Chapitre 3
Programmation linéaire en nombres entiers

Cours RO202

Zacharie ALES
(zacharie.ales@ensta.fr)

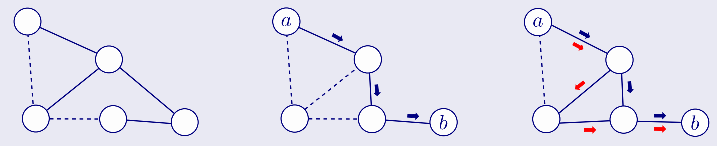
Adapté de cours de Marie-Christine Costa, Alain Faye et Sourour Elloumi

Créé le 21/01/2018
Modifié le 21/11/2022 (v6)

ENSTA
IP PARIS

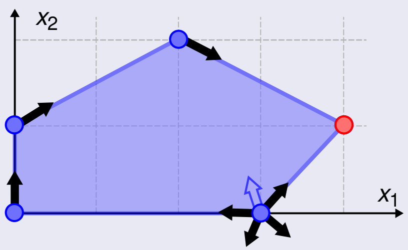
Programme

Optimisation dans les graphes
Chapitre 1

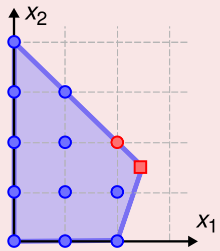


1.1 - Arbre couvrant 1.2 - Chemin 1.3 - Flot

Programmation linéaire (PL)
Chapitre 2



PL en nombres entiers
Chapitre 3



Sommaire

Définition - PLNE (Programmation Linéaire en Nombres Entiers)

Programmation linéaire où certaines variables doivent prendre des valeurs entières

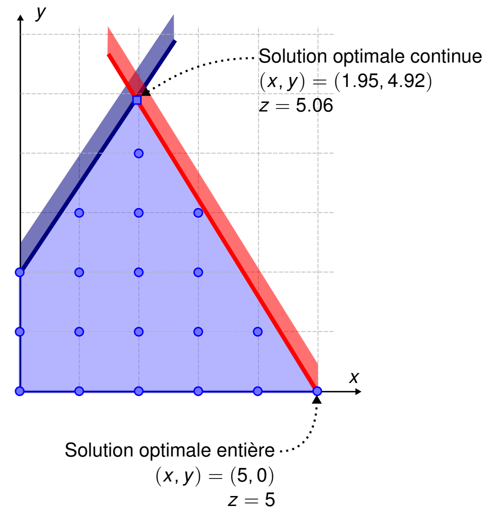
Définitions - Types de PLNE

- **pure** : variables entières uniquement
- **mixte** : variables entières et continues
- **0-1** ou **binaire** : variables $\in \{0, 1\}$

Exemple 1

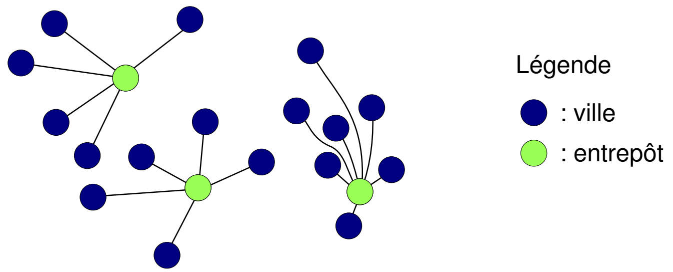
Exemple

$$\begin{cases} \max & x + 0.64y & \\ \text{s.c.} & 50x + 31y & \leq 250 \\ & -3x + 2y & \leq 4 \\ & x, y & \in \mathbb{N} \end{cases}$$



PL et PLNE sont <u>très</u> différentes !
(impossible d'arrondir)

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts



Problème

Où et combien placer d'entrepôts pour servir toutes les villes à coût minimal ?
Construction d'entrepôts et raccordements

Exemple 2 : Localisation d'entrepôts

Coûts de raccordement c_{ij}

Entrepôt 1

	E_1	E_2	E_3	E_4
V_1	1	2	1	6
V_2	6	1	6	3
V_3	5	2	3	1
V_4	3	3	7	8
V_5	4	7	3	2

Ville 5 Raccorder V_5 à E_1 coûte 4

Coûts d'installation f_j des entrepôts

E_1	E_2	E_3	E_4
15	20	7	11

Objectif

Raccorder toutes les villes en minimisant les coûts de raccordement et d'installation

Quiz !

Question 1

Déterminer une contrainte permettant d'imposer que l'entrepôt 3 soit construit

Question 2

Déterminer une contrainte permettant d'assurer qu'au moins un des deux centres 1 ou 4 soit ouvert

Question 3

Déterminer des contraintes permettant d'assurer que chaque centre n'approvisionne pas plus de 5 villes

Question 4

Déterminer une contrainte permettant d'assurer que la ville numéro 2 est approvisionnée par un entrepôt d'indice impair

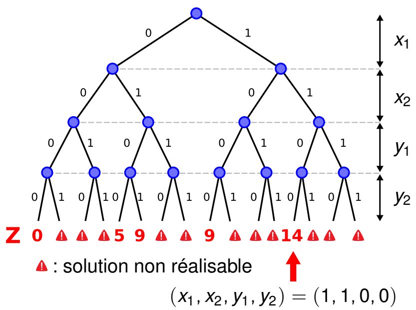
Sommaire

Résolution des PL - Énumeration

1ère idée : Énumeration exhaustive des solutions

Exemple

$$\begin{array}{lrrrrl} \max\ z = & 9x_1 & +5x_2 & +6y_1 & +4y_2 & \\ \text{s.c.} & & & y_1 & +y_2 & \leq 1 \\ & & & y_1 & & \leq x_1 \\ & & & & y_2 & \leq x_2 \\ & 6x_1 & +3x_2 & +5y_1 & +2y_2 & \leq 10 \\ & x_1, & x_2, & y_1, & y_2 & \in \{0,1\} \end{array}$$



Résolution des PL - Énumeration

n variables binaires $\rightarrow 2^n$ cas possibles

- $n = 20 \rightarrow > 10^6$ cas
- $n = 30 \rightarrow > 10^9$ cas
- ...

Si 1 milliard d'opérations par secondes :

n	30	40	50	60	70
Temps	1s	17min	11 jours	31 ans	31 000 ans

Énumeration de tous les cas possibles généralement **impraticable**

Mise en place d'une énumeration "**implicite**"

Relaxation linéaire

2ème idée : Énumération implicite par encadrement de la valeur optimale

Définition - Relaxation continue d'un problème entier (P)

Problème obtenu lorsqu'on "oublie" le caractère entier des variables
Ex : $x \in \{1, 2, ..., n\} \to x \in [1, n]$

Intérêts

- ....
  ....
- ....

Exemple - Relaxation linéaire du modèle de localisation d'entrepôt

$$\begin{cases} \text{minimiser} & z = \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{tel que} & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall j \\ & x_{ij} \le y_i & \forall i, j \\ & y_i \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}] & \forall i \\ & x_{ij} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}] & \forall i, j \end{cases}$$

Exemple

$$\begin{array}{llllll} \max z = & 9x_1 & +5x_2 & +6y_1 & +4y_2 & \\ \text{s.c.} & & & y_1 & +y_2 & \le 1 \\ & & & y_1 & & \le x_1 \\ & & & & y_2 & \le x_2 \\ & 6x_1 & +3x_2 & +5y_1 & +2y_2 & \le 10 \\ & x_1, & x_2, & y_1, & y_2 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Optimum continu

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$
- $Z_c = \frac{33}{2}$

Conclusion

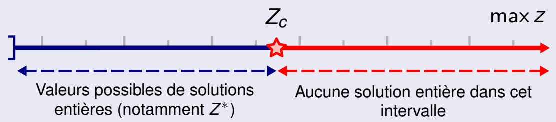
Optimum entier . $\frac{33}{2}$

Relaxation continue : interprétation

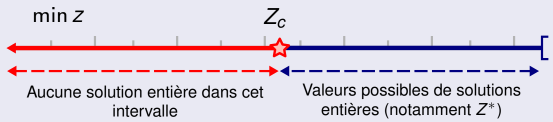
Propriété générale - Relaxation continue

Optimum entier — Optimum continu

- Pour un problème de maximisation : $\mathbf{Z^*} \le \mathbf{Z_c}$
  Z_c est une .... de Z^*



- Pour un problème de minimisation : $\mathbf{Z^*}$. $\mathbf{Z_c}$
  Z_c est une .... de Z^*



Quelle information nous fournit une solution réalisable entière ?

Exemple

$$\begin{array}{llllll} \max\ z = & 9x_1 & +5x_2 & +6y_1 & +4y_2 & \\ \text{s.c.} & & & y_1 & +y_2 & \leq 1 \\ & & & y_1 & & \leq x_1 \\ & & & & y_2 & \leq x_2 \\ & 6x_1 & +3x_2 & +5y_1 & +2y_2 & \leq 10 \\ & x_1, & x_2, & y_1, & y_2 & \in \{0,1\} \end{array}$$

Solutions connues

Solution entière

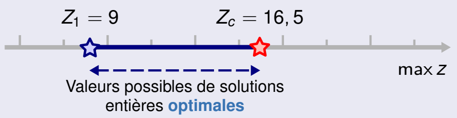
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 0, 0)$
- $Z_1 = 9$

Solution continue

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$
- $Z_c = 16,5$

Conclusion

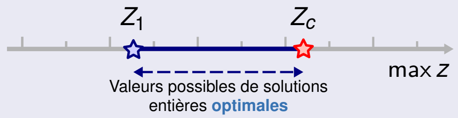
Z^* est compris entre 9 et 16,5



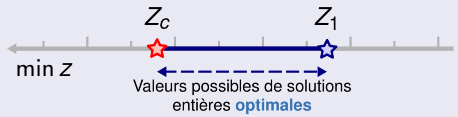
Propriétés générales

Solution entière, Optimum entier, Optimum continu

- En cas de maximisation : $\mathbf{Z_1 \leq Z^* \leq Z_c}$



- En cas de minimisation : $\mathbf{Z_c \leq Z^* \leq Z_1}$



Méthode de résolution de PLNE

Algorithme de ***branch-and-bound***

Séparation et évaluation en français

Principe

- ....
  Borne inférieure et supérieure
- ....

Quiz !

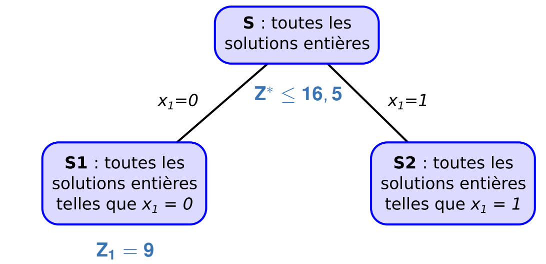
Question 6

Vous considérez un programme linéaire en nombres entiers P à 3 variables dont vous cherchez à maximiser l'objectif.

La solution optimale de la relaxation linéaire fournit un objectif de valeur $z = 7$ et la solution $(x_1, x_2, x_3) = (2, 8.4, 3)$.

Vous choisissez de brancher sur la variable x_2 (seul choix possible).

Quelles contraintes ajoutez-vous dans les deux branches ainsi créées ?

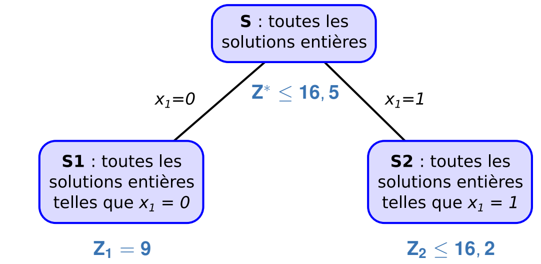


Ensemble S1 ($x_1 = 0$)

$$\begin{array}{lrrrl} \max\ z = & 5x_2 & +6y_1 & +4y_2 & \\ \text{s.c.} & & y_1 & +y_2 & \leq 1 \\ & & y_1 & & \leq 0 \\ & & & y_2 & \leq x_2 \\ & x_2 & +5y_1 & +2y_2 & \leq 10 \\ & x_2, & y_1, & y_2 & \in \{0,1\} \end{array}$$

Solution de la relaxation continue :
- $(x_2, y_1, y_2) = (1, 0, 1)$
- $Z_1 = 9$

La relaxation continue fournit une solution entière !

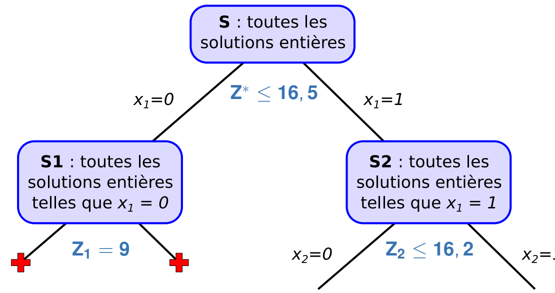


Ensemble S2 ($x_1 = 1$)

$$\begin{array}{lrrrl} \max\ z = 9 & +5x_2 & +6y_1 & +4y_2 & \\ \text{s.c.} & & y_1 & +y_2 & \leq 1 \\ & & y_1 & & \leq 1 \\ & & & y_2 & \leq x_2 \\ & x_2 & +5y_1 & +2y_2 & \leq 4 \\ & x_2, & y_1, & y_2 & \in \{0,1\} \end{array}$$

Solution de la relaxation continue :
- $(x_2, y_1, y_2) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$
- $Z_c^2 = 16,2$

La borne supérieure est améliorée



Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : ..
  Solution courante
- Meilleure borne supérieure connue : .....

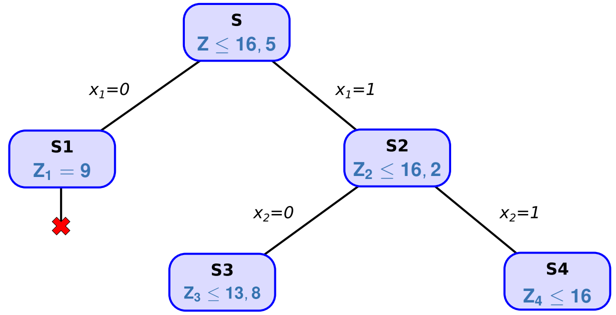
La valeur optimale est donc comprise entre ....

Comment continuer ?

- Élaguer la branche de S1
  Car solution entière trouvée
- Brancher en S2
  Car solution fractionnaire trouvée

Sur quelle variable brancher en S2 ?

- Solution de la relaxation continue : $(x_1, x_2, y_2, y_2) = (1, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$
- On peut brancher sur x_2 ou y_2
  Car valeurs fractionnaires



Sous-ensemble S3 ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$)

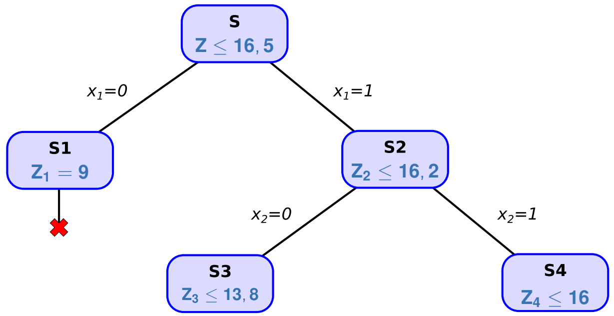
$$\begin{array}{lrrl} \max z = 9 & +6y_1 & +4y_2 & \\ \text{s.c.} & y_1 & +y_2 & \leq 1 \\ & y_1 & & \leq 1 \\ & & y_2 & \leq 0 \\ & 5y_1 & +2y_2 & \leq 4 \\ & y_1, & y_2 & \in \{0,1\} \end{array}$$

Solution de la relaxation continue :
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, \frac{4}{5}, 0)$
- $Z_c^3 = 13,8$

Sous-ensemble S4 ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$)

$$\begin{array}{lrrl} \max z = 14 & +6y_1 & +4y_2 & \\ \text{s.c.} & y_1 & +y_2 & \leq 1 \\ & y_1 & & \leq 1 \\ & & y_2 & \leq 1 \\ & 5y_1 & +2y_2 & \leq 1 \\ & y_1, & y_2 & \in \{0,1\} \end{array}$$

Solution de la relaxation continue :
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, \frac{1}{2})$
- $Z_c^4 = 16$ Fractionnaire !

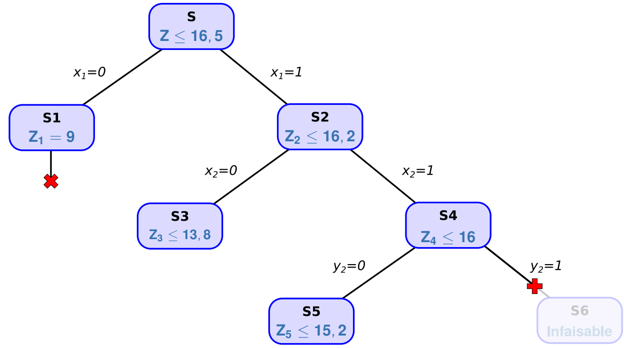


Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : . .
- Meilleure borne supérieure connue : . . .

Comment continuer ?

- On ne peut élaguer ni S3 ni S4
- On branche en S4 . . . .
  Peut potentiellement contenir une solution admissible de valeur $> 13,8$, contrairement à S3
  - On branche sur y_2 qui est fractionnaire en S4



Sous-ensemble S5 ($x_1 = x_2 = 1$, $y_2 = 0$)

$$\begin{aligned} \max z = 14 &+ 6y_1 \\ \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & 5y_1 \leq 1 \\ & y_1 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

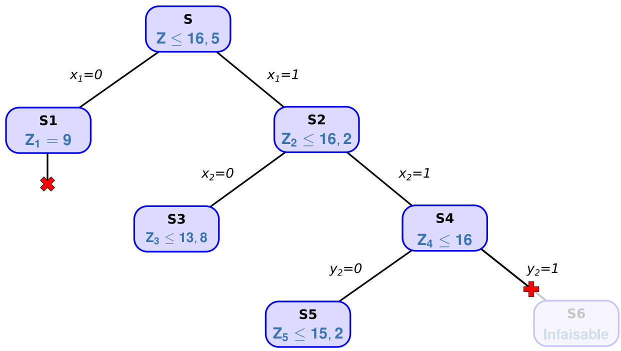
Solution de la relaxation continue :

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, \frac{1}{5}, 0)$
- $Z_c^5 = 15,2$

Sous-ensemble S6 ($x_1 = x_2 = 1$, $y_2 = 1$)

$$\begin{aligned} \max z = 20 &+ 6y_1 \\ \text{s.c.} \quad & y_1 \leq 0 \\ & y_1 \leq 1 \\ & \mathbf{5y_1 \leq -1} \\ & y_1, \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- Aucune solution
- On élague S6

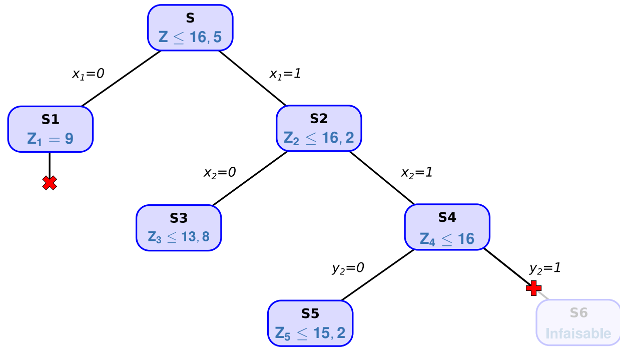


QCM

A ce stade, que peut-on élaguer ?

- (A) S3 seul
- (B) S5 seul
- (C) S3 et S5
- (D) ni S3 ni S5

. . . .

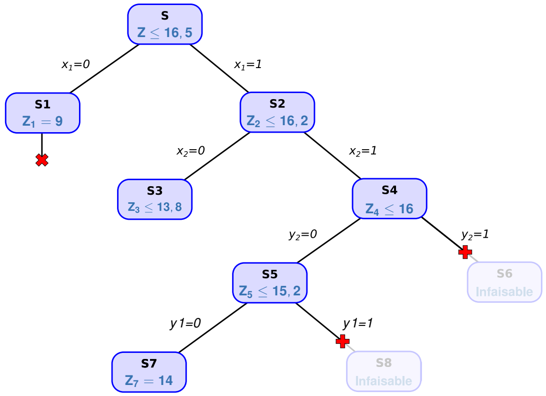


Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : . .
- Meilleure borne supérieure connue : . . . . .

Comment continuer ?

- On branche en S5 qui a la plus grande borne supérieure
  Peut potentiellement contenir une solution admissible de valeur $> 13,8$
  - On branche sur y_2 qui est fractionnaire en S5



Sous-ensemble S7
$(x_1 = x_2 = 1,\ y_2 = 0,\ y_1 = 0)$

$$\max\ z = 14$$

Solution :

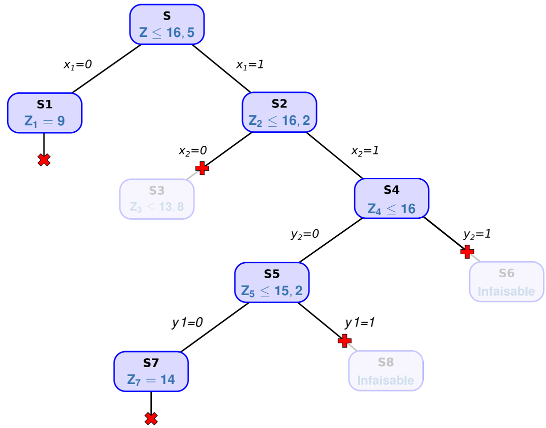
- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z_7 = 14$

Nouvelle solution entière trouvée !

Sous-ensemble S8
$(x_1 = x_2 = 1,\ y_2 = 1,\ y_1 = 0)$

$$\max\ z = 20$$
$$\text{s.c.} \quad 11 \leq 10$$

- Aucune solution
- On élague S8



Conclusions actuelles

- Valeur de la meilleure solution admissible connue : 14

Comment continuer ?

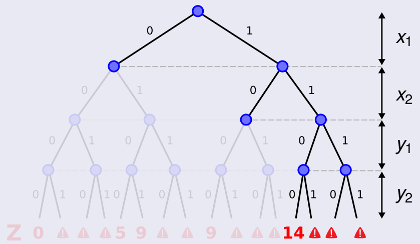
- Z_7 entier : on élague S7
- $Z_c^3 < Z_7$: on élague S3

Solution optimale obtenue !

- $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 0, 0)$
- $Z^* = Z_7 = 14$

Gain par rapport à l'énumération complète

Solutions parcourues par le *branch-and-bound* :



: solution non réalisable

Algorithme B&B - Maximisation - Résumé

Initialisation

- Calculer une solution admissible de valeur Z^*
  ou poser $Z^* = -\infty$
- Résoudre la relaxation continue et mettre à jour Z^* si besoin
  Évaluation

Tant qu'il reste des nœuds non élagués

- Choisir un nœud non élagué
- Brancher sur une des variables de valeur fractionnaire en ce nœud
  Séparation
- Résoudre la relaxation continue des deux nœuds obtenus et mettre à jour Z^*
  Évaluation
- Appliquer les tests d'élagage

A l'issue de ce processus, la solution courante Z^* est optimale

Algorithme B&B – Maximisation – Résumé suite

Un nœud est élagué si

1. Le problème devient infaisable
   Pas de solution continue ou entière
2. La valeur optimale de la relaxation continue est $\leq Z^*$
3. La solution de la relaxation continue est entière
   Attention, c'est x qui doit être entière pas Z^*

La mise en place de l'algorithme nécessite de préciser

1. La règle de sélection
   Sur quel nœud brancher ?
2. La règle de branchement
   Sur quelle variable brancher ?

B&B - Variables entières

Cas général des variables entières ($\neq$ du cas $0 - 1$)

- Choisir une variable de valeur fractionnaire dans la solution optimale de la relaxation continue
- Brancher sur l'arrondi supérieur et inférieur de cette valeur

Exemple

$\mathbf{x_2 = 132,3}$

$x_2 \leq 132$ $\quad$ $x_2 \geq 133$

Détermination des solutions admissibles

- Souvent difficile
- Pas de méthode générale rapide
- Des algorithmes fonctionnent bien dans certains cas particuliers
  Par exemple si l'arrondi est toujours admissible

Problème d'efficacité

- Le nombre de nœuds explorés détermine le temps de calcul
  À chaque nœud, on résout un programme linéaire (continu)
- Nombre maximal de nœuds à explorer inconnu à priori
- Un PL continu se résout généralement « vite »
- Un PLNE nécessite du temps

Efficacité - Exemple

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leq b_1 \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \leq b_2 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

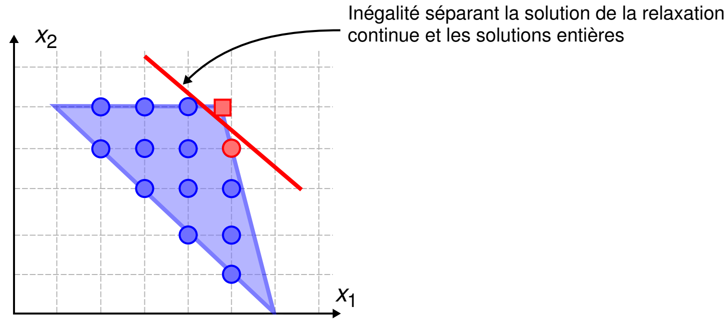
- $n = 1000$
- Données aléatoires
- Relaxation continue : 0.03 secondes
- Résolution en entier : 43 secondes
  251402 nœuds parcourus contre ~10^{300} pour une énumération complète

Sommaire

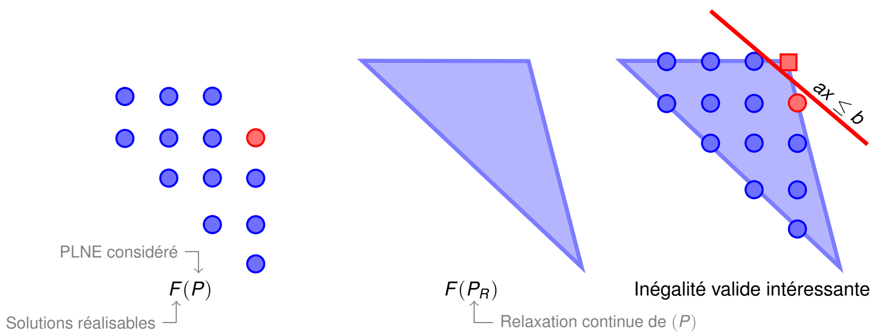
Programme linéaire en Nombres Entiers (PLNE)

Principe - Ajout de coupe

Séparer l'optimum continu des solutions admissibles



- ■ : optimum continu
- ● : optimum entier
- ● : autres solutions entières



Définition - Inégalité valide pour (P)

$ax \leq b$ est vérifiée par tout $x \in F(P)$

Définition - Inégalité valide "intéressante"

$ax \leq b$ est valide et "tronque" $F(P_R)$

Inégalités valides

Problème

$$\begin{array}{lrrl} \max\ z = & 2x_1 & +x_2 & \\ \text{s.c.} & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & 3x_1 & -x_2 & \leq 6 \\ & x_1, & x_2 & \in \mathbb{N} \end{array}$$

Inégalité valide considérée (I_v)

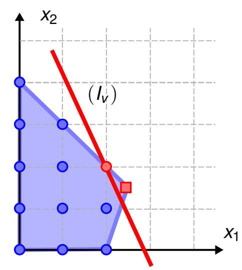
$$8x_1 + x_2 \leq 20$$

Toutes les solutions entières vérifient (I_v)

Relaxation continue respectant (I_v)

- $(x_1, x_2) = (2, 2)$
- $z = 6$

Optimum entier atteint



- ■ : optimum continu
- ● : optimum entier
- ● : autres solutions entières

Branch-and-cut

Branch-and-bound avec ajout de coupes en chaque nœud

Meilleure borne, donc on tronque l'arbre plus facilement

En pratique

- Nombre de coupes limité en chaque nœud
  Économise le temps de calcul
- Possibilité de ne mettre des coupes qu'à la racine

Sommaire

Il existe divers logiciels

Logiciels PL et PLNE

Langages de modélisation

- AMPL
- Mosel
- Julia/JuMP

Écriture au format « mathématique » du problème

Logiciels propriétaires

- XPRESS-MP : sociétés FICO
- Artelys CPLEX : société IBM (ILOG)
- Gurobi

Versions étudiantes gratuites

Logiciels libres

- COIN-OR
- GLPK

Taille de problèmes résolvables (variables et contraintes)

- En continu : des centaines de milliers
- En entier : des centaines voire des milliers

Peut fortement dépendre du problème

En résumé, la PLNE

- Augmente la capacité de modélisation de la PL
- Augmente la complexité de résolution
- Résolvable par l'algorithme *branch-and-bound* voire *branch-and-cut*
- De très gros progrès depuis 30-40 ans

Q1 : $y_3 = 1$
Q2 : $y_1 + y_4 \geq 1$
Q3 : $\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 5 \ \forall j \in \{1, \dots, m\}$

Q4 : sum_j impair et $\leq m x_{ij} = 1$; ou
$\sum_j$ pair et $\leq m x_{ij} = 0$
Q5 : C
Q6 : $x_2 \leq 8$ $x_2 \geq 9$