Caracterización de extensiones finitas simples

Lema: Sea $E = K[\theta]$ algebraica, y sean $F, L/K$ subextensiones

Entonces $F = L \iff f(\theta, F) = f(\theta, L)$

Demostración

($\Rightarrow$) ✓

($\Leftarrow$) Sup $f(\theta,F) = f(\theta,L) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0 \in F\cap L[X]$

Entonces

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & K[\theta]=E \arrow[dl, dash, "d"'] \arrow[d, dash, "d"] \arrow[dr, dash, "d"] & \\
F \arrow[dr, dash, dashed, "1"'] & {} \arrow[d, dash] & L \arrow[dl, dash, dashed, "1"] \\
 & F\cap L \arrow[d, dash] & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow F = F\cap L = L$

Teorema: Sea E/K finita.

Entonces: E es simple $(E = K[\theta]) \iff E$ tiene finitas subextensiones$/K$

Demostración

($\Rightarrow$) $E = K[\theta]$. Sea F/K subextensión. Entonces

$f(\theta,F) \mid f(\theta,K)$

Pero si $f(\theta,K) = \prod_{1\le i\le n}(X-\alpha_i) \in \overline{K}[X]$, hay finitos candidatos para divisores de $f(\theta,K)$, luego hay finitos posibles $f(\theta,F)$.

$\Rightarrow$ hay finitas subextensiones $F\neq L$ pues $F\neq L \Rightarrow f(\theta,F)\neq f(\theta,L)$

($\Leftarrow$) $|K| = \infty$: $E = K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Paso por paso $K[\alpha,\beta] \subseteq E \subseteq K[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$: $\exists\, c\neq c' \in K \,/\, K[\alpha + c\beta] = K[\alpha + c'\beta]$ pues finitas subext. $\Rightarrow K[\alpha,\beta] = K[\alpha + c\beta]$, y sigo así. $|K|<\infty$: K cpo finito ya lo vimos la clase pasada ~~tiene finitas subext. pues tiene finitos subconjuntos~~ ☒

Ejemplo

$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta_3] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}+\zeta_3]$

¿Cómo escribimos $\sqrt[3]{2}$ y ζ_3 en función de $\theta = \sqrt[3]{2}+\zeta_3$?

① Algebra lineal:

$\sqrt[3]{2} = a_0 \cancel{\theta} + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_5\theta^5$ etc...

② Usando mcd (o resultante)

Sea $f = f(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q})$, $g = f(\zeta_3, \mathbb{Q})$

$f = X^3 - 2$, $g = X^2 + X + 1$

Se tiene que $g(\zeta) = 0$, y ζ también es raíz de $f(\sqrt[3]{2}+\zeta - x)$
$\in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}+\zeta][X]$

o sea ζ raíz de X^2+X+1

y ζ raíz de $(\sqrt[3]{2}+\zeta-x)^3 - 2$

Luego si $h = (f : g) \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}+\zeta][x]$,

ζ raíz de h también $\Rightarrow$ $gr(h) \geq 1$.

Probemos que $gr(h) = 1$ y por lo tanto $h = X - \zeta \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}+\zeta][X]$

Sup. $gr\,h \geq 2$. Por ser separable h tendría otra raíz que también sería raíz de g pues $h \mid g \Rightarrow$ la otra raíz sería ζ^2.

O sea $f(\sqrt[3]{2}+\zeta - \zeta^2) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2}+\zeta-\zeta^2 = \sqrt[3]{2}$, $= \sqrt[3]{2}\zeta$, $= \sqrt[3]{2}\zeta^2$] No

Para calcular $h \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}+\zeta][X]$, se puede ~~por ejemplo~~ calcular $(X^2+X+1 : X^3 - aX^2 + a^2X - a^3 - 2)$ con $a = \sqrt[3]{2}+\zeta$.

Haciendo la cuenta me queda

$$h = X - \frac{a^3+a+3}{a^2+a} \quad \dots$$

¿Se podrá hacer algo distinto?

Calcular todas las subextensiones de $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2},\zeta_3]$

$$f(\sqrt[3]{2}+\zeta_3,\mathbb{Q}) = (X-\sqrt[3]{2}-\zeta)(X-\sqrt[3]{2}\zeta-\zeta)(X-\sqrt[3]{2}\zeta^2-\zeta)\cdot$$
$$(X-\sqrt[3]{2}-\zeta^2)(X-\sqrt[3]{2}\zeta-\zeta^2)(X-\sqrt[3]{2}\zeta^2-\zeta^2)$$
$$\Rightarrow \quad = X^6+3X^5+6X^4+3X^3+X^2+9X+9$$

En ppio hay $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}$ divisores de $gr>1$. Pero no todos van a definir subextensiones! (Serían candidatos a $f(\theta,F)$: En realidad $5+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$ pues $X-\sqrt[3]{2}-\zeta$ divide) ✓

Ejplo: $f(\sqrt[3]{2}+\zeta,\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]) = (X-(\sqrt[3]{2}+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}+\zeta^2))$ ✓

$f(\sqrt[3]{2}+\zeta,\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\zeta]) = (X-(\sqrt[3]{2}\zeta^2+\zeta^2))(X-(\sqrt[3]{2}+\zeta))$

$\Big($ $f(\sqrt[3]{2}+\zeta,\mathbb{Q}[\zeta]) = (X-(\sqrt[3]{2}+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}\zeta+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}\zeta+\zeta^2))$

$f(\sqrt[3]{2}+\zeta,\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\zeta^2]) = \ldots (X-(\sqrt[3]{2}+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}\zeta+\zeta^2))$

¿Los otros? ¿Dan subextensiones?

Esto es algo que vamos a poder resolver en lo que sigue

Ejemplo: $g=(X-(\sqrt[3]{2}+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}\zeta+\zeta))$?

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}[\theta] \\ \Big| \, 3 \\ \mathbb{Q}[\zeta] \\ |\, 2 \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

$f(\theta,\mathbb{Q}[\zeta]) = (X-(\sqrt[3]{2}+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}\zeta+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}\zeta^2+\zeta))$
$= (X-\zeta)^3-2 \in \mathbb{Q}[\zeta][X]$.

Si F es tq $f(\theta,F) = (X-(\sqrt[3]{2}+\zeta))(X-(\sqrt[3]{2}\zeta+\zeta))$

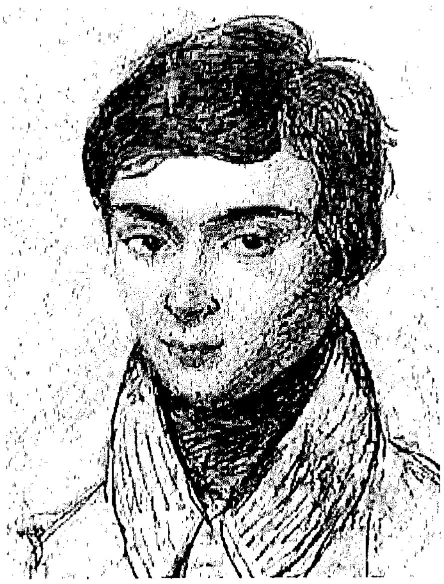
entonces $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}[\theta]/_F, \bar{\mathbb{Q}}/F) \ni \sigma: \begin{cases} \sqrt[3]{2}\mapsto\sqrt[3]{2}\zeta \\ \zeta\mapsto\zeta \end{cases}$

pero $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}[\theta]/_F,\bar{\mathbb{Q}}/F) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\theta]/F)$ y por lo tanto σ^2 también pertenece y $\sigma^2: \begin{cases} \sqrt[3]{2}\mapsto\sqrt[3]{2}\zeta^2 \\ \zeta\mapsto\zeta \end{cases} \Rightarrow X-(\sqrt[3]{2}\zeta^2+\zeta) \mid f(\theta,F)$ también.

Évariste Galois

Évariste Galois (en español Evaristo Galón), (25 de octubre de 1811-31 de mayo de 1832) fue un matemático francés. Mientras aún era un adolescente, fue capaz de determinar la condición necesaria y suficiente para que una ecuación algebraica sea resuelta por radicales. Dio solución a un problema abierto mediante el nuevo concepto de grupo de permutaciones;[1] Su trabajo ofreció las bases fundamentales para la teoría que lleva su nombre,[2] una rama principal del álgebra abstracta. Fue el primero en utilizar el término «grupo» en un contexto matemático. La teoría constituye una de las bases matemáticas de la modulación CDMA utilizada en comunicaciones y, especialmente, en los Sistemas de navegación por satélite, como GPS, GLONASS, etc.

Évariste Galois



Información personal	
Nacimiento	25 de octubre de 1811 Bourg-la-Reine, Francia
Fallecimiento	31 de mayo de 1832 (20 años) París, Francia
Causa de muerte	Arma de fuego
Lugar de sepultura	Cementerio de Montparnasse
Nacionalidad	Francesa
Educación	
Alma máter	Escuela Normal Superior de París Liceo Louis-le-Grand
Información profesional	
Ocupación	Matemático
Área	Teoría de grupos
Firma	

[editar datos en Wikidata]

Índice

Biografía

Évariste Galois nació en Bourg-la-Reine, una ciudad a las afueras de París. Su padre fue Nicolas-Gabriel Galois, director de la escuela de la localidad que llegaría a ser elegido alcalde de la comuna al frente del partido liberal, partidario de Napoleón. Su madre, Adelaide-Marie, era una persona de indudables cualidades intelectuales hija de una familia de abogados muy influyente de París.

Hasta los doce años, Évariste fue educado por su madre, junto con su hermana mayor Nathalie-Théodore, consiguiendo una sólida formación en latín y griego, así como en los clásicos. Era un muchacho muy inteligente, pero aunque muchos consideran que fue un niño prodigio de las matemáticas, no es probable que durante su educación más temprana el joven tuviera una profunda exposición a las matemáticas (aparte de la aritmética elemental) y tampoco se tiene noticia de que se hubieran dado casos de talento matemático especial en su familia.

Su educación académica empezó a la edad de 12 años cuando ingresó en el liceo real Louis-le-Grand, de París, donde habían estudiado Robespierre y Víctor Hugo. Allí tuvo sus primeros escarceos de tintes políticos (un enfrentamiento con el director del internado) que se saldaron con la expulsión de varios alumnos, entre los cuales él no estaba, pero que forjaron una incipiente rebeldía hacia la autoridad (especialmente un ideario antieclesiástico y antimonárquico que mantuvo hasta su muerte). Durante los dos primeros años en el liceo

Louis-le-Grand, Galois tuvo un rendimiento normal e incluso llegó a ganar algunos premios en griego y latín. Pero en tercero, su trabajo de retórica fue reprobado y tuvo que repetir curso. Fue entonces cuando Galois entró en contacto con las matemáticas: tenía entonces 15 años. Después de entrar en las matemáticas, tuvo interés en la geografía.

El programa de matemáticas del liceo no difería mucho del resto. Sin embargo, Galois encontró en él el placer intelectual que le faltaba. El curso impartido por Ms Vernier, despertó el genio matemático de Galois. Tras asimilar sin esfuerzo el texto oficial de la escuela y los manuales al uso, Galois empezó con los textos más avanzados de aquella época: estudió la geometría de Legendre y el álgebra de Lagrange. Galois profundizó considerablemente en el estudio del álgebra, una materia que entonces todavía tenía muchas lagunas y cuestiones oscuras. Y así llegó a conocer la cantidad de problemas sin resolver que encerraba aquella disciplina. Problemas que pasaron a ocupar la mayor parte de su tiempo de estudio. Empezó a descuidar las otras materias, atrayendo hostilidad de los profesores de humanidades. Incluso Vernier le sugirió la necesidad de trabajar más en otras disciplinas distintas.

Sin embargo, Galois tenía una idea clara: quería ser matemático y quería entrar en la *École polytechnique*. Así decidió presentarse con un año de antelación (1828) al examen de acceso. Al carecer de la formación fundamental en diversos aspectos y sin haber recibido el curso habitual preparatorio de matemáticas, Évariste fue rechazado. Galois no aceptó este rechazo inicial y ello aumentó su rebeldía y su oposición a la autoridad. No obstante, continuó progresando rápidamente en el estudio de las matemáticas durante el segundo curso impartido en el liceo Louis-le-Grand, en este caso por Ms Richard, quien supo ver las cualidades del joven y solicitó que fuera admitido en la *École polytechnique*. Aunque la solicitud de Richard no fue atendida, la dedicación y el impulso que Galois recibió de su profesor tuvo unos resultados notables.

Siendo todavía estudiante del Louis-le-Grand, Galois logró publicar su primer trabajo (una demostración de un teorema sobre fracciones continuas periódicas) y poco después dio con la clave para resolver un problema que había tenido en jaque a los matemáticos durante más de un siglo (las condiciones de resolución de ecuaciones polinómicas por radicales). Sin embargo, sus avances más notables fueron los relacionados con el desarrollo de una teoría nueva cuyas aplicaciones desbordaban con mucho los límites de las ecuaciones algebraicas: la teoría de grupos.

Sin embargo, el destino no le iba a deparar muchos más éxitos. Pocos días antes de presentarse al segundo (y definitivo) examen de acceso a la *École polytechnique*, el padre de Évariste se quitaba la vida. En este contexto Galois se presentó y, con sus habituales maneras rebeldes y su desprecio por la autoridad, se negó a seguir las indicaciones de los examinadores al rehusar justificar sus enunciados. Y, naturalmente, fue rechazado definitivamente.

Viéndose obligado considerar la entonces menos prestigiosa *École normale*, Galois se presentó a los exámenes de bachillerato (necesario para ser admitido) y esta vez fue aprobado gracias a su excepcional calificación en matemáticas. Galois fue admitido en la *École normale* más o menos al mismo tiempo que sus revolucionarios trabajos sobre teoría de grupos eran evaluados por la Academia de Ciencias. Sin embargo, sus artículos nunca llegaron a ser publicados en vida de Galois. Inicialmente se lo envió a Cauchy, quien lo rechazó porque su trabajo tenía puntos en común con un reciente artículo publicado por Abel. Galois lo revisó y se lo volvió a remitir, y en esta ocasión, Cauchy lo remitió a la academia para su consideración; pero Fourier, el secretario vitalicio de la misma y el encargado de su publicación, murió poco después de recibirlo y la memoria fue traspapelada. El premio fue otorgado *ex æquo* a Abel y a Jacobi, y Évariste acusó a la academia de una farsa para desacreditarle.

A pesar de la pérdida de la memoria enviada a Fourier, Galois publicó tres artículos aquel mismo año en el *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques* del Barón de Férussac. Estos trabajos presentan los fundamentos de la Teoría de Galois y, aunque se trataba de un trabajo inconcluso, prueban sin lugar a dudas que el joven había llegado más lejos que ningún otro matemático en el campo del álgebra relacionado con la resolución de ecuaciones polinómicas.

Para entonces, la vida de Galois empezaba a estar teñida de un marcado tinte político. En julio de 1830 los republicanos se levantaron y obligaron a exiliarse al rey Carlos X. No obstante, el triunfo de los republicanos, entre los que se encontraba el joven Galois, fue aplastado por la llegada al trono de un nuevo rey: Luis Felipe de Orleans. Galois participó activamente en las manifestaciones y sociedades republicanas. Fue expulsado por ello de la *École normale*. En la primavera de 1831, con apenas 19 años, Galois fue detenido y encarcelado durante más de un mes acusado de sedición, tras un desafiante brindis en nombre del rey. Inicialmente fue absuelto, pero volvió a ser arrestado por otra actitud sediciosa en julio y esta segunda vez pasó ocho meses en prisión.

Durante aquel año de 1831 Galois por fin había redondeado las cuestiones pendientes en su trabajo y lo había sometido a la consideración de Poisson, quien le recomendó que lo presentara de nuevo a la Academia. Más tarde, aquel mismo año, el propio Poisson recomendó a la Academia que rechazara su trabajo con la indicación de que «sus argumentaciones no estaban ni lo suficientemente claras ni suficientemente desarrolladas para permitirles juzgar su rigor». El propio Poisson, a pesar de su enorme prestigio matemático y de sus esfuerzos, no llegó a comprender los resultados que le presentaba aquella memoria. Galois recibió la carta de rechazo en prisión.

Un mes antes de su muerte, el 29 de abril de 1832, Galois fue liberado de su encarcelamiento. Los detalles que condujeron a su duelo (supuestamente a causa de un lío de faldas) no están claros. Lo que queda para la historia es la noche anterior al evento. Évariste Galois estaba tan convencido de la inminencia de su muerte que pasó toda la noche escribiendo cartas a sus amigos republicanos y componiendo lo que se convertiría en su testamento matemático. En estos últimos papeles describió someramente las implicaciones del trabajo que había desarrollado en detalle y anotó una copia del manuscrito que había remitido a la academia junto con otros artículos.

El 30 de mayo de 1832, a primera hora de la mañana, Galois perdió un duelo de pistolas contra el campeón de esgrima del ejército francés, falleciendo al día siguiente a las diez de la mañana (probablemente de peritonitis) en el hospital Cochin, después de rehusar los servicios de un sacerdote. Sus últimas palabras a su hermano Alfredo fueron: «¡No llores! Necesito todo mi coraje para morir a los veinte años».

Las contribuciones matemáticas de Galois fueron publicadas finalmente en 1843 cuando Joseph Liouville revisó sus manuscritos. Este declaró que aquel joven, en verdad, había resuelto el problema de Abel por otros medios que suponían una verdadera revolución en la teoría de las matemáticas empleadas. El manuscrito fue publicado en el número de octubre de 1846 del *Journal des mathématiques pures et appliquées*.

Eponimia

- El cráter lunar Galois lleva este nombre en su memoria.

Notas

1. Véase Teoría de ecuaciones
2. Véase Teoría de Galois

Bibliografía

- Fresán, Javier (julio de 2006). «Del otro lado de los sueños: la vida de Évariste Galois». Clarín ***XI** (63).*
- Infeld, Leopold (1974). *El elegido de los dioses*. Siglo XXI. ISBN 968-23-0045-2. (Novela biográfica sobre la vida de Évariste Galois)
- Rothman, Tony. «Évariste Galois». *Investigación y Ciencia*. Edición especial: Grandes matemáticos.
- Rzedowski Calderón, Martha (2011). «Évariste Galois (1811–1832)». *Miscelánea Matemática* **53**: 123-138.

Enlaces externos

EVARISTE GALOIS (25 Oct 1811 - 31 Mayo 1832) Biblio

Niels Abel (5 Ago 1802 - 6 Abr 1829)

Joseph Liouville (24 Mar 1809 - 8 Sept 1882)

EXTENSIONES DE GALOIS O GALOISIANAS

Definición (Extensión de Galois)
Sea E/K extensión. Se dice que es de Galois si es una extensión algebraica que es normal y separable

Observación: Sea E/K Galois. Entonces
① $Hom(E/K, \overline{K}/K) = Gal(E/K)$, i.e. toda inmersión $\sigma: E \to_K \overline{K}$ es un automorfismo de E (Eso es por ser normal) Grupo!

Probarlo, aquí

Si además E/K finita:
② $[E:K] = |Gal(E/K)|$ (por separable y ①)
③ $E = K[\theta]$ para algún $\theta \in E$ (por separable)
y $f(\theta, K) = \prod_{\sigma \in Gal(E/K)} (X - \sigma(\theta))$ (por ① también)

De hecho para extensiones finitas hay equivalencias

Proposición (Extensiones Galois finita)
Sea E/K finita. Son equivalentes

① E/K normal y separable
② E/K es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ separable
③ $[E:K] = |Gal(E/K)|$

Demostración:
$(1 \Leftrightarrow 2)$ $(\Leftarrow)$ ~~[illegible]~~ Normal por ser cpo desc.
separable por estar generado por ellos separables
$(\Rightarrow)$ Cpo de desc. por ser normal finita, pol separable por tener factores irreducibles separables.
$(1 \Leftrightarrow 3)$ $(\Rightarrow)$ Arriba $(\Leftarrow)$ $|Gal(E/K)| \leq |Hom(E/K, \overline{K}/K)| \leq [E:K]$
Si hay igualdad es que separable y toda hom es autom $\Rightarrow$ normal ☒

Ejemplos

1. $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}$ $\qquad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3]/\mathbb{Q}) \simeq S_3$
3. $\mathbb{Q}[\xi_n]/\mathbb{Q}$ $\qquad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\xi_n]/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_{\varphi(n)}$
4. Extensiones cuadráticas de $\mathbb{Q}$

Comportamiento con torres y compuestos

Proposición

$E/F/K$ extensión.

$$\begin{array}{c} E \\ | \\ F \\ | \\ K \end{array}$$

1. E/K Galois $\Rightarrow$ E/F Galois
   $\not\Rightarrow$ F/K Galois
2. E/F y F/K Galois $\not\Rightarrow$ E/K Galois
3.
$$\begin{tikzcd} & FL \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ F \arrow[dr, dash] & & L \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$
   - F/K Galois $\Rightarrow$ FL/L Galois
   - F/K, L/K Galois $\Rightarrow$ FL/K Galois
   - FL/K Galois $\not\Rightarrow$ F/K, L/K Galois
   - F/K, L/K Galois $\Rightarrow$ $F\cap L/K$ Galois

Notación Dada E/K Galois finita, si $E/K = K(f)$ para $f \in K[X]$ separable, notaremos $\mathrm{Gal}(f/K) := \mathrm{Gal}(K(f)/K)$.

Proposición: Sea $f \in K[X]$ separable. Entonces $\mathrm{Gal}(f/K) < S_n$

Demostración: Sea $K(f) = K[\alpha_1, .., \alpha_n]$ con $\alpha_1, .., \alpha_n \neq$, raíces de f y sea $A = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$. $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(f, K)$, se tiene $\sigma(A) = A$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(f/K) &\longrightarrow S(X) = S_n \\ \sigma &\longmapsto \sigma|A \end{aligned}$$ es un monomorfismo de grupos pues $\sigma|_A = id \Rightarrow \sigma = id_K$ $\boxtimes$

(Notar que $\mathrm{Gal}(f/K)$ es un grupo con $\circ$)

Observación $E/F/K$

Sea E/K Galois. Por lo tanto E/F Galois y

$Gal(E/F) < Gal(E/K)$ subgrupo.

Por lo tanto si E/K Galois finita, entonces como $E = K[\theta]$
y si F, L son dos subextensiones
$$Gal(E/F) = Gal(E/L) \Rightarrow \prod_{\sigma \in Gal(E/F)} (X - \sigma(\theta)) = \prod_{\sigma \in Gal(E/L)} (X - \sigma(\theta))$$

$$\Rightarrow f(\theta, F) = f(\theta, L) \Rightarrow F = L$$

O sea $Gal(E/F) = Gal(E/L) \Rightarrow F = L$.

$\uparrow$ 12/9/17

Estudio de las subextensiones de $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta]/\mathbb{Q}$:

$$f = X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X - \sqrt[3]{2}\zeta)(X - \sqrt[3]{2}\zeta^2)$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta] = \mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\zeta, \sqrt[3]{2}\zeta^2)$$

$$Gal(f/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} \cong S_3$$
$$= \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$\sigma_1 = id \longleftrightarrow 1$

$\sigma_2 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta$, $\zeta \mapsto \zeta$ $\qquad \sigma_2 \longleftrightarrow (123)$ pues $\sqrt[3]{2}\zeta \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta^2$ y $\sqrt[3]{2}\zeta^2 \mapsto \sqrt[3]{2}$

$\sigma_3 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta^2$, $\zeta \mapsto \zeta$ $\qquad \sigma_3 \longleftrightarrow (132)$

$\sigma_4 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}$, $\zeta \mapsto \zeta^2$ $\qquad \sigma_4 \longleftrightarrow (23)$ pues $\sqrt[3]{2}\zeta \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta^2$

$\sigma_5 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta$, $\zeta \mapsto \zeta^2$ $\qquad 1 \mapsto 2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$ $\qquad \sigma_5 \longleftrightarrow (12)$

Numeración de raíces: $\sqrt[3]{2} = 1$, $\sqrt[3]{2}\zeta = 2$, $\sqrt[3]{2}\zeta^2 = 3$

$\sigma_6 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\zeta^2$, $\zeta \mapsto \zeta^2$ $\qquad 1 \mapsto 3 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ $\qquad \sigma_6 \longleftrightarrow (13)$