

Análisis Funcional  
FINAL  
AXEL SIROTA

Índice

<b>1. Problemas</b>	<b>2</b>
Ejercicio 1. . . . .	2
Ejercicio 2. . . . .	2
Ejercicio 3. . . . .	2
Ejercicio 4. . . . .	2
Ejercicio 5. . . . .	3
Ejercicio 6. . . . .	3
Ejercicio 7. . . . .	3
Ejercicio 8. . . . .	3
Ejercicio 9. . . . .	3
Ejercicio 10. . . . .	3
Ejercicio 11. . . . .	3
Ejercicio 12. . . . .	3
Ejercicio 13. . . . .	4
Ejercicio 14. . . . .	4
Ejercicio 15. . . . .	5
Ejercicio 16. . . . .	6
Ejercicio 17. . . . .	6
Ejercicio 18. . . . .	6
Ejercicio 19. . . . .	6
Ejercicio 20. . . . .	6
<b>2. Soluciones</b>	<b>7</b>
Solución 20. . . . .	7

# 1. Problemas

## Espacios tangentes

### Ejercicio 1.

Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $d$  y  $p \in M$  un punto. Probar que las siguientes descripciones del espacio tangente a  $M$  en  $p$  son equivalentes:

1. Derivaciones en  $p$ , es decir, funcionales lineales en el espacio de funciones diferenciables que cumplen la regla de Leibniz

$$T_p M = \{D : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal} : D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)\}.$$

2. El espacio dual de  $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  donde  $\mathfrak{m}_p = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : f(p) = 0\}$ .
3. El espacio dual de  $\overline{\mathfrak{m}}_p/\overline{\mathfrak{m}}_p^2$  donde  $\overline{\mathfrak{m}}_p$  es el ideal de gérmenes de funciones en  $p$  que se anulan en  $p$ .
4. Familias  $((U, \phi), v)$  con  $(U, \phi)$  una carta alrededor de  $p$  y  $v \in \mathbb{R}^d$ , bajo la relación

$$((U, \phi), v) \sim ((V, \psi), w) \text{ si } w = D(\psi\phi^{-1})(\phi(p))v.$$

Con cada descripción del espacio tangente, definir la diferencial  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  de una función diferenciable  $f : M \rightarrow N$ .

### Ejercicio 2.

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto y  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. El gráfico

$$\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) : x \in U\}$$

es una variedad diferenciable con la carta global  $(\Gamma_\phi, \pi)$  con  $\pi : \Gamma_\phi \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\pi((x, \phi(x))) = x$ . Si  $f : \Gamma_\phi \rightarrow \mathbb{R}$  es la función dada por  $f((x, \phi(x))) = \phi(x)$ , calcular

$$\left. \frac{\partial}{\partial \pi^i} \right|_p (f)$$

en función de las derivadas parciales de  $\phi$ .

### Ejercicio 3.

Sea  $M$  una variedad diferencial,  $p \in M$  un punto y fijemos una carta  $(U, \phi)$  de  $M$  alrededor de  $p$ . Diremos que dos curvas  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$  con  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  son *equivalentes* si las derivadas  $\left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_2) \right|_{t=0}$  coinciden. Lo denotaremos  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ . Probar que:

1.  $\sim$  es una relación de equivalencia.
2.  $\sim$  no depende de la carta  $(U, \phi)$  elegida.
3. El conjunto de clases de equivalencia puede ser dotado de estructura de espacio vectorial de forma natural y resulta isomorfo al espacio tangente en  $p$ . Definir la diferencial de una función en un punto en términos de esta nueva construcción.

**Ejercicio 4.**

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que 0 es un valor regular (es decir, si  $f(p) = 0$  entonces  $\nabla f(p) \neq 0$ ). Si  $M = f^{-1}(0)$ , probar que  $T_p M$  puede identificarse con el espacio ortogonal a  $\nabla f(p)$ .

**Ejercicio 5.**

Probar que  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo en un entorno de  $p \in M$  si y sólo si  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es un isomorfismo.

**Ejercicio 6.**

Sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable. Probar que si  $f$  es constante en un entorno  $U$  de  $p$  entonces  $d_p f = 0$ . Recíprocamente, si  $d_p f = 0$  para todo  $p$  en un abierto conexo  $U$ , entonces  $f|_U$  es constante.

**Ejercicio 7.**

Sean  $M, N$  variedades y  $p, q$  puntos en ellas respectivamente. Tomemos las inclusiones  $\iota_M : M \rightarrow M \times N$  dada por  $\iota_M(x) = (x, q)$  y  $\iota_N : N \rightarrow M \times N$  dada por  $\iota_N(y) = (p, y)$ . Probar que

$$T_{(p,q)}(M \times N) = d_p \iota_M(T_p M) \oplus d_q \iota_N(T_q N).$$

**Ejemplos****Ejercicio 8.**

Se considera el toro  $T = S^1 \times S^1$  y la función  $f(e^{it}, e^{iu}) = \sin(3t) \cos(5u)$ , mirando  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Elegir alguna carta alrededor de  $p = (1, 1)$  en  $T$  y calcular las derivadas de  $f$  con respecto a las coordenadas dadas por la carta en  $p$ .

**Ejercicio 9.**

Sea  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera y  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \text{dist}(x, N)^2$  donde  $N = (0, 0, 1)$ . Consideremos además, las cartas  $(U, \phi_N)$  y  $(V, \phi_S)$  dadas por las proyecciones estereográficas y  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Se definen los vectores tangentes

$$v_1 = 8 \frac{\partial}{\partial \phi_N^1} \Big|_p + 5\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \phi_N^2} \Big|_p, \quad v_2 = (-15\sqrt{2} + 20) \frac{\partial}{\partial \phi_S^1} \Big|_p + (-24 + 16\sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial \phi_S^2} \Big|_p.$$

1. Probar que  $f$  es diferenciable.
2. Calcular  $v_1(f)$  y  $v_2(f)$ .
3. Probar que en realidad  $v_1 = v_2$ .

**Ejercicio 10.**

Consideremos  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado que  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \text{M}_n(\mathbb{R})$  es un abierto, identificamos  $T_I \text{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq T_I \text{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \text{M}_n(\mathbb{R})$  y llamamos  $e_{ij}$  a las coordenadas así dadas. Calcular  $\frac{\partial \det}{\partial e_{ij}}$  y  $\frac{\partial \det}{\partial e_{ij}} \Big|_I$ .

**Ejercicio 11.**

Calcular la diferencial de  $f : S^1 \times (-1, 1) \rightarrow S^2$ ,

$$f(z, t) = (z_1 \sqrt{1-t^2}, z_2 \sqrt{1-t^2}, t), \quad \text{donde } z = z_1 + iz_2,$$

en los puntos de la forma  $(1, t) \in S^1 \times (-1, 1)$ .

**Ejercicio 12.**

Hallar la diferencial de las siguientes funciones en el punto indicado.

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (xy + y^2, e^{x-y})$  en  $(7, 3)$ .
2.  $g : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $g(z) = z^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , en cualquier punto.
3. El producto de matrices  $\mu : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  en cualquier punto.
4. La inversa de matrices  $i : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  en la identidad.
5. Las restricciones de  $\mu$  e  $i$  a  $SL_n(\mathbb{R})$  en la identidad.
6.  $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  dada por  $f(a : b : c) = (b : a : c)$  en cualquier punto.

**Ejercicio 13.**

Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x, y, z) = (xy, z)$ .

1. Hallar los puntos críticos de  $f$ .
2. Hallar los puntos críticos de  $f|_{S^2}$ .
3. Hallar el conjunto  $C$  de valores críticos de  $f|_{S^2}$ .
4. Probar que  $C$  tiene medida 0.

**Fibrados vectoriales**

Sea  $V$  un espacio vectorial real. Recordemos que un **fibrado vectorial** de fibra  $V$  sobre una variedad diferencial  $M$  consiste de una variedad diferencial  $E$  junto con una función diferenciable  $\pi : E \rightarrow M$  tal que

- Para cada  $p \in M$  la fibra  $\pi^{-1}(p)$  tiene estructura de espacio vectorial.
- Para todo  $p \in M$  existen un entorno  $U$  y un difeomorfismo  $\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$  de forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times V \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & M. & \end{array}$$

- Para todo  $p, \phi$  y  $U$  como en el ítem anterior, la restricción  $\phi_U : \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times V$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.

El espacio  $E$  se llama el *espacio total*,  $M$  el *espacio base*,  $\pi$  la *proyección* y  $U$  es un *abierto trivializante*. Dados dos abiertos trivializantes  $U, V$  la función  $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$  es llamada la *función de transición*. Decimos que un fibrado es *trivial* si se puede tomar a  $M$  como un abierto trivializante. Una *sección* de  $\pi : E \rightarrow M$  es una función diferenciable  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = id$ .

**Ejercicio 14.**

Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $d$ . Consideremos

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\},$$

la unión disjunta de los espacios tangentes.

1. Si  $(U, \phi)$  es una carta, definimos  $\tilde{U} = \{(p, v) : p \in U, v \in T_p M\}$  y una función  $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,

$$\tilde{\phi}(p, v) = (\phi(p), v^1, \dots, v^d)$$

donde  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial \phi^1} \Big|_p + \dots + v^d \frac{\partial}{\partial \phi^d} \Big|_p$ . Probar que

$$\mathcal{A} = \{(\tilde{U}, \tilde{\phi}) : (U, \phi) \text{ carta de } M\}$$

induce una estructura de variedad diferenciable sobre  $TM$ . ¿Cuál es su dimensión?

2. Probar que la proyección canónica  $\pi : TM \rightarrow M$  es una función diferenciable de rango constante.
3. Sea  $f : M \rightarrow N$ . Probar que  $df : TM \rightarrow TN$  definida por  $df(p, v) = (f(p), d_p f(v))$  es una función diferenciable.
4. Probar que  $\pi : TM \rightarrow M$  es un fibrado vectorial que llamaremos *fibrado tangente*. Encontrar un cubrimiento por abiertos trivializantes y calcular las funciones de transición.

### Ejercicio 15.

Probar que los siguientes son fibrados vectoriales, hallar su fibra y las funciones de transición.

1. El *fibrado tautológico* de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . El espacio total se define como

$$\gamma_n = \{([v], p) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} : p \in v\}$$

y  $\pi : \gamma_n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  es la proyección en la primera coordenada.

2. El *fibrado de Moebius* sobre  $S^1$ . El espacio total se define como  $E = [0, 1] \times \mathbb{R} / \sim$  donde

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si } b = -d \text{ y } \begin{cases} a = 0, c = 1, \\ a = 1, c = 0 \end{cases}$$

y la proyección está dada por  $\pi : E \rightarrow S^1$ ,  $\pi(\overline{(x, y)}) = e^{2\pi i x}$ .

### Ejercicio 16.

Sea  $M$  una variedad diferencial y  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial y sea  $n$  la dimensión de las fibras.

1. Probar que  $\pi : E \rightarrow M$  es el fibrado trivial si y sólo si existen secciones  $s_1, \dots, s_n$  tales que  $(s_1(p), \dots, s_n(p))$  es una base de  $\pi^{-1}(p)$  para cada  $p \in M$ .
2. Probar que el fibrado tautológico nunca es trivial.

Sugerencia: probar que toda sección del fibrado tautológico debe anularse.

### Ejercicio 17.

Diremos que una variedad es *paralelizable* si su fibrado tangente es trivial. Probar que  $S^1, S^3$  y  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  son paralelizables. Probar que  $S^2$  no es paralelizable.

### Álgebra de campos

### Ejercicio 18.

Consideremos el anillo  $\mathbb{R}[\epsilon] = \mathbb{R}[x]/(x^2)$  Probar que  $T_p M$  se puede identificar con los morfismos de anillos

$$\mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}[\epsilon]$$

donde  $\mathcal{D}_p(M)$  es el anillo de gérmenes de funciones en  $p$ .

### Ejercicio 19.

Consideremos el conjunto de  $\mathbb{R}$ -derivaciones de  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ ,

$$\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})) = \{D \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})) : D(fg) = fD(g) + gD(f)\}.$$

Probar que  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\epsilon])$ .

### Ejercicio 20.

Sea  $M$  una variedad y  $U \subseteq M$  un abierto. El conjunto de *campos tangentes sobre  $U$*  se define como

$$\mathfrak{X}(U) = \{X \in \mathcal{C}^\infty(U, TM) : \pi \circ X = id\}.$$

Probar que

1. Probar que  $\mathfrak{X}(U)$  es un  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ -módulo.
2. Probar que para todo punto  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $\mathfrak{X}(U)$  es un  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ -módulo libre. ¿Cuál es el rango de este módulo?
3. Probar que  $M$  es paralelizable si y sólo si  $\mathfrak{X}(M)$  es un  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ -módulo libre.

## 2. Soluciones

### Solución a la pregunta 1

Primero unos lemas:

**Lema 2.0.1** Sea  $p \in M$  y  $U$  un entorno abierto, luego si  $f|_U = cte$  entonces  $v(f) = 0$  para toda  $v \in T_p M$

**Demostración** En efecto, como  $f|_U = c$  entonces  $\frac{1}{c}v(f) = v(\frac{f}{c}) = v(\frac{f}{c} \frac{c}{c}) = \frac{1}{c}v(f) + \frac{1}{c}v(c)$  con lo que  $v(f) = 0$ . ■

**Lema 2.0.2** Sea  $p \in M$  y  $U$  un entorno abierto, luego si  $f \in \mathfrak{m}_p^2$  entonces  $v(f) = 0$

**Demostración** En efecto, existen  $g, h \in \mathfrak{m}_p$  tal que  $f = gh$  por lo que  $v(f) = v(gh) = \underbrace{g(p)}_{=0} v(h) + \underbrace{h(p)}_{=0} v(g) = 0$  ■

Vayamos de a partes:

$i \implies ii$  Supongamos que  $v \in (\mathcal{C}^\infty(M))^*$  tal que  $v$  cumple la regla de Leibniz y sea  $[f] \in \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$ . Definamos  $D_v : \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $D_v[f] = v(f)$  y veamos que es lineal, cumple la regla del producto y que es independiente del representante.

Si  $f = \underbrace{g}_{\in \mathfrak{m}_p} + \underbrace{h}_{\in \mathfrak{m}_p^2}$  notemos que:

$$D_v(f - g) = v(h) \underbrace{=}_{{2,0,2}} 0$$

Por lo tanto  $D_v$  no depende del representante, como es trivialmente lineal entonces la aplicación  $D_v \in \left( \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \right)^*$ .

$ii \implies iii$  En efecto por 2.0.1 la aplicación  $v$  es local y por ende podemos tomar todo en un entorno  $U \ni p$  en vez de  $M$ .

$iii \implies iv$  Sea  $v \in \left( \overline{\mathfrak{m}_p} / \overline{\mathfrak{m}_p^2} \right)^*$  y tomemos una carta  $(U, \phi)$  de ese entorno de  $p$ , luego definimos  $\chi(v) = [(\phi, u)]$  donde  $u = (v(\phi^1), \dots, v(\phi^n))$ .

$iv \implies i$