Geometría Proyectiva - 2° **cuatrimestre** 2016
Práctica 4

1. Ejercicio 1

Demostración Vayamos por partes:

i) $\Longrightarrow$ ii) Supongamos que para cada punto $x \in M$ existen abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tales que $x \in U$ y:

$$h(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right) = \{y \in V \ / \ y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_n = 0\}$$

Y queremos ver que para todo punto $x \in M$ existen abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable inyectiva $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ tal que:

a) $x \in U$
b) $\phi(W) = M \cap U$
c) $D\phi(y)$ tiene rango k para todo $y \in W$
d) $\phi^{-1} : \phi(W) \to W$ es continua

Notemos entonces que si llamamos $\pi_k : V \to \mathbb{R}^k$ a la proyección a las primeras coordenadas, entonces tenemos que $\pi_k(V \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)) = \left\{z \in \mathbb{R}^k \ / \ (z, 0) \in V \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)\right\} = W$ es un abierto de $\mathbb{R}^k$. Es más, si llamamos $i_k(y) = (y, 0)$ a su inversa tenemos que $\phi := h^{-1} \circ i_k : W \to U$ esta bien definida. Veamos que esta es la parametrización que nos sirve:

a) $x \in U$ por hipótesis
b) $\phi(W) = h^{-1}(i_k(W)) = h^{-1}(V \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)) = h^{-1}(h(U \cap M)) = U \cap M$
c) Sabemos que i_k es diferenciable e inyectiva pues es al inclusión, y además h^{-1} es diferenciable e inyectiva pues h es difeomorfismo, concluímos que ϕ es diferenciable e inyectiva.
d) $D\phi(y) = D(h^{-1} \circ i_k)(y) = Dh^{-1}(y, 0) \circ Di_k(y)$ por la regla de la cadena. Por el teorema de la función inversa sabemos que $rg(Dh^{-1}(y, 0)) = rg(Dh^{-1}(z)) = n$ para todo $z \in V$, y como i_k es transformación lineal entonces $rg(Di_k(y)) = rg(\|i_k\|_E)$ y:

$$rg(\|i_k\|_E) = rg\left(\left[\begin{array}{c|c} Id_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\right) = k$$

Por lo tanto $D\phi(y)$ tiene rango k para todo $y \in W$

e) Notemos que $\phi^{-1} : U \cap M \to W$ esta dada por $\phi{-1} = \pi_k \circ h$ que es continua por ser composición de continuas.

ii) $\Longrightarrow$ i) Sea $x \in M$, luego por hipótesis existen $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^k$ abiertos tal que $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización, tomando si es necesario $\tilde{\phi^{-1}} = \phi^{-1} - \phi^{-1}(x)$ podemos suponer que $\phi(0) = x$. Supongamos sin pérdida de generalidad que la primer sub-matriz de $k \times k$ tenga determinante no nulo, o sea $det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}|_0\right)_{i,j \leq k} \neq 0$. Consideremos $G : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ dado por $G(u, t_{k+1}, \dots, t_n) = (\phi_1(u), \dots, \phi_k(u), \phi_{k+1}(u) + t_{k+1}, \dots, \phi_n(u) + t_n)$, luego se ve que DG_0 es un isomorfismo, por lo que por el teorema de la función inversa existe $A \subseteq W$, $\delta > 0$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $G : A \times (-\delta, \delta)^{n-k} \to B$ es un difeomorfismo. Notemos que como $A \subseteq W$ tenemos que $\phi(A) = \tilde{U} \cap M$ con $\tilde{U} \subseteq U$ abierto y además por construcción $x = G(0) \in B \cap \tilde{U}$, luego existe $\epsilon < \delta$ y $\tilde{A} \subseteq A$ tal que $G(\tilde{A} \times (-\epsilon, \epsilon)) = V \subseteq U \cap \tilde{U}$ es un difeomorfismo de R^n. Finalmente es claro que $G(\tilde{A} \times \{0\}) = \phi(\tilde{A}) \subseteq V \cap M$, y recíprocamente si $q \in V \cap M$ entonces como $V \cap M \subseteq U \cap \tilde{U} \cap M \subseteq \phi(A)$ entonces $q = G(u', 0) = G(u, t)$ y como G es biyectiva resulta que $u = u'$. Concluímos que G^{-1} es el difeomorfismo buscado. ∎

2. Ejercicio 2

Demostración Sea $x \in N \subseteq M$, luego por un lado $N = W \cap M$ pues N es abierto relativo y por el otro como M es subvariedad de dimensión k existen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos y $h : U \to V$ difeomorfismo, tal que $x \in U$ y $h(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)$. Por lo tanto si consideramos $g = h|_{(U \cap W)}$ luego g es difeomorfismo pues h lo era y ademas trivialmente se sigue cumpliendo que $g(U \cap W \cap M) = h(U \cap W) \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0^{n-k}\right)$ por lo que N es subvariedad de dimensión k. ∎

3. Ejercicio 3

Demostración Sea $x \in M$, luego como $rg(df)(x) = n - k$ tenemos que $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ es suryectiva; como $x \in M \subseteq U$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Definamos $g : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}^{n-k}$ dado por $g(u) = f(u + x)$, luego $dg|_{B_\epsilon(0)} = df|_{B_\epsilon(x)}$ y entonces dg es suryectiva en un entorno de 0. En este punto supongamos sin pérdida de generalidad que $det \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial u_j}\right)_{\{k+1 \leq i,j \leq n\}} \neq 0$ pues dg es suryectiva.

Finalmente sea $h : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}^n$ dado por $h(u) = (u_1, \ldots, u_k, g(u))$, luego es claro que dh es un isomorfismo por lo tanto existe $W \subseteq B_{\epsilon(0)}$, $V_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ y $V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $h : W \to V_1 \times V_2$ es un difeomorfismo. Notemos entoces que $F = h(u - x)$ cumple que las hipótesis del ejercicio 1, luego por 1 M es una subvariedad de dimensión $n - k$ ∎

4. Ejercicio 4

Demostración *a*) Sea $x \in M$ luego por ser M subvariedad de dimensión k existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ tal que:

1) $x \in U$
2) $\phi(W) = M \cap U$
3) $D\phi(y)$ tiene rango k para todo $y \in W$
4) $\phi^{-1} : \phi(W) \to W$ es continua

Afirmo que existe un abierto $V \subseteq W$, $\epsilon > 0$ y $\phi(W) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $F : V \times (-\epsilon, \epsilon)^{n-k} \to \Omega$ difeomorfismo tal que $F(u, 0) = \phi(u)$.

En efecto, como $rg(d\phi) = k$ entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $det \left(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial u_j}\right)_{\{1 \leq i,j \leq k\}} \neq 0$, y luego si definimos $F(u,t) : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ dado por $F(u, t_{k+1}, \ldots, t_n) = (\phi_1(u), \ldots, \phi_k(u), \phi_{k+1}(u) + t_{k+1}, \ldots, \phi_n(u) + t_n)$ entonces dF es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa existe $V \subseteq W, \epsilon > 0, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $F : V \times (-\epsilon, \epsilon)^{n-k} \to \Omega$ es un difeomorfismo tal que $F(u, 0) = \phi(u)$. Luego de aquí es claro que $h = \pi_{n-k} \circ F$ cumple que tiene rango $n - k$ y $h^{-1}(0) = \phi(V) = V \cap M$ ∎

b) ???

5. Ejercicio 5

Demostración Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ dado por $\phi(x) = (x, f(x))$ y veamos que ϕ es una parametrización de Γ_f. Para ello es claro que ϕ es inyectiva y que $\phi(\mathbb{R}^n) = \Gamma_f \cap \mathbb{R}^{n+m}$, además si f es diferenciable entonces ϕ es diferenciable y finalmente si $\pi_k(x, f(x)) = x$ luego $\pi_k = \phi^{-1}$ es continua. Finalmente es fácil ver que:

$$rg(d\phi) = rg\left(\left[\begin{array}{c|c} Id_n & 0 \\ \hline df & 0 \end{array}\right]\right) = n$$

Por lo que Γ_f es una subvariedad de dimensión n ∎

6. Ejercicio 6

   Demostración Vayamos de a pasos:

   i) $\Longrightarrow$ ii) Sea $p \in M$ y sea $U \ni p$ tal que existe $g : U \to \mathbb{R}$ extensión diferenciable de f, luego tomemos una carta (V, x) con $V \subseteq U \cap M$, luego $f \circ x^{-1}|_{x(V)} = g \circ x^{-1}|_{x(V)}$ y como g, x^{-1} son diferenciables entonces $f \circ x^{-1}$ es diferenciable.

   ii) $\Longrightarrow$ iii) Sea $p \in M$ y (V, y) una carta arbitraria alrededor de p y (U, x) la carta de p tal que $f \circ x^{-1}$ es diferenciable. Luego si considero $W \subseteq U \cap V$ entonces $f \circ y^{-1}|_{y(W)} = (f \circ x^{-1}|_{x(W)}) \circ (x \circ y^{-1})$ que es diferenciable.

   iii) $\Longrightarrow$ i) Notemos que por la resolución de 1 sabemos que existe $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tal que $p \subseteq U$ y $h : U \to V$ difeomorfismo tal que $h(U \cap M) = \{y \in V \ / \ y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\} = W$ y por lo tanto $\pi_k \circ h : U \to \pi_k(V)$ es una aplicación diferenciable de rango k. Luego sea $g = f \circ x^{-1} \circ h$ que es diferenciable y cumple que $g|_{U \cap M} = \left(f \circ x^{-1}\right)|_W = f|_{U \cap M}$. ∎

7. Ejercicio 7

   Demostración Sea $p_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, luego como g es diferenciable se tiene que existe $W \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\tilde{g} : W \to P$ tal que $g|_{W \cap N} = \tilde{g}|_{W \cap N}$, similarmente existen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\tilde{f}$, luego si consideramos $V = f^{-1}(f(U) \cap W) \subseteq U$ entonces $p_i \circ g \circ f|_{V \cap M} = p_i \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}|_{V \cap M}$ que es diferenciable; concluímos que $g \circ f$ es diferenciable. ∎

8. Ejercicio 8

   Demostración Para un lado, sea $v \in df(\mathbb{R}^k)$ y tomemos la carta $(f(W) = V, f^{-1} = x)$ alrededor de p. Luego existen $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}$ tal que $v = \sum\limits_{1 \le i \le n} w_i df(e_i)$, si consideramos $w = (w_1, \ldots, w_k)$ entonces $\alpha(t) = x(p) + tw \in \mathbb{R}^k$ y se tiene que $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = w$. Por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $c = x^{-1} \circ \alpha \in V$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ y se tiene que $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = dc_0(1) = d(x^{-1} \circ \alpha)_0(1) = dx^{-1}_{x(p)} \circ d\alpha_0(1) = dx^{-1}_{x(p)}(\dot{\alpha}(0)) = dx^{-1}_{x(p)}(w) = \sum\limits_{1 \le i \le n} w_i df(e_i) = v$.

   Recíprocamente, supongamos que existe $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$ y $dc_0(1) = v$, luego $x \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \to W$ es una curva diferenciable tal que $d(x \circ c)_0(1) = \left(\frac{d(x_1 \circ c)}{dt}(0), \ldots, \frac{d(x_1 \circ c)}{dt}(0)\right)$, luego $v = dc_0(1) = dx^{-1}_{x(p)}\left(\frac{d(x_1 \circ c)}{dt}(0), \ldots, \frac{d(x_1 \circ c)}{dt}(0)\right) = \sum\limits_{1 \le i \le k} \frac{d(x_1 \circ c)}{dt}(0) dx^{-1}_{x(a)}(e_i) \in dx^{-1}(\mathbb{R}^k)$.

   ∎

9. Ejercicio 9 trivial

10. Ejercicio 10

    Demostración Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, luego notemos que $dF_p = \nabla F(p) = (2x, 2y, 0)_p$ y si $p \in \mathcal{C}$ el cilindro, luego $rg(dF_p) = 1 = 3 - 2$. Por lo tanto por 3 si consideramos $U = \mathbb{R}^3$ se tiene que $\mathcal{C}$ es una subvariedad regular de dimensión 2, ie: una superficie regular por 1.

    No obstante, como F no es biyectiva para obtener una parametrización por los métodos de 3 deberíamos computar F^{-1} y entonces tendríamos 4 cartas. Por otro lado en polares $\phi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$ es una parametrización de $\mathcal{C}$ pues es diferenciable, una inmersión y es una biyección del abierto $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ con $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3 \cap \mathcal{C}$. ∎

11. Ejercicio 11

Demostración Ya vimos en 5 que Γ_f es una superficie regular, si $p \in \Gamma_f$ luego $T_p\Gamma_f = \langle d\phi_{\phi^{-1}(p)}(e_1), d\phi_{\phi^{-1}(p)}(e_2)\rangle =$ $\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{(x,y)}, \frac{\partial \phi}{\partial y}|_{(x,y)}\rangle = \langle \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\rangle = \langle(-\nabla f, 1)\rangle^{\perp}$. $\blacksquare$

12. Ejercicio 12

Demostración Es claro que ϕ es biyectiva y diferenciable, además:

$$rg(d\phi) = rg\left(\begin{bmatrix} \dot{x}\cos(\theta) & \dot{x}\sin(\theta) & \dot{z} \\ -x\sin(t) & x\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

Por lo que $\phi : (a,b) \times (0, 2\pi) \to M$ es una parametrización.

De este modo es claro que el toro es cubierto por dos parametrizaciones de este estilo, es decir $\phi_1(t,\theta)$: $(2 + \cos(t))(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) + (\sin(t)(0,0,1)$ donde $\phi_1 : (0, 2\pi) \times (a,b) \to T$ y $\phi_2 : (0, 2\pi) \times (a,b) \to T$ dado por $\phi_2(t,\theta) = \phi_1(t, \theta + \pi/2)$. Por lo tanto el toro es una superficie regular por ser cubierto por parametrizaciones. $\blacksquare$

13. Ejercicio 13

Demostración Notemos que $P : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$ esta dado por $P(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$ que es continua; afirmo que $f(s,t) = P^{-1}(s,t,0) = \left(\frac{2s}{1+s^2+t^2}, \frac{2t}{1+s^2+t^2}, \frac{s^2+t^2-1}{1+s^2+t^2}\right)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
P \circ f(s,t) =& P\left(\frac{2s}{1+s^2+t^2}, \frac{2t}{1+s^2+t^2}, \frac{s^2+t^2-1}{1+s^2+t^2}\right) \\
=& \left(\frac{\frac{2s}{1+s^2+t^2}}{1 - \frac{s^2+t^2-1}{1+s^2+t^2}}, \frac{\frac{2t}{1+s^2+t^2}}{1 - \frac{s^2+t^2-1}{1+s^2+t^2}}, 0\right) \\
=& \left(\frac{\frac{2s}{1+s^2+t^2}}{\frac{2}{1+s^2+t^2}}, \frac{\frac{2t}{1+s^2+t^2}}{\frac{2}{1+s^2+t^2}}, 0\right) \\
=& (s,t,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \circ P(x,y,z) =& f\left(\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)\right) \\
=& \left(\frac{2x(1-z)}{(1-z)^2 + x^2 + y^2}, \frac{2y(1-z)}{(1-z)^2 + x^2 + y^2}, \frac{(\frac{x}{1-z})^2 + (\frac{y}{1-z})^2 - 1}{1 + (\frac{x}{1-z})^2 + (\frac{y}{1-z})^2}\right) \\
=& \left(\frac{2x(1-z)}{(1-z)^2 + x^2 + y^2}, \frac{2y(1-z)}{(1-z)^2 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - (1-z)^2}{(1-z)^2 + x^2 + y^2}\right) \\
=& \left(x, y, \frac{1 - z^2 - (1 - 2z + z^2)}{2(1-z)}\right) \\
=& (x,y,z)
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que f es una biyecci'on de $\mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus N$ diferenciable y con inversa continua. Bastaría ver que $rg(df) = 2$ pero muchas cuentas.... Por lo tanto f es una parametrización de $S^2 \setminus N$ $\blacksquare$

14. Ejercicio 14

Demostración Sea $f = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 - 1$, luego $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3-2} = \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable con 0 en su imagen tal que $\mathcal{E} = f^{-1}(0)$ y $rg(df_p) = 3 - 2 = 1$ para todo $p \in \mathcal{E}$; luego por 3 se tiene que E es una superficie regular. Para ver parametrizaciones una forma simple es tomar $\mathcal{A}$ un atlas para S^2 y tomas $f(x, y, z) = (ax, yb, cz) : S^2 \to \mathcal{E}$; luego como tanto f como f^{-1} admiten extensiones diferenciables resulta que f es un difeomorfismo y por lo tanto $f(\mathcal{A})$ es un atlas para $\mathcal{E}$. Otra sería $\Phi(\theta, \psi) = (a\cos(\theta)\sin(\psi), b\sin(\theta)\sin(\psi), c\cos(\psi))$ que son las coordenadas esféricas alargadas en los ejes. ∎

15. Ejercicio 15

Demostración Si F resultase diferenciable tal que $dF_p \neq 0$ para todo $p \in F^{-1}(0) = M$ luego por 3 se tiene que M es una superficie regular. Supongamos que $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una curva diferenciable tal que $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = v$, luego $F \circ c = 0$ por lo que $dF_p(v) = 0$ para todo $v \in T_pM$. Por otro lado $dF_p(v) = dF_p(\dot{c}(0)) = d(F \circ c)_0(1) = \frac{d(F \circ c)}{dt}|_0 = \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\partial F}{\partial u_i}\frac{dc_i}{dt} = \langle \nabla F|_p, v \rangle$; por lo tanto como $\nabla F_p \neq 0$ para todo $p \in M$ concluímos que $T_pM = \nabla F|_p{}^{\perp}$. ∎

16. Ejercicio 16

Demostración *a*) Afirmo que el cono no es una superficie regular, para eso notemos $M = S^+ \cup S^-$ con $S^+ = \{u \in S \ / \ u_z \geq 0\}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y $h : A \to U \cap M$ parametrización, en particular homeomorfismo; sean además $a, b, c \in A$ tal que $h(a) \in S^+$, $h(b) = 0$ y $h(c) \in S^-$ que en particular dice que $a \neq b \neq c$ pues h es biyectiva. Como A es arco-conexo existe $\gamma : I \to A$ camino de a a c tal que $b \notin \gamma(I)$; como h es homeomorfismo entonces $h \circ \gamma$ es un camino de $h(a)$ a $h(c)$ tal que $0 \notin h \circ \gamma(I)$, pero todo camino de S^+ a S^- pasa por 0 lo que conluye que no existía tal parametrización.

Aquí probamos que el cono no es una variedad topológica, supongamos que nos preguntaban por S^+ que sí es una variedad topológica veamos que no es una superficie regular. Para eso recordemos que si S es superficie entonces para todo $p \in S$ existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es una parametrización alrededor de p, por lo tanto si S^+ fuese superficie admitiría una parametrización $\phi = (x, y, f(x, y))$ alrededor de 0 tal que $f^2 = x^2 + y^2$ con $f \geq 0$. Por la unicidad de la raíz cuadrada se tiene que $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ y como f no es diferenciable concluímos que no existe parametrización alrededor del 0.

b) Sea G el hiperboloide y tomemos $\phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, luego ϕ es claramente una biyección de abiertos y diferenciable, finalmente:

$$rg(d\phi) = rg\left(\begin{bmatrix} 1 & \dot{0} & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{bmatrix}\right) = 2$$

Por lo tanto ϕ es una parametrización de G. ∎