Geometría Diferencial – 1° cuatrimestre 2016

Entrega Práctica 1

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos en $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la siguiente relación de equivalencia: dados $v, w \in S^n$, decimos que $v \sim w$ si y solo si $v = \pm w$. El espacio proyectivo n-dimensional $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ es el espacio cociente $S^n/\sim$. Probar que este espacio es una variedad diferenciable compacta y conexa, y calcular su dimensión.

Demostración Disclamer: Consideraremos $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ \|y - x\| < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$; $-A := \{-a \ , \ a \in A\}$ y $\overline{y} = q(y)$ con $y \in X$ y $q : X \to X/\sim_q$

Vamos de a partes!

- Compacta

  Si llamamos $q : S^n \to \mathcal{P}^n$ a la aplicación cociente, entonces sabemos que es continua. Como S^n es compacta, q es continua y la compacidad es un invariante topológico; entonces $\mathcal{P}^n = q(S^n)$ es compacto.

- Conexa

  Por el mismo argumento tenemos que S^n es conexo, q es continua y la conexión es un invariante topológico; por ende $\mathcal{P}^n = q(S^n)$ es conexo

- Variedad Topológica

  Aquí debemos probar que P^n es T_2, tiene una base numerable, y el localmente Euclídeo.

  1. Sean $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{P}^n$ tal que $\bar{a} \neq \bar{b}$, si llamamos a $q : S^n \to \mathcal{P}^n$ a la aplicación cociente sea $a \in q^{-1}(\bar{a}) = \{a, -a\}$ y $b \in q^{-1}(\bar{b}) = \{b, -b\}$. Sea $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\mathtt{min}\{\|a+b\|, \|a-b\|\}$ y consideremos $U := B_\epsilon(a) \cap S^n$; $V := B_\epsilon(b) \cap S^n$. Notemos que por la condición impuesta a ϵ tenemos que $U, V \neq \emptyset$ y $U \cap V = \emptyset$. Consideremos $\overline{U} = q(U)$, $\overline{V} := q(V)$, entonces tenemos que ambos son abiertos pues $q^{-1}(q(U)) = U \cup -U$ que es abierto y $\mathcal{P}^n$ tiene la topología cociente; y similarmente con $q^{-1}(q(V))$. Afirmo que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$; en efecto, si $\overline{w} \in \overline{U} \cap \overline{V}$ entonces $\{w, -w\} = q^{-1}(w) \in q^{-1}(\overline{U} \cap \overline{V}) = (U \cup -U) \cap (V \cup -V) = (-U \cap V) \cup (U \cap -V)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $w \in U \cap -V$ (si estuviese en el opuesto tomo w como $-w$ y listo), entonces $\|b - a\| = \|b - w + w - a\| \leq \|b - w\| + \|w - a\| < 2\epsilon < \mathtt{min}\{\|a+b\|, \|a-b\|\}$. ABS! Entonces $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ y $\mathcal{P}^n$ es T_2
  2. Sea $\mathcal{B} = \{B_{r_i}(q_i),\ r_i \in \mathbb{Q}\ ,\ q_i \in \mathbb{Q}^n\}$ una base numerable de $\mathbb{R}^n$, entonces es claro que $\mathcal{F} = \mathcal{B} \cap S^n$ es una base numerable pues S^n tiene la topología subespacio de $\mathbb{R}^n$. Sea $\overline{\mathcal{F}} = \{\{\overline{f}\ , f \in F\},\ \ F \in \mathcal{F}\}$, es claro que es numerable y veamos que es base de $\mathcal{P}^n$. Es claro que $\bigcup_{\overline{F} \in \overline{\mathcal{F}}} \overline{F} = \mathcal{P}^n$ pues $\mathcal{F}$ cubría y simplemente estoy aplicando q a ambos lados; finalmente como $\mathcal{F}$ era base, si $\overline{U}, \overline{V} \in \overline{F}$, entonces como $U \cap V \in \mathcal{F}$ entonces $\overline{U} \cap \overline{V} \in \overline{F}$ por definición. Por ende $\mathcal{P}^n$ admite una base numerable.
  3. Sea $x = (x^1, \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^n) \in S^n$ y $\overline{U}_i := \{\overline{x} \in \mathcal{P}^n \ / \ x^i \neq 0\}$. Consideremos $\psi_i : \overline{U}_i \to \mathbb{R}^n$ dada por $(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \mapsto (\frac{x^1}{x^i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{x^n}{x^i})$ y veamos que ψ_i es un homeo con $\psi_i(\overline{U}_i)$! Pero esto es claro pues la biyectividad es trivial, la continuidad esta dada por dividir por un elemento no nulo, y $\psi_i^{-1}(x) = (x^1, \ldots 1, \ldots x^n)$! Por ende ψ_i es un homeo y $\forall \overline{x} \in \mathcal{P}^n\ \exists i_0 \ / \ \overline{x} \in \overline{U}_i$. Por ende $\mathcal{P}^n$ es localmente euclídeo.

- Que los cambios de coordenadas sean diferenciables.

  Sean $i < j < n$, entonces $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(\overline{x}) = \psi_i((x^1, \ldots, 1_j, \ldots, x^n)) = (\frac{x^1}{x^i}, \ldots 1, \ldots \frac{1_j}{x^i}, \frac{x^n}{x^i})$ que es diferenciable en $\psi_j(U_i \cap U_j)$.

Por ende $\mathcal{A} = \{(\overline{U}_i, \psi_i)\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es un atlas para $\mathcal{P}^n$ y por ende $\mathcal{P}^n$ es una variedad diferenciable compacta y conexa, de dimensión n(visto al ver la localidad ecuclídea). ∎