Topología
FINAL

Parte I
Espacios Topológicos

1. Ordenes

Definición Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A se dice un *orden(parcial)* si satisface:

- Reflexividad: $a\mathcal{R}a \quad \forall a \in A$
- Transitividad: $a\mathcal{R}b \ \wedge b\mathcal{R}c \Longrightarrow a\mathcal{R}c$
- Antisimetría: $a\mathcal{R}b \ \wedge b\mathcal{R}a \Longrightarrow a = b$

En este caso decimos que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado, o *poset*.

Observación En el caso que una relación en un conjunto A cumpla la antisimetría y la **no** reflexividad, decimos que $(A, \mathcal{R})$ es un *orden parcial estricto*.

Proposición 1.1 *Dado un conjunto $A \neq \emptyset$ existe una biyección entre los ordenes de A y los ordenes parciales estrictos de A*

Demostración Si $\mathcal{R}$ es un orden en A, definamos $\mathcal{R}'$ dado por:

$$a\mathcal{R}'b \Longleftrightarrow a\mathcal{R}b \ \wedge a \neq b$$

Entonces notemos que $\mathcal{R}'$ es un orden parcial estricto.
Recíprocamente, si $\mathcal{R}'$ es un orden parcial estricto, definimos $\mathcal{R}$ dado por:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a\mathcal{R}'b \ \vee a \neq b$$

Entonces es claro que $\mathcal{R}$ es un orden. ∎

Ejemplo $\mathbb{N}$ con la relación $a\mathcal{R}b$ si $a|b$ es un poset.

Nota: De ahora en más vamos a notar $\leq$ a los órdenes parciales y $<$a los órdenes parciales estrictos

Definición Un orden parcial en un conjunto se dice un orden total si $\forall a \in A,\ a \leq b \vee b \leq a$, y similarmente con órdenes parciales estrictos.

Ejemplo De órdenes:

- $(\mathbb{R}, \leq)$ es un orden total
- $(\mathbb{N}, |)$ no lo es, pues $2 \nmid 3$ ni $3 \nmid 2$.

Definición Sea A un conjunto ordenado, un elemento $a \in A$ se dice:

- *Maximal* si $b \geq a$ implica que $a = b$
- *Minimal* si $b \leq a$ implica $b = a$.
- *Máximo* si $b \leq a \ \forall b \in A$

- *Mínimo* si $b \geq a \ \forall b \in A$.
- Si $S \subset A, S \neq \emptyset$, a se dice *cota superior de* S si $s \leq a \ \forall s \in S$
- Si $S \subset A, S \neq \emptyset$, a se dice *cota inferior de* S si $s \geq a \ \forall s \in S$

Ejemplo De mínimos y minimales

- $(\mathbb{N}, |)$ tiene mínimo, el $1 \in \mathbb{N}$
- $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ no tiene mínimo, pero los minimales son los primos.

Definición Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ órdenes parciales. Un *morfismo de orden* es una función $f : A \to B$ tal que $a \leq a' \implies f(a) \preceq f(a')$. Similarmente un morfismo de órdenes estrictos.

En cualquier caso decimos que f preserva el orden.

Definición Sean A, B ordenes totales estrictos, un morfismo de órdenes estrictos $fA \to B$ se dice un *isomorfismo* si existe $g : B \to A$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. En caso de existir tal morfismo, decimos que A y B tienen el mismo tipo de orden.

Proposición 1.2 *Un morfismo de órdenes estrictos $f : A \to B$ es un isomorfismo sii f es biyectiva*

Demostración Supongamos que f es biyectiva y llamemos g a su inversa, queremos ver que g es morfismo de orden y preserva el orden.

Sea $b \prec b'$, como g es inyectiva entonces $g(b) \neq g(b')$. Como A es un orden total estricto, $g(b) < g(b')$ o $g(b) > g(b')$, supongamos éste último. Entonces como f es morfismo de órdenes estrictos, $b = f(g(b)) > f(g(b')) = b'$, por lo que g es morfismo de órdenes estrictos. ∎

Definición Sean A, B órdenes totales estrictos, el *orden lexicográfico* en el producto $A \times B$ viene dado por $(a, b) < (a', b')$ si $a < a'$ o $a = a'$, $b < b'$. Es claro que el orden lexicográfico es un orden total estricto en $A \times B$

Ejemplo Consideremos a $\mathbb{N}$ con el orden usual y a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico. Veamos que no tienen el mismo tipo de orden.

Si $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fuese un isomorfismo de orden, entonces si llamamos $A := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ (a, b) < (2, 1)\}$, entonces $f|_A : A \to \{n \ / \ n < f(2, 1)\}$ sería un isomorfismo de orden, y por la proposición 1.2 tenemos que es biyectiva.

Pero $\{(a, n) \ , \ n \in \mathbb{N}\} \subset A$ por lo que A es infinito, y $\{n \ / \ n < f(2, 1)\}$ es finito por arquimedianidad. Por lo tanto f no era isomorfismo de orden.

Definición Sea A un orden total estricto. Una *sección* de A es un conjunto $S \subset A$ tal que $a \in S$, $b < a \implies b \in S$. Si $a \in A$, la sección por a es $S_a = \{b \in A \ / \ b < a\}$, notemos que S_a es sección de A.

Ejemplo $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 < 2\right\}$ es una sección de $\mathbb{Q}$ pero $S \neq S_q \ \forall q \in \mathbb{Q}$

Definición Un orden total estricto A se dice un *buen orden* si todo subconjunto $S \subset A$ tiene un mínimo.

Proposición 1.3 *Sea A y $S \subsetneq A$ una sección propia, entonces existe $a \in A$ tal que $S_a = S$*

Demostración Sea $B = A \setminus S$ entonces $B \neq \emptyset$, sea $b_0 = min(B)$ que existe pues A es bien ordenado; veamos que $S = S_{b_0}$.

En efecto, si $b \in S_{b_0}$ entonces $b < b_0$, por lo tanto $b \notin B$. Por ende, $b \in S$.

Por el otro lado, si $s \in S$ y $s \geq b_0$, entonces como S es sección tenemos que $b_0 \in S$ por lo que $b_0 \notin S_{b_0}$. Entonces $s < b_0$. ∎

Proposición 1.4 *Si A, B estan bien ordenados, entonces $A \times B$ con el orden lexicográfico también.*

Demostración Sea $S \neq \emptyset \subset A \times B$ y consideremos $S_a = \{a \in A \ / \ \exists b \in B \ , \ (a,b) \in S\} \subset A$. Como $S \neq \emptyset$, existe $(a', b') \in S$, por lo que $a' \in S_a \neq \emptyset$. Sea $a_0 = min(S_a)$ y consideremos $S_b = \{b \in B \ / \ (a_0, b) \in S\} \neq \emptyset$ por lo visto antes. Llamemos $b_0 = min(S_b)$ y veamos que $(a_0, b_0) = min(S)$:

1. $(a_0, b_0) \in S$
2. Sean $(c,d) \in S$ tal que $(c,d) < (a_0, b_0)$; si $c < a_0$ como $d \in B$ y $(c,d) \in S$ tenemos que $c \in S_a$ y es menor al mínimo, por lo que $c = a_0$. Supongamos entonces $d < b_0$, notemos que $d \in S_b$ pues $S \ni (c,d) = (a_0, d)$ pero b_0 era el mínimo de S_b. Por lo tanto $(c,d) \geq (a_0, b_0)$

Concluímos que S tiene mínimo y entonces $A \times B$ está bien ordenado. ∎

Proposición 1.5 *Si A esta bien ordenado y $B \subset A$, entonces B esta bien ordenado*

Teorema 1.6 *Para todo conjunto A, existe una relación $<$que es un orden total estricto y tal que $(A, <)$ es un buen orden.*

Corolario 1.7 *Existe un conjunto bien ordenado S_Ω que es no numerable pero tal que toda sección propia es numerable.*

Demostración Sea A no numerable, por el teorema 1.6 existe un orden $<$tal que es bien ordenado.

Consideremos el orden lexicográfico en $\{1,2\} \times A$ donde $1 < 2$. Por 1.4 sabemos que es bien ordenado. Sea $B = \big\{(n,a) \in \{1,2\} \times A \ / \ S_{(n,a)} \mathit{es\ no\ numerable}\big\}$. Notemos que $(2, min(A)) \in B$ por lo que $B \neq \emptyset$ y sea $\Omega = min(B)$, consideremos S_Ω.

Por 1.5 sabemos que S_Ω es bien ordenado y como $\Omega \in B$ además es no numerable. Si $S \subsetneq S_\Omega$ es sección propia, entonces por 1.3 sabemos que existe $\alpha \in B$ tal que $S = S_\alpha$ y $\alpha < \Omega$. Como $\Omega = min(B)$ sabemos que $\alpha \notin B$, por lo que S es numerable ∎

Corolario 1.8 *Si $A \subset S_\Omega$ es numerable, entonces A tiene cota superior*

Demostración Si A es numerable, entonces $B = \bigcup_{a \in A} S_a$ es numerable por 1.7. Además $B \subset S_\Omega$ y S_Ω es no numerable por lo que existe $b \in S_\Omega \setminus B$, afirmo que b es cota superior de A.

En efecto, si existe $a \in A$ tal que $b < a$, entonces $b \in S_a$ y entonces $b \in B$. ∎

Definición Sea A un poset, un subconjunto $C \subset A$ se dice *cadena* si es un orden total con el orden inducido

Teorema 1.9 *Lema de Zorn*

Sea $A \neq \emptyset$ un poset, si toda cadena en A tiene una cota superior en A, entonces A tiene al menos un elemento maximal

Teorema 1.10 *Axioma de elección*

Si A es un conjunto entonces existe $f : \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset \to A$ tal que $f(B) \in B \ \forall B \in \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset$

2. Espacios topológicos: Introducción

2.1. Interior, clausura y frontera de un conjunto

Definición Sea X un conjunto, una *topología* en X es una colucción τ de subconjuntos de X que satisface:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$
3. Si $U, V \in \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$

El par (X, τ) se llama *espacio topológico* y si queda claro la topología diremos simplemente X un espacio topológico. Un conjunto $U \subset X$ se dice abierto si $U \in \tau$ y se dice cerrado si $U^c \in \tau$.

Ejemplo Topologías discreta e indiscreta

- $X = cualquiera$ y $\tau_d = \mathcal{P}(X)$

  A esta topología la llamaremos *topología discreta*.

- $X = cualquiera$ y $\tau_i = \{\emptyset, X\}$ A esta topología la llamaremos *topología indiscreta*

Observación Sea $A = \{\tau \in \mathcal{P}(X) \ / \ \tau \ \textit{es topología}\}$ y lo ordenamos por la inclusión, entonces $\tau_d = max(A)$ y $\tau_i = min(A)$

Ejemplo Topología métrica

Sea $(X, \tilde{d})$ un espacio métrico y consideremos:

$$\tau = \tau_{\tilde{d}} = \{U \subset X \ / \ \forall x \in U, \exists r > 0 \ / \ B_r(x) \subset U\}$$

A esta topología la llamaremos *topología métrica*, concluimos que todo espacio métrico es un espacio topológico (pero si tomamos X finito y $\tau = \tau_d$ vemos que no todo espacio topológico es métrico).

Ejemplo Espacio de Sierpinsky

Sea $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, notamos a este espacio $\mathfrak{S} = (X, \tau)$ el *espacio de Sierpinsky*

Ejemplo Topología del complemento finito Sea X un conjunto y $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \ / \ U^c \textit{es finito}\}$, veamos que es una topología:

- $X^c = \emptyset \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$.
- Si $U_i \in \tau$ entonces $\left(\bigcup_i U_i\right)^c = \bigcap_i U_i^c \subset U_{i_0}^c$ y $U_{i_0}^c$ es finito pues $U_{i_0} \in \tau$. Entonces $\bigcup_i U_i \in \tau$
- Si $U, V \in \tau$ entonces $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ es finito, por lo que $U \cap V \in \tau$

A esta topología la llamaremos *topología del complemento finito*

Definición Topologías mas finas Dadas τ_1, τ_2 topologías en un conjunto arbitrario X, decimos que τ_1 *es más fina que* τ_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$

Definición Interior, clausura y frontera de un conjunto

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

El *interior* de A es $\mathring{A} = \displaystyle\bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \ abierto}} U$

La *clausura* de A es $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \ cerrado}} F$

La *frontera* de A es $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Observación $\mathring{A}$ es el abierto más grande contenido en A y $\overline{A}$ es el cerrado más chico que contiene a A

Ejemplo Sea $\mathfrak{S}$ el espacio de Sierpinsky, entonces:

- $\overline{\{0\}} = \{0,1\}$
- $\overline{\{1\}} = \{1\}$
- $\mathring{\{0\}} = \{0\}$
- $\mathring{\{1\}} = \emptyset$

Definición Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Un *entorno* de x es un subconjunto $A \subset X$ tal que existe un abierto U con $x \in U \subset A$. Un *entorno abierto* es un entorno que es abierto.

Proposición 2.1 *Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Luego $x \in \overline{A}$ si y sólo si todo entorno U de x cumple $U \cap A \neq \emptyset$*

Demostración Por el contrarecíproco, supongamos que existe U entorno de x tal que $U \cap A = \emptyset$, entonces existe $V \ni x$ abierto tal que $V \subset U$ y $V \cap A = \emptyset$. Si consideramos $F = V^c$ tenemos que F es cerrado y por lo anterior $A \subset F$, como $x \notin F$ entonces $x \notin \overline{A}$.

Por el otro lado, supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in V := \left(\overline{A}\right)^c$ que es abierto y por ende entorno. Sin embargo, $A \cap V = \emptyset$, por lo que V es un entorno abierto de x que no interseca con A ∎

2.2. Bases y subbases

Definición Sea X un conjunto, una *base para una topología en* X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisface:

i) $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U = X$

ii) Si $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$ entonces existe $W \in B$ tal que $x \in W \subset U \cap V$

Ejemplo Si (X,d) es un espacio métrico, la colección $\mathcal{B} = \{B_r(x)\}_{\substack{x \in X \\ r>0}}$ de bolas abiertas es una base para una topología.

Proposición 2.2 *Si $\mathcal{B}$ es una base para una topología de un conjunto X entonces $\tau = \{U \subset X \ / \ \forall x \in U \ \exists V \in \mathcal{B}\ ,\ x \in V$ es una topología.*

Demostración i) $\emptyset \in \tau$ trivialmente

ii) Como $X = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U$ entonces dado $x \in X$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset X$. Por lo tanto $X \in \tau$.

iii) Si $U_i \in \tau$ sea $x \in \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Luego existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0} \in \tau$, por lo que existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Por lo tanto $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau$

iv) Si $U, V \in \tau$ entonces dado $x \in U \cap V$ existen $U', V' \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U' \subset V'$ y $x \in V' \subset V$. Como $\mathcal{B}$ es base y $x \in U' \cap V'$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U' \cap V' \subset U \cap V$. Luego $U \cap V \in \tau$

Por lo tanto τ es base, la llamaremos *topología generada por* $\mathcal{B}$ ∎

Proposición 2.3 *En la notación anterior se tiene que $U \in \tau \iff U = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$*

Demostración Si $U \in \tau$ entonces por 2.2 $\forall x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subset U$, por lo tanto $U = \bigcup_{x \in U} V_x$.

Recíprocamente si $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ entonces dado $x \in U$ existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B' \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = U$, por lo que $U \in \tau$ ∎

Observación Si $\mathcal{B}$ es una base, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es la más chica que contiene a $\mathcal{B}$.

Proposición 2.4 *Si X es un conjunto y τ_1, τ_2 son dos topologías en X con bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivamente, entonces son equivalentes:*

1. *τ_1 es más fina que τ_2*
2. *$\forall U \in \mathcal{B}_2$ y $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in V \subset U$*

Demostración Supongamos que τ_1 es más fina que τ_2, entonces dado $U \in \mathcal{B}_2$ tenemos que $U \in \tau_2 \subset \tau_1$, luego por 2.2 dado $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in V \subset U$.

Por el otro lado, antes vimos justamente que *ii)* es equivalente a que $\mathcal{B}_2 \in \tau_1$y como τ_2 es la topología más chica que contiene a $\mathcal{B}_2$ tenemos que $\tau_2 \subset \tau_1$ ∎

Definición Topología del l'imite inferior

Sea $\mathcal{B} = \{[a, b) \ , \ a < b]\}$ la colección de intervalos semiabiertos y notemos que es una base. La topología generada por esta base se llama *topología del límite inferior* y el espacio $\mathbb{R}$ con esta topología se notará $(\mathbb{R}, \tau_L) := \mathbb{R}_L$

Proposición 2.5 *Si notamos a τ como la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces $\tau \subsetneq \tau_L$*

Demostración Si notamos $\mathcal{B}, \mathcal{B}_L$ a las bases de las topologías τ, τ_L respectivamente, por 2.4 basta ver que dado $x \in I \in \tau$ existe $V \in \tau_L$ tal que $x \in V \subset I$ y que no se puede la recíproca.

En efecto, sea $x \in (a, b) \in \tau$ entonces tenemos que $x \in [x, b) \subset (a, b)$ por lo que $\tau \subset \tau_L$.

Por el otro lado, si tomamos $0 \in [0, 1) \in \mathcal{B}_L$ entonces si $0 \in I \in \mathcal{B}$ entonces dado $0 < \epsilon < |I|$ tenemos que $-\epsilon \in I$ y $-\epsilon \notin [0, 1)$. Por lo tanto $\tau \subsetneq \tau_L$ ∎

Definición Topología del orden

Sea A un orden total estricto, sea $a_0 = min(A)$ (en caso de existir) y $b_0 = max(A)$ (en caso de existir). Definimos $\mathcal{B}$ como:

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \{(a,b) \ , \ a < b \ , a, b \in A\} & \textit{si no existen } a_0, b_0 \\ \{(a,b) \ , \ a < b \ , a, b \in A\} \cup \{[a_0, b) \ , b \in A\} & \textit{si no existe } b_0 \\ \{(a,b) \ , \ a < b \ , a, b \in A\} \cup \{(a, b_0] \ , a \in A\} & \textit{si no existe } a_0 \\ \{(a,b) \ , \ a < b \ , a, b \in A\} \cup \{(a, b_0] \ , a \in A\} \cup \{[a_0, b) \ , b \in A\} & \textit{si existen ambos} \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que es una base y la topología que genera la llamaremos la *topología del orden* y notaremos al espacio topológico como $(A, \tau_0) := A_O$

Observación Dado que en $(\mathbb{R}, <)$ es un conjunto con un orden total estricto, entonces aplicando lo anterior obtenemos un espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_O)$ que al no haber ni máximo ni mínimo en $\mathbb{R}$ resulta $(\mathbb{R}, \tau)$ la topología usual.

Ejemplo La topología del orden en $\mathbb{N}$ es la topología discreta Consideremos $\mathbb{N}$ con τ_d, τ_O las topologías discreta y del orden respectivamente. Afirmo que ambas son equivalentes:

En efecto, sea $U \in \mathcal{B}_d$ un abierto para la base de la topología discreta y $n \in U$. Como $\mathcal{B}_d = \{\{n\} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ entonces $U = \{n_0\}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $\mathcal{B}_O \ni (n_0 - 1, n_0 + 1) = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n_0 - 1 < n < n_0 + 1\} = \{n\}$ por lo que $n \in (n_0 - 1, n_0 + 1) \subseteq U$. Por 2.4 tenemos que $\tau_d \subseteq \tau_O$.

Recíprocamente como la topología discreta es el máximo rrespecto a la inclusión de las topologías de $\mathbb{N}$ obtenemos que $\tau_O \subseteq \tau_d$. Concluimos que $\tau_d = \tau_O$. ∎

Definición Subbase de un espacio topológico
Dado un conjunto X, una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice *subbase* si $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U = X$

Proposición 2.6 *Si $\{\tau_i\}_{i\in I}$ es una familia de topologías para un conjunto X, entonces $\tau = \bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$ es una topología para X.*

Demostración Verifiquemos los axiomas que tiene que cumplir una topología:

i) Como τ_i son topologías, $\emptyset \in \tau_i$ $\forall i \in I$ entonces $\emptyset \in \tau$.

ii) Similarmente $X \in \tau$

iii) Sean $U, V \in \tau$ entonces $U, V \in \tau_i$ $\forall i \in I$; como son todas topologías $U \cap V \in \tau_i$ $\forall i \in I$ y entonces $U \cap V \in \tau$.

iv) Sean $\{U_i\}_{i\in I} \subset \tau$ una familia de abiertos de τ. Entonces $\{U_i\}_{i\in I} \subset \tau_i$ para todo i, por lo que $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau_i$ para todo i. Por ende, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.

Por lo tanto $\bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$ es una topología. ∎

Corolario 2.7 *Dado una colección $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, el conjunto de todas las topologías de X que contienen a B tiene un mínimo (en el sentido de la inclusión). Se llama la topología generada por $\mathcal{B}$ y se la denota $\sigma(B)$.*

Demostración Es claro que si $\{\tau_i\}_{i\in I}$ es dicho conjunto de topologías, entonces por 2.6 tenemos que $\tau = \bigcap\limits_{i\in I} \tau_i$ es la topología buscada ∎

Proposición 2.8 *Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una subbase de una topología en X, entonces*

$$\sigma(B) = \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{\substack{j \in J \\ J \text{finito}}} U_{i,j} \ / \ U_{i,j} \in \mathcal{B} \right\}$$

Demostración Consideremos $\mathcal{B}' = \left\{ \bigcap\limits_{\substack{j \in J \\ J finito}} U_j \ / \ U_i \in \mathcal{B} \right\}$ y veamos que $\mathcal{B}'$ es una base:

i) Notemos que tomando $J = j_0$ tenemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, por ende $X = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}'} U \subseteq X$ por lo que $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}'} U = X$.

ii) Sean $U, V \in \mathcal{B}'$ y $x \in U \cap V$, entonces por definición $U \cap V \in \mathcal{B}'$ por lo que $x \in U \cap V \subseteq U \cap V$.

Finalmente veamos que $\sigma(B) = \sigma(B')$ lo que probaría la proposición.

- Por un lado $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ por lo que $\sigma(B) \subseteq \sigma(B')$
- Por el otro, $\mathcal{B} \subseteq \sigma(B)$ y entonces (tomando primar como el conjunto de intersecciones finitas del conjunto) $\mathcal{B}' \subseteq \sigma(B)' = \sigma(B)$. Por lo tanto por la definición de $\sigma(B')$, tenemos que $\sigma(B') \subset \sigma(B)$. ∎.

Definición Punto de acumulación
Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto. Un punto $x \in X$ se dice *punto de acumulación* de A si para todo entorno abierto $U \ni x$ se tiene que $(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ o equivalentemente si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Al conjunto de puntos de acumulación de A lo notaremos $A\prime$

Proposición 2.9 *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces $\overline{A} = A\prime \cup A$*

Demostración Por un lado si $x \in A\prime$ entonces $x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subseteq \overline{A}$; además $A \subseteq \overline{A}$ por lo que $A \cup A\prime \subseteq \overline{A}$.

Recíprocamente si $x \notin A\prime \cup A$ entonces $x \notin A$ y existe $U \ni x$ entorno abierto tal que $\emptyset = (U \cap A) \setminus \{x\} = (U \setminus \{x\}) \cap (A \setminus \{x\}) = (U \setminus \{x\}) \cap A$, entonces $U \cap A = (U \setminus \{x\}) \cap A) \cup (\{x\} \cap A) = \emptyset$. Por lo tanto $U \ni x$ es un entorno abierto de x tal que $U \cap A = \emptyset$, con lo que $x \notin \overline{A}$ ∎

2.3. Redes y sucesiones en espacios topológicos

Definición Sucesión convergente en X

Si X es un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si para todo entorno U de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ implica $x_n \in U$.

Ejemplo Sea $X = \mathfrak{S}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, afirmo que $x_n \to 0$ y $x_n \to 1$.

En efecto, sea U un entorno de 0, entonces tomando $V = \{0\}$ es un abierto que cumple $x_n \in V \subseteq U$; por lo tanto $x_n \to 0$.

Por el otro lado, sea V un entorno de 1, pero entonces $V = X$ es el único entorno abierto de 1 que cumple $x_n \in X = V$; por lo tanto $x_n \to 1$.

Observación Las sucesiones no definen la topología en general

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$, si $x \in X$ es tal que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ con $x_n \to x$ entonces $x \in \overline{A}$. No obstante, si $x \in \overline{A}$ entonces puede no existir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$

Demostración De la observación

Por un lado, sea $U \ni x$ un entorno abierto de x, entonces como $x_n \to x$ por definición existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. En particular $x_{n_0+1} \in U \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$.

Para ver que no vale la vuelta, sea S_Ω el conjunto dado por 1.7 y sea $\widetilde{S_\Omega} = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ donde $\Omega > a$ para todo $a \in S_\Omega$. Finalmente consideremos $(\widetilde{S_\Omega}, \tau_O)$ la topología del orden en dicho conjunto. Afirmo que $\Omega \in \overline{S_\Omega}$ pero no existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en S_Ω tal que $x_n \to \Omega$.

En efecto, si $U \ni \Omega$ es un entorno abierto de Ω entonces existe $a \in S_\Omega$ tal que $\Omega \in (a, \Omega] \subseteq U$ por definición de la topología del orden. Ahora por la construcción de S_Ω, $S_a \cup \{a\}$ es numerable y entonces existe $b \in S_\Omega \setminus S_a \cup \{a\}$ por lo que $b \in (a, \Omega] \cap S_\Omega$ lo que implica que $U \cap S_\Omega \neq \emptyset$. Esto prueba que $\Omega \in \overline{S_\Omega}$.

Sin embargo, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {S_\Omega}^{\mathbb{N}}$ entonces $\{x_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ es numerable y por lo tanto (por construcción de S_Ω) existe $b \in S_\Omega$ tal que $b > x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si consideramos $U = (b, \Omega]$ obtenemos que $x_n \notin U$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y entonces $x_n \not\to \Omega$. ∎

Observación De la Observación Notemos que en particular $\widetilde{S_\Omega} = \overline{S_\Omega}$, y que S_Ω no puede ser metrizable ya que esta propiedad si la cumplen los espacios métricos.

Definición Conjunto dirigido Un conjunto parcialmente ordenado $(\Lambda, \leq)$ se dice un *conjunto dirigido* si $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ existe un $\omega \in \Lambda$ tal que $\alpha, \beta \leq \omega$.

Definición Red en espacios topológicos Una *red* en un espacio topológico X es una función $f : \Lambda \to X$ donde Λ es un conjunto dirigido. A la red también se la notará $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ donde $x_\alpha = f(\alpha)$.

Definición De convergencia de redes Diremos que una red (x_α) converge a un punto $x \in X$ si para todo entorno $U \ni x$ existe α_0 tal que $x_\alpha \in U$ $/\forall \alpha \geq \alpha_0$ y lo notaremos $x_\alpha \to x$

Ejemplo Sea (X, τ_i) un espacio topológico y x_α una red en X, entonces $x_\alpha \to x$ $\forall x \in X$.

Proposición 2.10 *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subconjunto y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe x_α red en X tal que $x_\alpha \in A$ $\forall \alpha \in \Lambda$ y $x_\alpha \to x$*

Demostración Replicando la demostración de sucesiones se puede ver la necesidad de la condición.

Para el otro lado, sea $\Lambda = \{u \subseteq X \ / \ U entorno\ de\ x\}$ ordenado por la inclusión inversa, ie: $U \leq V \leftrightarrow V \subseteq U$. Notemos que Λ es dirigido pues si $U, V \in \Lambda$ entonces $U \cap V \in \Lambda$, y $U, V \leq U \cap V$. Como $x \in \overline{A}$ entonces para todo $U \in \Lambda$ se tiene $A \cap U \neq \emptyset$, sea entonces $f : \Lambda \to X$ dado por $f(U) \in U \cap A$. Notemos que f es una red y converge a x; en efecto, sea $V \ni x$ entorno de x, entonces si $U \geq V$ entonces $x_U = f(U) \in U \cap A \subseteq V \cap A \subseteq V$ ∎

Ejemplo Red que converge a Ω en S_Ω Recordemos que no existe sucesión que tiende a Ω como vimos previamente. Sea ahora $f : S_\Omega \to S_\Omega$ dado por $f(a) = a$ donde en el dominio vemos a S_Ω como conjunto dirigido y en el codominio como espacio topológico. Sea $U = (b, \Omega] \ni \Omega$ el entorno básico de Ω, entonces si $a \geq b$ trivialmente $f(a) \in U$ por lo que $f \to \Omega$.

Definición Función cofinal

Sean Γ, Λ conjunto dirigidos. Una función $f : \Gamma \to \Lambda$ se dice *cofinal* si preserva el orden y $\forall \lambda \in \Lambda$ existe $\omega \in \Gamma$ tal que $f(\omega) \geq \lambda$

Definición De subred de un espacio topologico

Si $f : \Lambda \to X$ es una red en un espacio topológico X y $g : \Gamma \to \Lambda$ es una fución cofinal, entonces la composición $fg : \Gamma \to X$ se denomina *subred* de la red f y la denotaremos $(x_{\lambda_\omega})_{\omega \in \Gamma}$ donde $x_{\lambda_\omega} = fg(\omega)$.

Proposición 2.11

1. *Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red en X que converge a $x \in X$, entonces toda subred también converge a x.*

2. *Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red en X, $x \in X$ y toda subred de x_α tiene una subred que converge a x; entonces $x_\alpha \to x$*

Demostración Vayamos por partes:

1. Sea $g : \Gamma \to \Lambda$ cofinal y consideremos $h = fg$ una subred de $f(\alpha) = x_\alpha$, queremos ver que $h \to x$. Para esto sea $U \ni x$ un entorno abierto de x, como f converge a x sabemos que existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$ entonces $f(\alpha) \in U$. Como g es cofinal sabemos que existe $\omega_0 \in \Gamma$ tal que $g(\omega_0) \geq \alpha_0$ y ademas si $\omega \geq \omega_0$ entonces $g(\omega) \geq g(\omega_0)\alpha_0$. Por lo tanto si $\omega \geq \omega_0$ tenemos que $h(\omega) = f(g(\omega)) \geq f(g(\omega_0)) \geq f(\alpha_0)$ por lo que $h(\omega) \in U$. Por lo tanto $fg \to x$.

2. Supongamos que $f \not\to x$ entonces existe $U_0 \ni x$ entorno abierto de x tal que $\forall \alpha \in \Lambda$ existe $\alpha_0 \geq \alpha$ tal que $f(\alpha_0) \notin U_0$. Sea $\Gamma = \{\gamma \in \Lambda \ / \ f(\gamma) \notin U_0\}$, entonces la suposición implica que este conjunto es dirigido; además si consideramos $i : \Gamma \to \Lambda$ dado por $i(\gamma) = \gamma$ esta función es cofinal. Si consideramos $fi := g$ es una subred de f y por hipótesis existe $h : \Pi \to \Gamma$ cofinal tal que $gh \to x$. No obstante, $gh(\pi) \notin U_0$ para todo $\pi \in \Pi$ por definición de Γ, por lo que $gh \not\to x$; por lo tanto $f \to x$ ∎

2.4. Funciones Continuas

Definición Función continua

Sean X, Y espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ se dice *continua* si $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo $U \subset Y$ abierto.

Ejemplo

- Si X es cualquiera entonces $1_X : X \to X$ dado por $x \mapsto x$ es continua.
- Si X es discreto e Y cualquiera entonces toda función $f : X \to Y$ es continua
- Si X es cualquiera e Y indiscreto entonces toda función $f : X \to Y$ es continua
- Si X, Y son cualesquiera, $c_{y_0} : X \to Y$ dado por $x \mapsto y_0$ es continua
- Composición de continuas es continua

- Si τ_1, τ_2 son dos topologías en X, entonces $1_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua si y sólo si $\tau_2 \subseteq \tau_1$

Observación Sea X cualquiera, entonces existe una biyección entre el conjunto de funciones continuas $f : X \to \mathfrak{S}$ y el conjunto de abiertos de X

Demostración De la observación

Sea ψ dada por $\psi(f) = f^{-1}(0)$ donde $f : X \to \mathfrak{S}$ es una función continua, y sea $\phi(U) = 1_{U^c}$ donde U es un abierto de X; veamoso que ambas funciones estan bien definidas y son mutuamente inversas.

Si $f : X \to \mathfrak{S}$ es una función continua, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto para todo U abierto de $\mathfrak{S}$, en particular $U = \{0\}$ por lo que efectivamente $f^{-1}(0) \in \tau$ es abierto de X. Recíprocamente sea $U \in \tau$ y consideremos $f := 1_{U^c} : X \to \mathfrak{S}$:

- $f^{-1}(\mathfrak{S}) = X \in \tau$
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$
- $f^{-1}(\{0\}) = U \in \tau$

Por lo tanto f es una funci”on continua. y ambas ϕ, ψ estan bien definidas. Además:

- Si $f : X \to \mathfrak{S}$ es continua entonces $\phi(\psi(f)) = \phi(f^{-1}(0)) = 1_{f^{-1}(0)^c}$. Si $f(x) = 1$ entonces $x \notin f^{-1}(0)$ por lo que $x \in f^{-1}(0)^c$ y entonces $1_{f^{-1}(0)^c}(x) = 1$. Es simple ver que si $f(x) = 0$ entonces $1_{f^{-1}(0)^c}(x) = 0$; por lo que $1_{f^{-1}(0)^c} = f$ y entonces $\phi\psi = 1_A$ donde A es el conjunto de funciones continuas $f : X \to \mathfrak{S}$.
- Si $U \subseteq X$ es abierto entonces $\psi(\phi(U)) = \psi(1_{U^c}) = 1_{U^c}^{-1}(0) = U$, por lo que $\psi\phi = 1_\tau$. ∎

Observación Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de un espacio Y, una función $f : (X, \tau_X) \to Y$ es continua sii $f^{-1}(U) \in \tau_X$, $\forall U \in \mathcal{B}$, es más vale solo verlo en los abiertos subbasicos.

Demostración Si $V \subset Y$ es abierto entonces $V = \bigcup\limits_{\substack{U \subset V \\ U in \mathcal{B}}} U$ por lo que $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\substack{U \subset V \\ U in \mathcal{B}}} f^{-1}(U) \in \tau_X$ ∎

Proposición 2.12 *Sean X, Y espacios topológicos arbitrarios y $f : X \to Y$ una función, entonces son equivalentes:*

1. *f es continua*
2. *$f^{-1}(F)$ es cerrado $\forall F$ cerrado*
3. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq X$*
4. *Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red en X tal que $x_\alpha \to x_0$ entonces $(f(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda} \to f(x)$*

Demostración Probemos de a partes:

i) $\Longrightarrow$ iv) Sea $U \ni x$ un entorno abierto de $f(x)$, entonces como f es continua $f^{-1}(U) \ni x$ es un entorno abierto de x. Por lo tanto, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$ se tiene $x_\alpha \in f^{-1}(U)$, pero esto implica que para todo $\alpha \geq \alpha_0$ se tiene $f(x_\alpha) \in U$. Por lo tanto $f(x_\alpha) \to f(x)$

iv) $\Longrightarrow$ ii) Sea $F \subseteq Y$ cerrado y $x \in \overline{f^{-1}(F)}$, por 2.10 existe x_α red en X tal que $x_\alpha \in f^{-1}(F)$, $\forall \alpha \in \Lambda$ y $x_\alpha \to x$. Por hipótesis entonces $f(x_\alpha) \to f(x)$, pero como $f(x_\alpha) \in F$ para todo $\alpha \in \Lambda$ entonces por 2.10 tenemos que $f(x) \in \overline{F} = F$; por lo tanto $x \in f^{-1}(F)$ y se tiene que $f^{-1}(F)$ es cerrado.

ii) $\Longrightarrow$ i) Sea $U \subseteq Y$ abierto, entonces U^c es cerrado y por hipótesis $f^{-1}(U^c) = (f^{-1}(U))^c$ es cerrado; por lo tanto $f^{-1}(U)$ es abierto y entonces f es continua.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sea $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$; luego $\overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)})$ por hipótesis, por lo tanto $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

iii) $\Longrightarrow$ ii) Sea $F \subseteq Y$ cerrado, entonces por hipótesis tenemos que $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$, por lo tanto $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ es cerrado en X ∎

Definición Sean X, Y espacios topológicos, una función $f.X \to Y$ se dice *abierta* si $f(U) \in \tau_Y$ para todo $U \in \tau_X$. Similarmente se dice *cerrada* si $f(F)^c \in \tau_Y$ para todo $F^c \in \tau_X$.

Definición Sean X, Y espacios topológicos, una función $f.X \to Y$ se dice *homeomorfismo* si f es continua, biyectiva y f^{-1} continua.

Observación f es homeomorfismo si y sólo si f es continua, biyectiva y abierta; si y sólo si f es continua, biyectiva y cerrada

Definición Topología subespacio Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un sunconjunto. La *topología de subespacio* en A es $\tau_A = \{U \cap A \ / \ U \in \tau\}$ y en ese caso decimos que (A, τ_A) es un subespacio de (X, τ).

Observación La topología de subespacio es una topología

Observación Si A es un subespacio de X entonces la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es una función continua pues $i^{-1}(U) = U \cap A$. Similarmente si $A \subseteq X$ es subespacio y $f : X \to Y$ es continua, entonces $f|_A := fi : A \to Y$ es continua pues $(fi)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$ y $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

Proposición 2.13 *Si $A \subseteq X$ es subespacio y $f : Y \to A$ es una función entonces f es continua si y sólo si $if : Y \to X$ es continua*

Demostración Para un lado composición de continuas es continua.

Para el otro, si $U \in \tau_X$ entonces $\tau_Y \ni (if)^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap A) = f^{-1}(U \cap A)$ y como $U \cap A \in \tau_A$ se tiene que f es continua. ∎

Ejemplo Sea $X = [0, 1)$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$ y $Y = S^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|x\|_2 = 1\right\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}^2$. Sea además $f : X \to Y$ dada por $f(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ entonces f es biyectiva.

Consideremos $g : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $t \mapsto (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$, entonces g es continua pues ig es continua. por lo tanto $f = g|_X : X \to Y$ es continua. No obstante f no es homeomorfismo pues $f([0, \frac{1}{2})$ no es abierto.

Observación Si A es subespacio entonces los cerrados de A son los cerrados de X intersecados con A. En efecto, $F \subseteq X$ es cerrado sii existe $U \subseteq X$ abierto tal que $A \setminus F = U \cap A$ sii existe $U \subseteq X$ abierto tal que $F = A \setminus (U \cap A) = A \cap U^c$

Proposición 2.14 *1. Si F_1, F_2 son dos subespacios cerrados de un espacio topológico X tal que $X = F_1 \cup F_2$ y $f : X \to Y$ tal que $f|_{F_i}$ es continua, entonces f es continua.*

2. Si $\{U_j\}_{j \in J}$ son subespacios abiertos de un espacio topológico X tal que $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ y $f : X \to Y$ tal que $f|_{U_j}$ es continua para todo $j \in J$, entonces f es continua.

Demostración i) Sea $H \subseteq Y$ cerrado, entonces $f^{-1}(H) = (f^{-1}(H) \cap F_1) \cup (f^{-1}(H) \cap F_2) = (f|_{F_1})^{-1}(H) \cup (f|_{F_2})^{-1}(H)$ y como $f|_{F_i}$ es continua entonces $f^{-1}(H)$ es cerrado.

ii) Sea $U \subset Y$ abierto, entonces $f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U) \cap U_j = \bigcup_{j \in J} (f|_{U_j})^{-1}(U)$ y como cada $f|_{U_j}$ es continua entonces $f^{-1}(U)$ es abierto ∎

Observación No vale el item anterior de 2.14 para arbitrarios cerrados.

Demostración En efecto, sean $X = [0, 1]$, $F_0 = \{0\}$ y $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y cada F_n es cerrado. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

entonces es claro que f no es continua pero $f|_{F_n}$ lo es. ∎

3. Topologías iniciales y finales

3.1. Topología producto

Definición De topología producto para 2 espacios Sean X, Y espacios topológicos, entonces la *topología producto en* $X \times Y$ es la que tiene por subbase a $\mathcal{S} = \{U \times Y \ / \ U \in \tau_X\} \cup \{X \times V \ / \ V \in \tau_Y\}$, o equivalentemente a la que tiene por base a $\mathcal{B} = \{U \times V \ / \ U \in \tau_X \ , \ V \in \tau_Y\}$. Notaremos a la topología producto $\tau_{X\times Y}$

Observación Notar que la topología producto es la topología más chica que hace a las proyecciones p_X, p_Y continuas, donde $p_X(x, y) = x$ y $p_Y(x, y) = y$.

Demostración En efecto para una topología τ, las proyecciones son continuas sii $\left\{p_X^{-1}(U) \ / \ U \in \tau_X\right\}, \left\{p_Y^{-1}(V) \ / \ V \in \tau_Y\right.$ τ sii $\left\{p_X^{-1}(U) \ / \ U \in \tau_X\right\} \cup \left\{p_Y^{-1}(V) \ / \ V \in \tau_Y\right\} \subseteq \tau$ sii $\mathcal{S} \subseteq \tau$ sii $\sigma(S) \subseteq \tau$ sii $\tau_{X\times Y} \subseteq \tau$. ∎

Teorema 3.1 *Si* $\{X_j\}_{j\in J}$ *es una familia de espacios topológicos y* τ *es una topología en* $X = \prod_{j\in J} X_j$ *entonces son equivalentes:*

1. *Una subbase de* τ *es* $\mathcal{S} = \left\{p_j^{-1}(U) \ / \ j \in J \ , \ U \in \tau_{X_j}\right\}$
2. *Una base de* τ *es* $\mathcal{B} = \left\{\prod_{j\in J} U_j \ / \ U_j \in \tau_{X_j} \ , \ U_j \subsetneq X_j \text{ sii } j \in J' \text{ finito}\right\}$
3. τ *es la topología más chica que hace a las* p_j *continuas para todo* $j \in J$
4. *Dada* $f : Y \to X$ *es continua sii* $p_j f : Y \to X_j$ *es continua para todo* $j \in J$

A la topología que cumple estas propiedades en $X = \prod_{j\in J} X_j$ *la llamaremos topología producto y la notaremos* (X, τ_p) *o* $(X, \tau_{\prod X_j})$

Demostración Es claro que i) vale $\Longleftrightarrow$ ii) $\Longleftrightarrow$ iii) extendiendo la demostración que hicimos en la observación. Veamos la última:

iii) $\Longrightarrow$ iv) Notemos que para un lado por iii) sabemos que p_j son continuas para todo $j \in J$ y como composición de continuas es continua concluimos que $p_j f$ es continua.

Para el otro lado, por 2.4 podemos tomar un abierto subbásico $V = p_{j_0}^{-1}(U)$ de la topología producto, donde $j_0 \in J$ y $U \in \tau_{X_{j_0}}$. Notemos que $f^{-1}(V) = f^{-1}(p_{j_0}^{-1}(U)) = (p_{j_0} f)^{-1}(U) \in \tau_Y$ pues $p_{j_0} f$ es continua; concluimos que f es continua.

iv) $\Longrightarrow$ iii) Supongamos que τ satisface iv) y llamemos τ_p la topología que cumple iii), luego queremos ver que $\tau = \tau_p$.

Como $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$ es continua entonces como τ cumple iv) tenemos que $p_j 1_X = p_j : X \to X_j$ es continua para todo $j \in J$. Como τ_p es la más chica con esa propiedad tenemos que $\tau_p \subseteq \tau$.

Ahora consideremos $1_X : (X, \tau_p) \to (X, \tau)$, como $p_j 1_X = p_j : (X, \tau_p) \to X_j$ es continua para todo $j \in J$, entonces como τ satisface iv) se tiene que 1_X es continua; con lo que $\tau \subseteq \tau_p$. ∎

Ejemplo Consideremos $\mathfrak{S}^{\mathbb{N}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}$ y sea $(x^n) \in \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$ dado por $(x^n)_i = 1_{\{i>n\}}$, veamos que $x^n \to 0$

Sea $U \ni 0$ un entorno básico de 0, entonces existen $\{U_i\}$ entornos de $0 \in \mathfrak{S}$ tal que $U = \prod_{i=1}^{n_0} U_i \times \prod_{i>n_0} \mathfrak{S}$. Por lo tanto si $k > n_0$ entonces $x^k \in U$, por lo que $x^n \to 0$.

Observación Notemos que también $x^n \to 1$ pues si $V \ni 1$ es un entorno abierto de 1 entonces $V = \mathfrak{S}^{\mathbb{N}}$ y entonces toda $x^n \to 1$.

Proposición 3.2 *Dada una familia $\{X_j\}_{j\in J}$ de espacios topológicos existe X espacio topológico junto con funciones continuas $f_j : X \to X_j$ para todo $j \in J$ ocn la siguiente propiedad:*

Para cualquier espacio Y y función continua $g_j : Y \to X_j$ existe una única $f : Y \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, bend right, "g_j"'] & X \arrow[d, "f_j"] \\ & X_j \end{tikzcd} \tag{1}$$

Más aún el espacio X es único salvo homeomorifsmo. Esta propiedad la llamaremos propiedad universal del espacio producto.

Demostración Sea $X = \prod_{j\in J} X_j$ y $f_j = p_j : X \to X_j$, entonces ya sabemos que las p_j son continuas para todo $j \in J$. Sea entonces Y un espacio topológico y $\{g_j\}_{j\in J}$ una familia de funciones continuas $g_j : Y \to X_j$; entonces consideremos $f : Y \to X$ dado por $f(y)_j = g_j(y)$ que sabemos que es la única función de conjuntos que hace el diagrama conmutar. Veamos que f es continua y para esto por 3.1 basta ver que $p_j f = g_j$ es continua, por lo tanto f es continua. Esto concluye la existencia de X.

Supongamos ahora que X' junto con f'_j es otro espacio que cumple la propiedad. Como X cumple la propiedad entonces existe $f : X' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, bend right, "f'_j"'] & X \arrow[d, "f_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

Por otro lado como X' satisface la propiedad existe $g : X \to X'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\exists! g"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] & X' \arrow[d, "f'_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que $f_j f g = f'_j g = f_j$ con lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "1_X"] \arrow[r, shift right, "fg"'] \arrow[dr, "f_j"'] & X \arrow[d, "f_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

Por unicidad de la función $h : X \to X$ tal que $f_j h = f_j$ se tiene que $fg = 1_X$. Análogamente se tiene que $gf = 1'_X$ por lo que X es homeomorfo a X' (Lo notaremos $X \simeq X'$). ∎

Definición Topología caja

Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos, la *topología caja* en $X = \prod_{j\in J} X_j$ es la que tiene por base a $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j\in J} U_j \ / \ U_j \in \tau_{X_j} \right\}$ y la notaremos (X, τ_c)

Observación Notemos que $\mathcal{B}$ es base pues $\prod_{j\in J} U_j \cap \prod_{j\in J} V_j = \prod_{j\in J} U_j \cap V_j \in \mathcal{B}$

Observación Notemos que $\tau_p \subseteq \tau_c$ y si J es finito entonces $\tau_p = \tau_c$.

Ejemplo Sea $(X = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}, \tau_c)$, entonces $x^n = 1_{\{i>n\}} \not\to 0$ pues $V = \prod_{n\in\mathbb{N}} \{0\} \ni 0$ es un entorno abierto del 0 tal que $x^n \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$

3.2. Topologías iniciales

Definición Topología inicial para una familia de funciones

Sea X un conjunto, $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos y $f_j : X \to X_j$ funciones para todo $j \in J$. La *topología inicial en* X respecto a la familia $\{X_j\}_{j\in J}$ es la que tiene por subbase a $\mathcal{S} = \left\{ f_j^{-1}(U) \right\} \ / \ j \in J \ , \ U \in \tau_{X_j}$ y en este caso decimos que $\{f_j\}_{j\in J}$ es una *familia inicial de* X.

Observación La topología inicial respecto a la familia $\{f_j\}$ es la mínima topología que hace continuas a todas las f_j.

Ejemplo

- Si $\{X_j\}_{j\in J}$ es una familia de espacios topológicos, la topología inicial respecto a las $\left\{ p_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i \right\}_{i\in I}$ es la topología producto
- Si $A \subseteq X$ es un subconjunto de un espacio topológico X, entonces la topología inicial respecto a $\{i : A \hookrightarrow X\}$ es la topología subespacio.

Proposición 3.3 *Sea X un conjunto, $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos y $f_j : X \to X_j$ una familia de funciones. Entonces la topología inicial respecto a las $\{f_j\}$ es la única que cumple lo siguiente:*

- *Para todo Y espacio topológico y $f : Y \to X$ se tiene que f es continua si y sólo si $f_j f : Y \to X_j$ es continua para todo $j \in J$.*

Demostración Primero veamos que la topología inicial τ cumple la propiedad:

Para un lado como τ hace a todas las p_j continuas entonces si f es continua, $p_j f$ es continua para todo $j \in J$.

Para el otro, por 2.4 basta tomar un $V \in \mathcal{S}$ la subbase de τ para el cual $V = f_{j_0}^{-1}(U)$ para $j_0 \in J$ y $U \in \tau_{X_{j_0}}$. Entonces $f^{-1}(V) = f^{-1}(f_{j_0}^{-1}(U)) = (f_{j_0} f)^{-1}(U) \in \tau_Y$ pues $f_{j_0} f$ es continua, concluimos que τ cumple la propiedad.

Si $\tau\prime$ es una topología en X que cumple la propiedad y $1_{(X,\tau\prime)} : (X, \tau\prime) \to (X, \tau\prime)$ es continua entonces $f_j 1_{(XX,\tau\prime)} = f_j$ es continua. Como τ por definición es la mínima que cumple esto, resulta que $\tau \subseteq \tau\prime$.

Por otro lado consideremos:

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & (X,\tau\prime) \arrow[d, "f_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

Como $\tau\prime$ cumple la condición entonces f es continua sii $f_j f = f_j$. Pero como τ es la topología inicial respecto a las $\{f_j\}$ entonces las f_j son continuas, por lo tanto f es continua y $\tau\prime \subseteq \tau$. Por lo tanto τ es la única con la propiedad ∎

Definición Funciones subespacio Sean X, Y espacios topológicos entonces una función $f : X \to Y$ se dice *inicial* si $\{f\}$ es una familia inicial. Además, se dice *subespacio* si f es inyectiva e inicial.

Ejemplo Sea $(A, \tau_A) \subseteq (X, \tau)$ y consideremos $i : A \hookrightarrow X$, entonces i es subespacio

Proposición 3.4 *Sea $f : X \to Y$ una función subespacio, si consideramos $f(X) \subseteq Y$ con la topología subespacio entonces $\widetilde{f} : X \to f(X)$ es un homeo.*

Demostración Como f es inyectiva entonces $\widetilde{f}$ es biyectiva, sea g la inversa y consideremos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dd, shift left, "\widetilde{f}"] & \\
& Y \\
f(X) \arrow[uu, shift left, "g"] \arrow[ur, bend right, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $f(X)$ es subespacio entonces $\widetilde{f}$ es continua sii $i\widetilde{f}$ es continua, pero $i\widetilde{f} = f$; por lo que $\widetilde{f}$ es continua.

Por otro lado, como f es inicial entonces g es continua sii fg es continua, pero $gf = i$ que es claramente continua; por lo que g es continua. ∎

Proposición 3.5

1. *Si $\{f_j : X \to X_j\}_{j \in J}$ es una familia inicial y para cada $j \in J$ se tiene que $\{g_{j,i} : X_j \to Y_{j,i}\}_{i \in I_j}$ es otra familia inicial, entonces $\{g_{j,i} f_j\}_{\substack{j \in J \\ i \in I_j}}$ es inicial.*

2. *Si $\{f_j : X \to X_j\}_{j \in J}$ y $\{g_{j,i} : X_j \to Y_{j,i}\}_{i \in I_j}$ son familias de funciones continuas y $\{g_{j,i} f_j : X \to Y_{j,i}\}_{\substack{j \in J \\ i \in I_j}}$ es inicial, entonces $\{f_j : X \to X_j\}_{j \in J}$ es inicial*

Demostración

i) Si $f : Z \to X$ es continua entonces como f_j y $g_{j,i}$ son iniciales y por ende continuas, se tiene que $g_{j,i} f_j f$ es continua.

Similarmente si $g_{j,i} f_j f$ es continua para todo $i \in I_j$, $j \in J$, entonces como $\{g_{i,j}\}_{\substack{i \in I_j \\ j \in J}}$ es inicial tenemos que $g_{j,i} f_j f$ es continua sii $f_j f$ es continua para todo $j \in J$. Además como $\{f_j\}_{j \in J}$ es inicial tenemos que $f_j f$ es continua para todo $j \in J$ sii f es continua. Concluimos que f es continua y por lo tanto $\{g_{j,i} f_j\}_{\substack{j \in J \\ i \in I_j}}$ es inicial.

ii) Si $f : Z \to X$ es tal que $f_j f$ es continua para todo $j \in J$, entonces $g_{j,i} f_j f$ es continua para todo $i \in I_j$, $j \in J$. Como $\{g_{j,i} f_j\}_{\substack{j \in J \\ i \in I_j}}$ es inicial esto sucede sii f es continua. Como además si f es continua entonces $f_j f$ es continua para todo $j \in J$ se tiene que $\{f_j\}_{j \in J}$ es inicial. ∎

Corolario 3.6 *Si X, Y, Z son espacios topológicos entonces $(X \times Y) \times Z \simeq X \times (Y \times Z) \simeq X \times Y \times Z$*

Demostración Notemos que:

- $\{p_X, p_Y\}$ es inicial para $X \times Y$
- $\{1_Z\}$ es inicial para Z
- $\{p_{X \times Y}, p_Z\}$ es inicial para $(X \times Y) \times Z$

Por 3.5 tenemos que $\{p_X p_{X \times Y}, p_Y p_{X \times Y}, 1_Z p_Z\} = \{p_X, p_Y, p_Z\}$ es inicial para $(X \times Y) \times Z$. Pero además esta misma familia es inicial para $X \times Y \times Z$, por la unicidad de la topología inicial tenemos que $\tau_{(X \times Y) \times Z} = \tau_{X \times Y \times Z}$ y por lo tanto $(X \times Y) \times Z \simeq X \times Y \times Z$. Análogamente con $X \times (Y \times Z)$. ∎

Proposición 3.7 *Si $Z \subseteq A$ es subespacio y $A \subseteq X$ es subespacio, entonces $Z \subseteq X$ es subespacio.*

Demostración Notemos $i_z : Z \hookrightarrow A$, $i_A : A \hookrightarrow X$ y $i : Z \hookrightarrow X$, entonces tenemos que $\{i_Z\}$ es inicial para Z y $\{i_A\}$ es inicial para A; por lo tanto por 3.5 $\{i_A i_Z\} = \{i\}$ es inicial para Z. Pero esto mismo es que $Z \subseteq X$ es subespacio. ∎

Ejemplo Si $A \subseteq X$ y $B \subset Y$ son subespacios, entonces $(A \times B, \tau_p) = (A \times B, \tau)$ donde τ es la topología subespacio respecto a $X \times Y$.

En efecto, sea $W = U \times V \in \tau_p$ entonces como A es subespacio $U = \tilde{U} \cap A$ donde $\tilde{U} \in \tau_X$, similarmente $V = \tilde{V} \cap B$ con $\tilde{V} \in \tau_Y$. Por lo tanto $W = U \times V = \left(\tilde{U} \times \tilde{V}\right) \cap (A \times B) \in \tau$. Por lo tanto $\tau = \tau_p$. ∎

De otra manera, sabemos que $\{p_A : A \times B \to A, p_B : A \times B \to B\}$ es inicial para $A \times B$ y además que $\{i_A : A \to X\}$ es inicial para A y $\{i_B : B \to X\}$ es inicial para B. Por 3.5 tenemos que $\{i_A p_A, i_B p_B\}$ es inicial para $A \times B$. Finalmente como $\{i_X : X \to X \times Y\}$ es inicial para X y $\{i_Y : Y \to X \times Y\}$ es inicial para Y tenemos por 3.5 que $\{i_{A\times B} : A \times B \to X \times Y\}$ es inicial. ∎

3.3. Topologías finales

Teorema 3.8 *Sea X un espacio topológico, $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos y $f_j : X_j \to X$ funciones de conjuntos, entonces son equivalentes:*

1. *La topología de X es la más fina que hace a las f_j continuas*
2. *$U \subset X$ es abierto sii $f_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ es abierto para todo $j \in J$*
3. *$F \subset X$ es cerrado sii $f_j^{-1}(F) \subseteq X_j$ es cerrado para todo $j \in J$*
4. *Dado un espacio topológico Y y una función $f : X \to Y$ entonces f es continua sii $f f_j : X_j \to Y$ es continua para todo $j \in J$.*

En ese caso decimos que X tiene la topología final respecto a la familia $\{f_j\}_{j\in J}$ y que dicha familia es final para X.

Demostración Sea $\tau = \left\{U \subset X \ / \ f_j^{-1}(U) \subseteq X_j\right\}$ notemos que es una topología.

ii) $\iff$ i) Sea τ' una topología en X que hace a todas las f_j continuas; esto pasa si y sólo si para todo $U \in \tau'$ vale que $f_j^{-1}(U)$ es abierto, si y sólo si para todo $U \in \tau'$ se tiene que $U \in \tau$; si y sólo si $\tau \subseteq \tau'$.

ii) $\iff$ iii) Es trivial

ii) $\implies$ iv) Sea $f : X \to Y$ es tal que $f f_j$ es continua para todo $j \in J$ y $U \subseteq Y$ abierto, entonces $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto si y sólo si $f_j^{-1}(f^{-1}(U))$ es abierto para todo $j \in J$ por hipótesis. No obstante, $f_j^{-1}(f^{-1}(U)) = (f f_j)^{-1}(U)$ es abierto pues $f f_j$ es continua para todo $j \in J$; concluimos que f es continua.

iv) $\implies$ ii) Sea τ' la topología en X que cumple iv) y veamos que $\tau' = \tau$. Por un lado si consideramos:

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau') \arrow[r, "1_{(X,\tau')}"] & (X,\tau') \\
X_j \arrow[u, "f_j"] \arrow[ur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Como τ' cumple iv) y $1_{(X,\tau')}$ es continua, entonces $1_{(X,\tau')} f_j = f_j$ es continua para todo $j \in J$; como τ es la topología más chica que hace a las f_j continuas entonces $\tau \subseteq \tau'$.

Por otro lado si consideramos:

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau') \arrow[r, "f"] & (X,\tau) \\
X_j \arrow[u, "f_j"] \arrow[ur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Como τ' cumple iv) tenemos que f es continua si y sólo si $ff_j = f_j : X_j \to X$ es continua, como todas las f_j son continuas para τ tenemos que f es continua, resulta que $\tau' \subseteq \tau$. ∎

Ejemplo Si $F_1, F_2 \subseteq X$ son cerrados de X tal que $X = F_1 \cup F_2$ entonces X tiene la topología final respecto a las inclusiones $\{i_j : F_j \hookrightarrow X\}_{j\in\{1,2\}}$.

En efecto, por 2.14 sabemos que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f|_{F_1}, f|_{F_2}$ son continuas, si y sólo si $\{i_1, i_2\}$ es final para X

Definición Topología coproducto Dada una familia de espacios topológicos $\{X_j\}_{j\in J}$ el *espacio coproducto respecto a los* X_j es el que tiene como conjunto subyacente a la unión disjunta de los X_j y notaremos $X = \coprod\limits_{j\in J} X_j$ con la topología final respecto a las inclusiones $\{i_j : X_j \to X\}_{j\in J}$.

Teorema 3.9 *Dada una familia de espacios topológicos $\{X_j\}$ existe un único (salvo homeomorfismos) espacio X conjunto a funciones continuas $f_j : X_j \to X$ con la siguiente propiedad universal:*

- *Para todo espacio topológico Y y $g_j : X_j \to Y$ funciones continuas existe una única $f : X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Demostración Consideremos $X = \coprod\limits_{j\in J} X_j$, $f_j = i_j$ y τ la topología final respecto a las inclusiones, veamos que (X,τ) cumple la propiedad universal.

Para esto definamos:

$$f(x) = g_j(x) \ si \ x \in X_j$$

Notemos que f esta bien definida y cumple que $fi_j = g_j$ con lo que basta ver que es continua. Para esto notemos que como X tiene la topología final respecto a $\{i_j\}_{j\in J}$ por 3.8 f es continua si y sólo si fi_j es continua, pero $fi_j = g_j$; por lo tanto X cumple la propiedad universal.

Para ver unicidad supongamos que X' junto con f'_j es otro espacio topológico que cumple la propiedad universal. Como X cumple la propiedad entonces existe $f : X \to X'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr, "f'_j"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & X'
\end{tikzcd}$$

Por otro lado como X' satisface la propiedad existe $g : X' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "f'_j"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
X' \arrow[r, dashed, "\exists! g"] & X
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que $gff_j = gf'_j = f_j$ con lo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr, bend left, "f_j"] & \\ X \arrow[r, "1_X"] \arrow[r, bend right, "gf"'] & X \end{tikzcd}$$

Por unicidad de la función $h : X \to X$ tal que $hf_j = f_j$ se tiene que $gf = 1_X$. Análogamente se tiene que $fg = 1'_X$ por lo que $X \simeq X'$ ∎

3.4. Topología cociente

Definición Topología cociente Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X, denotamos $[x] = \overline{x}$ a la clase de equivalencia de x, $X/\sim$ al conjunto de clases de equivalencia y $q : X \to X/\sim$ a la función cociente. Definimos la *topología cociente en* $X/\sim$ a la topología final respecto a la familia $\{q\}$ y vamos a notarlo $(X/\sim, \tau_q)$

Observación Sea $A \subseteq X$ un subconjunto y sea $\sim_A$ dada por $x \sim_A y$ si y sólo si $x, y \in A$, entonces al espacio $X/\sim_A$ lo vamos a notar X/A

Ejemplo Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $X/A = \{[0], [1]\}$. Notemos que $q^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ que no es abierto por lo que $\{[0]\} \notin \tau_q$, similarmente $q^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \in \tau_X$, por lo tanto $X/A \simeq \mathfrak{S}$; donde el homeomorfismo es:

$$f = \begin{cases} 0 & si\ x = [1] \\ 1 & si\ x = [0] \end{cases}$$

Definición Una función $f : X \to Y$ se dice *cociente* si es final y sobreyectiva.

Observación $q : X \to X/\sim$ es cociente

Proposición 3.10 *Si $f : X \to Y$ es cociente, entonces $Y \simeq X/\sim_f$ donde $x \sim_f x' \iff f(x) = f(x')$*

Demostración Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dd, bend left, "g"] & \\ & X \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "q"] \\ X/\sim_f \arrow[uu, bend left, "h"] & \end{tikzcd}$$

Siendo $g : Y \to X/\sim_f$ dado por $g(y) = [x]$ donde $x \in f^{-1}(y)$ y $h : X/\sim_f$ dada por $h([x]) = f(x)$.

Notemos que g esta bien definida pues $x \sim_f x'$ si y sólo si $f(x) = f(x')$, por lo tanto dado $y \in Y$ como f es sobreyectiva existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y si existe $x' \sim_f x$ entonces $g([x]) = y = g([x'])$. Además como f es final resulta que g es continua si y sólo si gf es continua, pero $gf = q$ por lo que g es continua.

Por otro lado h claramente esta bien definida y como q es final tenemos que h es continua si y sólo si hq es continua, pero $hq = f$ por lo que h es continua.

Finalmente $hg(y) \underbrace{=}_{x \in f^{-1}(y)} h([x]) = f(x) = y$ y $gh([x]) = gf(x) = [x]$ por lo que $Y \simeq X/\sim_f$ ∎

Proposición 3.11 *Sea $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva, si resulta que f es abierta o cerrada; entonces f resulta cociente.*

Demostración Dado que f es continua y sobreyectiva basta ver que f es final, para esto supongamos que f es abierta. Si $U \subseteq Y$ es abierto entonces $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto pues f es continua. Por el otro lado sea $U \subseteq Y$ subespacio tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, como f es sobreyectiva y abierta resulta que $f(f^{-1}(U)) = U$ es abierto; concluimos que f es final. $\blacksquare$

Ejemplo Existe f cociente tal que no es ni abierta ni cerrada.

En efecto, sea $X = (\{0,1,2\}, \{\{0\}, \{0,1\}, X, \emptyset\})$ e $Y = X \big/ \{0,2\} = \{[0],[1]\}$ con la topología cociente. Entonces q es cociente pero $q^{-1}([0]) = \{0,2\} \notin \tau_X$ por lo que $\{[0]\} \notin \tau_q$, y además $q^{-1}(1) = \{1\} \notin \tau_X$ por lo que $\{[1]\} \notin \tau_q$; por lo tanto $Y = (\{[0],[1]\}, \tau_i)$ y q no es abierta pues $q(\{0\})$ no es abierto y q no es cerrada pues $q(\{2\}) = \{0\}$ no es cerrado.

Proposición 3.12 *Si $q : X \to Y$ es cociente y $f : X \to Z$ es uan función continua tal que $q(x) = q(x')$ implica que $f(x) = f(x')$ entonces existe una única $g : Y \to Z$ continua tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Demostración Sea $y \in Y$, como q es sobreyectiva sabemos que existe $x \in X$ tal que $q(x) = y$, definamos $g(y) = f(x)$. Entonces g esta bien definida pues si $x, x' \in q^{-1}(y)$ entonces $f(x) = f(x') = g(y)$. Claramente es la única que hace conmutar el diagrama y además como q es final sabemos que g es continua si y sólo si gq es continua, pero $gq = f$, por lo tanto g es continua y es la función buscada. $\blacksquare$

Proposición 3.13 *Sean X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia en X y $\sim'$ una relación de equivalencia en $X/_\sim$ Entonces el espacio $(X/_\sim)/_{\sim'}$ es homeomorfo a $X/_{\sim''}$, donde $x \sim''$ y si y sólo si $q(x) \sim' q(y)$, con $q : X \to X/_\sim$ la proyección al cociente.*

Demostración Sea $q : X \to X/\sim$, $q_1 : X \to X/\sim'$ y $q_2 : X \to X/\sim''$. Consideremos $q : X \to X/\sim$ y veamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q_2"'] & X/\sim \arrow[d, "q_1"'] \\ X/\sim'' \arrow[r, dashed, "\widetilde{q}"] & X/\sim/\sim' \end{tikzcd}$$

Notemos que $q_1 \circ q : X \to X/\sim/\sim'$ es continua y que si $x \sim'' y$ entonces $q(x) \sim' q(y)$ y entonces $q_1 \circ q(x) = q_1 \circ q(y)$. Por ende por la PU del cociente el diagrama de arriba conmuta. Es claro que $\widetilde{q}$ es continua y sobreyectiva e inyectiva (estoúltimo por la cuenta de arriba), nos bastaría ver que es abierta. Sea $U_2 \subset X/\sim''$ abierto, entonces $q_2^{-1}(U_2) = U$ es abierto. Entonces $\widetilde{q}(U_2)$ es abierto sii $q_1^{-1}(\widetilde{q}(U_2))$ es abierto sii $q^{-1}(q_1^{-1}(\widetilde{q}(U))) = q_1^{-1}(U_2) = U$ es abierto. Por ende $\widetilde{q}$ es abierta y entonces $\widetilde{q}$ es homeo. $\blacksquare$

Corolario 3.14 *Valen los siguientes homeomorfismos:*

1. *El toro T cumple que $T \simeq \mathbb{S}^1 \times I/_{[(z,0)\sim(z,1)]}$*
2. *La botella de Klein K cumple que $K \simeq \mathbb{S}^1 \times I/_{[(z,0)\sim(\bar{z},1)]}$.*

Proposición 3.15 *Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos, y $f_n : X_n \to X_{n-1}$ funciones continuas. Consideramos $X = \{(x_n) \in \prod X_n : f_n(x_n) = x_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, y $p_n : X \to X_n$ las funciones definidas por $p_n((x_k)) = x_n$. Le damos a X la topología inicial inducida por $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. X es el límite inverso o límite proyectivo de $\{X_n\}$, y se denota $X = \varprojlim X_n$. Entonces el límite proyectivo cumple la siguiente propiedad universal:*

1. *Dados Y espacio topológico y $g_n : Y \to X_n$ familia de funciones continuas tal que $f_n g_n = g_{n-1}$, existe una única $g : Y \to X$ función continua tal que $p_n g = g_n$.*

Demostración Dados Y y $\{g_n\}$ tal que el siguiente diagrama conmuta $\forall n$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g_n"] \arrow[dr, "g_{n-1}"'] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\ & X_{n-1} \end{tikzcd}$$

Debemos hallar una $g : Y \to X$ continua tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g_n"'] & X \arrow[d, "p_n"] \\ & X_n \end{tikzcd}$$

Definamos $g : Y \to X$ dado por $y \mapsto (g_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$. Y veamos que cumple la propiedad universal:

- g esta bien definida

  Sea $y \in Y$ entonces como $f_n(g(y)_n) = f_n(g_n(y)) = g_{n-1}(y) = g(y)_{n-1}$ se sigue que $g(y) \in X$

- g cumple el diagrama conmutativo de arriba

  Trivial por construcción, pues $p_n(g(y)) = p_n((g_k(y))_k) = g_n(y)$

- g es continua

  Como las $\{p_n\}$ son familia inicial, entonces g es continua sii $p_n g = g_n$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$, pero esto vale por hipótesis. Por ende g es continua.

- Unicidad

  Sea $h : Y \to X$ otra función que hace conmutar el diagrama, entonces $p_n(g) = g_n = p_n(h)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y por ende $p_n(g - h) = 0$ $\forall n$ y como las p_n son iniciales entonces $g = h$. ∎

Corolario 3.16 *Sea $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección a las primeras $n-1$ coordenadas, entonces $\varprojlim \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^\omega$.*

Demostración Veamos que $\mathbb{R}^\omega$ cumple la propiedad universal. Sean Y y $g_n : Y \to \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g_n"] \arrow[dr, "g_{n-1}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f_n"] \\ & \mathbb{R}^{n-1} \end{tikzcd}$$

Y sea $g : Y \to \mathbb{R}^\omega$ dada por $y \mapsto ((g_n(y))_n)_{n \in \mathbb{N}}$ O sea en el lugar n-ésimo tenemos a la coordenada n-ésima de g_n. Entonces g cumple y por ende $\mathbb{R}^\omega \simeq \varprojlim \mathbb{R}^n$ ∎

4. Producto fibrado

Definición Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ funciones continuas, entonces el *producto fibrado o pullback* del diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

es un espacio topológico P junto con funciones continuas $\tilde{g} : P \to X$ y $\tilde{f} : P \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Y cumpla la siguiente propiedad universal:

- Si W es un espacio topológico junto con funciones continuas $s : W \to X$ y $t : W \to Y$ tal que $fs = gt$, entonces existe una única $h : W \to P$ continua tal que el siguiente diadrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & \\ & P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Ejemplo Sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "1_x"'] \\ Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd} \tag{2}$$

entonces el pullback de 2 resulta Y junto con $\tilde{g} = g$ y $\tilde{f} = 1_Y$. En efecto, el trío $(Y, 1_Y, g)$ hace conmutar el diagrama 2, por otro lado sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed, "\exists! t"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & \\ & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & X \arrow[d, "1_X"'] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Entonces sea $h : W \to Y$ dado por $h(w) = t(w)$, entonces $1_Y t = t$ y $gt = 1_X s = s$, por lo tanto Y cumple la propiedad universal y resulta el pullback buscado.

Teorema 4.1 *Dado un diagrama de espacios topológicos y funciones continuas:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Existe un producto fibrado $(P, \tilde{f}, \tilde{g})$. Además si $(P', \tilde{f}', \tilde{g}')$ es otro producto fibrado, existe $h : P' \to P$ homeomorfismo tal que $\tilde{g}h = \tilde{g}'$ y $\tilde{f}h = \tilde{f}'$

Demostración Sea $P = \{(x,y) \in X \times Y \ / \ f(x) = g(y)\}$ visto como subespacio de $X \times Y$ y sean $\tilde{f} = p_Y|_P$, $\tilde{g} = p_X|_P$. Notemos que $\tilde{f}, \tilde{g}$ son continuas pues P es subespacio y 2.4.

Notemos además que $f\tilde{g}(x,y) = f(x) = g(y) = g\tilde{f}(x,y)$ por lo que hacen conmutar el diagrama.

Sea ahora (W, s, t) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[dr, dashed, "(s,t)"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & \\
& P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Si $h : W \to P$ es tal que $h_2(w) = \tilde{f}h(w) = t(w)$ y $h_1(w) = \tilde{g}h(w) = s(w)$, por lo que $h = (s, w)$ hace conmutar el diagrama.

Sea ahora $w \in W$, entonces $(x,y) = h(w) = (s(w), t(w))$ por lo tanto $f(x) = f(s(w)) = g(t(w)) = g(y)$; de aquí se deduce que $h(W) \subseteq P$ y h está bien definida.

Para ver que h es continua por 3.5 como $\{i : P \to X \times Y\}$ es inicial y $\{p_X : X \times Y \to X, p_Y : X \times Y \to Y\}$ es inicial, obtenemos que $\{p_X i, p_Y i\} = \left\{\tilde{f}, \tilde{g}\right\}$ es inicial. Por lo tanto, h es continua si y sólo si $\tilde{g}h = s$ y $\tilde{f}h = t$ son continuas; de esto se concluye que $(P, \tilde{f}, \tilde{g})$ es el producto fibrado buscado.

Supongamos que $(P', \tilde{g'}, \tilde{f'})$ sea otro producto fibrado que satisface la propiedad universal, entonces por la PU de P se tiene que existe una única $h : P' \to P$ tal que $\tilde{g}h = \tilde{g'}$ y $\tilde{f}h = \tilde{f'}$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[drr, bend left, "\tilde{g'}"] \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{f'}"'] & & \\
& P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Por otro lado por la PU de P' existe una única $k : P \to P'$ tal que $\tilde{g'}k = \tilde{g}$ y $\tilde{f'}k = \tilde{f}$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[drr, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[dr, dashed, "\exists! k"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{f}"'] & & \\
& P' \arrow[r, "\tilde{g'}"] \arrow[d, "\tilde{f'}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Finalmente entonces por la PU de P al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[drr, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[dr, dashed, bend left, "1_P"] \arrow[dr, dashed, bend right, "hk"'] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{f}"'] & & \\
& P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Sabemos por un lado que 1_P cumple que $\tilde{f}1_P = \tilde{f}$ y que $\tilde{g}1_P = \tilde{g}$; pero por el otro lado $\tilde{f}hk = \tilde{f'}k = \tilde{f}$ y $\tilde{g}hk = \tilde{g'}k = \tilde{g}$, por lo tanto $hk = 1_P$ por la unicidad de la función. Análogamente $kh = 1_{P'}$ y concluímos que $P \simeq P'$. ∎

Ejemplo El pullback del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "f"'] \\
Y \arrow[r, "g"] & *
\end{tikzcd}$$

es $(X \times Y, p_X p_Y)$ por 4.1.

Observación Si $f : X \to Z$ es inyectiva, entonces $\tilde{f} : P \to Y$ es inyectiva.

Demostración En efecto, supongamos que $\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(x',y')$, entonces por la definición en 4.1 de $\tilde{f}$ se tiene que $y = \tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(x',y') = y'$

Por otro lado, como $(x,y) \in P$ se tiene que $f(x) = g(y) = g(y') = f)(x')$ y como f es inyectiva tenemos que $x = x'$. ∎

Definición Decimos que una clase de funciones continuas $\mathcal{A}$ es *estable por cambio de base* si cada vez que se tiene un pullback:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

donde $f \in \mathcal{A}$ vale que $\tilde{f} \in \mathcal{A}$.

Observación Acabamos de ver que las funciones inyectivas son estables por cambio de base.

Proposición 4.2 *Los homeomorfismos son estables por cambio de base*

Demostración Sea un pullback:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

donde f es homeomorfismo. Como $ff^{-1}g = g$ por la PU de P sabemos que existe una única $h : Y \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "f^{-1}g"] \arrow[ddr, bend right, "1_Y"'] & & \\
 & P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
 & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Por lo que se obtiene que $\tilde{f}h = 1_Y$. Por otro lado por la PU de P existe una única $r : P \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, bend left, "1_P"] \arrow[dr, dashed, bend right, "h\tilde{f}"'] \arrow[drr, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{f}"'] & & \\
 & P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
 & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Como $r = 1_P$ cumple y por $\tilde{f}h\tilde{f} = 1_Y\tilde{f} = \tilde{f}$ y $\tilde{g}h\tilde{f} = f^{-1}g\tilde{f} = f^{-1}f\tilde{g} = \tilde{g}$ también $r = h\tilde{f}$ cumple, se sigue que $h\tilde{f} = 1_P$; concluímos que $\tilde{f}$ es homeomorfismo ∎

Ejemplo Las funciones cerradas no son estables por cambio de base.

En efecto, si consideramos $X = Y = \mathbb{R}$, $Z = *$ entonces por 4 sabemos que el pullback resulta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & * \end{tikzcd}$$

y trivialmente f es cerrada. No obstante, si consideramos $F^P = \{(x, y) \ / \ xy = 1\}$ entonces $\tilde{f}(F^P) = \mathbb{R}_{>0}$ que no es cerrado.

Proposición 4.3 *Sea $A \subseteq X$ subespacio y $f : Y \to X$ continua, entonces el siguiente es un pullback:*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(A) \arrow[r, "f|_{f^{-1}(A)}"] \arrow[d, hook, "i_{f^{-1}(A)}"'] & A \arrow[d, hook, "i_A"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \tag{4}$$

Demostración Vamos que cumple la propiedad universal, sea (W, s, t) tal que $i_As = ft$, entonces si $h : W \to f^{-1}(A)$ es tal que $i_{f^{-1}(A)}h = t$ entonces nesariamente debemos definir $h(w) = t(w)$.

Sea $w \in W$, entonces $f(t(w)) = i_A(s(W)) = s(w) \in A$ por lo que $h(w) = t(w) \in f^{-1}(A)$ y concluimos que h está bien definida. demás por la misma cuenta es claro que es la única que hace conmutar el diagrama; basta ver que es continua pero esto es claro pues $h = t$ que ya era continua. Por lo tanto concluímos que 4 era un pullback. ∎

Corolario 4.4 *Las funciones subespacio son estables por cambio de base*

Proposición 4.5 *Dado un diagrama conmutativo de funciones continuas:*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_3"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & X \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "2"] & R \arrow[d, "f_1"] \\ Y \arrow[r, "h_2"] & Z \arrow[r, "h_1"] & T \end{tikzcd}$$

Entonces valen:

1. *Si 1, 2 son pullback, entonces el diagrama entero es pullback.*
2. *Si 2 y el diagrama entero es pullback, entonces 1 es pullback.*

Demostración 1. Para ordenarnos, sabemos que (X, f_2, g_1) es el pullback de 2, por lo tanto si notamos $f_1 = f, h_1 = h$ sabemos que $f_2 = \tilde{f}, g_1 = \tilde{h}$.

Asimismo como (W, f_3, g_2) es pullback de 1 entonces sabemos que $f_3 = \tilde{\tilde{f}}, h_2 = g, g_2 = \tilde{g}$ donde notamos h_2 como g. Finalmente vamos a notar a $X = Z \times_T R$ y entonces a $W = Y \times_Z (Z \times_T R)$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{tikzcd} Y \times_Z (Z \times_T R) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{f}}"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & Z \times_T R \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dr, phantom, "2"] & R \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & T \end{tikzcd} \tag{5}$$

Y lo que queremos ver es que $Y \times_Z (Z \times_T R) = Y \times_T R$, para ver eso debemos ver que si tenemos un trío (P, s, t) en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[drrr, bend left, "s"] \arrow[dr, dashed, "\exists! r"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] \arrow[drr, phantom, "4"] \arrow[dd, phantom, "3"] & & & \\
& Y \times_Z (Z \times_T R) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{f}}"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & Z \times_T R \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & R \arrow[d, "f"'] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & T
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Entonces podemos encontrar una única $r : P \to Y \times_Z (Z \times_T R)$ tal que el diagrama conmute. Si $\tilde{\tilde{f}}r(p) = t(p)$ entonces como $\tilde{\tilde{f}}r(p) = \tilde{\tilde{f}}(r_1(p), r_2(p), r_3(p)) = r_1(p)$ se tiene que $r_1 = t$.

Similarmente si $\tilde{h}\tilde{g}r = s$ entonces como $\tilde{h}\tilde{g}r(p) = \tilde{h}\tilde{g}(r_1, r_2, r_3)(p) = r_3(p)$ se concluye que $r_3 = s$.

Finalmente como $\tilde{f}\tilde{g}r = gt$ concluímos que $r_2 = gt$. Definimos entonces $r : P \to Y \times_Z (Z \times_T R)$ como $r = (t, gt, s)$. Veamos que esta bien definida, que hace conmutar el diagrama, que es la única y que es continua, veámoslo por partes:

a) Sea $p \in P$, entonces $g(r_1(p)) = g(t(p)) \underbrace{=}_{1\ y\ 3} \tilde{f}(\tilde{g}(r(p))) = \tilde{f}((r_2(p), r_3(p))$, por lo tanto tenemos que $r(p) \in Y \times_Z (Z \times_T R)$.

b) Es claro por la construcción que r hace conmutar 3, 4, y 1, 2 ya conmutaban, por lo que 6 conmuta y además r es la única que hace esto.

c) De la demostración de 4.1 sabemos que $\left\{\tilde{\tilde{f}}, \tilde{g}\right\}$ es inicial y similarmente $\left\{\tilde{h}, \tilde{f}\right\}$ es inicial. Por 3.5 entonces $\left\{\tilde{\tilde{f}}, \tilde{f}\tilde{g}, \tilde{h}\tilde{g}\right\}$ es inicial para $Y \times_Z (Z \times_T R)$. Por lo tanto r es continua si y sólo si $\tilde{\tilde{f}}r, \tilde{f}\tilde{g}r, \tilde{h}\tilde{g}r$ son continuas, pero estan justamente son t, gt, s que son continuas por hipótesis. Por lo tanto r es continua.

Entonces dado (P, s, t) un trío que hacía conmutar a 6 construímos una $r : P \to Y \times_Z (Z \times_T R)$ única y continua tal que todo conmuta, entonces $Y \times_Z (Z \times_T R)$ cumple la propiedad universal del pullback y concluímos que $Y \times_Z (Z \times_T R) \simeq Y \times_T R$ ∎

2. Siguiendo la notación anterior tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y \times_T R \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & Z \times_T R \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & R \arrow[d, "f"'] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & T
\end{tikzcd} \tag{7}$$

Donde b (que no notaremos $\tilde{\tilde{f}}$ para no confundirnos con que es el pullback de $\tilde{f}$) cumple que $hgb = f\tilde{h}a$, y a cumple eso mismo y no notaremos $\tilde{g}$ para no confundirnos con lo que queremos probar. Con esto queremos ver que $Y \times_T R \simeq Y \times_Z (Z \times_T R)$.

Sea entonces (P, s, t) un trío tal que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "\exists! r"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & & \\
& Y \times_T R \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] \arrow[u, phantom, "4"] \arrow[dr, phantom, "1"] \arrow[l, phantom, "3"] & Z \times_T R \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & R \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & T
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Y queremos ver que existe una única $r : P \to Y \times_T R$ continua tal que $br = t$, que $ar = s$ y que 8 conmute.

Para ello, sea $p \in P$ entonces $br(p) = r_1(p)$ por lo que definimos $r_1 = t$. Por el otro lado como 1+2 es pullback si consideramos $r_2 = \tilde{h}ar = \tilde{h}s = s_2$. Por lo tanto definimos $r : P \to Y \times_T R$ como $r = (t, s_2)$ y veamos todos los items anteriores:

a) Sea $p \in P$, entonces $g(r_1(p)) = gt(p) = \tilde{f}s(p) = s_1$ y no me sale conciliar que $\tilde{f}$ recibe dos coordenadas...

5. Conexión y arcoconexión

Definición Un espacio topol"ogico X se dice *disconexo* si existen U, V abiertos disjuntos no vacíos tal que $X = U \cup V$, en este caso $\{U, V\}$ se dice una desconexión de X. Un espacio topológico X se dice *conexo* si no es disconexo.

Proposición 5.1 *Si X es conexo y $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces Y es conexo.*

Demostración En efecto, sea U, V una disconexión de Y, entonces $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ es una disconexión de X pues f es homeo; por lo tanto $U = f(f^{-1}(U)) = f(\emptyset) = \emptyset$, concluimos que Y es conexo. ∎

Proposición 5.2 *Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo entonces $f(X)$ es conexo*

Demostración Consideremos $\tilde{f} : X \to f(X)$ que es continua pues $i : f(X) \to Y$ es inicial y $i\tilde{f} = f$ que es continua. Si $\{U, V\}$ es una disconexión de $f(X)$ entonces $\left\{\tilde{f}^{-1}(U), \tilde{f}^{-1}(V)\right\}$ cumplen que son abiertos pues $\tilde{f}$ es continua y son no vacíos pues $\tilde{f}$ es sobreyectiva; por lo tanto alguno es vacío y entonces $f(X)$ es conexo. ∎

Observación X es conexo sii los únicos subespacios abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.

Con esta observación ya podemos contruir varios ejemplos de espacios conexos.

Ejemplo

- $\emptyset$ es conexo
- Si X es indiscreto entonces es conexo
- Si X es discreto entonces es conexo si y sólo si $|X| = 1$
- $\mathfrak{S}$ es conexo
- $\mathbb{R}$ con la topología usual es conexo (Avanzado)

Observación Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio disconexo. No necesariamente existen $U, V \in \tau_X$ disjuntos tales que $A \subseteq U \cup V$ y $A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ (En espacios métricos si vale)

Consideremos $X = (\{0,1,2\}, \{\emptyset, X, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}\})$ y $A = \{1,2\}$, entonces $A = (A, \tau_d)$ y tiene m"as de un elemento por lo que es disconexo. No obstante, si $U, V \in \tau_X$ son abiertos entonces $x \in U \cap V$.

Proposición 5.3 *Sea X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ subespacios tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$; si A es conexo entonces B es conexo.*

Demostración Supongamos que $\{U, V\}$ es una disconexión de B, entonces por 3.7 sabemos que A es subespacio de B, luego $A \cap U = i^{-1}(U), A \cap V = i^{-1}(V)$ son abiertos de A, disjuntos y cubren A; por lo tanto alguno, supongamos sin pérdida de generalidad $A \cap V$, es vacío por lo que $A \subseteq U$. Como U es cerrado en B tenemos que existe $F \subseteq X$ cerrado tal que $U = F \cap B \subseteq F$, por lo tanto $B \subseteq \overline{A} \subseteq F$ y se obtiene que $B = B \cap F = U$; concluímos que $V = \emptyset$. ∎

Definición Un espacio topológico X se dice *totalmente disconexo* si para todos $x \neq y \in X$ existe una desconexión $\{U, V\}$ de X tal que $x \in U, y \in V$

Ejemplo Si X es discreto, entonces es totalmente disconexo pero la vuelta no vale. Por ejemplo, Q no es discreto pero es totalmente disconexo.

Corolario 5.4 —
Si X es conexo, Y totalmente disconexo y $f : X \to Y$ es continua, entonces f es constante.

Demostración Si f no es constante existen $y \neq y' \in f(X)$, como Y es totalmente disconexo existe una desconexión $\{U, V\}$ tal que $y \in U, y' \in V$. Entonces $\left\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\right\}$ es una desconexión de X. ∎

Proposición 5.5 *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de subespacios de un espacio topológico X. Si X_j resulta conexo para todo $j \in J$ y además $\bigcap\limits_{j\in J} X_j \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{j\in J} Xj \subseteq X$ es conexo.*

Demostración Sea $x_0 \in \bigcap\limits_{j\in J} X$ y sea $\{U, V\}$ una desconexión de $\bigcup\limits_{j\in J} X_j$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 \in U$. Como X_j es subespacio de $\bigcup\limits_{j\in J} X_j$ entonces $U \cap X_j, V \cap X_j$ son una desconexión de X_j. Como X_j es conexo tenemos que $V \cap X_j = \emptyset$ pues $x_0 \in U \cap X_j$; por lo tanto $V = \bigcup\limits_{j\in J} V \cap X_j = \emptyset$ y entonces $\bigcup\limits_{j\in J} X_j$ es conexo. ∎

Definición Un espacio topológico X se dice *arcoconexo* si para todos $x, x' \in X$ se tiene que existe $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma 0 = x, \gamma(1) = x'$. A γ lo llamaremos un *camino o arco de* x *a* x' y lo notaremos $x \xrightarrow{\gamma} x'$.

Proposición 5.6 *Si X es arcoconexo entonces es conexo*

Demostración Sea $x_0 \in X$, entonces para todo $x \in X$ existe $x_0 \xrightarrow{\gamma_x} x$. Como I es conexo se tiene que $\gamma_x(I)$ es conexo para todo $x \in X$, como $x_0 \in \bigcap\limits_{x\in X} \gamma_x(I)$ entonces por 5.5 se tiene que $X = \bigcup\limits_{x\in X} \gamma_x(I)$ es conexo ∎

Ejemplo El peine

En $I \times I$ consideramos el subespacio $P = (I \times \{0\}) \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times I\right) \right) \cup \{(0, 1)\}$, entonces afirmo que P es conexo pero no arcoconexo.

En efecto, si consideramos $A = (I \times \{0\}) \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times I\right) \right)$ entonces A es arcoconexo y por 5.6 conexo, además se tiene que $\overline{A} = A \cup (I \times \{0\})$ por lo que $A \subset P \subset \overline{A}$ con A conexo, por 5.3 tenemos que P es conexo.

Sin embargo, sea $p = (0, 1) \neq x \in P$ y supongamos que $x_0 \xrightarrow{\gamma} x$. Sea $V = \gamma^{-1}(p) \subseteq I$ que es cerrado por continuidad de γ y no vacío, veamos que V es abierto y entonces $V = I$ por la conexión de I.

Para eso sea $t_0 \in V$, por la continuidad de γ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|t - t_0\| < \delta$ entonces $\|\gamma(t) - p\| < \frac{1}{2}$ y por lo tanto si $\|t - t_0\| < \delta$ se tiene que $\gamma(t)$ no toca el eje-x. Llamemos $J = I \cap \{t \in I \ / \ \|t - t_0\| < \delta\}$ que es conexo y sea $f : J \to \mathbb{R}$ dado por $f(t) = p_X\gamma$, como $f(J) \subseteq \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$ que es totalmente disconexo, por 5.4 entonces $f = cte$ y como $f(t_0) = 0$ tenemos que $f(J) = 0$. Por lo tanto $J \subset V$ y V es abierto, concluímos que el único camino continuo desde $p \in P$ es el constante y por lo tanto P no es arco conexo ∎

Definición Sea X un espacio topológico arbitrario y se define $\sim$ en X dado por $x \sim y$ si y sólo si existe un subespacio conexo C tal que $x, y \in C$.

Observación Esta relación es de equivalencia

Definición A las clases de equivalencia de $\sim$ se llaman *componentes conexas* y decimos que la clase de un $x \in X$ es la *componente conexa de x.*

Observación Las componentes conexas son conexas, es más, es el subespacio conexo más grande que contiene a x.

En efecto, sea $y \in C_x$ donde $C_x = [x]$, $x \in X$, entonces como $y \sim x$ se tiene que $x, y \in C_y$ por lo que $C_x \subseteq \bigcup_{y\sim x} C_y$y $x \in \bigcap_{y\sim x} C_y$, entonces por 5.5 tenemos que C_x es conexo. Trivialmente se da la segunda condición. ∎

Proposición 5.7 *Dado un espacio topológico X se define la relación $x \sim y$ si y sólo si existe $x \xrightarrow{\gamma} y$ y esta relación es de equivalencia*

Demostración En efecto, es reflexiva pues $x \xrightarrow{C_x} x$ y es simétrica pues si $x \xrightarrow{\gamma} y$ entonces definiendo $\overline{\gamma} := \gamma(1-t)$ tenemos que $y \xrightarrow{\overline{\gamma}} x$.

Para la transitividad si $x \xrightarrow{\gamma} y$ y $y \xrightarrow{\beta} z$ entonces definimos

$$\gamma * \beta = \begin{cases} \gamma(2t) & si\ t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & si\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como $\gamma * \beta|_{[0,\frac{1}{2}]}$ y $\gamma * \beta|_{[\frac{1}{2},1]}$ son continuas entonces por 2.14 tenemos que $\gamma * \beta$ es continua y $x \xrightarrow{\gamma*\beta} z$. ∎

Definición A las clases de equivalencia dadas por la relación anterior las llamaremos *componentes arcoconexas de* x y las notaremos A_x; a ${}^{X}/_{\sim} = \Pi_0(X)$

Observación Se observa que si $f : X \to Y$ y $y \in C_x$ entonces $f(y) \in C_{f(x)} = f(C_x)$. Similarmente si $y \in A_x$ entonces $f(y) \in A_{f(x)}$.

Definición Un espacio topológico se dice *localmente conexo (resp arcoconexo)*si para todo $x \in X$ y para todo entorno $U \ni x$ existe un abierto V conexo (resp arcoconexo) tal que $x \in V \subseteq U$

Ejemplo Sea $P' = P \cup (\{0\} \times I)$ entonces P' es arcoconexo (fácil) pero no localmente conexo.

En efecto, sea $p = (0, 1)$ y $V \ni x$ un entorno que no toque al eje x como el construido en el ejemplo del peine anterior, probemos que no existe un abierto conexo U tal que $p \in U \subseteq V$.

Sea U un abierto con esa propiedad entonces por construcción existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ se tiene que $(\frac{1}{n}, 1) \in U$. Sea entonces $\frac{1}{m+2} < x < \frac{1}{m+1}$ y consideremos $V = (\mathbb{R}_{<x} \times \mathbb{R}) \cap U$ y $H = (\mathbb{R}_{<x} \times \mathbb{R}) \cap U$. Es claro que son abiertos del subespacio U, no vacíos y como $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap U = \emptyset$ tenemos que $U = V \cup H$ por lo que U no es conexo ∎

Ejemplo Si consideramos $X = (\{0, 1\}, \tau_d)$ entonces es localmente arcoconexo pero no es conexo.

6. Los primeros tres axiomas de separación

Definición Un espacio topológico X se dice T_0 si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe U abierto tal que $x \in U \not\ni y$.

Se dice T_1 si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen U, V abiertos tal que $x \in U \not\ni y$ y $y \in V \not\ni x$

Finalmente se dice T_2 o *Haussdorff* si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen U, V abiertos disjuntos tal que $x \in U$ y $y \in V$.

Observación Tivialmente se da que $T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$.

Ejemplo
- Si consideramos X indiscreto con más de un punto entonces no es T_0
- Si consideramos $\mathfrak{S}$ entonces es T_0 pero no es T_1
- Si X es infinito entonces X con la topología del complemento finito es T_1 pero no es T_2.

  En efecto, si $x \neq y \in X$ entonces $y \in \{x\}^c \not\ni x$ y $x \in \{y\}^c \not\ni y$. Pero si U, V son abiertos disjuntos entonces $V \subseteq U^c$ y por lo tanto V^c es infinito; se concluye que $V = \emptyset$ porque era abierto.
- Si (X, τ_m) es un espacio métrico entonces es T_2

Proposición 6.1 *Subespacio y productos de T_0 son T_0*

Demostración Sean $x \neq y \in U \subseteq X$ puntos distintos de un subespacio, entonces como X es T_0 sabemos que existe $V \subseteq X$ abierto tal que $x \in V \not\ni y$. Por lo tanto si consideramos $V' = V \cap U$ es un abierto de U que cumple que $x \in V' \not\ni y$; se concluye que U es T_0.

Sean ahora $x \neq y \in \prod_{j \in J} X_j$ por lo que existe j_0 tal que $x_{j_0} \neq y_{j_0} \in X_{j_0}$; como X_{j_0} es T_0 sabemos que existe $U_{j_0} \subseteq X_{j_0}$ tal que $x_{j_0} \in U_{j_0} \not\ni y_{j_0}$. Si tomamos $U = p_{j_0}^{-1}(U_{j_0})$ entonces es un abierto que cumple $x \in U \not\ni y$, por lo que $\prod_{j \in J} X_j$ es T_0. $\blacksquare$

Teorema 6.2 *Un espacio topológico es T_0 si y sólo si existe $f : X \to \prod \mathfrak{S}$ subespacio.*

Demostración Para un lado es simplemente notar que $\mathfrak{S}$ es T_0 y aplicamos 6.1.

Para el otro consideremos $f : X \to \prod_{U \in \tau} \mathfrak{S}$ dado por:

$$f(x)_U = \begin{cases} 0 & si\ x \in U \\ 1 & si\ x \notin U \end{cases}$$

Notemos que $P_U f = 1_{U^c}$ que ya vimos que es continua para todo $U \in \tau$ en la demostración de 2.4, por lo tanto como $\{P_U\}_{U \in \tau}$ es inicial para $\prod_{U \in \tau} \mathfrak{S}$ se tiene que f es continua.

Para ver que f es inicial basta ver que $\{P_u f\}_{U \in \tau} = \{1_{U^c}\}_{U \in \tau}$ es inicial por 3.5, pero esto es claro por definición.

Finalmente si $x \neq y$ entonces como X es T_0 entonces existe $x \in U \not\ni y$ abierto que separa, entonces $f(x)_U \neq f(x)_U$ por lo que $f(x) \neq f(y)$.

Por lo tanto f es continua, inyectiva e inicial; o sea subespacio $\blacksquare$.

Proposición 6.3 *Sea X un espacio topológico, entonces es T_1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$*

Demostración Para un lado, si dados $x, y \in X$ se tiene que $\{x\}, \{y\}$ son cerrados entonces $x \in \{y\}^c \not\ni y$ y $y \in \{x\}^c \not\ni x$; por lo tanto X es T_1

Para el otro lado, sea $x \in X$, si $y \in \{x\}^c$ como X es T_1 existe $U \ni y$ tal que $U \subseteq \{x\}^c$, por lo tanto $\{x\}^c$ es abierto $\blacksquare$.

Proposición 6.4 *Subespacio y productos de T_1 son T_1*

Demostración Sea $x \neq y \in U \subseteq X$ puntos distintos de un subespacio, entonces como X es T_1 sabemos que existen $V, W \subseteq X$ abiertos tal que $x \in V \not\ni y$ y $y \in W \not\ni x$. Por lo tanto si consideramos $V' = V \cap U$ y $W' = W \cap U$ son abiertos de U que cumplen que $x \in V' \not\ni y$ y $y \in W' \not\ni x$; se concluye que U es T_1.

Sean ahora $x \neq y \in \prod_{j \in J} X_j$ por lo que existe j_0 tal que $x_{j_0} \neq y_{j_0} \in X_{j_0}$; como X_{j_0} es T_1 sabemos que existen $U_{j_0}, V_{j_0} \subseteq X_{j_0}$ tal que $x_{j_0} \in U_{j_0} \not\ni y_{j_0}$ y $y_{j_0} \in V_{j_0} \not\ni x_{j_0}$. Si tomamos $U = p_{j_0}^{-1}(U_{j_0})$ y $V = p_{j_0}^{-1}(V_{j_0})$ entonces son abiertos que cumplen $x \in U \not\ni y$ y $y \in V \not\ni x$, por lo que $\prod_{j \in J} X_j$ es T_1. $\blacksquare$

Proposición 6.5 *Sea X un espacio topológico, entonces son equivalentes:*

1. *X es T_2*
2. *Si $\Delta : X \to X \times X$ es dada por $\Delta(x) = (x, x)$ entonces $\Delta(X)$ es cerrado*
3. *Toda red convergente en X tiene límite único*

Demostración Vayamos de a partes:

i) $\Longrightarrow$ ii) Sea $(x, y) \notin \Delta(X)$, entonces $x \neq y$ y como X es T_2 existen U, V abiertos disjuntos tal que $(x, y) \in U \times V$ y $(U \times V) \cap \Delta(X) = \emptyset$ pues $U \cap V = \emptyset$; por lo tanto $(x, y) \in U \times V \subseteq \Delta(X)^c$. Se concluye que $\Delta(X)$ es cerrado.

ii) $\Longrightarrow$ i) Sean $x \neq y \in X$, entonces $(x, y) \in \Delta(X)^c$ y por hipótesis existe $U \times V \subseteq X \times X$ tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq \Delta(X)^c$. Por lo tanto esto quiere decir que existen U, V abiertos disjuntos tal que $x \in U, y \in V$, o sea X es T_2.

i) $\Longrightarrow$ iii) Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in \Lambda} X$ una red en X y sea $x \neq y$ dos límites de x_α. Entonces como X es T_2 se tiene que existe U, V abiertos disjuntos tal que $x \in U, y \in V$.

Como $x_\alpha \to x$ existe un $\alpha_0' in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$, por otro lado como $x_\alpha \to y$ existe $\alpha_1 \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_1$.

Como Λ es dirigido existe $\alpha_2 \geq \alpha_1, \alpha_0$ por lo que si $\alpha \geq \alpha_2$ se tiene que $x_\alpha \in U \cap V = \emptyset$. Concluímos que $x = y$ y el límite es único.

iii) $\Longrightarrow$ i) Supongamos que X no es T_2, entonces existen $x \neq y$ tal que para todos U, V entornos de x, y respectivamente se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$. Sea $\Lambda = \{U \cap V \ / \ U \ni x\ ,\ V \ni y\ ,\ U, V\ \textit{abiertos}\}$ y lo ordenamos por la inclusión inversa, entonces es claro que es dirigido y definimos $f : \Lambda \to X$ por $f(U \cap V) \in U \cap V$.

Por un lado $f \to x$ pues dado $U \ni x$ entorno abierto tenemos que si $\alpha \geq U \cap X \in \Lambda$ entonces $f(\alpha) \in \alpha \subseteq U \cap X = U$, similarmente $f \to y$ y por hipótesis $x = y$; concluímos que X es T_2. ∎

Proposición 6.6 *Subespacio y productos de T_2 son T_2*

Demostración Sea $x \neq y \in U \subseteq X$ puntos distintos de un subespacio, entonces como X es T_2 sabemos que existen $V, W \subseteq X$ abiertos disjuntos tal que $x \in V$ y $y \in W$. Por lo tanto si consideramos $V' = V \cap U$ y $W' = W \cap U$ son abiertos disjuntos de U que cumplen que $x \in V'$ y $y \in W'$; se concluye que U es T_2.

Sean ahora $x \neq y \in \prod_{j \in J} X_j$ por lo que existe j_0 tal que $x_{j_0} \neq y_{j_0} \in X_{j_0}$; como X_{j_0} es T_2 sabemos que existen $U_{j_0}, V_{j_0} \subseteq X_{j_0}$ disjuntos tal que $x_{j_0} \in U_{j_0}$ y $y_{j_0} \in V_{j_0}$. Si tomamos $U = p_{j_0}^{-1}(U_{j_0})$ y $V = p_{j_0}^{-1}(V_{j_0})$ entonces son abiertos disjuntos que cumplen $x \in U$ y $y \in V$, por lo que $\prod_{j \in J} X_j$ es T_2. ∎

7. Compacidad

Definición Un espacio topológico X se dice *compacto* si dado una familia de abiertos $\{U_j\}_{j \in J}$ tal que $\bigcup_{j \in J} U_j = X$ existe $J' \subset J$ finito tal que $\bigcup_{j \in J'} U_j = X$. A esta familia con la propiedad de cubrir la llamaremos un *cubrimiento por abiertos.*

Ejemplo

1. Si X es finito entonces trivialmente X es compacto
2. Si X es métrico entonces X es compacto si y sólo si X es completo y totalmente acotado (Avanzado)

3. Si X tiene la topología del complemento finito, entonces X es compacto.

   En efecto, si $\bigcup_{j\in J} U_j = X$ como U_1^c es finito entonces existen finitos $U_2, \dots U_n \in \{U_j\}_{j\in J}$ tal que $U_j \cap U_1 \neq \emptyset$, por lo tanto $\bigcup_{1\leq j\leq n} U_j = X$.

Proposición 7.1 *Sean X, Y espacios topológicos con X copmpacto. Si $y_0 \in Y$ y $W \subseteq X \times Y$ son tales que $X \times \{y_0\} \subseteq W$ entonces existe $V \ni y_0$ abierto de Y tal que $X \times V \subseteq W$.*

Demostración Sea $x \in X$, luego como $(x, y_0) \in W$ existe $U_x \times V_x$ abierto básico tal que $(x, y_0) \in U_x \times V_x \subseteq W$; por lo tanto se tiene que $\bigcup_{x\in X} U_x = X$. Como X es compacto existe $J = \{x_1, \dots, x_n\}$ finito tal que $\bigcup_{x\in J} U_x = X$, si tomamos $V = \bigcap_{x\in J} V_x$ se tiene que V es abierto, $y_0 \in V$ y $X \times V \subseteq \bigcup_{x\in J} U_x \cap V_x \subseteq W$. ∎

Definición Decimos que una familia de cerrados $\{F_j\}_{j\in J}$ de X tiene la *propiedad de intersección finita* si para cada $J' \subset J$ finito se tiene que $\bigcap_{j\in J'} F_j \neq \emptyset$

Teorema 7.2 *Sea X un espacio topológico, entonces son equivalentes:*

1. *X es compacto*
2. *Para toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita se tiene que $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$*
3. *Para todo espacio topológico Y se tiene que $p_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada*
4. *Toda red en X tiene una subred convergente.*

Demostración Vayamos de a partes:

ii) $\Longrightarrow$ i) Si $\bigcup_{j\in J} U_j = X$ entonces $\bigcap_{j\in J} U_j^c = \emptyset$, por hipótesis existe entonces $J' \subset J$ finito tal que $\bigcap_{j\in J'} U_j^c = \emptyset$, por lo tanto $\bigcup_{j\in J'} U_j = X$.

i) $\Longrightarrow$ iii) Sea Y espacio topológico y $F \subseteq X \times Y$ cerrado, consideremos $y \in p_Y(F)^c$ entonces $X \times y \subseteq F^c$. Por 7.1 existe $V \subseteq Y$ abierto tal que $(x, y) \in X \times V \subseteq F^c$, por lo tanto $y \in V \subseteq P_y(F)^c$ y se concluye que si F es cerrado entonces $p_Y(F)$ es cerrado.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Sea $f : \Lambda \to X$ una red y consideremos $\Lambda' = \Lambda \cup \{\infty\}$ con al topología dada por la base $\mathcal{B} = \{\{\alpha\}\ ,\ \alpha \in \Lambda\} \cup \{\{\beta \geq \alpha\} \cup \{\infty\}\ ,\ \alpha \in \Lambda\}$, o sea la çompactificación de Alexandroff sobre Λ".

Si $A = \{\beta \geq \alpha_0\} \cup \{\infty\}$ es un entorno básico de ∞ entonces si llamamos $P := P_{\Lambda'}$se tiene que $\alpha_0 \in A \cap P(\overline{\{\alpha, f(\alpha)\ /\ \alpha \in \Lambda\}})$, es decir que $\infty \in \overline{P(\{\alpha, f(\alpha)\ /\ \alpha \in \Lambda\})} = P(\overline{\{\alpha, f(\alpha)\ /\ \alpha \in \Lambda\}})$ por hipótesis. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $(\infty, x_0) \in B = \overline{\{\alpha, f(\alpha)\ /\ \alpha \in \Lambda\}}$

Sea $\Gamma = \{(\alpha, U)\ /\ \alpha \in \Lambda\ ,\ x_0 \in U \in \tau_X\ ,\ f(\alpha) \in U\}$ y lo ordenamos de la siguiente manera:

$$(\alpha_1, U_1) \geq (\alpha_2, U_2) \iff \alpha_1 \geq \alpha_2\ ,\ U_1 \subseteq U_2$$

Veamos que Γ es dirigido. Sean $(\alpha_1, U_1), (\alpha_2, U_2) \in \Gamma$, como Λ es dirigido existe $\alpha_3 \in \Lambda$ tal que $\alpha_3 \geq \alpha_1, \alpha_2$; por lo tanto $C = (\{\beta \geq \alpha_3\} \cup \{\infty\}) \times (U_1 \cap U_2)$ es un abierto de $\Lambda' \times X$ que cumple que $(\infty, x_0) \in C$.

Pero como $(\infty, x_0) \in B$ existe $\alpha_4 \in \Lambda$ tal que $\alpha_4 \geq \alpha_3$ y $f(\alpha_4) \in U_1 \cap U_2$, por lo tanto $(\alpha_4, U_1 \cap U_2) \in \Lambda$ y $(\alpha_4, U_1 \cap U_2) \geq (\alpha_1, U_1), (\alpha_2, U_2)$. Definimos $g : \Gamma \to \Lambda$ dada por $g(\alpha, U) = \alpha$ que es cofinal.

Consideremos la subred fg y veamos que $fg \to x_0$. Sea $U \ni x_0$ un entorno abierto, entonces $\Lambda' \times U$ es un abierto de $\Lambda' \times X$ que cumple que $(\infty, x_0) \in B \cap (\Lambda' \times U)$, por lo tanto $(\Lambda' \times U) \cap \{\alpha, f(\alpha)\ /\ \alpha \in \Lambda\} \neq \emptyset$ y existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $f(\alpha_0) \in U$.

Si $(\alpha, V) \geq (\alpha_0, U)$ entonces $fg(\alpha, V) = f(\alpha) \in V \subseteq U$ y se concluye que $fg \to x_0$.

iv) $\Longrightarrow$ ii) Sea $\{F_j\}_{j\in J}$ una familia de cerrados de X con la PIF y sea entonces $\Lambda = \{J' \textit{finitos} \ / \ J' \subset J\}$ ordenado por la inclusión, y sea $f : \Lambda \to X$ dada por $f(J') \in \bigcap\limits_{j\in J'} F_j$ que está bien definida pues la familia tiene la PIF.

Sea $\Gamma \xrightarrow{g} \Lambda \xrightarrow{f} X$ una subred convergente a cierto $x_0 \in X$ y supongamos que existe $j_0 \in J$ tal que $x_0 \in F_{j_0}^c$, luego existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que si $\gamma \geq \gamma_1$ entonces $fg(\gamma) \in F_{j_0}^c$. Por otro lado, como g es cofinal existe $\gamma_2 \in \Gamma$ tal que $g(\gamma_2) \geq \{j_0\}$; como Γ es dirigido sea $\gamma_3 \geq \gamma_1, \gamma_2$.

Por un lado, como $\gamma_3 \geq \gamma_1$ se tiene que $fg(\gamma_3) \in F_{j_0}^c$; pero por el otro como $\gamma_3 \geq \gamma_2$ se tiene que $fg(\gamma_3) \in \bigcap\limits_{j\in g(\gamma_2)} F_j \subseteq F_{j_0}$ pues $\{j_0\} \subseteq g(\gamma_2)$; concluimos que $fg(\gamma_3) \in F_{j_0} \cap F_{j_0}^c = \emptyset$ de lo que sale que no existía tal j_0. Por lo tanto $x_0 \in \bigcap\limits_{j\in J} f_j \neq \emptyset$. ∎

Definición Decimos que una clase $\mathcal{A}$ de funciones continuas es *buena* si:

1. $\mathcal{A}$ contiene a todos los homeomorfismos
2. $f, g \in \mathcal{A}$ y tiene sentido componer, entonces $gf \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$ es estable por cambio de base

Ejemplo

- Por 4.2 los homeomorfismos son una clase buena
- Por 4 las funciones inyectivas son una clase buena
- Por 4.4 las funciones subespacio son una clase buena
- Las funciones cerradas no son una clase buena pues no son estables por cambio de base

Ejemplo Una función $f : X \to Y$ si cada vez que se tiene un pullback:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

entonces $\tilde{f}$ es cerrada.

Proposición 7.3 *Si una función $f : X \to Y$ es propia entonces es cerrada.*

Demostración Basta con considerar el siguiente pullback:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Proposición 7.4 *Las funciones propias son una clase buena.*

Demostración

- Los homeomorfismos al ser estables por cambio de base y cerrados son propias.
- Sean $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : W \to Z$ tal que f, g son propias y veamos el siguiente pullback:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{\tilde{h}}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\tilde{g}"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & Y \arrow[d, "g"] \\ W \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

Como tanto f como g son propia entonces $\tilde{f}, \tilde{g}$ son cerradas y como 1, 2 son pullback entonces por 4.5 tenemos que existe $t : W \times_Z X \to T$ homeomorfismo tal que $\tilde{g}\tilde{f}t = \tilde{fg}$, como $t, \tilde{f}, \tilde{g}$ son cerradas se concluye que $\tilde{fg}$ es cerrada y entonces fg es propia.

- Sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \times_Z (Z \times_Y X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\tilde{f}}"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & Z \times_Y X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & X \arrow[d, "f"'] \\
W \arrow[r] & Z \arrow[r, "1_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Como tanto 1, 2 son pullback entonces por 4.5 diagrama completo es pullback y por lo tanto como f es propia se tiene que $\tilde{\tilde{f}}$ es cerrada, o sea que $\tilde{f}$ es propia y las propias son estables por cambio de base. ∎

Proposición 7.5 *Sea X un espacio topológico, entonces X es compacto si y sólo si $X \to *$ es propia.*

Demostración $X \xrightarrow{f} *$ es propia si y sólo si para todo Y espacio topológico se tiene que:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "f"'] \\
Y \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

$p_Y = \tilde{f}$ es cerrada, si y sólo si X es compacto. ∎

Proposición 7.6 *Las funciones subespacio y cerradas son propias*

Demostración Por 4 sabemos como es el pullback contra un subespacio, por 4.4 sabemos que $\tilde{i}$ es subespacio. Además si i es cerrada entonces F es cerrada por lo que $f^{-1}(F)$ es cerrado, lo que implica que $\tilde{i}$ es cerrada. ∎

Corolario 7.7 *Sea X un espacio topológico y $F \subseteq X$ un subespacio cerrado, entonces F es compacto.*

Demostración En efecto, consideremos $F \hookrightarrow X \to *$ entonces por 7.6 sabemos que $i : F \to X$ es propia y como X es compacto $X \to *$ es propia, por 7.4 sabemos entonces que $F \to *$ es propia, concluímos con 7.5. ∎

Proposición 7.8 *Sean X, Y espacios compactos, entonces $X \times Y$ es compacto.*

Demostración Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r] \arrow[d, "p_Y"] \arrow[dr, phantom, "1"] & X \arrow[d, "f"'] \\
Y \arrow[r] \arrow[d] & * \\
*
\end{tikzcd}$$

Como $X \to *$ es propia por 7.5, 1 es pullback y por 7.4 (Propias son estables por cambio de base) sabemos que $p_Y : Y \times X \to Y$ es propia; como además $Y \to *$ es propia por 7.5, de 7.4 (Composición de propias es propia) se tiene que $X \times Y \to *$ es propia. ∎

Proposición 7.9 *Sea $f : X \to Y$ y X compacto, entonces $f(X) \subseteq Y$ es compacto*

Demostración Sea $\{U_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento de $f(X)$ por abiertos de Y, entonces $\left\{f^{-1}(U_j)\right\}_{j\in J}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Como X es compacto existe $J\subset J$ finito tal que $X = \bigcup\limits_{j' in J'} f^{-1}(U_j)$, por lo tanto $f(X) = \bigcup\limits_{j\in J'} f(f^{-1}(U_j)) \subseteq \bigcup\limits_{j\in J'} U_j$ y se sigue que $f(X)$ es compacto. ∎

Corolario 7.10 *La compacidad es un invariante topológico*

Proposición 7.11 *Si X es T_2 y $K\subseteq X$ es compacto entonces K es cerrado.*

Demostración En efecto, sea $x\in \overline{K}$ y sea x_α la red en K tal que $x_\alpha \to x$, por 7.2 existe una subred $(x_{\alpha_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ tal que $x_{\alpha_\gamma} \to y \in K$, por otro lado por 2.11 se tiene que $x_{\alpha_\gamma} \to x$ y por 6.5 se tiene que $x = y\in K$, se finaliza con 2.10 ∎

Corolario 7.12 *Sea $f: X\to Y$ donde X es compacto e Y es T_2, entonces f es cerrada.*

Demostración Sea $F\subseteq X$ cerrado, por 7.7 se tiene que F es compacto, luego por 7.9 sabemos que $f(F)$ es compacto, pero por 7.11 tenemos que $f(F)$ es cerrado; luego f es cerrada. ∎

Corolario 7.13 *Sea $f: X\to Y$ biyectiva donde X es compacto e Y es T_2, entonces f es homeomorfismo.*

Ejemplo Sea $f: {}^{I}/_{0\sim 1} \to S^1$ dada por $f([t]) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t)$, entonces ya vimos previamente que fq es continua por lo que como q es final, f es continua; además es trivialmente biyectiva como vimos previamente. Como I es compacto y $q: I\to {}^{I}/_{\sim}$ es continua se tiene que ${}^{I}/_{0\sim 1}$ es compacto, y finalmente S^1 es T_2 por ser subespacio de $\mathbb{R}^2$ y 6.6. Por 7.13 de tiene que f es homeomorfismo.

Teorema 7.14 *Sea $f: X\to Y$ continua, entonces son equivalentes:*

1. *f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y\in Y$.*
2. *f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K\subseteq Y$ compacto.*
3. *Para todo Z espacio topológico, $id_Z\times f: Z\times X\to Z\times Y$ es cerrada*
4. *f es propia*

Demostración Veamoslo por partes:

iv $\Longrightarrow$ iii) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Z\times X & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle 1_Z\times f} & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ Z\times Y & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

Veamos que es un pullback. Consideremos (P,s,t) un trío, entonces si $h: P\to X\times Y$ cumple que $(1_Z\times f)h = s$ entonces $h_1 = s_1$ y $fh_2 = s_2$, por otro lado $h_2 = p_X h = t$; por lo tanto consideremos $h = (s_1, t)$.

Entonces h está bien definida, $(1_Z\times f)h = s_1\times ft = s_1\times(p_Y s) = s_1\times s_2 = s$, $p_X h = t$ y además como $\{p_X, p_Z\}$ es inicial se tiene que h continua si y sólo si s_1, t son continuas; concluímos que $Z\times X$ es un pullback y como f es propia entonces $1_Z\times f$ es cerrada.

ightarrow ii) Sea $K \subseteq Y$ compacto y sea Z un espacio topológico entonces veamos que $p_Z : Z \times f^{-1}(K) \to Z$ es cerrada pues por 7.2 esto es equivalente a que $f^{-1}(K)$ es compacto. Consideremos $1_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$ que es cerrada y veamos $1_Z \times f|_{f^{-1}(K)} : Z \times f^{-1}(K) \to Z \times K$, si $F \subseteq Z \times f^{-1}(K)$ es cerrado entonces $1_Z \times f(F) \subseteq Z \times Y$ es cerrado.

Si $(F_1, f(F_2)) \notin Z \times K$ entonces existe $y_2 = f(x) \in f(f^{-1}(K))$ tal que $y_2 \notin K$, por lo que $x \notin f^{-1}(K)$, por lo tanto $(1_Z \times f)(F) \subseteq Z \times K$ es cerrado y concluímos que $1_Z \times f|_{f^{-1}(F)} : Z \times f^{-1}(K) \to Z \times K$ es cerrada.

Como K es compacto entonces $p_Z : Z \times K \to Z$ es cerrada y entonces $p_Z \circ (1_Z \times f|_{f^{-1}(K)}) : Z \times f^{-1}(K) \to Z$ es cerrada, por 7.2 $f^{-1}(K)$ es compacto.

rightarrow i) Dado $y \in Y$ como $\{y\}$ es compacto tenemos que $f^{-1}(\{y\})$ es compacto.

ightarrow iv) Consideremos la construcción dada en 4 del pullback como $P = \{(z,x) \in Z \times X \ / \ g(z) = f(x)\}$ y $\tilde{f} = p_Z$, entonces sea $F \subseteq P$ cerrado y queremos ver que $p_Z(F) \subseteq Z$ es cerrado, sea para esto $z_0 \in p_Z(F)^c$.

Como $F \subseteq P$ es cerrado existe un cerrado $H \subseteq Z \times X$ tal que $F = H \cap P$ y como $z_0 \notin p_Z(F)$ entonces no existe $(z_0, x) \in H$ tal que $g(z_0) = f(x)$, o equivalentemente que $\{z_0\} \times f^{-1}(g(z_0)) \subseteq H^c$. Como $f^{-1}(g(z_0))$ es compacto por hipótesis entonces por 7.1 existen $U \subseteq Z, V \subseteq X$ abiertos talque $\{z_0\} \times f^{-1}(g(z_0)) \subseteq U \times V \subseteq H^c$

Sea entonces $(z,x) \in F$ y supongamos que $p_Z(z,x) \in U$ luego $x \notin V$ lo que implica que $g(z) = f(x) \in f(X \setminus V)$, luego $g(z) \notin Y \setminus f(X\setminus) := W$ y por lo tanto $z \notin g^{-1}(W)$; es más como $f(g(z_0)) \in V$ entonces $g(z_0) \in f^{-1}(V)$ y entonces $z_0 \in W$. Luego tenemos que $z_0 \in g^{-1}(W) \cap U \subseteq p_Z(F)^c$, concluímos que $\tilde{f}$ es cerrada y entonces f es propia ∎

Definición Un espacio topológico X se dice *localmente compacto* si paraa todo $x \in X$ existe $K \ni x$ entorno compacto

Observación

- Si X resulta compacto entonces es localmente compacto
- $\mathbb{R}$ con la topología usual es localmente compacto

Proposición 7.15 *Sea X un espacio topolóogico T_2, entonces son equivalentes:*

1. *X es localmente compacto*
2. *Para todo $x \in X$ y todo entorno abierto $U \ni x$ existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y $\overline{V}$ es compacto.*

Demostración Sea $x \in X$ y $U \ni x$ entorno abierto, como X es localmente compacto exise además K entorno compacto de x. Por 7.11 se tiene que K es cerrado y por lo tanto $K \setminus U$ es compacto por 7.7.

Usemos el siguiente lema útil en esta situación:

Lema 7.16 *Sea X un espacio topológico T_2, K compacto y $x \in X$ tal que $x \notin K$, entonces existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tal que $x \in U$ y $K \subseteq V$.*

Luego por 7.16 existen abiertos W, W' disjuntos tal que $x \in W$, $K \setminus U \subseteq W'$. Sea $V = W \cap \mathring{K}$ y afirmamos este es el abierto que buscábamos:

- $x \in V$
- V es abierto
- Como $V \subseteq K$ entonces $\overline{V} \subseteq \overline{K} = K$ por 7.11, luego por 7.7 se tiene que $\overline{V}$ es compacto.

- Como $V = W \cap \mathring{K}$ entonces $\overline{V} \subseteq \overline{W} \cap K$, pero como $W \subseteq (W')^c$ que es cerrado se tiene que $\overline{W} \subseteq (W')^c \subseteq (K \setminus U)^c = K^c \cup U$.

  Por lo tanto $\overline{V} \subseteq (K^c \cup U) \cap K = U \cap K \subseteq U$. ∎

Demostración Del lema

Sea $y \in K$, entonces como X es T_2 sabemos que existen U_y, V_y abiertos disjuntos tal que $x \in U_y$, $y \in V_y$, por lo tanto se tiene que $K = \bigcup\limits_{y \in K} V_y$. Como K es compacto existe $J = \{y_1, \ldots, y_n\}$ finito tal que $K = \bigcup\limits_{y \in J} V_y$, tomemos $U = \bigcap\limits_{y \in J} U_y$ y $V = \bigcup\limits_{y \in J} V_y$. Entonces como $x \in U_y$ para todo $y \in K$ se tiene que $x \in U$, además por la construcción $K \subseteq V$ y ambos son abiertos.

Finalmente $U \cap V = \bigcup\limits_{y \in J} U \cap V_y = \emptyset$ pues $V_y \cap U_y = \emptyset$ para todo $y \in K$. ∎

Corolario 7.17 *Sea X, Y espacios topológicos tal que Y es localmente compacto y T_2. Sea $f : X \to Y$ continua tal que $f^{-1}(K)$ es compacto para todo K compacto, entonces f es propia.*

Demostración Sea $F \subseteq X$ cerrado y consideremos $f|_F$, entonces si $K \subseteq Y$ es compacto entonces $f|_F^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap F$ que por 7.7 es compacto; luego por 7.14 basta ver que $f(X)$ es cerrado. Como Y es localmente compacto si consideramos $y \in \overline{f(X)}$ existe un entorno compacto $K \ni y$ y por hipótesis $f^{-1}(K)$ es compacto, entonces por 7.12 tenemos que $f|_{f^{-1}(K)}$ es cerrada.

Por lo tanto, $f(f^{-1}(K)) = f(X) \cap K \ni y$ es cerrado; luego $y \in f(X) \cap Y \subseteq f(X)$, y por 7.14 concluímos que f es propia.

7.1. Teorema de Tychonoff

Definición Decimos que una familia $\{A_j\}_{j \in J}$ de subconjuntos de X un espacio topológico tiene la *propiedad de intersección finita* si para cada $J' \subset J$ finito se tiene que $\bigcap\limits_{j \in J'} A_j \neq \emptyset$

Observación De 7.2 se tiene que si X es un espacio topológico compacto y $\{A_j\}_{j \in J}$ es una familia con la PIF entonces $\bigcap\limits_{j \in J} \overline{A_j} \neq \emptyset$

Lema 7.18 *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{F}$ una familia con la PIF, entonces existe una familia $\mathcal{D}$ que cumple:*

1. *$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$*
2. *$\mathcal{D}$ tiene la PIF*
3. *$\mathcal{D}$ es maximal respecto de la PIF*

Demostración Sea Λ el conjunto de familia de subconjuntos de X con la PIF y que contienen a $\mathcal{F}$ ordenados por la inclusión. Entonces $\mathcal{F} \in \Lambda \neq \emptyset$ y si $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ es una cadena en Λ entonces $\epsilon = \bigcup\limits_{\gamma \in \Lambda} F_\gamma$ es una cota superior.

Finalmente si $A_1, \ldots, A_n \in \epsilon$ son tales que $A_i \subseteq F_{\gamma_i}$ entonces $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_{max \gamma_i}$ y como $\mathcal{F}_{max \gamma_i}$ tiene la PIF se da que $\bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} A_i \neq \emptyset$; por lo tanto ϵ tiene la PIF. Por 1.9 existe un elemento máximal $\mathcal{D} \in \Lambda$. ∎

Lema 7.19 *Sea $\mathcal{D}$ una familia maximal con respecto a la PIF. Entonces:*

1. *$\mathcal{D}$ es cerrado por intersecciones finitas*
2. *Si $A \subseteq X$ es tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{D}$ entonces $A \in \mathcal{D}$.*

Demostración

- Si $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{D}$ entonces $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \left\{ \bigcap_{1\le i\le n} A_i \right\}$ es una familia con la PIF, como $\mathcal{D}$ es maximal entonces $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
- Sea $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup A$y veamos que esta familia tiene la PIF. En efecto, si $B_1,\dots,B_n \in \mathcal{D}$ entonces por el item anterior $\bigcap_{1\le i\le n} B_i \in D$ y por hipótesis $\bigcap_{1\le i\le n} B_i \cap A \neq \emptyset$. Como $\mathcal{D}$ es maximal respecto a la PIF concluímos que $A \in \mathcal{D}$. ∎

Teorema 7.20 *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familai de espacios topológicos compactos, entonces $\prod_{j\in J} X_j$ es compacto.*

Demostración Sea $F = \{B_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de $X = \prod_{j\in J} X_j$ con la PIF y sea $\mathcal{D}$ la familia dada por 7.18. Para cada $j \in J$ tenemos que $\{p_j(A) \ / \ A \in \mathcal{D}\}$ es una familia con la PIF pues si $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{D}$ entonces $\bigcap_{1\le i\le n} p_j(A_i) \subseteq p_j(\bigcap_{1\le i\le n} A_i) \neq \emptyset$; por lo tanto como X_j es compacto existe $x_j \in \bigcap_{A\in\mathcal{D}} \overline{p_j(A)}$.

Definimos $x \in X$ dado por $(x)_j = x_j$ y veamos que $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{D}} \overline{A}$. Para esto sea $V \ni x$ un entorno básico de x y tenemos que ver que $V \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{D}$, y por 7.19 basta ver que $V \in \mathcal{D}$. Por 7.18 basta tomar V entorno subbásico, luego sea $V = p_j^{-1}(U)$ con $U \subseteq X_j$ abierto tal que $x_j \in V$; como $x_j \in \bigcap_{A\in\mathcal{D}} \overline{p_j(A)}$ entonces $V \cap p_j(A) \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{D}$. Por lo tanto $p_j^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{D}$, por 7.19 se tiene que $p_j^{-1}(V) \in \mathcal{D}$, luego $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{D}} \overline{A} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{A} \neq \emptyset$ y por 7.2 se tiene que X es compacto. ∎

7.2. Compactificación de Alexandroff

Definición Sea X un espacio topológico T_2, localmente compacto y no compacto; entonces se define la *compactificación de Alexandroff o compactificación de un punto* de X como el espacio $X^* = X \cup \{\infty\}$ y con la topología $\tau = \tau_X \cup \{X^* \setminus C \ / \ C \subseteq X \ \textit{compacto}\}$

Observación Es simple ver que τ es una topología.

Proposición 7.21 *Sea X un espacio topológico T_2, localmente compacto y no compacto; entonces X^* es T_2, compacto y X es un subespacio denso de X^**

Demostración Vayamos por partes:

- Si $x \neq y \in X$ entonces se pueden separar pues X es T_2; por otro lado si $x \in X$ como X es localmente compacto existe $C \subseteq X$ compacto y $U \subseteq C$ abierto tal que $x \in U \subseteq C$, por lo tanto $\{U, X^* \setminus C\}$ separan a x de ∞.
- Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X^* entonces existe $X^* \setminus C \in \mathcal{U}$; por lo tanto $C \subseteq \bigcup_{\substack{U\in\mathcal{U} \\ U\neq X^*\setminus C}} U$ y como C es compacto existe $\mathcal{U}'$ subcubrimiento finito. Se concluye que $X^* = \bigcup_{U\in\mathcal{U}'} U \cup X^* \setminus C$.
- Por un lado si $U \subseteq X$ es abierto entonces $U \subseteq X^*$ es abierto y $U = U \cap X$; por el otro lado si $U \subseteq X^*$ es abierto de X^* y no de X entonces $U = X^* \setminus C$ por lo que $U \cap X = X \setminus C$ es abierto de X. De esto concluímos que si $U \subseteq X$ es abierto de X entonces $U = i^{-1}(V)$ con $V \subseteq X^*$ abierto; entonces X es subespacio.
- Sea $X^* \setminus C$ un entorno básico de ∞, como X no es compacto existe $y \in X \setminus C$ y por lo tanto $y \in X \cap (X^* \setminus C) \neq \emptyset$ y se sigue que $\infty \in \overline{X}$, concluímos que $\overline{X} = X^*$. ∎

Ejemplo Se tiene fácilmente que $\mathbb{R}^* = S^1$

8. Axiomas de separación

Definición Un espacio topológico X se dice *regular* o T_3 si es T_1 y además dados $F \subseteq X$ cerrado y $x \notin F$ entonces existen U, V abiertos disjuntos tal que $x \in U$, $F \subseteq V$

Definición Un espacio topológico X se dice *completamente regular* o T_4 si es T_1 y además dados $F \subseteq X$ cerrado y $x \notin F$ entonces existe $f : X \to I$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$

Definición Un espacio topológico X se dice *normal* o T_5 si es T_1 y además dados $F, H \subseteq X$ cerrados disjuntos entonces existen U, V abiertos disjuntos tal que $H \subseteq U$, $F \subseteq V$

Ejemplo Sea $X = (\{0,1,2\}, \{\{\emptyset\}, X, \{0\}, \{1,2\}\})$ entonces X no es T_1 pero al ser disconexo cumple los otros 3 requerimientos.

Observación Notemos que $T_4 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2$.

En efecto, si X es T_4 y $x \notin F$ entonces tomemos $U = f^{-1}([0, \frac{1}{4}))$ y $V = f^{-1}([\frac{3}{4}, 1))$ y se tiene que $U \cap V = \emptyset$ y $F \subseteq V, x \in U$; como además por 6.4 se tiene que X es T_3. Similarmente si $x \neq y$ entonces como X es T_1 los puntos son cerrados y por ser T_3 existen V, W disjuntos tal que $x \in W$, $y \in V$, por lo que X es T_2.

Proposición 8.1 *Sea X un espacio T_1, entonces son equivalentes:*

1. *X es T_3*
2. *Para todo $x \in X$ y todo entorno $U \ni x$ existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*

Demostración Hagamos por partes:

i) $\Longrightarrow$ ii) Supongamos que el entorno U es abierto, entonces $x \notin^C$, como X es T_3 existen $V, W \subseteq X$ abiertos tal que $x \in V$ y $U^c \subseteq W$. Como $V \cap W = \emptyset$ entonces $V \subseteq W^c$ que es cerrado, por lo tanto tenemos que $\overline{V} \subseteq W^c$; concluímos que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W^c \subseteq U$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Sea $F \subseteq X$ cerrado y $x \notin F$, entonces F^c es un entorno abierto de x por lo que existe $V \subseteq X$ abierto tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$. Es claro que si tomamos $U = V$ y $W = (\overline{V})^c$ entonces estos son abiertos disjuntos tal que $x \in U$, $F \subseteq W$. ∎

Proposición 8.2 *Subespacio de un espacio T_3 es T_3 y produtos de T_3 es T_3.*

Demostración

- Sea $F \subseteq Y \subseteq X$ un cerrado en Y que es subespacio de X y consideremos $x \in Y \setminus F$, entonces como F es cerrado en el subespacio existe $H \subseteq X$ cerrado tal que $F = Y \cap H$, por lo tanto $y \notin H$. Como X es T_3 existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tal que $x \in U$, $H \subseteq V$; si tomamos $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$ entonces estos son abiertos disjuntos en Y tal que $y \in U'$ y $F \subseteq V'$. Como además por 6.4 Y es T_1 concluímos que Y es T_3.

- Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios T_3, entonces $X = \prod_{j \in J} X_j$ es T_1 por 6.4. Sea ahora $x \in U \subseteq X$ un entorno abierto, entonces tenemos que $x_j \in U_j \subseteq X_j$ para todo $j \in J$ y como X_j es T_3 existe V_j abierto tal que $x_j \in V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j$. Sea $V = \prod_{j \in J} V_j$ donde tomaremos $V_j = X_j$ si $U_j = X_J$, entonces V es abierto de X y cumple que $x \in V$, usemos el siguiente lema:

  Lema 8.3 *Si $V \subseteq X$ en la topología producto, entonces $\overline{V} = \overline{\prod_{j \in J} V_j} = \prod_{j \in J} \overline{V_j}$*

  Entonces usando 8.3 tenemos que $x \in V \subseteq \overline{V} = \prod_{j \in J} \overline{V_j} \subseteq \prod_{j \in J} U_j = U$; concluímos que X es T_3. ∎

Proposición 8.4 *Sea X un espacio topológico compacto y T_2, entonces es normal.*

Demostración Por un lado como X es T_2 entonces es T_1. Por el otro lado sean $F, H \subseteq X$ cerrados disjuntos, entonces por 7.7 tenemos que son ambos compactos. Sea $x \in F$, entonces por 7.16 existe $U_x, V_x \subseteq X$ abiertos disjuntos tal que $x \in U_x, H \subseteq V_x$; por lo tanto se tiene que $F = \bigcup_{x \in F} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in F} U_x$. Como F es compacto existe $J = \{x_1, \ldots, x_n\}$ finito tal que $F \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x$, por lo tanto si tomamos $U = \bigcup_{x \in J} U_x$ y $V = \bigcap_{x \in J} V_x$ veamos que estos sirven para separar F de H:

- Ambos son abiertos pues J es finito
- $F \subseteq U$ por construcción
- $H \subseteq V_x$ para todo $x \in F$, luego $H \subseteq \bigcap_{x \in F} V_x \subseteq V$
- $U \cap V = \bigcup_{x \in J} U_x \cap V \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x \cap V_x = \emptyset$.

Cnocluímos que X es normal. ∎

Proposición 8.5 *Subespacio y productos de T_4 es T_4*

Demostración

- Sea $Y \subseteq X$ un subespacio de X que es T_4, luego por 6.4 se tiene que Y es T_1. Sea $F \subseteq Y$ un cerrado e $y \in Y \setminus F$, luego existe $H \subseteq X$ cerrado tal que $F = H \cap Y$ y se sigue que $y \notin H$. Como X es T_4 existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(y) = 0$ y $f(H) = \{1\}$; como Y es subespacio se tiene por 2.4 que $f|_Y : Y \to I$ es continua y $f|_Y(y) = f(y) = 0$ y $f|_Y(F) = f(F) \subseteq f(H) = \{1\}$, y como $F \neq \emptyset$ se tiene que $f(F) = \{1\}$.
- Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios T_4, $x \in X = \prod_{j \in J} X_j$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin F$. Como $x \in F^c = U$ abierto entonces $x_j \in U_j \subseteq X_j$ para todo $j \in J$, luego $x_j \notin U_j^c$ que es cerrado de X_j. Consideremos $J' \subset J$ el conjunto finito donde $U_j^c \neq \emptyset$, luego como X_j es T_4 para todo $j \in J \subset J$ existe una función continua $f_j : X_j \to I$ tal que $f_j(x_j) = 1$ y $f_j(U_j^c) = \{0\}$ (Basta tomar $f_j' = 1 - f_j$ para tener la usual). Consideremos entonces $f : X \to I$ dada por $f(y) = \prod_{j \in J'} f_j(p_j(y))$ que es continua por ser un producto finito de continuas; entonces $f(x) = \prod_{j \in J'} f_j(x_j) = 1$ y si $y \in F$ entonces $f(y) = \prod_{j \in J'} f_j(y_j) = 0$ pues $y \notin U$ por lo que $y \in U_{j_0}^c$ para algún j_0. Basta tomar $f' = 1 - f$ para obtener la f como en la definición y concluímos que X es T_4. ∎

Proposición 8.6 *Sea X un espacio topológico localmente compacto y T_2, entonces es T_4.*

Demostración Sea X^* la compactificación de un punto de X, luego es compacto y T_2 por 7.21 por lo que por 8.4 X^* es normal, por lo tanto por 8.11 se tiene que X^* es T_4 y como X es un subespacio de X^* por 8.5 concluímos que X es T_4. ∎

Proposición 8.7 *Todo conjunto X bien ordenado es normal*

Demostración Es más, vale que todo conjunto en la topología del orden es normal, pero para esto es más complicado y se usa el Axioma de Elección (Demo entendible: Counterexamples in Topology). Vayamos por partes:

1. Primero afirmamos que todo conjunto $(x, y] \subseteq X$ es abierto.

   En efecto, si $y = max(X)$ entonces $(x, y] \in \tau_O$ es un elemento básico; y si no entonces como X es bien ordenado existe un elemento estrictamente siguiente $y' > y$ por lo que $(x, y] = (x, y') \in \tau_O$.

2. Si A, B son cerrados disjuntos tal que ninguno contiene a $a_0 = min(X)$ entonces existen U, V abiertos disjuntos que los separan.

   En efecto, sea $a \in A$ entonces como $a \notin \overline{B}$ existe un abierto básico $U_a \ni a$ tal que $U_a \cap B = \emptyset$, luego como a no es mínimo existe un abierto $a \in (x, a] \subseteq U_a$; similarmente para cada $b \in B$ tomemos un intervalo $(y_b, b]$ disjunto de A. Entonces si consideramos:

$$U = \bigcup_{a \in A} (x_a, a] \quad V = \bigcup_{b \in B} (y_b, b]$$

   Es claro que U, V son abiertos y $A \subseteq U, B \subseteq V$, veamos que son disjuntos.

   Supongamos $a < b$ y consideremos $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$ entonces tenemos que $a \in (y_b, b]$ que es contrario a la elección de y_b (Aca nuevamente estamos usando el buen orden para ver que existe tal y_b), luego $U \cap V = \emptyset$.

3. Si A, B son cerrados disjuntos entonces existen U, V abiertos disjuntos que los separan.

   En efecto si $a_0 \in A$ entonces $\{a_0\}$ es cerrado y abierto en X, por lo tanto $A - \{a_0\}, B$ son cerrados disjuntos y entoces por el item anterior existen U, V tal que los separan, basta considerar $U \cup \{a_0\}, V$. ∎

Corolario 8.8
- *Subespacio de T_5 no necesariamente es T_5*
- *Producto de T_5 no necesariamente es T_5*

Demostración Consideremos S_Ω que es T_5 por 8.7 , $\overline{S_\Omega}$ que es T_5 por 8.4 y $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ que es compacto por 7.20 y por lo tanto normal por 8.4. Afirmo que $X = S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ (que es producto de T_5) visto como subespacio de $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ (Y por lo tanto es subespacio de T_5 además) no es normal.

En efecto sea $A = \Delta \setminus \Omega \times \Omega$ que es cerrado pues $A = \Delta \cap X$ donde $\Delta \subseteq \overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ es cerrado pues $\overline{S_\Omega}$ es T_2 y 6.5; por otro lado sea $B = S_\Omega \times \{\Omega\} = (\overline{S_\Omega} \times \{\Omega\}) \cap X$ que es cerrado pues $\overline{S_\Omega} \times \{\Omega\}$ es producto de cerrados de $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ y además cumple que $A \cap B = \emptyset$.

Supongamos que existen U, V abiertos disjuntos tal que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y dado $x \in S_\Omega$ consideremos el conjunto $\{x\} \times \overline{S_\Omega}$ y veamos que existe $x < \beta < \Omega$ tal que $(x, \beta) \notin U$. Si para todo $\beta > x$ se tuviese que $(x, \beta) \in U$ entonces se tiene fácilmente que $V \ni (x, \Omega) \in \overline{U}$ y contradiciríamos la hipótesis que $U \cap V = \emptyset$; por lo tantopara cada $x \in S_\Omega$ llamemos $\beta(x) = min(\{\beta \in S_\Omega \;/\; \Omega > \beta > x \;/\; (x, \beta) \notin U\})$ que existe pues probamos que es un conjunto no vacío.

Sea $x_1 = x$ y definamos recursivamente $x_n = \beta(x_{n-1})$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos y por 1.8 tiene cota superior en S_Ω. Sea $b = min(\{b \in S_\Omega \;/\; b \geq x_n \; \forall n \in \mathbb{N}\})$, entonces como x_n es creciente se tiene que $x_n \to b$ y $\beta x_n = x_{n+1} \to b$, por lo que:

$$x_n \times \beta(x_n) \to b \times b$$

Pero tenemos que $b \times b \in A$ pues ninguna sucesión converge a S_Ω pero $x_n \times \beta(x_n) \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$; concluímos que no existían tales U, V abiertos que separen A y B, por lo tanto $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ no es normal. ∎

Proposición 8.9 *Sea X un espacio T_1, entonces son equivalentes:*

1. *X es T_5*
2. *para todo $F \subseteq X$ cerrado y $U \subseteq X$ abierto tal que $F \subseteq U$ entonces existe $V \subseteq X$ abierto tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*

Demostración i) $\Longrightarrow$ ii) Sea $F \subseteq U$, luego F, U^c son cerrados disjuntos y como X es T_5 se tiene que existen $V, W \subseteq X$ abiertos disjuntos tal que $F \subseteq V, U^c \subseteq W$, luego se tiene que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq W^c \subseteq U$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Sean F, H cerrados disjuntos, luego $F \subseteq H^c$ que es abierto y entonces existe $V \subseteq X$ abierto tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq H^c$; basta considerar $W = \overline{V}^c$ para ver que V, W son abiertos disjuntos y que separan. ∎

Teorema 8.10 *Lema de Urysohn*

Sea X un espacio topológico T_5 y $F, H \subseteq X$ cerrados disjuntos no vacíos, entonces existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(F) = \{0\}$ y $f(H) = \{1\}$

Demostración Sea $\{q_0, q_1, \dots\}$ una numeración de $\mathbb{Q}$ de modo que $q_0 = 0$ y $q_1 = 1$, y definimos $U_1 = H^c$; luego como $F \subseteq U_1$ y X es normal, por 8.9 existe $U_0 \subseteq X$ abierto tal que $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$. En particular como $\overline{U_0} \subseteq U_1$ y X es normal existe $U_{q_2} \subseteq X$ abierto tal que $\overline{U_0} \subseteq U_{q_2} \subseteq \overline{U_{q_2}} \subseteq U_1$; recursivamente definimos U_{q_i} abiertos tal que si $q_i < q_j$ entonces $\overline{U_{q_i}} \subseteq U_{q_j}$. De esta manera tenemos definido U_q para todo $q \in \mathbb{Q} \cap I$ tal que $F \subseteq U_0$, $H = U_1^c$ y si $r < q$ entonces $\overline{U_r} \subseteq U_q$.

Definimos por completitud $U_q = \emptyset$ si $q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<0}$ y $U_q = X$ si $q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>1}$ y finalmente sea $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = inf(\{r \in \mathbb{Q} \ / \ x \in U_r\})$, veamos que esta f nos sirve:

- f está bien definida:

  En efecto, se tiene que $2 \in \{r \in \mathbb{Q} \ / \ x \in U_r\} \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y además está acotado inferiormente pues $r \notin \{r \in \mathbb{Q} \ / \ x \in U_r\}$ para todo $r < 0$. Además se sigue que $f(X) \subseteq I$

- $f(F) = \{0\}$

  Si $x \in F$ entonces $x \in U_0 \subseteq U_r$ para todo $r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$, por lo tanto $\{r \in \mathbb{Q} \ / \ x \in U_r\} = [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ y se tiene que $f(x) = 0$. Como además $F \neq \emptyset$ se tiene que $f(F) = \{0\}$

- $f(H) = \{1\}$

  Si $x \in H$ entonces $x \notin U_1$ y por lo tanto $x \not\subseteq U_r$ para todo $r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<1}$, por lo tanto $\{r \in \mathbb{Q} \ / \ x \in U_r\} = (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ y se tiene que $f(x) = 1$. Como además $H \neq \emptyset$ se tiene que $f(H) = \{1\}$

- f es continua

  Sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y sea $x \in f^{-1}(a, b)$, sean $q, r \in \mathbb{Q}$ ta que $a < q < f(x) < r < b$ y consideremos $U = U_r \setminus \overline{U_q}$, luego U es abierto.

  Como $f(x) < r$ existe $r' \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < r' < r$ y $x \in U_{r'}$, por lo que $x \in U_r$. Por otro lado, como $q < f(x)$ si $q < q' < f(x)$ entonces $x \notin U_{q'}$ y como $\overline{U_q} \subseteq U_{q'}$ se tiene que $x \notin \overline{U_{q'}}$; concluímos que $x \in U$.

  Finalmente, sea $y \in U$ por lo que $y \notin U_{q'}$ para todo $q' < q$ y eso implica que $f(y) \geq q > a$; por otro lado $y \in U_r$ por lo que $f(y) \leq r < b$. Juntando todo se tiene que $U \subseteq f^{-1}(a, b)$ y por lo tanto es abierto y f continua. ∎

Corolario 8.11 *Si X es un espacio normal, entonces es T_4*

Demostración Como X es T_1 se tiene que $\{x\}$ es cerrado, entonces si $x \notin F$ por 8.10 dados existe $f : X \to I$ continua tal que $f(\{x\}) = 0$ y $f(F) = 1$. Lego X es T_4 ∎ ∎

Observación Notemos que $T_2 \not\Longrightarrow T_3 \not\Longrightarrow T_4 \not\Longrightarrow T_5 \not\Longrightarrow$ *Espacio métrico.*

En efecto veamos uno por uno:

- Sea $(\mathbb{R}, \tau_K)$ la K *topología en* $\mathbb{R}$ dada por la base $\mathcal{B}_K = \{(a, b) \ / \ a < b\} \cup \{(a, b) \setminus K \ / \ a < b \ , \ K = \{\frac{1}{n}\}\}$. Entonces se tiene que $\tau \subseteq \tau_K$ trivialmente pues una base contiene a la otra, y por lo tanto como $(\mathbb{R}, \tau)$ es T_2 (es métrico) se tiene que $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \tau_K)$ es T_2.

  No obstante, sean $\{0\}$ que es cerrado pues al ser T_2 es T_1, y sea K que es cerrado pues $K = (\mathbb{R} \setminus K)^c$ y sea $U \ni 0$ un entorno abierto de 0. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in U$ para todo $n \geq n_0$ y concluímos que $U \cap K \neq \emptyset$. Panto no podemos separar por abiertos disjuntos a $\{0\}$ y a K y se tiene que $\mathbb{R}_K$ no es T_3.

- Un espacio T_3 pero no T_4 es muy difícil
- Si consideramos $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ ya vimos que no es normal, pero $S_\Omega \times \overline{S_\Omega} \subset \overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ y como $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ es compacto y T_2 por 8.4 es normal, entonces por 8.11 es T_4 y por 8.5 se tiene que $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ es T_4.
- Ya vimos que $\overline{S_\Omega}$ es T_5 pero no es métrico.

Teorema 8.12 *Sea X un espacio topológico, entonces X es T_4 si y sólo si es subespacio de un producto de copias de I.*

Demostración Para un lado es trivial que como I es compacto y T_2 en la topología usual entonces $\prod_{j\in J} I$ es compacto por 7.20 y T_2 por 6.6, luego normal por 8.4 y entonces T_4 por 8.11; concluímos por 8.5.

Para el otro consideremos $f : X \to \prod_{\substack{h:X\to I\\ h\,continua}} I = K$ dada por $f(x)_h = h(x)$. Es claro que f es continua pues $P_h f = h$ es continua para todo $h : X \to I$ continua y $\{P_h\}_{\substack{h:X\to I\\ h\,continua}}$ es inicial para K.

Sea ahora τ_X la topología de X y τ' otra topología en X que hace continua a las h; sea $U \in \tau_X$ y $x \in U$ como X es T_4 sabemos que existe $h_x : (X,\tau) \to I$ continua tal que $h_x(x) = 0$ y $h_x(U^c) = 1$. Por lo tanto por hipótesis $h_x^{-1}([0, \frac{1}{2})) \in \tau'$ y concluímos que $U \subseteq \bigcup_{x\in U} h_x^{-1}([0, \frac{1}{2})) \in \tau'$. Por lo tanto $\tau \subseteq \tau'$ y f es inicial.

Finalmente si $x \neq y$ entonces como X es T_4 existe $h : X \to I$ continua tal que $h(x) = 0$ y $h(y) = 1$, por lo tanto $f(x) \neq f(y)$ pues $f(x)_h \neq f(y)_h$; se sigue que f es inyectiva y por lo tanto subespacio. ∎

9. Compactificación de Stone-Cech

Lema 9.1 *Sean $f, g : X \to$ funciones continuas tal que $f|_A = g|_A$ para algún $A \subseteq X$ denso, entonces si Y es T_2 se tiene que $f = g$.*

Demostración Sea $x \in X$, luego como A es denso por 2.10 existe $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ red en A tal que $x_\alpha \to x$, luego por 2.12 se tiene que $g(x) \leftarrow g(x_\alpha) = f(x_\alpha) \to f(x)$ y por 6.5 se tiene que $f(x) = g(x)$. ∎

Definición Sea X un espacio topológico e $i : X \to \prod_{\substack{h:X\to I\\ h\,continua}} I$, definimos $\beta(X) = \overline{i(X)} \subseteq \prod I$ la *compactificación de Stone-Cech* de X.

Observación Notar que $\beta(X)$ es T_2 por 6.6 y además como es cerrado en $\prod_{\substack{h:X\to I\\ h\,continua}} I$ tenemos por 7.20 y 7.7 que es compacto.

Lema 9.2 *Supongamos $f : X \to I$ una función continua, entonces existe una única $g : \beta(X) \to I$ tal que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \\ & I \end{tikzcd}$$

Demostración En efecto, si consideramos $P_f i(X) = (i(X))_f = f(X)$ por lo tanto tenemos que $g = P_f|_{\beta(X)}$ cumple lo pedido. Es más si g' es tal que $g'i = f$ entonces como $g|_{i(X)} = g'|_{i(X)}$ y $\overline{i(X)} = \beta(X)$ se tiene por la observación que $g' = g$. ∎

Teorema 9.3 *Sea X un espacio topológico e $i : X \to \beta(X)$ su compactificación de SC, entonces para todo K espacio compacto y T_2 y $f : X \to K$ continua existe una única $g : \beta(X) \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \\
 & K
\end{tikzcd}$$

Demostración Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & i(X) \arrow[r, hook] & \beta(X) \arrow[drr, dashed, bend left, "\exists! g_h"] & & \\
 & K \arrow[r, "i_K"] & \prod\limits_{\substack{h:K\to I \\ h\, continua}} I \arrow[rr, "P_h"] & & I
\end{tikzcd}$$

Luego como $P_h i_k f$ es continua por 9.2 existe una única función $g_h : \beta(X) \to I$ tal que $P_h i_k f = g_h i$. Luego por 3.2 existe una única $g : \beta(X) \to \prod\limits_{\substack{h:K\to I \\ h\, continua}} I$ continua tal que $P_h g = g_h$ para todo $h : K \to I$ continua.

Por lo tanto hasta ahora el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & i(X) \arrow[r, hook] & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \arrow[drr, dashed, bend left, "g_h"] & & \\
 & K \arrow[r, "i_K"] & \prod\limits_{\substack{h:K\to I \\ h\, continua}} I \arrow[rr, "P_h"] & & I
\end{tikzcd}$$

Y de aquí se ve claro que $P_h i_K f = P_h g i$, luego como $\{P_h\}$ es inicial resulta que $i_K f = gi$.

Por otro lado, como K es compacto se tiene que $i_K(K)$ es compacto en un T_2, por ende por 7.11 es cerrado. Entonces se tiene:

$$g(\beta(X)) = g(\overline{i(X)}) \subseteq \overline{g(i(X))} \subseteq \overline{i_K(K)} = i_K(K)$$

Además como K es compacto y T_2, por 8.4 es T_5, luego T_4 y entonces por 8.12 se tiene que i_K es subespacio. Por lo tanto por 3.4 se tiene que $i_K : K \to i_K(K)$ es homeo y existe $r : i_k(K) \to K$ homeomorfismo tal que $r i_K = 1_K$, luego como $g(\beta(X)) \subseteq i_K(K)$ se tiene que $rg : \beta(X) \to K$ esta bien definida y es continua. Es más el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & i(X) \arrow[r, hook] & \beta(X) \arrow[dl, dashed, "\exists! rg"'] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[drr, dashed, bend left, "g_h"] & & \\
 & K \arrow[r, "i_K"] & \prod\limits_{\substack{h:K\to I \\ h\, continua}} I \arrow[l, dashed, bend left, "r"] \arrow[rr, "P_h"] & & I
\end{tikzcd}$$

Finalmente si $g' : \beta(X) \to K$ fuese otra función que conmutase el diagrama, entonces $g'|_{i(X)} = rg|_{i(X)}$ que es denso en $\beta(X)$ y luego por 9.2 como K es T_2 se tiene que $g' = rg$. ∎

Proposición 9.4 *Propiedad universal de la compactificación de Stone-Cech*

Dado un espacio topológico X existe un único (salvo homeomorfismo) espacio topológico $\beta(X)$ compacto y T_2 y una función $i : X \to \beta(X)$ tal que cumple la siguiente propiedad universal:

- *Para todo espacio compacto y T_2 K y toda función continua $f : X \to K$ existe una única $g : \beta(X) \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \\ & I \end{tikzcd}$$

Demostración Ya vimos que $\beta(X) = \overline{i(X)}$ donde $i : X \to \prod\limits_{\substack{h:X\to I \\ h \text{ continua}}} I$ cumple la propiedad en 9.3. Supongamos que Y, j también la cumple, entonces como Y es compacto y T_2 existe una única $g : \beta(X) \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, bend right, "j"'] & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Por otro lado como $\beta(X)$ es compacto y T_2 se tiene que existe una única $h : Y \to \beta(X)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, bend right, "i"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists! h"'] \\ & \beta(X) \end{tikzcd}$$

Finalmente si consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[drr, bend right, "i"'] & \beta(X) \arrow[dr, dashed, bend right, "hg"'] \arrow[dr, dashed, bend left, "1_{\beta(X)}"] & \\ & & \beta(X) \end{tikzcd}$$

Entonces $hgi = hj = i$ por lo que hg conmuta el diagrama, pero $1_{\beta(X)} i = i$ por lo que por unicidad de la función se tiene que $hg = 1_{\beta(X)}$; similarmente $1_Y = gh$ por lo que g es homeomorfismo y resulta que $\beta(X) \simeq Y$. ∎

Ejemplo

- $\beta(S_\Omega) = \overline{S_\Omega}$

  Como $\overline{S_\Omega}$ es compacto y T_2 basta ver que $i : S_\Omega \to \overline{S_\Omega}$ tiene la propiedad universal. Sea K compacto y T_2 y $f : S_\Omega \to K$ continua y veamos que podemos extender f, para eso veamos que existe $\alpha \in S_\Omega$ tal que $f|_{(\alpha,\Omega]} = cte$.

  Para esto afirmo que existe una sucesión $a_n \in S_\Omega$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que:

$$\sup_{\beta > a_n} |f(\beta) - f(a_n)| \leq 2^{-n} \tag{9}$$

  Supongamos que no existe dicha a_n entonces existiría $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\alpha \in S_\Omega$ existe $\beta > \alpha$ con $|f(\beta) - f(\alpha)| \geq 2^{-k}$; luego en particular tomemos ω_n una sucesión creciente tal que $|f(\omega_{n+1}) - f(\omega_n)| \geq 2^{-k}$. Por 1.8 sabemos que $\{\omega_n\}$ es acotada y creciente, por lo que converge a su supremo $\omega \in S_\Omega$.

  Luego por un lado se tiene que $|f(\omega_{n+1}) - f(\omega_n)| \geq 2^{-k}$ pero por el otro como f es continua y $\omega_n \to \omega$ entonces existe n_0 tal que si $m \geq n_0$ entonces $|f(\omega_{m+1}) - f(\omega_m)| \leq |f(\omega_{m+1}) - f(\omega)| + |f(\omega) - f(\omega_m)| \leq 2^{-k}$; luego existe a_n con la propiedad mencionada. Sea $\alpha = \sup\limits_n a_n$ entonces $f|_{(\alpha,\Omega]}$ es constante por 9.

  Finalicemos definiendo $g : \overline{S_\Omega} \to K$ dado por:

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \in S_\Omega \\ g(\beta) & donde\ \beta \in (\alpha, \Omega]\ y\ x = \Omega \end{cases}$$

Luego se tiene que $gi = f$ y $g|_{[a_0,\beta]} = f|_{[a_0,\beta]}$ es continua por hipótesis, con $a_0 = min(S_\Omega)$ y $\beta \in (\alpha, \Omega]$ fijo, y $g|_{[\beta,\Omega]}$ es constante y por lo tanto continua. Luego como $\overline{S_\Omega} = [a_0, \beta] \cup [\beta, \Omega]$ y son cerrados entonces g es continua por 2.14.

Como $\overline{S_\Omega}$ cumple la propiedad universal, por 9.4 se tiene que $\beta(S_\Omega) \simeq \overline{S_\Omega} = S_\Omega^*$.

- Si X es compacto y T_2 entonces trivialmente $\beta(X) = X$
- Si X es indiscreto, entonces $\beta(X) = *$

  En efecto, sea K compacto y T_2 y $f : X \to K$ continua, como X es indiscreto entonces $f = cte$. Por ende si consideramos $j : X \to *$ la única función (continua!) de X en el singleton y definimos $g(*) = f(x)$ donde $x \in X$ es arbitrario, entonces se tiene que $f(x) = g(j(x))$ y además g es continua pues $*$ es discreto.

  Luego, se concluye que $*$ cumple la propiedad universal y $\beta(X) \simeq *$.

10. Espacio de funciones y ley exponencial

Notación: Dados X, Y espacios topológicos notaremos $\mathcal{C}(X, Y)$ al conjunto de funciones continuas de X a Y.

Observación Notar que $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq Y^X = \prod_{x \in X} Y$

Definición La *topología de convergencia puntual* en $\mathcal{C}(X, Y)$ es la topología subespacio de Y^X considerado con la topología producto.

Observación Si $p_x : Y^X \to Y$ es la proyección y $ev_x : \mathcal{C}(X, Y) \to Y$ la evaluación en x, entonces $ev_x = p_x|_{\mathcal{C}(X,Y)}$. Luego como $\left\{i : \mathcal{C}(X, Y) \to Y^X\right\}$ es inicial y $\{p_x\}_{x \in X}$ es inicial, entonces $\{ev_x = p_x i\}_{x \in X}$ es inicial por 3.5.

Observación Si A, B, C son conjuntos entonces existe una biyección natural entre $C^{A \times B}$ y C^{B^A} dado por $\phi : C^{A \times B} \to C^{B^A}$ definida por $\phi(f)(a)(b) = f(a, b)$ con inversa $\psi(g)(a, b) = g(a)(b)$. A esta biyección se la llama *ley exponencial para conjuntos* y queremos replicar esta idea.

Proposición 10.1 *Sean X, Y, Z espacios topológicos y sea $f : Z \times X \to Y$ continua, entonces $\phi(f) : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ esta bien definida.*

Sea $X \hookrightarrow X \times Z \xrightarrow{f} Y$ entonces $fi(x) = f(x, z) = \phi(f)(z)(x)$ y como i, f es continua entonces $\phi(f)(z)$ es continua para todo $z \in Z$. ∎

Definición Decimos que una topología en $\mathcal{C}(X, Y)$ es *exponencial* si ϕ, ψ restringidas inducen una biyección entre $\mathcal{C}(Z \times X, Y)$ y $\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y))$. Equivalentemente si vale:

1. Si $f : Z \times X \to Y$ es continua entonces $\phi(f) : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ es continua.
2. Si $g : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ es continua entonces $\psi(g) : Z \times X \to Y$ es continua.

Definición Dados X, Y espacios topológicos notaremos $ev : \mathcal{C}(X, Y) \times X \to$ a la *evaluación* dada por $ev(f, x) = f(x)$.

Proposición 10.2 *Una topología en $\mathcal{C}(X, Y)$ cumple 2 si y sólo si ev es continua.*

Demostración Consideremos el siguiente diagrama conmutativo para una $g : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ continua:

$$\begin{tikzcd}
Z \times X \arrow[r, "g\times 1_X"] \arrow[dr, bend right, "\psi(g)"'] & \mathcal{C}(X,Y) \times X \arrow[d, dashed, "ev"'] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

Entonces para un lado es simplemente notar que si $ev, g, 1_X$ son continuas entonces $ev(g \times 1_X) = \psi(g)$ es continua.

Para el otro como para todo Z y $g : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ continua se tiene que $\psi(g)$ es continua, tomemos $Z = \mathcal{C}(X,Y)$ y $g = 1_{\mathcal{C}(X,Y)}$, luego $\psi(g) = ev(1_{\mathcal{C}(X,Y)} \times 1_X) = ev$ es continua. ∎

Observación Notemos que la topología de convergencia puntual en $\mathcal{C}(X,Y)$ tiene como subbase $\left\{ev_x^1(U)\right\}_{x\in X}$ pues $\{ev_x\}_{x\in X}$ es inicial. Pero $ev_x^{-1}(U) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y)\ /\ f(x) \in U\}_{x\in X U\subseteq Y\ abierto} := S(x,U)$.

Definición Sean X, Y espacios topológicos, $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto, denotamos $W(K,U) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y)\ /\ f(K) \subseteq U\}$ y la *topología compacto-abierta* es la que tiene por subbase a $\mathcal{B} = \{W(K,U)\}_{\substack{K\subseteq X\ compacto \\ U\subseteq Y\ abierto}}$ y la notaremos τ_{CA}

Observación Como $\{x\}$ es compacto entonces $S(x,U) = W(\{x\}, U) \in \mathcal{B}$ y por lo tanto la topología compacto-abierta es m
as fina que la de la convergencia puntual.

Proposición 10.3 *Sea τ una topología en $\mathcal{C}(X,Y)$ que satisface 2, entonces $\tau_{CA} \subseteq \tau$.*

Demostración Como vale 2 entonces por 10.2 $ev : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ es continua; sea $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto y veamos que $W(K,U) \in \tau_{CA}$.

Como ev es continua entonces $ev : \mathcal{C}(X,Y) \times K \to Y$ también es continua y entonces $ev^{-1}(U) \subseteq \mathcal{C}(X,Y) \times K$ es abierto. Como K es compacto $p_{\mathcal{C}(X,Y)} : \mathcal{C}(X,Y) \times K \to \mathcal{C}(X,Y)$ es cerrada por 7.2 y entonces $V = p(ev^{-1}(U)^c)^c \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ es abierto. Sea $f \in V$, entonces :

$$\begin{aligned}
f \in V \quad &\iff f \notin p(ev^{-1}(U)^c) \\
&\iff (f,k) \notin ev^{-1}(U)^c\ \forall k \in K \\
&\iff (f,k) \in ev^{-1}(U)\ \forall k \in K \\
&\iff f(k) \in U\ \forall k \in K \\
&\iff f \in W(K,U) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

.

Proposición 10.4 *La topología compacto-abierta satisface 1.*

Demostración Sea $f : Z \times X \to Y$ continua y veamos que $\phi(f)^{-1}(W(K,U)) \subseteq Z$ es abierto para todo $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq U$ abierto.

Luego $V = \phi(f)^{-1}(W(K,U)) = \{z \in Z\ /\ f(z,k) \in U\ /\ \forall k \in K\}$ por lo que $V^c = \{z \in Z\ /\ \exists k \in K\ ,\ f(z,k) \notin U\} = \left\{z \in Z\ /\ \exists k \in K\ ,\ (z,k) \in f^{-1}(U^c)\right\} = p_Z(f^{-1}(U^c) \cap (Z \times K)$. Pero como U es abierto entonces U^c es cerrado y como f continua entonces $f^{-1}(U^c)$ es cerrado; por lo que $f^{-1}(U^c) \cap (Z \times K)$ es un cerrado de $Z \times K$ y como K es compacto por 7.2 $p_Z(f^{-1}(U^c) \cap (Z \times K) = V^c$ es cerrado. Concluímos que V es abierto y $'phi(f)$ es continua. ∎

Definición Sea X un espacio topológico decimos que todo punto de X tiene una *base de entornos compactos* si para todo $x \in X$ y todo entorno $U \ni x$ existe un entorno compacto $K \ni x$ tal que $K \subseteq U$.

Proposición 10.5 *Sean X, Y espacios topológicos tal que X tiene una base de entornos compactos, entonces τ_{CA} cumple 2.*

Demostración Sea $U \subseteq Y$ abierto y $(f, x) \in ev^{-1}(U)$, luego $x \in f^{-1}(U)$ y como X tiene una base de entornos compactos existe $K \subseteq X$ compacto y $V \subseteq X$ abierto tal que $x \in V \subseteq K \subseteq f^{-1}(U)$. Consideremos $W(K, U) \times V$ que es un abierto de $\mathcal{C}(X, Y) \times X$ y sea $(g, y) \in W(K, U) \times V$, entonces $ev((g, y)) = g(y) \in U$ pues $y \in V \subseteq K$, luego $(f, x) \in W(K, U) \times V \subseteq ev^{-1}(U)$ y concluímos que ev es continua, finalizamos con 10.2. ∎

Teorema 10.6 *Sean X, Y espacios topológicos tal que todo punto de X tiene una base de entornos compactos, entonces $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$ es exponencial.*

Demostración Por 10.4 y 10.5 se tiene el resultado ∎

Corolario 10.7 *Si X es localmente compacto y T_2, entonces $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$ es exponencial.*

Demostración Sea $x \in X$ y $U \ni x$ un entorno abierto entonces por 7.15 existe $V \subseteq X$ entorno abierto tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ con $\overline{V}$ compacto, por lo tanto tomando $K = \overline{V}$ se tiene que todo punto de X tiene una base de entornos compactos, luego por 10.6 vale el resultado. ∎

Corolario 10.8 *Sean Z, Y espacios topológicos, entonces $f : Z \times I \to Y$ es continua si y sólo si $\phi(f) : Z \to \mathcal{C}(I, Y)$ es continua. Similarmente $g : Z \to \mathcal{C}(I, Y)$ es continua si y sólo si $\psi(g) : Z \times I \to Y$ es continua.*

Demostración Como I es compacto y T_2 vale 10.7. ∎

Proposición 10.9 *Y es T_0 si y sólo si $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$ es T_0*

Demostración Para un lado, sean $f \neq g \in (\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$, por lo tanto existe $x \in X$ tal que $f(y) \neq g(y)$; como Y es T_0 entonces existe $U \subseteq Y$ abierto tal que $f(x) \in U \not\ni g(x)$; concluímos que $f \in W(\{x\}, U) \not\ni g$ y entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es T_0

Para el otro sean $x \neq y \in Y$, luego $C_x \neq C_y \in \mathcal{C}(X, Y)$ y como es T_0 existe un compacto $K \subseteq X$ y $U \subseteq Y$ tal que $C_x \in W(K, U) \not\ni C_y$, en particular esto dice que $x \in U \not\ni y$; entonces Y es T_0. ∎

Proposición 10.10 *Y es T_1 si y sólo si $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$ es T_1*

Demostración Para un lado, sean $f \neq g \in (\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$, por lo tanto existe $x \in X$ tal que $f(y) \neq g(y)$; como Y es T_1 entonces existen $U, V \subseteq Y$ abiertos tal que $f(x) \in U \not\ni g(x)$ y $g(x) \in V \not\ni f(x)$; concluímos que $f \in W(\{x\}, U) \not\ni g$ y $g \in W(\{x\}, V) \not\ni f$ entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es T_1

Para el otro sean $x \neq y \in Y$, luego $C_x \neq C_y \in \mathcal{C}(X, Y)$ y como es T_1 existen dos compactos $K, H \subseteq X$ y $U, V \subseteq Y$ abiertos tal que $C_x \in W(K, U) \not\ni C_y$ y $C_y \in W(H, V) \not\ni C_x$, en particular esto dice que $x \in U \not\ni y$ y $y \in V \not\ni x$; entonces Y es T_1. ∎

Proposición 10.11 *Y es T_2 si y sólo si $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$ es T_2*

Demostración Para un lado, sean $f \neq g \in (\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$, por lo tanto existe $x \in X$ tal que $f(y) \neq g(y)$; como Y es T_2 entonces existen $U, V \subseteq Y$ abiertos disjuntos tal que $f(x) \in U$,$g(x) \in V$; concluímos que $f \in W(\{x\}, U)$ y $g \in W(\{x\}, V)$ y además como $U \cap V = \emptyset$ necesariamente $W(\{x\}, U) \cap W(\{x\}, V) = \emptyset$, luego $\mathcal{C}(X, Y)$ es T_2

Para el otro sean $x \neq y \in Y$, luego $C_x \neq C_y \in \mathcal{C}(X, Y)$ y como es T_2 existen dos compactos $K, H \subseteq X$ y $U, V \subseteq Y$ abiertos tal que $C_x \in W(K, U)$ y $C_y \in W(H, V)$ con $W(K, U) \cap W(H, V) = \emptyset$, en particular esto dice que $x \in U$,$y \in V$ y $U \cap V 0 \emptyset$; entonces Y es T_2. ∎

Proposición 10.12 *Y es T_3 si y sólo si $(\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$ es T_3*

Demostración Para un lado, sean $f \notin F \subseteq (\mathcal{C}(X, Y), \tau_{CA})$ con F cerrado, luego $f \in F^c$ que es abierto y entonces existe $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto tal que $f \in W(K, U) \subseteq F^c$ queremos ver que existe $V \subseteq Y$ abierto tal que se cumple que $f \in W(K, V) \subseteq W(K, \overline{V}) \subseteq W(K, U) \subseteq F^c$, donde aún debemos ver además (pero tiene sentido) que si $\overline{V} \subseteq U$ entonces dado $K \subseteq X$ compacto vale que $\overline{W(K, V)} \subseteq W(K, U)$.

Sea $k \in K$, luego se tiene que $f(k) \in U$ entorno abierto y como Y es T_3 entonces por 8.1 existe $V \subseteq Y$ abierto tal que $f(k) \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Como k era arbitrario concluímos que $f \in W(K,V) \subseteq \overline{W(K,V)}$. Sea ahora $f \in \overline{W(K,V)}$, luego existe f_α red en $W(K,V)$ tal que $f_\alpha \to f$, entonces $f_\alpha(k) \to f(k)$ pues ev_k es continua para τ_{CA}. Se sigue que $f(k) \in \overline{V} \subseteq U$ y por lo tanto como $k \in K$ era arbitrario tenemos que $f \in W(K,U)$.

Juntando todo, tenemos que existe $V \subseteq Y$ abierto tal que $f \in W(K,V) \subseteq \overline{W(K,V)} \subseteq W(K,U) \subseteq F^c$, luego por 8.1 tenemos que $\mathcal{C}(X,Y)$ es T_3.

Para el otro sean $x \in F^c \subseteq Y$ con $F \subseteq Y$ cerrado, luego si consideramos $H = \{C_y\}_{y \in F}$ entonces $H^c = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) / f(k) \in F^c\ ,\ k \in X\} = \bigcup_{k \in X} S(k,F^c) \supseteq S(k,F^c)$ por lo que H es cerrado en $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_{CA})$. Como $\mathcal{C}(X,Y)$ es T_3 se tiene que existen $K \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abierto tal que $C_x \in W(K,V) \subseteq \overline{W(K,V)} \subseteq W(K,F^c)$.

Ahora sea $g \in W(K,\overline{V})$ y $k \in K$, luego existe v_α^k tal que $v_\alpha^k \to g(k)$, por lo tanto si consideramos $g_\alpha = C_{v_\alpha^k}$ tenemos que dado $k \in K$ y g existe g_α red en $W(K,V)$ tal que $g_\alpha \to g$ y por lo tanto $g \in \overline{W(K,V)}$. Concluímos que $C_x \in W(K,V) \subseteq W(K,\overline{V}) \subseteq \overline{W(K,V)} \subseteq W(K,F^c)$ y esto es equivalente a que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$; concluímos que Y es T_3 por 8.1. ∎

Observación Veamos ejemplos de funciones continuas entre espacios de funciones:

1. Sean X, Y espacios topológicos y $A \subseteq X$ subespacio, entonces si dotamos a $\mathcal{C}(X,Y)$ y $\mathcal{C}(A,Y)$ de la topología compacto-abierta entonces r_A dada por $r_A(f) = f|_A$ es continua.

   En efecto, sea $W(K,V) \subseteq \mathcal{C}(A,Y)$ un abierto subbásico y consideremos $r_A^{-1}(W(K,V)) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y)\ /\ f(K) \subseteq V$ pues $K \subseteq A$ es compacto en A. Pero $K \subseteq X$ es compacto también, por lo tanto $r_A^{-1}(W(K,V)) = W(K,V)$ y entonces r_A es continua.

2. Sean X, Y, Z espacios topológicos y consideremos $\circ : \mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Z)$ con las topologías compacto-abierta, entonces $\circ$ es continua.

   Sea $W(K,U) \subseteq \mathcal{C}(X,Z)$ y consideremos $\circ^{-1}(W(K,U)) = \{f \in \mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y)\ /\ f(K) \subseteq U\} = \{(f_1,f_2) \in \mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y)\ /\ f_1(f_2(K)) \subseteq U\}$. Cor lo tanto tenemos que $f_2(K) \subseteq f_1^{-1}(U)$ donde $f_2(K)$ es compacto pues f_2 es continua y $f_1^{-1}(U)$ es abierto pues f_1 es continua; si hallamos $V \subseteq Y$ abierto tal que $f_2(K) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq f_1^{-1}(U)$ con $\overline{V}$ compacto entonces tendríamos que $W(\overline{V},U) \times W(K,V) \subseteq \circ^{-1}(W(K,U))$ y entonces $\circ$ sería continua.

   Para esto consideremos Y^* la compactificación de un punto de Y que existe por 7.21, entonces $H = Y^* \setminus f_1^{-1}(U)$ es cerrado en Y^* y por 7.7 compacto, además es disjunto de $f_2(K)$, luego por 8.4 existen $V, G \subseteq Y^*$ abiertos tal que $f_2(K) \subseteq V$, $H \subseteq G$. Como además $\overline{V} \cap G = \emptyset$ y $\overline{V}$ es cerrado entonces $\overline{V}$ es compacto y cumple que $\overline{V} \subseteq f_1^{-1}(U)$. ∎

Proposición 10.13 *Si $p : E \to B$ es cociente y X es localmente compacto y T_2, entonces $p \times 1_X : E \times X \to B \times X$ es cociente*

Demostración Hay que ver que $p \times 1_X$ es continua, sobreyectiva y final:

- Como p es cociente es sobreyectiva y como 1_X es sobreyectiva se tiene que $p \times 1_X$ es sobreyectiva.

- Como $\{p_B, p_X\}$ es inicial para $B \times X$ entonces $p \times 1_X$ es continua si y sólo si $p_B(p \times 1_X) = p, p_X(p \times 1_X) = 1_X$ son continuas, pero esto es trivial por hipótesis.

- Para ver que es final por 3.8 sea Y un espacio topológico y $f : B \times X \to Y$ tal que $f(p \times 1_X) : E \times X \to Y$ es continua.

  Como X es localmente compacto y T_2 por 10.7 se tiene que $\phi(f) : E \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua, pero $\phi(f)(e)(x) = f(e,x)$, luego f es continua; concluímos que $p \times 1_X$ es final. ∎

Parte II
Teoría de homotopía

Teoremas y ejercicios varios porque no llegue a pasar la carpeta:

11. Revestimientos y levantamientos

Teorema 11.1 *Sea $p : E \to B$ un revestimiento, X un espacio topológico conexo y $x_0 \in X$; entonces si $f, g : X \to E$ cumplen que $pf = pg$ y $f(x_0) = g(x_0)$ entonces $f = g$.*

Demostración Sea $A = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\} \subseteq X$, entonces $x_0 \in A \neq \emptyset$.

Sea ahora $x \in A$ y $U \ni p(f(x))$ un entorno parejamente cubierto, luego $p^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} V_j$ donde cada $V_j \subseteq E$ es abierto y cumple que $p|_{V_j} \to B$ es homeomorfismo. Como $f(x) \in p^{-1}(U)$ entonces existe $j_0 \in J$ tal que $f(x) = g(x) \in V_{j_0}$y consideremos $V = f^{-1}(V_{j_0}) \cap g^{-1}(V_{j_0})$, si $y \in V$ entonces $f(y), g(y) \in V_{j_0}$ pero $pf(y) = pg(y)$ y $p|_{V_{j_0}}$ es homeomorfismo, por lo tanto $f(y) = g(y)$; concluímos que $x \in V \subseteq A$.

Finalmente sea $x \in A^c$ y sea $U \ni pf(x)$ un entorno parejamente cubierto de $pf(x)$, luego existe j_0 tal que $f(x) \in V_{j_0}$ y $p|_{V_{j_0}}$ es homeomorfismo; por lo tanto como $x \notin A$ entonces $g(x) \in V_{j_1} \neq V_{j_0}$. Consideremos $V = f^{-1}(V_{j_0}) \cap g^{-1}(V_{j_1})$ y tomemos $y \in V$, luego $f(y) \in V_{j_0}, g(y) \in V_{j_1}$ y $V_{j_0} \cap V_{j_1} = \emptyset$ por lo que $y \in V \subseteq A^c$.

Como A es cerrado, abierto y no vacío entonces $A = X$ y concluímos que $f = g$. ∎

Teorema 11.2 *Sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(b_0)$; luego si $\gamma : I \to B$ es un camino que empieza en b_0, entonces existe un único $\widetilde{\gamma} : I \to E$ camino levantado que empieza en e_0*

Demostración Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de B por abiertos parejamente cubiertos, luego $\mathcal{B} = \{\gamma{-}1(U) \ / \ U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento por abiertos de I; por lo tanto como I es un espacio métrico compacto admite un número de Lebesgue $\delta > 0$.

Sea $\{t_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una suceción creciente de I tal que $t_0 = 0, t_n = 1$ y $|[t_i, t_{i+1}]| < \delta$, entonces consideremos $[t_0, t_1]$ que al tener diámetro menor a *delta* se tiene que $\gamma([t_0, t_1]) \subseteq U_0 \in \mathcal{U}$. Como U_0 esta parejamente cubierto entonces existe un único $V_{j_0} \subseteq p^{-1}(U_0)$ abierto tal que $p|_{V_{j_0}}$ es homeomorfiamo y $e_0 \in V_{j_0}$, luego definimos $\widetilde{\gamma}_0 : [t_0, t_1] : E$ dado por $\widetilde{\gamma}_0 = (p|_{V_{j_0}})^{-1}\gamma|_{[t_0,t_1]}$ que es continua.

Sea ahora $b_1 = \gamma(t_1)$ y $e_1 = \widetilde{\gamma}_0(t_1)$, luego $p(e_1) = p|_{V_{j_0}}(e_1) = p|_{V_{j_0}}(p^{-1}|_{V_{j_0}}(\gamma(t_1))) = \gamma(t_1) = b_1$ y por lo tanto $e_1 \in p^{-1}(b_1)$. Recursivamente definimos $\widetilde{\gamma}_i = (p|_{V_{j_i}})^{-1}\gamma_{[t_i,t_{i+1}]}$ donde $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ y $V_{j_i} \subseteq p^{-1}(U_i)$ es el único elemento tal que $\widetilde{\gamma}_{i-1}(t_i) = e_i \in V_{j_i}$.

Definimos $\widetilde{\gamma} : I \to E$ dado por $\widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{\gamma}_i(t)$ si $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Luego $p\widetilde{\gamma} = \gamma$ y además $\widetilde{\gamma}|_{[t_i,t_{i+1}]}$ es continua, luego por 2.14 tenemos que $\widetilde{\gamma}$ es continua.

Si γ' es otro levantado de γ que empieza en e_0, entonces por 11.1 se tiene que $\gamma' = \widetilde{\gamma}$. ∎

Teorema 11.3 *Sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(b_0)$; luego si $H : I \times I \to B$ es una homotopía tal que $H(0, 0) = b_0$, entonces existe un único $\widetilde{H} : I \times I \to E$ homotopía levantada tal que $\widetilde{H}(0, 0) = e_0$*

Demostración Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de B por abiertos parejamente cubiertos, luego $\mathcal{B} = \{H{-}1(U) \ / \ U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento por abiertos de $I \times I$; por lo tanto como $I \times I$ es un espacio métrico compacto admite un número de Lebesgue $\delta > 0$.

Sea $\{R_{i,j}\}_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}}$ una partición de $I \times I$ de diámetro menor a δ, entonces consideremos $R_{0,0}$ que al tener diámetro menor a *delta* se tiene que $H(R_{0,0}) \subseteq U_{0,0} \in \mathcal{U}$. Como $U_{0,0}$ esta parejamente cubierto entonces existe un único $V_{0,0} \subseteq p^{-1}(U_{0,0})$ abierto tal que $p|_{V_{0,0}}$ es homeomorfismo y $e_0 \in V_{0,0}$, luego definimos $\widetilde{H}_{0,0} : R_{0,0} \to E$ dado por $\widetilde{H}_{0,0} = (p|_{V_{0,0}})^{-1}H|_{R_{0,0}}$ que es continua.

Sea ahora $b_{1,0} = H(s_1, t_0)$ donde (s_1, t_0) es el extremo inferior derecho de $R_{0,0}$ y $e_{1,0} = \widetilde{H}_{0,0}(s_1, t_0)$, luego $p(e_{1,0}) = p|_{V_{0,0}}(e_{1,0}) = p|_{V_{0,0}}(p^{-1}|_{V_{0,0}}(H(s_1, t_0))) = H(s_1, t_0) = b_{1,0}$ y por lo tanto $e_{1,0} \in p^{-1}(b_{1,0})$.

Recursivamente definimos $\widetilde{H}_{i,j} = (p|_{V_{i,j}})^{-1} H|_{[R_{i,j}}$ donde $H(R_{i,j}) \subseteq U_{i,j}$ y $V_{i,j} \subseteq p^{-1}(U_{i,j})$ es el único elemento tal que $\widetilde{H}_{i-1,j-1}(s_i, t_i) = e_{i,j} \in V_{i,j}$.

Definimos $\widetilde{H} : I \times I \to E$ dado por $\widetilde{H}(t) = \widetilde{H}_{i,j}(t)$ si $t \in R_{i,j}$. Luego $p\widetilde{H} = H$ y además $\widetilde{H}|_{R_{i,j}}$ es continua, luego por 2.14 tenemos que $\widetilde{H}$ es continua.

Si H' es otro levantado de H que empieza en $e_{0,0}$, entonces por 11.1 se tiene que $H' = \widetilde{H}$.

Finalmente para ver que $\widetilde{H}$ es una homotopía de caminos usemos el siguiente lema:

Lema 11.4 *Si $p : E \to B$ es un revestimiento, la fibra $E_b = p^{-1}(b)$ es un subespacio discreto de E para todo $b \in B$.*

Demostración (Del lema)

Sea $p : E \to B$ y $b \in B$, entonces como p es revestimiento $\exists U \ni b$ abierto de B tal que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$ con V_i abiertos disjuntos y $p|_{V_i} : V_i \to B$ es homeo.

Supongamos que $\exists j_0 \in I$ tal que $\left|p^{-1}(b) \cap V_{j_0}\right| > 1$ y sean $v_1, v_2 \in V_{j_0}$ dichos elementos tal que $p(v_1) = p(v_2) = b$, pero entonces $p|_{V_{j_0}}$ no es inyectiva y por ende no es homeo! Abs!

Por ende $p^{-1}(b) \cap V_i = \{v_i\}$ $\forall i \in I$, y si E_b tiene la topología subespacio entonces de la ecuación anterior se ve que es discreto. ∎

Ahora notemos que $H(\{0\} \times I) = b_0$ y por lo tanto $\widetilde{H}(\{0\} \times I) \subsetneq p^{-1}(b_0)$; como $(\{0\} \times I$ es conexo, $\widetilde{H}$ es continua, y por 11.4 entonces $\widetilde{H}(\{0\} \times I) = e_0$ y concluímos que $\widetilde{H}$ es una homotopía de caminos. ∎

Corolario 11.5 *Sea $p : E \to B$ un revestimiento, $b_0, b_1 \in B$ y $e_0 \in E_{b_0}, e_1 \in E_{b_1}$ y $\gamma, \omega : I \to B$ caminos de b_0 a b_1 tal que $\gamma \simeq_c \omega$; entonces se tiene que $\widetilde{\gamma} \simeq_c \widetilde{\omega}$.*

Demostración Sea $H : \gamma \simeq_c \omega$ y $\widetilde{H}$ es levantado de H desde e_0 por 11.3, luego $p\widetilde{H}(-,0) = H(-,0) = \gamma$ y $\widetilde{H}(0,0) = e_0 = \widetilde{\gamma}(0)$; por lo tanto por 11.2 se tiene que $\widetilde{H}(-,0) = \widetilde{\gamma}$.

Análogamente se tiene que $\widetilde{H}(0,-) = C_{e_0}, \widetilde{H}(-,1) = \widetilde{\omega}$ y $\widetilde{H}(1,-) = C_{e_1}$; concluímos que $\widetilde{H} : \widetilde{\gamma} \simeq_c \widetilde{\omega}$

∎