

Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2017

FINAL

1. Espacios Vectoriales

1.1. Propiedades Elementales

Definición Si \mathcal{X} es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} , un conjunto $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ se dice:

1. *Linealmente independiente* si dados $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$ implica que $\lambda_{i_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$.
2. *Sistema de generadores* si dado $v \in \mathcal{X}$ entonces existen $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in \mathcal{B}$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que $\sum_i \lambda_{i_i} v_{i_i} = v$.
3. *Base* si es a la vez un sistema de generadores linealmente independiente.

Ejemplo ■ $X = \mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots\} = \{X^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es base.

- $X = \mathcal{C}[a, b]$ es un espacio vectorial, si consideramos $\mathcal{B} = \{e^{\alpha x}, \alpha \in [0, 1]\}$ veamos que es linealmente independiente.

Demostración Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_i \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$ para todo $x \in [a, b]$; luego si derivamos $n - 1$ veces tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y como los α_i son distintos entonces la matriz de Vandermonde es inversible y el sistema admite una única solución, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. ■

Recordemos:

Proposición 1.1 (Lema de Zorn) Si (P, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que todo subconjunto no vacío $S \subseteq P$ totalmente ordenado admite una cota superior; entonces existe un elemento maximal en P .

Proposición 1.2 Si E es un espacio vectorial, entonces E admite una base.

Demostración Consideremos $P = \{S \subseteq E / S \text{ es li}\}$ y dotemoslo del orden dado por la inclusión, luego $P \neq \emptyset$ pues si $v \in E$ entonces $\{v\} \in P$.

Sea $\{S_i\}$ una colección de subconjuntos de P totalmente ordenada y sea $T = \bigcup_{i \in I} S_i$, luego es claro que $S_i \leq T$; faltaría ver que $T \in P$.

Para eso sean $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in T$ y $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \in \mathcal{F}$ tales que $\sum_k \lambda_{i_i} v_{i_i} = 0$. Como son finitos existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \in S_{k_0}$ para todo i , que al ser un conjunto linealmente independiente resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Concluimos que $T \in P$, luego por 1.1 existe $M \in P$ elemento maximal.

Finalmente, sea $v \in E \setminus \langle M \rangle$ (el conjunto generado por combinaciones lineales de M), luego $M \cup \{v\}$ sería un conjunto li lo que contradice la maximalidad de M ; por ende no existe tal v y M resulta base. ■

Proposición 1.3 Sea E un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases de Hamel de E . Luego $\#\mathcal{B}_1 = \#\mathcal{B}_2$.

Demostración Sea $x \in \mathcal{B}_1$ y llamemos $S(x)$ al conjunto de los elementos $v \in \mathcal{B}_2$ tal que al escribir a x como combinación lineal de elementos de \mathcal{B}_2 aparece v , por lo que si $x = \sum_k \lambda_{i_k} v_{i_k}$ entonces $S(x) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$.

Lema 1.4 $\bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x) = \mathcal{B}_2$

Demostración Del lema Si $v \in \bigcup_{x \in \mathcal{B}_1} S(x)$ luego existe $x_0 \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x_0)$ por lo que $v \in \mathcal{B}_2$ por definición de $S(x)$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{B}_2$ pero no existe $x \in \mathcal{B}_1$ tal que $v \in S(x)$, entonces $v \notin \langle \mathcal{B}_1 \rangle = E = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$. ■

Por 1.4 tenemos que $\#\mathcal{B}_2 \leq \sum_{x \in \mathcal{B}_1} \#S(x) \leq \#\mathbb{N}\#\mathcal{B}_1 \leq \#B_1$.

Razonando al revés obtenemos la otra desigualdad. ■

Definición Si E es un espacio vectorial, una norma definida en E es una aplicación $\|\cdot\| : E \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Observación Todo espacio normado es un espacio métrico pero no viceversa.

Definición Si E es un espacio vectorial, un producto interno definido en E es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \mapsto F$ tal que:

1. $\langle \cdot, z \rangle$ es lineal
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Observación Todo espacio con producto interno es un espacio normado pero no viceversa.

Teorema 1.5 (Cauchy-Schwartz) Sea E un espacio vectorial y $\langle \cdot \rangle$ un producto interno definido en E ; luego si $x, y \in E$ se tiene que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Demostración Sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y sea $z = x - \lambda y$, luego $\langle z, z \rangle = \langle x, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle - 2\Re(\lambda \langle y, x \rangle) \geq 0$. Si $\langle y, x \rangle = re^{i\theta}$ sea $\lambda = e^{-i\theta}t$ con $t \in \mathbb{R}$; luego:

$$0 \geq \langle x, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle - 2bt \cong c - 2bt = at^2$$

Luego como la cuadrática dada es positiva, eso implica que $0 \leq 4b^2 - 4ac$ por lo que:

$$0 \leq b^2 - ac = |\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

■