Topología – 2° cuatrimestre 2015
Resuelto de práctica 7

Ejercicio para entregar
Vamos por partes!

1. $\Longrightarrow$)

   Supongamos que E es compacto y T_2, entonces como p es continua tenemos que $p(E) = B$ es compacto. Por otro lado sean $x, y \in B$ y sean $u \in E_x$ y $v \in E_y$ y $U \ni u$, $V \ni v$ entorno abiertos disjuntos por ser T_2 E; entonces por el ejercicio 5 de la práctica tenemos que p es abierta y $p(U) \ni x$ y $p(V) \ni y$ son entornos abiertos disjuntos en B. Por ende B es T_2.

2. $\Longleftarrow$)

   Supongamos que B es compacto y T_2. Afirmo que como $p^{-1}(b)$ es finito $\forall b \in B$ entonces p es cerrada!

   Sea A un cerrado en E y $x \notin p(A)$ entonces como p es revestimiento tenemos que $\exists U \ni x \ / \ p^{-1}(U) = \coprod_{i=1}^n V_i$ con $p|_{V_i}$ un homeo. Notemos que en realidad intersecando con $p(A)^c$ podemos tomar $U \subset p(A)^c$. Sea entonces $V := \bigcap_{i=1}^n p(V_i)$ notemos que $x \in V$ trivialmente y que $V \subset p(V_1) \simeq U \subset p(A)^c$ y por ende $x \in V \subset p(A)^c$ o sea que $p(A)$ es cerrado. Entonces si consideramos los pullback:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, "\overline{\overline{f}}"] & \{*\} \end{tikzcd}$$

   Entonces notemos que como p es revestimiento y los revestimientos son estables por cambio de base, entonces g es revestimiento, como π es propia por ser B compacto tenemos que h es cerrada y como la fibra de p es finita tenemos que g es cerrada por lo anterior, por lo que hg es cerrada; entonces tenemos que $p\pi : E \to \{*\}$ es propia y entonces E es compacto.

   Por otro lado Sean $x, y \in E$ y consideremos $p(x)$ y $p(y)$. Si $x, y \in E_{p(x)}$ entonces los V_i del revestimiento sirven pues ellos son disjuntos. Si no, sean U, V entornos abiertos disjuntos respectivos de $p(x)$ y $p(y)$ si consideramos la intersección de U y V con los entornos que existen por el revestimiento $U_{p(x)}$ y $V_{p(y)}$ tenemos que $\exists \widetilde{U}, \widetilde{V}$ entornso abiertos disjuntos de $p(x)$ y $p(y)$ tal que $p^{-1}(\widetilde{U}) = \coprod_{i=1}^n U_{x_i}$ y $p^{-1}(\widetilde{V}) = \coprod_{i=1}^n V_{y_i}$. Llamemos $U_{x_{i_0}} \ni x$ y $V_{y_{i_0}} \ni y$ estos entonces son abiertos disjuntos de E pues son homeomorfos a abiertos disjuntos de B. Entonces E es T_2 ∎

Revestimientos y Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

1. Pruebe que si X es un espacio e Y es discreto, entonces la proyección $p_X : X \times Y \to X$ es un revestimiento

   Demostración Tenemos $p_X : X \times Y \to X$ veamos que es un revestimiento!

   - p es trivialmente continua y suryectiva
   - Sea $x_0 \in X$, entonces tenemos que $x_0 \in X$, con X abierto y $X = \coprod_{y \in Y} X \times \{y\}$ donde cada $X \times \{y\}$ es abierto pues es producto de abiertos y $p_X|_{X \times \{y\}}$ es un homeomorfismo con inversa $i_y : x \mapsto (x, y)$. ∎

2. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$. Pruebe ademÃ¡s que si B es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.

   Demostración Sea $p : E \to B$ y $b \in B$, entonces como p es revestimiento $\exists U \ni b$ abierto de B tal que $p^{-1}(U) = \coprod_{i\in I} V_i$ con V_i abiertos disjuntos y $p|_{V_i} : V_i \to B$ es homeo.

   Supongamos que $\exists j_0 \in I$ tal que $\left|p^{-1}(b) \cap V_{j_0}\right| > 1$ y sean $v_1, v_2 \in V_{j_0}$ dichos elementos tal que $p(v_1) = p(v_2) = b$, pero entonces $p|_{V_{j_0}}$ no es inyectiva y por ende no es homeo! Abs!

   Por ende $p^{-1}(b) \cap V_i = \{v_i\}$ $\forall i \in I$, y si E_b tiene la topología subespacio entonces de la ecuación anterior se ve que es discreto. ∎

3. Pruebe que las siguientes funciones son revestimientos:

   a) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos\theta(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$.
   b) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fijo.
   c) $p : S^n \to P^n$ la proyección al plano proyectivo.
   d) G grupo topológico, H subgrupo discreto de G y $p : G \to G/H$ la proyección al cociente.
   e) $p : E \to B$, $p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1 \text{ ó } w = 1\}$.

   Demostración *a*) Sea $q = (1, 0)$ y sea $U := S^1 - \{q\}$, entonces notemos que $p^{-1}(U) = \coprod_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1)$ y que $\forall n \in \mathbb{N}$ $p((n, n+1)) = S^1 - \{q\}$ y es un homeomorfismo con inversa $\hat{p}(s) = \textit{El único } t \textit{ tal que } p(t) = s \textit{ pue}$
   Por otro lado si hacemos lo mismo con $q = (-1, 0)$ y los abiertos $(n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$ tenemos lo mismo.
   Por ende p es un revestimiento!

   b) Sea $q = (1, 0)$ y sea $U := S^1 - \{q\}$ entonces notemos que $p^{-1}(U) = \{z \in S^1\ ,\ Im(z) > 0\} \bigcup \{z \in S^1\ ,\ Im(z) < 0\}$ y cada uno de ellos es homeomorfo, vía p, a U.
   Análogamente con $q = (-1, 0)$ Y todo igual salvo que tomamos $Re(z)$ en vez de $Im(z)$, por ende p es un revestimiento!

   c) Veamos que es revestimiento! Para eso vamos por partes:

   - Como p es cociente es automáticamente sobreyectiva y continua
   - Sea $x \in S^n/_{x\sim -x}$ notemos que un abierto $U \ni x$ en $\mathbb{R}P^n$ es $U = p(V)$ con $V \in S^n$ abierto pues $\mathbb{R}P^n$ tiene la topología cociente. Pero $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un subespacio cerrado y por ende tiene inducida la topología métrica, por lo que podemos elegir $V \in S^n$, $\texttt{diam}(V) < \delta$ con $\delta > 0$ dado y V abierto!
     Con esto en mente, sea $\delta > 0$ tal que si $x \in U \subset \mathbb{R}P^n$, entonces $p^{-1}(U) = V \cup -V$ con $-V$ es conjunto de antípodas de V y tal que $V \cup -V = \emptyset$. O sea, si $x \in \mathbb{R}P^n$ entonces la fibra de un abierto de x es la unión de dos abiertos uno en cada casquete de S^n; pero como $p|_V : V \to \mathbb{R}P^n \cap U$ y $p|_{-V} : -V \to \mathbb{R}P^n \cap U$ son inyectivas(por construcción), sobreyectivas, continuas y abiertas entonces son homeomorfismos. Por ende, $\forall x \in \mathbb{R}P^2$ $\exists U \ni x$ abierto parejamente cubierto. ∎

   d) ??

   e) Veamos que p es revestimiento!

   - Notemos que $E = p_x^{-1}(\mathbb{Z}) \cup p_y^{-1}(\mathbb{Z})$ y como $\mathbb{Z}$ es cerrado de $\mathbb{R}$ y las proyecciónes continuas, entonces E es un subespacio cerrado del producto. De la misma manera $B = p_z^{-1}(\{\bar{1}\}) \cup p_w^{-1}(\{\bar{1}\})$ donde $\bar{1} := \overline{(0, 1)} := 1$ y por ende B también es cerrado.
   - Como pi_X y pi_Y son continuas y las i_i son iniciales, entonces p es continua en XxY y como E es un subespacio cerrado entonces p es continua en E.
   - Sea $(z, w) \in S^1$ entonces $z = e^{i2\pi\theta_1}$ y $w = 1$ (o viceversa) entonces $p((\theta_1, 1)) = (z, w)$ y p es sobre.

- Sea $(z, w) \in B$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $w = 1$, y supongamos que $z \neq 1$ entonces $U = S^1 - \{1\} \times \{1\}$ es abierto en B y $(z, w) \in U$; además $p^{-1}(U) = \coprod_n (n, n+1) \times \{n\}$ donde $V_n := (n, n+1) \times \{n\}$ es abierto en E y $p|_{V_n}$ es continua, sobreyectiva, inyectiva y abierta y por ende homeomorfismo. Como si $z = \{1\}$ podemos tomar $U = S^1 - \{-1\} \times \{1\}$ y la cuenta es la misma, llegamos a que p es revestimiento. ∎

4. Pruebe que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos\theta(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x))$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.

   Demostración Por partes!:

   - Sea $x > 0$ y $x \in U \subset R_{>0}$ un entorno de x tal que $diam(U) < 1$, entonces $p|_U : U \to S^1 \cap p(U)$ es inyectiva (pues $diam(U) < 1$), sobreyectiva, continua (pues restringo a un subespacio abierto) y abierta (pues si $V \subset U$ es abierto, entonces $V = p^{-1}(p(U))$ es abierto y entonces como p es cociente $p(U)$ es abierto); por ende es un homeomorfismo local.
   - Sea $1 := \overline{(0,1)} \in S^1$ y $1 \in U \subset S^1$ un entorno abierto del 1, entonces notemos que $p^{-1}(U) = (0, \epsilon) \cup \coprod_n (n, n+1)$ donde $p_{(n,n+1)}$ es un homeo entre $(n, n+1)$ y U pero $(0, \epsilon) \not\cong U$ y por ende p no es revestimiento.

5. Pruebe que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta y por lo tanto es cociente.

   Demostración Sea $U \subset E$ abierto y sea $y = p(x) \in p(U)$, entonces como p es revestimiento tenemos que $\exists V \ni y$ con $V \subset B$ tal que $p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i$. Como $p(x) = y \in V$ entonces $\exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$, sea entonces $U \cap U_{i_0}$ que es un abierto de E y contiene a x, Como $p|_{U_{i_0}}$ es homeo, en particular es abierta y entonces $p(U \cap U_{i_0}) = p|_{U_{i_0}}(U \cap U_{i_0}) := V_y$ es abierto, $y \in V_y$ y $V_y \subset V$ trivialmente pues $p(U_{i_0}) = V$, por ende $y = p(x)$ es punto interior de $p(U)$ y p es abierta

6. Pruebe que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es. Usar este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.

   Demostración Vayamos por partes!

   - $p \times p'$ es continua por ser producto de continua, a su vez es sobreyectiva por lo mismo
   - Sea $(b, b') \in B \times B'$, como p es revestimiento entonces $\exists b \in V \subset B$ tal que $p^{-1}(V) = \coprod_i U_i$, a su vez como p' es revestimiento entonces $\exists b' \in V' \subset B'$ tal que $p'^{-1}(V') = \coprod_i U'_i$. Por ende sea $(b, b') \in V \times V'$, entonces $p^{-1}(V \times V') = \coprod_i U_i \times \coprod_j U'_j = \coprod_{i,j} U_i \times U'_j$ y como $p|_{U_i}$ es homeo y $p'|_{U'_j}$ es homeo, entonces $p \times p'|_{U_i \times U'_j}$ es homeo y $p \times p'$ es revestimiento.

   Entonces tenemos el revestimiento $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 \simeq T$ con $p(t) = e^{2\pi i t}$ y donde al punto base $(1, 1) \in T$ se tiene que $E_{(1,1)} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, por ende tenemos los morfismos inducidos:

   $$\pi_1(\mathbb{R}^2, (0,0)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(T, (1,1)) \xrightarrow{\phi_*} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

   Pero como $\mathbb{R}^2$ es contráctil se tiene que ϕ_* es una biyección y solo nos falta ver que es morfismo de grupos! Recordemos que $\phi_*([\gamma]) = \widetilde{\gamma}^{e_0}(1)$ donde $e_0 \in p^{-1}((1,1))$ y en nuestro caso tomaremos el $(0,0)$. Sean $\widetilde{\gamma}^{(0,0)}, \widetilde{\omega}^{(0,0)}$ caminos levantados del toro y $\tau : I \to \mathbb{R}^2$ dado por $t \mapsto \widetilde{\omega}^{(0,0)}(t) + \widetilde{\gamma}^{(0,0)}(1)$, el chiste es que este es otro camino levantado de ω que empieza en donde $\widetilde{\gamma}^{(0,0)}$ termina, y por ende al aplicar ϕ_* nos va a dar lo que queremos! Notemos que $p\tau(t) = p(\widetilde{\omega}^{(0,0)}(t) + \widetilde{\gamma}^{(0,0)}(1)) = p(\widetilde{\omega}^{(0,0)}(t)) = \omega(t)$

pues $\widetilde{\gamma}^{(0,0)}(1) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pero $\tau(0) = \widetilde{\omega}^{(0,0)}(0) + \widetilde{\gamma}^{(0,0)}(1) = (0,0) + \widetilde{\gamma}^{(0,0)}(1) = \widetilde{\gamma}^{(0,0)}(1)$ y tenemos lo que decíamos. Por ende $\widetilde{\gamma}^{(0,0)} * \tau$ esta bien definido y $p(\widetilde{\gamma}^{(0,0)} * \tau) = p(\widetilde{\gamma}^{(0,0)}) * p(\tau) = \gamma * \omega$ que el último siempre esta bien definido pues son lazos en $(1,1)$. O sea que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p"'] \\ I \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}^{(0,0)}*\tau"] \arrow[r, "\gamma*\omega"] & T \end{tikzcd}$$

Y como $\widetilde{\gamma}^{(0,0)} * \tau(0) = (0,0)$ entonces por el teorema de unicidad del levantamiento de caminos tenemos que $\widetilde{\gamma}^{(0,0)} * \tau = \widetilde{\gamma * \omega}^{(0,0)}$ por ende $\phi_*([\gamma * \omega]) = \widetilde{\gamma * \omega}^{(0,0)}(1) = \widetilde{\gamma}^{(0,0)} * \tau(1) = \tau(1) = \widetilde{\omega}^{(0,0)}(1) + \widetilde{\gamma}^{(0,0)}(1) = \phi_*([\omega]) + \phi_*([\gamma])$ y por ende ϕ_* es un isomorfismo, por lo que $\pi_1(T(1,1)) \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Otra forma: Sabemos que $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$, entonces por el ejercicio 16 de la práctica 6 tenemos que $\pi_1(T,(1,1)) = \pi_1(S^1 \times S^1, (1,1)) \simeq \pi_1(S^1(1))^2 \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ∎

7. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Pruebe que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \to Z$ es un revestimiento.

Demostración Como composición de continuas es continua y composición de sobreyectivas es sobreyectiva, tenemos que ver que cada punto contiene un abierto parejamente cubierto! Sea $z \in Z$, como q es revestimiento tenemos que $\exists z \in U \subset Z$ tal que $q^{-1}(U) = \coprod_{i\in I} V_i$ con $V_i \subset Y$ abiertos y $q|_{V_i} : V_i \to U$ son homeomorfismos; ahora como por hipótesis $E_z := q-1(z)$ es finito, y por el ejercicio 2 es discreto tenemos que I es finito. Sea $y_i \in E_z$, entonces como p es revestimiento sabemos que $\exists y_i \in \widetilde{V}_i \subset Y$ tal que $p^{-1}(\widetilde{V}_i) = \coprod_{j\in J} W_i j$ con $W_{ij} \subset X$ abiertos y $p|_{W_{ij}}$ homeomorfismos. Entonces veamos $\widetilde{U} := q(\bigcap_{i=1}^n V_i \cap \widetilde{V}_i) \cap U$ cumple!

- $z \in \widetilde{U}$ pues $z \in U$ por hip y $q^{-1}(z) = E_z \subset \bigcap_{i=1}^n V_i \cap \widetilde{V}_i$ (pues cada $V_i \simeq_q U$) y por ende $z \in q(\bigcap_{i=1}^n V_i \cap \widetilde{V}_i)$
- $\widetilde{(U)}$ es abierto pues $\bigcap_{i=1}^n V_i \cap \widetilde{V}_i$ es abierto y q es abierta por el ej 5 y U es abierto
- $(qp)^{-1}(\widetilde{U}) = p^{-1}(q^{-1}(\widetilde{U})) = p^{-1}(\bigcap_{i=1}^n V_i \cap \widetilde{V}_i \cap q^{-1}(U)) = \star$ (Pues q es sobre) $\star = p^{-1}(\bigcap_{i=1}^n V_i \cap \widetilde{V}_i) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(V_i \cap \widetilde{V}_i) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(V_i) \cap \coprod_{j\in J} W_{ij}) = \coprod_{j\in J} \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(V_i) \cap W_{ij} := \coprod_{j\in J} X_j$ donde como la intersección es finita y p es continua tenemos que X_j es abierto. Ahora $qp|_{X_i}$ es un homeo entre $X_i \simeq \widetilde{U}$ pues p es homeo entre W_{ij} y $\widetilde{V}_i$ y entonces al restringir a $p^{-1}(V_i)$ lo sigue siendo con $\widetilde{V}_i \cap V_i$, ahora q es homeo entre V_i y U y por ende al restringir a $\widetilde{V}_i$ lo sigue siendo con $U \cap \widetilde{V}_i$ y luego lo sigue siendo entre $\bigcap_{i=1}^n V_i \cap \widetilde{V}_i$ y $\widetilde{U}$.

Por ende para $z \in Z$ hallamos $\widetilde{U} \ni z$ un abierto de Z parejamietno cubierto por qp y por ende qp es revestimiento ∎

8. Pruebe que los revestimientos son estables por cambio de base. En particular, si $p : E \to B$ es revestimiento y $A \subset B$, entonces $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ es revestimiento.

Demostración Veamoslo! Sea $p : E \to B$ un revestimiento y $g : X \to B$ una funcion continua, sea $P := \{(s,t) \in X \times E \ / \ g(s) = p(t)\}$ el pullback clásico del diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "p_E"] \arrow[d, dashed, "p_X"'] & E \arrow[d, "p"'] \\ X \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Veamos que p_X es revestimiento!

- Sea $x \in X$ y consideremos $g(x) \in B$, entonces como p es sobreyectiva $\exists t \in E$ tal que $p(t) = g(x)$ y entonces $(x,t) \in P$ y $p_X(x,t) = x$, por ende p_X es sobreyectiva. Notemos que probamos que las sobreyectivas son estables por cambio de base.
- Es trivial por conmutatividad que las continuas son estables por cambio de base
- Sea $x \in X$ y consideremos $g(x) \in B$, entonces como p es revestimiento sabemos que $\exists g(x) \in U \subset B$ tal que $q^{-1}(U) = \coprod_i V_i$ con $V_i \subset E$ abiertos y $V_i \simeq U$. Notemos que $W := g^{-1}(U)$ es abierto en X y cumple que $g(W) \subset U$, veamos que $x \in W$ esta parejamente cubierto! Para eso $p_X^{-1}(W) = p_X^{-1}(g^{-1}(U)) = (gp_X)^{-1}(U) = (pp_E)^{-1}(U) = p_E^{-1}(\coprod_i V_i) = \coprod_i p_E^{-1}(V_i)$ y los $p_E^{-1}(V_i)$ son abiertos de P, faltaría ver que $p_X|_{p_E^{-1}(V_i)}$ es un homeomorfismo. Para esto notemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
p_E^{-1}(V_i) \arrow[r, dashed, "p_E"] \arrow[d, dashed, "p_X"'] & V_i \arrow[d, "p"] \\
g^{-1}(U) \arrow[r, "g"] & U
\end{tikzcd}$$

  Como entonces $p_E^{-1}(V_i)$ es el pullback de ese diagrama, entonces como los homeomorfismos son estables por cambio de base, tenemos que $p_X|_{p_E^{-1}(V_i)}$ es un homeomorfismo. $\blacksquare$

9. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Pruebe que si C es una componente conexa de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

   Demostración Notemos primero que como p es revestimiento E hereda las propiedas locales de B, veamoslo! Sea $x \in E$ y veamos $p(x) \in B$, entonces como p es revestimiento $\exists p(x) \in U \subset B$ abierto tal que $p^{-1}(U) = \coprod_i V_i$, notemos que U lo podemos tomar conexo!

   - Sea $\widetilde{U} \ni x$ el entorno abierto y conexo de x y U el parejamente cubierto, sea $\widehat{U} := U \cap \widetilde{U}$, entonces $p^{-1}(\widehat{U}) = \coprod_i V_i \cap p^{-1}(\widetilde{U})$ y trivialmente $V_i \cap p^{-1}(\widetilde{U}) \simeq_p \widehat{U}$, que es lo que queríamos

   Entonces, volviendo, tomamos el U original conexo y por ende como $V_i \simeq U$ tenemos que V_i los abiertos de E son conexos y por ende E es localmente conexo. Ahora si con esto dicho, veamos que $p|_C$ es revestimiento.

   - Sea $b \in B$ y $U \ni b$ el entorno abierto conexo parejamente cubierto, entonces como $\exists V_i \subset X$ con $V_i \simeq U$ en particular $\exists v_i \in V_i \;/\; p(v_i) = b \; \forall \; i \in I$. Sea C la componente conexa, entonces como los V_i son conexos, $\exists i_0 \in I \;/ V_{i_0} \subset C$ y por ende $v_{i_0} \in C$ y $p(v_{i_0}) = b$. Por ende $p|_C$ es sobreyectiva. Trivialmente como restringir es inicial, $p|_C$ es continua.
   - Sea todo como lo anterior, o sea $x \in U \subset X$ y $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$ y veamos $p^{-1}|_C(U) = \coprod_{i \in I} V_i \cap C$. Como V_i son conexos y C es una componente conexa, tenemos que $V_i \subset C$ o $V_i \cap C = \emptyset$, sea $J \subset I$ los indices que sobreviven, entonces $V_j \cap C = V_j \; \forall j \in J$. Entonces tenemos que $p^{-1}|_C(U) = \coprod_{j \in J} V_j$ y como los $V_j \simeq_p U$ entonces por ser todo igual $V_j \simeq_{p|_C} U$ y entonces U esta parejamente cubierto. Notemos que B automáticamente queda conexo pues es la imagen por p de C. (No use conexión, esta mal??) $\blacksquare$

10. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ el revestimiento usual. Pruebe que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ si y sólo si f es null homotópica.

    Demostración Veamoslo por partes!

    - $\Longrightarrow)$
      Supongamos que $\exists \widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = p\widetilde{f}$ entonces como $\mathbb{R}$ es contráctil tenemos que $\widetilde{f} \simeq C_{x_0}$ y por ende $f = p\widetilde{f} \simeq C_r$, o sea f es nul-homotópica.

- $\Longleftarrow$)

  Ahora volvamos! Sea $x \in X$ miremos $f(x) \in S^1$, como f es nullhomotópica, entonces se que $f \simeq C_{s_0}$ con $s_0 \in S^1$ y como S^1 es arco-conexo se que $\exists \alpha$ camino de s_0 a $f(x)$. Sea ahora $r_0 \in E_{s_0} \subset \mathbb{R}$ y consideremos $\widetilde{\alpha}^{r_0}$ el camino levantado de α en $\mathbb{R}$, notemos que $p(\widetilde{\alpha}^{r_0}(t)) = f(t)$ y por ende definimos $\widetilde{f}(x) = \widetilde{\alpha}^{r_0}(1)$, veamos que esta bien definida, que es continua y que hace conmutar el diagrama!

  - Supongamos que $\alpha, \omega : I \to S^1$ son dos caminos que unen s_0 con $f(x)$, entonces $\alpha * \overline{\omega}$ es un lazo en s_0. Afirmo que $\widetilde{\alpha * \overline{\omega}}^{r_0}$ es un lazo en r_0; efectivamente pues f es null-homotópica y entonces $[\alpha * \overline{\omega}] = [C_{s_0}] = 0$ y $[0] \in \{[\omega] \in \pi_1(S^1, s_0) \ / \ \widetilde{\omega}^{r_0}(1) = r_0\} = p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0)) = 0$ pues $\mathbb{R}$ es simplemente-conexo. Entonces $\widetilde{\alpha}^{r_0} * \widetilde{\overline{\omega}}^{r_1}$ es un lazo en r_0 donde $r_1 = \widetilde{\alpha}^{r_0}(1)$. Por lo tanto $\overline{\widetilde{\overline{\omega}}^{r_1}}(0) = r_0$ y es otro levantado α, por ende por el levantamiento único de caminos tenemos que $\overline{\widetilde{\overline{\omega}}^{r_1}} = \widetilde{\omega}^{r_0}$ y cuando evaluamos en $t = 1$ tenemos que $\widetilde{\omega}^{r_0}(1) = \overline{\widetilde{\overline{\omega}}^{r_1}}(1) = \widetilde{\overline{\omega}}^{r_1}(0) = r_1 = \widetilde{\alpha}^{r_0}(1)$ y por ende $\widetilde{f}$ esta bien definida.
  - Sea $x \in X$ y sea $U \ni f(x)$ el entorno parejamente cubierto, entonces $p^{-1}(U) = \coprod_j W_j$. Sea $j_0 \in J$ tal que $\widetilde{f}(x) \in W_{j_0}$ y consideremos $q := p|_{W_{j_0}}^{-1} : U \to W_{j_0}$ el homeomorfismo correspondiente. Ahora si, sea $W \ni \widetilde{f}(x)$ un entorno abierto y veamos $p(W \cap W_{j_0})$ que es abierto de S^1 pues $p|_{W_{j_0}}$ es homeo, entonces $V := f^{-1}(p(W \cap W_{j_0}))$ es un abierto de X pues f es continua. Veamos que $\widetilde{f}(V) \subset W$ y probariamos la continuidad de $\widetilde{f}$!!

    Dado $x' \in V$ sea $\alpha : I \to S^1$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = x'$, entonces $q(\alpha)$ que es un levantamiento de α y $q\alpha(0) = \widetilde{f}(x)$; entonces $\widetilde{f}(x') = q\alpha(1) \in W_{j_0} \cap W \subset W$ pues $\alpha(1) \in f(V) \subset p(W_{j_0} \cap W)$ por lo que $q\alpha(1) \in qf(V) \subset qp(W_{j_0} \cap W) = W_{j_0} \cap W$ pues q es la inversa de $p|_{W_{j_0}}$. Por ende probamos que dado $W \ni f(x)$ entorno abierto, $\exists V \ni x$ entorno abierto tal que $\widetilde{f}(V) \subset W$ y por ende $\widetilde{f}$ es continua.
  - Por contrucción es trivial que hace conmutar el diagrama!

11. Sea G un grupo topológico y X un G-espacio (ver ej. 31 práctica 2). Decimos que la acción es *libre* si $gx \neq x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$, $g \neq e$. Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq e$.

    a) Pruebe que si G es finito, X es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.

    b) Pruebe que si G actúa en X y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección $p : X \to X/G$ es un revestimiento.

    c) Sea $X = \mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Sea $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ el subgrupo generado por ϕ,donde $\phi(z) = \bar{z} + 1 + i$. Pruebe que la acción de G en X es propiamente discontinua, y que X/G es homemomorfo a la banda de Mobius.

    d) Calcular el grupo fundamental de la banda de Mobius.

    Demostración ???

12. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $e \in E$, $b = p(e)$.

    a) Puebe que que si B es simplemente conexo, entonces la inclusión de la fibra E_b en E induce un epimorfismo $i_* : \pi_1(E_b, e) \to \pi_1(E, e)$.

    b) Pruebe que si la fibra E_b es simplemente conexa, entonces $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ es un isomorfismo.

    c) Pruebe que si E es simplemente conexo, entonces hay una biyección entre $\pi_1(B, b)$ y $\pi_0(E_b)$.

    Demostración *a*) Sea $[\omega] \in \pi_1(E, e)$ un lazo, entonces consideremos $p_*([\omega]) = [p\omega] \in \pi_1(B, b)$, como B es simplemente conexo tenemos que $[p\omega] = [C_b]$, o sea que $\exists H : I \times I \to B$ continua tal que $H_0 = p\omega$ y $H_1 = C_b$. Como p es fibración esta H se levanta a $\widetilde{H} : I \times I \to E$ tal que $\widetilde{H}_0 = \widetilde{p\omega}^e$ y $\widetilde{H}_1 = \widetilde{C_b}^e = C_e$, pero $\widetilde{p\omega}^e = \omega$ y por ende $\omega \simeq_{\widetilde{H}} C_e$ y por ende $i_*([C_e]) = [\omega]$ y i_* es epimorfismo.

b) Veamoslo por partes!

- Monomorfismo
  Sea $[\alpha] \in \pi_1(E, e)$ tal que $p_*([\alpha]) = 0$, entonces $p\alpha \simeq C_b$ y como p es fibración tenemos que $\widetilde{p\alpha}^e = \alpha \simeq \widetilde{C_b}^e = C_e$ y por ende $[\alpha] = [C_e] = [0]$ y p_* es monomorfismo.
- Epimorfismo
  Sea $[0] \neq [\omega] \in \pi_1(B, b)$ y consideremos $\widetilde{\omega}^e$ veamos que este es un lazo en e! ??

c) ??

13. Sabiendo que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, calcule el grupo fundamental de los siguientes espacios.

a) $X = S^1 \times [0, 1]$, un cilindro.

b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$, un cilindro infinito.

c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, el plano pinchado.

d) $X = M$, la banda de Möbius.

e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual.

f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una recta o un plano.

Demostración *a*) Nosotros ya sabemos que $X \simeq X \times I$ $\forall X$ espacio topológico vía la homotopía lineal $H((x, t), s) = (x, t + s(0 - t))$ y entonces, en particular $\pi_1(S^1, s) = \pi_1(S^1 \times I, s) = \mathbb{Z}$ pues el π_1 es un invariante homotópico.

b) Como ya probamos en la práctica pasada que, como $[0, 1]$ es un compacto convexo de $\mathbb{R}$, $I \simeq \mathbb{R}$ entonces $S^1 \simeq S^1 \times I \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ y entonces $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, s) = \mathbb{Z}$

c) Notemos que $1_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} \simeq \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}$ via $H(\hat{x}, t) = \dfrac{(1-t)1_{\mathbb{R}^2-\{0\}} + t\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}}{\left\|(1-t)1_{\mathbb{R}^2-\{0\}} + t\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}\right\|}$ y como $\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}|_{S^1} = 1_{S^1}$ tenemos que $\mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1$ $(rel\ S^1)$ y por ende $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, r) = \mathbb{Z}$

d) Notemos que $M = I \times I/(0, x) \sim (1, 1-x)$ y notemos que $S^1 \cong I \times I/(0, \frac{1}{2}) \sim (1, \frac{1}{2})$ entonces podemos sospechar que $S^1 \simeq M$. Sea $H : M \times I \to S^1$ dada por $H(\overline{(x,t)}, s) = \overline{(x,t)}(1-s) + (s)\overline{(x, \frac{1}{2})}$, es fácil ver como hicimos en la práctica 6 que esta H es la proyección de la homotopía lineal en $I \times I$ que compuesta con la proyección al cociente de S^1 respeta q_M y por ende es continua y vale lo que queremos! Entonces $\pi_1(M, s) = \pi_1(S^1, s) = \mathbb{Z}$

e) Como hicimos en el ejercicio 6 $\pi_1(T, (1, 1)) = \pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) \simeq \pi_1(S^1(1))^2 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

f) Veamoslo por separado!

- L es una recta
  En este caso notemos que $\mathbb{R}^3 - L \simeq \mathbb{R}^3 - L'$ donde $L' = \{x = 0\ ,\ y = 0\ \}$ pues $\exists Q\ GL_3(\mathbb{R})\ /\ Q(L) = L'$ y entonces $H = 1_x t + (1-t)Qx$ es la homotopía que nos da lo anterior! Pero ahora notemos que $\mathbb{R}^3 - L' \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ pues $\mathbb{R}^3 - L' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y éste último ya probamos que $\mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1$. Pero entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L, r) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - L', r') = \pi_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 - \{0\}, r'') = \pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, s') = \pi_1(S^1, s) = \mathbb{Z}$
- L es un plano
  En este caso $\mathbb{R}^3 - L \simeq \mathbb{R}^3_{x<0} \times \mathbb{R}^3_{x>0}$ pues nuevamente $\exists Q\ GL_3(\mathbb{R})\ /\ Q(L) = \{z = 0\}$ y con la misma homotopía, pero $\mathbb{R}^3_{x<0} \cup \mathbb{R}^3_{x>0} \simeq \mathbb{R}^3_{x<0} \times \mathbb{R}^3_{x>0}$ trivialmente, lo que da lo dicho. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L, r) = \pi_1(\mathbb{R}^3_{x<0}, r) \times \pi_1(\mathbb{R}^3_{x>0}, r') = \pi_1(\mathbb{R}^3, r) \times \pi_1(\mathbb{R}^3, r') = 0$ pues $\mathbb{R}^3_{x<0} \simeq \mathbb{R}^3$ e idem el otro, y entonces son simplemente conexos.

Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

14. Demuestre que si A es un retracto del disco D^2, entonces toda función continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

    Demostración Sea $f : A \to A$ continua y sea $x \in D^2$, entonces definimos $\widetilde{f}(x) = f(r(x))$, dado que $A \subset D^2$ tenemos que $\widetilde{f} : D^2 \to D^2$ y es continua por ser composición de continuas. Entonces por el teorema de Brower $\exists x_0 \in D^2$ / $\widetilde{f}(x_0) = x_0$, o sea que $f(r(x_0)) = x_0$, pero $f(A) \subset A$ y por ende $x_0 \in A$, entonces como $ri = 1_A$ tenemos que $r(x_0) = x_0$, por lo que $f(x_0) = x_0$ con $x_0 \in A$, o sea que f tiene un punto fijo ∎

15. Demuestre que si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = -x$.

    Demostración Si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica entonces $\exists \widehat{f} : D^2 \to S^1$ tal que $\widehat{f}|_{S^1} = f$, en particular como $S^1 \subset D^2$ es un subespacio cerrado, tenemos una $\widehat{f} : D^2 \to D^2$ continua, por Brower yo se que $\exists x_0 \, / \widehat{f}(x_0) = x_0$, pero igual que antes $x_0 \in S^1$, y como $\widehat{f}|_{S^1} = f$ tenemos que $f(x_0) = x_0$!!

    Por otro lado supongamos que si f es null-homotópica, entonces $-f$ también! Entonces bajo las mismas hipótesis y el mismo razonamiento $\exists x_1 \in S^1$ tal que $-f(x_1) = x_1$ por lo que $f(x_1) = -x_1$ ∎

16. Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Pruebe que si S^2 se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

    Demostración Supongamos que $S^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, entonces $S^2 = \bigcup_{i=1}^{3} F_i$ cerrados tal que $F_1 \cap -F_1 = \emptyset$ y $F_2 \cap -F_2 = \emptyset$. Entonces como S^2 es compacto y T_2 entonces es T_5 y por ende por el lema de Uryshon $\exists g_i : S^2 \to I$ tal que $g_i(F_i) = 0$ y $g_i(-F_i) = 1$ continua, sea entonces $f := (g_1, g_2) : S^2 \to \mathbb{R}^2$ que es continua. Por Bersok-Ulam $\exists x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$, Supongamos que $x \in F_i$ con $i \in \{1, 2\}$, entonces $g_i(x) = 0 = g_i(-x)$ por lo que $-x \in F_i$, ABS! Pues $F_i \cap -F_i = \emptyset$. Entonces $x \in F_3$! Por el mismo argumento a $-x$ tenemos que $-x \in F_3$ ∎

17. Pruebe que si $f : S^2 \to S^2$ es continua y $f(x) \neq f(-x)$ para todo x, entonces f es sobreyectiva.

    Demostración Supongamos que f no es sobreyectiva y sea $s \in S^2 \, / Im(f) \subset S^2 - \{s\}$, recordemos que $\exists h : S^2 - \{s\} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo y entonces $hf : S^2 \to \mathbb{R}^2$ es continua. Por el teo de Bersok-Ulam $\exists x_0 \in S^2$ tal que $hf(x_0) = hf(-x_0)$, pero como h es homeomorfismo, en particular es inyectivo y llegamos a que $f(x_0) = f(-x_0)$ ABS! Entonces f es sobreyectiva ∎