Cálculo Numérico 2016
Trabajo Práctico 5

Interpolación y aproximación de funciones

Ejercicio 1:

(a) Enuncie y demuestre el Teorema que presenta el método de Horner (ver Teorema 2.18 del libro de Burden y Faires).

(b) Encuentre una aproximación a uno de los ceros de $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ usando el método de Newton y la división sintética (método de Horner) para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ en cada iteración x_n. Use $x_0 = -2$ y calcule hasta x_3.

(c) Implemente la función en Octave `function [p,q] = horner(x,coef)` para el método de Horner donde p = $P(x_0)$, q = $P'(x_0)$, `coef` es un vector con los coeficientes del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)Q(x) + b_0$, ordenados en la forma $[a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0]$ y `x` es el punto en el cual se desea evaluar el polinomio. Aplique dicha función para resolver el ejercicio anterior.

Ejercicio 2:

(a) Enuncie y demuestre el teorema de existencia y unicidad del polinomio interpolante (ver Teorema 1, sección 6.1 del libro de Kincaid y Cheney).

(b) Escriba la forma de Newton del polinomio interpolante.

(c) Escriba la forma de Lagrange del polinomio interpolante.

(d) Escriba el método de coeficientes indeterminados para el polinomio interpolante.

(e) Analice las ventajas y desventajas entre las distintas formas de representación del polinomio interpolante.

Ejercicio 3:

(a) Para los datos de la siguiente tabla, encuentre el polinomio de interpolación en su forma de Lagrange $P_L(x)$, en su forma de Newton $P_N(x)$, y mediante el método de los coeficientes indeterminados $P_{CI}(x)$. Luego, reduzca los tres polinomios encontrados a la forma $P(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$ con el fin de demostrar que son idénticos ya que las abcisas son distintas entre sí.

x	3	5	7	9
y	1.2	1.7	2.0	2.1

(b) Si se aproxima la función $f(x) = \sin(x)$ mediante un polinomio interpolante de grado nueve que interpola a $f(x)$ en diez puntos del intervalo $[0, 1]$, utilice el resultado sobre el error en interpolación polinomial para predecir una cota del error en dicho intervalo.

Ejercicio 4:

(a) Encuentre el polinomio de interpolación de Newton para los siguientes datos utilizando diferencias divididas

x	0	1	3/2	2
$f(x)$	3	3	13/4	5/3

(b) Implemente una función de Octave `function [c] = dif_div(x,y)` para el método de diferencias divididas donde `c` es un vector con los coeficientes del polinomio interpolante en la forma de Newton

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

`x` es un vector con las abcisas de interpolación y `f` tiene los valores de la función en dichas abcisas. Pruebe el algoritmo con el problema anterior.

Ejercicio 5: Utilice el método de diferencias divididas de Newton para resolver el siguiente problema de interpolación de Hermite. Buscamos el polinomio que ajusta los siguientes valores: $p(1) = 2$, $p'(1) = 3$, $p(2) = 6$, $p'(2) = 7$, $p''(2) = 8$.

Ejercicio 6:

(a) Defina interpolante de trazador cúbico y explique las diferencias entre trazador natural y trazador sujeto.

(b) Implemente `[a,b,c,d]=cubic_spline_natural(x,f)` como una función de Octave para el trazador cúbico natural, donde `a,b,c,d` son vectores que en la j-ésima componente tienen los coeficientes correspondientes al polinomio del tramo-j

$$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - xj)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

`x` es el vector con las coordenadas de los nodos y `f` es el vector con los valores de la función f en los correspondientes nodos.

(c) Un trazador cúbico natural $S(x)$ en $[0, 2]$ está definido por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Obtenga b, c y d.

Ejercicio 7:

(a) **(Entregar)** Modifique la función desarrollada en el ejercicio 6.b) de manera que permita computar los coeficientes del **trazador cúbico sujeto**. Se debe preveer el ingreso de los valores de la derivada de la función en los extremos del intervalo de interpolación. Enuncie el teorema que justifique este algoritmo y muestre el sistema matricial que resuelve el mismo, comparándolo con el sistema que se resuelve en el caso del trazador cúbico natural.

(b) Encuentre el trazador cúbico sujeto $S(x)$ definido en el intervalo $[1, 3]$ tal que

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

siendo que $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(3) = 22/3$ y asumiendo que $f'(1) = f'(3) = 3$. Utilice la función `[a,b,c,d]=cubic_spline_clamped(x,f,df)` desarrollada en el inciso anterior.

(c) **(Entregar)** Se quiere determinar la trayectoria plana seguida por un brazo robot industrial (idealizado por un punto material) durante un ciclo de trabajo. El brazo robot debe satisfacer las siguientes restricciones: se debe encontrar en reposo en el punto $(0, 0)$ en el instante inicial. Luego de $1s$ se debe encontrar en el punto $(2, 4)$, $1s$ después debe alcanzar el punto $(6, 6)$ y detenerse allí. En una segunda etapa retoma inmediatamente su movimiento y alcanza, luego de otro segundo más el punto $(3, 2)$ para finalmente retornar al origen luego de otro segundo

más, donde quedará detenido para repetir el ciclo de trabajo.
Encuentre el trazador cúbico sujeto correspondiente utilizando el código desarrollado en el primer inciso y luego realice las siguientes gráficas: (i) x vs. t (ambos tramos en la misma gráfica), (ii) y vs. t (idem anterior), y finalmente (iii) en el plano xy la trayectoria encontrada.

Ejercicio 8: (Sección 8.1 del libro de Burden.) Derive el método de mínimos cuadrados para ajustar la recta que mejor aproxima a una colección de datos, (x_i, y_i), con $i = 1, 2, \cdots, m$. Luego, use los datos de la tabla 1 para obtener la aproximación y complétela.

i	1	2	3	4	5
x_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183
x_i^2					
$x_i y_i$					
$P(x_i) = a_1 x_i + a_0$					

Cuadro 1: Tabla de datos ej8.

Ejercicios sugeridos: **S.3.1**:1-3,7-9,15,16,24,25; **S.3.2**:1,4,12-15; **S.3.3**:1,3a,3c,4,7; **S.3.4**:1-6,8-10,24-29; **S.8.1**:1-4,5a-d,6,7,9-12.