Topología – 2° cuatrimestre 2015
CLASIFICACIÓN DE REVESTIMIENTOS

Ejercicio para entregar: Sea B un espacio topológico arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo. Dado un revestimiento $p : E \to B$, se dice que p es *abeliano* si es normal y su grupo de transformaciones deck G_E es abeliano. Se dice que p es *universalmente abeliano* si es abeliano y para todo revestimiento $p' : E' \to B$ abeliano, existe una función continua $\varphi : E \to E'$ tal que $p = p' \circ \varphi$. Probar que B admite un revestimiento universalmente abeliano.

Demostración Como B es arco-conexo, localmente arco-conexo y semi localmente simplemente conexo entonces $\psi : [p : E \to B] \mapsto Fix_p(e)$ es biyectiva. Sea $H = [\pi_1(B, b), \pi_1(B, b)]$ el conmutador de $\pi_1(B, b)$, entonces $\exists r : E \to B$ revestimiento tal que $Fix_r(e) = H$; como $H \triangleright \pi_1(B, b)$ entonces r es normal y entonces por el ejercicio 11 de la práctica tenemos que $\pi_1(B, b) \ / \ H \simeq Deck_r(E, B)$. Entonces r es abeliano pues es normal y su grupo de transformaciones Deck es claramente abeliano!

Recordemos la propiedad universal del grupo $X \ / \ [X, X]$: Sea $f : X \to A$ abeliano, entonces $\exists g : X/[X, X] \to A$ tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_{[X,X]}"'] & A \\ X \ / \ [X, X] \arrow[ur, dashed, "g"] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Sea entonces $p' : E' \to B$ otro revestimiento abeliano, por lo que $\pi_1(B, b) \ / \ Fix_{p'}(e')$ es abeliano, entonces por 1 tenemos que $\exists \phi : \pi_1(B, b)/H \to \pi_1(B, b) \ / \ Fix_{p'}(e')$ morfismo de grupos tal que $q_H = q_{Fix_{p'}(e)}\phi$ por lo que $H \leq Fix_{p'}(e)$, pero entonces tenemos el siguiente diagrama!

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"'] \\ E \arrow[r, "r"] & B \end{tikzcd}$$

Por el lema del levantamiento $\exists p : E \to E'$ tal que $rp = p'$. Entonces r es un revestimiento universalmente abeliano de B ∎

1. *a*) Pruebe que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es null-homotópica.
   b) Pruebe que toda función continua $P^2 \to S^1$ es null-homotópica.
   c) Exhiba una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea null-homotópica.

Demostración *a*) Como S^n es simplemente conexo para $n > 1$, entonces $1_{S^n} \simeq C_{s_0}$, por lo que por la práctica 6 tenemos que $f = f1_{S^n} \simeq C_{f(s_0)}$, por lo que f es null-homotópica ∎

b) Sea el revestimiento universal de S^1 por $\mathbb{R}$, por lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \\ P^2 \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Veamos que $f_*(\pi_1(P^2)) = 0$!

En efecto como $f: P^2 \to S^1$, entonces $f_*: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pero entonces $0 = f_*(0) = 2 * f_*(\overline{1})$ y como $Tor(\mathbb{Z}) = 0$ entonces $f_* = 0$.

Por ende tenemos a P^2 que es arco-conexo y localmente arco-conexo, y $f_*(\pi_1(P^2)) = 0 \subset p_*(\pi_1(\mathbb{R})) = 0$, entonces por el lema del levantamiento $\exists \widetilde{f}: \mathbb{R} \to P^2$ tal que:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ P^2 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Pero como $\mathbb{R}$ es contráctil tanto $\widetilde{f}$ como p son null-homotópicas, por ende $p\widetilde{f} = f$ es null-homotópica. $\blacksquare$

c) Sea $f: T \to S^1$ dado por $f(\theta, \phi) = \theta^2 * \phi^3$ entonces como el producto es de números complejos, f está bien definida, y como $f_* = 2n + 3m$ es claro que $f_* \neq 0$ y por ende f no es null-homotópica $\blacksquare$

2. Pruebe que si X es arcoconexo y localmente arcoconexo y $\pi_1(X)$ es finito, entonces toda función $X \to S^1$ es null-homotópica.

Demostración Notemos que como X cumple las hipótesis del lema del levantamiento, sólo nos bastará probar que $f_*(\pi_1(X)) = 0$ si $\pi_1(X)$ es finito; en cuyo caso por el item 1.b) tendríamos que f es null-homotópica.

Sea $[\alpha] \in \pi_1(X)$ un lazo no nulo, como $\pi_1(X)$ es finito $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $[\alpha^{*m}] = 0$ por la existencia de característica. Entonces $0 = f_*([\alpha^{*m}]) = f_*([\alpha])^{*m} \in \pi_1(S^1)$, pero $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, y $Tor(\mathbb{Z}) = 0$ por lo que $f_*([\alpha]) = 0$. Como $[\alpha]$ era arbitrario, tenemos que $f_* = 0$. $\blacksquare$

3. Sea $T = S^1 \times S^1$ el toro. Considerando el isomorfismo $\pi_1(T, (b_0, b_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones, describa los revestimientos de T asociados a los subgrupos

   a) $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   b) el subgrupo generado por $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   c) $\{(2n, 2m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración Hagamoslo de dos maneras!

Sabiendo que $p: S^1 \times S^1 \to T$ *dado por* $p(z, w) = (z^n, w^m)$ *es revestimientos* $\forall n, m \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

a) $\mathbb{Z} \times \{0\}$

Notemos que $\mathbb{Z} \times \{0\} = \langle (1, 0) \rangle$ y entonces yo quiero un revestimiento que la fibra en una coordenada tenga cardinal 1 y la fibra en al otra sea 0. Sea entonces $p: S^1 \times \mathbb{R} \to T$ dado por $(z, y) \mapsto (z, e^{2\pi i y})$! Como $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ tomemos el lazo $\alpha = (e^{2\pi i t}, 0) = (z, 0)$ que genera $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R})$, entonces $[p(\alpha)] = [(z, 1)]$ y $\langle [(z, 1)] \rangle = \mathbb{Z} \times 0$ por lo que $p_*(\pi_1(S^1 \times \mathbb{R})) = \mathbb{Z} \times \{0\}$ y p es el revestimiento buscado. $\blacksquare$

b) $< (1, 1) >$

Siguiendo el espíritu anterior, notemos que al tener 1 generador, el espacio que reviste debe ser $S^1 \times \mathbb{R}$, por lo que sea el revestimiento $p: S^1 \times \mathbb{R} \to T$ dado por $p(z, y) = (z, ze^{2\pi i y})$ que es claro que es revestimiento. Sea $\alpha = (e^{2\pi i t}, 0) = (z, 0)$ el generador de $\pi_1(S^1 \times \mathbb{R})$, entonces $p_*([\alpha]) = [p(\alpha)] = [(z, z)]$ y $\langle (z, z) \rangle = \langle (1, 1) \rangle$ por lo que $p_*(\pi_1(S^1) \times \mathbb{R}) =< (1, 1) >$ $\blacksquare$

c) $\langle (2,0),(0,2)\rangle = \langle (2n,2m)\ ,\ n,m \in \mathbb{N}\rangle$

Ahora al tener dos generadores, necesitamos dos S^1! entonces sea $p : S^1 \times S^1 \to T$ dado por $p(z,w) = (z^2,w^2)$ que es revestimiento por ser producto de revestimientos!. Entonces ahora tenemos dos lazos generadores! Sea $\alpha = (e^{2\pi it},1) = (z,1)$ y $\beta = (1,e^{2\pi it}) = (1,w)$ que son los dos generadores de $\pi_1(S^1\times S^1)$, entonces tenemos que $p_*([\alpha]) = [p(\alpha)] = [(z^2,1)] = [(z,1)*(z,1)] = 2*[(z,1)] = 2*[(z,1)] + 0*[(1,w)]$ y por ende $p_*([\alpha]) = \langle (2,0)\rangle$. Similarmente se ve que $p_*([\beta]) = \langle (0,2)\rangle$ y por ende $p_*(\pi_1(S^1\times S^1)) = \langle (2,0),(0,2)\rangle$ ∎

Afirmación Si $H = \langle (p,q),(r,s)\rangle$, entonces $p(z,w) = (z^p w^r, z^q w^s)$ cumple que $Fix_p(e_0) = H$

Demostración Idem item anterior donde reemplazamos numeritos.

Usando transformaciones Deck

a) $\mathbb{Z}\times\{0\}$

Clase de Xime que no recuerdo...

4. a) Pruebe que todo isomorfismo de $\pi_1(T,x_0)$ está inducido por algún homeomorfismo $T\to T$ que deja quieto a x_0.

   b) Pruebe que si E es un revestimiento conexo de T, entonces E es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, $S^1\times\mathbb{R}$ ó T. Sugerencia: si F es un grupo abeliano libre de rango 2 y N es un subgrupo no trivial, entonces existe una base $\{a_1,a_2\}$ de F tal que $\{na_1\}$ es base de N para algún n o bien $\{na_1,ma_2\}$ es base de N para ciertos n,m.

Demostración a) Recordemos que $\pi_1(T,x_0)\simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y por ende un isomorfismo ϕ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es simplemente $\phi := M*(x,y)$ con $M\in GL_2(\mathbb{Z})$. Ahora entonces si hacemos la identificación $T = S^1\times S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ afirmo que $h(\overline{x},\overline{y}) = M*(\overline{x},\overline{y})$ cumple lo pedido! En efecto, como ϕ es iso entonces $\phi(e_{x_0}) = e_{x_0}$ y entonces, si llamamos $\psi : \pi_1(T,x_0)\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ a la identificación del $\pi_1(T,x_0)$, esto dice que $M*(\psi^{-1}(z_0,z_1)) = \psi^{-1}(z_0,z_1)$ y como $\psi^{-1}(z_0,z_1) = q(x_0)$ entonces tenemos que $h(x_0) = x_0$. Por otro lado como M baja bien al cociente tenemos que $h_*\cong\phi$ ∎

b) ???

5. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente arcoconexo con elemento neutro e, y sea $p:\tilde{G}\to G$ un revestimiento con $\tilde{G}$ arcoconexo y $\tilde{e}\in p^{-1}(e)$. Pruebe que la multiplicación $\mu : G\times G\to G$ y la función $\nu : G\to G$, $\nu(x) = x^{-1}$ se levantan a funciones $\tilde{\mu}:\tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$ y $\tilde{\nu}:\tilde{G}\to\tilde{G}$ que hacen de $\tilde{G}$ un grupo topológico con neutro $\tilde{e}$. Pruebe además que p es un morfismo.

Demostración ???

6. Pruebe que si B admite un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.

Demostración Sea $b\in B$, entonces como $\exists p : E\to B$ revestimiento universal, $\exists U\ni b$ entorno abierto parejamente cubierto. Por ende el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[ur, dashed, "p^{-1}"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

Pero entonces como $\pi_1(E) = 0$ entonces por el lema del levantamiento $i_*(\pi_1(U)) = 0$ ∎

7. Sea $p : \tilde{X} \to X$ un revestimiento simplemente conexo de X, y sea $A \subseteq X$ un subespacio arcoconexo y localmente arcoconexo, con $\tilde{A} \subseteq \tilde{X}$ una componente arcoconexa de $p^{-1}(A)$. Muestre que $p : \tilde{A} \to A$ es el revestimiento correspondiente al núcleo del morfismo $i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$.

Demostración Por definición $p : \tilde{A} \to A$ es el revestimiento correspondiente al núcleo del morfismo $i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ sii $Fix_p(\widetilde{a_0}) = Ker(i_*)$ sii $\{\omega \in \Omega(A, a_0) \ / \ \omega \simeq C_{x_0} \ , \ x_0 \in X\} = \{\omega \in \Omega(A, a_0) \ / \ \widetilde{\omega} \in \Omega(\tilde{A} \ , \ \widetilde{a_0})\}$. Veamoslo!

- $\subseteq$)
  Sea $\omega \in \Omega(A, a_0)$ tal que $\omega \simeq C_{x_0}$ con $x_0 \in X$, entonces por el levantamiento único de homotopías tenemos que $\widetilde{\omega}^{\widetilde{a_0}} \simeq \widetilde{C_{x_0}}^{p^{-1}(x_0)}$ con $\widetilde{a_0} \in p^{-1}(a_0) \subset \widetilde{A}$. Ahora si llamamos $\widetilde{H}$ a la homotopía levantada, tenemos que $\widetilde{H}_{\widetilde{a_0}}$ es un camino entre $\widetilde{a_0}$ y $p^{-1}(x_0)$ y por ende como $\widetilde{A}$ es una componente arcoconexa, $\exists \widetilde{a_1} \in \widetilde{A} \ / \widetilde{a_1} \in p^{-1}(x_0)$. Ahora, es claro que $\widetilde{C_{x_0}}^{\widetilde{a_1}} = C_{\widetilde{a_1}}$, pero como $\widetilde{\omega}^{\widetilde{a_0}} \simeq \widetilde{C_{x_0}}^{\widetilde{a_1}}$ tenemos finalmente que $\widetilde{a_1} = \widetilde{a_0}$ pues son dos caminos homotópicos y tienen que empezar en el mismo lugar! Además tenemos entonces (pues la homotopía de caminos es relativa a $\{0, 1\}$) que $\widetilde{\omega}^{\widetilde{a_0}}(1) = \widetilde{a_0}$, por lo que $\omega \in \{\omega \in \Omega(A, a_0) \ / \ \widetilde{\omega} \in \Omega(\tilde{A} \ , \ \widetilde{a_0})\}$
- $\supseteq$)
  Sea $\omega \in \Omega(A, a_0)$ tal que $\widetilde{\omega}^{\widetilde{a_0}} \in \Omega(\widetilde{A}, \widetilde{a_0})$, entonces como p es simplemente conexo, tenemos que $\pi_1(A) = 0$ pues es subespacio arcoconexo y simplemente conexo de $\widetilde{X}$, por ende $\widetilde{\omega}^{\widetilde{a_0}} \simeq C_{\widetilde{a_0}}$ $(\widetilde{H})$ y entonces $\omega \simeq C_{x_0}$ $(p\widetilde{H})$, con lo que $i_*([\omega]) = 0$. $\blacksquare$

8. Sea $H = \bigcup_{n \geq 1} \partial B_{1/n}(1/n, 0) \subset \mathbb{R}^2$ el *arito Hawaiano.*

   a) Pruebe que H no es semilocalmente simplemente conexo.

   b) Sea $C(H)$ el *cono* de H, que consiste en el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por la unión de todos los segmentos que unen un punto de $H \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ con el punto $(0, 0, 1)$. Pruebe que $C(H)$ es semilocalmente simplemente conexo pero no localmente simplemente conexo.

Demostración a) Sea $(0, 0) \in H$ y $U \ni (0, 0)$ un entorno abierto, entonces como H tiene la topología subespacio de $\mathbb{R}^2$ sabemos que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\partial B_{\frac{1}{N}}(\frac{1}{N}, 0) \subset U$ y por ende $\omega = \frac{1}{N}e^{2\pi it} + (\frac{1}{N}, 0)$ cumple que $i_*([\omega]) \neq 0$. Por ende encontramos $h \in H$ tal que $\forall U \ni h$ entornos abiertos tenemos que $i_*(U) \neq 0$, por ende H no es semilocalmente simplemente conexo. $\blacksquare$

b) Vamos por partes!

- $C(H)$ es semi localmente simplemente conexo
  Es claro pues $C(H)$ es un cono de un espacio topológico y por ende es contráctil. Entonces dado $x \in C(H)$ y $U \ni x$ todo $\omega \in \Omega(U, x)$ cumple que $\omega \simeq C_{(0,0,1)}$. Por ende $i_*(U) = 0$
- $C(H)$ no es localmente simplemente conexo
  Tambien es claro pues el $(0, 0, 0)$ no tiene una base de entornos contráctiles por el item a). $\blacksquare$

9. Sean X, Y, Z espacios arcoconexos y localmente arcoconexos y sean $q : X \to Y$, $r : Y \to Z$ funciones continuas. Sea $p = r \circ q$.

   a) Pruebe que si p y r son revestimientos, también lo es q. Pruebe que q es normal si p lo es.

   b) Pruebe que si p y q son revestimientos, también lo es r.

   c) Pruebe que si q y r son revestimientos y el espacio Z admite un revestimiento universal, entonces p también es un revestimiento.

Demostración *a*) Sea $x_0 \in X, y_= := q(x_0) \in Y$ y $z_0 := p(x_0) \in Z$

Veamos primero que q es sobre!

Sea $y \in Y$ y sea α un camino de y_0 a y, entonces $r\alpha := \beta$ es un camino en Z empezando en z_0, sea $\gamma := \widetilde{\beta}^{x_0}$ el levantado en X, entonces $q\gamma$ es un camino levantado de β empezando en y_0; por unicidad de levantamiento de caminos tenemos que $\alpha = q\gamma$ y entonces $y = \alpha(1) = q\gamma(1) = q(\gamma(1))$ y por ende $y \in Im(q)$, por lo tanto q es sobre.

Ahora si veamos que es revestimiento!

Sea $y \in Y$ y $z = r(y) \in Z$, entonces como p y r son revestimientos $\exists U \ni z$ entorno abierto parejamente cubierto por p y r. Sea $V \subset r^{-1}(U)$ tal que $y \in V$, y veamos que esta parejamente cubierto por q! Sea $p^{-1}(U) = \coprod_i (X_i)$, entonces notemos que $q(X_i) \subset r^{-1}(U)$ y como X_i son conexos, si llamamos $r^{-1}(U) = \coprod_j Y_j$ entonces $q(X_i) \subset Y_j$, por lo que $q^{-1}(V) = \coprod_i \widetilde{X_i}$ donde $\widetilde{X_i}$ es tal que $q(\widetilde{X_i}) \subset V$. Ahora sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X_i} \arrow[dd, "p|_{\widetilde{X_i}}"'] \arrow[dr, "q_{\widetilde{X_i}}"] & \\
& V \arrow[dl, "r|_V"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

Como por definición conmuta, y $p|_{\widetilde{X_i}}, r|_V$ son homeomorfismos, entonces $q_{\widetilde{X_i}}$ lo es ∎

10. Sea $p : \tilde{E} \to B$ revestimiento universal. Dado un revestimiento $r : E \to B$, pruebe que existe un revestimiento $q : \tilde{E} \to E$ tal que $r \circ q = p$.

Demostración Notemos que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E} \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, dashed, "q"] & \\
& E \arrow[dl, "r"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

Entonces, como $p_*(\pi_1(\tilde{E})) = 0 \subseteq r_*(\pi_1(E))$ pues p es universal, y ademas $\tilde{E}$ es arco-conexo y localmente arco-conexo tenemos entonces por el lema del levantamiento que $\exists q : \tilde{E} \to E$ tal que $p = r \circ q$. Ahora por el ejercicio 9.b tenemos que, como p y r son revestimiento, q es revestimiento. ∎

11. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$. El conjunto de transformaciones deck $\mathrm{Deck}(p)$ forman un grupo con la operación dada por la composición.

    a) Se dice que $p : E \to B$ es *normal* si para todo $b_0 \in B$ y $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe una transformación deck tal que $h(e_0) = e_1$. Pruebe que p es normal si y sólo si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.

    b) Pruebe que si p es normal, $\mathrm{Deck}(p)$ es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(B, b_0)/H$.

c) Concluya que si $p : E \to B$ es un revestimiento universal de B, entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

Demostración *a*) Sean $e_1, e_2 \in p^{-1}(b)$ entonces $\exists h \in Deck(E, B)\ /\ h(e_1) = e_2 \iff Fix(e_1) = Fix(e_2)$. Donde la última igualdad es por el lema del levantamiento al diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

Pero entonces $Fix(e_1) = Fix(e_2) \iff |\overline{\{Fix(e)\ ,\ e \in p^{-1}(b)\}}| = 1$ donde es tomar la clase de conjugación, pero esto último pasa sii $Fix(e_1) \triangleright \pi_1(B, b)$ $\blacksquare$

b) Sea $\alpha \in \pi_1(B, b)$ y $e_1 \in p^{-1}(b)$, entonces sea $e_2 = g.e_1$ donde la acción es la de la práctica 7; entonces como p es normal $\exists! \phi_g \in Deck(E, B)$ tal que $\phi(e_1) = e_2$. Por lo tanto tenemos un morfismo $\chi : \pi_1(B.b) \to Deck(B, E)$ dado por $g \mapsto \phi_g$. Veamos que es el que nos sirve!

- χ está bien definida
  Eso es porque la existencia deriva que p es normal, mientras que la unicidad deriva de que p es revestimiento y por ende todo levantado es único.
- Es morfismo de grupos
  En efecto, por un lado $\chi(\alpha * \beta)$ es la transformación deck que $e_1 \mapsto e_1.(\alpha * \beta)$ mientras que $\chi(\alpha) \circ \chi(\beta)$ es la transformación Deck que $e_1 \mapsto (e_1.\alpha).(\beta)$; pero como la acción es transitiva tenemos que $e_1.(\alpha * \beta) = (e_1.\alpha).\beta$, finalmente como $\chi(\alpha * \beta)(e_1) = \chi(\alpha) \circ \chi(\beta)(e_1)$ tenemos (pues son transformaciones Deck) que $\chi(\alpha * \beta) = \chi(\alpha) \circ \chi(\beta)$
- Es epimorfismo
  Sea $h \in Deck(E, B)$ y sea α el camino entre e_1 y $h(e_1)$, entonces $p\alpha \in \Omega(B, b)$ que cumple que $h = \chi(p\alpha)$.
- $Ker(\chi) = p_*(\pi_1(E, e_1))$
  Es claro que $\chi(\alpha) = 1_E \iff \alpha.e_1 = e_1 \iff \alpha \in stab(e_1) = p_*(E, e_1)$ pues p es normal.

Por ende por el primer teorema de isomorfismo tenemos que $\pi_1(B, b)\ /\ \pi_1(E, e) \simeq Deck(E, B)$ $\blacksquare$

c) Es claro que si p es universal entonces $p_*(\pi_1(E, e_1)) = 0$ y entonces $\pi_1(B, b) \simeq Deck(E, B)$ $\blacksquare$

12. Describa el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.

Demostración Notemos por un lado que si $ph = p$ entonces $p_1 h = p_1$ donde p_1 es la primer coordenada del revestimiento universal de T, ie p_1 es el revestimiento universal de S^1, por ende $h_n(x, y) = (x + n, y)$ son transformaciones Deck. Análogo con la segunda coordenada tenemos que $\{(x, y) \mapsto (x + n, y + m)\ ,\ n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq Deck(\mathbb{R}^2, T)$. Por el otro lado si $h \in Deck(\mathbb{R}^2, T)$ entonces $e^{2\pi i h(t)} = e^{2\pi i t}$ y por ende $h(t) = t + n$ por lo tanto $Deck(\mathbb{R}^2, T) = \{(x, y) \mapsto (x + n, y + m)\ ,\ n, m \in \mathbb{N}\} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\blacksquare$

13. Sea E un espacio topológico, y G un grupo que actúa en E de manera propiamente discontinua. Sea $p : E \to B$ es un revestimiento. Pruebe que:

a) La proyección al cociente $q : E \to E/G$ es un revestimiento normal.

b) Si E es arcoconexo, entonces G es el grupo de transformaciones deck de q.

c) Existe un revestimiento $r : E/G \to B$ tal que $r \circ q = p$.

d) Todo subgrupo H de Deck(p) actúa en E de manera propiamente discontinua, es decir, para todo $e \in E$, existe un abierto $U \ni e$ tal que $h(U) \cap U = \varnothing$ para todo $h \in H$.