)$ que existe por 4.5.2. Luego $f(G)$ es convexo y $0 \notin f(G)$, luego $f|_G > 0$ (sino lo es para $-f$), lo que implica que $f(a) > f(b)$ para todos $a \in A, \ b \in B$; sea α tal que:

$$\sup \{f(b), \ b \in B\} \leq \alpha \leq \inf \{f(a), \ a \in A\}$$

Luego α es el buscado.

Si B es abierto, notemos:

Lema 4.5.8 *Si $f \in (X)^*$ y A es abierto convexo entonces $f(A)$ es un intervalo abierto*

Demostración del lema Sea $a, b \in A$, luego $tf(a) + (1 - t)f(b) = f(ta + (1 - t)b) \in f(A)$ por lo tanto $f(A)$ es convexo y como los únicos convexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos, $f(A)$ es un intervalo.

Sea x_0 tal que $f(x_0) = 1$ y $x \in A$, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $x \pm \epsilon x_0 \in A$, luego $f(x \pm \epsilon x_0) = f(x) \pm \epsilon \in f(A)$, luego $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset f(A)$ y $f(A)$ es abierto. ∎

Luego por 4.5.8 $f(A), f(B)$ son intervalo abiertos por lo que α separa de manera estricta. ∎

Teorema 4.5.9 *Sea X normado y $A, B \subset X$ dos subconjuntos cerrados, convexos y disjuntos; luego si B es compacto entonces A y B se separan de manera estricta.*

Demostración Primero notemos:

Lema 4.5.10 *Si X es normado, $K \subseteq X$ es un compacto y $K \subseteq V \subseteq X$ es abierto entonces existe $U \ni 0$ un entorno tal que $K + U \subset V$*

Demostración del lema Sea $\mathcal{U}_0$ todos los entornos abiertos de 0 y supongamos que para todo $U \in \mathcal{U}_0$, $K + U \nsubseteq V$, luego para cada U existe $x_u \in K,\ y_u \in U$ tal que $x_u + y_u \in V^c$ y ordenemos $\mathcal{U}_0$ por la inclusión inversa; luego $\{x_u\}, \{y_u\}$ son redes en X, más aún $y_u \to 0$ y existe $x \in X$ tal que x es punto de acumulación de la red. Luego, x es punto de acumulación de $x_u + y_u$ y entonces $x \in \overline{V^c} = V^c$; pero $x \in K \subset V$ por lo que existe dicho $U \in \mathcal{U}_0$. ∎

Usando 4.5.10 sobre B, A^c existe U_1 entorno de 0 tal que $B + U_1 \subset A^c$ y por 4.5.4 existe p seminorma tal que $\{x \in X,\ p(x) < 1\} \subset U_1$. Sea $U = \left\{x \in X,\ p(x) < \frac{1}{2}\right\}$, notemos:

Lema 4.5.11 $(B + U) \cap (A + U) = \emptyset$ *y ambos son abiertos convexos.*

Luego por 4.5.11 y 4.5.6 se concluye que A y B se separan estrictamente.

5. Teoremas fundamentales de espacios de Banach

5.1. Teorema de la aplicación abierta

Definición Un espacio topológico X es de *primera cvategoría* si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$. Decimos que es de *segunda categoria* si no es de primera categoría.

Teorema 5.1.1 *Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$ tal que $\operatorname{ran} T$ es de segunda categoría. Entonces si $U \ni 0$ es un entorno abierto en X luego existe $V \ni 0$ entorno abierto en Y tal que $V \subseteq \overline{T(U)}$.*

Demostración Sea $U \ni 0$ un entorno abierto en X y $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha(0) \subseteq U$, finalmente sea $W = B_{\frac{\alpha}{2}}(0)$. Notemos:

Lema 5.1.2 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nW) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(W) = \operatorname{ran} T$

Demostración del lema Si $y \in \operatorname{ran} T$ entonces existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$; por arquimedianidad esta bien definido $n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{\|x\|}{n} < \frac{\alpha}{2}\right\}$ por lo que $x \in n_0 W$ y se concluye que $y \in T(n_0 W)$.

Trivialmente $T(nW) \subset \operatorname{ran} T$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nW) \subset \operatorname{ran} T$. ∎

Como $\operatorname{ran} T$ es de segunda categoría existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \overset{\circ}{\overline{T(W)}} \neq \emptyset$; como además $f(x) = \frac{x}{n_0} \in \operatorname{Hom}(Y)$ entonces concluímos que $\overset{\circ}{\overline{T(W)}} \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $z_0 \in Y$ y $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z_0) \cap T(W) \neq \emptyset$, sea $T(\underbrace{x_0}_{\in W}) = y_0 \in B_\delta(z_0) \cap T(W)$ y $r > 0$ tal que $B_r(y_0) \subseteq B_\delta(z_0) \subseteq \overline{T(W)}$.

Como $B_r(y_0) \subseteq \overline{T(W)}$ entonces $B_r(0) \subseteq \overline{T(W)} - y_0 = \overline{T(W) - y_0} = \overline{T(W - x_0)} \subseteq \overline{T(B_\alpha(0))} \subseteq \overline{T(U)}$.
∎

Teorema 5.1.3 (Teorema de la aplicación abierta) *Sean X, Y normados con X Banach y sea $T \in L(X,Y)$ tal que $\operatorname{ran} T$ es de segunda categoría, entonces:*

1. *Si $\alpha > 0$ entonces existe $\beta > 0$ tal que $B_\beta[0] \subseteq T(B_\alpha[0])$*
2. *$\operatorname{ran} T = Y$*
3. *T es abierta.*

Demostración Vayamos de a partes:

1. Sea $\alpha > 0$ y consideremos $B_{\frac{\alpha}{2}}(0) \subset B_\alpha[0]$, por 5.1.1 existe $\beta > 0$ tal que $B_\beta(0) \subseteq \overline{T(B_{\frac{\alpha}{2}}(0))}$, sea $t > \frac{\alpha}{2}$ y veamos que $B_\beta(0) \subset T(B_t(0))$.

   Sea $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < t - \frac{\alpha}{2}$, por 5.1.1 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ tal que $B_{\delta_n}(0) \subseteq \overline{T_{\epsilon_n}(0)}$ y llamando $\tilde{\delta_n} = \dfrac{\delta_n}{2^n}$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta_n \to 0$.

   Sea $y \in B_\beta(0)$, luego $B_{\delta_1}(y) \cap T\left(B_{\frac{\alpha}{2}}(0)\right) \neq \emptyset$ por lo que existe $T(x_0) = y_0 \in Y$ tal que $\|y - y_0\| < \delta_1$ con $\|x_0\| \leq \frac{\alpha}{2}$. Como $y - y_0 \in B_{\delta_1}(0) \subseteq \overline{T(B_{\epsilon_1}(0))}$ entonces existe $T(\underbrace{x_1}_{\in B_{\epsilon_1}(0)}) = y_1 \in Y$ tal que $\|y - y_0 - y_1\| < \delta_2$. Inductivamente contruímos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $\left\|y - \left(\sum_{1\leq n\leq k} y_n\right)\right\| < \delta_{k+1}$, $y_n = T(x_n)$ y $x_n \in B_{\epsilon_n}(0)$. Notemos que como $\delta_n \to 0$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} y_n = y$; por otro lado $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < t - \frac{\alpha}{2}$ luego por 3.1.3 $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n = x \in X$ y como T es continua, $T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} T(x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} y_n = y$.

Finalmente notemos que $\|x\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|x_n\| = \underbrace{\|x_0\|}_{<\frac{\alpha}{2}} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|}_{<t-\frac{\alpha}{2}} < t$; por lo tanto $B_\beta(0) \subseteq T\left(B_t(0)\right)$.

2. Sea $y \in Y$ y $\alpha, \beta > 0$ que cumplan 1, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{y}{n} \in B_{\frac{\beta}{2}}[0]$, entonces por 1 $\frac{y}{n} \in \operatorname{ran} T$ por lo que $y \in \operatorname{ran} T$.

3. Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $T(x_0) = y_0 \in T(U)$, luego $U - x_0 \ni 0$ es un entorno abierto. Sea $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq U - x_0$ luego $T(B_{\frac{r}{2}[0]}) \subseteq T\left(B_r(0)\right) \subseteq T\left(U\right) - y_0$; por 1 existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta[0]} \subseteq T\left(B_{\frac{r}{2}}[0]\right) \subseteq T(U) - y_0$ por lo que $B_{\frac{\delta}{2}(y_0)} \subseteq T(U)$. ∎

Corolario 5.1.4 (Teorema de la inversa acotada) *Sean X, Y Banach y sea $T \in L(X,Y)$ tal que T es isomorfismo lineal, entonces T es isomorfismo de Banach.*

Demostración Como T es isomorfismo lineal entonces $\operatorname{ran} T = Y$ y como Y es Banach, es completo y por el teorema de Baire es de segunda categoría; luego por 5.1.3 T es abierta si y sólo si T^{-1} es acotada. ∎

5.2. Teorema del Gráfico cerrado

Definición Sean X, Y normados y $T : X \to Y$ un operador lineal cuyo dominio $D(T) \subset X$ es subespacio y $\operatorname{ran} T \subset Y$ es subespacio a su vez. Luego diremos que T es *cerrado* si $\operatorname{Gr} T \subset X \times Y$ es cerrado.

Proposición 5.2.1 *Sean X, Y normados y $T \in L(D(T), Y)$ con $D(T)$ subespacio cerrado de X, entonces T es cerrado.*

Demostración Si $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, luego por 3.1.4 $T(x) \leftarrow T(x_n) \to y$ por lo que $y = T(X)$. ∎

Proposición 5.2.2 *Sean X, Y normados con Y Banach y $T : X \to Y$ un operador cerrado y acotado, entonces $D(T)$ es subespacio cerrado.*

Demostración Sea $x_n \subset D(T)$ tal que $x_n \to x$, luego como T es acotado y lineal $\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T\left(x_n - x_m\right)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\| \to 0$ y como Y es Banach existe $y = \lim T(x_n)$.

Luego como $x_n \to x$, $T(x_n) \to y$ y T es cerrada entonces $x \in D(T)$ y $T(x) = y$. ∎

Teorema 5.2.3 (Teorema del gráfico cerrado) *Sean X, Y Banach y $T : X \to Y$ lineal, entonces $T \in L(X,Y)$ si y sólo si T es cerrada.*

Demostración Como T es cerrada entonces $\operatorname{Gr} T$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$ que es Banach con la norma suma directa. Consideremos $\pi : \operatorname{Gr} T \to X$ dada por $\pi(x, T(x)) = x$, entonces:

- π es lineal
- $\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|$
- π es isomorfismo lineal

Entonces por 5.1.3 resulta que π^{-1} es continua. Por lo tanto si $x_n \to x$ entonces:

$$(x_n, T(x_n)) = \pi^{-1}(x_n) \to \pi^{-1}(x) = (x, T(x))$$

Por lo que $T(x_n) \to T(x)$ y por 3.1.4 $T \in L(X,Y)$.

Recíprocamente, por 5.2.1 y 5.2.2 vale que T es cerrada. ∎

Ejemplo Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ tal que para todo $p \in (1, \infty)$ toda sucesión $x_n \in l^p$ cumple $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in \mathbb{C}$ entonces $a_n \in l^q$

Demostración Sea $T : l^p \to l^\infty$ dado por $T(x_n)(k) = \sum_{1\leq n\leq k} a_n x_n$ y veamos que esta bien definida, es lineal y continua.

1. SI $x_n \in l^p$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ converge, en particular está acotada por lo que $\left\{\sum_{1\leq nk} a_n x_n\right\}_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$.
2. Trivial
3. Veamos que T es cerrado:

   Sea $x_n \in l^p$, $x \in l^p$ e $y \in l^\infty$ tal que $(x_n, T(x_n)) \xrightarrow{\|.\|_{l^p\times l^\infty}} (x, y)$, escribamos $x_n = \left(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_j^n, \ldots\right) \in l^p$ y consideremos:

$$\begin{aligned}\left|T(x_n)(k) - \sum_{1\leq j\leq k} a_j x_j\right| &= \left|\sum_{1\leq j\leq k} a_j(x_j^n - x_j)\right| \\ &\leq \left(\sum_{1\leq j\leq k} \left|x_j^n - x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{1\leq j\leq k} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|x_n - x\|_p C_a \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

   Es decir que $T(x_n)(k) \to \sum_{1\leq j\leq k} a_j x_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$; si y sólo si $T(x_n) \xrightarrow{\|.\|_\infty} T(x)$ y por unicidad del límite $T(x) = y$ y T es cerrada.

   Finalmente como $T : l^p \to l^\infty$ es cerrada y ambos son Banach entonces por 5.2.3 $T \in L(l^p, l^\infty)$

Luego, si $x \in l^p$ entonces $\|T(x)\|_\infty \leq \|T\| \|x\|_p$. Sea:

$$x_j^k = \begin{cases} \overline{a_j}\, |a_j|^{q-2} & \text{si } 1 \leq j \leq k \text{ y } a_j \neq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Luego $a_j x_j = |a_j|^q$ y $\|x\|_p = \left(\sum_{1\leq j\leq k} |a_j|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{1\leq j\leq k} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{p}}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j\leq k} |a_j|^q &= \|T(x)\|_\infty \\ &\leq \|T\| \left(\sum_{1\leq j\leq k} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Longrightarrow \left(\sum_{1\leq j\leq k} |a_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|T\| \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Luego si $k \to \infty$ vemos que $a_n \in l^q$ y $\|a_n\|_q \leq \|T\|$. ∎

5.3. Principio de Acotación Uniforme

Teorema 5.3.1 (Banach-Steinhaus, Principio de Acotación Uniforme) *Sean X, Y Banach y sea $\{T_i\}_{i\in I} \subset L(X, Y)$ tal que:*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_Y < \infty \qquad \forall x \in X$$

Entonces $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(X,Y)} < \infty$

Demostración Sea $n \in N$ y consideremos $X_n = \{x \in X \ : \ \|T_i(x)\|_Y \leq n \quad \forall i \in I\}$, luego X_n es cerrado y por hipótesis:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Como X es Banach por el teorema de Baire existe n_0 tal que $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in X, r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \overset{\circ}{X}_{n_0}$, luego $\|T(x_0 + rz)\|_Y \leq n_0$ para todo $i \in I$ y $z \in B_1(0)$; por lo tanto:

$$\|T_i\|_{L(X,Y)} \leq \frac{1}{r}\left(n_0 + \|T_i x_0\|_Y\right)$$

. ∎

Corolario 5.3.2 *Sea X un espacio de Banach y $F \subset X$ tal que:*

$$\sup_{x \in F} |f(x)| < \infty \quad \forall f \in (X)^*$$

Entonces F es acotado.

Demostración Sea $Y = (X)^*$, $Z = \mathbb{R}$ y $I = F$, luego para todo $x \in F$ consideremos $T_x : Y \to Z$ dado por:

$$T_x(f) = f(x)$$

Luego por hipótesis para todo $f \in Y = (X)^*$:

$$\sup_{x \in F} |T_x(f)| = \sup_{x \in F} |f(x)| < \infty$$

Por 5.3.1 vale que $\sup\limits_{x \in F} \|T_x\| = C < \infty$, por lo que:

$$\sup_{x \in F} \|x\| \underbrace{=}_{4,3,3} \sup_{\substack{x \in F \\ \|f\|=1}} |T_x(f)| \leq \sup_{\substack{x \in F \\ \|f\|=1}} \|T_x\| \, \|f\| \leq \sup_{x \in F} \|T_x\| = C < \infty$$

. ∎

Corolario 5.3.3 *Sea X un espacio de Banach y $F \subset (X)^*$ tal que*

$$\sup_{f \in F} |f(x)| < \infty \quad \forall x \in X$$

Entonces F es acotado.

Demostración Sea $Z = \mathbb{R}$ y $I = F$, luego para todo $f \in F$ consideremos $T_f : X \to Z$ dado por:

$$T_f(x) = f(x)$$

Luego por hipótesis para todo $x \in X$:

$$\sup_{f \in F} |T_f(x)| = \sup_{f \in F} |f(x)| < \infty$$

Por 5.3.1 vale que $\sup\limits_{f \in F} \|T_f\| = C < \infty$, por lo que:

$$\sup_{f \in F} \|f\| = \sup_{\substack{f \in F \\ \|x\|=1}} |T_f(x)| \leq \sup_{\substack{f \in F \\ \|x\|=1}} \|T_f\| \, \|x\| \leq \sup_{f \in F} \|T_f\| = C < \infty$$

. ∎

Corolario 5.3.4 *Si X Banach y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) < \infty$ para todo $f \in (X)^*$ entonces* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$

Demostración Sea $F = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, luego si $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) < \infty$ para todo $f \in (X)^*$ entonces en particular $\sup\limits_{x_n\in F} |f(x_n)| < \infty$ para todo $f \in (X)^*$ y por 5.3.2 entonces $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \sup\limits_{x_n\in F} \|x_n\| < \infty$. ∎

Corolario 5.3.5 *Si X Banach y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (X)^*$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) < \infty$ para todo $x \in X$ entonces* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$

Demostración Sea $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (X)^*$, luego si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) < \infty$ para todo $x \in X$ entonces en particular $\sup\limits_{f_n\in F} |f_n(x)| < \infty$ para todo $x \in X$ y por 5.3.3 entonces $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = \sup\limits_{f_n\in F} \|f_n\| < \infty$. ∎

Corolario 5.3.6 *Sean X, Y Banach y sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ tal que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$, luego:*

1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{L(X,Y)} < \infty$
2. $T \in L(X,Y)$
3. $\|T\|_{L(X,Y)} \leq \liminf \|T_n\|_{L(X,Y)}$

Demostración Por 5.3.1 existe C tal que:

$$\begin{aligned} &\|T_n(x)\| \leq C\,\|x\| \\ &\xRightarrow{n\to\infty} \|Tx\| \leq C\,\|x\| \end{aligned}$$

Luego eso prueba los primeros dos items pues por unicidad del límite T resulta lineal. Finalmente como $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|\,\|x\|$ entonces eso implica que:

$$\|T(x)\| = \liminf \|T_n(x)\| \leq \|x\| \liminf \|T_n\|$$

Por lo que:

$$\sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \underbrace{=}_{3,3,1} \|T\| \leq \liminf \|T_n\|_{L(X,Y)}$$

∎

6. Topologías débiles

6.1. Topología Débil: Definición y propiedades

Notación: Sea X Banach y $x \in X, f \in (X)^*$ entonces notamos:

$$\langle x, f\rangle = \langle f, x\rangle := f(x)$$

Definición Sea X normado, la *topología débil* en X es la topología inicial respecto a la familia $\mathcal{B} = \left\{p_{(x)^*} \ : \ (x)^* \in (X)^*\right\}$, donde:

$$p_{(x)^*}(x) = |\langle x, (x)^*\rangle|$$

Y la notaremos wk o $\sigma(X, (X)^*)$.

Observación $U \subset X$ es $wk-$abierto si y sólo si para todo $x_0 \in U$ existen $\epsilon > 0$ y $(x_1)^*, \ldots, (x_n)^* \in (X)^*$ tal que:

$$\bigcap_{1\leq k\leq n} \left\{x \in X \ : \ p_{(x_k)^*}(x - x_0) < \epsilon\right\} \subset U$$

Por lo que $\{x_i\} \subset X$ converge a x_0 en esta topología si y sólo si $\langle x_i, (x)^*\rangle \to \langle x_0, (x)^*\rangle$ para todo $(x)^* \in (X)^*$. En este caso, diremos que x_i *converge débilmente* a x_0 y lo notaremos $x_i \xrightarrow{d} x_0$, $x_i \xrightarrow{wk} x_0$ o $x_i \to x_0$ (wk)

Proposición 6.1.1 *Sea X normado, entonces $(X, wk)^* = (X)^*$*

Demostración Sea $f \in (X, wk)^*$ y $V \subset \mathbb{F}$ un abierto, luego $f^{-1}(V)$ es wk-abierto en X, luego al ser intersección e abiertos (pues $p_{(x)^*}$ son continuas) $f^{-1}(V)$ es abierto fuertemente por lo que $f \in (X)^*$.

Recíprocamente, sea $f \in (X)^*$ y $\{x_i\} \subset X$ una red tal que $x_i \xrightarrow{wk} x_0$, luego $f(x_i) \to f(x_0)$ si y sólo si $\langle f(x_i), (x)^*\rangle \to \langle f(x_0), (x)^*\rangle$ si y sólo si $p_{(x)^*} \circ f(x_i) \to p_{(x)^*} \circ f(x_0)$ que vale pues ambas son continuas. ∎

Proposición 6.1.2 *Sea X normado, entonces $\sigma(X, (X)^*)$ es Hausdorff*

Demostración Sea $x \neq y \in X$, como $\{x\}, \{y\}$ son espacios compactos por 4.5.9 existe $f \in (X)^*$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que:

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle$$

Sean $U = f^{-1}((-\infty, \alpha)), V = f^{-1}((\alpha, \infty))$ luego $U \cap V = \emptyset$ y $x \in U, y \in V$. ∎

Proposición 6.1.3 *Sean X normado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión. Luego:*

1. *Si $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x_0$ entonces $x_i \xrightarrow{d} x_0$.*
2. *Si $x_i \xrightarrow{d} x_0$ entonces $\{\|x_n\|\}$ está acotado y $\|x_0\| \leq \liminf \|x_n\|$*
3. *Si $x_i \xrightarrow{d} x_0$ y $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{(X)^*}} f_0$ entonces $f_n(x_n) \to f_0(x_0)$*

Demostración Vamos por partes:

1. Sea $f \in (X)^*$, luego $|\langle f(x_n) - f(x_0)\rangle| \leq \|f\|_{(X)^*} \|x_n - x_0\|_X \to 0$; por lo tanto $x_i \xrightarrow{d} x_0$.
2. Sea $T_n : (X)^* \to \mathbb{R}$ dado por $T_n(f) = f(x_n)$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(f) = f(x_0) = T(f)$ para todo $f \in (X)^*$; como $(X)^*, \mathbb{R}$ son Banach entonces por 5.3.1 vale la conclusión.
3. $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f_0, x_0\rangle| = |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f_0, x_n\rangle + \langle f_0, x_n\rangle - \langle f_0, x_0\rangle| \leq |\langle f_n - f_0, x_n\rangle| + |\langle f_0, x_n - x_0\rangle| \leq \underbrace{\|x_n\|_X}_{\leq C} \underbrace{\|f_n - f_0\|_{(X)^*}}_{\to 0} + \underbrace{|\langle f_0, x_n - x_0\rangle|}_{\to 0} \to 0$. ∎

6.2. Conjuntos convexos y operadores

Proposición 6.2.1 *Si X es normado y $A \subset X$ es convexo entonces $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{wk}$*

Demostración Sea $x \in \left(\overline{A}^{\|\cdot\|}\right)^c$, luego por 4.5.6 existe $(x)^* \in (X)^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \overline{A}^{\|\cdot\|}$ vale:

$$|\langle a, (x)^* \rangle| < \alpha < |\langle x, (x)^* \rangle|$$

Luego $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq B = \{y \in X \ : \ |\langle y, (x)^* \rangle| \leq \alpha\}$ que es wk cerrado; por lo tanto $\overline{A}^{wk} \subseteq B$ y entonces $x \in \left(\overline{A}^{wk}\right)^c$; concluímos que $\overline{A}^{wk} \subseteq \overline{A}^{\|\cdot\|}$ y como la recíproca es trivial finalizamos. ∎

Corolario 6.2.2 (Teorema de Mazur) *Sea X normado y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión tal que $x_i \xrightarrow{d} x$, entonces existe y_n hecho de combinaciones convexas de los x_n tal que $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.*

Demostración Sea $C = conv\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}\right)$ que es convexo, luego por hipótesis $x \in \overline{C}^{wk}$ y por 6.2.1 $x \in \overline{C}^{\|\cdot\|}$. ∎

Corolario 6.2.3 *Sea $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexa y semicontinua inferiormente, luego ϕ es wk semi continua inferiormente.*

Demostración Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, luego $A = \phi^{-1}((-\infty, \lambda])$ es convexo y fuertemente cerrado, luego por 6.2.1 es convexo y wk cerrado. ∎

Corolario 6.2.4 *Sea $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexa y continua, luego ϕ es wk semi continua inferiormente.*

Teorema 6.2.5 *Sean X, Y Banach. Luego $T \in L(X, Y)$ si y sólo si $T \in L((X, wk), (Y, wk))$*

Demostración Supongamos que $T \in L(X, Y)$, luego por la propiedad universal de la topología inicial basta ver que $p_{(y)^*} \circ T : (X, wk) \to \mathbb{R}$ dado por $x \mapsto \langle y, T(x) \rangle$ es continua para todo $y \in Y$. Como $T \in L(X, Y)$, $p \in (Y)^*$ y 6.1.1 concluímos que $p_{(y)^*} \circ T \in ((X, wk))^*$.

Recíprocamente, si $T \in L((X, wk), (Y, wk))$ entonces por 5.2.3 $\operatorname{Gr} T$ es cerrado en:

$$(X \times Y, \sigma(X, (X)^*) \times \sigma(Y, (Y)^*)) = (X \times Y, \sigma(X \times Y, (X \times Y)^*))$$

y por lo tanto como $\tau_{wk} \subset \tau_{\|.\|}$ entonces $\operatorname{Gr} T$ es fuertemente cerrado; finalmente por 5.2.3 concluímos que $T \in L(X, Y)$. ∎

6.3. Topología Débil Estrella: Definición y Propiedades

Definición Sea X normado, la *topología débil estrella* en $(X)^*$ es la topología inicial respecto a la familia $\mathcal{F} = \{p_x \ : \ x \in X\}$ donde:

$$p_x((x)^*) = |\langle x, (x)^* \rangle|$$

Y la notaremos $(wk)^*$ o $\sigma((X)^*, X)$.

Observación $U \subset (X)^*$ es $(wk)^*$ −abierto si y sólo si para todo $(x_0)^* \in U$ existen $\epsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que:

$$\bigcap_{1 \leq k \leq n} \{(x)^* \in (X)^* \ : \ p_{x_k}((x)^* - (x_0)^*) < \epsilon\} \subset U$$

Por lo que $\{(x_i)^*\} \subset (X)^*$ converge a $(x_0)^*$ en esta topología si y sólo si $\langle (x_i)^*, x \rangle \to \langle (x_0)^*, x \rangle$ para todo $x \in X$. En este caso, diremos que $(x_i)^*$ *converge débil estrella* a $(x_0)^*$ y lo notaremos $(x_i)^* \xrightarrow{(d)^*} (x_0)^*$, $(x_i)^* \xrightarrow{(wk)^*} (x_0)^*$ o $(x_i)^* \to (x_0)^* \ ((wk)^*)$

Proposición 6.3.1 *Sea X normado, entonces* $\left(\left((X)^*, (wk)^*\right)\right)^* \simeq X$

Demostración Sea $x \in X$, afirmo que $ev_x \in dual\left((X)^*, (wk)^*\right)$ pues si $(x_i)^* \xrightarrow{(d)^*} (x_0)^*$ entonces por definición $ev_x((x_i)^*) := \langle (x_i)^*, x\rangle \to \langle (x_0)^*, x\rangle := ev_x((x_0)^*)$. Por lo tanto si notamos $J : X \to (X^*)^*$ a la inyección canónica tenemos que $X \simeq J(X) \subseteq \left(\left((X)^*, (wk)^*\right)\right)^*$.

Recíprocamente, sea $f \in \left(\left((X)^*, (wk)^*\right)\right)^*$, luego $U = \{(x)^* \in (X)^* \ : \ |f((x)^*)| < \delta\} \in \tau_{(wk)^*}$, si y sólo si:existe $\epsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que:

$$\bigcap_{1 \le k \le n} \{(x)^* \in (X)^* \ : \ (x)^*(x_k) < \epsilon\} := \bigcap_{1 \le k \le n} \{(x)^* \in (X)^* \ : \ ev_{x_k}((x)^*) < \epsilon\} \subset U$$

Luego vale que $\bigcap\limits_{1 \le k \le n} \ker x_k \subseteq \ker f$. Notemos el siguiente resultado:

Lema 6.3.2 *Sea $f, f_1, \ldots, f_n$ funcionales lineales en X tal que $\bigcap\limits_{1 \le k \le n} \ker x_k \subseteq \ker f$, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $f = \sum\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i f_i$*

Demostración del lema Sea $l : X \to \mathbb{R}^n$ dado por $l(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ y sea $V = \operatorname{ran} l$. Luego $\ker l = \bigcap\limits_{1 \le k \le n} \ker x_k$ y existe $\phi : V \to \mathbb{R}$ tal que $f = \phi \circ l$ dado por $\phi(v) = f(x)$ donde $x \in l^{-1}(v)$ que esta bien definido por hipótesis.

Por 4.3.1 existe $\tilde{\phi} \in \left(\mathbb{R}^k\right)^*$ y $\tilde{\phi}(y) = \sum\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i y_i$. Por lo tanto existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $f(x) = \phi \circ l(x) = \phi\left(f_1(x), \ldots, f_n(x)\right) = \tilde{\phi}\left(f_1(x), \ldots, f_n(x)\right) = \sum\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i f_i(x)$. ∎

Por 6.3.2 existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tal que $f = \sum\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i ev_{x_i} \in J(X)$. Por lo tanto $\left(\left((X)^*, (wk)^*\right)\right)^* \simeq X$.
∎

Corolario 6.3.3 *Sea $\phi \in \left((X)^*, (wk)^*\right)^*$, entonces existe un único $x_0 \in X$ tal que $\phi(f) = \langle f, x_0\rangle$*

Proposición 6.3.4 *Sea X normado, entonces $\sigma((X)^*, X)$ es Hausdorff*

Demostración Sea $f \neq g \in (X)^*$, luego existe $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle g, x\rangle$$

Sean $U = p_x^{-1}((-\infty, \alpha)), V = p_x^{-1}((\alpha, \infty))$ luego $U \cap V = \emptyset$ y $f \in U, g \in V$. ∎

Proposición 6.3.5 *Sean X Banach y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (X)^*$ una sucesión. Luego:*

1. *Si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{(X)^*}} f$ entonces $f_n \xrightarrow{d} f$.*
2. *Si $f_n \xrightarrow{d} f$ entonces $f_n \xrightarrow{(d)^*} f$.*
3. *Si $f_n \xrightarrow{(d)^*} f$ entonces $\{\|f_n\|\}$ está acotado y $\|f\| \le \liminf \|f_n\|$*
4. *Si $f_n \xrightarrow{(d)^*} f$ y $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$ entonces $f_n(x_n) \to f(x)$*

Demostración Vamos por partes:

1. Sea $x \in (X^*)^*$, luego $|\langle x(f_n) - x(f_0)\rangle| \le \|x\|_{(X^*)^*} \|f_n - f_0\|_{(X)^*} \to 0$; por lo tanto $f_n \xrightarrow{d} f$.
2. Sea $x \in X$, luego $|\langle f_n(x) - f(x)\rangle| \underbrace{=}_{J : X \to (X^*)^*} |\langle J(x)(f_n) - J(x)(f_0)\rangle| \to 0$; por lo tanto $f_n \xrightarrow{(d)^*} f$.

3. Sea $T_n : X \to \mathbb{R}$ dado por $T_n(x) = f_n(x)$, luego $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x) = T(f)$ para todo $x \in X$; como $X, \mathbb{R}$ son Banach entonces por 5.3.1 vale la conclusión.

4. $$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &= |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f_n, x\rangle + \langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| \le |\langle f_n, x_n - x\rangle| + |\langle f_n - f, x\rangle| \\ &\le \underbrace{\|f_n\|_{(X)^*}}_{\le C} \underbrace{\|x_n - x\|_X}_{\to 0} + \underbrace{|\langle f_n - f, x\rangle|}_{\to 0} \to 0 \end{aligned}$$

∎

6.4. El teorema de Alaoglu

Teorema 6.4.1 (Teorema de Alaoglu) *Sea X normado, luego $B_1(0) \subset (X)^*$ es $(wk)^*$ compacta.*

Demostración Sea $x \in X$, llamemos $B = B_1(0) \subset (X)^*$, $D_x = \{\alpha \in \mathbb{F} \ : \ |\alpha| \le 1\}$ y sea $D = \prod_{x\in X} D_x$ que por Tychonoff es compacto. Sea $\tau : B \to D$ dado por:

$$\tau(f)(x)\langle f, x\rangle$$

Afirmo que τ es un homeomorfismo de $(B, (wk)^*)$ a $\tau(B)$ como subespacio de D.

En efecto, si $\tau(f) = \tau(g)$ entonces $f(x) = \langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle = g(x)$ para todo $x \in X$ por lo que $f = g$. Por otro lado, si $f_n \xrightarrow{(d)^*} f$ entonces $\tau(f_n)(x) = \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle = \tau(f)(x)$ para todo $x \in X$ si y sólo si $\tau(f_n) \xrightarrow{\tau_{prod}} \tau(f)$ por lo que τ es continua. Finalmente $\tau^{-1} : \tau(B) \to (B, (wk)^*)$ es continua si y sólo si $p_x \circ \tau^{-1} : \tau(B) \to \mathbb{R}$ es continua para todo $x \in X$ por la propiedad universal de la topología inicial; pero $p_x \circ \tau^{-1}(w) = \langle \tau^{-1}(w), x\rangle \underbrace{=}_{w=\tau(f)} \langle f, x\rangle = w_x$ por lo que $p_x \circ \tau^{-1} = \pi_x$ la proyección a la x coordenada que es continua pues $\tau(B) \hookrightarrow D$ que tiene la topología producto. Concluímos que $\tau : (B, (wk)^*) \to \tau(B)$ es un homeomorfismo.

Finalmente afirmo que $\tau(B)$ es τ_{prod} cerrado.

Sean $\{f_i\}_{i\in I} \subset B$ y $g \in D$ tal que $\tau(f_i) \to g$ por lo que $h(x) = \lim \langle f_i, x\rangle$ esta bien definido y $h \in (X)^*$. Además, si $\|x\| \le 1$ entonces $|h(x)| \le 1$ pues $\langle f_i, x\rangle \in D_x$ por lo tanto $h \in B$ y $\tau(h) = g$. Esto demuestra que $\tau(B)$ es τ_{prod} cerrado.

Como D es compacto y $\tau(B)$ es cerrado entonces $\tau(B)$ es compacto y como τ es homeomorfismo concluímos que B es compacto. ∎

6.5. El teorema de Kukatani

Notación: Si X es normado entonces notaremos ball X a la bola cerrada unitaria, ie: $ballX = \{x \in X \ : \ \|x\| \le 1\}$

Proposición 6.5.1 *Si X es normado entonces* ball X *es $\sigma((X^*)^*, (X)^*)$ densa en* ball $(X^*)^*$

Demostración Sea $B = \overline{J(\text{ball}\, X)}^{\sigma((X^*)^*, (X)^*)} \subset \text{ball}\,(X^*)^*$ y supongamos que existe $f_0 \in \text{ball}\,(X^*)^* \setminus B$, luego por 4.5.6 existe $(x)^* \in (X)^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \text{ball}\, X$ vale que:

$$\text{Re}\langle x, (x)^*\rangle < \alpha < \text{Re}\,\langle (x)^*, f\rangle$$

Reemplazando $(x)^*$ por $\alpha^{-1}(x)^*$ obtenemos que:

$$\text{Re}\langle x, (x)^*\rangle < 1 < \text{Re}\,\langle (x)^*, f\rangle$$

Como $e^{i\theta}x \in \text{ball}\, X$ si $x \in \text{ball}\, X$ entonces $|\langle x, (x)^*\rangle| \le 1$ si $\|x\| \le 1$ entonces $(x)^* \in \text{ball}\,(X)^*$. Pero entonces $1 < \text{Re}\,\langle (x)^*, f\rangle \le |\langle (x)^*, f\rangle| \le \|f\| \le 1$ por lo que $\overline{J(\text{ball}\, X)}^{\sigma((X^*)^*, (X)^*)} = \text{ball}\,(X^*)^*$ ∎

Teorema 6.5.2 (Teorema de Kukatani) *Sea X Banach, entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *X es reflexivo*
2. *$(X)^*$ es reflexivo*
3. *$\sigma\left((X)^*, X\right) = \sigma\left((X)^*, (X^*)^*\right)$*
4. *$\operatorname{ball} X$ es wk compacto*

Demostración Vayamos por partes:

(1) $\Longrightarrow$ (3) Es claro pues $X = (X^*)^*$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Afirmo que $\sigma\left((X^*)^*, (X)^*\right)|_X = \sigma\left(X, (X)^*\right)$

En efecto, $U \ni 0$ es un entorno de 0 referido a $\tau_{((X^*)^*, (wk)^*)}|_{J(X)}$ si y sólo si existen $\epsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_n \in (X)^*$ tal que $\bigcap\limits_{1 \le k \le n} \{(x^*)^* \in J(X) \subset (X^*)^* \;:\; Jx(f_k) < \epsilon)\} \subset U$ si y sólo si existen $\epsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_n \in (X)^*$ tal que $\bigcap\limits_{1 \le k \le n} \{x \in X \;:\; p_{f_k}(x) < \epsilon)\} \subset U$ si y sólo si U es un entorno de 0 referido a $\tau_{\sigma(X,(X)^*)}$

Luego, por hipótesis y la afirmación $\operatorname{ball} X$ es $\sigma((X^*)^*, (X)^*)$ cerrada en $\operatorname{ball}(X^*)^*$ y por 6.5.1 además es densa; por lo tanto $\operatorname{ball} X = \operatorname{ball}(X^*)^*$ y X es reflexivo.

(3) $\Longrightarrow$ (2) Por 6.4.1 $\operatorname{ball}(X)^*$ es $\sigma\left((X)^*, X\right)$ compacto y por hipótesis entonces es $\sigma\left((X)^*, (X^*)^*\right)$ compacta. Por (4) $\Longrightarrow$ (1) vale que $(X)^*$ es reflexivo.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Como $\operatorname{ball} X$ es cerrado en $(X^*)^*$ (en realidad $J(\operatorname{ball} X)$) por 6.2.1 es $\sigma\left((X^*)^*, ((X^*)^*)^*\right)$ cerrado. Por hipótesis $(X)^* = ((X^*)^*)^*$ por lo tanto $\operatorname{ball} X$ es $\sigma\left((X^*)^*, (X)^*\right)$ cerrado en $(X^*)^*$, como por 6.5.1 $\operatorname{ball} X$ es $\sigma\left((X^*)^*, (X)^*\right)$ denso en $\operatorname{ball}(X^*)^*$ entonces $\operatorname{ball} X = \operatorname{ball}(X^*)^*$ y X es reflexivo.

(1) $\Longrightarrow$ (4) Por 6.4.1 $\operatorname{ball}(X^*)^*$ es $\sigma\left((X^*)^*, (X)^*\right)$ compacta y por hipótesis $(X^*)^* = X$ por lo que $\operatorname{ball} X$ es $\sigma\left(X, (X)^*\right)$ compacta. ∎

Corolario 6.5.3 *Sea X Banach reflexivo y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado, entonces M es un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración Como $\operatorname{ball} M = M \cap \operatorname{ball} X$ entonces $\operatorname{ball} M$ es $\sigma(X, (X)^*)$ compacto por 6.5.2, queda ver que $\sigma\left(X, (X)^*\right)|_M = \sigma(M, (M)^*)$.

Sea $U \ni 0$ un entorno de 0 referido a $\tau_{\sigma(M,(M)^*)}$ sy i sólo si existe $\epsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_n \in (M)^*$ tal que $\bigcap\limits_{1 \le k \le n} \{m \in M \;:\; f_i(m) < \epsilon\} \subset U$, debido a 4.3.1 sean $F_1, \ldots, F_n \in (X)^*$ las extensiones respectivas, luego $\bigcap\limits_{1 \le k \le n} \{m \in M \;:\; f_i(m) < \epsilon\} = \bigcap\limits_{1 \le k \le n} \{m \in M \;:\; F_i(m) < \epsilon\} \in \tau_{\sigma(X,(X)^*)|_M}$. ∎

Corolario 6.5.4 *Sea X Banach reflexivo, entonces es wk secuencialmente completo.*

Demostración Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión wk de Cauchy, luego $\{\langle x_n, f\rangle\} \subset \mathbb{F}$ es una sucesión de Cauchy (y por ende converge) para todo $f \in (X)^*$. Por lo tanto $\{x_n\}$ es wk acotado y por 5.3.4 existe M tal que $\|x_n\|_X \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$; no obstante $\{x \in X \;:\; \|x\| \le M\} = M \operatorname{ball} X$ es wk compacto por 6.5.2 por lo que existe $x \in X$ y $(x_n)_k$ subsucesión tal que $x_{n_k} \xrightarrow[cl]{d} x$ y como para todo $f \in (X)^*$ $\lim \langle f, x_n\rangle < \infty$ entonces $x_{n_k} \xrightarrow{d} x$. ∎

Corolario 6.5.5 *Sea X Banach reflexivo, $M \subseteq X$ un subespacio cerrado y $x_0 \in M^c$, entonces existe $y_0 \in M$ tal que $d(x_0, M) = \|x_0 - y_0\|$*

Demostración Por 6.2.4 se tiene que $x \mapsto \|x - x_0\|$ es wk semicontinua inferiormente y si $d = d(x_0, M)$ entonces $M \cap B_{2d}(x_0)$ es wk compacto por 6.5.2 y 6.5.3; concluímos porque una función semicontinua inferiormente alcanza el mínimo en un compacto. ∎

Corolario 6.5.6 *Sea X Banach reflexivo y sea $K \subseteq X$ cerrado, acotado y convexo; luego K es $\sigma(X, (X)^*)$ compacto.*

Demostración Como es cerrado y convexo entonces por 6,2,1 es wk cerrado, y por ser acotado $K \subset M \operatorname{ball} X$ para algún M. Por 6.5.2 $M \operatorname{ball} X$ es wk compacto y como K es wk cerrado en un wk compacto, es wk compacto. ∎

6.6. Separabilidad

Teorema 6.6.1 *Sea X Banach tal que $(X)^*$ es separable, entonces X es separable*

Demostración Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (X)^*$ un conjunto denso numerable, y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ el conjunto de los x_n tal que $\|x_n\|_X = 1$ y cumple $\langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{(X)^*}$; a su vez sea $L_0 = \left\{\sum_{J \text{ finito}} \alpha_j x_j \ : \ \alpha_j \in \mathbb{Q},\ J \subset \mathbb{N}\right\} = \left\langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\rangle_{\mathbb{Q}}$ el espacio vectorial generado sobre $\mathbb{Q}$ de las x_n.

Es sabido que L_0 es numerable y si llamamos $L = \left\langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\rangle_{\mathbb{R}}$ entonces L_0 es denso en L; afirmo que L es denso en X a su vez.

En efecto, sea $f \in (X)^*$ tal que $f|_L = 0$ y sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\|_{(X)^*} < \epsilon$ y además:

$$\frac{1}{2}\|f_N\|_{(X)^*} \leq \langle f_N, x_N\rangle = \langle f_N - f, x_N\rangle < \epsilon$$

Por lo tanto $\|f\|_{(X)^*} \leq \|f - f_N\|_{(X)^*} + \|f_N\|_{(X)^*} < 3\epsilon$ y concluímos que $f = 0$. De 4.3.6 concluímos que X es separable ∎

Observación La vuelta no vale pues $X = L^1$ es separable pero su dual L^∞ no lo es.

Corolario 6.6.2 *Sea X un Banach, entonces X es reflexivo y separable si y sólo si $(X)^*$ es reflexivo y separable*

Demostración Por 6.5.2 y 6.6.1 concluímos que si $(X)^*$ es reflexivo y separable entonces X lo es. Recíprocamente, si X es reflexivo y separable entonces $(X^*)^*$ lo es y por la anterior implicación $(X)^*$ lo es. ∎

Teorema 6.6.3 (Metrizabilidad de la topología débil estrella) *Sea X Banach, entonces X es separable si y sólo si* $\operatorname{ball}(X)^*$ *es* $(wk)^*$ *metrizable*

Demostración Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{ball} X$ un conjunto denso y numerable de $\operatorname{ball} X$ y para cada $f \in (X)^*$ definamos:

$$[f] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle|$$

De Cálculo Avanzado sabemos que $[.]$ es una norma en $(X)^*$ y que $[f] \leq \|f\|_{(X)^*}$; llamemos $d(f-g) = [f-g]$ la correspondiente métrica y veamos que $(\operatorname{ball}(X)^*, \tau_d) = (\operatorname{ball}(X)^*, (wk)^*)$.

Sea $f_0 \in \operatorname{ball}(X)^*$ y $V \ni f_0$ un entorno según $(wk)^*$ y asumamos que V es básico, ie:

$$V = \{f \in \operatorname{ball}(X)^* \ : \ |\langle f - f_0, y_i\rangle| < \epsilon\}$$

Para algunos $\epsilon > 0$ y $y_1, \ldots, y_k \in X$; es más asumamos que $\|y_i\|_X \leq 1$ y que (bajo reordenamiento de los índices de ser necesario) $\|y_i - x_{n_i}\|_X < \frac{\epsilon}{4}$. Sea $r > 0$ tal que $2^{n_i} r < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $1 \leq i \leq k$ y afirmo que $U = B_r^d(f_0) \subset V$ donde la bola es tomada según d (de ahí el superscripto d).

En efecto, si $d(f, f_0) < r$ entonces:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n_i}}|\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| < r && 1 \leq i \leq k \\ \Longrightarrow\ & |\langle f - f_0, y_i\rangle| = |\langle f - f_0, y_i - x_{n_i}\rangle| + |\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| < \epsilon && 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

Y concluímos que $f \in V$.

Para el otro lado, sea $r > 0$ y encontremos $V \in \tau_{(wk)^*}$ tal que $f_0 \in V \subset B_r^d(f_0)$; para esto afirmo que $V = \{f \in \text{ball}\,(X)^* \;:\; |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \epsilon \quad 1 \leq i \leq k\}$ con k, ϵ a determinar. Si $f \in V$ entonces:

$$d(f, f_0) = \sum_{1 \leq n \leq k} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| + \sum_{n \geq k+1} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| < \epsilon + 2 \sum_{n \geq k+1} \frac{1}{2^n} = \epsilon + \frac{1}{2^{k-1}}$$

Por ende si $\epsilon = \frac{r}{2}$ y k es tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$ concluímos que $f_0 \in V \subset U$; concluímos que si X es separable entonces ball $(X)^*$ es metrizable.

Recíprocamente, supongamos que ball $(X)^*$ es $(wk)^*$ metrizable y sea:

$$U_n = \left\{ f \in \text{ball}\, X \;:\; d(f, 0) < \frac{1}{n} \right\}$$

Y sea $V_n \ni 0$ un entorno de 0 respecto a $(wk)^*$ tal que $V_n \subset U_n$. Asumamos que:

$$V_n = \{f \in \text{ball}\,(X)^* \;:\; |\langle f, x_n\rangle| < \epsilon_n \quad \forall x \in \Phi_n\}$$

Donde $\epsilon_n > 0$ y $\Phi_n \subset X$ es finito. Sea $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$ y sea $f \in (X)^*$ tal que $f|_D = 0$; entonces $f \in V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que $f \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende, $f = 0$ y por 4.3.6 concluímos que D es denso en X y por lo tanto separable ∎

Teorema 6.6.4 (Metrizabilidad de la topología débil) *Sea X Banach, entonces $(X)^*$ es separable si y sólo si* ball X *es wk metrizable*

Demostración Si $(X)^*$ es separable entonces replicando la demostración 6.6.3 intercambiando los roles de X y $(X)^*$ se prueba que ball X es wk metrizable. Para la vuelta esta fuera del alcance de este apunte en el caso general (Notar que a priori no podemos usar Hanh Banach aquí) [Ver An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory By Zdzislaw Denkowski, Stanislaw Migórski, Nikolaos S. Papageorgiou]. En el caso reflexivo es trivial por usar 6.6.3 en ball $(X^*)^* =$ ball X. ∎

Corolario 6.6.5 *Sea X Banach reflexivo y separable, entonces* (ball X, wk) *es un espacio métrico compacto*

Demostración Por 6.5.2, 6,6,4 y 6.6.2 ∎

Corolario 6.6.6 *Sea X Banach separable y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (X)^*$ una sucesión acotada, entonces existe $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión $(wk)^*$ convergente.*

Demostración Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|f_n\|_{(X)^*} \leq 1$ y como por 6.4.1 y 6.6.3 ball $(X)^*$ es $(wk)^*$ compacta y metrizable el resultado sigue de la caracterización de espacios métricos compactos ∎

Teorema 6.6.7 (Teorema de Eberlein-Smulian) *Sea X un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y sólo si toda sucesión $\|.\|_X$ acotada admite una subsucesión wk convergente*

Demostración Sea $M_0 = \left\langle \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \right\rangle_{\mathbb{F}}$ y sea $M = \overline{M_0}$, luego M es separable y reflexivo por 6.5.3. Entonces por 6.6.2 $(M)^*$ es reflexivo y separable, por lo que por 6.5.2 y 6.6.4 ball M es un espacio métrico compacto por lo que existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión $\sigma(M, (M)^*)$ convergente a un x_0; pero como probamos que $\sigma(M, (M)^*) = \sigma(X, (X)^*)\,|_M$ entonces $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es wk convergente a x_0.

La vuelta esta por fuera del alcance de este apunte, ver

- Albiac?Kalton, Topics in Banach Space Theory (GTM 233), Corollary 1.6.4, page 24
- Whitley, An elementary proof of the Eberlein-?mulian theorem, Mathematische Annalen 172 (2), 1967, 116-118

. ∎

7. Operadores lineales en Espacios de Banach

7.1. Adjunto de un operador lineal

Definición Sean X, Y espacios vectoriales y $T : X \to Y$ una tranformación lineal. Definimos el *adjunto algebraico* de T como $T' : Y' \to X'$ dado por $T'(y') = y' \circ T$

Proposición 7.1.1 *Sean X, Y Banach y $T : X \to Y$ lineal, entonces son equivalentes:*

1. *T es acotada*
2. *$T'((Y)^*) = (X)^*$*

Demostración Si $g \in (Y)^*$ entonces $|T'(g)(x)| = |g(T(x))| \leq \|T\| \, \|g\|_{(Y)^*} \|x\|_X$ por lo que $T'(g) \in (X)^*$

Recíprocamente, sea $g \in (Y)^*$ y sea $f = T'(g) \in (X)^*$ por hipótesis; luego si $x \in \operatorname{ball} X$ entonces $|\langle T(x), g\rangle| = |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{(X)^*} < \infty$ por lo que $\sup\{|\langle T(x), g\rangle| \ : \ x \in \operatorname{ball} X\} < \infty$ y por 5.3.2 T es acotado. ∎

Definición Sean X, Y Banach y $T \in L(X, Y)$. Definimos el *adjunto* de T como $(T)^* : (Y)^* \to (X)^*$ dado por $(T)^* = T'|_{(Y)^*}$ y cumple que:

$$\langle (T)^* ((y)^*), x\rangle = \langle (y)^*, T(x)\rangle \qquad x \in X, (y)^* \in (Y)^*$$

Proposición 7.1.2 *Sean X, Y Banach, $A, B \in L(X, Y)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, entonces $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha (A)^* + \beta (B)^*$*

Proposición 7.1.3 *Sean X, Y Banach, $T \in L(X, Y)$ entonces:*

- $(T^*)^* |_X = T$
- *Si Z es Banach y $W \in L(Y, Z)$ entonces $(WT)^* = (T)^* (W)^*$*
- $\|(T)^*\| = \|T\|$
- *$(T)^*$ es $(wk)^*$ continua*

Demostración Vayamos por partes:

- Sea $x \in X$, entonces $\langle (T^*)^* (J(x)), (Y)^*\rangle = \langle J(x), (T)^* ((y)^*)\rangle = \langle Tx, (y)^*\rangle$
- Sea $(z)^* \in (Z)^*$, $x \in X$ entonces:

  $$\langle (T)^* (W)^* ((z)^*), x\rangle = \langle (W)^* ((z)^*), Tx\rangle = \langle (z)^*, WTx\rangle = \langle (WT)^* ((z)^*), x\rangle$$

  Por lo tanto $(WT)^* = (T)^* (W)^*$.

- Si $\|(y)^*\|_{(Y)^*} \leq 1$ y $\|x\|_X \leq 1$ entonces $|\langle (T)^* ((y)^*)\rangle, x| = |\langle (y)^*, Tx\rangle| \leq \|Tx\|_Y \leq \|T\| \, \|x\|_X$. Deducimos que:

  $$\|(T)^*\| = \sup_{(y)^* \in \operatorname{ball}(Y)^*} \|(T)^* ((y)^*)\|_{(X)^*} = \sup_{(y)^* \in \operatorname{ball}(Y)^*} \sup_{x \in \operatorname{ball} X} |\langle x, (T)^* ((y)^*)\rangle| \leq \|T\|$$

  Recíprocamente, tenemos que $\|(T^*)^*\| \leq \|(T)^*\|$ por lo que si $x \in \operatorname{ball} X$ entonces por (a):

  $$\|T\| = \sup_{x \in \operatorname{ball} X} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \operatorname{ball} X} \|(T^*)^* x\|_Y \leq \sup_{x \in \operatorname{ball} X} \|(T)^* x\|_Y = \|(T)^*\|$$

- Por la propiedad universal de la topología inicial $(T)^* : ((Y)^*, (wk)^*) \to ((X)^*, (wk)^*)$ es continua si y sólo si $p_x \circ (T)^* : ((Y)^*, (wk)^*) \to \mathbb{R}$ es continua para todo $x \in X$, pero $p_x \circ (T)^* ((y)^*) = \langle (T)^* ((y)^*), x\rangle = \langle (y)^*, Tx\rangle = (y)^* \circ T(x)$ que es continua para todo $x \in X$. ∎

Definición Sea X normado y $M \subseteq X$ subespacio, definimos el *ortogonal* a M como:

$$(M)^{\perp} = \{(x)^* \in (X)^* \ : \ \langle (x)^*, m\rangle = 0 \quad \forall m \in M\}$$

Definición Sea X normado y $M \subseteq (X)^*$ subespacio, definimos el *pre-ortogonal* a M como:

$$^{\perp}(M) = \{x \in X \ : \ \langle m, x\rangle = 0 \quad \forall m \in M\}$$

Proposición 7.1.4 *Sean X, Y Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces* $\ker (T)^* = (\operatorname{ran} T)^{\perp}$ *y* $\ker T =^{\perp} (\operatorname{ran} (T)^*)$

Demostración Sea $f \in (Y)^*$ y $x \in X$ tal que $f \in \ker (T)^*$, entonces $\langle f, T(x)\rangle = \langle (T)^* (f), x\rangle = 0$ por lo tanto $f \in (\operatorname{ran} T)^{\perp}$; recíprocamente si $f \in (Y)^*$ es tal que $\langle f, T(x)\rangle = \langle (T)^* (f), x\rangle = 0$ para todo $x \in X$ entonces $\|(T)^* (f)\|_{(X)^*} = \sup\limits_{x \in \operatorname{ball} X} |\langle (T)^* (f), x\rangle| = 0$ por lo que $f \in \ker (T)^*$.

Por otro lado, si $x \in \ker T$ entonces para $f \in (Y)^*$ vale que $\langle (T)^* (f), x\rangle = \langle f, T(x)\rangle = 0$ por lo que $x \in^{\perp} (\operatorname{ran} (T)^*)$; recíprocamente $x \in X$ es tal que $\langle f, T(x)\rangle = \langle (T)^* (f), x\rangle = 0$ para todo $f \in (Y)^*$ entonces $\|T(x)\|_Y \underbrace{=}_{4,3,3} \sup\limits_{f \in \operatorname{ball}(Y)^*} |\langle f, T(x)\rangle| = 0$ por lo que $x \in \ker T$. ∎

Proposición 7.1.5 *Sean X, Y Banach y $T \in L(X,Y)$, entonces T es invertible si y sólo si $(T)^*$ lo es. Es más en este caso* $((T)^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$

Demostración En efecto, supongamos que T es invertible y sea $x \in X, f \in (Y)^*$, entonces:

$$\begin{aligned}\langle f, x\rangle &= \left\langle f, T^{-1} \circ T(x)\right\rangle = \left\langle \left(T^{-1}\right)^* (f), Tx\right\rangle = \left\langle (T)^* \circ \left(T^{-1}\right)^* (f), x\right\rangle \\ &= \left\langle f, T \circ T^{-1}(x)\right\rangle = \left\langle (T)^* (f), T^{-1}x\right\rangle = \left\langle \left(T^{-1}\right)^* \circ (T)^* (f), x\right\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto $(T)^*$ es inversible y $((T)^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$; concluímos que $(T)^*$ es invertible pues:

$$\left\|((T)^*)^{-1}\right\| = \left\|\left(T^{-1}\right)^*\right\| \underbrace{=}_{7,1,3} \left\|T^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\|T\|}$$

Recíprocamente, si $(T)^*$ es invertible entonces por 5.1.3 existe $c > 0$ tal que:

$$(T)^* (\operatorname{ball} (Y)^*) \supseteq c \operatorname{ball} (X)^*$$

Por lo tanto si $x \in X$ entonces:

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y \quad &\underbrace{=}_{4,3,3} \quad \sup_{(y)^* \in \operatorname{ball}(Y)^*} |\langle (y)^*, Tx\rangle| \\ &= \quad \sup_{(y)^* \in \operatorname{ball}(Y)^*} |\langle (T)^* ((y)^*), x\rangle| \\ &\geq \quad \sup_{(x)^* \in c \operatorname{ball}(X)^*} |\langle (x)^*, x\rangle| \\ &= \quad \frac{1}{c} \|x\|_X\end{aligned}$$

Usemos el siguiente lema:

Lema 7.1.6 *Sean X, Y Banach y $T \in L(X,Y)$ tal que existe $d > 0$ que cumple $\|Tx\|_Y \geq d\|x\|_X$, entonces* $\operatorname{ran} T$ *es cerrado y* $\ker T = 0$

Demostración del lema En efecto, si $Tx = 0$ entonces $\|x\|_X \leq \frac{1}{d}\|Tx\|_Y = 0$ por lo que $\ker T = 0$. Asimismo sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión tal que $T(x_n) \to y \in Y$, entonces $\|x_n - x_m\|_X \leq \frac{1}{d}\|T(x_n - x_m)\|_Y = \frac{1}{d}\|T(x_n) - T(x_m)\|_Y \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$; por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como X es Banach existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$, finalmente como T es continua concluímos que $T(x_n) \to T(x) = y$ por la unicidad del límite. ∎

Por lo tanto usando 7.1.6 sabemos que T es inyectiva de rango cerrado. Por otro lado por 7.1.4 $(\operatorname{ran} T)^{\perp} = \ker (T)^* = 0$ pues $(T)^*$ es invertible, de 4.3.6 concluímos que $\operatorname{ran} T$ además es denso por lo que T resulta suryectiva, inyectiva y ya era continua; concluímos que T es invertible. ∎

Proposición 7.1.7 *Sean X, Y Banach y $S : (Y)^* \to (X)^*$ lineal, entonces existe $T \in L(X,Y)$ tal que $S = (T)^*$ si y sólo si $S : ((Y)^*, (wk)^*) \to ((X)^*, (wk)^*)$ es continua*

Demostración Para un lado si $S = (T)^*$ entonces ya probamos en 7,1,3 que S es $(wk)^* - (wk)^*$ continua.

Recíprocamente, primero usemos el siguiente lema:

Lema 7.1.8 *Sean X, Y Banach y $T : ((Y)^*, (wk)^*) \to ((X)^*, (wk)^*)$ continua, entonces $T \in L(X,Y)$*

Demostración Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (Y)^*$ una sucesión tal que $f_n \to f$ y $S(f_n) \to g \in (X)^*$, entonces por 6.3.5 $f_n \xrightarrow{(d)^*_{(Y)^*}} f$ y $S(f_n) \xrightarrow{(d)^*_{(X)^*}} g$.

Como S es $(wk)^* - (wk)^*$ continua sabemos que $S(f_n) \xrightarrow{(d)^*} Sf$, luego por 6.3.4 deducimos que $S(f) = g$ y por 5.2.3 concluímos que $S \in L(((Y)^*, (X)^*))$ ∎

Sea $x \in X$ y consideremos $\alpha_x : (Y)^* \to \mathbb{R}$ dado por $\alpha_x(f) = S(f)(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|\alpha_x\|_{(Y^*)^*} &= \sup_{f\in \operatorname{ball}(Y)^*} |\alpha_x(f)| \\
&= \sup_{f\in \operatorname{ball}(Y)^*} \left| \underbrace{S(f)}_{\in (X)^*}(x) \right| \\
&\leq \sup_{f\in \operatorname{ball}(Y)^*} \|S(f)\|_{(X)^*} \|x\|_X \\
&\underbrace{\leq}_{7,1,8} \sup_{f\in \operatorname{ball}(Y)^*} \|S\| \|f\|_{(X)^*} \|x\|_X = \quad \|S\| \|x\|
\end{aligned}$$

Por lo que $\alpha_x \in (((Y)^*, (wk)^*))^*$ y por 6.3.3 existe un único $y \in Y$ tal que $\alpha_x(f) = \langle f, y\rangle$, definamos $T(x) = y$. Es claro que T es lineal y $\langle S(f), x\rangle = S(f)(x) = \alpha_x(f) = \langle f, T(x)\rangle$ por lo que basta ver que T es acotada. En pos de eso:

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_Y &\underbrace{=}_{4,3,3} \sup_{f\in \operatorname{ball}(Y)^*} |\langle f, T(x)\rangle| \\
&= \sup_{f\in \operatorname{ball}(Y)^*} |\langle S(f), x\rangle| \\
&= \sup_{f\in \operatorname{ball}(Y)^*} |\alpha_x(f)| \\
&= \|\alpha_x\|_{(Y^*)^*} \\
&\leq \|S\| \|x\|
\end{aligned}$$

Por lo que $T \in L(X,Y)$ y $S = (T)^*$ ∎

7.2. Operadores compactos

Definición Sean X, Y Banach y $T : X \to Y$ lineal, entonces T es un *operador compacto* si $\overline{T(\operatorname{ball} X)}$ es compacto en Y

Proposición 7.2.1 *Sean X, Y Banach y $T : X \to Y$ lineal y compacto, entonces $T \in L(X, Y)$*

Demostración Supongamos que T no es acotado, entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{ball} X$ tal que $\|T(x_n)\|_Y \to \infty$, luego $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T(\operatorname{ball} X)}$ no admite subsucesión convergente; concluímos que $T \in L(X, Y)$. ∎

Definición Sea X, Y Banach, notamos $L_0(X, Y) = \{T \in L(X, Y) \ : \ T \text{ es compacto}\}$

Proposición 7.2.2 *Sean X, Y Banach, luego $L_0(X, Y)$ es cerrado en $L(X, Y)$*

Demostración Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_0(X, Y)$ tal que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L_0(X,Y)}} T \in L(X, Y)$ y veamos que T es compacto; para eso sea $\epsilon > 0$ y n_0 tal que $\|T - T_{n_0}\| < \epsilon$. Como T_{n_0} es compacto existen $x_1, \dots, x_m \in \operatorname{ball} X$ tal que $T_{n_0}(\operatorname{ball} X) \subset \bigcup\limits_{1\le j\le m} B_{\frac{\epsilon}{3}}(T_{n_0}(x_j))$. Luego si $x \in \operatorname{ball} X$ y tomamos el x_j tal que $\|T_{n_0}(x_j) - T_{n_0}(x)\|_Y < \frac{\epsilon}{3}$:

$$\begin{aligned}\|T(x_j) - T(x)\|_Y \le & \|T(x_j) - T_{n_0}(x_j)\|_Y + \|T_{n_0}(x_j) - T_{n_0}(x)\|_Y + \|T_{n_0}(x) - T(x)\|_Y \\ < & 2\|T - T_n\| + \frac{\epsilon}{3} \\ < & \epsilon\end{aligned}$$

Luego $T(\operatorname{ball} X) \subset \bigcup\limits_{1\le j\le m} B_\epsilon(T(x_j))$ y $T \in L_0(X, Y)$. ∎

Proposición 7.2.3 *Sean X, Y Banach, luego $L_0(X, Y)$ es un $L(X, Y)$ ideal bilátero, o sea si $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$ y $T \in L_0(X, Y)$ entonces $TA, BT \in L_0(X, Y)$*

Demostración Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{ball} X$, luego como T es compacto existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que $T(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \in Y$ y como $B \in L(Y)$ entonces $BT(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} By \in Y$; por lo tanto $BT \in L_0(X, Y)$.

Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{ball} X$ entonces $\left\{\frac{A(x_n)}{\|A\|}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{ball} X$, como T es compacto existe $\left\{\frac{A(x_{n_k})}{\|A\|}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que $T\left(\frac{A(x_{n_k})}{\|A\|}\right) = \frac{1}{\|A\|}TA(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \in Y$; por lo tanto $TA(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} \|A\| y$ y TA es compacto. ∎

Definición Sea X, Y Banach, notamos $L_{00}(X, Y) = \{T \in L(X, Y) \ : \ \dim(\operatorname{ran} T) < \infty\}$

Definición Sean X, Y Banach y $T \in L(X, Y)$ entonces T es *completamente continuo* si para toda $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{d} x$ se sigue que $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} T(x)$

Proposición 7.2.4 *Sean X, Y Banach y $T \in L(X, Y)$, entonces:*

1. *Si T es compacto entonces es completamente continuo*
2. *Si T es completamente continuo y X es reflexivo entonces T es compacto*
3. *La condición de reflexividad en X es necesaria*

Demostración Vamos por partes

1. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{d} 0$, luego por 6.1.3 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sup\limits_n \|x_n\|_X \le 1$. Como T es compacto existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión e $y \in Y$ tal que $T(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$; pero $x_{n_k} \xrightarrow{d} 0$ y por 6.2.5 $T \in L((X, wk), (Y, wk))$ por lo que $T(x_{n_k}) \xrightarrow{d} T(0) = 0$, por 6.1.2 concluímos que $y = 0$. Como 0 es el único punto límite de $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un compacto, concluímos que $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

2. Supongamos además que X es separable, entonces por 6.6.5 sabemos que $(\text{ball}\, X, wk)$ es un espacio métrico compacto. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \text{ball}\, X$ es una sucesión, existe $x \in X$ y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que $x_{n_k} \xrightarrow{d} x$; luego $T(x_{n_k}) \xrightarrow{\|.\|_Y} T(x)$ pues T es completamente continuo. Concluímos que $T(\text{ball}\, X)$ es secuencialmente compacto y entonces T es compacto.

   Si X es arbitrario y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \text{ball}\, X$ es una sucesión entonces $X_1 = \overline{\langle\{x_n\}\rangle_{\mathbb{F}}}^{\|.\|_X}$ es un espacio de Banach separable (trivial) y reflexivo por 6.5.3. Sea $T_1 = T|_{X_1}$ y notemos el siguiente lema:

   Lema 7.2.5 *Sea X, Y Banach y $T \in L(X,Y)$ completamente continuo, luego si $M \subseteq X$ es subespacio cerrado $T|_M : M \to \overline{T(M)}^{\|.\|_Y}$ es completamente continuo.*

   Demostración Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \xrightarrow{d} x$, luego como T es completamente continuo $T(x_n) \xrightarrow{\|.\|_Y} T(x)$. Como $\|.\|_{\overline{T(M)}^{\|.\|_Y}} = \|.\|_Y \,|_{\overline{T(M)}^{\|.\|_Y}}$ entonces $T|_M(x_n) = T(x_n) \xrightarrow{\|.\|_{\overline{T(M)}^{\|.\|_Y}}} T(x) = T|_M(x)$ y $T|_M$ es completamente continuo. ∎

   Luego por 7.2.5 T_1 es completamente continuo, por ende compacto por el parágrafo anterior. Como $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{T_1(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ concluímos que T es compacto.

3. Sea $X = Y = l^1$ un espacio separable no reflexivo y notemos el siguiente lema:

   Lema 7.2.6 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset l^1$ una sucesión tal que $x_n \xrightarrow{d} x$, luego $x_n \xrightarrow{\|.\|_{l^1}} x$.*

   Demostración del lema Recordemos que $\left(l^1\right)^* = l^\infty$ y por 6.4.1 y 6.6.3 tenemos que $(\text{ball}\, l^\infty, (wk)^*)$ es un espacio métrico compacto, en particular completo.

   Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset l^1$ una sucesión tal que $x_n \xrightarrow{d} 0$ y $\epsilon > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos:

$$F_m = \left\{\phi \in \text{ball}\, l^\infty \;:\; |\langle \phi, x_n\rangle| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq m\right\}$$

   Luego F_n es $(wk)^*$ cerrado en $\text{ball}\, l^\infty$ y $\text{ball}\, l^\infty = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} F_m$; por el teorema de Baire existe m_0 tal que $\overset{\circ}{F_m} \neq \emptyset$ para la topología $(wk)^*$. Luego existe ϕ_0 y $\delta > 0$ tal que $B = B_\delta^{(wk)^*}(\phi_0) \subset F_{m_0}$; sea $J \geq 1$ tal que $2^{-(J-1)} < \delta$ y fijemos $n \geq m_0$, luego podemos definir:

$$\psi = \begin{cases} \psi(j) = \phi_{m_0}(j) & \text{si } 1 \leq j \leq J \\ \psi(j) = sign\,(x_n(j)) & \text{si } j > J \end{cases}$$

   Es claro que $\psi \in \text{ball}\, l^\infty$ y $\psi(j)x_n(j) = |x_n(j)|$ para todo $j > J$; es más, afirmo que $\psi \in B \subset F_{m_0}$ por lo que $|\langle\psi, x_n\rangle| \leq \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \geq m_0$. Por otro lado como $x_n \xrightarrow{d} 0$ existe $m_1 \geq m_0$ tal que $\sum_{j=1}^J |x_n(j)| < \frac{\epsilon}{3}$ y juntando todo:

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{l^1} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_n(j)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \left| \underbrace{\sum_{j>J+1} |x_n(j)| + \sum_{1\leq j\leq J} \phi_{m_0} x_n(j)}_{\langle\psi, x_n\rangle} \right| + \left| \sum_{1\leq j\leq J} \phi_{m_0} x_n(j) \right| \\ &< \frac{2\epsilon}{3} + \left| \sum_{1\leq j\leq J} x_n(j) \right| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Para todo $n \geq m_1$ por lo que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{l^1}} 0$. ∎

Por lo tanto si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset l^1$ es tal que $x_n \xrightarrow{d} x$, por 6.2.5 $T(x_n) \xrightarrow{d} T(x)$ y por 7.2.6 $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_{l^1}} T(x)$ por lo que todo $T \in L(l^1, l^1)$ es completamente continuo; basta probar que existen operadores no compactos allí.

En efecto, $id : l^1 \to l^1$ es continuo pero no compacto, pues $id(\operatorname{ball} l^1) = \operatorname{ball} l^1$ que no es compacto por 3.2.4. ∎

Teorema 7.2.7 (Teorema de Schauder) *Sean X, Y Banach y $T \in L(X,Y)$, luego T es compacto si y sólo si $(T)^*$ es compacto*

Demostración Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{ball}(Y)^*$ una sucesión, por 6.4.1 existe $f \in \operatorname{ball}(Y)^*$ tal que $f_n \xrightarrow[(d)^*]{cl} f$. Sea $\epsilon > 0$ y $N \geq 1$, como T es compacto existen $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tal que $T(\operatorname{ball} X) \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} B_{\frac{\epsilon}{3}}^{\|\cdot\|_Y}(y_i)$; sea $x \in \operatorname{ball} X$ y k_0 tal que $\|T(x) - y_{k_0}\|_Y < \frac{\epsilon}{3}$, luego:

$$\begin{aligned}
|\langle (T)^*(f) - (T)^*(f_n), x\rangle| &= |\langle f - f_n, T(x)\rangle| \\
&\leq |\langle f - f_n, T(x) - y_{k_0}\rangle| + \underbrace{|\langle f - f_n, y_{k_0}\rangle|}_{\to 0} \\
&\leq 2\,\|T(x) - y_k\|_Y + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|(T)^*(f) - (T)^*(f_n)\|_{(X)^*} = \sup_{x\in\operatorname{ball} X} |\langle (T)^*(f) - (T)^*(f_n), x\rangle| \leq \epsilon$. En resumen probamos que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{ball}(Y)^*$ entonces $\{(T)^*(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (X)^*$ tiene una subsucesión $\|.\|_{(X)^*}$ convergente y por ende $(T)^*$ es compacto.

Recíprocamente, si $(T)^*$ es compacto entonces por lo anterior $(T^*)^*$ lo es. Notemos:

Lema 7.2.8 *Sea X, Y Banach y $T \in L(X,Y)$ compacto, luego si $M \subseteq X$ es subespacio cerrado $T|_M : M \to Y$ es compacto.*

Demostración Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{ball} M$ tal que $x_n \xrightarrow{d} x$, luego como T es compacto existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión e $y \in Y$ tal que $T(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$. Como $\|.\|_{\overline{T(M)}^{\|\cdot\|_Y}} = \|.\|_Y\,|_{\overline{T(M)}^{\|\cdot\|_Y}}$ entonces $T|_M(x_n) = T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\overline{T(M)}^{\|\cdot\|_Y}}} T(x) = T|_M(x)$ y $T|_M$ es compacto. ∎

Aplicando 7.2.8 a $X \subseteq (X^*)^*$ y por 7.1.3 resulta que $T = (T^*)^*|_X$ es compacto. ∎

7.3. Ecuación integral de Fredholm

Proposición 7.3.1 *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $X = \mathbb{C}[a,b]$, asimismo sea $k : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ continua; luego si definimos $K : X \to X$*

$$K(\phi)(s) = \int_a^b k(s,t)\phi(t)dt$$

Resulta un operador compacto.

Demostración Es claro que K es lineal y acotado, veamos directamente que es compacto; para esto sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[a,b]$ tal que $\|\phi_n\|_{C[a,b]} \leq 1$ y veamos que $(K(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K(\operatorname{ball} C[a,b])$ admite una subsucesión convergente. Recordemos:

Teorema 7.3.2 (Teorema de Arzela-Ascoli) *Si X es compacto y $\mathcal{F} \subset C(X)$ entonces $\mathcal{F}$ es totalmente acotado si y sólo si $\mathcal{F}$ es acotado y equicontinuo*

Como k es continua en un compacto, existe $M > 0$ tal que $\|k\|_{C[a,b]} \leq M$ por lo que:

$$|K(\phi_n)(s)| \leq \int_a^b |k(s,t)|\,|\phi_n(t)|\,dt \leq M(b-a) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y concluímos que $(K(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es equiacotada.

Además, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|(s,t) - (s',t')\|_{[a,b]^2} < \delta$ entonces $|k(s,t) - k(s',t')| < \frac{\epsilon}{b-a}$; por lo tanto si $|s - s'| < \delta$ entonces:

$$\big|K(\phi_n)(s) - K(\phi_n)(s')\big| \leq \int_a^b \big|k(s,t) - k(s',t)\big|\,|\phi_n(t)|\,dt \leq \epsilon$$

Concluímos que $\{K(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua y equiacotada y por 7.3.2 existe $\phi \in \overline{K(\operatorname{ball} C[a,b])}^{C[a,b]}$ y $(K(\phi_{n_k})) \subset (K(\phi_n))$ subsucesión tal que $K(\phi_{n_k}) \xrightarrow[\|\cdot\|_{C[a,b]}]{k\to\infty} \phi$. Luego K es compacto. ∎

Proposición 7.3.3 *Sea X Banach y $T \in \operatorname{ball} L(X)$, entonces $Id_X - T \in L(X)$ y $(Id - T)^{-1} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n$*

Demostración Notemos que $\|T^n\| \leq \|T\|^n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\|T\|^n}_{<1} = \frac{1}{1 - \|T\|} < \infty$$

Luego por 3.1.3 concluímos que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n \in L(X)$. Finalmente notemos que:

$$\begin{aligned} Id &= \sum_{n\in\mathbb{N}} T^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} T^{n+1} = (Id - T) \circ \sum_{n\in\mathbb{N}} T^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} T^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} T^{n+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} T^n \circ (Id - T) \end{aligned}$$

. ∎

Aplicación Supongamos que K es como antes con $\|k\|_{C[a,b]} < \frac{1}{b-a}$, luego dada $g \in C[a,b]$, $g = I - T\,(\phi)$ si y sólo si $\phi = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} K^n(y)$.

Corolario 7.3.4 *Sea X Banach y $T_0 \in L(X)$ tal que $T_0^{-1} \in L(X)$, luego si $T \in B^{L(X)}_{\frac{1}{\|T_0^{-1}\|}}(T_0)$ entonces $T^{-1} \in L(X)$*

Demostración Notemos que $T = T_0 - (T - T_0) = T_0 \circ \left(I - \underbrace{T_0^{-1} \circ (T_0 - T)}_{\|T_0^{-1}\circ(T_0 - T)\| < 1} \right)$, luego por 7.3.3 el operador $\big(I - T_0^{-1} \circ (T_0 - T)\big)$ es invertible. AL ser T composición de invertibles, es invertible. ∎

8. Operadores compactos en espacio de Hilbert

8.1. Propiedades y Ejemplos

Teorema 8.1.1 (Propiedad de aproximación en Hilbert) *Sean X, Y espacios de Hilbert, luego $T \in L_0(X,Y)$ si y sólo si existe $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_{00}(X,Y)$ tal que $\|T - T_n\| \to 0$*

Demostración Notemos el siguiente lema trivial:

Lema 8.1.2 $L_{00}(X,Y) \subset L_0(X,Y)$

Demostración del lema Si $T \in L_{00}(X,Y)$ entonces $T \in L(X,Y)$ por lo que $T(\operatorname{ball} X)$ es acotada y finito dimensional, por ende precompacta; en conclusión $T \in L_0(X,Y)$. ∎

Por lo tanto $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_0(X,Y)$ y por 7.2.2 $T \in L_0(X,Y)$.

Recíprocamente como $\overline{T(\operatorname{ball} X)}^Y$ es compacto en particular es separable, luego $L = \overline{\operatorname{ran} T}^Y$ es separable. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ una base ortonormal numerable de L por 2.2.3, $P_n = P_{\langle e_1,\dots,e_n\rangle}$ y $T_n = P_n \circ T \in L_{00}(X,Y)$ luego veamos el siguiente lema:

Lema 8.1.3 *Si $x \in X$ entonces $T_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} Tx$*

Demostración del lema Sea $y = T(x)$, luego por 2.3.3 sabemos que $T_n(x) = P_n(y) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y = T(x)$. ∎

Como T es compacto existen $x_1, \dots, x_m \in \operatorname{ball} X$ tal que $T(\operatorname{ball} X) \subset \bigcup_{1\le j\le m} B_{\frac{\epsilon}{3}}(T(x_j))$. Luego si $x \in \operatorname{ball} X$ y tomamos el x_j tal que $\|T(x_j) - T(x)\|_Y < \frac{\epsilon}{3}$:

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T_n(x)\|_Y \le & \|T(x) - T(x_j)\|_Y + \|T(x_j) - T_n(x_j)\|_Y + \Bigg\|\underbrace{T_n(x_j) - T_n(x)}_{P_n(T(x)-T(x_j))}\Bigg\|_Y \\
< & 2\,\|T(x) - T(x_j)\| + \|T(x_j) - T_n(x_j)\|_Y \\
< & \frac{2\epsilon}{3} + \underbrace{\|T(x_j) - T_n(x_j)\|_Y}_{\xrightarrow{8,1,3} 0}
\end{aligned}$$

Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge n_0$ vale que $\|T - T_n\| = \sup_{x\in \operatorname{ball} X} \|T(x) - T_n(x)\| < \epsilon$. ∎

Corolario 8.1.4 *Sean X, Y Hilbert y $T \in L_0(X,Y)$, luego si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, \dots\} \subset \overline{\operatorname{ran} T}^Y$ es una base ortonormal numerable y definimos $P_n = P_{\langle e_1,\dots,e_n\rangle}$ entonces $\|P_n \circ T - T\| \to 0$.*

Proposición 8.1.5 *Sea X Hilbert separable con base $\mathcal{B}$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{F}$ con $M = \sup_{n\ge1} |\alpha_n| < \infty$y T dado por $Te_n = \alpha_n e_n$. Luego existe $\tilde{T} \in L(X)$ tal que $\tilde{T}|_{\{e_n\}} = T$ con $\left\|\tilde{T}\right\| = M$. Es más, $T \in L_0(X)$ si y sólo si $\alpha_n \to 0$.*

Demostración Es trivial la extensión por linealidad y haremos el abuso de notación de llamar T a la extensión]; el hecho que $\|T\| = M$ también es claro por lo que sea $T_n = T - P_n \circ T$ donde P_n es la misma de antes. Luego:

$$T_n(e_j) = \begin{cases} T(e_j) - T(e_j) & = 0 \quad \text{si } j < n \\ T(e_j) - T(0) & = \alpha_j e_j \quad \text{si } j > n \end{cases}$$

Por lo tanto $\|T_n\| = \sup_{j>n} |\alpha_n|$.

En conclusión si $\alpha_n \to 0$ entonces $\|T_n\| \to 0$ y $T \in L_0(X)$ por 7.2.2.

Recíprocamente si $T \in L_0(X)$ entonces por 8.1.4 sabemos que $\|T_n\| \to 0$ por lo que $\alpha_n \to 0$. ∎

Proposición 8.1.6 *Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida y sea $k \in L^2(X \times X, \Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$, luego:*

$$K(f)(x) = \int k(x,y) f(y) d\mu(y)$$

Es un operador compacto y $\|K\| \le \|k\|_2$

Demostración To do

Definición Sea X Hilbert y $T \in L(X)$, luego $\alpha \in \mathbb{F}$ es un *autovalor de T* si $\ker(T-\alpha) \ne (0)$. Es más si $0 \ne x \in \ker(T-\alpha)$ entonces x es llamado un *autovector de T* y cumple que $T(x) = \alpha x$.

Notaremos $\sigma_p(T) = \{\alpha \in \mathbb{F} \ : \ \alpha \text{ es autovalor}\}$

Proposición 8.1.7 *Sea X Hilbert, $T \in L_0(X)$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, luego si $\lambda \ne 0$ entonces* $\dim(\ker(T-\lambda)) < \infty$.

Demostración Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ker(T-\lambda)$ una base ortogonal del autoespacio, como T es compacto existe $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que $T(e_{n_k}) \to x \in X$; pero $\left\|T(e_{n_k}) - T(e_{n_j})\right\|_X^2 = |\lambda|^2 \left\|e_{n_j} - e_{n_k}\right\|_X > 0$ si $n_j \ne n_k$ por lo que $\dim(\ker(T-\lambda)) < \infty$. ∎

Proposición 8.1.8 *Sea X Hilbert y $T \in L_0(X)$, luego si $\lambda \ne 0$ cumple que $\inf\limits_{\|x\|_X=1} \|(T-\lambda)x\|_X = 0$ entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$*

Demostración Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\|x_n\|_X = 1$ y $(T-\lambda)x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} 0$, luego como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset ball X$ existe $y \in X$ y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que $T(x_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|_X} f$.

Notemos que $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}\left[(\lambda - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k})\right] \to \frac{1}{\lambda} f$ por lo que $f \ne 0$ por un lado y, por el otro como T es continua, $T(x_{n_k}) \to T\left(\frac{1}{\lambda} f\right)$; por unicidad del límite $\frac{1}{\lambda} T(f) = f$ y concluímos que $\lambda \in \sigma_p(T)$. ∎

Corolario 8.1.9 *Sea X Hilbert, $T \in L_0(X)$, $\lambda \ne 0 \notin \sigma_p(T)$ tal que $\overline{\lambda} \notin \sigma_p((T)^*)$, luego* $\operatorname{ran}(T-\lambda) = X$ *y* $(T-\lambda)^{-1} \in L(X)$

Demostración Como $\lambda \notin \sigma_p(T)$ entonces por 8.1.8 existe $C > 0$ tal que $\|(T-\lambda)x\| \ge C\|x\|$, luego por 7.1.6 sabemos que $\operatorname{ran} T$ es cerrado y T es inyectiva, pero por 7.1.4 además $\operatorname{ran}(T-\lambda) = \left(\ker(T-\lambda)^*\right)^\perp = X$. Como $T-\lambda$ es inyectiva, suryectiva y acotada entonces es inversible y además $C\left\|(T-\lambda)^{-1}y\right\| \le \left\|(T-\lambda \circ (T-\lambda)^{-1}y)\right\| = \|y\|$ por lo que $\left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| \le \frac{1}{C}$. ∎

8.2. El teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

Proposición 8.2.1 *Sea X Hilbert, $T \in L(X)$ normal y $\lambda \in \mathbb{F}$, luego* $\ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^*$ *y* $\ker(T-\lambda)$ *es un subespacio invariante para T y $(T)^*$*

Demostración Como T es normal entonces $T-\lambda$ también lo es; afirmo entonces que $\|(T-\lambda)x\| = \|(T-\lambda)^* x\|$.

En efecto, $\langle (T-\lambda)x, (T-\lambda)x\rangle = \langle x, (T-\lambda)^*(T-\lambda)x\rangle \underbrace{=}_{T-\lambda \text{ normal}} \langle x, (T-\lambda)(T-\lambda)^* x\rangle = \langle (T-\lambda)^* x, (T-\lambda)^* x\rangle$.

Luego $(T-\lambda)x = 0$ si y sólo si $(T-\lambda)^* x = 0$.

Por otro lado, si $x \in \ker(T-\lambda)$ entonces $T(x) = \lambda x \in \ker(T-\lambda)$ y $(T)^* x = \overline{\lambda} x \in \ker(T-\lambda)^*$ ∎

Proposición 8.2.2 *Sea X Hilbert y $T \in L(X)$ normal, luego si $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ y $\lambda \ne \mu$ entonces* $\ker(T-\lambda) \perp \ker(T-\mu)$

Demostración Sean $x \in \ker(T-\lambda), y \in \ker(T-\mu)$, notemos que:

$$\begin{aligned}
\lambda \langle x, y\rangle &= \langle Tx, y\rangle \\
&= \langle x, (T)^* y\rangle \\
&= \langle x, \overline{\mu} y\rangle \\
&= \mu \langle x, y\rangle \\
\implies & \quad \underbrace{(\lambda-\mu)}_{\neq 0} \langle x, y\rangle = 0 \\
\implies & x \perp y
\end{aligned}$$

∎

Proposición 8.2.3 *Sea X Hilbert y $T \in L(X)$ autoadjunto, luego $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$*

Demostración Sea $0 \neq x \in \ker(T-\lambda)$, luego $\lambda x = T(x) = (T)^*(x) = \overline{\lambda} x$ por lo que $(\lambda - \overline{\lambda})x = 0$. ∎

Proposición 8.2.4 *Sea X Hilbert y $T \in L(X)$ autoadjunto, luego $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$*

Demostración Por un lado es claro que $\alpha = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T\| \|x\|^2 = \|T\|$.

Recíprocamente, primero notemos que
$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|_X=1} \sup_{\|f\|_{(X)^*}=1} |f(Tx)| \underbrace{=}_{2,7,3} \sup_{\substack{\|x\|_X=1 \\ \|y\|_X=1}} \langle T(x), y\rangle$

Asumamos que $\langle Tx, y\rangle \in \mathbb{R}$, luego por 1.2.2:

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle)$$

Por lo que $|\langle Tx, y\rangle| \leq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 \alpha - \|x-y\|^2 \alpha) \underbrace{=}_{1,2,3} \alpha$ y por lo tanto $\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|_X=1 \\ \|y\|_X=1}} \langle T(x), y\rangle \leq \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. ∎

Proposición 8.2.5 *Sea X Hilbert y $T \in L_0(X)$ autoadjunto, luego $\pm\|T\| \in \sigma_p(T)$*

Demostración Si $T = 0$ es claro, supongamos que $T \neq 0$, luego por 8.2.4 existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\langle T(x_n), x_n\rangle \to \lambda$ con $|\lambda| = \|T\|$. Notemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(T-\lambda)x_n\|^2 \\
&= \|T(x_n)\|^2 - 2\lambda \langle T(x_n), x_n\rangle + \lambda^2 \\
&\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle T(x_n), x_n\rangle \to 0
\end{aligned}$$

Luego $\lambda \neq 0$ y $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$, por 8.1.8 $\lambda \in \sigma_p(T)$. ∎

Teorema 8.2.6 (Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos) *Sea X Hilbert y $T \in L_0(X)$ autoadjunto, entonces T admite numerables distintos autovalores. Es más si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\} \subset \sigma_p(T) \cap \mathbb{R}^*$ y $P_n = P_{\ker(T-\lambda_n)}$ luego $P_nP_n = P_nP_m = 0$ si $n \neq m$ y vale:*

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_n \tag{11}$$

Demostración Por 8.2.5 existe $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$ con $|\lambda_1| = \|T\|$, sea $K_1 = \ker(T-\lambda_1)$, $P_1 = P_{K_1}$ y $X_2 = (K_1)^\perp$; por 8.2.1 K_1 y por ende X_2 son subespacios invariantes para T, si consideramos $T_1 = T|_{X_2}$ entonces $T_2 \in L_0(X_2)$ y es autoadjunto.

Iterando existe $\lambda_2 \in \sigma_p(T_2)$ con $|\lambda_2| = \|T_2\|$, sea $K_2 = \ker(T-\lambda_2)$, $P_2 = P_{K_2}$ y $X_3 = (K_1 \oplus K_2)^\perp$, notemos que $\|T_2\| \leq \|T\|$ y que $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Luego por inducción existe $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ (8.2.3) tal que:

- $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$
- Si $K_n = \ker(T - \lambda_n)$ entonces $|\lambda_{n+1}| = \left\| T|_{(K_1 \oplus \dots \oplus K_n)^{\perp}} \right\|$

Es claro que existe $\alpha \geq 0$ tal que $\lim |\lambda_n| = \alpha$, afirmo que $\alpha = 0$.

En efecto, sea $k_n \in K_n$ tal que $\|k_n\| = 1$, luego como T es compacto existe $\left\{k_{n_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión y $x \in X$ tal que $T(k_{n_j}) \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, pero $\left\| T(k_{n_j} - T(k_{n_m})) \right\| \underbrace{=}_{8,2,2} \lambda_{n_j}^2 + \lambda_{n_m}^2 \geq 2\alpha^2$, luego $\alpha = 0$.

Finalmente analicemos:

$$(T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i)(x) = \begin{cases} T(x) - \lambda_j x &= \quad 0 \qquad \text{si } x \in K_j \quad 1 \leq j \leq n \\ T(x) - 0 &= \quad T(x) \quad \text{si } x \in (K_1 \oplus \dots \oplus K_n)^{\perp} \end{cases}$$

Luego como $(K_1 \oplus \dots \oplus K_n)^{\perp}$ es invariante para T:

$$\begin{aligned} \left\| T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \right\| &= \left\| T|_{(K_1 \oplus \dots \oplus K_n)^{\perp}} \right\| \\ &= |\lambda_{n+1}| \to 0 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corolario 8.2.7 *Con la misma notación de antes:*

1. $\ker T = \left(\bigvee \{P_n X\}\right)^{\perp} = (\operatorname{ran} T)^{\perp}$
2. $P_n \in L_{00}(X)$
3. $\|T\| = \sup |\lambda_n|$ *y* $\lambda_n \to 0$

Corolario 8.2.8 *Sea X Hilbert y $T \in L_0(X)$ autoadjunto, luego existe $\{\mu_n\} \subset \mathbb{R}$ y $\{e_n\} \subset (\ker T)^{\perp}$ base ortogonal tal que:*

$$T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n \tag{12}$$

Corolario 8.2.9 *Sea X Hilbert y $T \in L_0(X)$ autoadjunto e inyectivo, entonces $X \simeq l^2$.*