Geometría Proyectiva - 2° cuatrimestre 2016

PRÁCTICA 2

Recuerdo: Una *curva parametrizada* en el plano es un conjunto $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^2$ junto con una función $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{C}$ es la imagen de α. Decimos que $\mathbb{C}$ es diferenciable (o C^k) si tiene una parametrización diferenciable (o C^k), y que es regular si tiene una parametrización diferenciable α tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$.

1. Algunas curvas con nombre propio

1. Un disco circular de radio 1 contenido en el plano xy rueda sobre el eje x sin deslizar. La figura descripta por un punto fijo sobre la circunferencia del disco se llama *cicloide*.

   - Obtener una parametrización del cicloide y determinar sus puntos singulares.
   - Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

   Demostración Notemos que $\alpha(t) = h(t) + \omega(t)$ donde $h(t) = (t, 1)$ y $\omega(t) = (-\sin(t), -\cos(t)$, por lo tanto $\alpha = (t -$
   $sin(t), 1 - \cos(t))$, notemos que $\dot{\alpha(t)} = (1 - \cos(t), \sin(t)) = 0$ si y sólo si $t = k\pi$.
   Además $l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\alpha}\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2}) dt = -4[\cos(\frac{t}{2})]_0^{2\pi} = 8$ ■

2. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

   $$\alpha(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta) + \log(\tan(\theta/2))).$$

   La curva parametrizada por α es llamada *tractriz*.

   - Probar que la función α es diferenciable pero no regular.
   - Sea P un punto de la tractriz, L la recta tangente que pasa por P, y Q la intersección de L con el eje y. Probar que la distancia de P a Q es 1.

   Demostración

   - Notemos que como $t \in (0, \pi)$ entonces $\frac{t}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ y por lo tanto como sin, cos, log, tan son diferenciables allí se tiene que α es diferenciable. No obstante $\dot{\alpha}(t) = \left(\cos(t), -\sin(t) + \dfrac{1}{\sin(t)}\right)$ y por lo tanto si $t \to \frac{1}{2}$ se tiene que $\dot{\alpha}(t) = 0$. Por lo tanto α no es regular.
   - Sea $P = \alpha(t_0) = (\sin(t_0), \cos(t_0) + \log(\tan(t_0/2)))$, luego la recta tangente que pasa por P es $L = P + \dot{\alpha}(t_0)t = (\sin(t_0), \cos(t_0) + \log(\tan(t_0/2))) + t(\cos(t_0), -\sin(t_0) + \frac{1}{\sin(t_0)}) = (\sin(t_0) + t\cos(t_0), \cos(t_0) + \log(\tan(t_0/2)) - t(-\sin(t_0) + \frac{1}{\sin(t_0)}))$ y son demsiadas cuentas esto...

3. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

   $$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right),$$

   y sea $\mathbb{C}$ la curva que parametriza. Probar que:

   - el origen pertenece a $\mathbb{C}$, y en ese punto su tangente es el eje x;
   - se tiene que $\lim\limits_{t \to +\infty} \alpha(t) = (0,0)$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} \alpha'(t) = (0,0)$;
   - la recta $x + y + a = 0$ es una asíntota de $\mathbb{C}$.

La figura que se obtiene completando la curva con su simétrica respecto de la recta $y = x$ se llama *folio de Descartes.*

Demostración *a*) Calculemos $\dot{\alpha} = \left(\frac{3a(1+t^3)-9at^3}{(1+t^3)^2}, \frac{6at(1+t^3)-9at^4}{(1+t^3)^2}\right)$
De allí notemos que $(0,0) = \alpha(0)$ y que $\dot{\alpha}(0) = (3a, 0)$, por lo tanto el origen pertence a la curva y en el origen la tangente es el eje x

b) Clarísimo

c) Notemos que $x + y + a = \dfrac{3at + 3at^2 + a + at^3}{1 + t^3} = a\dfrac{3t + 3t^2 + 1 + t^3}{1 + t^3} = a\dfrac{(1 + t)^3}{(1 - t + t^2)(1 + t)} = a\dfrac{(1 + t)^2}{(1 - t + t^2)} \to 0$ cuando $t \to -1$ por lo tanto la asíntota es $x + y + a$. ∎

4. Sean $b < 0 < a$, y consideremos la función $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t)).$$

La curva parametrizada por esta función se llama *espiral logarítmica.*

- Probar que $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0, 0)$, y que cuando $t \to +\infty$ la curva sigue una trayectoria que envuelve al origen infinitas veces (sí, el enunciado es vago... parte del ejercicio es precisar esta noción de "envolver el origen").
- Probar que $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau$ es finito. Concluir que la espiral logarítmica tiene longitud de arco finita.

Demostración *a*) Es claro que $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha = (0, 0)$, veamos la siguiente proposición. Sea $c > 0$, $L = \{(x, y)\ /\ y = ax\}$ y consideremos $t_1 = min(t \in \mathbb{R}_+\ /\ \alpha(t) \in L)$, es claro que t_1 esta bien definido pues como α es continua y $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0, y_1)$ entonces debe existir $t^* \in (0, \pi/2)$ tal que $\alpha(t^*) \in L$. Notemos ahora que $\alpha(\frac{3\pi}{2}) = (0, y_2)$ con $y_2 < y_1$, luego por inducción si consideramos $t_n = min(t \in (t_{n-1}, \infty)\ /\ \alpha(t) \in L$ se tiene que $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definido y es una sucesión creciente. Tomemos $a_n\alpha(t_n)$ y veamos que $a_n \to (0, 0)$, esto es simple pues si $t_n \to t^* < \infty$ si tomamos $k = min(n \in \mathbb{N}\ /\ (2n + 1)\pi/2 > t^*)$ entonces $\alpha(\frac{(2k+1)\pi}{2}) = (0, y)$ con $y < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por continuidad no existe $y^* < y\ /\ (0, y^*) \in Im(\alpha)$. Como $\alpha(\frac{(2(k+1)+1)\pi}{2})$ cumple se tiene que $t_n \to \infty$. Luego como a era arbitrario probamos que para toda recta que sale del origen si consideramos la sucesión a_n dada por las intersecciones de la recta con la curva se tiene que $(0, 0)$ es un punto de acumulación de a_n y por lo tanto la curva envuelve a $(0, 0)$ infinitas veces.

b) Notemos que $\alpha\prime(t) = \left(ae^{bt}(b\cos(t) - \sin(t)), ae^{bt}(b\sin(t) + \cos(t))\right) \to (0, 0)$ cuando $t \to \infty$ pues los términos trigonométricos están acotados. Por otro lado $\int_0^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau = a^2 \int_0^t e^{2bt}(b^2 + 1) = a^2(b^2 + 1)\frac{e^{2bt}}{2b} \to 0$ cuando $t \to \infty$. ∎

5. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función

$$\alpha(t) = \left(\frac{(1 + t^2)t}{1 + t^4}, \frac{(1 - t^2)t}{1 + t^4}\right).$$

La curva parametrizada por α se llama *lemniscata.*

- Probar que la función α es diferenciable, regular y simple.
- Determinar $\lim\limits_{t\to-\infty} \alpha(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t)$ y concluir que α no es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y la lemniscata.

Demostración Si consideramos $\alpha(t) = (\sin(t), \sin(2t)$ es uan reparametrización de la lemniscata mucho mas amigable donde todo queda trivial. ∎

2. Normales, tangentes y curvaturas

Sea $\mathbb{C}$ una curva parametrizada por longitud de arco por la función α. El vector *tangente* a $\mathbb{C}$ en $P = \alpha(s)$ es $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$; el vector *normal* a $\mathbb{C}$ en P es el único vector unitario $\mathbf{n}(s)$ tal que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ forma una base ortonormal orientada de $\mathbb{R}^2$. Finalmente, la curvatura de $\mathbb{C}$ en P es igual a $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$.

Todas las curvas de aquí en adelante son parametrizables.

6. Calcular la curvatura de un círculo de radio r.

Demostración Sea $\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ una parametrización del círculo de radio r. Luego $\dot\alpha(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$ y $|\dot\alpha| = r$, finalmente $\ddot\alpha(t) = (-r\cos(t), -r\sin(t))$ por lo que $K_C = \frac{\langle(-r\cos(t),-r\sin(t)),(-r\cos(t),-r\sin(t))\rangle}{r^3} = \frac{1}{r}$.

Notemos que si reparametrizamos α por longitud de arco $\alpha(s) = (r\cos(s/r), r\sin(s/r))$, luego $K_C = |\ddot\alpha| = \left|\dot{(-\sin(s/r), \cos(s/r))}\right| = \left|(\frac{-11}{r}\cos(s/r), \frac{-1}{r}\sin(s/r)\right| = \frac{1}{r}$. $\blacksquare$

7. Sea $\mathbb{C}$ una curva que no pasa por el origen y sea P el punto de $\mathbb{C}$ más próximo al origen. Probar que la tangente a $\mathbb{C}$ en P es ortogonal al vector P.

Demostración Sea $f(t) = |\alpha(t)|^2$, luego la hipótesis es que existe $t_0 = min(f)$ y $P = \alpha(t_0)$, luego si $\alpha = (x(t), y(t))$ entonces $\dot f(t_0) = 2x\dot x + 2y\dot y|_{t_0} = 2(x(t_0)\dot x(t_0) + y(t_0)\dot y(t_0)) = 2\langle\alpha(t_0), \dot\alpha(t_0)\rangle = 2\langle P, \mathbf{t}_P\rangle = 0$. $\blacksquare$

8. Probar que si todas las normales a una curva pasan por un punto fijo entonces la curva está contenida en un círculo.

Demostración Sea $\alpha(s)$ la curva dada reparametrizada por longitud de arco, luego para cada $s \in I$ existe r_s tal que $P = \alpha(s) + r_s\mathbf{n}(s)$. Como $r_s = \langle P - \alpha, \mathbf{n}\rangle$ se tiene que r es diferenciable en s, luego $\frac{d}{dt}|P - \alpha(s)|^2 = 2\langle P - \alpha(s), -\dot\alpha(s)\rangle = 2\langle r(s)\mathbf{n}(s), \dot\alpha(s)\rangle = 0$, por lo que la distancia de P a $\alpha(s)$ es constante y entonces $\alpha(I) \subseteq S^1$. $\blacksquare$

9. Sea $\mathbb{C}$ una curva y α una parametrización por longitud de arco.

- Probar que $\alpha''(s)$ es ortogonal a $\alpha'(s)$ para todo $s \in (a, b)$. En particular $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$ es paralelo al vector normal $\mathbf{n}(s)$.
- Sea $k(s)$ el único escalar tal que $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$. Probar que $|k(s)| = \kappa(s)$.
- Probar que $\kappa(s)$ es el área del rectángulo formado por el par de vectores $\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s)$.
- Probar que si κ es constante e igual a $1/r$ entonces $\mathbb{C}$ está contenida en una circunferencia de radio r.

Demostración *a)* Como α esta parametrizada por longitud de arco, entonces $|\dot\alpha| = 1$, luego $0 = \frac{d}{dt}\langle\dot\alpha, \dot\alpha\rangle = 2\langle\dot\alpha, \ddot\alpha\rangle$. Como $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2_{\alpha(s)}$ para todo s se tiene que $\mathbf{t}'(s) = a(s)\mathbf{n}(s)$.

b) $|k(s)| = |\ddot\alpha| = \kappa(s)$

c) Notemos que $det\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \dot{\mathbf{t}}\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ k(s)\mathbf{n}\end{pmatrix} = |k(s)|\,det\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\end{pmatrix} = \kappa(s)$

d) Inspirados en 8 veamos si la curva $P(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)$ es constante, luego como todas las normales se cruzarían en un punto fijo se tiene por 8 que $\alpha(I) \subseteq S^1$. Notemos que $\dot{P} = \dot{\alpha} + \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{t} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{t})$ por las ecuaciones de Frenet Serret; luego $\dot{P} = 0$ y por 8 se tiene que α esta contenida en un círculo. ∎

10. Sea $\mathbb{C}$ una curva y sea α una parametrización cualquiera (no necesariamente por longitud de arco). Demostrar que la curvatura de $\mathbb{C}$ está dada por

$$k = \frac{\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_2'\alpha_1''}{[(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2]^{3/2}}.$$

Demostración Por un lado por definición $\dot{\mathbf{t}} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|} = \dfrac{d}{dt}(\frac{1}{|\dot{\alpha}|})\dot{\alpha} + \dfrac{\ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$, pero por el otro existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{t} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ por lo que $\dot{\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \dfrac{d}{dt}(\frac{1}{|\dot{\alpha}|})\dot{\alpha} + \dfrac{\ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$.

Si J es el operador rotación en $\pi/2$ se tiene que $\dot{\theta}\,|\dot{\alpha}| = \langle \dot{\mathbf{t}}, J(\dot{\alpha})\rangle = \dfrac{1}{|\dot{\alpha}|}\langle \ddot{\alpha}, J(\dot{\alpha})\rangle$. Y por lo tanto $\dot{\theta} = \dfrac{1}{|\dot{\alpha}|^2}\langle \ddot{\alpha}, J(\dot{\alpha})\rangle$.

De allí concluímos que $\kappa = \dfrac{\dot{\theta}}{|\dot{\alpha}|} = \dfrac{1}{|\dot{\alpha}|^3}\langle \ddot{\alpha}, J(\dot{\alpha})\rangle = \dfrac{y(\ddot{t})x(\dot{t}) - x(\ddot{t})y(\dot{t})}{|\dot{\alpha}|^3}$ ∎

11. Sea $k : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Fijemos $s_0 \in I$ y definamos una nueva función $\theta : I \to \mathbb{R}$ como $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ para cada $s \in I$. Probar que la curva $\mathbb{C}$ parametrizada por $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, donde

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)$$

tiene curvatura k, y que cualquier otra curva cuya curvatura esté dada por k es congruente a $\mathbb{C}$ (es decir, se obtiene aplicando una transformación lineal ortogonal que preserva orientación y una traslación a $\mathbb{C}$).

Demostración Es claro que $\dot{\alpha} = (\cos(\theta), \sin(\theta)$ y por la unicidad de la función arco se tiene que $\kappa = \dfrac{\dot{\theta}}{|\dot{\alpha}|} = \dot{\theta} = k$. Supongamos ahora que g es otra curva parametrizada por longitud de arco tal que $K_g = K_C = k$, sean $\{e_1, e_2\}$ la referencia movil de α y $\{u_1, u_2\}$ la de g; finalmente sea $B : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $Be_i = u_i$ que es claro que es diferenciable. Luego $\dfrac{d}{dt}(Be_1) = \dot{B}e_1 + B\dot{e_1} = \dot{B}e_1 + Bke_2 = \dot{B}e_1 + ku_2 = \dot{u_1} = ku_2$, por lo que $\dot{B}e_1 = 0$ y análogamente $\dot{B}e_2 = 0$ y como $\{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ para todo s se tiene que $B(s) = B \in M_s(\mathbb{R})$. Notemos además que como B lleva una base orientada positivamente a otra, por Lineal se tiene que $B \in O(2)$, por lo tanto por Frenet-Serret tenemos $B\dot{\alpha} = \dot{g}$ con lo que $B\alpha - g = p$, si consideramos $f = Bx - p$ se tiene que f es un isomorfismo afín tal que $f(\alpha) = g$. ∎

12. Consideremos una curva dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, con $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable. Probar que la longitud de la curva es

$$\int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

y que su curvatura, como función de θ, es

$$k = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demostración Sea $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ una parametrización de la curva definida por ρ, donde $x = \rho(\theta)\cos(\theta)$ e $y = \rho(\theta)\sin(\theta)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= (\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}) \\ &= (\dot\rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta), \dot\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} |\dot\alpha|^2 &= (\dot\rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta))^2 + (\dot\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))^2 \\ &= \dot\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) + \dot\rho^2\sin^2(\theta) + \rho^2\cos^2(\theta) \\ &= \dot\rho^2 + \rho^2 \end{aligned}$$

Concluímos que $l(\alpha) = \int_a^b |\dot\alpha|\, d\theta = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2} d\theta$

Por otro lado notemos que $\ddot\alpha = (\ddot\rho\cos(\theta) - 2\dot\rho\sin(\theta) - \rho\cos(\theta), \ddot\rho\sin(\theta) + 2\dot\rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta))$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{(\ddot\rho\sin(\theta) + 2\dot\rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta))(\dot\rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)) - (\ddot\rho\cos(\theta) - 2\dot\rho\sin(\theta) - \rho\cos(\theta))(\dot\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta))}{|\dot\alpha|^3} \\ &= \frac{2\dot\rho^2 - \ddot\rho\rho + \rho^2}{(\rho^2 + \dot\rho^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

∎

3. Centros de curvatura

Sea $\mathbb{C}$ una curva cuya curvatura nunca se anula y sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud de arco. Si $s \in (a, b)$, se llama *centro de curvatura de* $\mathbb{C}$ *en* $P = \alpha(s)$ al punto

$$x(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$$

y se llama *círculo osculador a* α *en* s al círculo centrado en $x(s)$ cuyo radio es $\kappa(s)^{-1}$.

13. Mostrar que la curva $\mathbb{C}$ y el círculo osculador se cortan en P, y en ese punto tienen la misma tangente y la misma curvatura.

Demostración Sea s fijo y $P = \alpha(s)$, luego una parametrización del círculo osculador de α en P es $c(t) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}(\cos(t), \sin(t))$

Luego como $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ es una base se tiene que $(\cos(t), \sin(t)) = x(t)\mathbf{t}(s) + y(t)\mathbf{n}(s)$ y luego como $\mathbf{n}(s) \in S^1$ existe un único $t^* \in (0, 2\pi)$ tal que $-\mathbf{n}(s) = (\cos(t^*), \sin(t^*))$. Por lo tanto $c(t^*) = \alpha(s)$ y el círculo osculador y la curva se tocan en P

Notemos que $\dot c(t) = \frac{1}{\kappa(s)}(-\sin(t), \cos(t))$ y por lo tanto por un lado $|\dot c| = \frac{1}{\kappa(s)}$ y por el otro $\dot c(t^*) = \frac{1}{\kappa(s)}(-\sin(t^*), \cos(t^*)) = \frac{1}{\kappa(s)}J(-\mathbf{n}(s)) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{t}(s)$. Concluímos que la tangente al círculo osculador $\mathbf{t}_C(t^*) = \frac{\dot c}{|\dot c|}(t^*) = \frac{\frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{t}(s)}{\frac{1}{\kappa(s)}} = \mathbf{t}(s)$ y por lo tanto el círculo osculador y la curva tienen la misma tangente.

Finalmente al ser un círculo de radio $\frac{1}{\kappa(s)}$ es claro que la curvatura de c es $\kappa(s)$ por 6. ∎

14. Determinar los centros de curvatura y los círculos osculadores de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sea $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t)$ una parametrización de la elipse, luego $\dot{\alpha}(t) = (-a\sin(t), b\cos(t))$ y $|\dot{\alpha}|^2 = a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)$. Por lo tanto se tiene que $\mathbf{t}(t) = \frac{(-a\sin(t), b\cos(t))}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}}$ y $\mathbf{n}(t) = J(\mathbf{t}(s))$.

Como $\alpha(t)$ no esta parametrizada por longitud de arco calculemos la curvatura por 10, y para eso sea $\ddot{\alpha} = (-a\cos(t), -b\sin(t))$, luego:

$$\begin{aligned}\kappa_C &= \frac{\ddot{y(t)}\dot{x(t)} - \ddot{x(t)}\dot{y(t)}}{|\dot{\alpha}|^3} \\ &= \frac{ab}{|\dot{\alpha}|^3}\end{aligned}$$

Por lo tanto los centros de curvatura $\chi(t) = (a\cos(t), b\sin(t)) + ab\,|\dot{\alpha}|^2\,(-b\cos(t), -a\sin(t)) = ((a - abb(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)))\cos(t), (b - aba(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)))\sin(t))$ y dado t fijo los circulos osculadores son $c_t(s) = (a\cos(t), b\sin(t)) + ab\,|\dot{\alpha}|^2\,(-b\cos(t), -a\sin(t)) + \frac{|\dot{\alpha}|^3}{ab}(\cos(s), \sin(s))$. (Me maree en las cuentas...) ∎

15. La *evoluta* de $\mathbb{C}$, que notamos $e(\mathbb{C})$, es la curva formada por los centros de curvatura de $\mathbb{C}$; la función $x(s)$ es una parametrización de $e(\mathbb{C})$.

- Probar que la tangente a $e(\mathbb{C})$ en $Q = x(s)$ es paralela a la normal a $\mathbb{C}$ en $P = \alpha(s)$.
- Supongamos que la curvatura de $\mathbb{C}$ es monótona. Probar que la longitud de arco de $e(\mathbb{C})$ entre dos puntos Q y Q' es igual a la diferencia de los radios de curvatura en los correspondientes puntos P y P' de $\mathbb{C}$.

Demostración *a)* Sea $x(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$ una parametrización de la evoluta de $\mathbb{C}$, luego $\dot{x}(s) = \dot{\alpha}(s) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\mathbf{n}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\dot{\mathbf{n(s)}}$. Como α esta parametrizada por longitud de arco se tiene que $\dot{\alpha}(s) = \mathbf{t}(s)$ y por Frenet Serret $\dot{\mathbf{n(s)}} = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$ y entonces $\dot{x}(s) = \mathbf{t}(s) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\mathbf{n}(s) - \mathbf{t}(s) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\mathbf{n}(s)$. Luego $\mathbf{t}_x(s)//\mathbf{n}(s)$

b) NOtemos que por el item anterior se tiene que si llamamos $Q = x(s)$ y $Q' = x(s')$ entonces la longitud de arco entre esos dos puntos es $l_x(Q, Q') = \int_s^{s'} \left|\dot{x(\eta)}\right| d\eta = \int_s^{s'} \left|\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\kappa(\eta)}\right)\mathbf{n}(\eta)\right| d\eta$. Como κ es monotona entonces $\frac{1}{\kappa}$ también lo es y entonces $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)$ tiene signo constante para todo s, supongamos que es positivo. Luego se tiene que $l_x(Q, Q') = \int_s^{s'} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\kappa(\eta)}\right) d\eta = \frac{1}{\kappa(\eta)}\Big|_s^{s'} = \frac{1}{\kappa(s')} - \frac{1}{\kappa(s)}$ como pide el enunciado. ∎