Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017
FINAL

1. Espacios Vectoriales

1.1. Propiedades Elementales

Definición Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un conjunto $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ se dice:

1. *Linealmente independiente* si dados $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$ implica que $\lambda_{i_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.
2. *Sistema de generadores* si dado $v \in \mathcal{X}$ entonces existen $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = v$.
3. *Base* si es a la vez un sistema de generadores linealmente independiente.

Ejemplo

- $X = \mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots\} = \{X^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es base.
- $X = \mathcal{C}[a,b]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{e^{\alpha x}, \alpha \in [0,1]\}$ veamos que es linealmente independiente.

  Demostración Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_i \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$ para todo $x \in [a,b]$; luego si derivamos $n-1$ veces tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \ldots & e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Y como los α_i son distintos entonces la matriz de Vandermonde es inversible y el sistema admite una única solución, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. ∎

Recordemos:

Proposición 1.1 (Lema de Zorn) *Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que todo subconjunto no vacío $S \subseteq P$ totalmente ordenado admite una cota superior; entonces existe un elemento maximal en P.*

Proposición 1.2 *Si E es un espacio vectorial, entonces E admite una base.*

Demostración Consideremos $P = \{S \subseteq E \ / \ S \text{ es li}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusiíon, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup_{i \in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in T$ y $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}\ in \mathcal{F}$ tales que $\sum_k \lambda_i v_i = 0$. Como son finitos existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \in S_{k_0}$ para todo i, que al ser un conjunto linealmente independiente resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Concluímos que $T \in P$, luego por 1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente, sea $v \in E \setminus < M >$ (el conjunto generado por combinaciones lineales de M), luego $M \cup \{v\}$ sería un conjunto li lo que contradice la maximalidad de M; por ende no existe tal v y M resulta base. ∎

Proposición 1.3 *Sea E un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases de Hamel de E. Luego $\#B_1 = \#B_2$.*

Demostración Sea $x \in \mathcal{B}_1$ y llamemos $S(x)$ al conjunto de los elementos $v \in \mathcal{B}_2$ tal que al escribir a x como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_2$ aparece v, por lo que si $x = \sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k}$ entonces $S(x) = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$.

Lema 1.4 $\bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x) = \mathcal{B}_2$

Demostración Del lema Si $v \in \bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x)$ luego existe $x_0 \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x_0)$ por lo que $v \in \mathcal{B}_2$ por definición de $S(x)$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{B}_2$ pero no existe $x \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x)$, entonces $v \notin < \mathcal{B}_1 >= E =< \mathcal{B}_2 >$. ∎

Por 1.4 tenemos que $\#\mathcal{B}_2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_1} \#S(x) \leq \#\mathbb{N}\#\mathcal{B}_1 \leq \#B_1$.

Razonando al revés obtenemos la otra desigualdad. ∎

Definición Si E es un espacio vectorial, una norma definida en E es una aplicación $\|.\| : E \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Observación Todo espacio normado es un espacio métrico pero no viceversa.

Definición Si E es un espacio vectorial, un producto interno definido en E es una aplicación $\langle ., . \rangle : E \times E \mapsto F$ tal que:

1. $\langle ., z \rangle$ es lineal
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Observación Todo espacio con producto interno es un espacio normado pero no viceversa.

Teorema 1.5 (Cauchy-Schwartz) *Sea E un espacio vectorial y $\langle . \rangle$ un producto interno definido en E; luego si $x, y \in E$ se tiene que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.*

Demostración Sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $z = x - \lambda y$, luego $\langle z, z \rangle = \langle x, x \rangle + \left|\lambda^2\right| \langle y, y \rangle - 2\Re(\lambda \langle y, x \rangle) \geq 0$.

Si $\langle y, x \rangle = re^{i\theta}$ sea $\lambda = e^{-i\theta} t$ con $t \in \mathbb{R}$; luego:

$$0 \geq \langle x, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle - 2bt \equiv c - 2bt + at^2 := q(t)$$

Luego como la cuadrática dada es positiva, eso implica que $0 \leq 4b^2 - 4ac$ por lo que:

$$0 \leq b^2 - ac = |\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Si $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\|$, entonces $b^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ por lo que $b^2 - ac = 0$. Esto implica que existe t_0 tal que $q(t_0) = 0$, por lo tanto eso implica que $\left\langle x - e^{-i\theta} t_0 y, x - e^{-i\theta} t_0 y \right\rangle \equiv 0$ y por lo tanto $x = e^{-i\theta} t_0 y$. ∎