Ecuaciones Diferenciales – 2° cuatrimestre 2015
PRÁCTICA ADICIONAL DE TRANSFORMADA DE FOURIER

Aclaracíon:
En esta práctica notamos $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\xi.x}dx$ y salvo especial mención tomamos $L^1 := L^1(\mathbb{R}^n)$

La transformada en L^1

1. Sea $f \in L^1$ Probar que:

   a) $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$ para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in L^1$
   b) $\mathcal{F}(f)$ es uniformemente continua
   c) El operador $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ es continuo y:

   $$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$

   d) Tenemos que $\lim_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$

   O sea que $\mathcal{F}(L^1) \subseteq C_0$ (las funciones continuas que tienden a cero en el infinito)

2. Sea $a > 0$ y $f = e^{\pi a|x|^2}$, entonces:

   - Probar que $\mathcal{F}(f) = \frac{a^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\dfrac{-\pi|\xi|^2}{a}}$
   - Concluir que $\mathcal{F}$ admite al menos un punto fijo.

3. Sea $a > 0$ y $f = e^{-2\pi a|x|}$. Entonces $\mathcal{F}(f) = c_n \dfrac{a}{(a^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ con c_n una constante que depende de la dimensión del espacio.

4. Sea $f, \mathcal{F}(f) \in L^1$, probar que si tanto f como $\mathcal{F}(f)$ tienen soporte compacto, entonces $f = 0$

5. Sean $f, g \in L^1$ probar que:

   $$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx$$

   O sea que si se diese que $f, g \in L^1 \cap L^2$ tenemos que $\mathcal{F}$ preserva ángulos.

   Definición Sea $f \in L^1$, definimos:

   - $\tau_{x_0}(f)(x) := f(x - x_0)$
   - $Mod_{x_0}(f)(x) := e^{2\pi i x.x_0} f(x)$
   - $Dil_U^p(f)(x) := |det(U)|^{-\frac{1}{p}} f(U^{-1}x)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $U \in GL(\mathbb{R}^n)$

6. Sea $f \in L^1$ probar que:

   a) $\mathcal{F}\tau_{x_0} = Mod_{-x_0}\mathcal{F}$
   b) $\mathcal{F}Mod_{\xi_0} = \tau_{\xi_0}\mathcal{F}$
   c) $\mathcal{F}Dil_U^p = Dil_{U^*}^{p'}\mathcal{F}$ donde U^* es la única tal que $\langle Ux, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, U^*y\rangle_{\mathbb{R}^n}$

7. Probar que si $f, g \in L^1$ y $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ entonces $f = g$

8. a) Sea $f \in L^1$ tal que $x_k f \in L^1$, entonces $\mathcal{F}(f)$ es diferenciable respecto a ξ_k y

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\mathcal{F}(f)\right)(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x_k f)(\xi)$$

   b) Sea $f \in H^{1,k} \cap C^k \cap H_0^{1,k-1}$, entonces:

$$\mathcal{F}(D^\alpha(f))(\xi) = (2\pi i \xi)^{|\alpha|}\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Definición Sea $P \in \mathbb{R}[X_1, X_2, ..., X_d]$, definimos $P(\partial_x) := \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \partial_x^\alpha := \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_k}^{\alpha_k}$

9. Probar las siguientes relaciones de conmutatividad:
   a) $\mathcal{F}P(-2\pi i x_k) = P(\partial_\xi^\alpha)\mathcal{F}$
   b) $\mathcal{F}P(\partial_x^\alpha) = P(2\pi i \xi)\mathcal{F}$

10. Sea $f \in L^1$ tal que f es continua en 0 y que $\mathcal{F}(f) \geq 0$. Probar que $\mathcal{F}(f) \in L^1$.

La transformada y el Espacio de Schwartz

Definición Sea $p_N(f) := \mathtt{sup}_{|\alpha|\leq N\ ,\ |\beta|\leq N}\mathtt{sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha \partial^\beta f\right|$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Entonces definimos al *espacio de Schwartz* como:

$$\mathcal{S} := C^\infty \cap \{f \ / \ p_N(f) < \infty \ \forall N \in \mathbb{N}\}$$

11. a) Probar que $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$
    b) $f(x) = e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}$
    c) Es más probar que $\mathcal{S}$ es metrizable por $d(f,g) = \sum_N \dfrac{p_N(f-g)}{2^N(1+p_N(f-g))}$
    d) Sea $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ una sucesión, entonces $\phi_k \to 0$ `en` $\mathcal{S}$ sii $p_N(\phi_k) \to 0 \ \forall N \in \mathbb{N}$
    e) Probar que $\mathcal{S}$ con la métrica dada es un espacio métrico completo.
    f) Sea $U_{\epsilon,N} := \{f \in \mathcal{S} \ / \ p_N(f) < \epsilon\}$, probar que los $U_{\epsilon,N}$ son una base de entornos del 0 que hacen de $\mathcal{S}$ un *espacio localmente convexo* y por ende podemos usar *Hanh-Banach*.

12. Sea $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ un operador lineal, entonces T es continuo sii $\forall N \ \exists N' > 0$ y $C > 0$ tal que:

$$p_N(T(\phi)) \leq C p_{N'}(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

13. a) Probar que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. O sea que $\mathcal{F}|_\S$ esta bien definida y es un operador suryectivo y continuo.
    b) Recordar que $\mathcal{F}$ es es operador inyectivo en L^1 y por ende en $\mathcal{S}$
    c) Probar que $\mathcal{F}|_\mathcal{S} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es un homemorfismo.

14. Si $f, g \in \mathcal{S}$ entonces $f * g \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{F}(f * g) = C\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

La transformada en L^2

Definición Notemos que si $f \in L^2$ uno puede tomar una sucesión $\psi_k \to_{L^2} f$ tal que $\psi_k \in \mathcal{S}$, entonces definimos $\mathcal{F}(f) := \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(\psi_k)$

15. Probar la buena definición de $\mathcal{F}$ en sentido que no depende de la sucesión que tiende a f, y que si $f \in L^2 \cap L^1$ entonces esta definición coincide con la anterior.

16. Probar que $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ es un operador unitario.

17. Diagonalización de $\mathcal{F}$

    a) Recordar que si n=1 entonces $\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}}) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$

    b) Sea $V := \{p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ p \in \mathbb{R}[X]\}$ probar que $V = \bigcup_n V_n$ donde $V_n = V \cap K_{\leq n}[X]$ y por ende $dim_{\mathbb{R}} V_n = n+1$.

    c) Notemos que si llamamos $D(f) := f'$ entonces $D(p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}) = D(p)(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ y por ende $V_n = \mathtt{Ker}(D^{n+1})$

    Definición Definimos los *polinomios de Hermite de grado n* como $H_x(x)$ los que $H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})$

    d) Probar que $\mathcal{F}(x^n e^{-\frac{x^2}{2}}) = (-i)^n H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ y por ende $\mathcal{F}(V_n) = V_n$, concluir que $\exists! p_n \in K_{\leq n}[X]$ tal que $\psi_n = p_n e^{-\frac{x^2}{2}}$ cumple que $\mathcal{F}(\psi_n) = (-i)^n \psi_n$

    e) Si $D' = D^2 - x^2$ entonces D' conmuta con $\mathcal{F}$ y por ende tiene los mismos autoespacios. Concluir que $p_n = H_n$ y ya tenemos diagonalizado a $\mathcal{F}$

Transformada en distribuciones temperadas

Definición Notemos como $\mathcal{S}' := (\mathcal{S})^*$ el dual topológico del espacio de Schwartz. Notemos que como $C_c^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^p$ y $\mathcal{S} \subset C_0$; entonces $L^p \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}$ y que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ donde $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de medidas de Radon en $\mathbb{R}^n$ con la norma de la variación total.

18. Probar que:

    a) Dada $f \in L^p$ entonces la aplicación $\lambda_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx\ \forall \phi \in \mathcal{S}$ cumple que $\lambda_f \in \mathcal{S}'$. Entonces a cada $f \in L^p$ le podemos asociar una $\lambda_f \in \mathcal{S}'$, probar además que la aplicación $\lambda : L^p \to \mathcal{S}'$ dada por $f \mapsto \lambda_f$ es continua

    b) Análogamente al item anterior lo mismo con $\psi \in \mathcal{S}$

    c) Análogo con $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ donde $\lambda_\mu(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)d\mu$

    d) El funcional $\delta_0' :\ \ \phi \mapsto -\phi'(0)$ con $\phi \in \mathcal{S}$ cumple que $\delta_0' \in \mathcal{S}'$ pero $\delta_0' \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y por ende la inclusión es estricta.

19. (Difícil) Probar que la inclusíon $i : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}'$ tiene rango denso en la topología débil

Definición Sea $\lambda \in \mathcal{S}'$ y $\phi \in \mathcal{S}$, entonces definimos $\mathcal{F}(\lambda)(\phi) := \lambda(\mathcal{F}(\phi))$.

20. Probar que $\mathcal{F}$ así definida esta bien definida y que resulta un homeomorfismo de $\mathcal{S}'$ en sí mismo.

21. Probar que todas las anterior propiedades y simetrías de $\mathcal{F}$ valen en el contexto de las dsitribuciones temperadas (convolución, traslación, modulación, etc..) adecuadamente definidas.

22. Probar que $\mathcal{F}(pv\frac{1}{x})(\xi) = -\pi i sgn(\xi)$

23. Probar que $\mathcal{F}\frac{1}{|x|^2} = \frac{\pi}{|\xi|}$