Ecuaciones Diferenciales– 2° cuatrimestre 2015
ECUACIÓN DEL CALOR

1. El marco

Nostros intentando resolver la ecuación:

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{1}$$

Uno encuentra que la solución esta dada (al menos formalmente) por $u(x,t) = (g * \Phi(-,t))(x)$ donde Φ es la densidad de una variable aleatoria $X \sim N(x,t)$. Entonces, usando que $X_n \Rrightarrow X$ donde $X_n \sim N(x, \frac{1}{n})$ y $X \sim \delta_0$ uno llega al siguiente lema:

Lema 1.1 *Sea $u(x,t)$ la solución de 1 dada antes, entonces se tiene que:*

- *Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y x es un punto de continuidad de g, entonces se tiene que* $\lim_{t \searrow 0} u(x,t) = g(x,t)$
- *Si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que* $\lim_{t \searrow 0} \|u(.,t) - g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$

Demostración Esto ya lo demostró Mauro hace varios días.

Pero nos queda la duda de si la solución propuesta es efectivamente una solución, en ese marco tenemos:

Proposición 1.2 *Sea $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ entonces la función u dada antes cumple que:*

- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
- $u_t - \triangle u = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
- $\lim_{x \to x_0 \ t \searrow 0} u(x,t) = g(x_0) \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Demostración Es simple, ejercicio

Ahora si se nos presenta un problema no homogeneo lo que vamos a hacer es aplicar el *Principio de Duhamel* que nos dice que la solución es superponer soluciones homogeneas asociadas. En particular esto dice que:

Sea el problema

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = f(x) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

entonces llamamos $u(x,t;s)$ a la solución de:

$$\begin{cases} v_t - \triangle v = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,s) = f(x,s) \end{cases} \tag{3}$$

Y la idea va a ser superponer las diferentes condiciones iniciales s! En efecto:

Observación $u(x,t) = \int_0^t u(x,t,s)ds$ es solución de 2.

Demostración Formalmente, tenemos que $u_t = u(x,t;t) + \int_0^t u_t(x,t;s)ds = f(x,t) + \int_0^t \triangle u(x,t;s)ds = f(x,t) + \triangle u(x,t)$

Entonces si juntamos todo tenemos:

Teorema 1.3 *Sea* $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ *y* $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, *entonces la función* $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$u(x,t) = (g * \Phi(-,t))(x) + \int_0^t f * \Phi(-,t-s)ds$$

Verifica que:

1. $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
2. *u es solución de:*

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = f(x) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{4}$$

3. $\lim_{x \to x_0 \; t \searrow 0} u(x,t) = g(x_0) \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Demostración Ejercicio

Por ende ya sabemos la existencia de solución, como comentario no hay unicidad en ese dominio, por ende nos queda analizar la unicidad en dominios acotados donde ya sabemos de la clase de Pau que tenemos un resultado positivo. Más aún recordemos que en el espacio libre tenemos unicidad para funciones "que no crecen mucho"

2. Métodos de energía

Veamos un método que nos va a dar la dependencia paramétrica de la solución y como corolario la unicidad hacia atrás.

Proposición 2.1 *Sea* $h \in C(\overline{U})$ *y sea* $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\partial_p U)$ *una solución de:*

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 & (x,t) \in U_T \\ u = 0 & \partial U \times (0,T) \\ u = h & \overline{U} \times \{0\} \end{cases} \tag{5}$$

Entonces u verifica que:

$$\int_U u^2 dx \leq \int_U h^2 dx \; \forall t \in [0,T]$$

Demostración Multipliquemos 5 por u es integremos en U, nos queda:

$$\int_U uu_t - \int_U u\triangle u = 0$$

Pero como $uu_t = \frac{1}{2}(u^2)_t$, y del otro lado podemos usar partes, tenemos que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U u^2 + \int_U \|\nabla u\|^2 = 0$$

Y por ende $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U u^2 \leq 0$ por o que si llamamos $e(t) = \int_U u^2$ nos queda que $\dot{e} \leq 0$ y por ende $e(t) \leq e(0)$ que es lo que queríamos probar. ∎

Lo que nos da:

Corolario 2.2 *Sea* $h_1, h_2 \in C(\overline{U})$ *y sea* $u_1, u_2 \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\partial_p U)$ *una solución de 5 respectivamente, entonces se tiene que:*

$$\int_U |u_1 - u_2|^2 dx \leq \int_U |h_1 - h_2|^2 dx \; \forall t \in [0,T]$$

Demostración Trivial ∎

Corolario 2.3 *Existe a lo sumo una solución del problema:*

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = f & (x,t) \in U_T \\ u = g & \partial U \times (0,T) \\ u = h & \overline{U} \times \{0\} \end{cases} \tag{6}$$

Demostración Si u_1, u_2 son soluciones, entonces $w := u_1 - u_2$ verifica 5 con $h = 0$ y por ende $\|w\| = 0$ lo que da, junto a la continuidad de w que $u_1 = u_2$ ∎

Finalmente tenemos la unicidad hacia atrás:

Teorema 2.4 *Sean $u_1, u_2 \in C^2(U_T)$ soluciones de:*

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = f & (x,t) \in U_T \\ u = g & \partial U \times (0,T) \end{cases} \tag{7}$$

Entonces si $u_1(x,T) = u_2(x,T)$ $\forall x \in U$, entonces $u_1 = u_2$ en U_T

Demostración Sea $w = u_1 - u_2$ y definamos la energía como $e(t) = \int_U w(x,t)^2 dx$ entonces se tiene que $\dot{e}(t) = -2\int_U |\nabla w|^2 dx$ y $\ddot{e}(t) = -4\int_U \nabla w \cdot \nabla w_t dx = 4\int_U \triangle w w_t dx = 4\int_U (\triangle w)^2 dx$.

Por otro lado, como $w|_{\partial U} = 0$ tenemos que $\int_U |\nabla w|^2 dx = -\int_U w \triangle w dx \le (\int_U w^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_U (\triangle w)^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. Don la última desigualdad es Holder.

Juntando todo tenemos que:

$$(\dot{e})^2 \le e(t)\ddot{e} \tag{8}$$

Sea $f(t) = log(e(t))$, entonces por 8 tenemos que $\ddot{f} \ge 0$ y f es convexa. Ahora supongamos que $\exists [t_1, t_2] \subset [0,T]$ tal que $e|_{[t_1,t_2]} > 0$, entonces:

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \le (1-\tau) f(t_1) + \tau f(t_2)$$

por lo que:

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \le e(t_1)^{(1-\tau)} e(t_2)^{\tau}$$

Y por ende $e|_{[t_1,t_2]} = 0$ ∎

3. Movimiento Browniano

Notemos que la solución de 1 en $n = 1$ era $u(x,t) = \dfrac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \phi(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{2t}} = \mathbb{E}(\phi(X_t))$ donde $X_t \sim N(x,t)$. Es más Pablo les mostró que si partimos de un paseo al azar simétrico uno obtiene .$^{\text{en}}$ el límite”la ecuación del calor! Pero entonces, que sería el límite del paseo al azar? Sabemos por lo anterior que tiene que ver con la normal!

Ganemos intuición: Sea $P_n = \sum_{i=1}^n X_i$ donde $X_i \sim Be_{\{-1,1\}}(\frac{1}{2})$ el paseo al azar simétrico, entonces es claro que $\mathbb{E}(P_n) = 0$ y $Var(P_n) = n$. Sea ahora $k > 0$ y t tal que $n = tk$ y sea $B_k(t) = \frac{1}{(k)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^{[tk]} X_i$ donde ahora las $X_i \sim Be_{\{-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\}}$. Es fácil ver que al ser un escalamiento por k y dividir por $\frac{1}{(k)^{\frac{1}{2}}}$ tenemos que $\mathbb{E}(B_k(t)) = 0$ y $Var(B_k(t)) = t$. La idea es que si $k \to \infty$ ver que $\{B_k(t)\} \Rightarrow \{B(t)\}$ como proceso estocástico, y además que tenga caminos continuos. Es fácil ver que, como los cumplen los paseos al azar, este proceso límite debe cumplir que:

- $\{B(t)\}$ debe ser continuo, ie: fijado $\omega \in \Omega$ entonces $B(t, \omega)$ es una función continua.

- $B(t) - B(s)$ debe tener una distribución que *solo dependa* de $t - s$
- Si $t < s < r < q$ entonces $B(s) - B(t)$ es independiente de $B(q) - B(r)$
- Como $\frac{[tk]}{k} \to t$ debe pasar que $\mathbb{E}(B(t)) = 0$ y $Var(B(t)) = t$
- Finalmente por el teorema central del límite se debe dar que $B(t) \sim N(0, t)$.

Llamamos a un proceso estocástico *Movimiento Browniano* si cumple todas esas características. Es importante notar que este límite es como proceso (o a mi gusto como convergencia débil de medidas de probabilidad). Un montón de interrogantes serían en que espacio está definido este proceso, a que filtración de sigma algebras esta asociado... Pra todo esto esta Teoría de Probabilidades donde no se chamuya como acá. Linda demo de existencia: Evans copado. Lindo libro genial para ver todo bien bien, Convergence of probability Measures

Notemos que como caso particular, si llamamos $w_t^x = x + w_t$ con w_t un MB, entonces se tiene que $\mathbb{E}(\phi(w_t^x))$ cumple 1!

3.1. Procesos de Markov

Una propiedad genial del MB que ayuda siempre es que $w_{t+s}|_{\{w_u, u \leq s, w_s = x\}} \sim w_t^x$. Esto es decir que saber la probabilidad en tiempo $t + s$ sabiendo la historia del proceso hasta s y sabiendo donde termino en s en lo mismo que la probabilidad del proceso en t arrancando en x. Llamamos un *proceso de Markov* al proceso que cumple eso. Sea el semigrupo $\mathcal{P} := \{P_t, t \geq 0\}$ asociado a un proceso de Markov $\{\xi_t, t \geq 0\}$ dado por:

$$P_t\phi(x) = \mathbb{E}(\phi(\xi_t^x))$$

Es claro que $\mathcal{P} \curvearrowright B(\mathbb{R})$

Proposición 3.1 $P_{t+s} = P_s \circ P_t$

Demostración

$$P_{t+s}\phi(x) = \mathbb{E}(\phi(\xi_{t+s}^x)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi(\xi_{t+s}^x)|\xi_u^x \ , \ u \leq s)) = \mathbb{E}(P_t\phi(\xi_s^x)) = P_s(P_t\phi)(x)$$

∎

Definimos el *generador infinitesimal* de ξ como:

$$A\phi = \lim_{t \searrow 0} \frac{P_t\phi - \phi}{t} \tag{9}$$

Teorema 3.2 *Para $\phi \in \mathcal{D}(A) \cap B(\mathbb{R})$ tenemos que $u(x, t) = (P_t\phi)(x)$ resuelve:*

$$\begin{cases} u_t = Au \\ u(0, .) = \phi \end{cases} \tag{10}$$

Demostración Notemos primero que $u(0, x) = \mathbb{E}(\phi(\xi_0^x)) = \mathbb{E}(\phi(x)) = \phi(x)$ Además:

$$u_t = \lim_{h \searrow 0} \frac{P_{t+h}\phi - P_t\phi}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{P_h(P_t\phi) - P_t\phi}{h} = A(P_t(\phi)) = Au$$

∎

Teorema 3.3 *El generador del MB es $A = \frac{1}{2}\triangle$*

Demostración Hace falta definir el cálculo estocástico y lo que es la integral de Ito respecto a un movimiento browniano. ∎