



TO BE DEFINED

EVEN MORE TBD

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura Director de Tesis: Dr. Pablo Amster
Septiembre 2018 – version 0.1

ABSTRACT

Aca va a ir el abstract cuando lo tengamos

*We have seen that computer programming is an art,
because it applies accumulated knowledge to the world,
because it requires skill and ingenuity, and especially
because it produces objects of beauty.*

— knuth:1974 [knuth:1974]

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos para todos

CONTENTS

I	Introducción	1
1	INTUICIÓN	3
II	El teorema y aplicaciones	7
2	APLICACIONES	9
2.1	<i>Gradient descent</i>	9
III	Apéndice	11
A	APÉNDICE	13

LIST OF FIGURES

LIST OF TABLES

LISTINGS

ACRÓNIMOS

Part I

Introducción

INTUICIÓN

Usemos un caso modelo para ejemplificar porque no es probable que los metodos de primer orden (entre ellos *gradient descent*) convergan a puntos silla. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}x^T H x$ con $H = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; supongamos además que $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ y $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n < 0$.

Si usamos en la base canónica de \mathbb{R}^n $\{e^1, \dots, e^n\}$ entonces:

$$f(x) = f(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{2} (\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2)$$

Por lo tanto:

$$\nabla f(x) = \lambda_i x_i e^i = 0 \iff x = x_1 e^1 = 0$$

Y tenemos que en el único punto crítico el Hessiano de f es $\nabla^2 f(0) = H$.

Recordemos que si $g(x) = x - \alpha \nabla f(x)$ entonces *gradient descent* está dado por la iteración $x_{t+1} = g(x_t) := g^t(x_0)$ con $t \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y en este caso esta representado por:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= g(x_t) \\ &= x_t - \alpha \nabla f(x_t) \\ &= (1 - \alpha \lambda_i) x_{it} e^i \\ &= (1 - \alpha \lambda_i) \langle x_t, e^i \rangle e^i \end{aligned}$$

Por lo tanto por inducción es fácil probar que:

$$x_{t+1} = (1 - \alpha \lambda_i)^t \langle x_0, e^i \rangle e^i$$

Sea $L = \max_i |\lambda_i|$ y supongamos que $\alpha < \frac{1}{L}$, luego:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \lambda_i &< 1 \quad \text{Si } i \leq k \\ 1 - \alpha \lambda_i &> 1 \quad \text{Si } i > k \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que:

$$\lim_t x_t = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in E_s := \langle e^1, \dots, e^k \rangle \\ \infty & \text{Si no} \end{cases}$$

Finalmente, si $k < n$ entonces concluimos que:

$$P_{\mathbb{R}^n}(\left\{x \in \mathbb{R}^n / \lim_t g^t(x) = 0\right\}) = |E_s| = 0$$

Para notar este fenómeno en un ejemplo no cuadrático consideremos $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2$, reproduciendo los calculos anteriores:

$$\begin{aligned}\nabla f &= (x, y^3 - y) \\ g &= ((1 - \alpha)x, (1 + \alpha)y - \alpha y^3) \\ \nabla^2 f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

De lo que vemos que los puntos críticos son:

$$z_1 = (0, 0) \quad z_2 = (0, 1) \quad z_3 = (0, -1)$$

Y del criterio del Hessiano concluimos que z_2, z_3 son mínimos locales mientras que z_1 es un punto silla. De la intuición previa, como en z_1 el autovector asociado al autovalor positivo es e^1 podemos intuir que:

Lema 1.0.0.1 Para $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2$ resulta que $E_s = \langle t * e^1 / t \in \mathbb{R} \rangle := W_s$

Asumiendo el resultado por un momento, dado que $\dim_{\mathbb{R}^2}(E_s) = 1 < 2$ entonces $P_{\mathbb{R}^2}(E_s) = 0$ que es lo que queríamos verificar. Demostremos el lema ahora:

Demostración Del lema Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y g la iteración de *gradient descent* dada por 1, luego:

$$(x_t, y_t) = g^t(x, y) = \begin{pmatrix} (1 - \alpha)^t x_0 \\ g_y^t(y_0) \end{pmatrix} \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \begin{pmatrix} 0 \\ \lim_t g_y^t(y_0) \end{pmatrix}$$

Por lo que todo depende de y_0 . Analizando $\frac{dg_y}{dy} = 1 + \alpha - 3\alpha y^2$ notemos que:

$$\begin{aligned}\left| \frac{dg_y}{dy} \right| < 1 &\iff |1 + \alpha - 3\alpha y^2| < 1 \\ &\iff -1 < 1 + \alpha - 3\alpha y^2 < 1 \\ &\iff -2 - \alpha < -3\alpha y^2 < -\alpha \\ &\iff \sqrt{\frac{2 + \alpha}{3\alpha}} > |y| > \sqrt{\frac{1}{3}} \\ &\iff \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3}} > |y| > \sqrt{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Por lo que por el Teorema de Punto Fijo de Banach:

$$\lim_t g_y^t(y_0) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3}} > y_0 > \sqrt{\frac{1}{3}} \\ -1 & \text{Si } \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3}} < -y_0 < \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Si analizamos simplemente los signos de g y $\frac{dg_y}{dy}$ en los otros intervalos podemos concluir que:

$$\lim_t g_y^t(y_0) = \begin{cases} -\infty & \text{Si } y_0 > \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3}} \\ 1 & \text{Si } \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3}} > y_0 > 0 \\ -1 & \text{Si } -\sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3}} < y_0 < 0 \\ \infty & \text{Si } y_0 < -\sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3}} \end{cases}$$

Dedujimos entonces que $(x, y) \in E_s \iff (x, y) = (t, 0) \ t \in \mathbb{R} \iff (x, y) \in W_s$. ■

Part II

El teorema y aplicaciones

APLICACIONES

[Esto va a ir en Resultado principal]

gradient descent

Part III

Apéndice



APÉNDICE

COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede and Ivo Pletikosić. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both \LaTeX and \LyX :

<https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/>

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

<http://postcards.miede.de/>

Thank you very much for your feedback and contribution.

Final Version as of April 22, 2018 (`classicthesis` version 0.1).