Topología– 2° cuatrimestre 2015
Teorema Van Kampen

Ejercicio para entregar

Demostración Vamos por partes!

Sea $p = (1,0,0) \in S^2$, $U = B(p,\epsilon) \cap S^2$ con $\epsilon > 0$ decentemente pequeño para no tocar los polos; y sea $V = X - \overline{B(p,\epsilon-\epsilon')} \cap S^2$ con $0 < \epsilon - \epsilon' < \epsilon$. Entonces notemos que $U \cap V$ es el anillo rodeando a p sobre S^2; entonces tenemos que $U, V, U \cap V$ son abiertos arco-conexos no vacíos. Por el teorema de Van-Kampen tenemos que $\pi_1(X) = \pi_1(U) * \pi_1(V) / < i^{-1}([\omega]) j([\omega])\ ,\ [\omega] \in \pi_1(U \cap V) >$, y nos basta calcular estos grupos!

1. $\pi_1(U)$

   Notemos que $U \simeq \{*\}$ y por ende $\pi_1(U) = \pi_1(\{*\}) = 0$

2. $\pi_1(U \cap V)$

   Es simple ver que $U \cap V \simeq S^1$ el círculo rodeando a p. Por ende $\pi_1(U \cap V) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

3. $\pi_1(V)$

   En general uno tiene que $S^2 - \{p\} \simeq \mathbb{R}^2 \simeq D^2$ y por ende $V - \{\{0\} \times \{0\} \times (-1,1)\} \simeq D^2$. Ahora si seguimos la deformación de los polos uno ve que esta recta se va deformando en una manija uniendo los dos puntos internos! Llamemos α a esta manija entre los puntos internos de D^2 a donde paran los polos, lo que decimos es que $V \simeq D^2 \cup \alpha$. Ahora si es fácil ver que $D^2 \cup \alpha \simeq [-1,1] \times \{0\} \times \{0\} \cup \{x^2 + y^2 = 1\ ,\ y > 0\ , z = 0\}$ porque aplastamos el disco al eje x (que se puede por ser contráctil) y la manija la rotamos al plano $z = 0$. Pero $[-1,1] \times \{0\} \times \{0\} \cup \{x^2 + y^2 = 1\ ,\ y > 0\ , z = 0\} \simeq S^1$ y entonces tenemos que $V \simeq S^1$ y entonces $\pi_1(V) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

4. Hallemos la presentación de $\pi_1(X)$

   Como $\pi_1(U \cap V) =< [\omega] >$ donde ω es el lazo de los puntos a distancia chica en la esfera, ie : $\omega = B(p,\delta) \cap S^2 \subset U \cap V$. Ahora como $\omega(t) \notin \{0\} \times \{0\} \times [-1,1]\ \forall t \in I$ tenemos que (si llamamos f a la equivalencia homotópica entre V y el disco con manija) $[i([\omega])] = [f([\omega])] = [\omega']$ donde $\omega' \subset D^2$ y por ende es un lazo null-homotópico, o sea $i([\omega]) = 0$. Como trivialmente $j^{-1}([\omega]) = 0$ pues U es contráctil tenemos que $N = 0$ y por ende $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * 0/0 = \mathbb{Z}$

Teorema de Van Kampen

1. Determine los grupos fundamentales de los siguientes espacios:

   a) $T^2 - \{\overline{p}\}$

   Demostración Hagamos la identificación $T^2 = I \times I\ /\!\sim$ donde $\sim$ es la conocida (Como se hacen los dibujitos de cuadrados con flechitas Ximee???). Notemos que vía la homotopía lineal podemos asumir que $\overline{p} = q((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = q(p)$ donde $q(x) = [x]_\sim$. Ahora sea $f(x) = \frac{x}{\|x\|_\infty}$ es claro que $f : I \times I \to \partial(I \times I)$ y es continua, veamos que es una equivalencia homotópica con inversa $i(x) = x$!

   Notemos que $fi(x) = f(x) = x$ pues $\|x\|_\infty = 1$ y por ende $fi = 1_{\partial(I \times I)}$

   Por otro lado $if(x) = \frac{x}{\|x\|_\infty}$, sea $H : (I \times I) \times I \to I \times I$ dada por $H((x,t),s) = s * (x,t) + (1 - s)(f(x,t))$ entonces como $(x,t) \neq (0,0)$ H esta bien definida y es continua. Además tenemos que $H_0 = if$ y $H_1 = 1_{I \times I}$, por ende f es equivalencia homotópica.

   Ahora vamos a probar que f baja al cociente como equivalencia homotópica (porúnica vez modulo parcial estas cuentas)

Nosotros sabemos que $qf : I \times I \to \partial(I \times I) \ /\!\sim$ es continua, además si $x \sim y$ entonces $x, y \in \partial(I \times I)$ y por ende $f(x) = x \sim f(y) = y$, o sea que qf respeta $q_\sim$.
Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I \times I - \{p\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_\sim"'] & \partial(I \times I) \arrow[d, "q_\sim"'] \\
I \times I - \{p\} \ /\!\sim \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \partial(I \times I) \ /\!\sim
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \times I - \{p\} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q_\sim"'] & \partial(I \times I) \arrow[d, "q_\sim"'] \\
I \times I - \{p\} \ /\!\sim \times I \arrow[r, dashed, "\overline{H}"] & \partial(I \times I) \ /\!\sim
\end{tikzcd}$$

Finalmente sea $\overline{H}(\overline{(x,t)}, s) = s\overline{(x,t)} + (1-s)\overline{f}(\overline{(x,t)})$ es fácil ver que H bajaba al cociente y entonces $\overline{H}$ es continua y hace que $1_{I \times I - \{p\} \ /\sim} \simeq \overline{if}$ $(\overline{H})$ pues $f(\overline{(x,t)}) = f(x,t)$. Entonces tenemos que $I \times I - \{p\} \ /\!\sim \ \simeq \partial(I \times I) \ /\!\sim$.
Ahora por la práctica sabemos que $\partial(I \times I) \ /\!\sim \ \simeq S^1 \vee S^1$ y entonces tenemos que $T^2 - \{p\} \simeq S^1 \vee S^1$ y entonces $\pi_1(T^2 - \{p\}) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ∎

Observación Hagamos de yapa el $T^2 - \{p_1, ..., p_k\}$!!

Demostración Vía la misma idea ubiquemos a todos los $\{p_1, ..., p_k\} \in B((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{2}) \subset I \overset{\circ}{\times} I$ con $p := p_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y ahora si sea $A := \{r \in I \ / \ \{p_1, ..., p_k\} \subset B(p,r) \ y \ B(p,r) \subset I \times I\}$, sabemos que A está acotado y es no vacío pues, por ejemplo $\frac{1}{2} \in A$ entonces sea y $r = inf \ A + \epsilon'$. Sea $U = B(p,r)$ y sea $V = I \times I - \overline{B(p,r')}$ con r' tal que $inf \ A < r' < r$ que existe por la propiedad delínfimo; entonces tenemos que $U, V, U \cap V$ son abiertos no vacíos arco-conexos, por el teorema de Van Kampen tenemos que $\pi_1(T^2 - \{p_1, ..., p_k\}) = \pi_1(U) * \pi_1(V) \ /N$ veamos cada uno para dar una presentación!!

1) $\pi_1(U)$
   Sean $S_i = \partial(B(p_i, \epsilon))$ con $\epsilon > 0$ tal que $S_i \cap S_j = \emptyset$ y sean α_i caminos tal que $\alpha_i(0) \in S_i$, $\alpha_i(t) \notin S_i \ \forall i \in \{1, ..., k\}$, $\forall t \in (0,1)$, $\alpha(1) \in S_{i+1}$, $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$ (o sea los caminos disjuntos que unen estas esferas). Entonces como D^2 es contráctil tenemos que $U \simeq \bigcup_{i=1}^k S_i \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \alpha_i(I)$, ahora uno puede ir contrayendo los $\alpha_i(I)$ de a uno y entonces obtenemos que $U \simeq S_1 \vee_1 (S_2 \vee_2 (... \vee_k S_k))$, o sea la primera wedge la segunda, y estas dos wedge por otro punto diferente a una tercera y asi iterativamente. Entonces por el corolario de la teórica tenemos que $\pi_1(U) = \pi_1(S_1) * \pi_1(S_2 \vee_2 (S_3 \vee_3 ...)) = \pi_1(S_1) * \pi_1(S_2) * ... * \pi_1(S_k)$, esto podemos usar inducción simplemente. Ahora como $S_j \simeq S^1 \quad \forall j \in \{1, ..., k\}$ tenemos que $\pi_1(U) = *_{i=1}^k \mathbb{Z}$
2) $\pi_1(V)$
   Es claro que aquí aplica lo hecho anteriormente y por ende $\pi_1(V) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
3) $\pi_1(U \cap V)$
   Como antes es fácil ver que $U \cap V \simeq S^1$ y por ende $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$
4) Hallemos la presentación!
   Agarremos el lazo $\omega = \epsilon * e^{2\pi i t} + p$ o sea el círculo rodeando a p que es el generador de $\pi_1(U \cap V)$ y veamos que le pasa en ambos grupos!
   - En U:
     Notemos que $i([\omega]) = [1][2]...[k]$ si notamos $< [i] >= \pi_1(S_i)$ pues dar una vuelta por el círculo grande es lo mismo que dar una vuelta por cada circulito pequeño.

- En V:
  Acá es fácil ver que $j([\omega]) = aba^{-1}b^{-1}$ por lo mismo que vimos en la práctica al calcular el $\pi_1(T^2)$

Entonces tenemos que $\pi_1(T^2 - \{p_1, ..., p_k\}) =< a, b, 1, 2, ..., k | aba^{-1}b^{-1} * 12...k = 0 >$ Y dios sabe que tan lindo sea eso... ∎

b) $\mathbb{R}P^2 - \{\overline{p}\}$

Demostración Recordemos que podemos representar a $\mathbb{R}P^2 \simeq I \times I \ /\!\sim$ donde ahora $\sim$ es la de lados cruzados (Quiero poder escribir el dibujito y no se hacerloo =(). Entonces igual que antes con el toro, podemos decir que $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y entonces, por el item anterior tenemos que $I \times I \ /\!\sim \ \simeq \partial(I \times I) \ /\!\sim$. Ahora notemos que en este caso por la práctica tenemos que $\partial(I \times I) \ /\!\sim \ \simeq S^1$ y entonces tenemos que $\mathbb{R}P^2 - \{\overline{p}\} \simeq S^1$ y por ende $\pi_1(\mathbb{R}P^2 - \{\overline{p}\}) = \mathbb{Z}$ ∎

Observación Acá mucho sentido no tiene para mí calcular el $\pi_1(\mathbb{R}P^2 - \{p_1, ..., p_n\})$ pues es la misma idea que antes.

c) $S^n \vee S^n$

Demostración Acá podemos hacerlo de dos maneras!

1) Usando el siguiente corolario de la teórica:

   Corolario 0.1 *Sean X, Y espacio topológicos con $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$ tal que $\{x_0\} \subset X$ y $\{y_0\} \subset Y$ son cerrados. A su vez sean $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos tal que $\{x_0\} \subset U$ y $\{y_0\} \subset Y$ son RDF. Entonces si consideramos $X \vee_{x_0 \sim y_0} Y$ resulta que tenemos que $\pi_1(X \vee Y, \overline{x_0}) = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$*

   Pues si notamos al punto de adjunción como $\{(0, ..., 0)\}$, que es cerrado, entonces si llamamos $U = S^n - \{(-2, 0, ..., 0)\}$ y $V = S^n - \{(2, 0, ..., 0)\}$ entonces tenemos que U y V son RDF de $\{(0, 0, ..., 0)\}$(Por la práctica 6) y entonces tenemos por 0.1 que $\pi_1(S^n \vee S^n) = \pi_1(S^n) * \pi_1(S^n) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ \chi_{\{n=1\}}$ ∎

2) Usando Van Kampen
   Pues aquí llamo a $U = X - \{(-1, 0, ..., 0)\}$ y $V = X - \{(1, 0, ..., 0)\}$ entonces $U \simeq S^n$ y $V \simeq S^n$ (a los dos distintos) y $U \cap V \simeq \{x_0\}$; por lo que $\pi_1(S^n \vee S^n) = \pi_1(U) * \pi_1(V)/0 = \pi_1(S^n) * \pi_1(S^n) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ \chi_{\{n=1\}}$ ∎

d) $S^1 \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$

Demostración 1) A lo práctica 6

   Recordemos que $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \simeq \mathbb{R}_{\geq 0}$ y entonces es contráctil, más aún tenemos que $\{1\}$ es un RDF de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y entonces tenemos que $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ es un RDF del $\{(1, 0)\}$. Probemoslo!
   Sea $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \times I \to \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ dada por $H((x, 0), t) = (x, 0) * t + (1 - t)(1, 0)$ entonces H es continua y $H_1 = 1_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}}$ y $H_0 = C_{(1,0)}$ y $H_{(1,0)} = (1, 0)$, que prueba lo dicho.
   Afirmo que si extiendo H a $S^1 \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ como la identidad, entonces $\widetilde{H}$ será la homotopía buscada entre S^1 y $S^1 \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$. En efecto pues S^1 y $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ son cerrados que generan al espacio, $\widetilde{H}|_{S^1} = 1_{S^1}$ es continua, $\widetilde{H}|_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}} = H$ es continua y $\widetilde{H}|_{S^1 \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}} = \widetilde{H}|_{(1,0)} = (1, 0)$ o sea que es compatible. Entonces por el lema del pegado $\widetilde{H} : S^1 \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ es continua.
   Notemos que $\widetilde{H}_0 = f$ y $\widetilde{H}_1 = 1_{S^1 \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}}$ con $f = 1_{S^1} * \chi_{S^1} + C_{(1,0)} * \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}}$ por lo que $S^1 \simeq S^1 \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ y entonces $\pi_1(S^1 \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}) = \mathbb{Z}$ ∎

2) Usando Van Kampen

   Sea $U = X - \{(0, 0)\}$ y $V = B((0, 0), \epsilon) \cap X$ entonces $U, V, U \cap V$ son abiertos arco-conexos y además por la práctica 6 tenemos que $U \simeq S^1$, $V \simeq \{*\}$ y $U \cap V \simeq \{*\}$, entonces por Van Kampen tenemos que $\pi_1(X) = \pi_1(S^1) * 0/0 = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ∎

e) $S^1 \cup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R})$;

Demostración Inspirados en el anterior, sea $U = X \setminus \{(0,0)\}$ y $V = B((0,0),\epsilon) \cap X$ entonces $U, V, U \cap V$ son abiertos arco-conexos. Además tenemos que V y $U \cap V$ son contráctiles y por la práctica 6 $U \simeq S^1$ vía $f = \frac{x}{\|x\|_2}$. Entonces si juntamos todo tenemos que $\pi_1(X) = \pi_1(S^1) * 0/0 = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ∎

f) $S^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$;

Demostración X resulta mas interesante, porque si primero usamos (usando la f de antes) $\widetilde{f} = f\chi_{\|x\|_2 \geq 1} + 1_X \chi_{\|x\|_2 \leq 1}$ entonces $\widetilde{f}|_{\|x\|_2 \geq 1} = f$ es continua, $\widetilde{f}|_{\|x\|_2 \leq 1} = 1_X$ es continua y $\widetilde{f}|_{\|x\|_2 = 1} = 1_X$ es compatible. Entonces por el lema del pegados sobre los cerrados $F_1 = \{\|x\|_2 \geq 1\}$ y $F_2 = \{\|x\|_2 \leq 1\}$ uno tiene que $\widetilde{f}$ es continua. Más aún si tomamos $H = t1_X + (1-t)\widetilde{f}$ entonces vía $\widetilde{f}$ uno tiene que $X \simeq S^1 \cup [-1,1] \times \{0\}$ $(rel\ S^1 \cup [-1,1] \times \{0\})$. Ahorá si retraemos este último espacio al $(0,0)$ por el eje x afirmo que $X \simeq S^1 \vee S^1$ $(rel\ S^1 \vee S^1)$ y entonces $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ∎

Afirmación $S^1 \cup [-1,1] \times \{0\} \simeq S^1 \vee S^1$

Demostración Lo haremos en dos partes:

1) $q : X \to X/[-1,1] \times \{0\}$ es equivalencia homotópica.
Esta es resultado de tomar la homotopía que retrae el eje x al punto $(0,0)$ de forma continua, entonces esta homotopía cumple las hipótesis del ejercicio 6 de la práctica 6, por ende q es equivalencia homotópica.
2) $X/[-1,1] \times \{0\} \simeq S^1 \vee S^1$
Estoy seguro que debe valer pero no lo se probar...

Observación No se me ocurrieron abiertos para usar Van Kampen y evitar las cuentas...

g) $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$.

Demostración Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$ y $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y < 0 \ o(\ x < 0 \ , \ y < 1 \ )\}$, entonces $U, V, U \cap V$ son abiertos arco-conexos no vacíos y $\pi_1(U) = 0$ y $\pi_1(V) = 0$ por lo que $\pi_1(X) = 0$ ∎

2. Sea $n \geq 3$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Pruebe que $\mathbb{R}^n \setminus A$ es simplemente conexo.

Demostración Sea $A = \{p_1, ..., p_k\}$ y $V_i \ni p_i$ dada por $V_i = S_\epsilon(p_i)$ y sean $\alpha_{i,i+1}$ el camino que una a los entornos V_i con V_{i+1}. Sea $B = \bigcup_{i=1}^k V_i \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \alpha_{j,j+1}$ (Los entornos unidos por los caminos), entonces B es arco-conexo y $\mathbb{R}^n - A \simeq B$. Ahora es claro que $B \simeq S_1 \vee_1 (S_2 \vee_2 (S_3 \vee_3 \dots))$ (contraemos los $\alpha_{i,i+1}(I)$ a un punto) entonces por inducción tenemos que $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A) = \pi_1(B) = *_{i=1}^k \pi_1(S^n) = *_{i=1}^k \mathbb{Z} \ \chi_{n=1}$ ∎

3. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ la unión de abiertos convexos $X_1 \cdots X_n$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \varnothing$ para todo i, j, k. Muestre que X es simplemente conexo.

Demostración Hagamoslo por inducción!

- $k = 2$
Aquí usemos el argumento clave que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y abierto entonces $A \simeq D^n \simeq \{*\}$. Entonces tomamos $U = X_1$ y $V = X_2$ entonces como por hipótesis $U \cap V \neq \emptyset$ y es abierto y convexo trivialmente, tenemos que $U, V, U \cap V$ son abiertos arco-conexos, no vacíos y simplemente conexos, entonces $\pi_1(X_1 \cup X_2) = 0$ por Van Kampen.

- $k \to k+1$
  Sea $U = X_{k+1}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{k} X_k$ entonces U y V son abiertos arco-conexos y simplemente conexos por hipótesis inductiva; bastaría ver que $U \cap V$ es abierto arco-conexo no vacío. Notemos que $U \cap V = \bigcup_{i=1}^{k} X_i \cap K_{k+1}$, pero dado $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ uno tiene que $X_i \cap X_j \cap X_{k+1} \neq \emptyset$ y entonces sea $x_0 \in X_i \cap X_j \cap X_{k+1}$, como $X_i \cap X_{k+1}$ es arco-conexo $\exists \alpha_i$ camino de algún punto x_1 a x_0, y análogo con $x_2 \in X_j \cap X_{k+1}$, por lo que $\alpha_1 * \alpha_2$ es un camino de algún punto de $X_i \cap X_{k+1}$ a $X_j \cap X_{k+1}$ por lo que $U \cap V$ es arco-conexo. Por Van Kampen $\pi_1(X) = 0$

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_i la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(n, 0)$ y radio n. Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0,0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo libre $*_{n \in \mathbb{N}} \pi_1(C_n)$, el mismo que el grupo fundamental del wedge infinito $\bigvee_{n \in N} S^1$. Muestre que X y $\bigvee_{n \in N} S^1$ son homotópicamente equivalentes, pero no homeomorfos.

   Demostración *a)* $\pi_1(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) \simeq *_{n \in \mathbb{N}} \pi_1(C_n)$

   Hallemos un isomorfismo entre $\pi_1(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n)$ y $*_{n \in \mathbb{N}} \pi_1(C_n)$!!
   Como nosotros tenemos la intuición que, si llamamos $\alpha_n : I \to C_n$ al lazo que recorre una vez C_n, $< \alpha_n >_{n \in \mathbb{N}} = *_{n \in \mathbb{N}} \pi_1(C_n)$ entonces notemos que $i_{n_*} : \pi_1(C_n, (0,0)) \to \pi_1(X)$ es morfismo de grupos $\forall n \in \mathbb{N}$. Por la propiedad universal del coproducto $\exists \phi : *_{n \in \mathbb{N}} \pi_1(C_n) \to \pi_1(X)$. Veamos que ϕ es iso!

   - ϕ es epi
     Para eso sea $[\omega] \in \pi_1(X)$ notemos que $\omega(I)$ es compacto pues ω es continua, y entonces $\omega(I)$ es acotado, supongamos que $\|\omega(I)\| \leq N$. Llamemos $r_N : X \to \bigcup_{i=1}^{N} C_n$ retracción dada por $r_N = 1_X \ \chi_{\bigcup_{n \leq N} C_n} + C_(0,0) \ \chi_{\bigcup_{n \geq N} C_n}$, entonces por lo dicho anteriormente $\omega \simeq r_N \omega$ y por ende $[\omega] \in \pi_1(\bigcup_{i=1}^{N} C_N) = *_{i=1}^{N} \mathbb{Z} = *_{i=1}^{N} \pi_1(C_n)$ donde la última igualdad es por inducción. Por ende $\phi([r_N \omega]) = [\omega]$ y ϕ es epi.
   - ϕ es mono
     Supongamos que $\phi([\omega]) = 0$, entonces $\exists H : I \times I \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ continua tal que $H_0 = C_{(0,0)}$ y $H_1 = \omega$. Pero $H(I \times I)$ también es compacto y por ende acotado, por lo que $H \simeq r_{N'} H$ con N' el máximo entre el N de ω y el de H! Pero entonces $\omega \simeq r_{N'} \omega \simeq C_{(0,0)}$ pues la primer equivalencia es dada por la retracción de $r_{N'}$ y la segunda por $r_{N'} H$, entonces $[\omega] = 0$ en $*_{i=1}^{N'} \pi_1(C_n)$, pero como ya era cero para $n \gneq N'$, entonces $[\omega] = 0$ en $*_{n \in \mathbb{N}} \pi_1(C_n)$ y ϕ es mono
     ∎

   b) X y $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$ son homotópicamente equivalentes.
   Notemos que dado un C_n, $\exists r_n : C_n \to S^1$ dado por $r_n = \frac{x}{n} - (n-1, 0)$, entonces si identificamos S^1_n como el elemento n-ésimo del wedge, tenemos $i_n : S^1 \hookrightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$ y entonces tenemos $h_n = i_n r_n : C_n \to \bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pues $h_n|_{(0,0)} = (0,0)$. Sea $h : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \to \bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$ el morfismo inducido por las h_n dado por $h = \sum h_n \ \chi_{C_n}$, afirmo que h es equivalencia homotópica!
   En efecto, para cada n $\exists k_n : S^1_n \to C_n$ inversa homotópica de h_n, y entonces induce una $g_n = i k_n : S^1_n \to \bigcup C_n$. Por propiedad universal del coproducto $\exists g : \coprod_{n \in \mathbb{N}} S^1_n \to \bigcup C_n$ y como g manda el punto en común al mismo $(0,0)$, baja al cociente y $\exists w : \bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1 \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Notemos que $wh = \sum w h_n \ \chi_{C_n} = \sum k_n h_n \ \chi_{C_n} \simeq \sum \chi_{C_n} \simeq 1_{\bigcup C_n}$, y análogo al revés pues $h_n k_n \simeq 1_{S^1_n}$, por lo que $hw \simeq 1_{\bigvee S^1}$ y resulta que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \simeq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$ ∎

   c) Pero no son homeomorfos!
   En efecto notemos que X al tener la topología subespacio de $\mathbb{R}^n$ cumple que es 1 contable, mientras que un entorno de abiertos del $(0,0)$ en el wedge es no contable. En efecto supongamos que $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de entornos abiertos del $(0,0)$, para cada i elegimos $V_i \subset S^1$ tal que $p_i(\mathcal{B}_i) \not\subset V_i$ y tomamos $V := \bigvee_{i \in \mathbb{N}} V_i \subset \bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1$, por la construcción tenemos que $\nexists B_i \in \mathcal{B} \ / \ B_i \subset V$, por ende $|\mathcal{B}| > \aleph_0$ ∎

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_i la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $x_0 = (0,0) \in X$. Pruebe que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo no numerable.

Demostración Sea $H = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces es claro que $|H| > \aleph_0$; sea $s \in H$, $s = (a_s)_{s\in\mathbb{N}}$ y contruimos $\alpha_s : I \to X$ dado por $\alpha_s = \sum_{n\in\mathbb{N}}(cte\chi_{a_n=0} + l_n\ \chi_{a_n=1})\chi_{[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}]}$ donde l_n es el lazo estándar en C_n y cte es para que α_s sea continua; veamos que $[\alpha_s] \neq [\alpha_t]$ si $s \neq t$!! Supongamos que $s \neq t$, entonces $\exists N$ / $a_N = 1$, $b_N = 0$ y sea $q_N = 1_X\ \chi_{C_N}$ entonces $[q_N\alpha_s] \neq [q_N\alpha_t]$ pues $[q_N\alpha_s] = [l_N] \neq [0]$ y $[q_N\alpha_t] = [0]$; entonces $\alpha : H \to X$ dado por $\alpha(s) := \alpha_s$ es inyectiva y entonces $|X| > \aleph_0$ ∎

6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $Y_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists j \in \{1,\ldots,n\}\ ,\ d(x,(j-\frac{1}{2},0)) = \frac{1}{2}\}$. Determine $\pi_1(Y_n, 0)$.

   Demostración Notemos que $Y_n = \bigcup_{i=1}^{n} S((n-\frac{1}{2},0),\frac{1}{2})$ y entonces $Y_n \simeq S^1 \vee_1 (S^1 \vee_2 (\ldots \vee_n S^1))$ y entonces, por lo visto antes, $\pi_1(Y_n) = *_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$ ∎

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^3$ la unión de n rectas por el origen. Calcule $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$

   Demostración Notemos que vía $f = \frac{x}{\|x\|_2}$ tenemos que $X \simeq S^2 \setminus A$ donde $A = \{x_1,\ldots,x_{2n}\}$ con $\{x_i, x_{2i}\} = L_i \cap S^2$, y luego si fijamos un punto x_1 como el polo norte y llamamos p la proyección estereográfica entonces $S^2 \setminus A \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{y_1,\ldots,y_{2n-1}\}$, y como ya vimos $\mathbb{R}^2 \setminus \{y_1,\ldots,y_{2n-1}\} \simeq \bigvee_{i=1}^{2n-1} S^1$ y entonces $\pi_1(X) = \pi_1(\bigvee_{i=1}^{2n-1} S^1) = *_{i=1}^{2n-1}\mathbb{Z}$ ∎

8. Sea X el espacio cociente de S^2 que se obtiene de identificar el polo norte y el polo sur en un punto. Calcule $\pi_1(X)$.

   Demostración Notemos que $S^2 \ / \ S^0 \simeq X$ con X el espacio del ejercicio para entregar, entonces tenemos que $\pi_1(S^2 \ / \ S^0) = \mathbb{Z}$

   Afirmación $S^2 \ / \ S^0 \simeq S^2 \vee S^1$

   Demostración ??? Ximeeeee ayudaaaaa!!!!

9. *a*) Si $L \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad lineal de dimensión k, con $0 \leq k \leq n-2$, determine el grupo $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus L)$

   b) Si $C \subseteq \mathbb{R}^3$ es una circunferencia, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C) = \mathbb{Z}$.

   Demostración *a*) Podemos suponer, vía una traslación, que L es un subespacio de dimensión k; entonces $L = \{L_1 = 0,\ldots,L_{n-k} = 0\}$ donde $L_i \in (\mathbb{R}^n)^*$, más aún podemos suponer que $L_i = x_i$! Con lo que $L \simeq \mathbb{R}^k$, entonces tenemos:

   Afirmación $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \simeq S^{n-(k+1)} \times \mathbb{R}^k$

   Por lo que $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus L) = \pi_1(S^{n-(k+1)}) = \mathbb{Z}\ \chi_{\{n=k-2\}}$

   Demostración de la Afirmación
   Tomar $f = (\frac{x_1}{\|x\|_2},\ldots,\frac{x_{n-k}}{\|x\|_2}, x_{n-k+1},\ldots,x_n)$ ∎

   b) Notemos que $\mathbb{R}^3 \setminus A \cup \{\infty\} \simeq S^3 \setminus A$ y entonces por Van Kampen $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) = \pi_1(S^3 \setminus A)$, pero $S^3 \setminus A \simeq \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0, z = 0\}$ pues tomo la proyección estereográfica por un punto de A. Pero trivialmente $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ por $f = (\frac{x}{\|(x,y,z)\|_2}, \frac{y}{\|(x,y,z)\|_2}, z)$ y $S^1 \times \mathbb{R} \simeq S^1$ por el ejercicio 1, por lo que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) = \mathbb{Z}$ ∎

   Afirmación $\mathbb{R}^3 \setminus A \simeq S^2 \vee S^1$

   Demostración ????? Idem antes Ximeeee ayuda!!

10. Sea $K = I \times I/\sim$ donde $(x, y) \sim (x', y')$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$(x = x' \ , \ y = y') \text{ ó } (\{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ y } x = x') \text{ ó } (\{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y + y' = 1)$$

El espacio K es la *Botella de Klein*. Calcule (una presentación d)el grupo fundamental de K.

Demostración Hagamos como el toro! Sea $U = I \times I - \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ y $V = B((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \epsilon)$ entonces, de la misma manera que en el ejercicio 1 con el toro, tenemos que $U /\!\sim\, \simeq S^1 \vee S^1$ y $V \simeq \{*\}$. Por otro lado $\pi_1(U \cap V) \simeq S^1$ y lo único que nos va a diferenciar del toro va a ser en la presentación!

Aquí sea $\alpha = \epsilon * e^{2\pi it}$ el lazo generador de $\pi_1(U \cap V)$ entonces $\alpha = ab^{-1}ab$!

Entonces tenemos, por el teorema de Van Kampen, que $\pi_1(K) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * 0 / < ab^{-1}ab = 1 > = < a, b > / < ab^{-1}ab = 1 >$ ∎