

Chapitre 3

Programmation linéaire en nombres entiers

Cours RO202

Zacharie ALES
(zacharie.ales@ensta.fr)

Adapté de cours de Marie-Christine Costa, Alain Faye et Sourour Elloumi

Créé le 21/01/2018
Modifié le 21/11/2022 (v6)

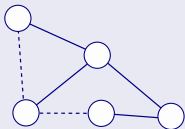


- 1 Introduction
- 2 Algorithme de branch-and-bound
- 3 Algorithme de branch-and-cut
- 4 Conclusion

Programme

Optimisation dans les graphes

Chapitre 1

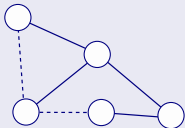


1.1 - Arbre couvrant

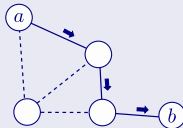
Programme

Optimisation dans les graphes

Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant

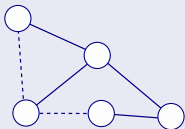


1.2 - Chemin

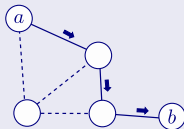
Programme

Optimisation dans les graphes

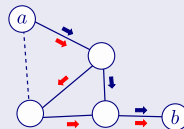
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant



1.2 - Chemin

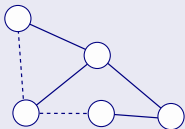


1.3 - Flot

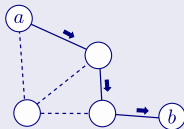
Programme

Optimisation dans les graphes

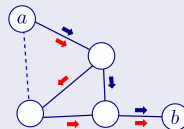
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant



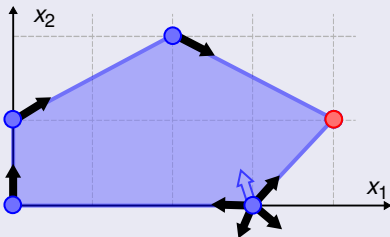
1.2 - Chemin



1.3 - Flot

Programmation linéaire (PL)

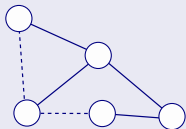
Chapitre 2



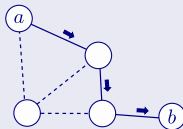
Programme

Optimisation dans les graphes

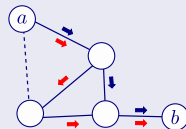
Chapitre 1



1.1 - Arbre couvrant



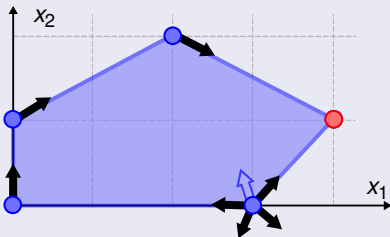
1.2 - Chemin



1.3 - Flot

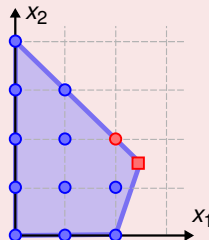
Programmation linéaire (PL)

Chapitre 2



PL en nombres entiers

Chapitre 3



Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Algorithme de branch-and-bound
- 3 Algorithme de branch-and-cut
- 4 Conclusion

Définition - **PLNE** (Programmation Linéaire en Nombres Entiers)

Programmation linéaire où certaines variables doivent prendre des valeurs entières

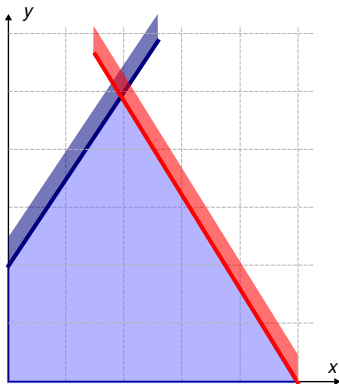
Définitions - Types de PLNE

- **pure** : variables entières uniquement
- **mixte** : variables entières et continues
- **0-1** ou **binaire** : variables $\in \{0, 1\}$

Exemple 1

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & x + 0.64y \\ \text{s.c.} & 50x + 31y \leq 250 \\ & -3x + 2y \leq 4 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

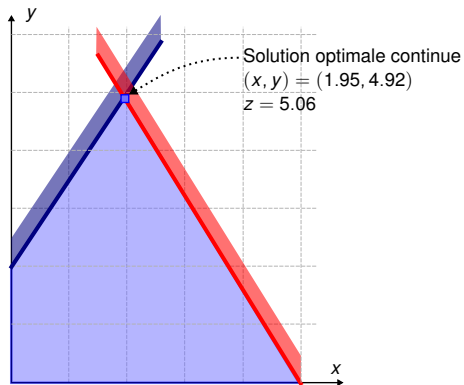


PL et PLNE sont très différentes !
(impossible d'arrondir)

Exemple 1

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & x + 0.64y \\ \text{s.c.} & 50x + 31y \leq 250 \\ & -3x + 2y \leq 4 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

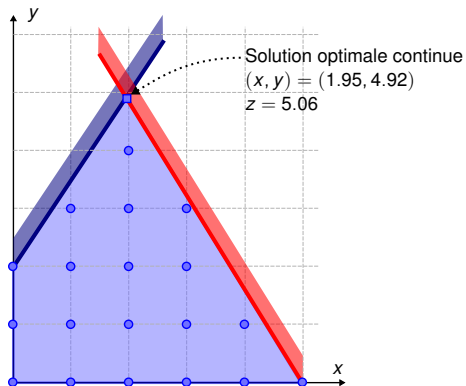


PL et PLNE sont très différentes !
(impossible d'arrondir)

Exemple 1

Exemple

$$\begin{cases} \max & x + 0.64y \\ \text{s.c.} & 50x + 31y \leq 250 \\ & -3x + 2y \leq 4 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

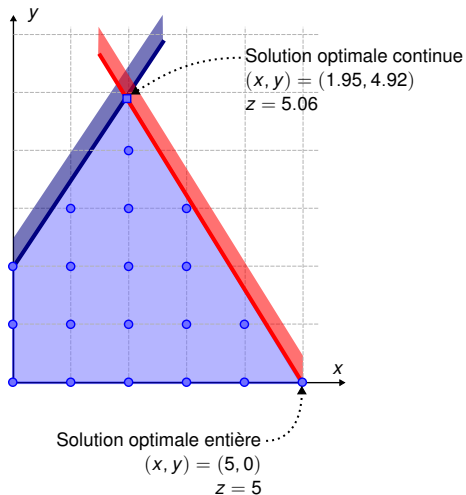


PL et PLNE sont très différentes !
(impossible d'arrondir)

Exemple 1

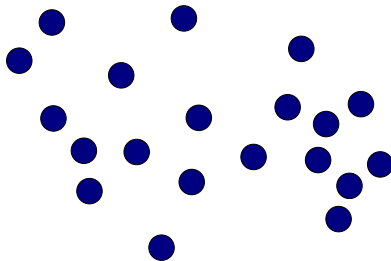
Exemple

$$\begin{cases} \max & x + 0.64y \\ \text{s.c.} & 50x + 31y \leq 250 \\ & -3x + 2y \leq 4 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$



PL et PLNE sont très différentes !
(impossible d'arrondir)

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts



Légende

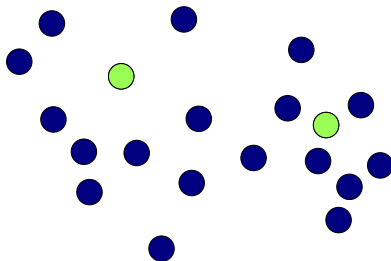
● : ville

Problème

Où et combien placer d'entrepôts pour servir toutes les villes à coût minimal ?

Construction d'entrepôts et raccords 

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts



Légende

● : ville

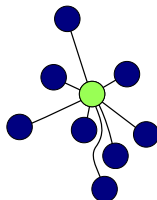
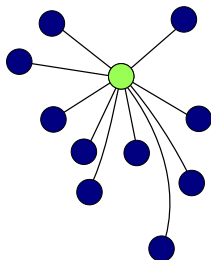
● : entrepôt

Problème

Où et combien placer d'entrepôts pour servir toutes les villes à coût minimal ?

Construction d'entrepôts et raccords 

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts



Légende

● : ville

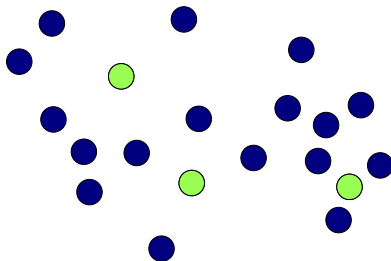
● : entrepôt

Problème

Où et combien placer d'entrepôts pour servir toutes les villes à coût minimal ?

Construction d'entrepôts et raccords 

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts



Légende

● : ville

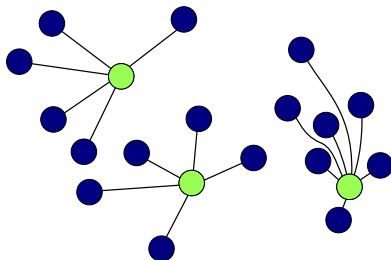
● : entrepôt

Problème

Où et combien placer d'entrepôts pour servir toutes les villes à coût minimal ?

Construction d'entrepôts et raccords 

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts



Légende

● : ville

● : entrepôt

Problème

Où et combien placer d'entrepôts pour servir toutes les villes à coût minimal ?

Construction d'entrepôts et raccords 

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts

Coûts de raccordement c_{ij}

	Entrepôt 1			
	E_1	E_2	E_3	E_4
V_1	1	2	1	6
V_2	6	1	6	3
V_3	5	2	3	1
V_4	3	3	7	8
V_5	4	7	3	2

Ville 5 \uparrow Raccorder V_5 à E_1 coûte 4

Coûts d'installation f_i des entrepôts

E_1	E_2	E_3	E_4
15	20	7	11

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts

Coûts de raccordement c_{ij}

	Entrepôt 1			
	E_1	E_2	E_3	E_4
V_1	1	2	1	6
V_2	6	1	6	3
V_3	5	2	3	1
V_4	3	3	7	8
V_5	4	7	3	2

Ville 5 \uparrow Raccorder V_5 à E_1 coûte 4

Coûts d'installation f_i des entrepôts

E_1	E_2	E_3	E_4
15	20	7	11

Objectif

Raccorder toutes les villes en minimisant les coûts de raccordement et d'installation

Variables

- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{si l'entrepôt } j \text{ est construit} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$ ↙ Nombre d'entrepôts potentiels
- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est approvisionné par l'entrepôt } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ ↙ Nombre de villes

Modèle mathématique

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & z = \dots\dots\dots \\ \text{tel que} & \dots\dots\dots \dots\dots \\ & \dots\dots\dots \dots\dots \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \end{array} \right.$$

Quiz !

Question 1

Déterminer une contrainte permettant d'imposer que l'entrepôt 3 soit construit

Question 2

Déterminer une contrainte permettant d'assurer qu'au moins un des deux centres 1 ou 4 soit ouvert

Question 3

Déterminer des contraintes permettant d'assurer que chaque centre n'approvisionne pas plus de 5 villes

Question 4

Déterminer une contrainte permettant d'assurer que la ville numéro 2 est approvisionnée par un entrepôt d'indice impair

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Algorithme de branch-and-bound**
- 3 Algorithme de branch-and-cut
- 4 Conclusion

Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq x_1$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq x_1$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$



Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

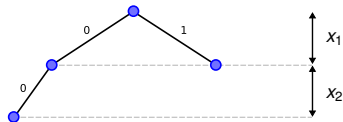
$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq x_1$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$



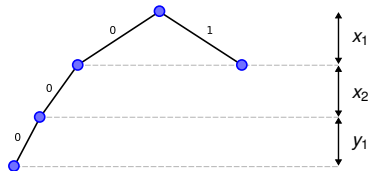
Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$



Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

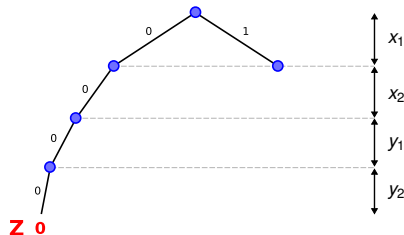
$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq x_1$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$



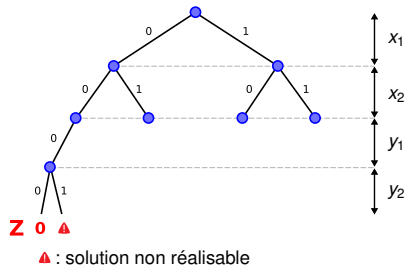
Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$



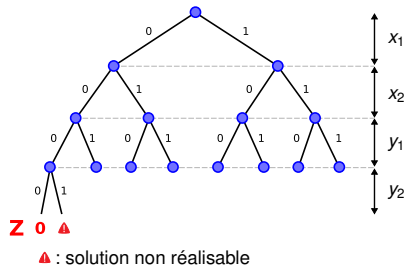
Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$



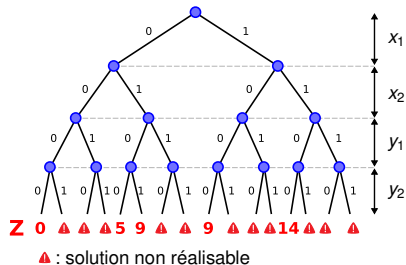
Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\leq x_1 \\ y_2 &\leq x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$



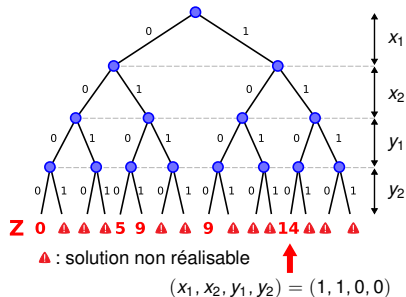
Résolution des PL - Énumération

1ère idée : Énumération exhaustive des solutions

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$



Résolution des PL - Énumération

n variables binaires $\rightarrow 2^n$ cas possibles

- $n = 20 \rightarrow > 10^6$ cas
- $n = 30 \rightarrow > 10^9$ cas
- ...

Si 1 milliard d'opérations par secondes :

n	30	40	50	60	70
Temps	1s	17min	11 jours	31 ans	31 000 ans

Résolution des PL - Énumération

n variables binaires $\rightarrow 2^n$ cas possibles

- $n = 20 \rightarrow > 10^6$ cas
- $n = 30 \rightarrow > 10^9$ cas
- ...

Si 1 milliard d'opérations par secondes :

n	30	40	50	60	70
Temps	1s	17min	11 jours	31 ans	31 000 ans

Énumération de tous les cas possibles généralement **impraticable**

Résolution des PL - Énumération

n variables binaires $\rightarrow 2^n$ cas possibles

- $n = 20 \rightarrow > 10^6$ cas
- $n = 30 \rightarrow > 10^9$ cas
- ...

Si 1 milliard d'opérations par secondes :

n	30	40	50	60	70
Temps	1s	17min	11 jours	31 ans	31 000 ans

Énumération de tous les cas possibles généralement **impraticable**

Mise en place d'une énumération "**implicite**"

Relaxation linéaire

2ème idée : Énumération implicite par encadrement de la valeur optimale

Définition - **Relaxation continue** d'un problème entier (P)

Problème obtenu lorsqu'on "oublie" le caractère entier des variables

Ex : $x \in \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow x \in [1, n]$

Relaxation linéaire

2ème idée : Énumération implicite par encadrement de la valeur optimale

Définition - **Relaxation continue** d'un problème entier (P)

Problème obtenu lorsqu'on "oublie" le caractère entier des variables

Ex : $x \in \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow x \in [1, n]$

Intérêts

-
-

Exemple - Relaxation linéaire du modèle de localisation d'entrepôt

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & z = \sum_{i=1}^n f_i y_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{tel que} & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \\ & x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j \\ & y_i \in [0, 1] \quad \forall i \\ & x_{ij} \in [0, 1] \quad \forall i, j \end{array} \right.$$

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

s.c.

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq x_1$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Optimum continu

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$
- $Z_c = \frac{33}{2}$

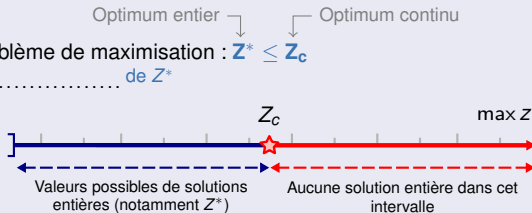
Conclusion

Optimum entier . $\frac{33}{2}$

Relaxation continue : interprétation

Propriété générale - Relaxation continue

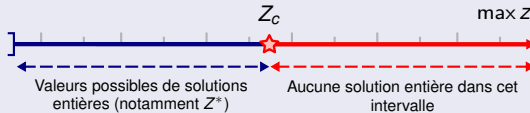
- Pour un problème de maximisation : $Z^* \leq Z_c$
 Z_c est une de Z^*



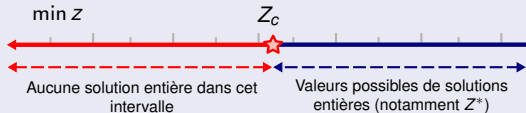
Relaxation continue : interprétation

Propriété générale - Relaxation continue

- Optimum entier \swarrow \searrow Optimum continu
- Pour un problème de maximisation : $Z^* \leq Z_c$
 Z_c est une de Z^*



- Pour un problème de minimisation : $Z^* \geq Z_c$
 Z_c est une de Z^*



Quelle information nous fournit une solution réalisable entière ?**Exemple**

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Solutions connues**Solution entière**

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 0, 0)$
- $Z_1 = 9$

Solution continue

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$
- $Z_c = 16,5$

Quelle information nous fournit une solution réalisable entière ?

Exemple

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_1 \leq x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Solutions connues

Solution entière

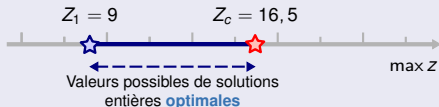
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 0, 0)$
- $Z_1 = 9$

Solution continue

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$
- $Z_c = 16,5$

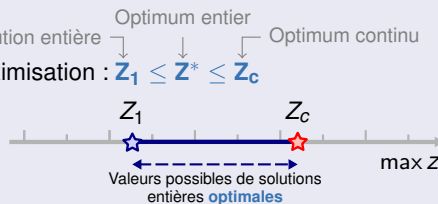
Conclusion

Z^* est compris entre 9 et 16,5



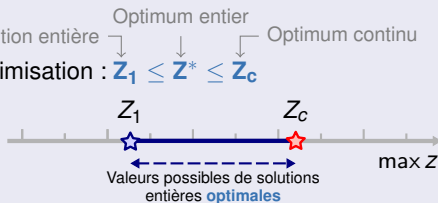
Propriétés générales

- En cas de maximisation : $Z_1 \leq Z^* \leq Z_c$

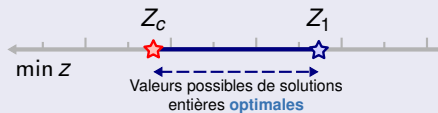


Propriétés générales

- En cas de maximisation : $Z_1 \leq Z^* \leq Z_c$



- En cas de minimisation : $Z_c \leq Z^* \leq Z_1$



Méthode de résolution de PLNE

Algorithme de *branch-and-bound*

Séparation et évaluation en français ↗

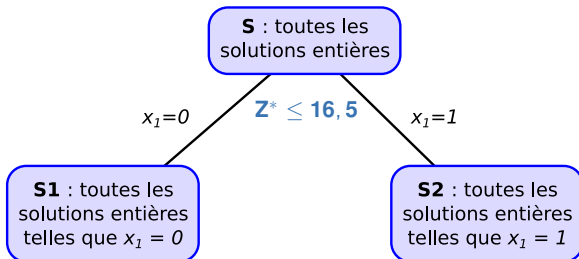
Principe

-
Borne inférieure et supérieure
-

Branch and bound - Exemple

- Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$
 - $Z_c = 16,5 \geq Z^*$



Quiz !

Question 5

Vous considérez un programme linéaire en nombres entiers à 4 variables dont vous cherchez à maximiser l'objectif.

La solution optimale de la relaxation linéaire fournit un objectif de valeur $z = 3$ et la solution $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0.6, 2, 0.7)$.

Quelle affirmation est vraie ?

- A : Le problème est résolu et son optimum vaut 3 ;
- B : Je dois effectuer un branchement et je ne peux l'effectuer que sur une unique variable ;
- C : Je dois effectuer un branchement et je peux l'effectuer sur plusieurs variables ;
- D : Le problème n'a pas de solution réalisable.

Quiz !

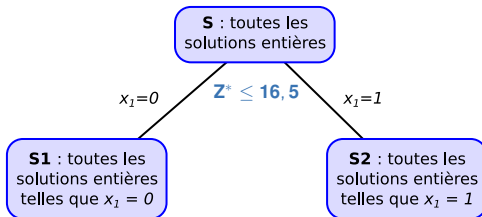
Question 6

Vous considérez un programme linéaire en nombres entiers P à 3 variables dont vous cherchez à maximiser l'objectif.

La solution optimale de la relaxation linéaire fournit un objectif de valeur $z = 7$ et la solution $(x_1, x_2, x_3) = (2, 8.4, 3)$.

Vous choisissez de brancher sur la variable x_2 (seul choix possible).

Quelles contraintes ajoutez-vous dans les deux branches ainsi créées ?



Ensemble S1 ($x_1 = 0$)

$$\max z = 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 0$$

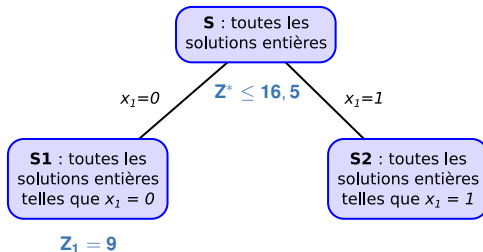
$$y_2 \leq x_2$$

$$x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 1)$
- $Z_1 = 9$



Ensemble S1 ($x_1 = 0$)

$$\max z = 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 0$$

$$y_2 \leq x_2$$

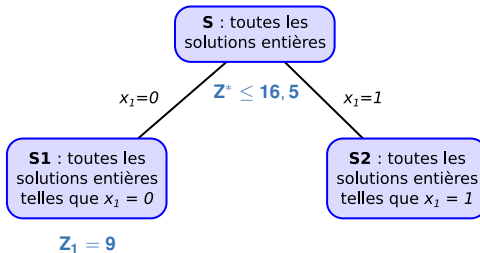
$$x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 10$$

$$x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 1)$
- $Z_1 = 9$

La relaxation continue fournit une solution entière !



Ensemble S2 ($x_1 = 1$)

$$\max z = 9 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

s.c.

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

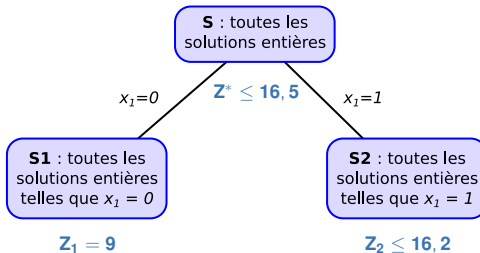
$$y_2 \leq x_2$$

$$x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_2, y_1, y_2) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$
- $Z_c^2 = 16,2$



Ensemble S2 ($x_1 = 1$)

$$\max z = 9 + 5x_2 + 6y_1 + 4y_2$$

s.c.

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq x_2$$

$$x_2 + 5y_1 + 2y_2 \leq 4$$

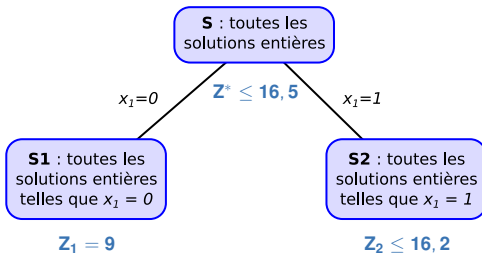
$$x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_2, y_1, y_2) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$

- $Z_c^2 = 16,2$

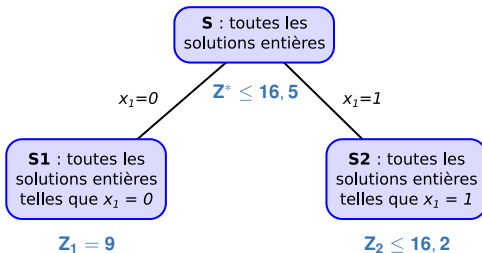
La borne supérieure est améliorée



Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
Solution courante
- Meilleure borne supérieure connue :

La valeur optimale est donc comprise entre



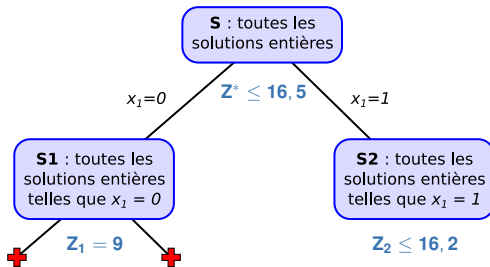
Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
Solution courante
- Meilleure borne supérieure connue :

La valeur optimale est donc comprise entre

Comment continuer ?

- Élaguer la branche de S1
Car solution entière trouvée
- Brancher en S2
Car solution fractionnaire trouvée



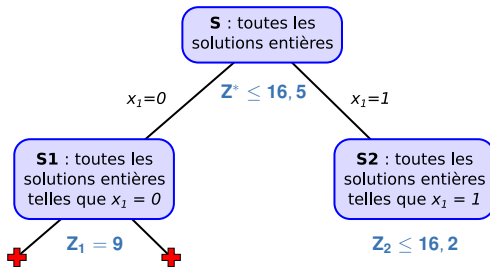
Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
Solution courante
- Meilleure borne supérieure connue :

La valeur optimale est donc comprise entre

Comment continuer ?

- Élaguer la branche de S1
Car solution entière trouvée
- Brancher en S2
Car solution fractionnaire trouvée



Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
Solution courante
- Meilleure borne supérieure connue :

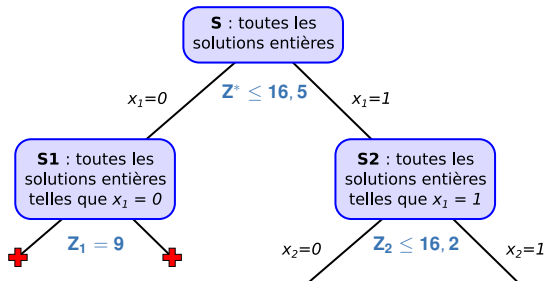
La valeur optimale est donc comprise entre

Comment continuer ?

- Élaguer la branche de S1
Car solution entière trouvée
- Brancher en S2
Car solution fractionnaire trouvée

Sur quelle variable brancher en S2 ?

- Solution de la relaxation continue :
 $(x_1, x_2, y_2, y_2) = (1, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$
- On peut brancher sur x_2 ou y_2
Car valeurs fractionnaires



Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
Solution courante
- Meilleure borne supérieure connue :

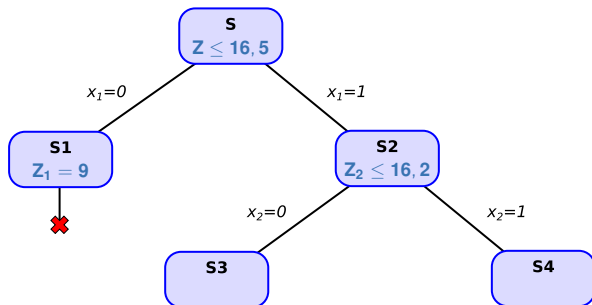
La valeur optimale est donc comprise entre

Comment continuer ?

- Élaguer la branche de S1
Car solution entière trouvée
- Brancher en S2
Car solution fractionnaire trouvée

Sur quelle variable brancher en S2 ?

- Solution de la relaxation continue :
 $(x_1, x_2, y_2, y_2) = (1, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$
- On peut brancher sur x_2 ou y_2
Car valeurs fractionnaires



Sous-ensemble S3 ($x_1 = 1, x_2 = 0$)

$$\max Z = 9 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 0$$

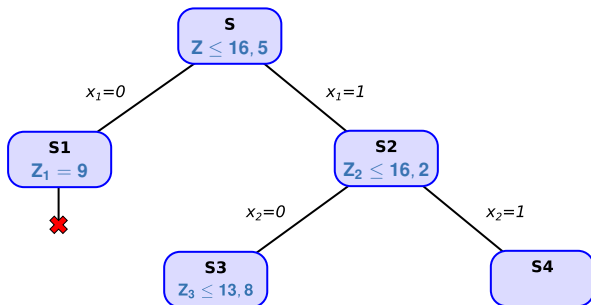
$$5y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, \frac{4}{5}, 0)$

- $Z_c^3 = 13,8$



Sous-ensemble S3 ($x_1 = 1, x_2 = 0$)

$$\max Z = 9 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

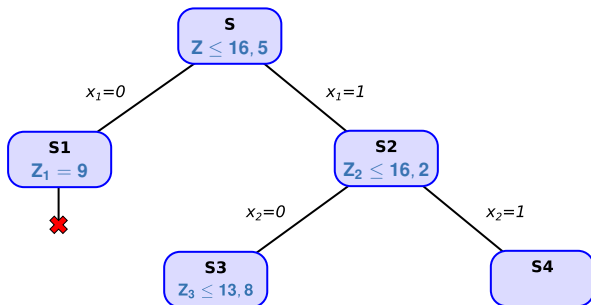
$$y_2 \leq 0$$

$$5y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, \frac{4}{5}, 0)$
- $Z_c^3 = 13,8$



Sous-ensemble S3 ($x_1 = 1, x_2 = 0$)

$$\max Z = 9 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 0$$

$$5y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, \frac{4}{5}, 0)$
- $Z_c^3 = 13,8$

Sous-ensemble S4 ($x_1 = 1, x_2 = 1$)

$$\max Z = 14 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

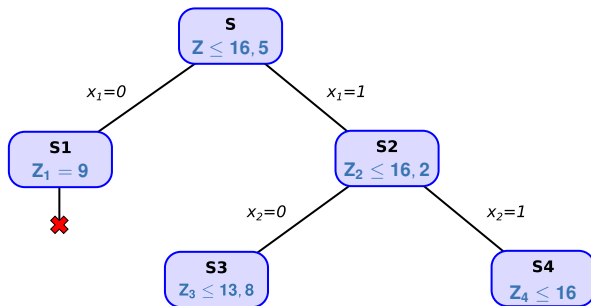
$$y_2 \leq 1$$

$$5y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, \frac{1}{2})$
- $Z_c^4 = 16$ Fractionnaire ! ↗



Sous-ensemble S3 ($x_1 = 1, x_2 = 0$)

$$\max Z = 9 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

$$y_2 \leq 0$$

$$5y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, \frac{4}{5}, 0)$
- $Z_c^3 = 13,8$

Sous-ensemble S4 ($x_1 = 1, x_2 = 1$)

$$\max Z = 14 + 6y_1 + 4y_2$$

$$\text{s.c.} \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \leq 1$$

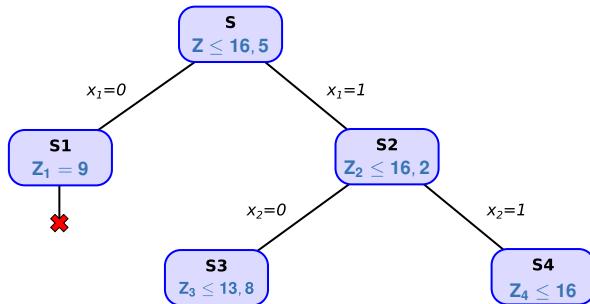
$$y_2 \leq 1$$

$$5y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \in \{0, 1\}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, \frac{1}{2})$
- $Z_c^4 = 16$ Fractionnaire ! ↗

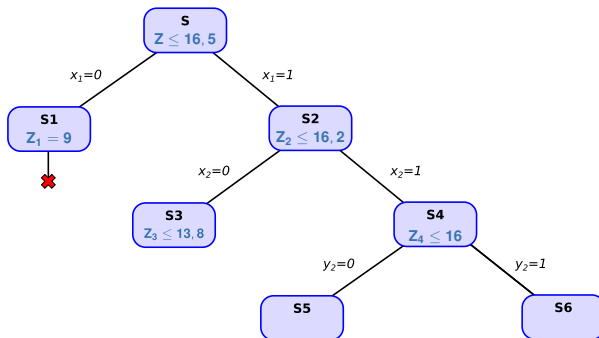


Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
- Meilleure borne supérieure connue : ...

Comment continuer ?

- On ne peut élaguer ni S3 ni S4
- On branche en S4
 Peut potentiellement contenir une solution admissible de valeur $> 13,8$, contrairement à S3
 - On branche sur y_2 qui est fractionnaire en S4



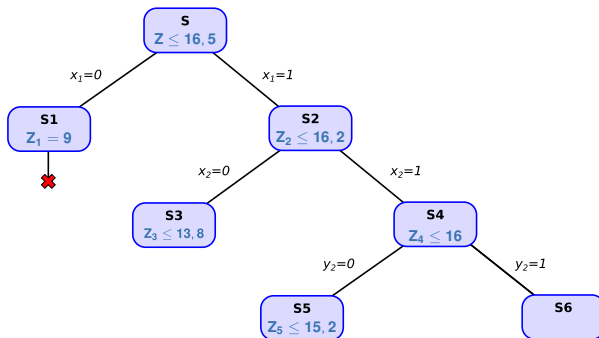
Sous-ensemble S5 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0$)

$$\max Z = 14 + 6y_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq 1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, \frac{1}{5}, 0)$
- $Z_c^5 = 15,2$



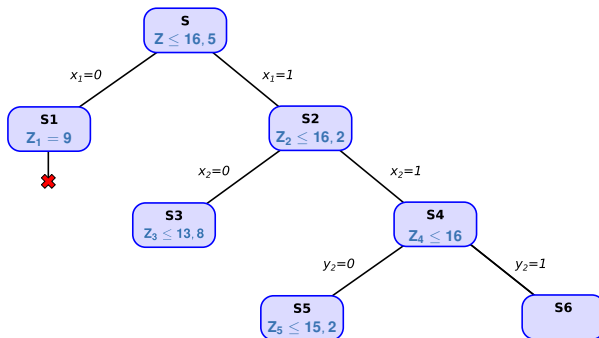
Sous-ensemble S5 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0$)

$$\max Z = 14 + 6y_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq 1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, \frac{1}{5}, 0)$
- $Z_c^5 = 15,2$



Sous-ensemble S5 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0$)

$$\max Z = 14 + 6y_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq 1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Solution de la relaxation continue :

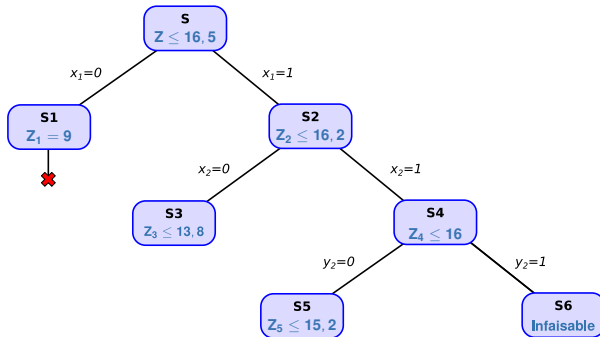
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, \frac{1}{5}, 0)$
- $Z_c^5 = 15, 2$

Sous-ensemble S6 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 1$)

$$\max Z = 20 + 6y_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq -1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Aucune solution
- On élague S6



Sous-ensemble S5 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0$)

$$\max Z = 14 + 6y_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq 1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Solution de la relaxation continue :

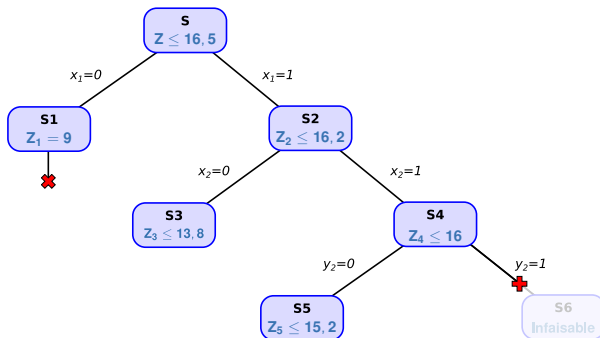
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, \frac{1}{5}, 0)$
- $Z_c^5 = 15, 2$

Sous-ensemble S6 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 1$)

$$\max Z = 20 + 6y_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq -1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Aucune solution
- On élague S6



Sous-ensemble S5 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0$)

$$\max Z = 14 + 6y_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq 1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Solution de la relaxation continue :

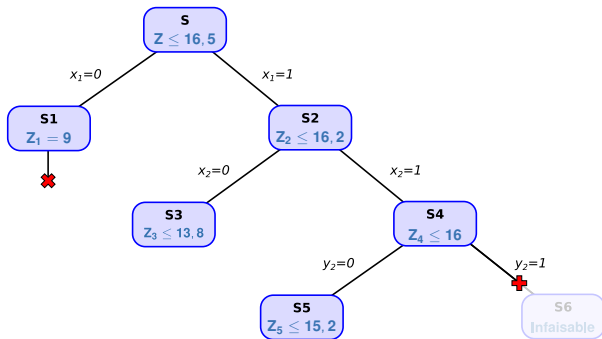
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, \frac{1}{5}, 0)$
- $Z_c^5 = 15, 2$

Sous-ensemble S6 ($x_1 = x_2 = 1, y_2 = 1$)

$$\max Z = 20 + 6y_1$$

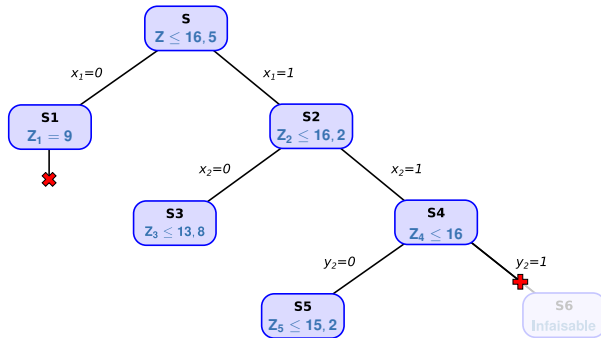
$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq -1 \\ & y_1 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Aucune solution
- On élague S6

**QCM**

A ce stade, que peut-on élaguer ?

- (A) S3 seul
- (B) S5 seul
- (C) S3 et S5
- (D) ni S3 ni S5

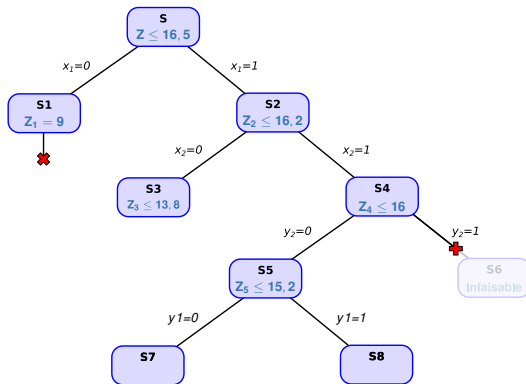


Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
- Meilleure borne supérieure connue :

Comment continuer ?

- On branche en S5 qui a la plus grande borne supérieure
Peut potentiellement contenir une solution admissible de valeur $> 13,8$
 - On branche sur y_2 qui est fractionnaire en S5



Sous-ensemble S7

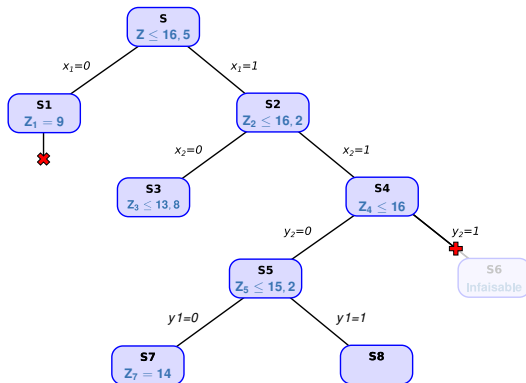
$(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0, y_1 = 0)$

$$\max z = 14$$

Solution :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z_7 = 14$

Nouvelle solution entière trouvée !



Sous-ensemble S7

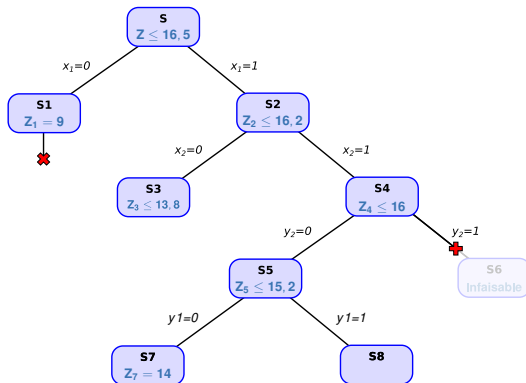
$(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0, y_1 = 0)$

$$\max z = 14$$

Solution :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z_7 = 14$

Nouvelle solution entière trouvée !



Sous-ensemble S7

 $(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0, y_1 = 0)$

$$\max z = 14$$

Solution :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z_7 = 14$

Nouvelle solution entière trouvée !

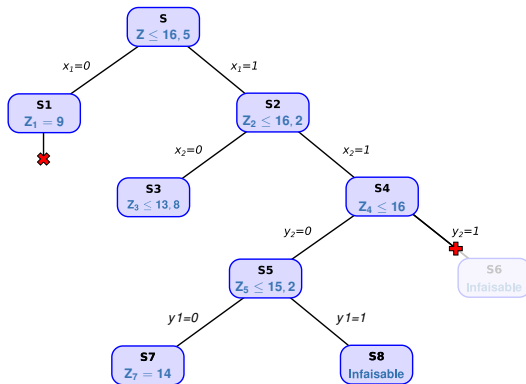
Sous-ensemble S8

 $(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 1, y_1 = 0)$

$$\max z = 20$$

$$\text{s.c.} \quad 11 \leq 10$$

- Aucune solution
- On élague S8



Sous-ensemble S7

 $(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0, y_1 = 0)$

$$\max z = 14$$

Solution :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z_7 = 14$

Nouvelle solution entière trouvée!

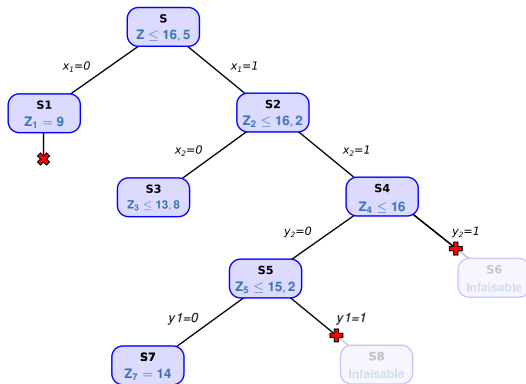
Sous-ensemble S8

 $(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 1, y_1 = 0)$

$$\max z = 20$$

$$\text{s.c.} \quad 11 \leq 10$$

- Aucune solution
- On élague S8



Sous-ensemble S7

 $(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 0, y_1 = 0)$

$$\max z = 14$$

Solution :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z_7 = 14$

Nouvelle solution entière trouvée !

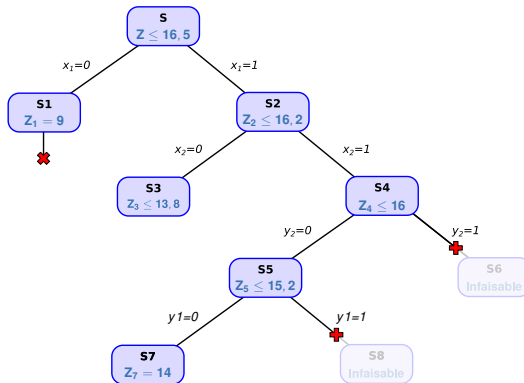
Sous-ensemble S8

 $(x_1 = x_2 = 1, y_2 = 1, y_1 = 0)$

$$\max z = 20$$

$$\text{s.c.} \quad 11 \leq 10$$

- Aucune solution
- On élague S8

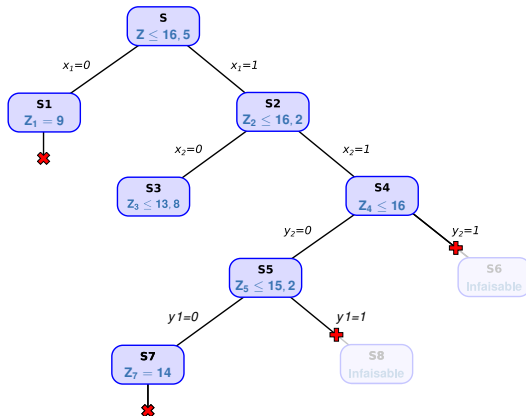


Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : 14

Comment continuer ?

- Z_7 entier : on élague S7
- $Z_c^3 < Z_7$: on élague S3

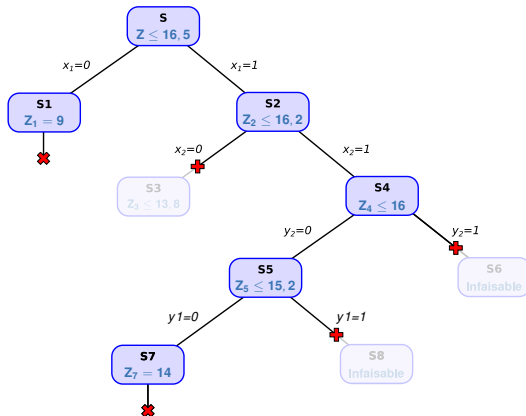


Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : 14

Comment continuer ?

- Z_7 entier : on élague S7
- $Z_c^3 < Z_7$: on élague S3

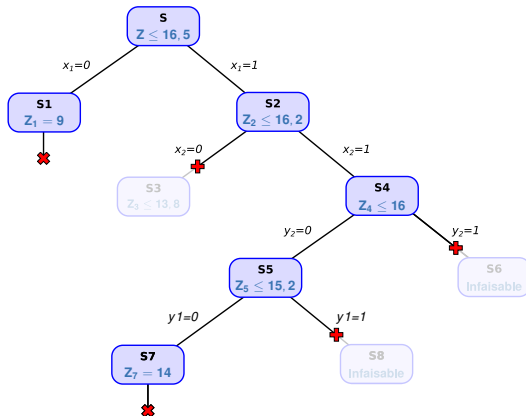


Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : 14

Comment continuer ?

- Z_7 entier : on élague S7
- $Z_C^3 < Z_7$: on élague S3



Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : 14

Comment continuer ?

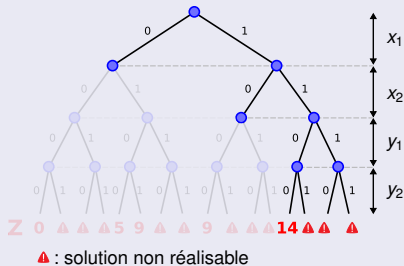
- Z_7 entier : on élague S7
- $Z_C^3 < Z_7$: on élague S3

Solution optimale obtenue !

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z^* = Z_7 = 14$

Gain par rapport à l'énumération complète

Solutions parcourues par le *branch-and-bound* :



Algorithme B&B - Maximisation - Résumé

Initialisation

- Calculer une solution admissible de valeur Z^*
ou poser $Z^* = -\infty$
- Résoudre la relaxation continue et mettre à jour Z^* si besoin
Évaluation

Algorithme B&B - Maximisation - Résumé

Initialisation

- Calculer une solution admissible de valeur Z^*
ou poser $Z^* = -\infty$
- Résoudre la relaxation continue et mettre à jour Z^* si besoin
Évaluation

Tant qu'il reste des nœuds non élagués

- Choisir un nœud non élagué
- Brancher sur une des variables de valeur fractionnaire en ce nœud
Séparation
- Résoudre la relaxation continue des deux nœuds obtenus et mettre à jour Z^*
Évaluation
- Appliquer les tests d'élagage

Algorithme B&B - Maximisation - Résumé

Initialisation

- Calculer une solution admissible de valeur Z^*
ou poser $Z^* = -\infty$
- Résoudre la relaxation continue et mettre à jour Z^* si besoin
Évaluation

Tant qu'il reste des nœuds non élagués

- Choisir un nœud non élagué
- Brancher sur une des variables de valeur fractionnaire en ce nœud
Séparation
- Résoudre la relaxation continue des deux nœuds obtenus et mettre à jour Z^*
Évaluation
- Appliquer les tests d'élagage

A l'issue de ce processus, la solution courante Z^* est optimale

Algorithme B&B – Maximisation – Résumé suite

Un nœud est élagué si

- 1 Le problème devient infaisable
Pas de solution continue ou entière
- 2 La valeur optimale de la relaxation continue est $\leq Z^*$
- 3 La solution de la relaxation continue est entière
Attention, c'est x qui doit être entière pas Z^*

La mise en place de l'algorithme nécessite de préciser

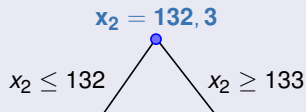
- 1 La règle de sélection
Sur quel nœud brancher ?
- 2 La règle de branchement
Sur quelle variable brancher ?

B&B - Variables entières

Cas général des variables entières (\neq du cas 0 – 1)

- Choisir une variable de valeur fractionnaire dans la solution optimale de la relaxation continue
- Brancher sur l'arrondi supérieur et inférieur de cette valeur

Exemple



Détermination des solutions admissibles

- Souvent difficile
- Pas de méthode générale rapide
- Des algorithmes fonctionnent bien dans certains cas particuliers

Par exemple si l'arrondi est toujours admissible

Problème d'efficacité

- Le nombre de nœuds explorés détermine le temps de calcul
À chaque nœud, on résout un programme linéaire (continu)
- Nombre maximal de nœuds à explorer inconnu à priori
- Un PL continu se résout généralement « vite »
- Un PLNE nécessite du temps

Efficacité - Exemple

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1 \\ & \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \leq b_2 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- $n = 1000$
- Données aléatoires
- Relaxation continue : 0.03 secondes
- Résolution en entier : 43 secondes

251402 nœuds parcourus contre $\sim 10^{300}$ pour une énumération complète

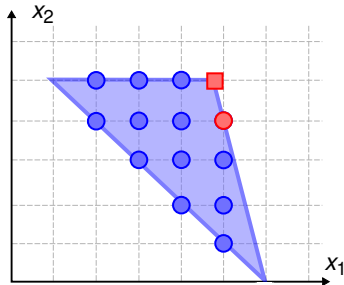
Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Algorithme de branch-and-bound
- 3 Algorithme de branch-and-cut**
- 4 Conclusion

Programme linéaire en Nombres Entiers (PLNE)

Principe - Ajout de coupe

Séparer l'optimum continu des solutions admissibles



■ : optimum continu

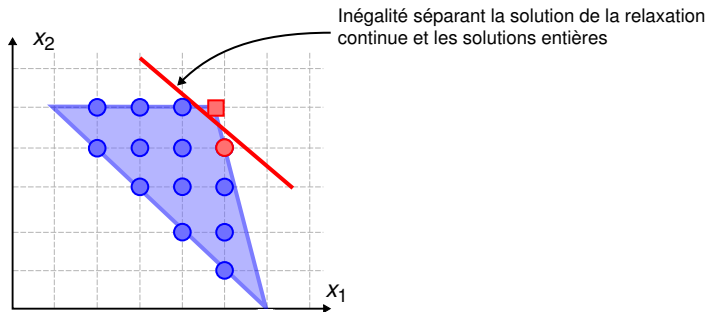
● : optimum entier

● : autres solutions entières

Programme linéaire en Nombres Entiers (PLNE)

Principe - Ajout de coupe

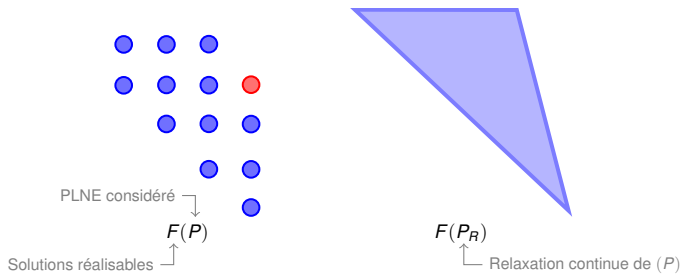
Séparer l'optimum continu des solutions admissibles



■ : optimum continu

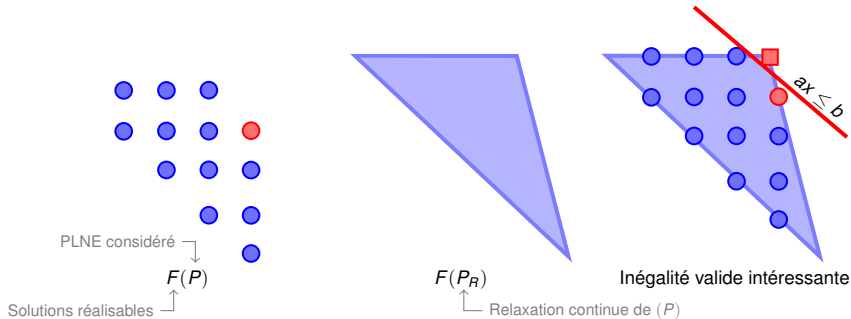
● : optimum entier

● : autres solutions entières



Définition - Inégalité valide pour (P)

$ax \leq b$ est vérifiée par tout $x \in F(P)$



Définition - Inégalité valide pour (P)

$ax \leq b$ est vérifiée par tout $x \in F(P)$

Définition - Inégalité valide "intéressante"

$ax \leq b$ est valide et "tronque" $F(P_R)$

Inégalités valides

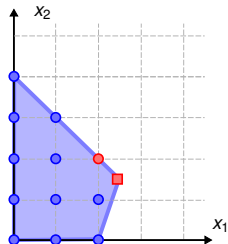
Problème

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \quad x_1 + x_2 \leq 4$$

$$3x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$



■ : optimum continu

● : optimum entier

● : autres solutions entières

Inégalités valides

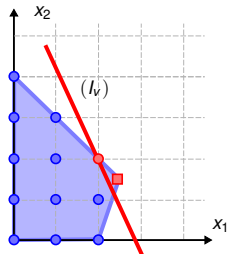
Problème

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Inégalité valide considérée (I_V)

$$8x_1 + x_2 \leq 20$$

Toutes les solutions entières vérifient (I_V)



■ : optimum continu

● : optimum entier

● : autres solutions entières

Inégalités valides

Problème

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Inégalité valide considérée (I_V)

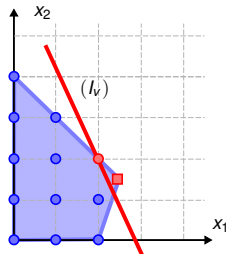
$$8x_1 + x_2 \leq 20$$

Toutes les solutions entières vérifient (I_V)

Relaxation continue respectant (I_V)

- $(x_1, x_2) = (2, 2)$
- $z = 6$

Optimum entier atteint



■ : optimum continu

● : optimum entier

● : autres solutions entières

Branch-and-cut

Branch-and-bound avec ajout de coupes en chaque nœud

Meilleure borne, donc on tronque l'arbre plus facilement

En pratique

- Nombre de coupes limité en chaque nœud
Économise le temps de calcul
- Possibilité de ne mettre des coupes qu'à la racine

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Algorithme de branch-and-bound
- 3 Algorithme de branch-and-cut
- 4 Conclusion**

Il existe divers logiciels



OptiRisk



IBM
CPLEX



EURODECISION
ALGORITHMS FOR BUSINESS



Artelys
solutions en optimisation

julia



Logiciels PL et PLNE

Langages de modélisation

- AMPL
- Mosel
- Julia/JuMP

Écriture au format « mathématique » du problème

Logiciels propriétaires

- XPRESS-MP : sociétés FICO
- Artelys CPLEX : société IBM (ILOG)
- Gurobi

Versions étudiantes gratuites

Logiciels libres

- COIN-OR
- GLPK

Taille de problèmes résolubles (variables et contraintes)

- En continu : des centaines de milliers
- En entier : des centaines voire des milliers

Peut fortement dépendre du problème

En résumé, la PLNE

- Augmente la capacité de modélisation de la PL
- Augmente la complexité de résolution
- Résolvable par l'algorithme *branch-and-bound* voire *branch-and-cut*
- De très gros progrès depuis 30-40 ans

$$\begin{aligned}
 Q1 : y_3 &= 1 \\
 Q2 : y_1 + y_4 &\geq 1 \\
 Q3 : \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq 5 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q4 : \text{sum}_j \text{ impair et } \leq m x_{ij} &= 1 ; \text{ ou} \\
 Q5 : C \\
 Q6 : x_2 &\leq 8 \quad x_2 \geq 6
 \end{aligned}$$