**Geometría Diferencial – 1° cuatrimestre 2016**
Entrega Práctica 2

**Recordemos**: Una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k$ es un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ con la topología de subespacio con la siguiente propiedad: para todo punto $p \in M$ existen un entorno abierto $U$ de $p$, un abierto $V$ de $\mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $h : U \to V$ tal que $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Un par $(U, h)$ como el indicado se llama una *carta de $U$ adaptada a $M$* .

Ejercicio: Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : W \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable con la siguiente propiedad: para todo punto $x$ tal que $f(x) = 0$ el rango de $Df(x)$ es $m$. Probar que $f^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimensión $n - m$.

**Demostración** Sea $M := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ y dotémoslo de la topología subespacio, automáticamente por ser subespacio de $\mathbb{R}^n$ es una variedad topológica. Sea $p \in M$, como $rk(Df)|_M = m = cte$ y $f$ es diferenciable entonces por el teorema del rango constante $\exists(U, \phi)$ carta con $p \in U$ y $(V, \psi)$ carta con $f(p) = 0 \in V$ , $\psi(f(p)) = 0$ tal que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}((x^1, \dots x^n)) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$, o sea el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
U \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & V \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\psi"'] \\
\phi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "\overline{f}"] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Donde $\overline{f}((x^1, \dots x^n)) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0))$

Por ende notemos que si tomamos $U \ni p$ el del teorema y tomamos $V = \phi(U)$ y tomamos como el difeomorfismo $h := \phi$ entonces $\phi(U \cap M) = \{(\phi(u)_1 = \phi(u)_m = 0)\ ,\ u \in U \cap M\} = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times \{0\})$ pues si $p \in U \cap M$ entonces $\overline{f} \circ \phi(p) = (\phi(p)_1, \dots, \phi(p)_m, 0, \dots, 0) = \psi \circ f(p) = 0$. Por ende $M$ es una subvariedad de dimensión $n - m$ por definición. ∎