Final Análisis Funcional

Espacios de Hilbert

1. Propiedades Elementales

Definición Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un semi-producto interno es $u : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{F}$ tal que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $x, y, z \in \mathcal{X}$:

- $u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x, z) + \beta u(y, z)$
- $u(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} u(x, z) + \bar{\beta} u(y, z)$
- $u(x, x) \geq 0$
- $u(x, y) = u(\bar{y, x})$

Observación $u(0, y) = u(x, 0) = 0$

Si $u(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ entonces u es un producto interno, lo notaremos: $u(x, y) = \langle x, y\rangle$

Proposición 1.1 *Si $\langle ., .\rangle$ es un semi producto interno en $\mathcal{X}$, entonces:*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$

Es más, la igualdad se da si $\exists \alpha, \beta \neq 0$ / $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = 0$

Demostración Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x, y \in \mathcal{X}$, entonces:

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle - \alpha\langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + |\alpha|^2\langle y, y\rangle$$

Supongamos que $\langle y, x\rangle = be^{i\theta}$, $b \geq 0$ y sea $\alpha = te^{-i\theta}$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces:

$$0 \leq \langle x, x\rangle - 2bt + t^2\langle y, y\rangle \iff 0 \geq 4b^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \iff |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$\blacksquare$

Corolario 1.2 *Si $\langle ., .\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{X}$, entonces $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ es una norma en $\mathcal{X}$.*

Proposición 1.3 *Sean $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{H}$ espacio de Hilbert, entonces:*

$$\|f_1 + f_2 + ... + f_n\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|^2$$

Demostración Paja $\blacksquare$

Proposición 1.4 *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $f, g \in \mathcal{H}$ entonces:*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \tag{1}$$

Reciprocamente si $\mathcal{H}$ es un Banach tal que su norma $\|.\|$ cumple 1, entonces $\|.\| = \langle ., .\rangle^{\frac{1}{2}}$ para un producto interno tal que $\mathcal{H}$ es Hilbert.

Demostración $\Longrightarrow$) Es fácil

$\Longleftarrow$) Supongamos que vale 1 y que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y sea $u(x, y) = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2$, veamos que es un producto interno.

- $u(x,y) = u(y,x)$

  Trivial

- $\|x\| = u(x,x)^{\frac{1}{2}}$

  $u(x,x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \frac{4}{4}\|x\|^2 = \|x\|^2$. Como ambos son positivos listo.

- u es $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ continua

  Por defnción $\|.\|$, sumar y restar son continuos y composición de continuas es continua.

-

Operadores en Espacios de Hilbert