Geometría Proyectiva - 2° cuatrimestre 2016
PRÁCTICA 1

Aclaración: Notemos $\sum$ a la suma en un espacio vectorial V y $\sum^A$ a la suma en V_A con $A \in V$

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Un *sistema de coordenadas afines* en V es un par $S = (A, \{v_1, \dots, v_n\})$, con si $A \in V$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V_A. Notaremos $S = \{A, v_1, \dots, v_n\}$. Mostrar que son equivalentes las siguientes dos afirmaciones

   - $S = \{A, v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de coordenadas afines en V.
   - $\{v_1 - A; \dots, v_n - A\}$ es una base de V.

   Demostración Por un lado supongamos que $S = \{A, v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de coordenadas afines de V, y veamos que $\mathcal{B} = \{v_1 - A, \dots, v_n - A\}$ es base de V.

   Sea $0 = \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i(v_i - A)$, entonces $A = A + \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i.(v_i - A) = \sum\limits_{1\leq i\leq n}^{A} x_i._A v_i$. Por lo tanto se tiene que $0 =_A \sum\limits_{1\leq i\leq n}^{A} x_i._A v_i$ y como S es un sistema de coordenadas afines en V se tiene que $x_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Concluímos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

   Por el teorema de la dimensión, como $n = dim\ V = |\mathcal{B}|$ y $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, se concluye que $\mathcal{B}$ es base.

   Para el otro lado, sea $A = \sum\limits_{1\leq i\leq n}^{A} x_i._A v_i = A + \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i.(v_i - A)$ y por lo tanto $0 = \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i.(v_i - A)$. Como $\mathcal{B}$ es base de V entonces $x_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto $\{v_1 - A, \dots, v_n - A\}$ es linealmente independiente en V_A; por el mismo razonamiento de dimensión concluímos que S es un sistema de coordenadas afines en V. $\blacksquare$

2. Sean V un espacio vectorial de dimensión n y $S = \{A, v_1, \dots, v_n\}$ un sistema de coordenadas afines en V. Dado $v \in V$, notaremos con $[v]_S$ al vector de coordenadas de v con respecto a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V_A; esto es, $[v]_S = (a_1, \dots, a_n)$ si y solo si

$$v = a_1 \cdot_A v_1 +_A \cdots +_A a_n \cdot_A v_n.$$

   - Hallar $[v]_S$ en los casos siguientes.
     - $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(2,1,0); (0,1,0), (2,0,1), (0,0,-3)\}$ y $v = (0,0,0)$.
     - $V = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{X^2; X+1, X^2+3X, X^2+2\}$ y $v = 2X$.
     - $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
       y $v = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
   - Sea $S = \{(0,-2,1); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Calcular v, sabiendo que $[v]_S = (-2, 0, 4)$.
   - Sean $S = \{A, v_1, \dots, v_n\}$ y $S' = \{B, w_1, \dots, w_n\}$ dos sistemas afines en V. Si $v \in V$, expresar $[v]_{S'}$ en función de $[v]_S$.

Demostración 1 Primer item

1a) $V = \mathbb{R}^3 \quad S = \{(2,1,0);(0,1,0),(2,0,1),(0,0,-3)\}$ y $v = (0,0,0)$

Sea $\mathcal{B} = \{(-2,0,0),(0,-1,1),(-2,-1,-3)\}$, por el ejercicio 1 se tiene que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y notemos que $[t_{-A}(v)]_{\mathcal{B}} = [(-2,-1,0)]_{\mathcal{B}} = (\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4})$. Por la teórica tenemos entonces que $[t_A(t_{-A}(v))]_S = [v]_S = (\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4})$.

1b) $V = \mathbb{R}_2[X] \quad S = \left\{X^2; X+1, X^2+3X, X^2+2\right\}$ y $v = 2X$

Nuevamente sea $\mathcal{B} = \left\{-X^2+X+1, 3X, 2\right\}$ que por 1 es base de $\mathbb{R}_2[X]$ y notemos que $[v]_S = [t_{-A}(2X)]_{\mathcal{B}} = [-X^2+2X]_{\mathcal{B}} = (1,\frac{1}{3},-\frac{1}{6})$.

1c) Igual

1d) Igual

2 Sea $\mathcal{B} = \{(1,2,-1),(0,3,-1),(0,2,0)\}$, luego $[(0,-2,1)]_{\mathcal{B}} = (0,-1,\frac{1}{2})$, por lo tanto sabemos de la teórica que $[v]_S = [v-(0,-2,1)]_{\mathcal{B}}$; por lo tanto $[v]_{\mathcal{B}} = (0,-1,\frac{1}{2}) + (-2,0,4)$.

3 Sea $\mathcal{B} = \{v_1 - A, \dots, v_n - A\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1 - B, \dots, v_n - B\}$ y luego $[v]_{S'} = [t_{-B}(v)]_{\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[t_{-B}(v)]^t_{\mathcal{B}}$; por otro lado $[v]_S = [t_{-A}(v)]_{\mathcal{B}}$ y por lo tanto si consideremos $t(v) = v + A - B$ se tiene que $[v]_{S'} = C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[t(t_{-A}(v))]^t_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left\|\phi_t\right\|_{\mathcal{B}}[t_{-A}(v)]^t_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left\|\phi_t\right\|_{\mathcal{B}}[v]^t_S$. Donde como $A \neq B$ entonces $\left\|\phi_t\right\|, C_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \in GL_3(\mathbb{R})$. ∎

3. Sea $m \geq 2$. El conjunto $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ es *afínmente independiente* si $\{v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$ es linealmente independiente. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones.

   a) El conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ es afínmente independiente.
   b) Si $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0$ con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ entonces $\lambda_i = 0$ para $1 \leq i \leq m$.
   c) Dado $1 \leq j \leq m$, el conjunto $\{v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente en V_{v_j}.

Demostración Vayasmo de a partes:

i) $\Longrightarrow$ ii) Sea $0 = \sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i v_i$, luego $0 = \sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i v_i - \sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i v_1$ pues $\sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i = 0$. Por lo tanto $0 = \sum\limits_{2\leq i\leq n} \lambda_i(v_i - v_1)$ y como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es afinmente independiente se concluye que $\lambda_i = 0$ para todo $2 \leq i \leq n$; finalizamos pues $\sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i = \lambda_1 = 0$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Notemos que la hipótesis implica que el conjunto $\{(v_1,1), \dots, (v_m,1)\}$ es linealmente independiente pues si $0 = \sum\limits_{1\leq i\leq m} \mu_i(v_i,1)$ entonces se tiene que $\sum\limits_{1\leq i\leq m} \mu_i v_i = 0$ y que $\sum\limits_{1\leq i\leq m} \mu_i = 0$ luego se tiene que $\mu_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto $\mathcal{B} = \{v_1 - v_j, \dots, v_{j-1} - v_j, v_{j+1} - v_j, \dots, v_m - v_j\}$ es linealmente independiente, por 1 se tiene que $\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente en V_{v_j}.

iii) $\Longrightarrow$ i) Por 1 esto vale. ∎

4. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ está en *posición general* si todo subconjunto $A \subseteq S$ de cardinal menor o igual a $n+1$ es afínmente independiente. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto infinito $S = \{(t, t^2, \dots, t^n) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ está en posicion general en $\mathbb{R}^n$

Demostración Sea $A \subseteq S$ tal que $|A| = m \leq n+1$, luego existen $t_1 \neq \cdots \neq t_m \neq 0$ (error práctica) tal que $A = \{(t_1, \dots, t_1^n), \dots, (t_m, \dots, t_m^n)\}$ y queremos ver que este conjunto es afinmente independiente. Por 3 habíamos visto que esto es equivalente a que el conjunto $\{(1, t_1, \dots, t_1^n), \dots, (1, t_m, \dots, t_m^n)\}$ sea linealmente independiente, que es equivalente a que sea inversible:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & \dots & t_m^n \end{pmatrix}$$

Pero como los t_i son diferentes, entonces es sabido que la matriz de Vandermonde es inversible. $\blacksquare$

5. Un subconjunto no vacío M de un espacio vectorial V se dice *variedad lineal* si existe $A \in V$ tal que M es un subespacio de V_A. Probar que, dado M un subconjunto no vacío de V, son equivalentes las siguientes afirmaciones.

   a) M es una variedad lineal.

   b) M es un subespacio de V_B para todo $B \in M$.

   c) $M -_C A$ es un subespacio de V_C para todo $A \in M$ y todo $C \in V$.

   d) $M - A$ es un subespacio de V para todo $A \in M$.

   e) $M - A$ es un subespacio de V para algún $A \in M$.

   f) Existen $A \in V$ y S subespacio de V tales que $M = A + S$.

Demostración Vayamos de a partes:

i) $\Longrightarrow$ ii) Sea $B \in M$, como M es variedad lineal existe $A \in V$ tal que M es subespacio de V_A, luego $t_{B-A}(M)$ es subespacio de $t_{B-A}(V_A) = V_B$. Finalizamos notando que como $B \in M$ y M es subespacio de V_A entonces $B - A \in M$ y luego $t_{B-A}(M) = M$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sean $A \in M$ y $C \in V$, luego M es subespacio de V_A y notando que $M -_C A = M - A + C$ tenemos que $M - A$ es subespacio de V, luego $t_C(M - A) = M -_C A$ es subespacio de V_C

iii) $\Longrightarrow$ iv) Supongamos que existe un $A \in M$ tal que $M - A$ no es subespacio de V, entonces por definición $t_C(M - A) = M - A + C = M -_C A$ no es subespacio de V_C; concluímos que $M - A$ es subespacio de V para todo $A \in V$.

iv) $\Longrightarrow$ v) Trivial

v) $\Longrightarrow$ vi) Sabemos que existe $A \in M \subseteq V$ tal que $M - A = S$ es subespacio de V, luego $M = A + S$

vi) $\Longrightarrow$ i) Trivial $\blacksquare$

6. Sea V un espacio vectorial y $v_1, \dots, v_k \in V$. Llamamos al subconjunto de V

$$\sigma(v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \ : \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

el conjunto de las combinaciones afines de $\{v_1, \dots, v_k\}$. Probar que $\sigma(v_1, \dots, v_k)$ es una variedad lineal y que es la menor que incluye a $\{v_1, \dots, v_k\}$. ¿Qué dimensión tiene?

Demostración Veamos primero que si $a, b \in \sigma(v_1, \dots, v_n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \sigma(v_1, \dots, v_n)$.

Para esto existen $\mu_1^a, \dots, \mu_n^a, \mu_1^b, \dots, \mu_n^b$ tal que $a = \sum\limits_{1 \le i \le n} \mu_i^a v_i, b = \sum\limits_{1 \le i \le n} \mu_i^b v_i$; luego $\lambda a + (1 - \lambda)b = \sum\limits_{1 \le i \le n} (\lambda \mu_i^a + (1 - \lambda)\mu_i^b) v_i$ y $\sum\limits_{1 \le i \le n} \lambda \mu_i^a + (1 - \lambda)\mu_i^b = \lambda \sum\limits_{1 \le i \le n} \mu_i^a + (1 - \lambda) \sum\limits_{1 \le i \le n} \mu_i^b = \lambda + 1 - \lambda = 1$. Por lo tanto tenemos que $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \sigma(v_1, \dots, v_n)$.

Sea $A \in V$, $S = \{v - A \ / \ v \in \sigma(v_1, \dots, v_n)\}$ y $s \in S$; luego $s + A \in \sigma(v_1, \dots, v_n)$ y entonces $\lambda(s + A) + (1 - \lambda)A = \lambda s + A \in \sigma(v_1, \dots, v_n)$; por lo atnto $\lambda s \in S$.

Finalmente, sean $x, y \in S$ y luego $\frac{1}{2}(x + y) + A = \frac{1}{2}(x + A) + \frac{1}{2}(y + A)$ y por lo tanto $\frac{1}{2}(x + y) \in S$; por lo anterior $(x + y) \in S$.

Concluímos que S es un subespacio y entonces $M = S + A$ y por 5 es una variedad lineal.

Claramente es la más chica que contiene a $\{v_1, \dots, v_n\}$ y finalmente tiene dimensión $n - 1$. ∎

7. Hallar un conjunto de generadores afínmente independientes de las siguientes variedades lineales.

   - $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_3 = 2 \ , \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$.
   - $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x_1 + x_2 = 0\}$.
   - $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 - x_2 = 2 \ \ 2x_1 - 3x_2 = 1\}$.
   - $M = \{x \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2\}$.
   - $M \subseteq \mathbb{R}_2[X]$ la menor variedad lineal que contiene al conjunto

   $$\{4X^2 + 2X, 2X^2 + X, 3X^2 + X + 1, 5X^2 + 2X + 1\}.$$

   Demostración
   - $M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_3 = 2, 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\right\}$
     Notemos que $A = (2, -3, 0) \in M$ y luego $M - A = S$ es un subespacio dado por $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x_1 + 2) - x_3 = 2, 2(x_1 + 2) + (x_2 - 3) - x_3 = 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_3 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\} = \langle(1, -1, 1)\rangle$
   - Igual
   - Igual
   - Igual
   - $M \subseteq \mathbb{R}_2[X]$ la menor variedad lineal que tiene a $\left\{4X^2 + 2X, 2X^2 + X, 3X^2 + X + 1, 5X^2 + 2X + 1\right\}$.
     Es claro que el conjunto no esa finmente independiente pues $x_2 + v_3 = v_4$, luego $M = 2X^2 + x + \langle 4X^2 + 2X, 3X^2 + X + 1\rangle$.

8. Sea $f : V \longrightarrow V$ una transformación afín $A \in V$ y $g : V_A \longrightarrow V_A$ dada por

   $$g(v) = f(v) \underset{A}{-} f(A).$$

   Probar que g es lineal.

   Demostración Notemos primero que como f es afín entonces existe $h : V \to V$ transformación lineal y $p \in V$ tal que $f = t_p \circ h$, por otro lado consideremos $t_{-A} : V_A \to V$ dado por $t_{-A}(v + A) = v$.

   Sea entonces $v + A \in V_A$, luego $f \circ t_{-A}(v + A) = f(v) = p + h(v)$ y por otro lado $f \circ t_{-A}(A) = p + h(0) = p$; por lo tanto $f \circ t_{-A} = f \circ t_{-A}(A) + h$. Consideremos fionalmente $t : V_p \to V_A$ dado por $t(x + p) = x + A$, luego $g(v + A) = f \circ t_{-A}(A) + h(v) - f \circ t_{-A}(A) + A = h(v) + A$.

   Concluímos que si notamos laa coordenada de una transformación afín $z : V_p \to V_q$ tal que $z(v + p) = h(z) + q$ como $[z] = h$; se tiene que $[g] = h$ que es lineal, y por ende g es lineal.

   En efecto, si $v, w \in V_A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ luego $g(v +_A \lambda ._A w) = g(v + \lambda w + A) = A + h(v + \lambda w) = h(v) +_A \lambda h(w) = g(v) +_A \lambda ._A g(w)$. ∎

9. Probar que $f : V \longrightarrow V$ es una transformación afín si y solo si existen $A \in V$ y $g : V \longrightarrow V$ lineal tales que $f(v) = g(v) + A$. Deducir que f es isomorfismo afín si y solo si g es isomorfismo lineal.

Demostración Para un lado si existe $p \in V$ tal que $f : V \to V_p$ es lineal, entonces $t_{-p} \circ f : V \to V$ es lineal y por lo tanto si llamamos $g = t_{-p} \circ f$ se tiene que $f = t_p \circ g = g + p$.

Para el otro es justamente 8 ∎

10. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface $f(\lambda \underset{x}{\cdot} y) = \lambda \underset{f(x)}{\cdot} f(y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es una transformación afín.

Demostración Por 9 debemos ver que $f(v) - A = g$ es lineal para $A = f(0)$. por lo tanto veamos $f(0)$. Notemos que $\lambda_x.y = x + \lambda(y - x)$ por lo tanto sabemos que para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $f(x + \lambda(y - x)) = f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$.

Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = 0$, luego $f(\lambda y) = f(\lambda ._0 y) = \lambda ._{f(0)} f(y)$ por lo que llamemos $p = f(0)$ debemos probar que $f : V \to V_{f(0)}$ es lineal.

Finalmente si $\lambda = \frac{1}{2}$ entonces queda que $f(\frac{1}{2}(x + y)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ y por lo tanto $f(0) + \frac{1}{2}(f(x + y) - f(0)) = f(\frac{1}{2}(x + y)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ y juntando los extremos $\frac{1}{2}f(x + y) = \frac{1}{2}(f(0) + f(x) + f(y)))$ con lo que $f(x + y) = f(x) +_{f(0)} f(y)$. ∎

1. Cuádricas

<u>Notación</u>: Dado un polinomio P de grado dos en n variables reales notaremos a la cuádrica que genera como

$$\mathcal{C}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\},$$

y a su centro como $\operatorname{cent}(P) = \operatorname{cent}\Big(\mathcal{C}(P)\Big)$.

11. Sea $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Encontrar una base B de V de modo que la matriz de ϕ en B, $\|\phi\|_B$, sea diagonal.

- $V = \mathbb{R}^3$, $\|\phi(x)\|_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde E es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- $V = \mathbb{R}^4$, $\phi(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $\|\phi(x)\|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $B = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

Demostración Hay que diagonalizar. ∎

12. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuadrática cuya expresión en la base canónica es

$$F(x) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - 10.$$

Encontrar la expresión de F en $\mathbb{R}^3_{(1,0,2)}$, $\mathbb{R}^3_{(1,1,5)}$ y $\mathbb{R}^3_{(0,0,1)}$.

Demostración *a*) Notemos que $\|\phi(x)\|_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por lo visto en la práctica podemos tomar la simetrización de ϕ tal que $\tilde{\phi}(x, y) := \frac{\phi(x,y)+\phi(y,x)}{2}$ y entonces $\|\tilde{\phi}(x)\|_E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Además, $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle(-1, 3, 0), x\rangle$ y $c = -10$.

Por lo tanto si $A = (1,0,2)$ entonces $c_A = F(A) = 1 - 0 + 0 + 0 - 1 + 0 - 10 = -10$; además:

$$\begin{aligned}
\phi(X-A, X-A) &= (x_1-1, x_2, x_3-2).\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.(x_1-1, x_2, x_3-2)^t \\
\phi(X-A, X-A) &= (x_1-1)^2 + 3(x_1-1)x_2 - x_2^2 + x_2(x_3-2)
\end{aligned}$$

Y finalmente $\varphi_A = \phi(X-A, A) + \varphi(X-A)$ con lo que:

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= (x_1-1)2x_2 + \tfrac{1}{2}\langle(-1,3,0), x\rangle \\
\varphi_A &= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 - 1
\end{aligned}$$

Finalmente entonces $F_A = (x_1-1)^2 + 3(x_1-1)x_2 - x_2^2 + x_2(x_3-2) + x_1 + 7x_2 - 2 - 10$. No pienso hacer en los otros dos puntos... ∎

13. Dado un polinomio de grado dos en n variables reales P probar que para cualquier transformación afín inversible f ($f(x) = Tx + b$ con $T \in GL(n, \mathbb{R})$) vale que:

- $\text{cent}(P \circ f) = f^{-1}\text{cent}(P)$.
- $\mathcal{C}(P \circ f) = f^{-1}\mathcal{C}(P)$.

Demostración Vayamos de a partes:

a) Sea $p \in \text{cent}(P \circ f)$, luego si $P \circ f = \psi_f + 2\varphi_f + c_f$ tenemos que $\|\phi_f\|.p^t = b^t$. Pero $\phi_f(x,y) = \phi(f(x), f(y))$ y por lo tanto si $f = Tx + c$ tenemos que $\|\phi_f\| = T^t\|\phi\|T$. Esto junto nos dice que $T^{-1}b^t = \|\phi\|Tp^t = \|\phi\|g^t$ con $g^t = Tp^t$, o sea que $f(p) \in \text{cent}(P)$. Es claro que todos los pasos eran si y sólo si por ende vale la recíproca tomando $f^{-1} = f$.

b) Si $P(f(v)) = 0$ entonces $f(v) \in \mathcal{C}(P)$, y para el otro lado si $f(v)$ es tal que $P(f(v)) = 0$ entonces $v \in \mathcal{C}(P \circ f)$. ∎

14. Dado un polinomio de grado dos en n variables reales P probar que

$$\text{cent}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial P}{\partial x_i}(y) = 0 \; \forall\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Demostración Sea $p \in \text{cent}(P)$ si y sólo si $P_p = \psi_p + c_p$, luego $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}(p) = \dfrac{\partial \psi_p}{\partial x_i}(p) = (x-P)\|\phi\||_p + \|\phi\|(x-P)^t|_P = 0$.

Recíprocamente si $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}(p) = 0$ entonces P no es lineal en $x - P$ y luego se tiene que $\varphi_p = 0$, o sea $p \in \text{cent}(P)$. ∎

Ahora es en el resto de la guía usar 14 y hacer a lo analisis 1 los puntos de gradiente 0, ya tiene cero gracia hacer la forma a lo keilhauer (sirvio pa las demos)

15. En cada uno de los siguientes casos encontrar el conjunto de centros de la cuádrica Q.

- $Q : x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)
- $Q : x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x - 4x_2 - 5 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)
- $Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 3 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)
- $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)

- $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)
- $Q : 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)
- $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_3 - 7 = 0$ (en $\mathbb{R}^4$)

Demostración Para prácticar vamos a llevar a la forma normal a las cuádricas 1 y 6 pues parece que son con y sin centros.

a) $Q : x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ (en $\mathbb{R}^2$)
Primero notemos que $\nabla F = (2(x_1 - x_2), 4x_2 - 2x_1 + 2)$ y entonces $\nabla F = 0$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 4x_2 - 2x_1 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Que pasa si y sólo si $(x_1, x_2) = (-1, -1)$, luego por 14 se tiene que $cent(P) = \{(-1, -1)\}$. Como $F((-1, -1)) = -2 \neq 0$ entonces el centro no está en la cuádrica y estamos en el caso de las esferas. Sea $A = (-1, -1)$, luego por un lado $c_A = F(A) = -2$ y además $\psi_A = \psi(X - A) = (x_1 + 1, x_2 + 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} = (x_1 + 1)^2 + 2(x_2 + 1)^2 - 2(x_1 + 1)(x_2 + 1)$.
Finalmente, $\varphi_A = \phi(A, X - A) + \varphi(X - A) = (-1, -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + (x_2 + 1) = -(x_2 + 1) + (x_2 + 1) = 0$; concluímos que:

$$F_A = (x_1 + 1)^2 + 2(x_2 + 1)^2 - 2(x_1 + 1)(x_2 + 1) - 2$$

Ahora para llevar F_A a la forma normal en vez de diagonalizar $\|\phi\|$ vamos a ver el signo de los autovalores con el método de Pancho, para eso notemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 -> F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 -> C - 2 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces sabemos que ambos autovalores son positivos y entonces $F \simeq x_1^2 + x_2^2 - 1$. Ahora supongamos que nos piden la base $\mathcal{B}$ tal que presenta la equivalencia, entonces deeríamos diagonalizar, para eso veamos:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = & det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & +1 \\ +1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\ = & (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 1 \\ = & \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ = & (\lambda - (\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})))(\lambda - (\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}))) \end{aligned}$$

Y claramente los autovectores son demasiado feos para analizar.

b) $Q : 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4 = 0$ (en $\mathbb{R}^3$)
Nuevamente primero notemos que $\nabla F = (4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2, -2x_2 + 2x_1 - 2x_3 + 4, -2x_3 + 2x_1 - 2x_2 + 6) = 0$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_1 - 2x_3 + 4 &= 0 \\ -2x_3 + 2x_1 - 2x_2 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

si y sólo si:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Y se ve claramente de las condiciones 2 y 3 que el conjunto de soluciones es vacío y entonces la cúadrica no tiene centro. Para ver la equivalencia afín veamos el signo de los autovalores con el método de Pancho:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3->F_3-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3->C_3-C_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1->F_1+F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1->C_1+C_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1->F_1\frac{1}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1->C_1\frac{1}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto sabemos que $F \simeq x_1^2 - x_2^2 - 2x_3$.

16. Determinar el conjunto de puntos singulares $Q_S = Q_c \cap Q$ para cada una de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$.

    - $Q : 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 1 = 0$ $\quad (n = 3)$
    - $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + 4x_4 = 0$ $\quad (n = 4)$
    - $Q : x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ $\quad (n = 4)$
    - $Q : x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ $\quad (n = 5)$
    - $Q : x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $\quad (n = 2)$

17. Determinar los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la cuádrica Q de $\mathbb{R}^3$ de ecuación

$$Q : x_1^2 + (a^2 + 3)x_2^2 + (a^2 - 3)x_3^2 + (2a + 4)x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

    tiene centro único.

18. Sean L una recta y Q una cuádrica. Probar que el conjunto $L \cap Q$ bien es vacío, tiene solo un punto, tiene solo dos puntos, o es todo L.