

The background of the slide is a solid light blue color. Overlaid on this background are several faint, light blue concentric circles and intersecting lines, creating a complex geometric pattern. The circles are centered at various points, and the lines are straight and intersect at different angles, some passing through the centers of the circles.

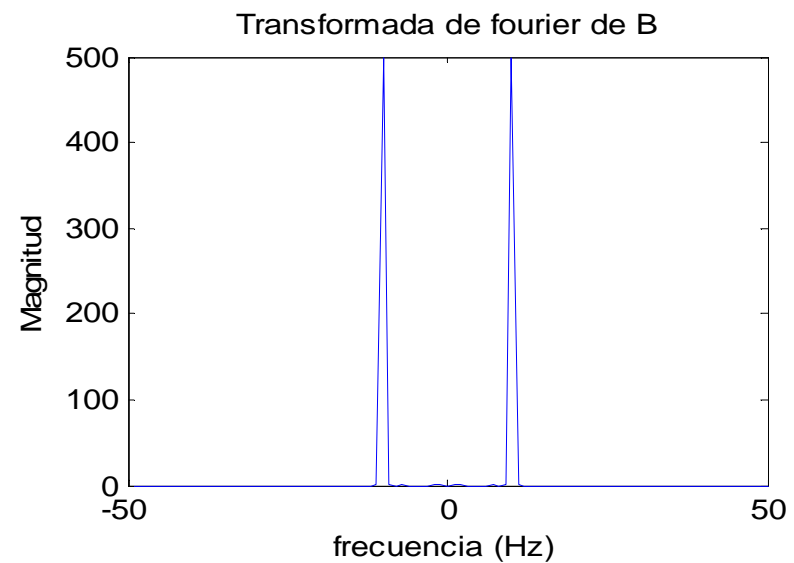
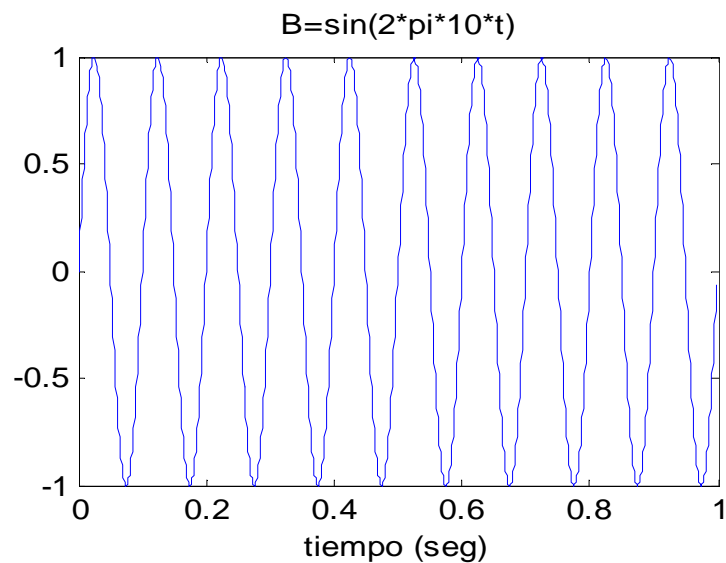
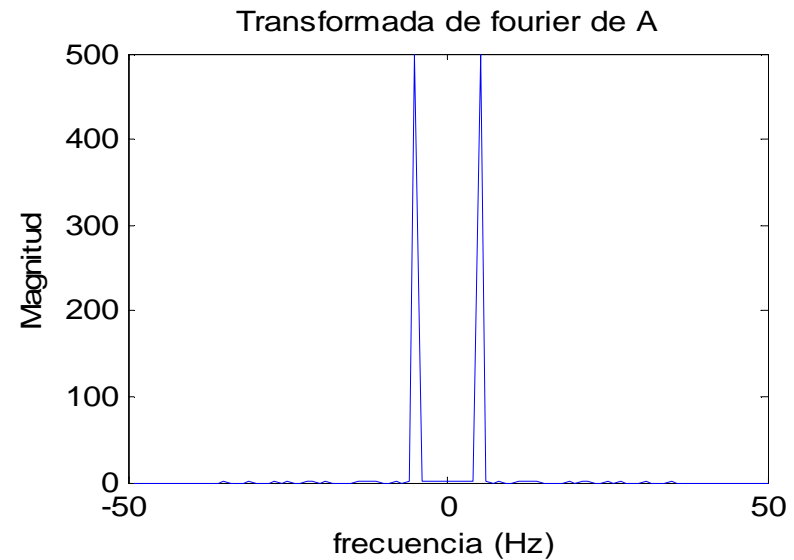
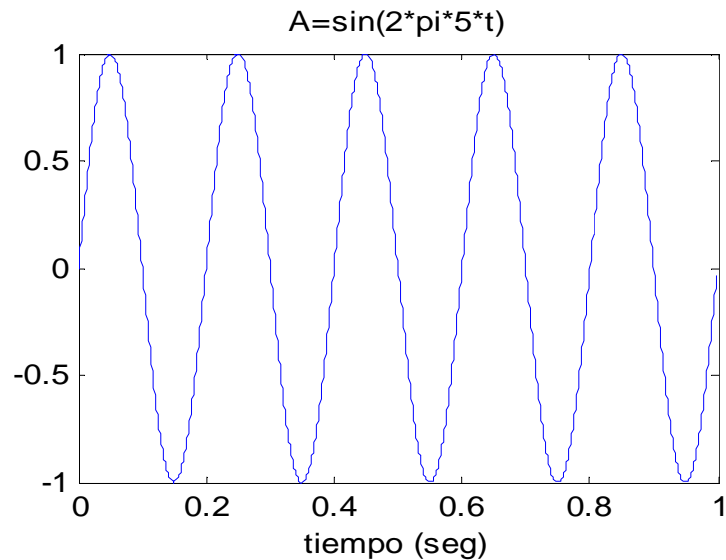
Análisis Tiempo-Frecuencia

por Leandro Di Persia

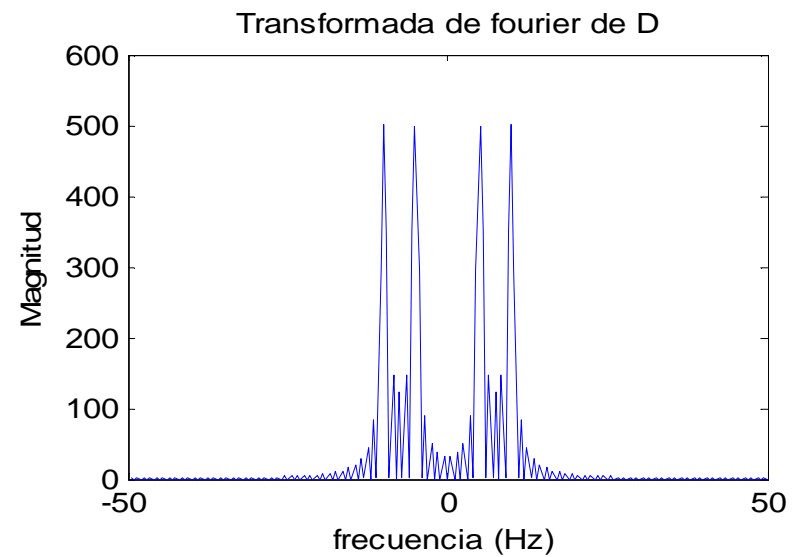
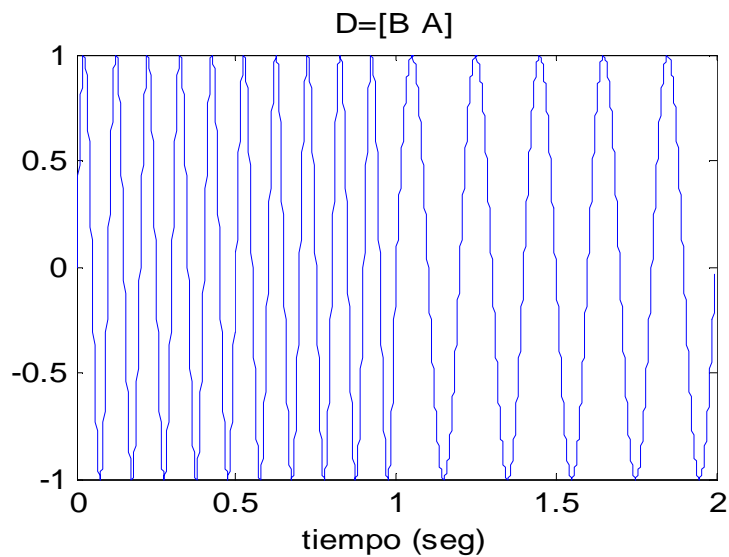
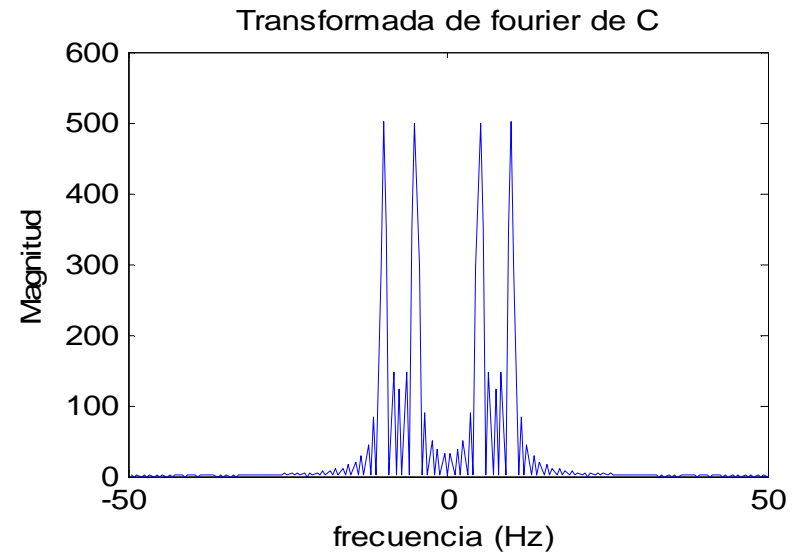
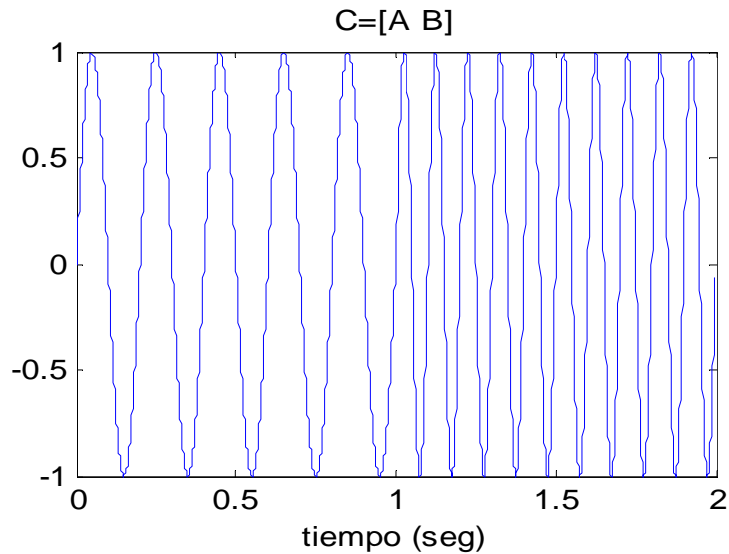
Unidad X- Análisis tiempo-frecuencia

- Introducción - motivación
- Transformada de Fourier de Tiempo corto
- Diferentes ventanas - Transformada de Gabor
- Principio de Incertidumbre - Resolución temporal y frecuencial
- Redundancia de la STFT
- Transformada Wavelet continua y discreta
- Distribución de Wigner - Ville

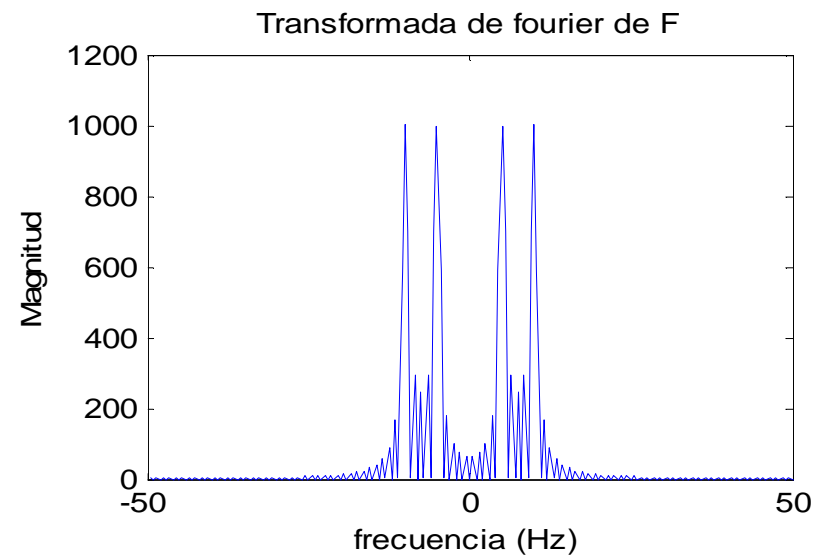
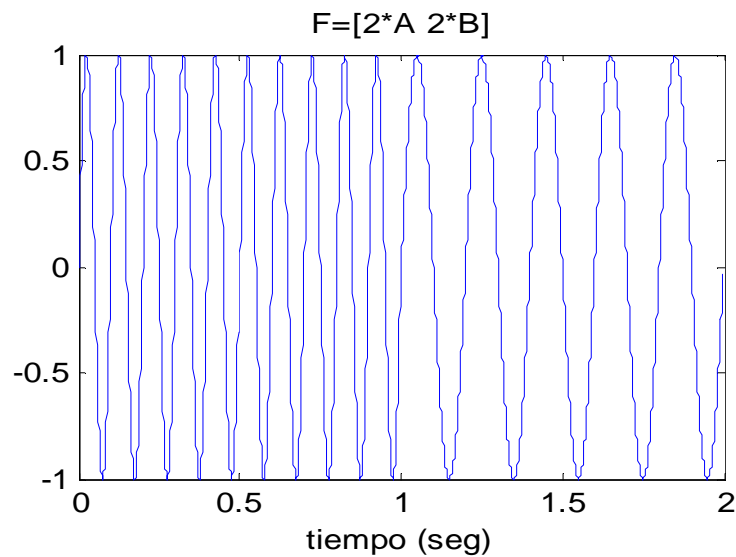
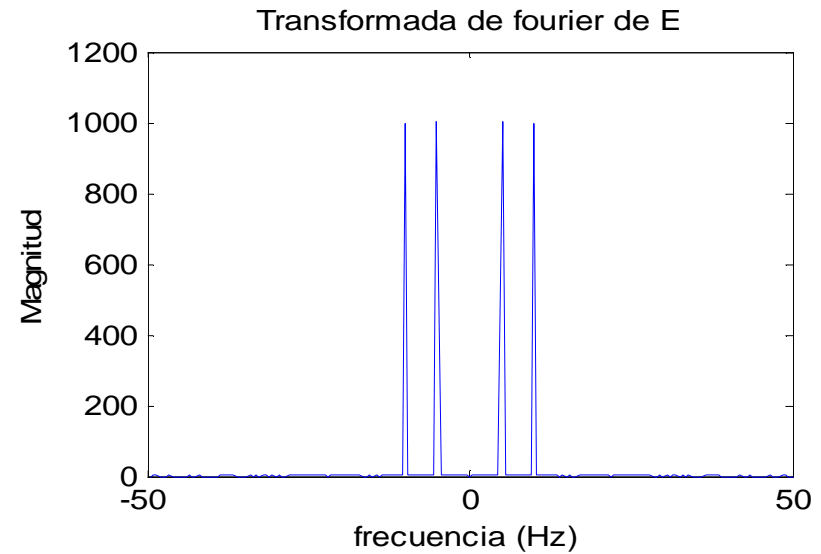
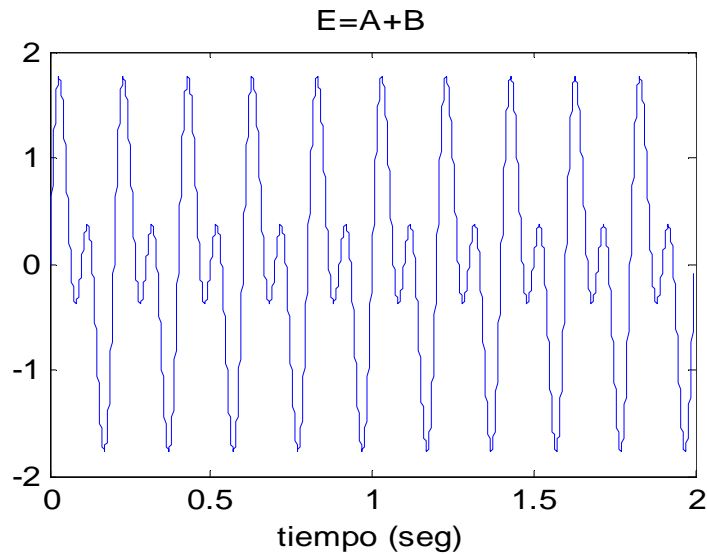
Introducción - Motivación



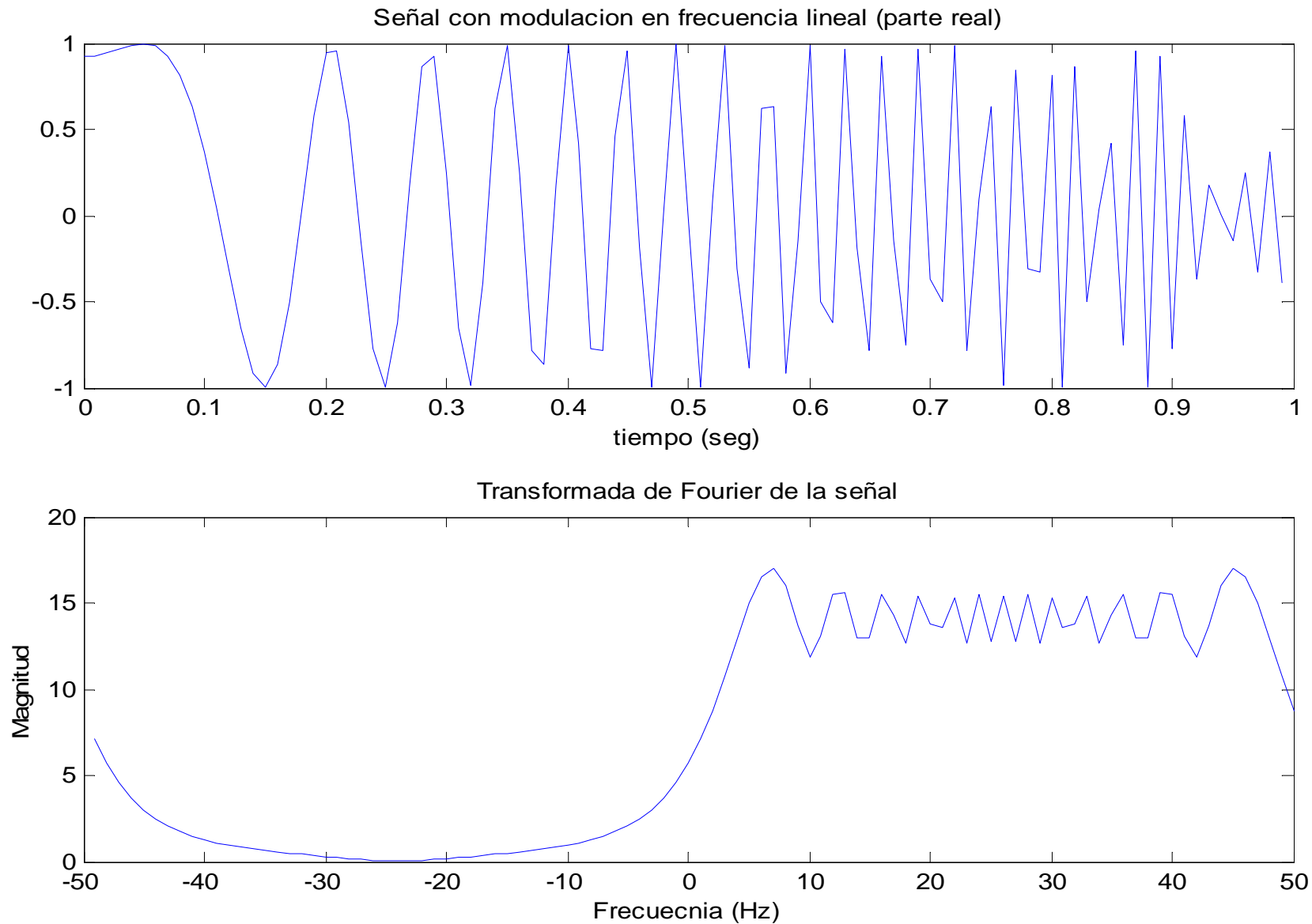
Introducción - Motivación



Introducción - Motivación



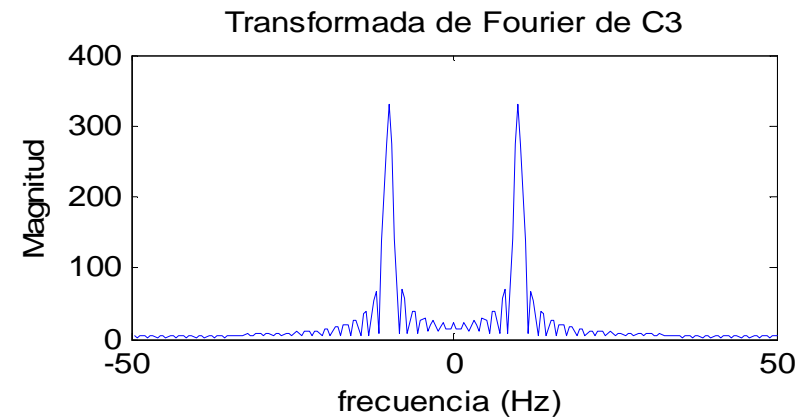
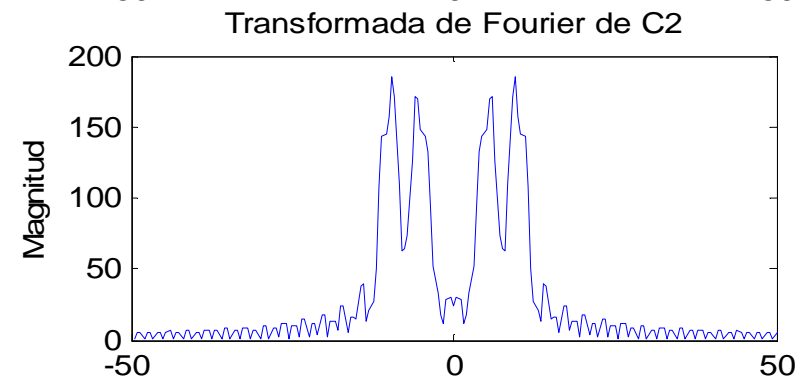
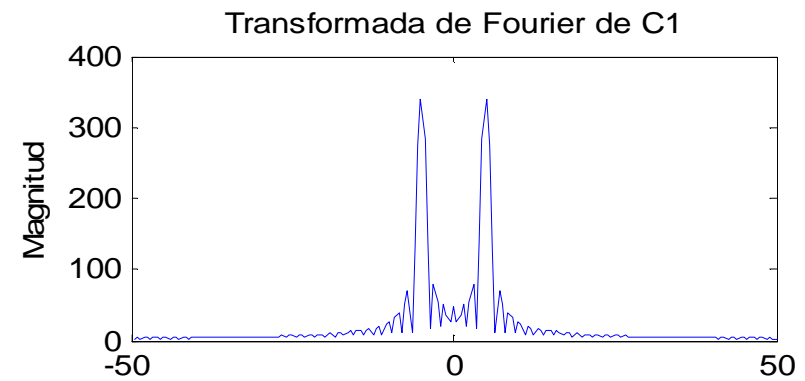
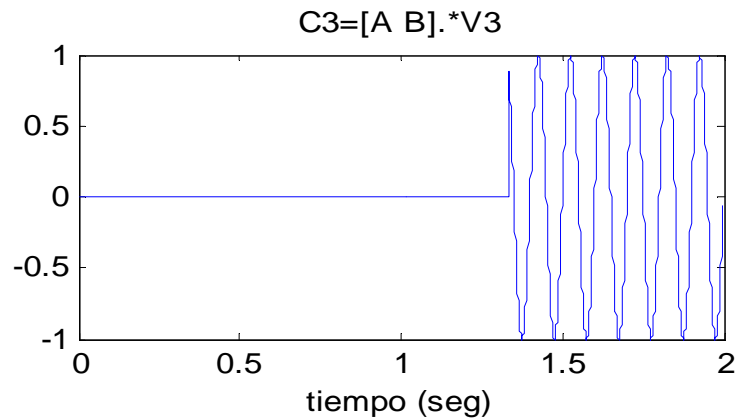
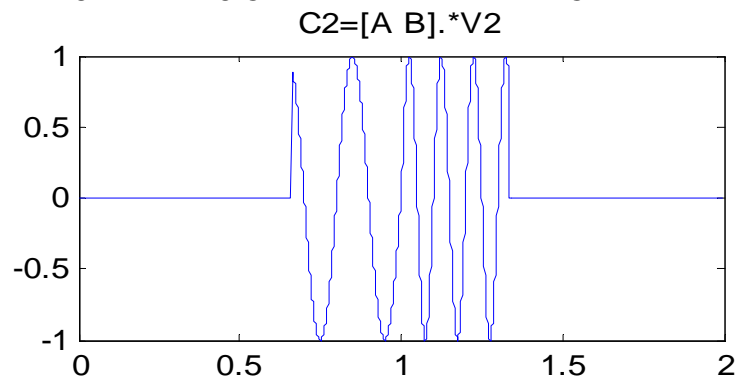
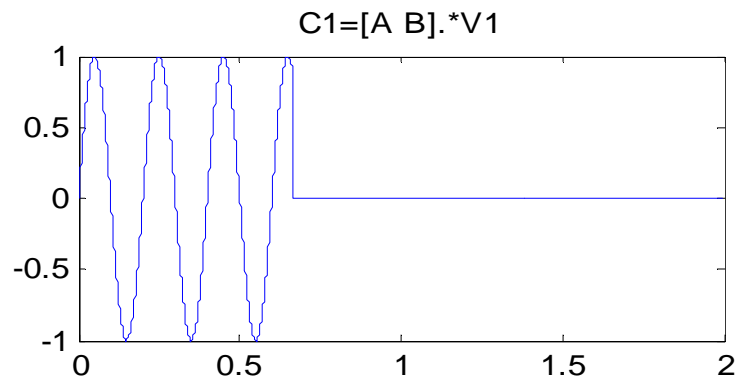
Introducción - Motivación



Motivación

- No alcanza con conocer la información de frecuencias \rightarrow se necesita información sobre los tiempos en los que ocurren esas frecuencias
- Fourier \rightarrow no hay información de tiempo
- Ocurre en señales no estacionarias (parámetros variables en el tiempo)
- Otro ejemplo: el ejercicio de la guía de TF en el que había que determinar el momento en que se tocaba una nota

Motivación



Transformada de Fourier de tiempo Corto (STFT)

Dada una ventana real simétrica, tal que $g(t) = g(-t)$

Se genera una base al desplazarla y modularla con una frecuencia ξ , y se obtiene un “átomo tiempo-frecuencia”:

$$g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - u)$$

Suponiendo que ha sido normalizada de forma que $\|g_{u,\xi}(t)\| = 1$, la STFT o Transformada de Fourier Ventaneada se obtiene mediante el producto interno $\langle f(t), g_{u,\xi}(t) \rangle$:

$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_{u,\xi}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt$$

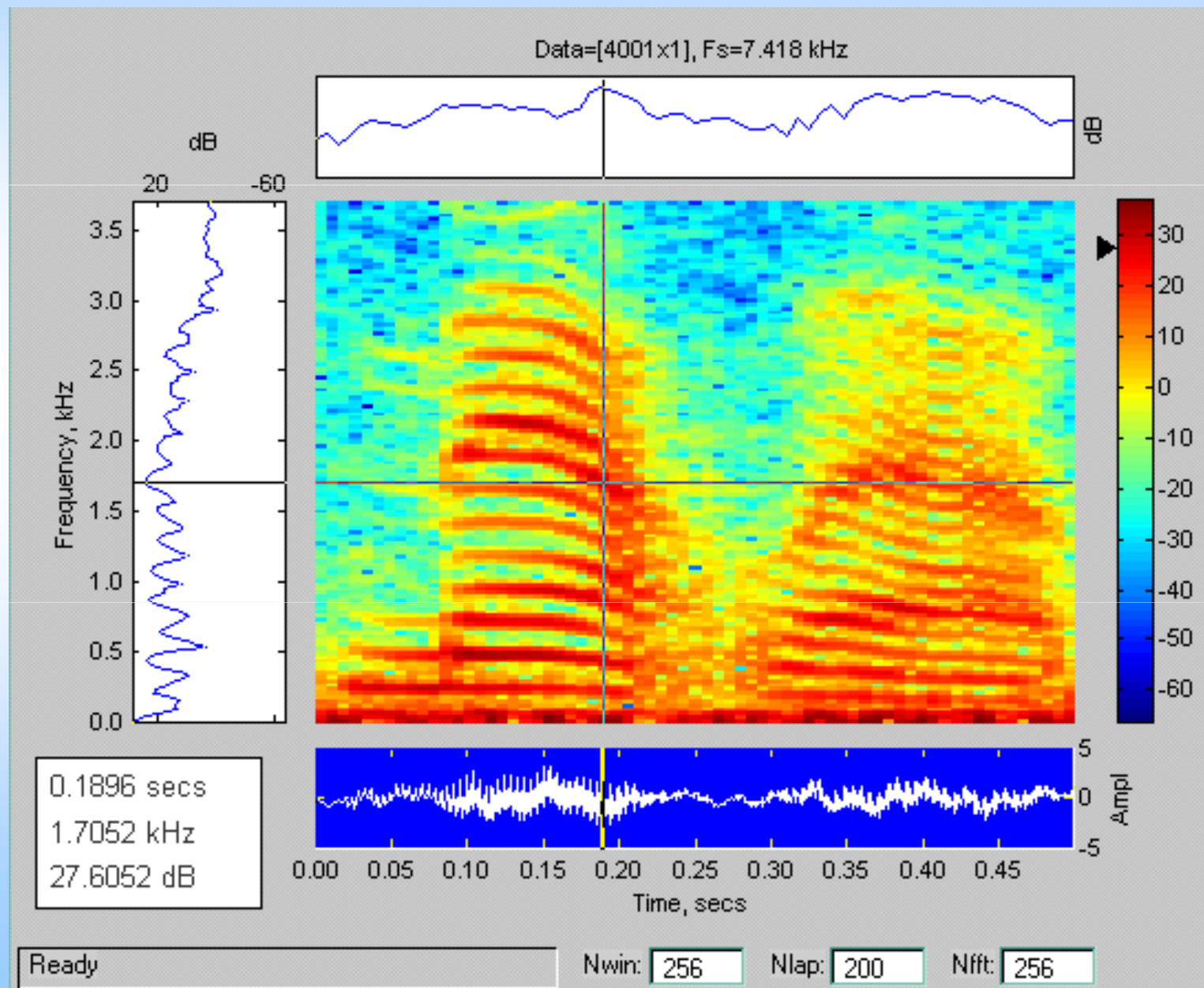
Transformada de Fourier de tiempo Corto (STFT)

- STFT → función de dos variables, gráfico en 3D
- Gráficos en escalas de colores, vistos desde arriba
- Se suele graficar el “Espectrograma” en lugar de la STFT, definido de la siguiente forma:

$$P_{sf}(u, \xi) = |Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t-u) e^{-i\xi t} dt \right|^2$$

Es una función de densidad de energía

Espectrograma de una señal de voz



Transformada de Fourier de tiempo Corto (STFT)

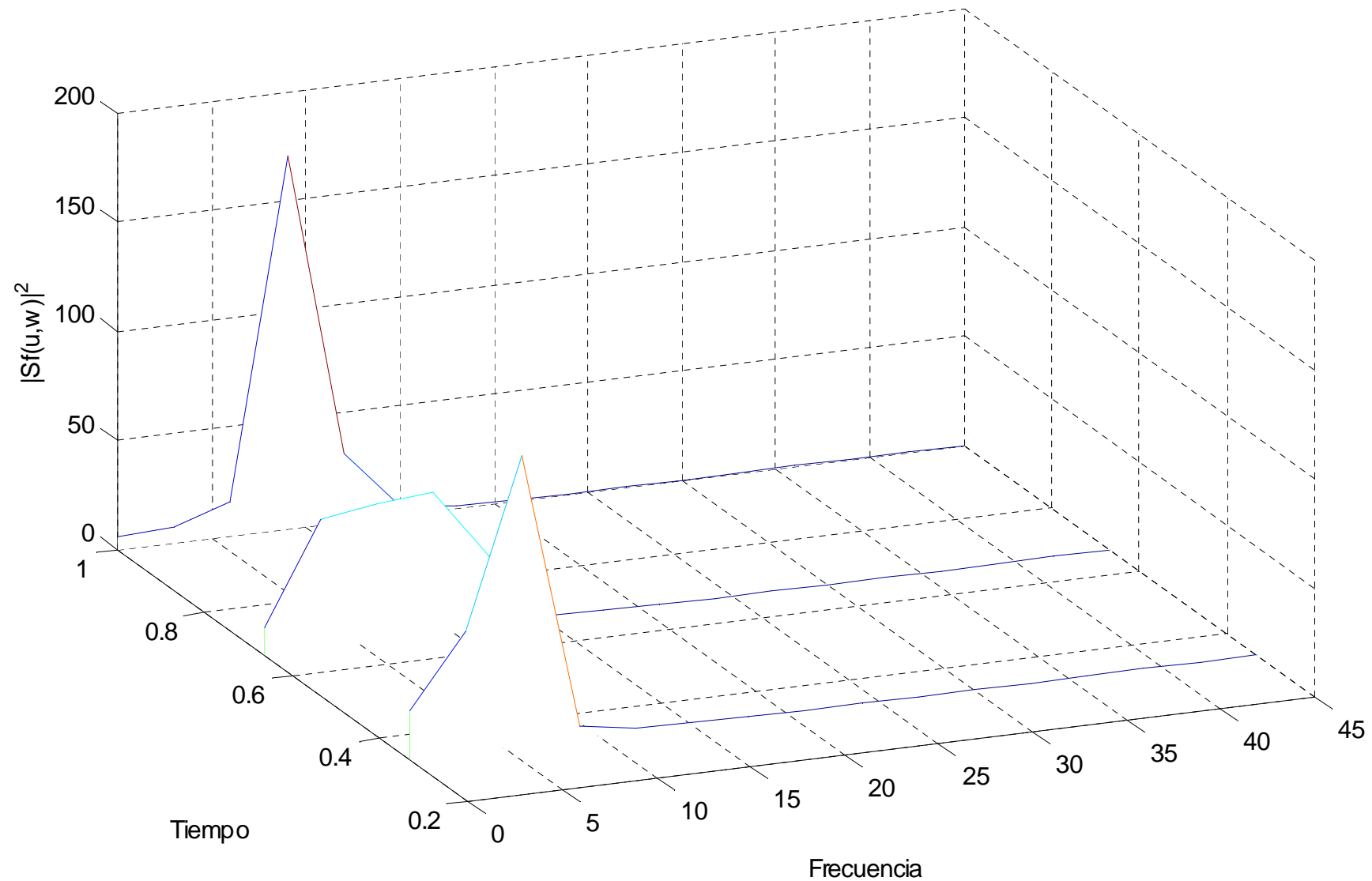
En el caso discreto, tenemos las siguientes ecuaciones equivalentes :

$$g_{m,l}[n] = g[n-m] e^{\frac{-i2\pi ln}{N}}$$

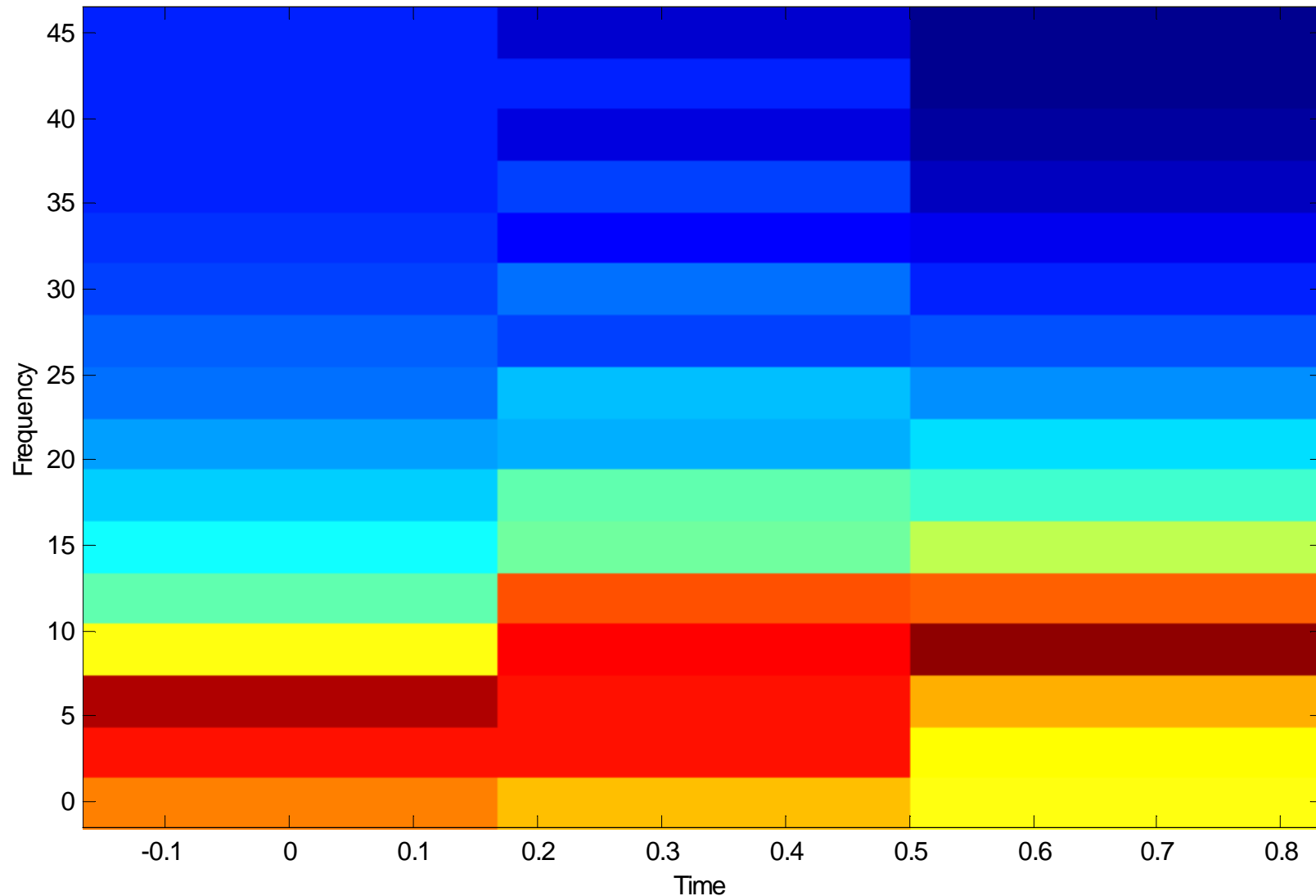
$$Sf[m,l] = \langle f[n], g_{m,l}[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] g[n-m] e^{\frac{-i2\pi ln}{N}}$$

$$Psf[m,l] = |Sf[m,l]|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} f[n] g[n-m] e^{\frac{-i2\pi ln}{N}} \right|^2$$

Transformada de Fourier de tiempo Corto (STFT)



Transformada de Fourier de tiempo Corto (STFT)



Transformada de Fourier de tiempo Corto (STFT)

- Para la STFT son válidas las siguientes fórmulas de reconstrucción:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(u, \xi) g(t-u) e^{i\xi u} d\xi du$$

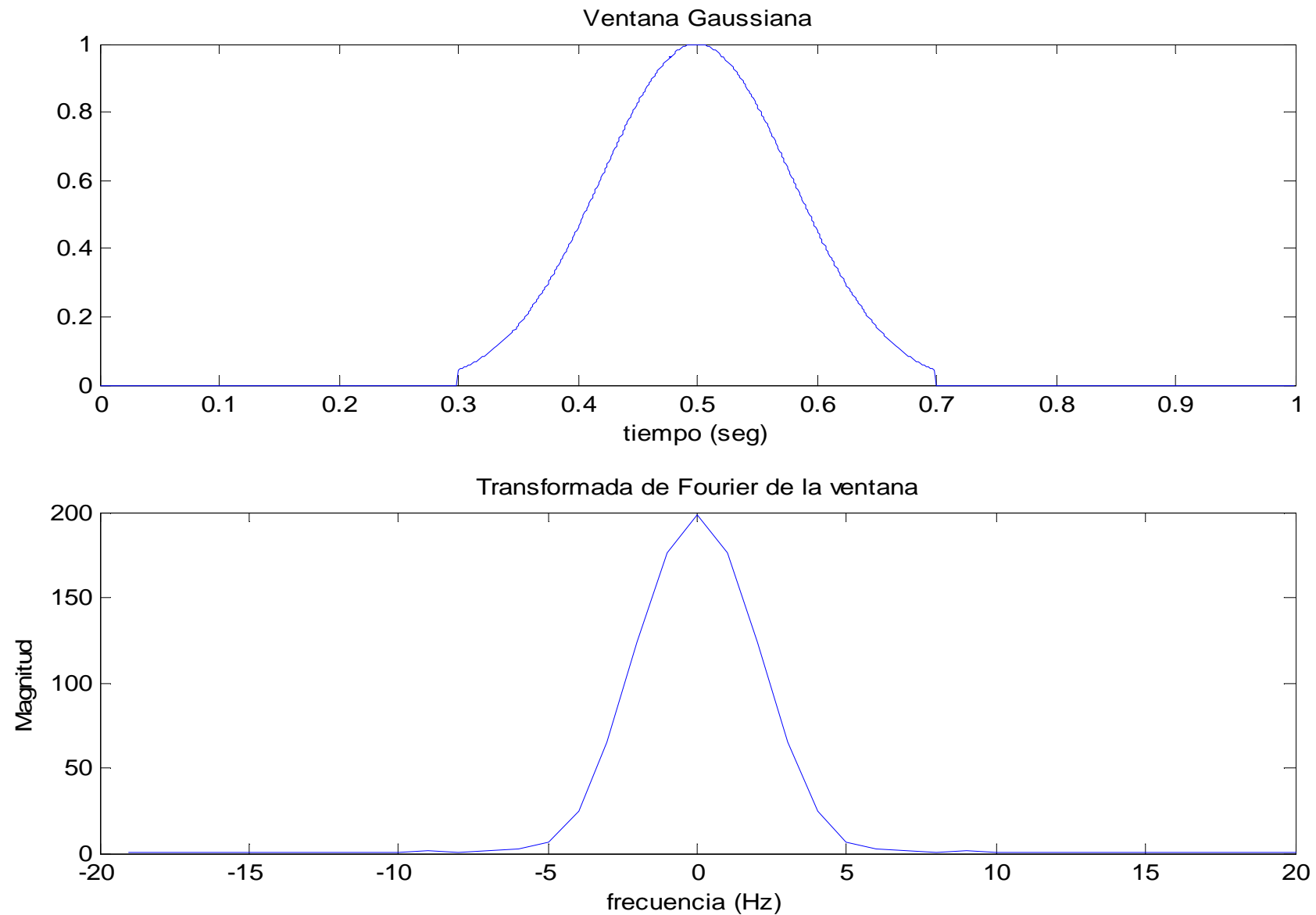
$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} Sf[m, l] g[n-m] e^{\frac{-i2\pi ln}{N}}$$

Diferentes ventanas - Transformada de Gabor

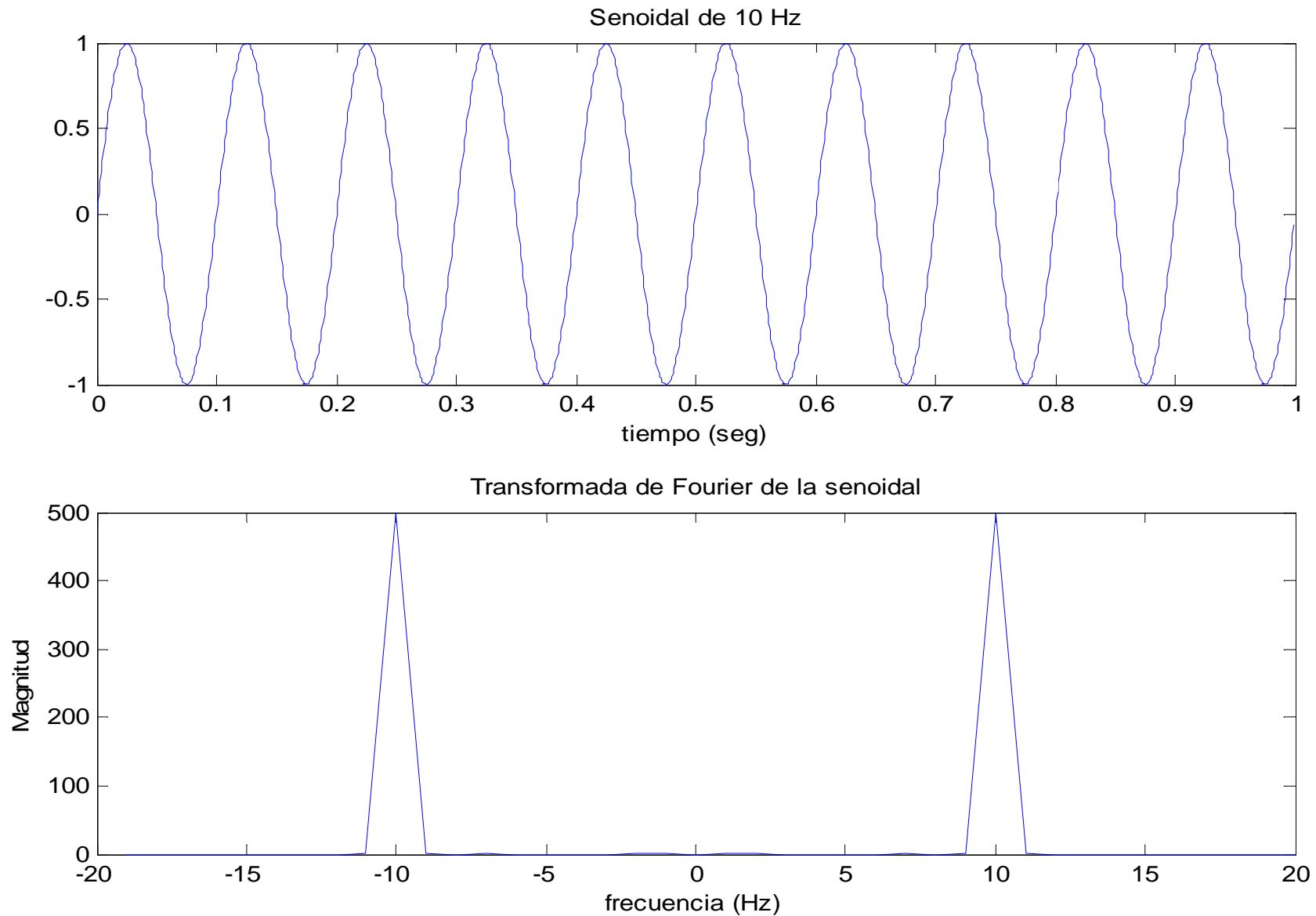
- Los ejemplos anteriores fueron generados a partir de una ventana $g(t)$ cuadrada
- Otras ventanas: Hanning, Hamming, Blackman, etc.
- En el trabajo original de Gabor, la ventana usada era una Gaussiana, y a la STFT con esta ventana se le llama Transformada de Gabor en su honor.

$$g_{gabor}(t) = e^{\frac{-18t^2}{2}}$$

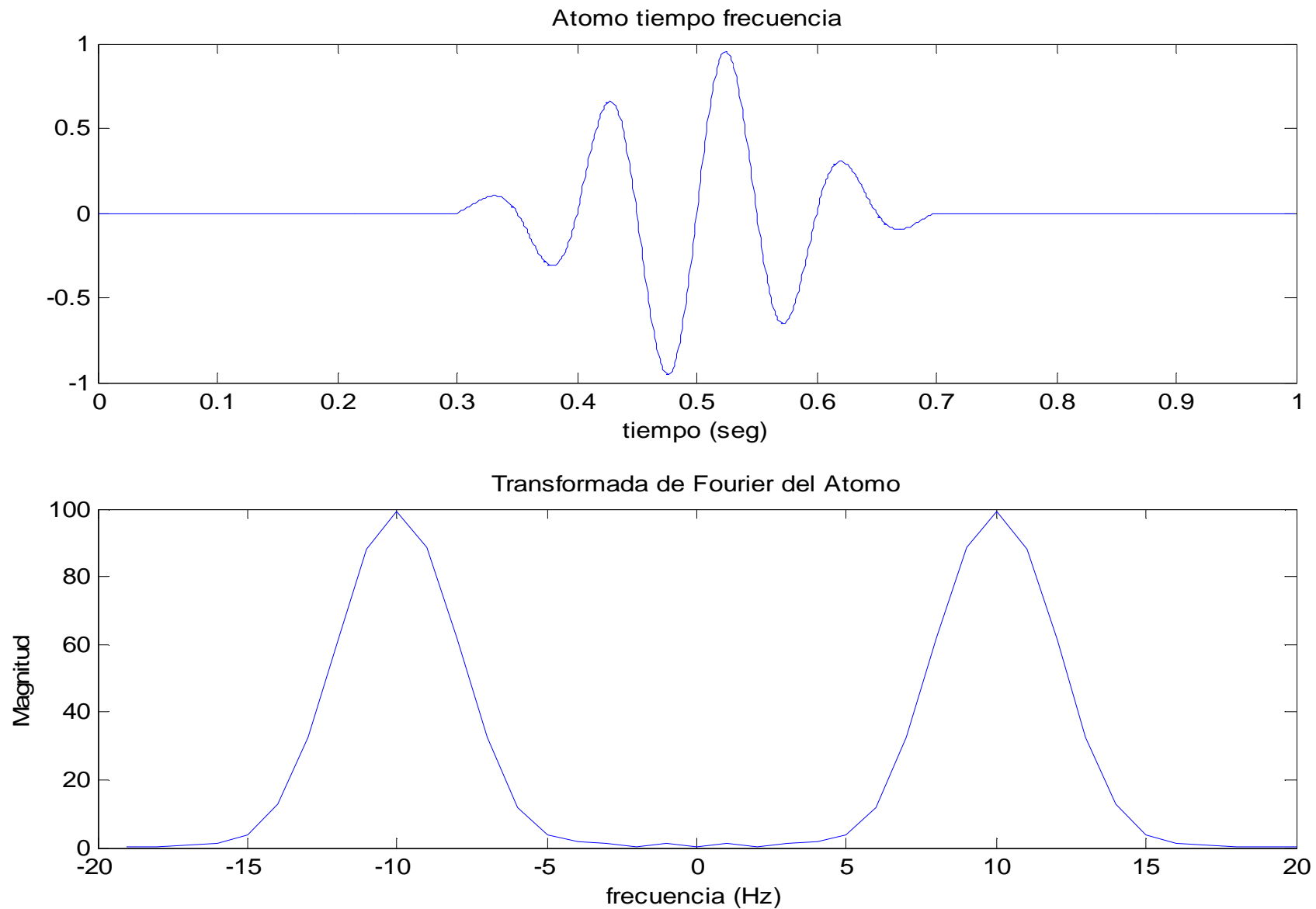
Ej.: Átomo tiempo-frecuencia



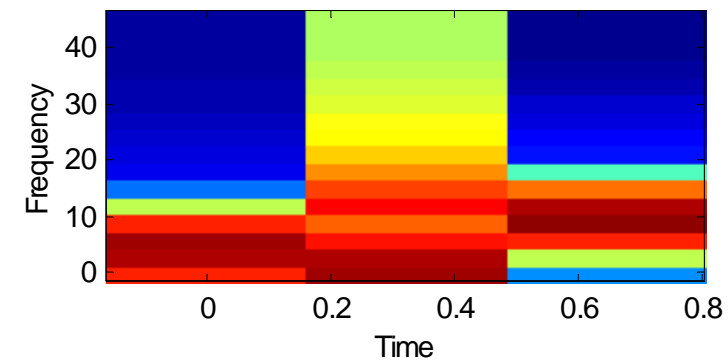
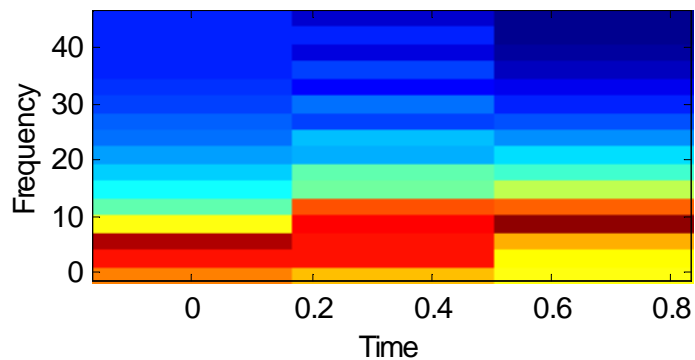
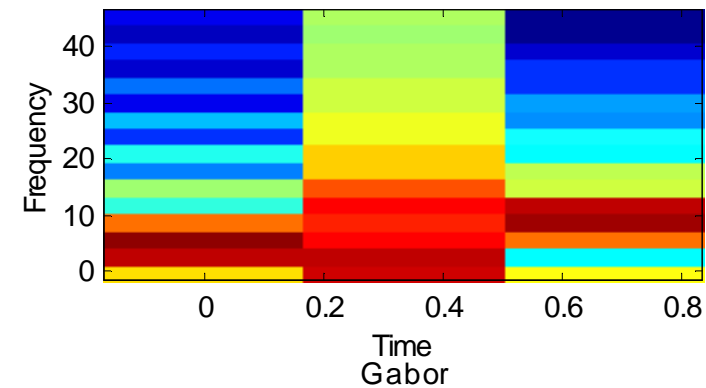
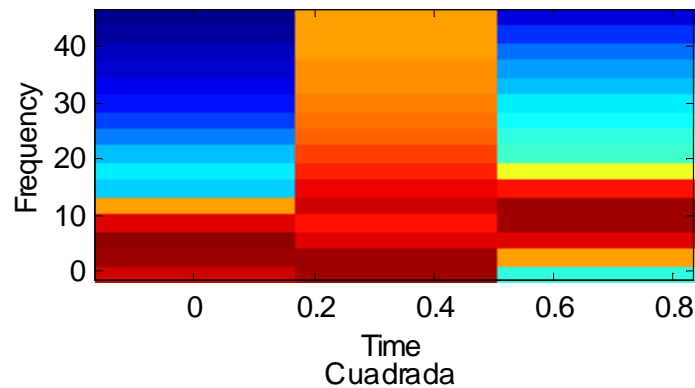
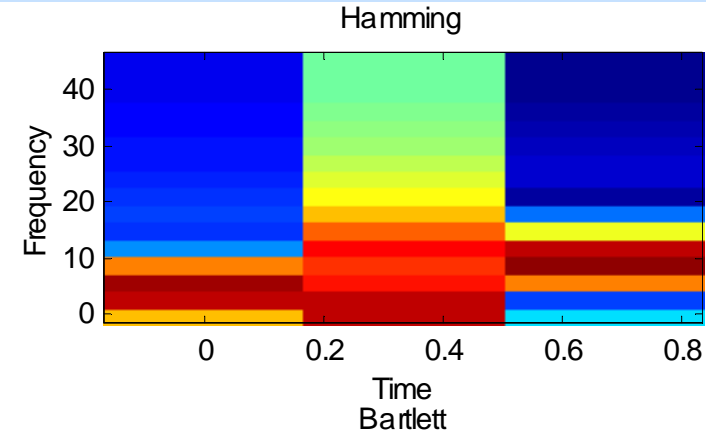
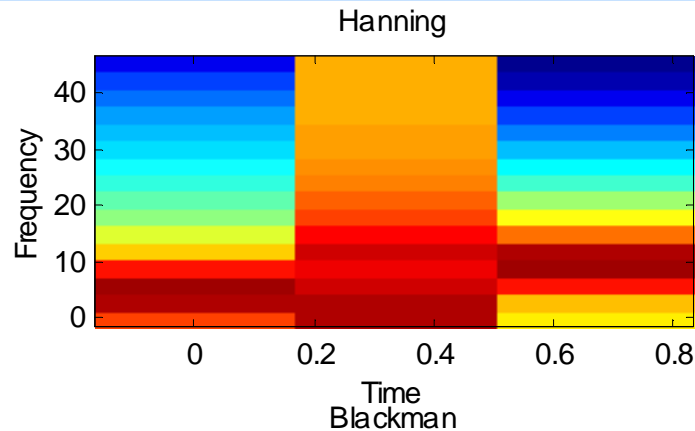
Ej.: Átomo tiempo-frecuencia



Ej.: Átomo tiempo-frecuencia



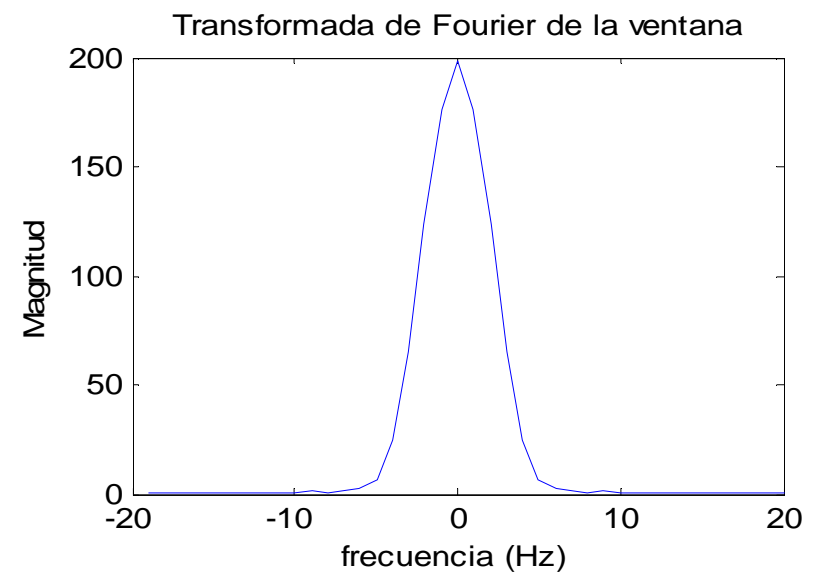
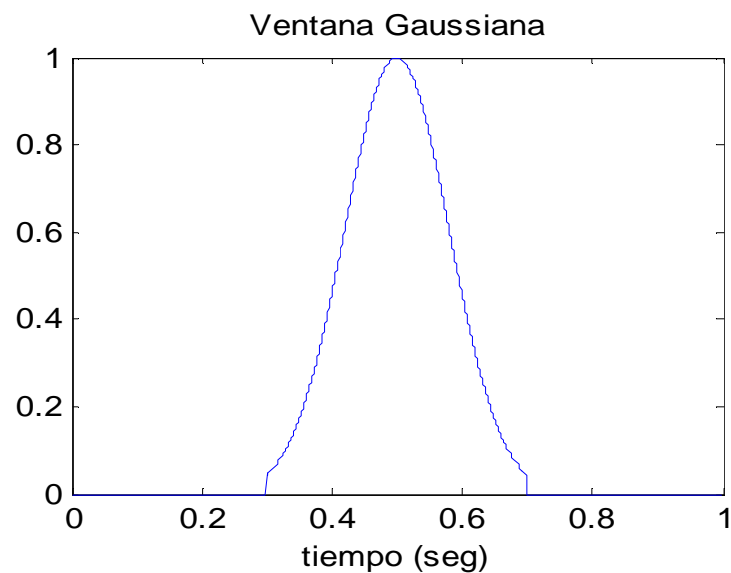
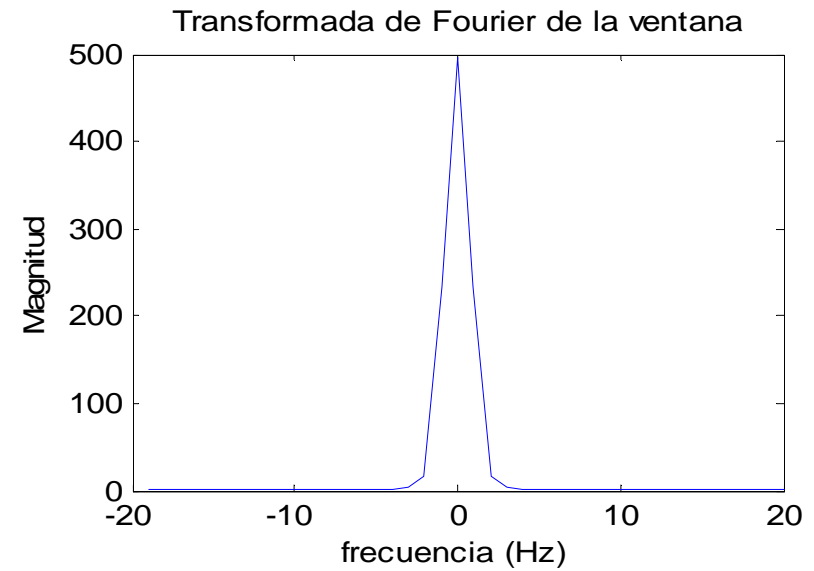
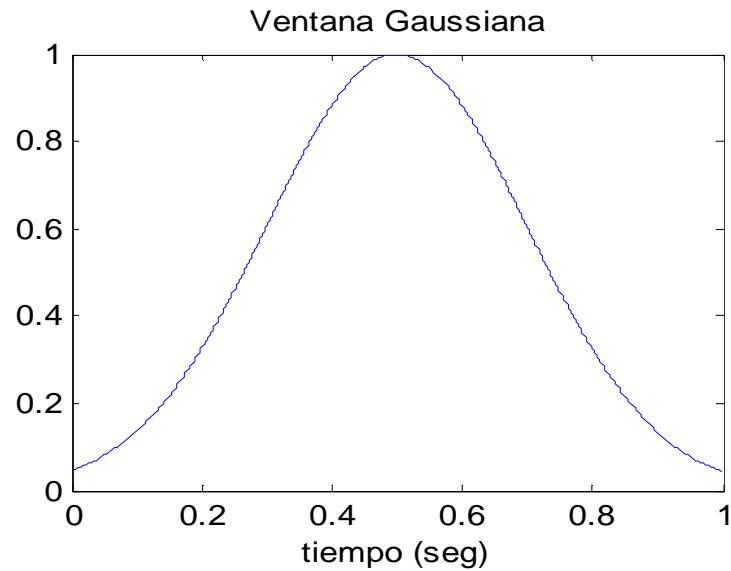
Diferentes ventanas - Transformada de Gabor



Principio de Incertidumbre - Resolución tiempo-frecuencia

- Las transiciones en el tiempo no se conocen con exactitud
- Mas resolución temporal: ventanas mas chicas, mayor cantidad de ventanas
- “Soporte compacto”: una ventana que permite concentrarse en una región determinada
- Pero, ¿cómo se traduce esto en el dominio frecuencial?
- En los ejercicios de Fourier se vio que las funciones muy localizadas en el tiempo tendían a tener espectros deslocalizados

Resolución tiempo-frecuencia



Principio de Incertidumbre - Resolución tiempo-frecuencia

- Estas ideas aparecen expresadas en el principio de Incertidumbre de Heisenberg:

La varianza temporal σ_t y la varianza frecuencial σ_ω de una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ satisface la siguiente inecuación

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

(Recordar que la varianza mide el grado de dispersión de un proceso aleatorio con respecto a la media)

Principio de Incertidumbre - Resolución tiempo-frecuencia

- Dada una ventana $g(t)$, la inecuación se convierte en igualdad
- Para cada valor de u y ξ , hay un rectángulo de incertidumbre de lados σ_t y σ_ω , con área de al menos $1/2$.
- En la STFT la función $g(t)$ permanece siempre igual (solo se desplaza en el tiempo) \Rightarrow
Resolución uniforme tanto en tiempo como en frecuencia

Localización

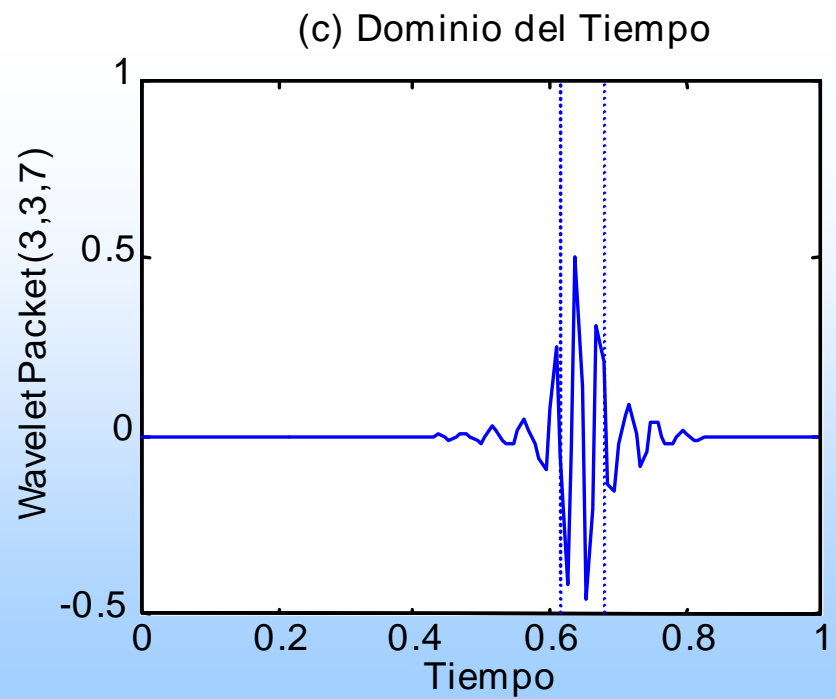
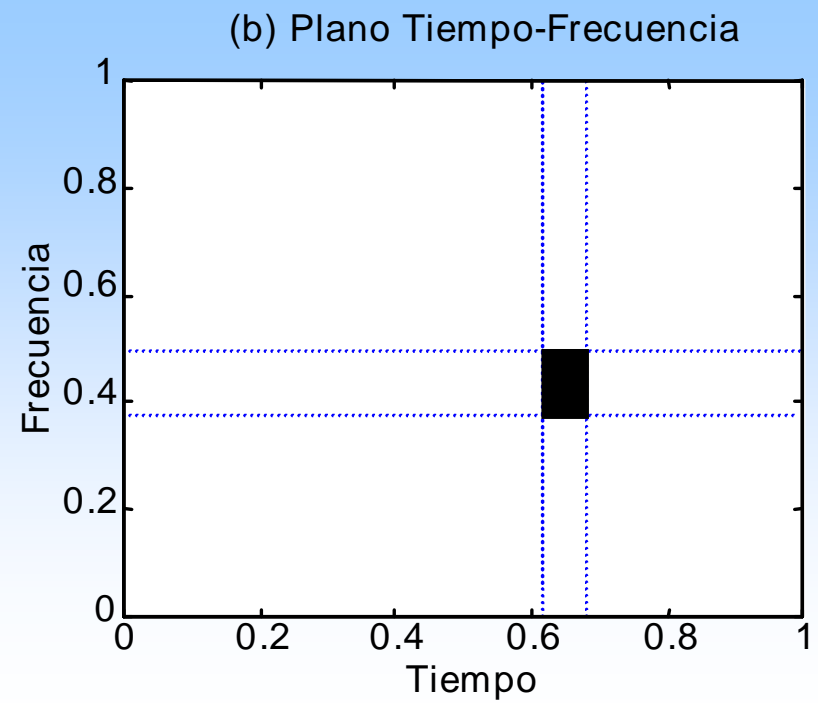
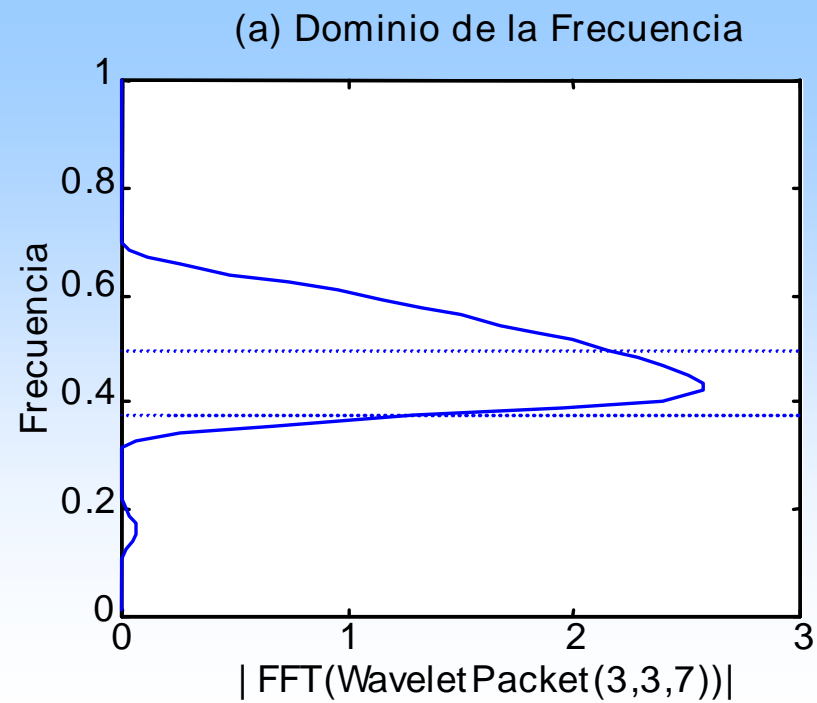
- Tiempo medio
- Frecuencia media
- Varianza temporal
- Varianza frecuencial

$$t_m = \frac{1}{E_f} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt$$

$$\omega_m = \frac{1}{E_f} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega$$

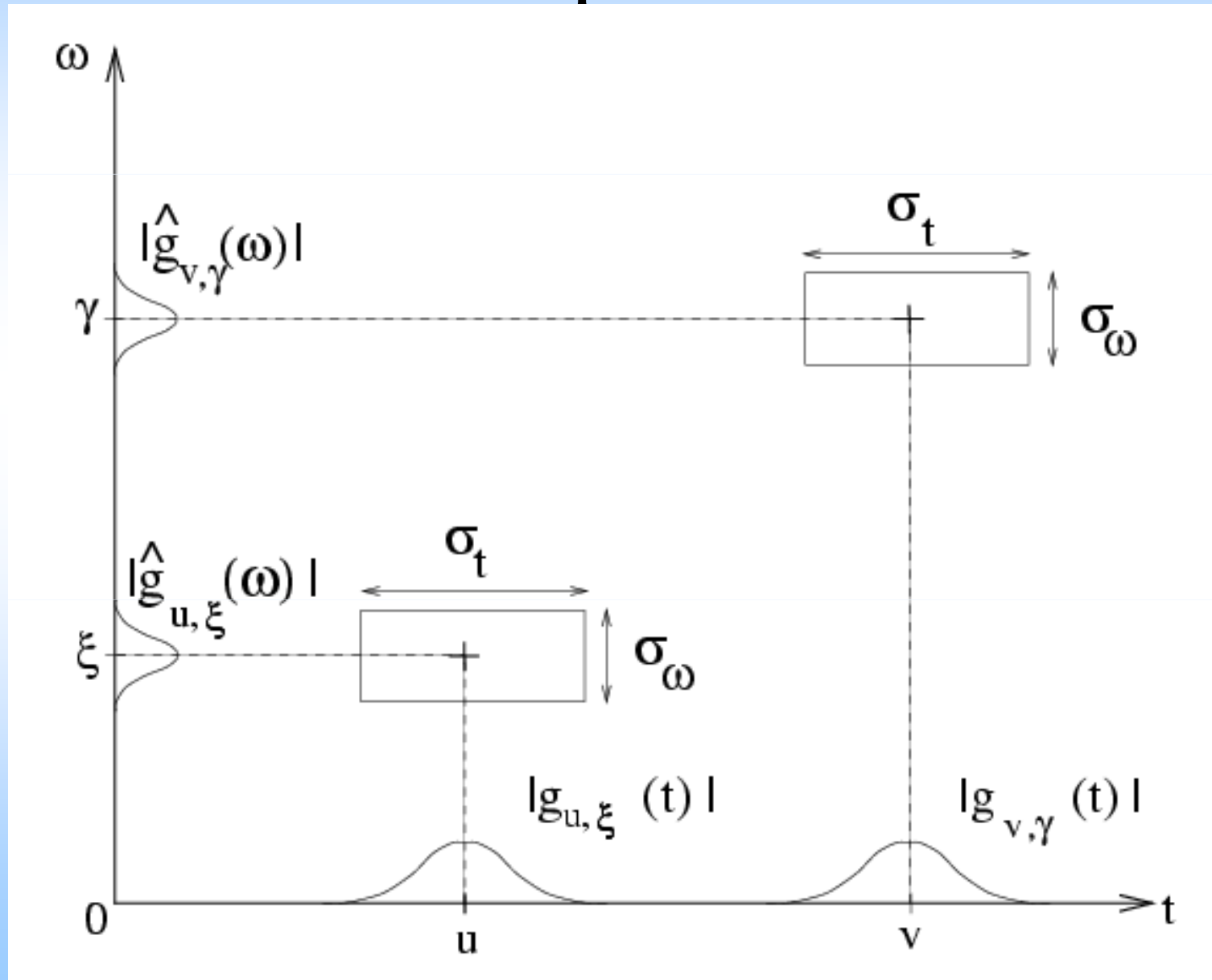
$$\sigma_t = \frac{4\pi}{E_f} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_m)^2 |f(t)|^2 dt$$

$$\sigma_\omega = \frac{4\pi}{E_f} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_m)^2 |F(\omega)|^2 d\omega$$



Átomo Tiempo-Frecuencia
Caso general

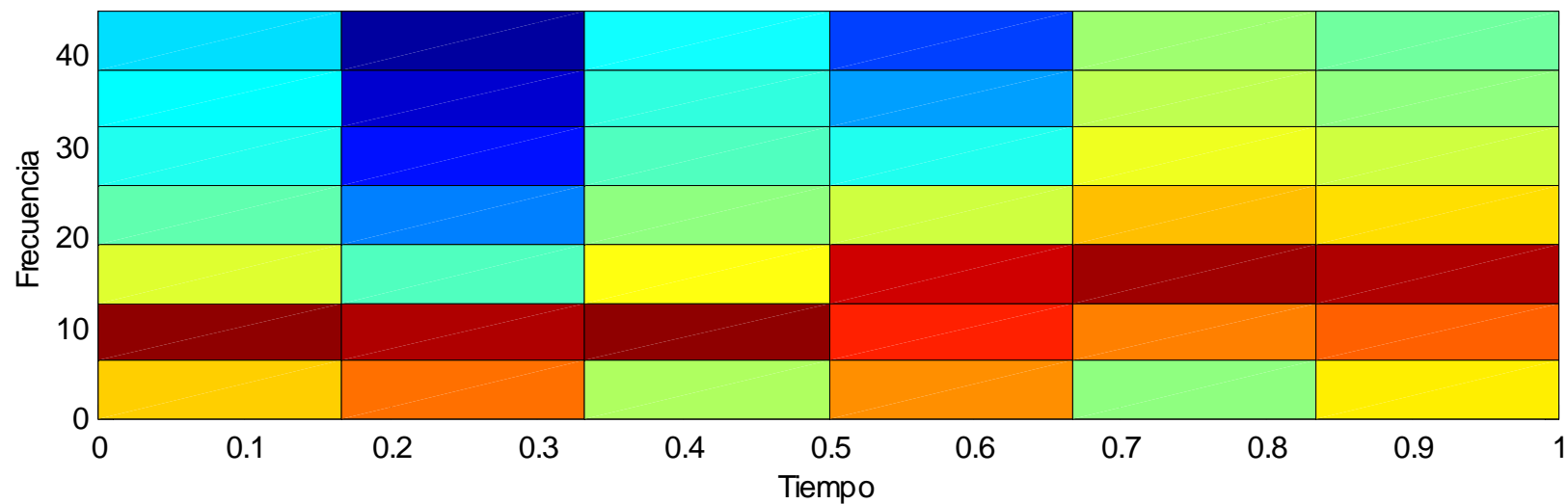
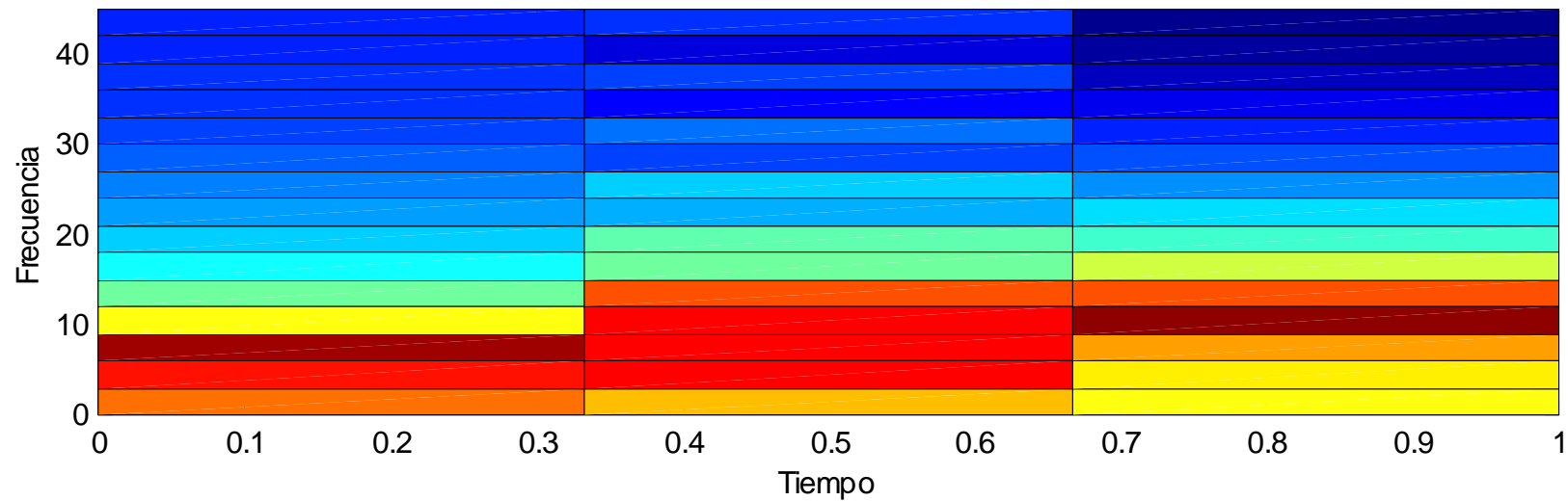
Principio de Incertidumbre - Resolución tiempo-frecuencia



Principio de Incertidumbre - Resolución tiempo-frecuencia

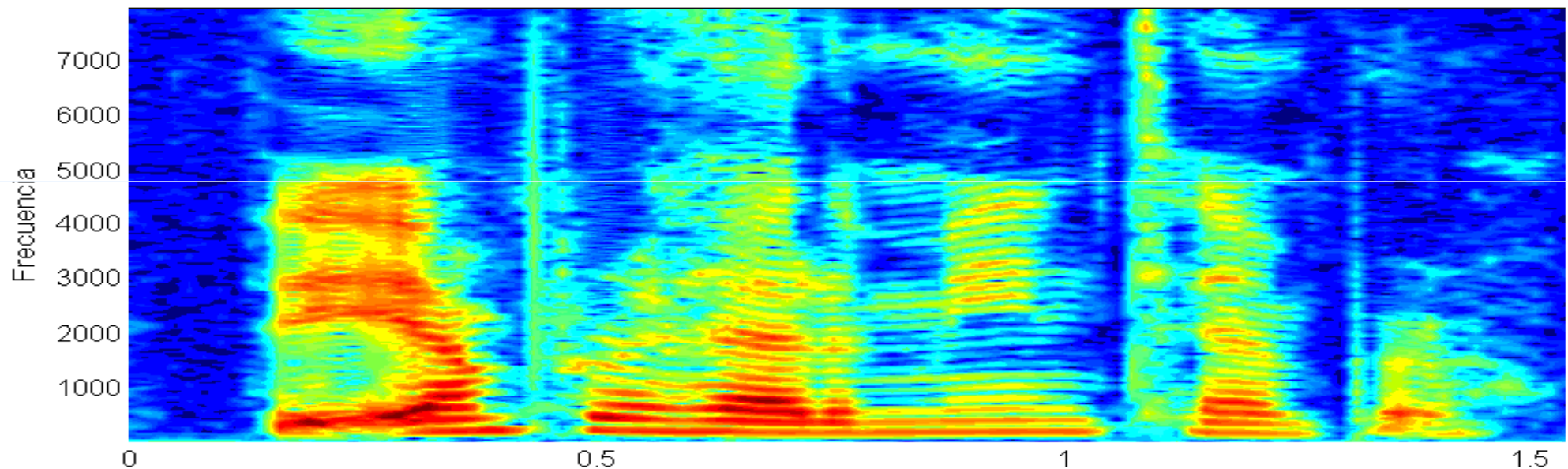
- Caso discreto: Resolución temporal limitada por la longitud temporal de la ventana: $\Delta t = T_{\text{vent}}$
- Resolución frecuencial está también limitada por ésta longitud: $\Delta f = 1/T_{\text{vent}}$
- Por lo tanto tenemos: $\Delta t \Delta f = 1$
- No podemos mejorar una salvo que empeoremos la otra.

Principio de Incertidumbre - Resolución tiempo-frecuencia

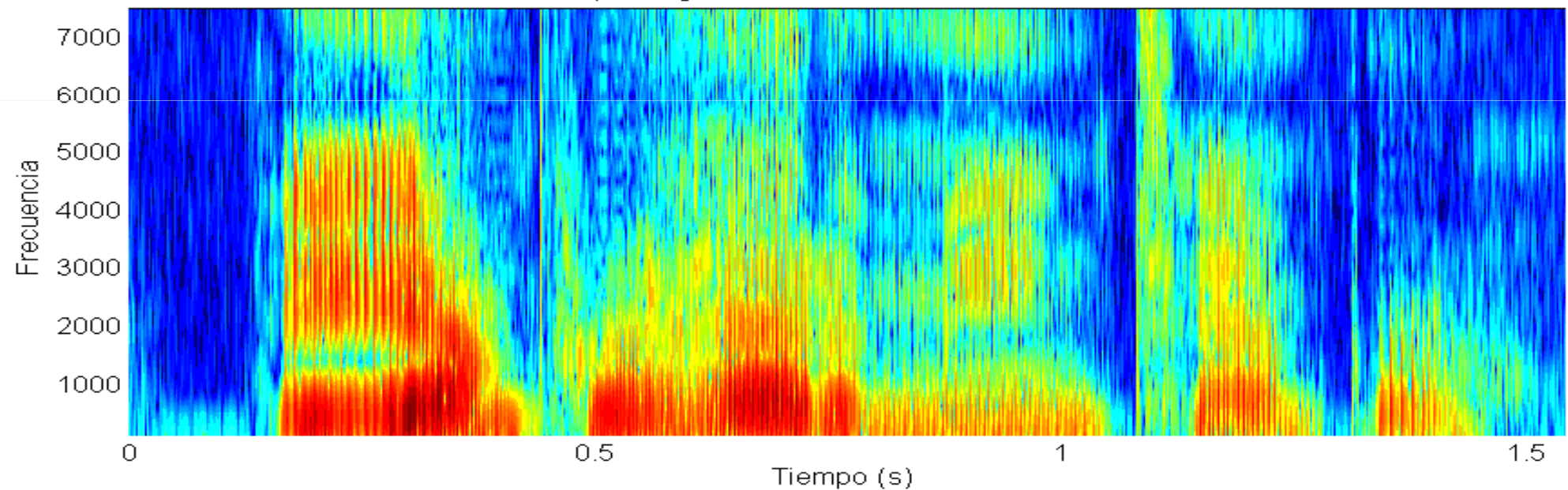


Resolución

Espectrograma Banda Angosta: Ventana 16 ms.



Espectrograma Banda Ancha: Ventana 1 ms.



Redundancia de la STFT

$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_{u, \xi}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt$$

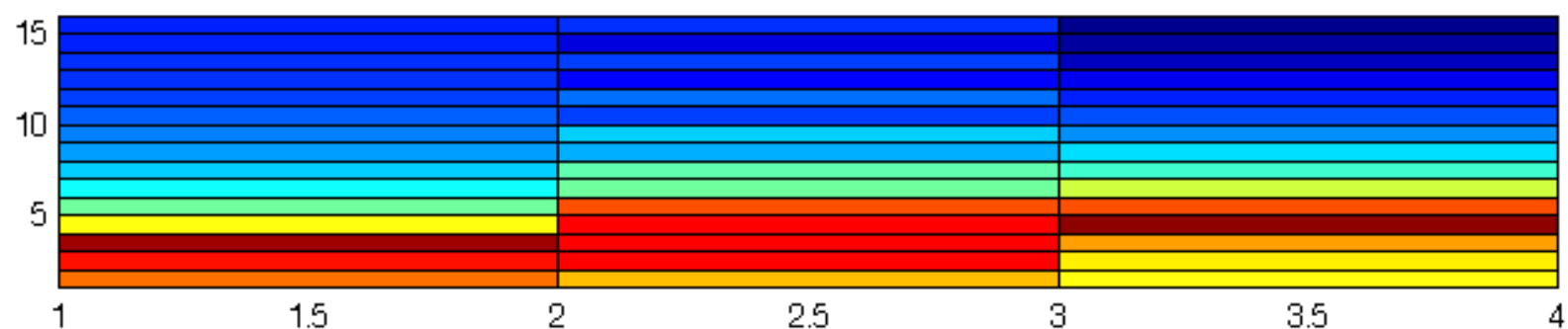
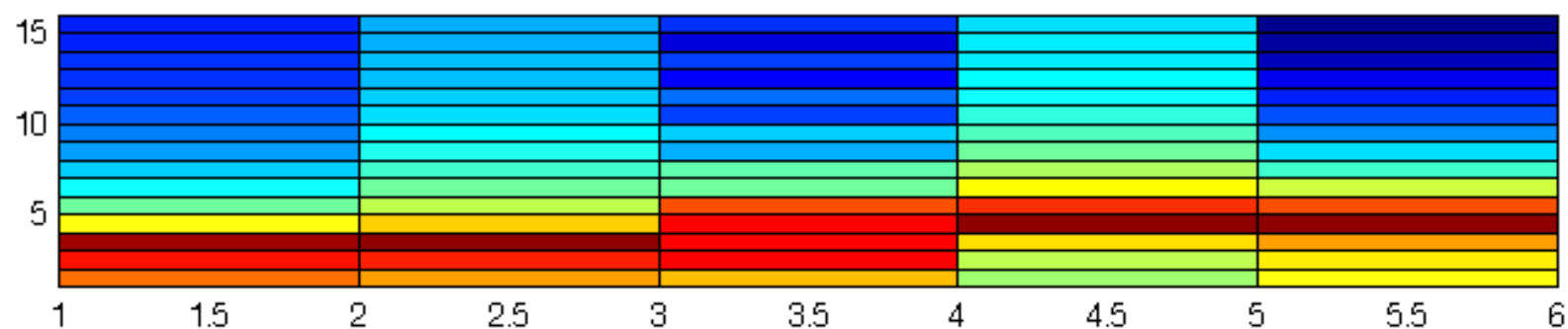
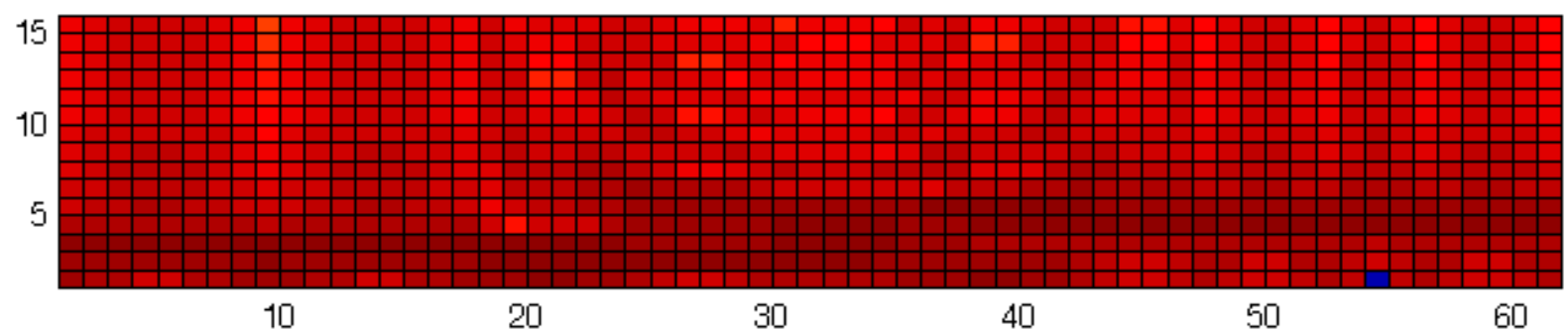
- u varia continuamente \rightarrow parte de la información en una u siguiente habrá estado en la ventana de análisis anterior
- Esta propiedad de contener repetida la información se denomina redundancia
- Esto genera una representación sobrecompleta de la señal

Redundancia de la STFT

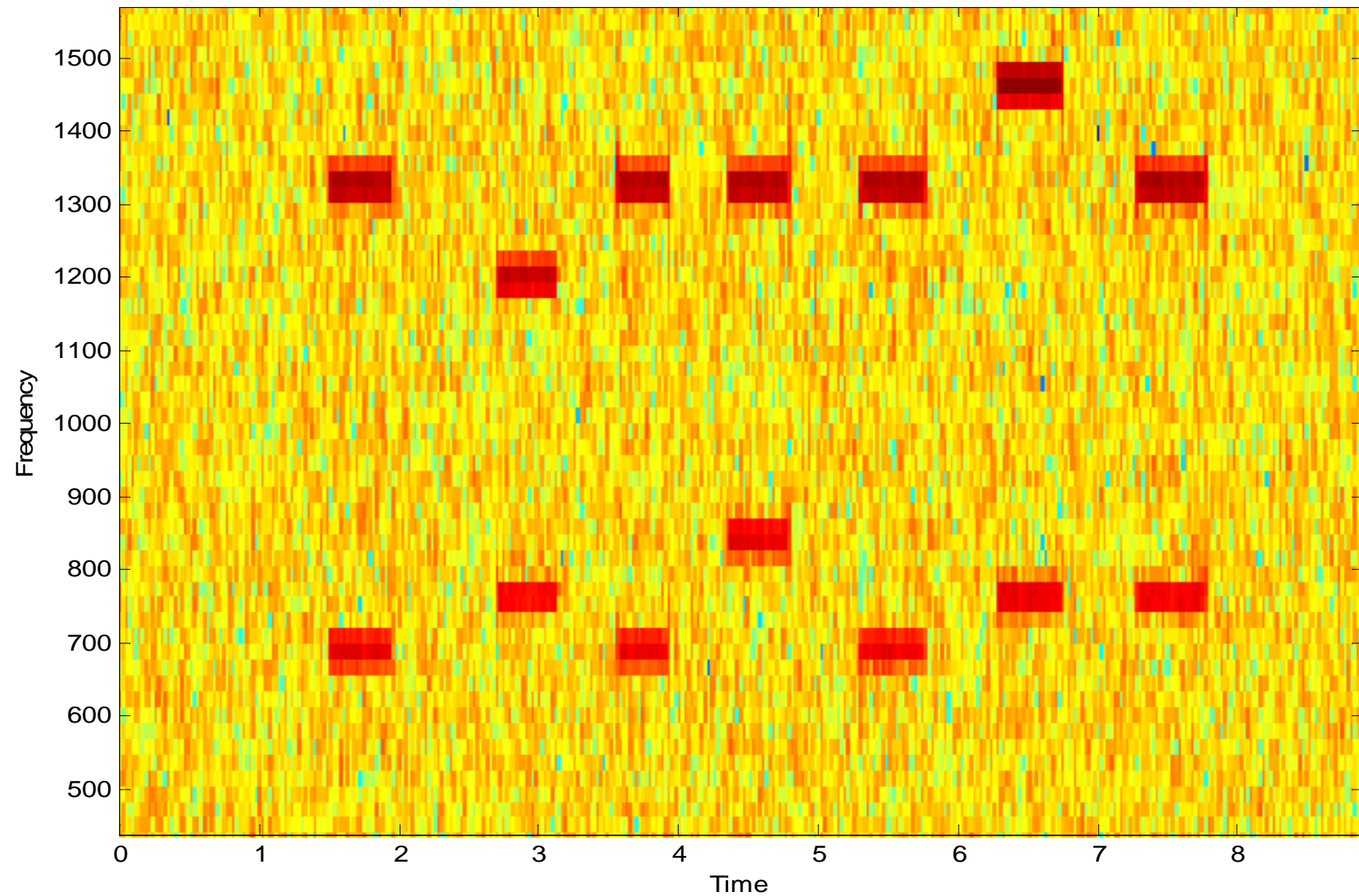
$$Sf[m, l] = \langle f[n], g_{m,l}[n] \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] g[n-m] e^{\frac{-i2\pi ln}{N}}$$

- Caso discreto, podemos manejar la redundancia, haciendo que el desplazamiento m en vez de ser cualquier entero, varíe de a saltos
- Si tomamos esos saltos iguales a la longitud temporal de la ventana, no existe redundancia
- Esto se puede evaluar contando el número de coeficientes de la representación. Si es mayor que los de la señal original, hay información repetida

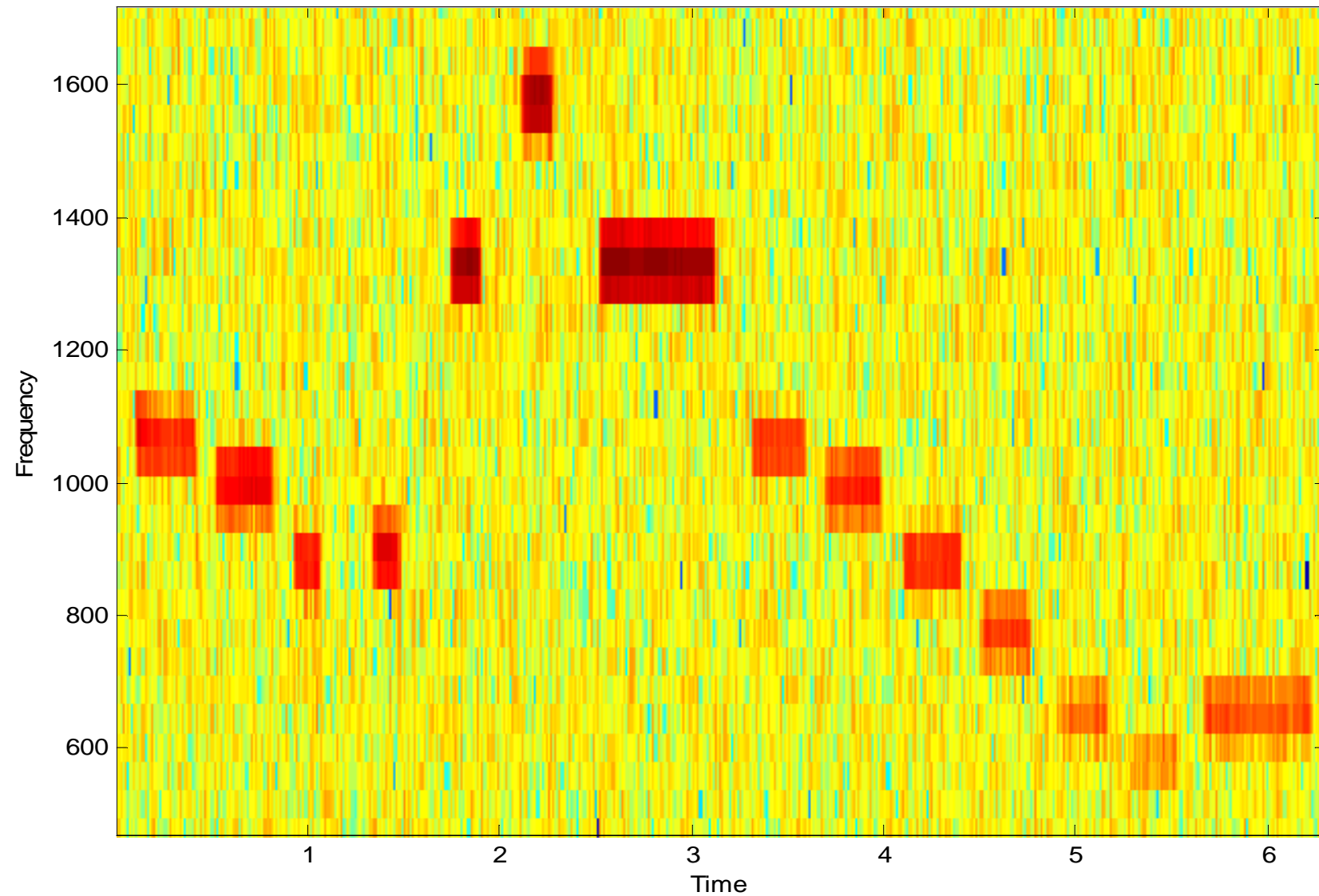
Redundancia de la STFT



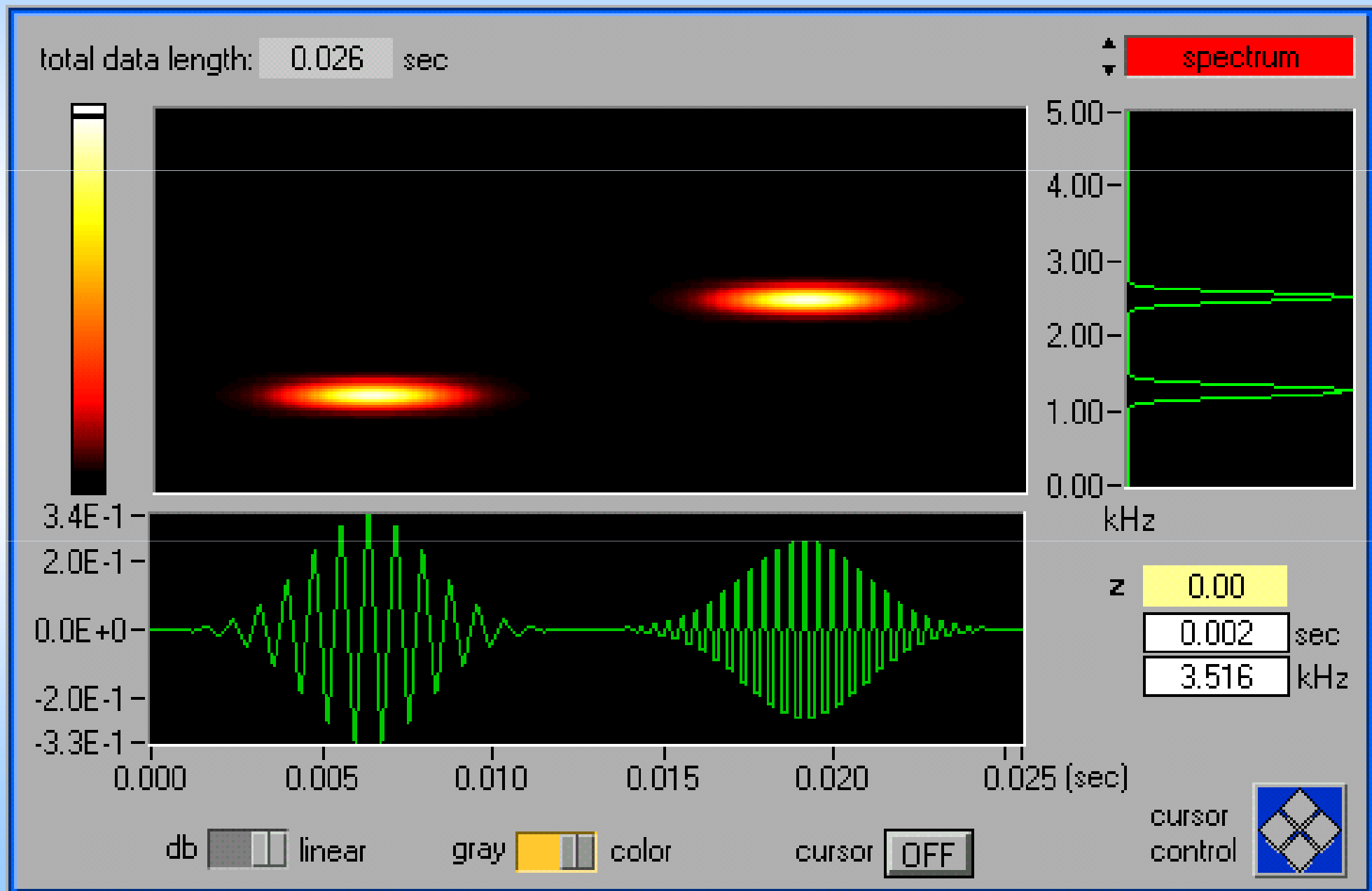
Ej.: Numero de teléfono



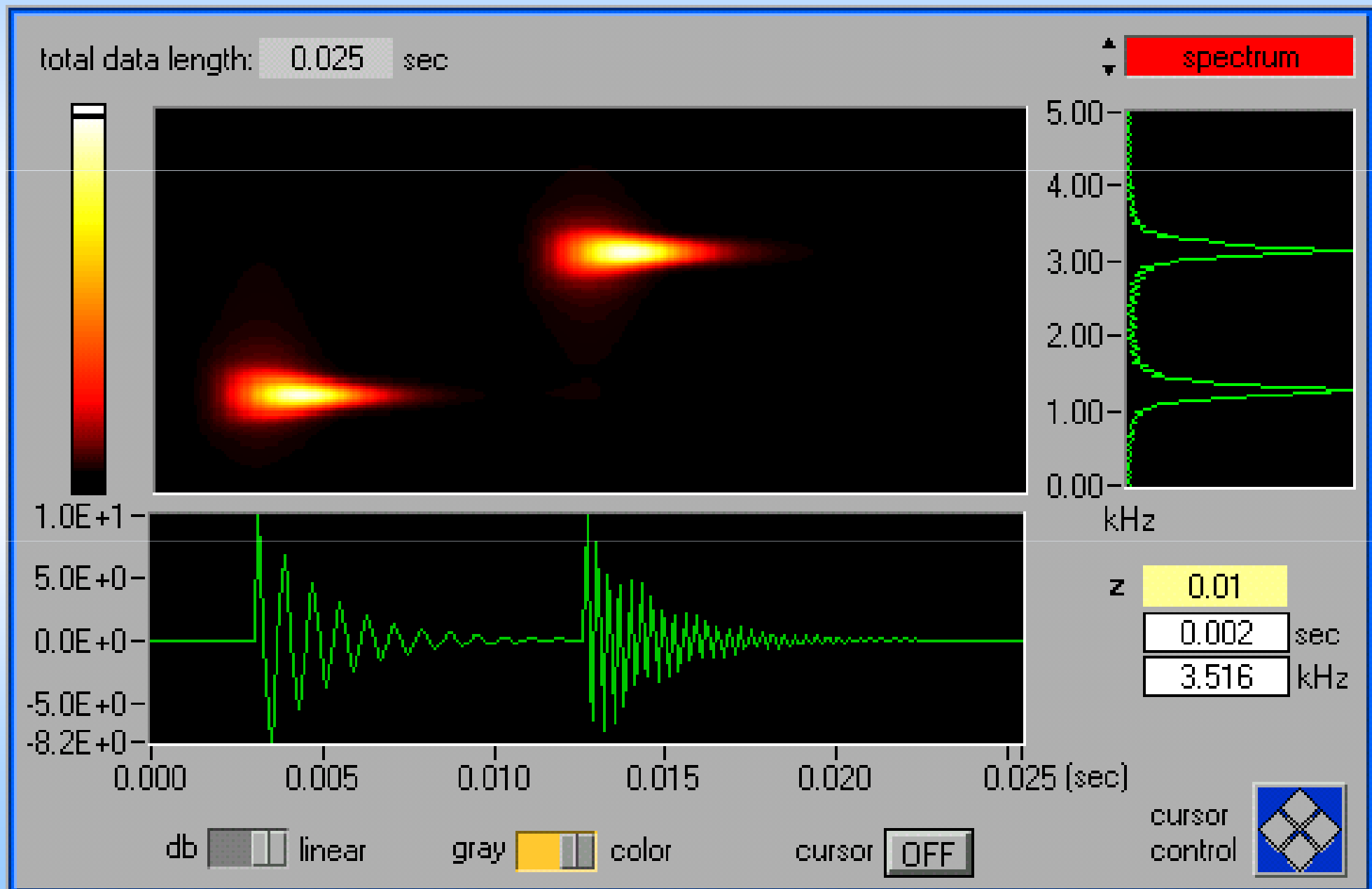
Ej.: Nota La



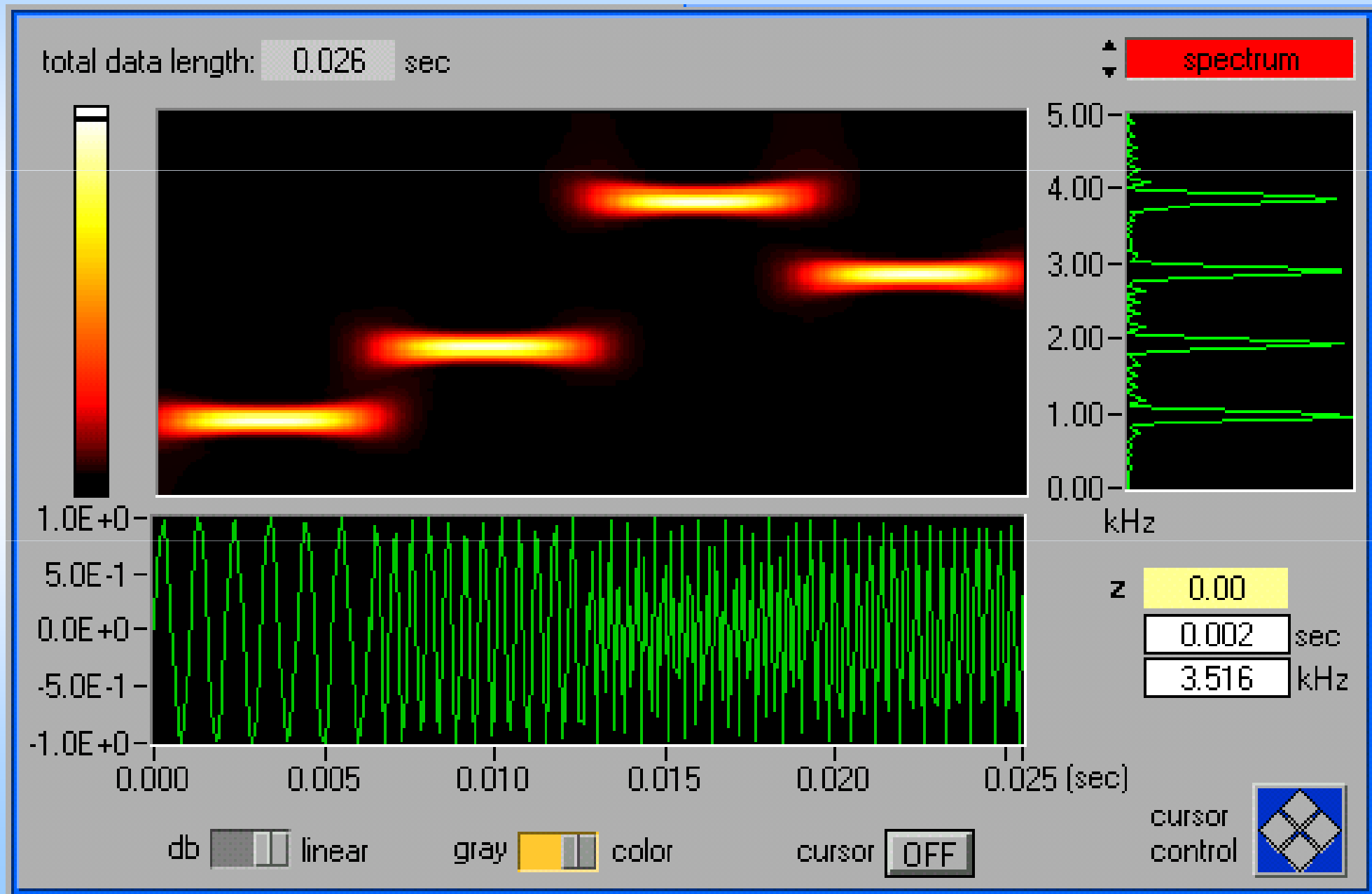
Ejemplos simples



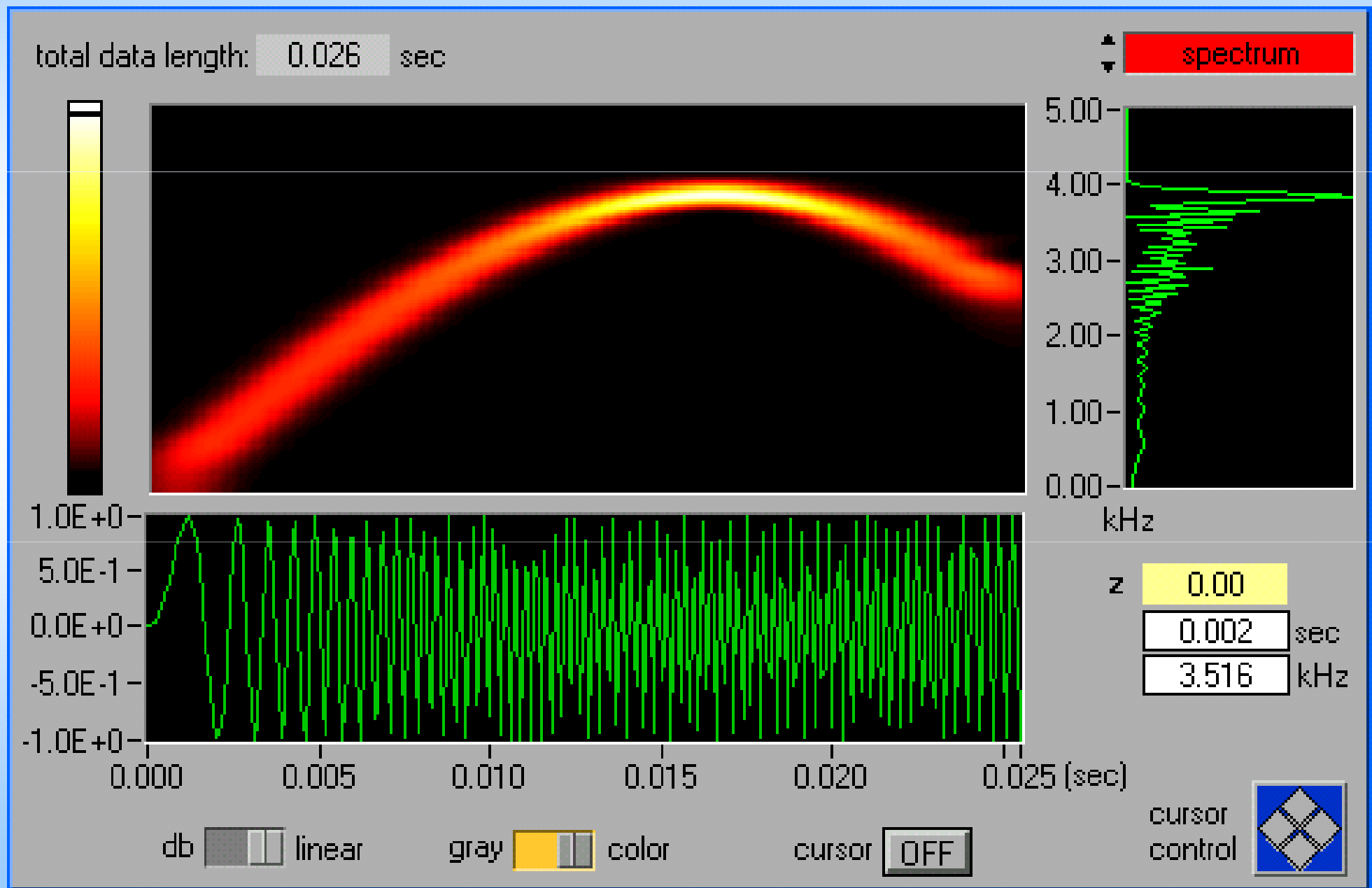
Ejemplos simples



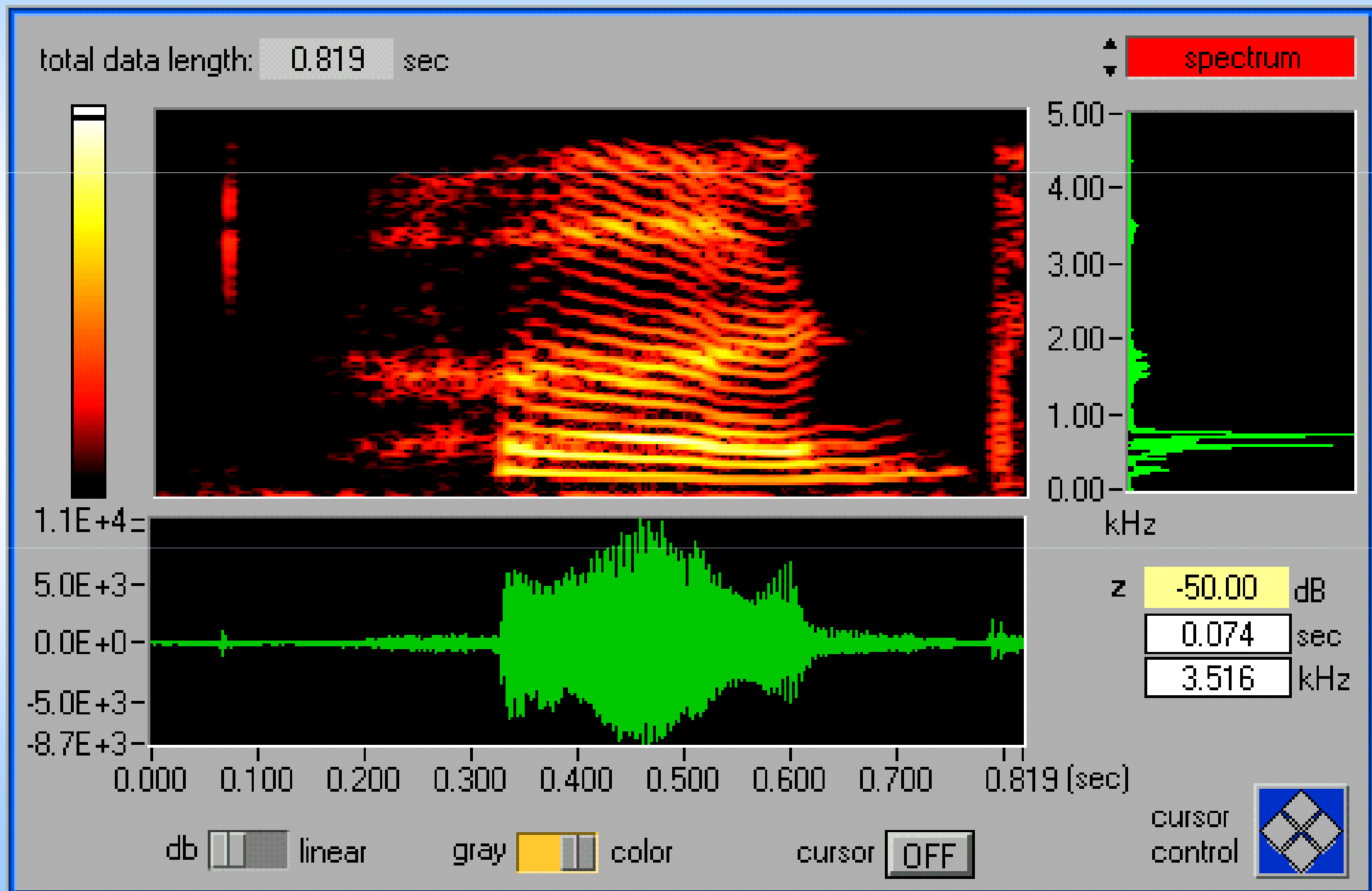
Ejemplos simples



Ejemplos simples



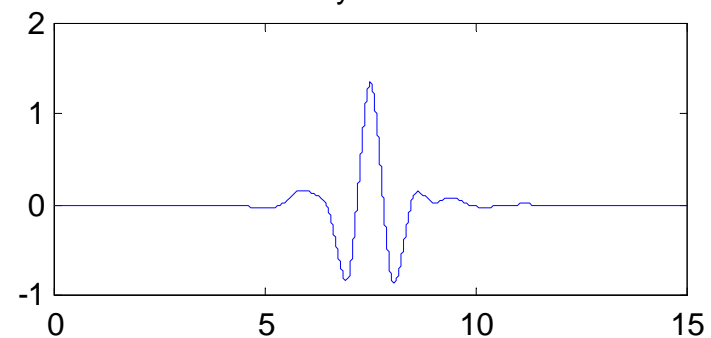
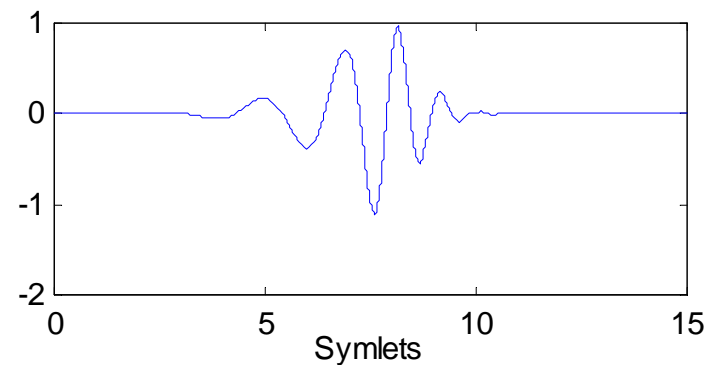
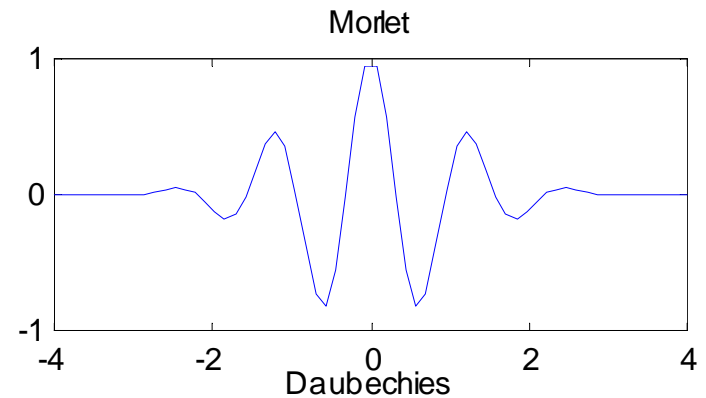
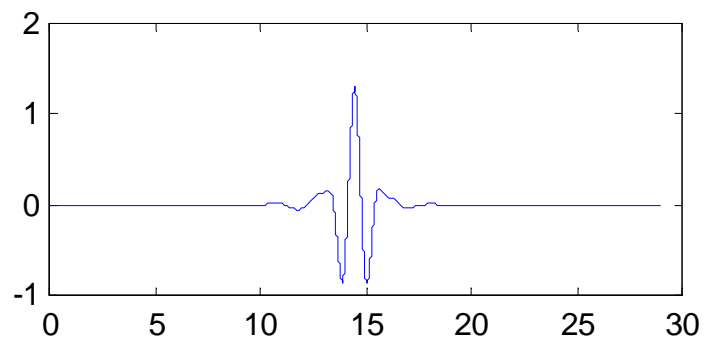
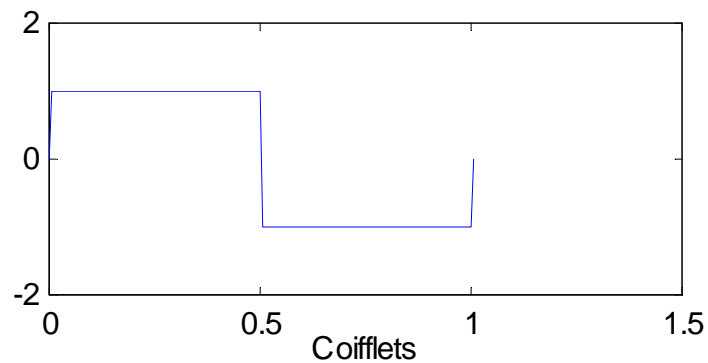
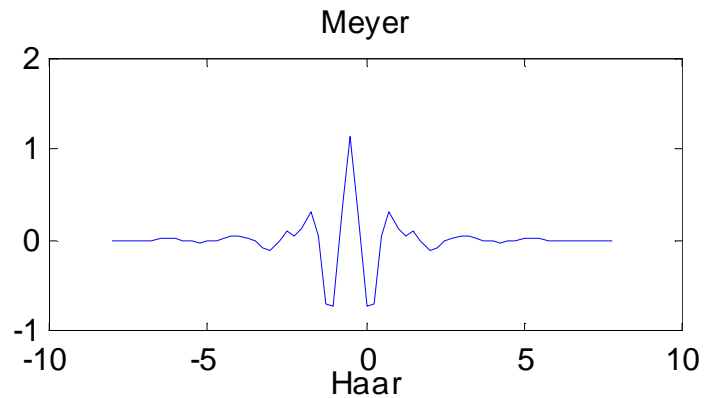
Ejemplos simples



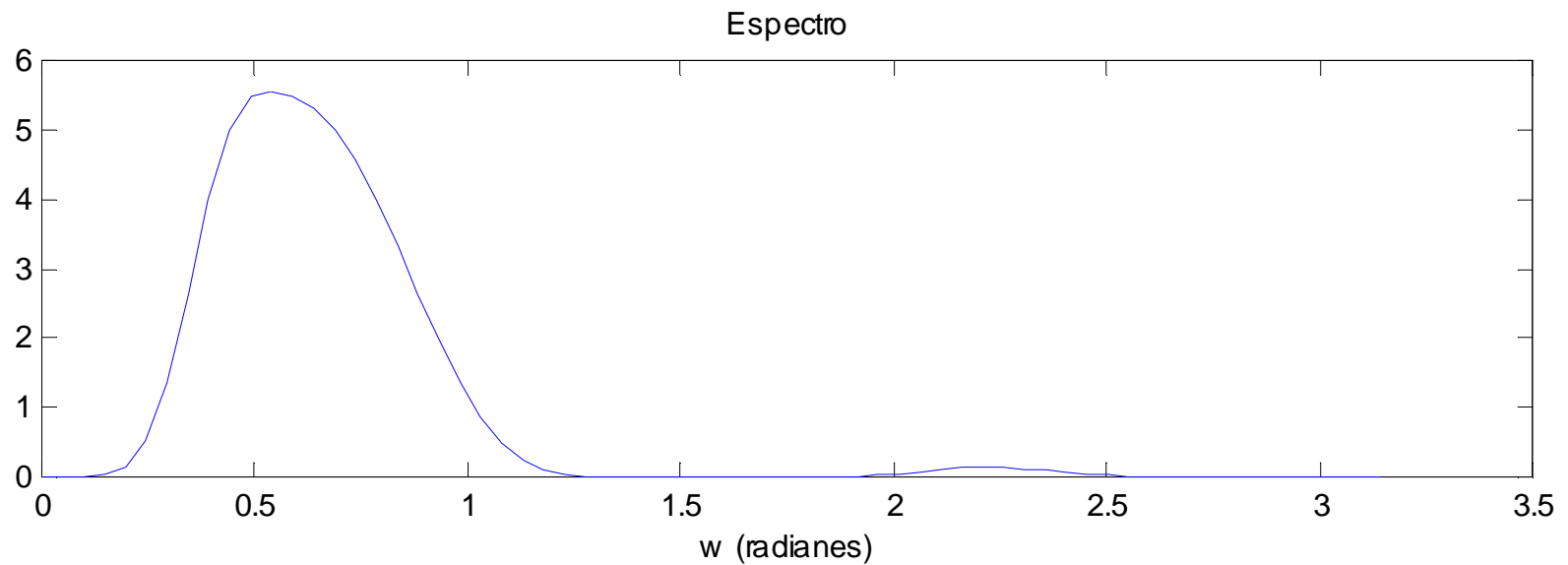
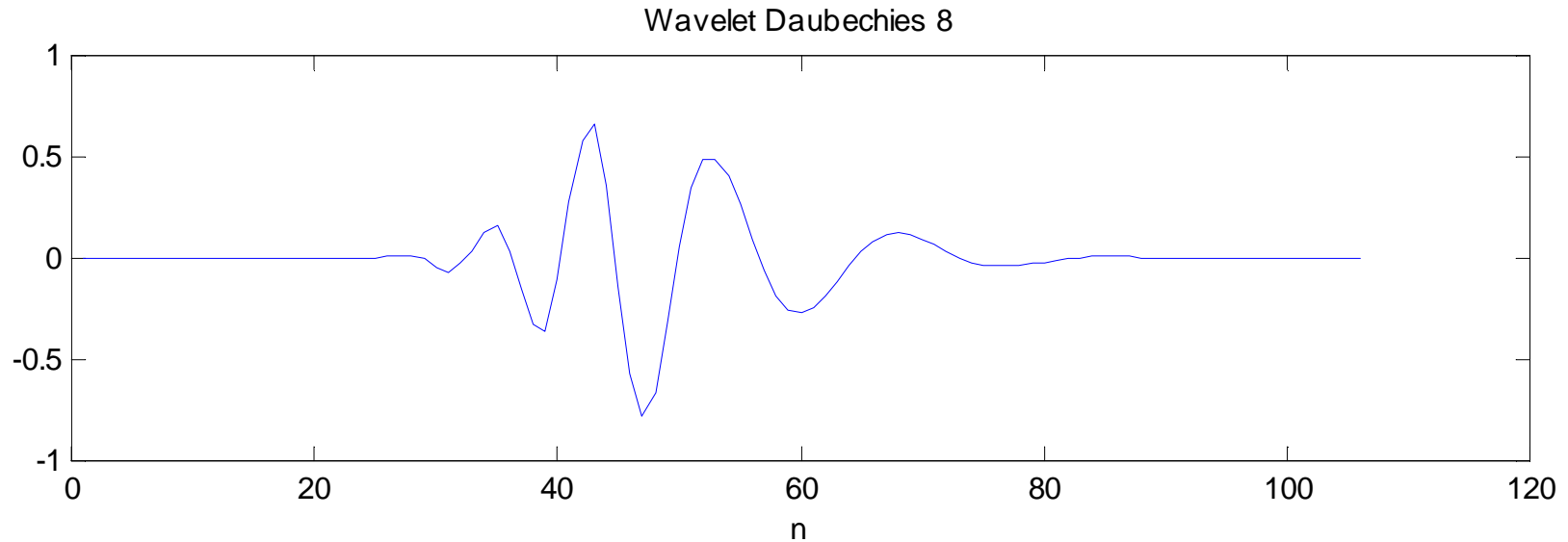
Transformada Wavelet

- Una ondita (wavelet) es una función que tiene una duración limitada en el tiempo y tiene valor medio cero.
- Familias de onditas (Coifflets, Daubechies, Haar, etc) con propiedades que las hacen apropiadas para diversos procesamientoos.
- A partir de una wavelet madre, se obtienen “átomos tiempo-escala” análisis por compresión y dilatación, y desplazamiento en el tiempo.
- Análisis similar al de la STFT, descomponiendo la señal en términos de éstos átomos.

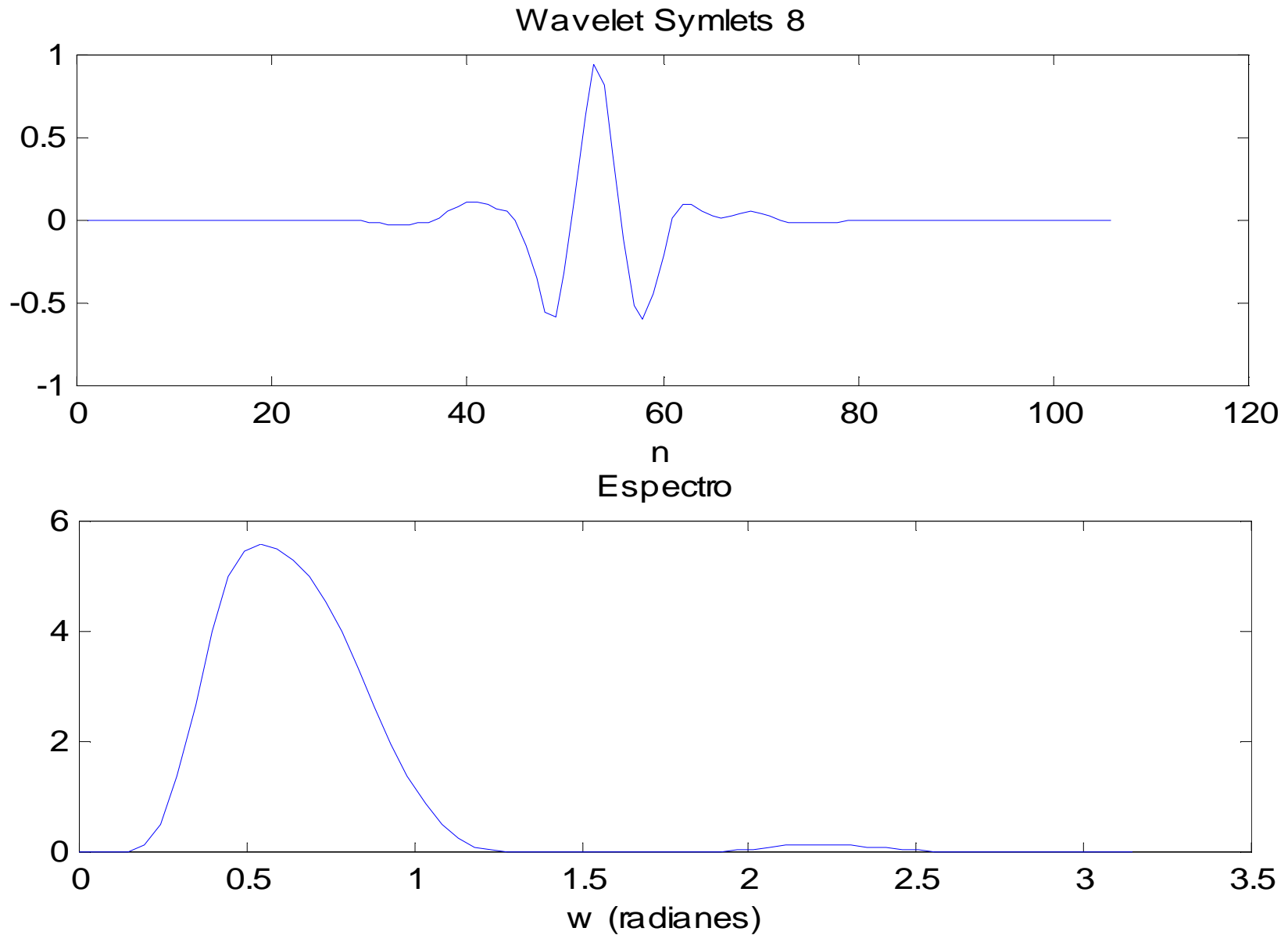
Transformada Wavelet



Transformada Wavelet



Transformada Wavelet



Transformada Wavelet Continua (CWT)

Una wavelet es una función con valor medio igual a cero, norma unitaria y centrada en la vecindad de 0:

$$\psi(t) \in L^2(\mathbb{R}); \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0; \|\psi(t)\| = 1$$

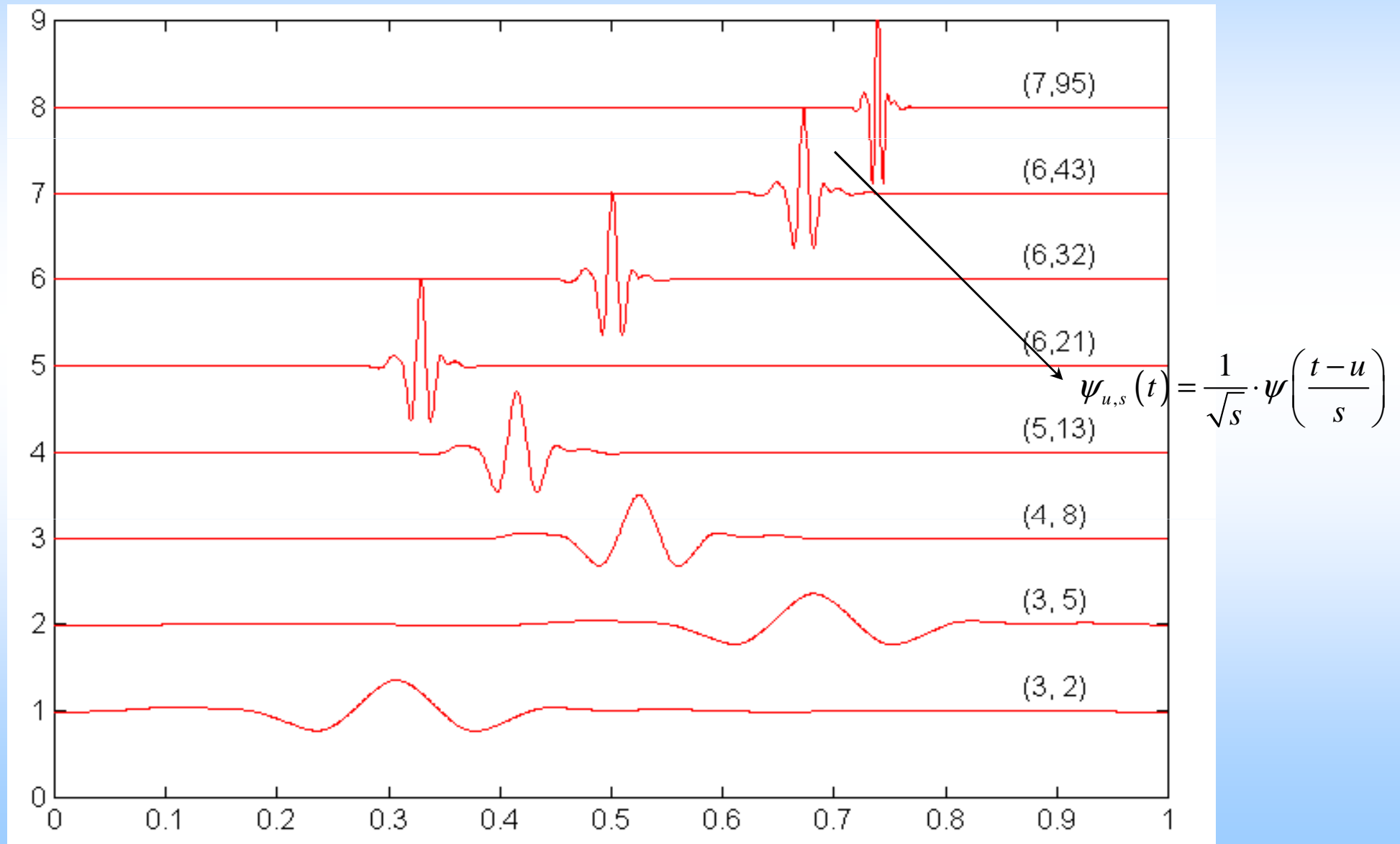
A partir de ésta, obtenemos por escalado y traslación el átomo tiempo-escala:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

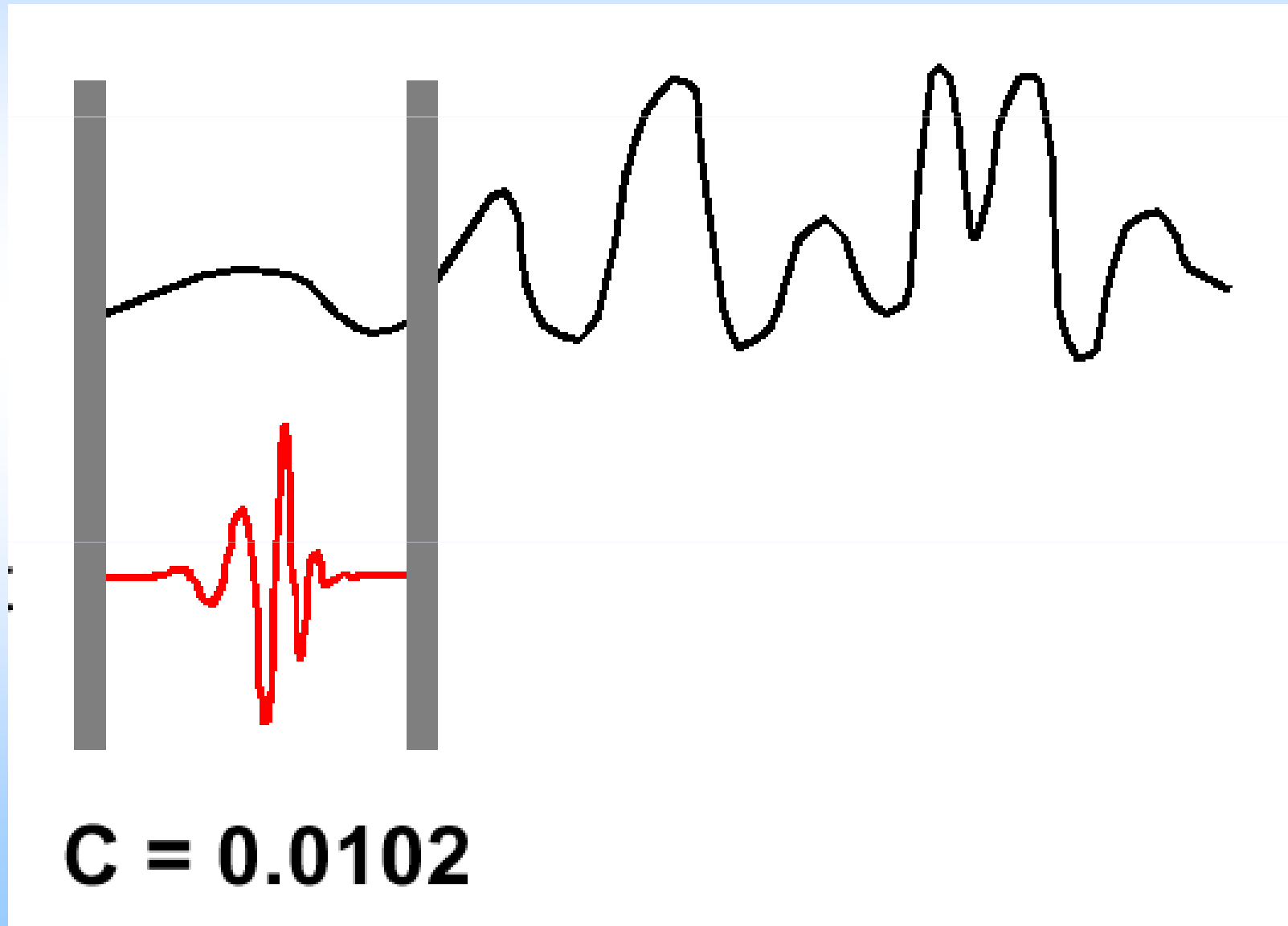
La transformada Wavelet continua será:

$$Wf(u, s) = \left\langle f(t), \psi_{u,s}(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

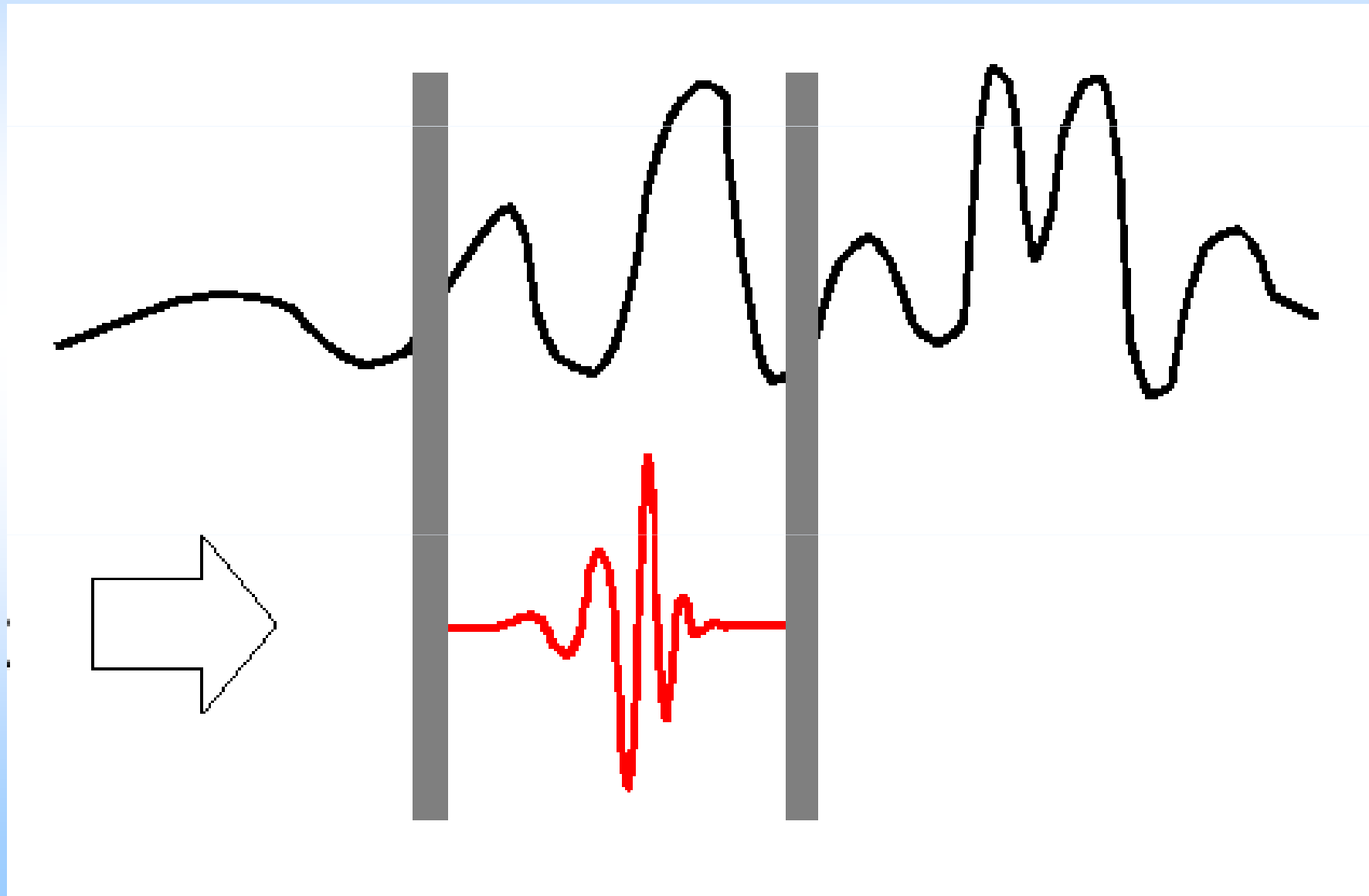
Onditas: escala y localización



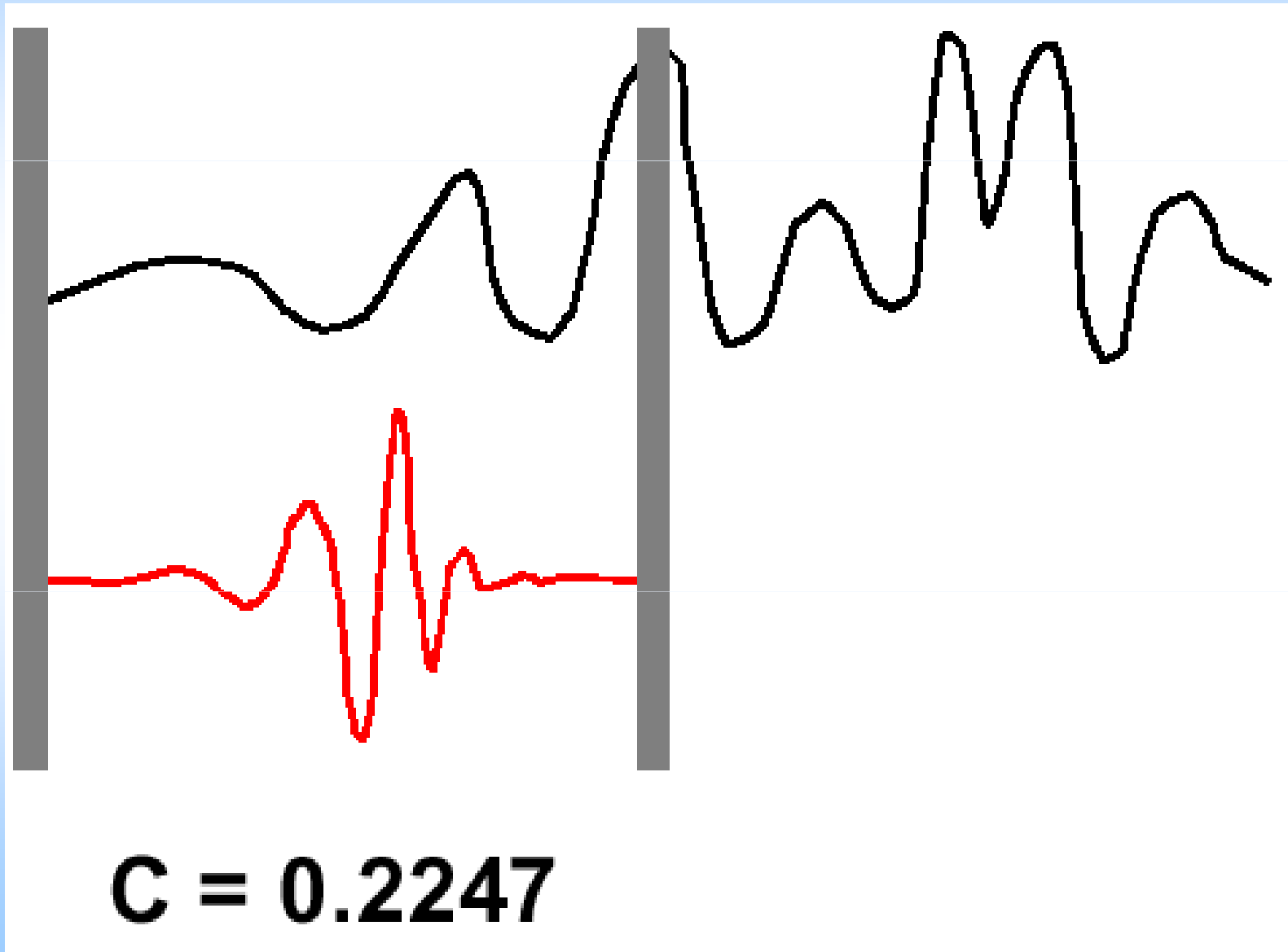
Transformada Wavelet Continua



Transformada Wavelet Continua

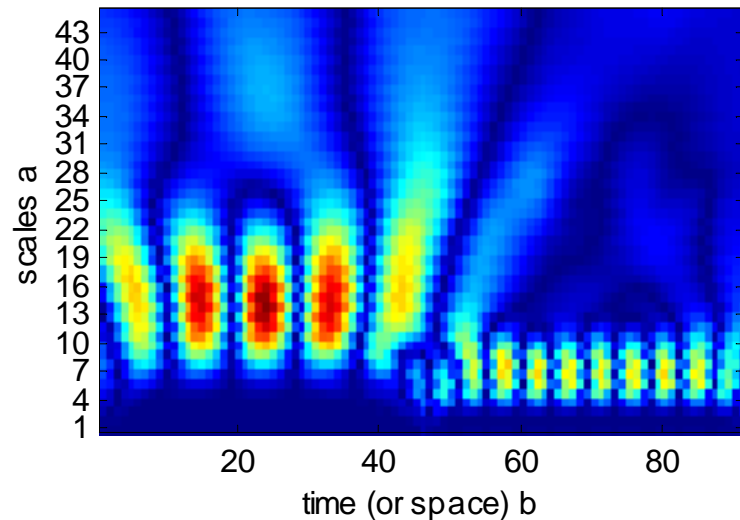


Transformada Wavelet Continua

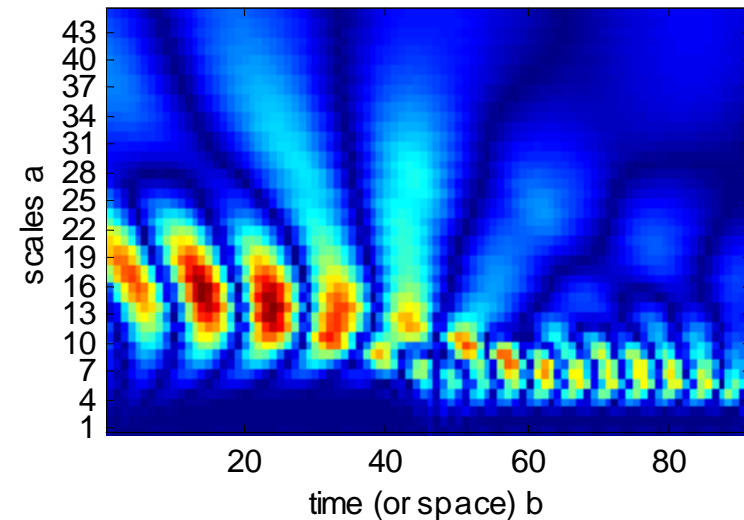


Transformada Wavelet Continua

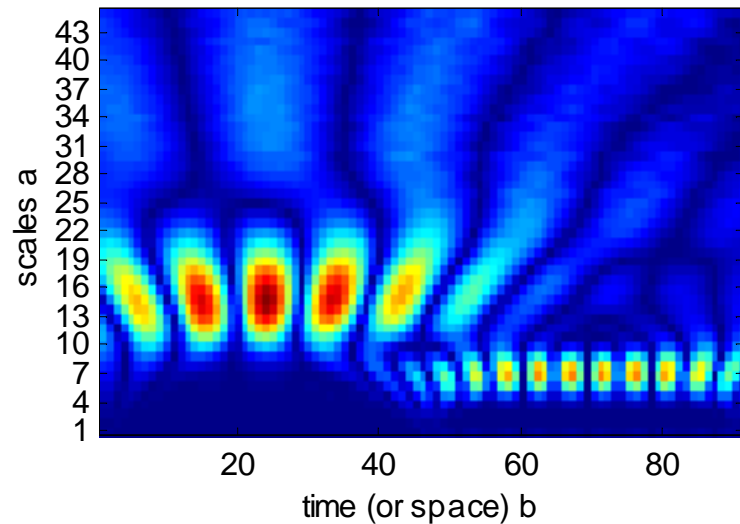
Symlets 8



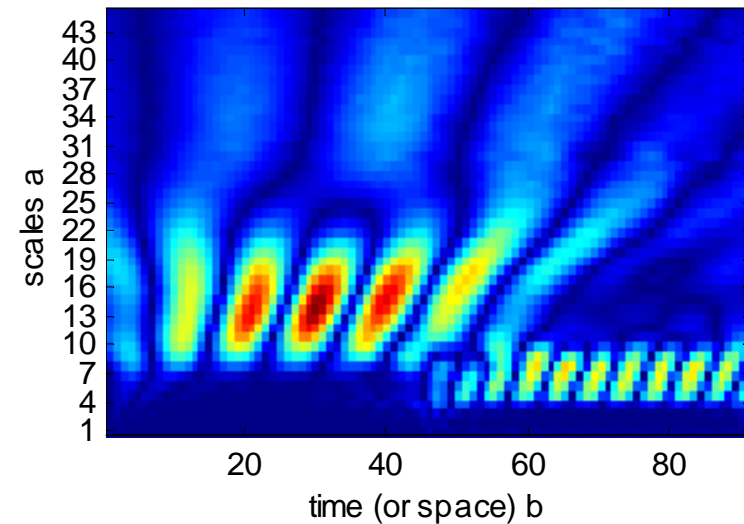
Daubechies 8



Morlet



Meyer



Transformada Wavelet Discreta (DWT)

Para calcular la versión discreta, se evalúa en las escalas $s=a^j$ con $a=2^{1/v}$, lo que hace que en cada intervalo $[2^j, 2^{j+1}]$ haya v valores intermedios. La función wavelet resulta:

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{n}{a^j}\right)$$

La Transformada wavelet discreta resulta entonces:

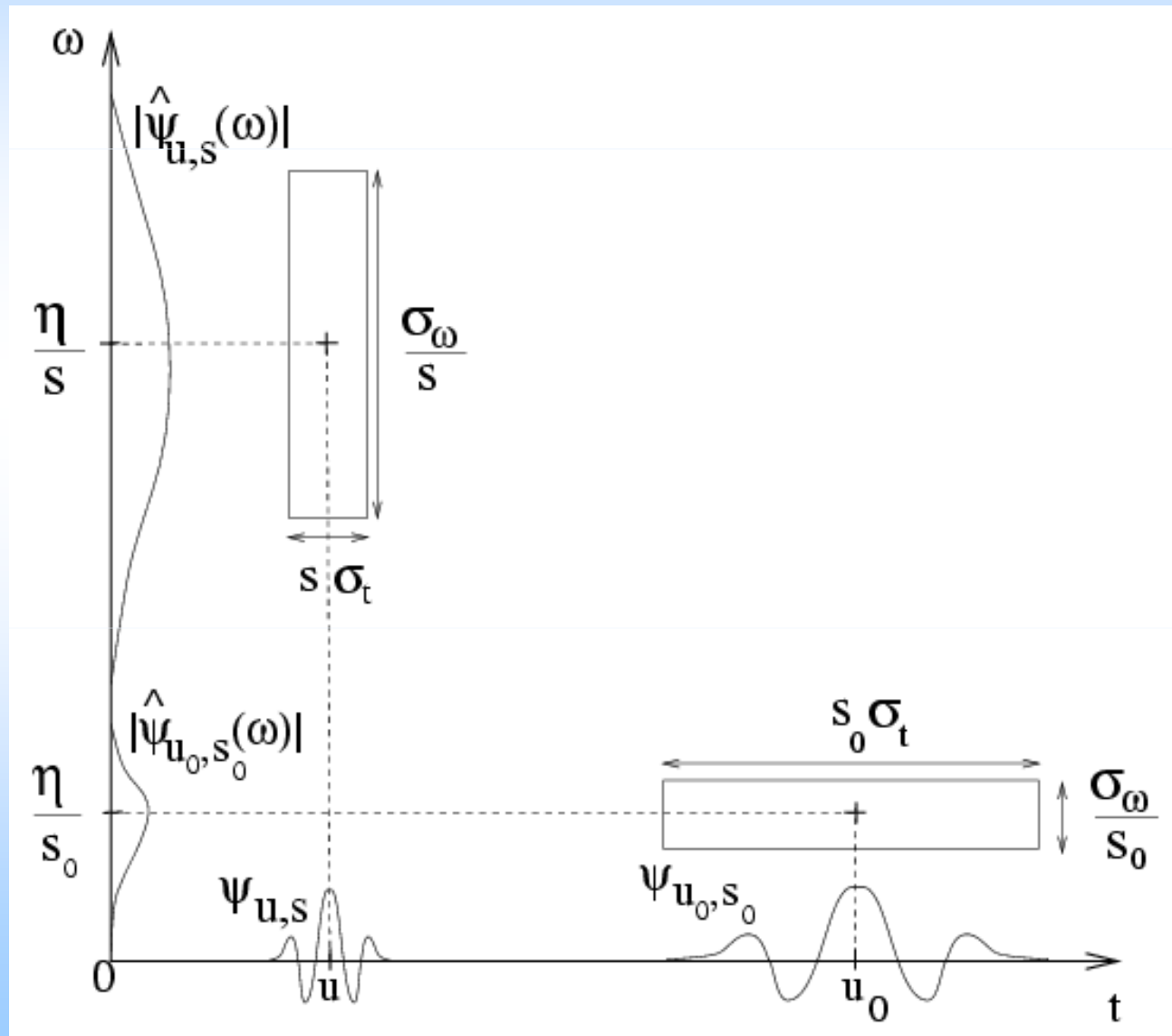
$$Wf[n, a^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \psi_j^*[m-n]$$

Donde a^j pertenece a $[2N^{-1}, K^{-1}]$ y K es el soporte de ψ (es distinta de 0 en el intervalo $[-K/2, K/2]$)

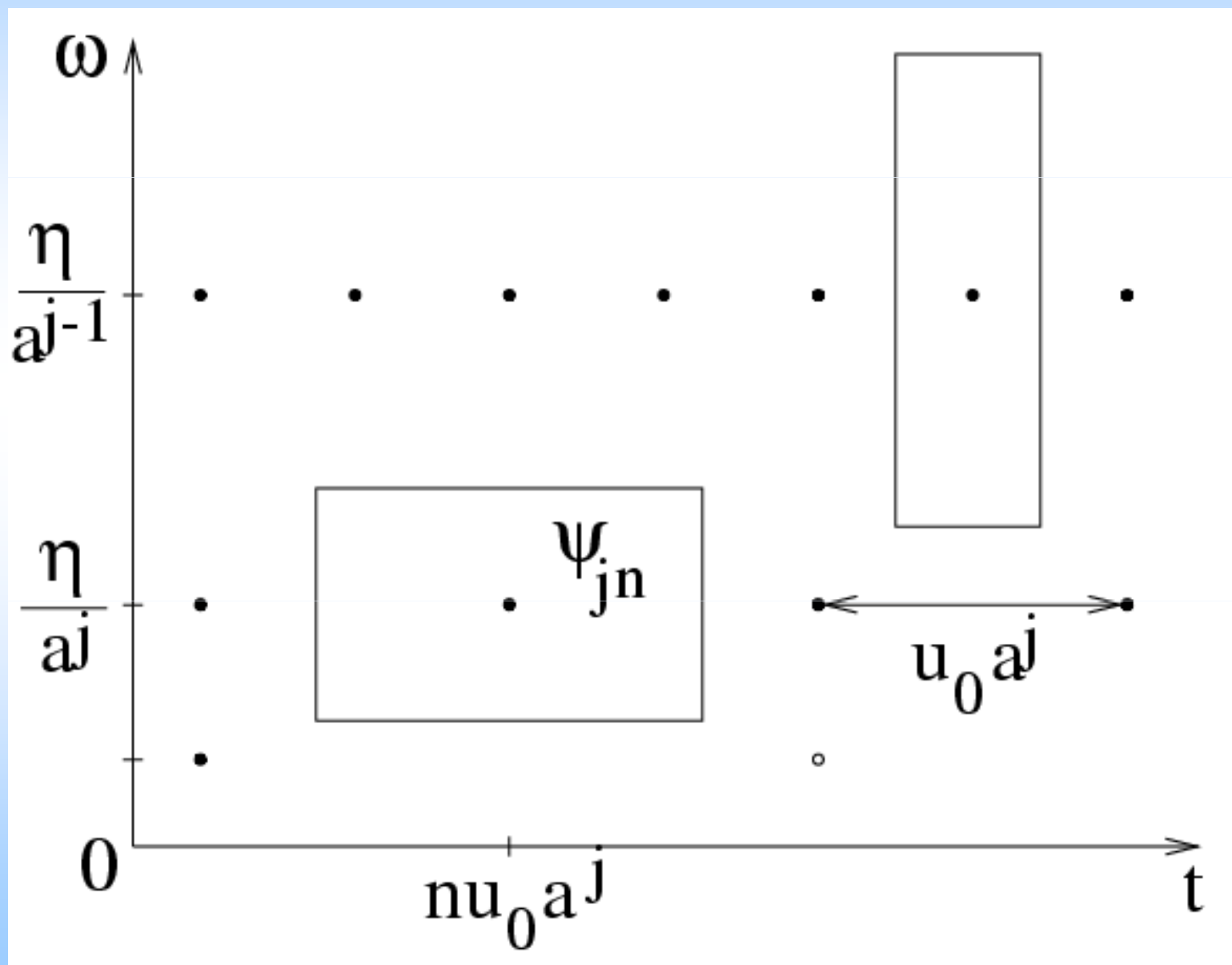
Resolución

- También cumple con el principio de incertidumbre de Heisenberg
- La resolución no es uniforme en el plano t - f ,
- Bajas frecuencias: mayor resolución frecuencial pero peor temporal
- Altas frecuencias la resolución temporal mejora, a costa de perder resolución frecuencial.

Resolución



Resolución



DWT: función de escala

- Para obtener una representación completa se necesita la información de bajas frecuencias correspondientes a las escalas mayores
- Esto se logra mediante una función de escala $\phi(t)$
- A partir de esta se obtienen las componentes de bajas frecuencias como:

$$\phi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \phi\left(\frac{n}{a^j}\right)$$

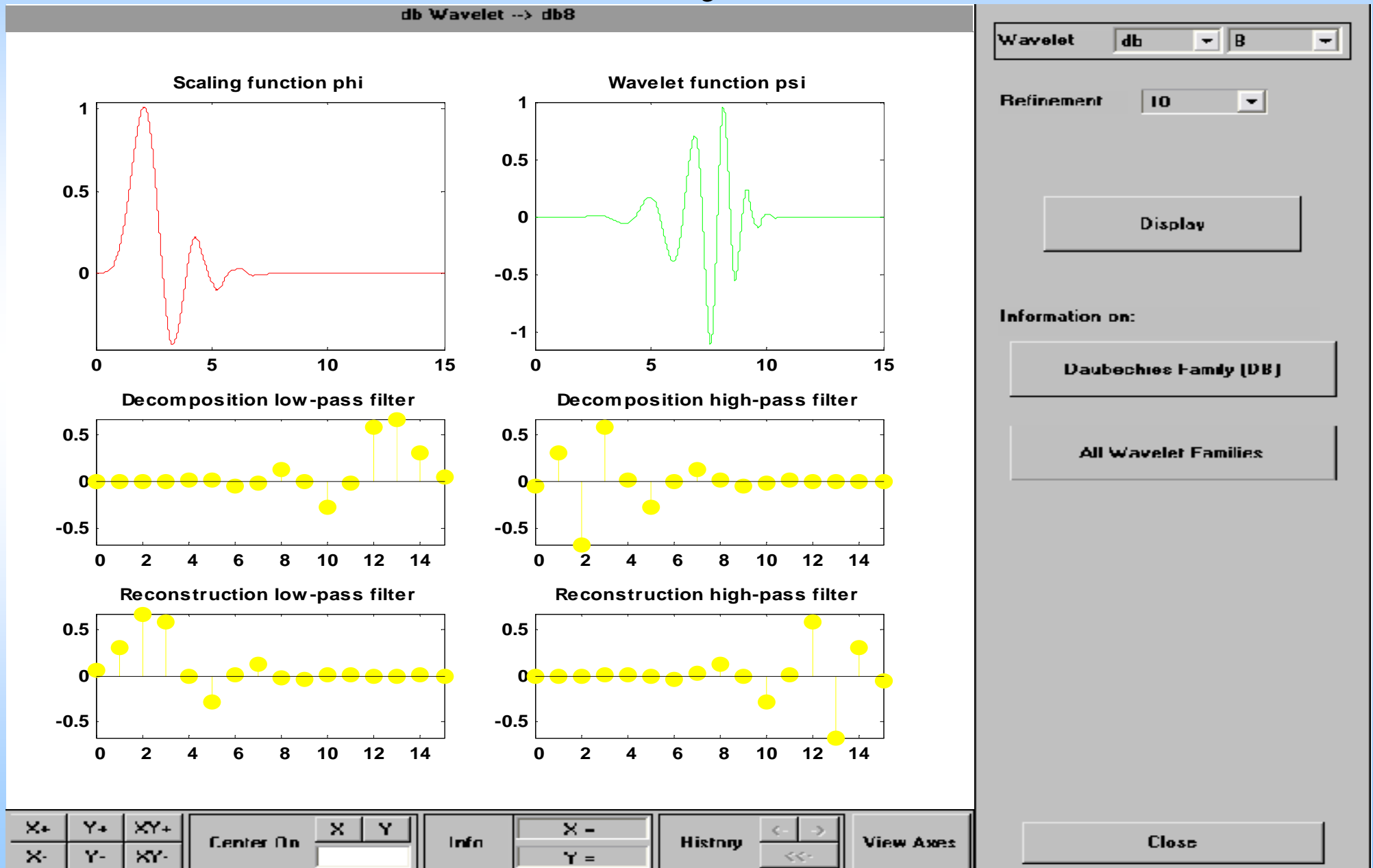
$$Lf[n, a^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \phi_j^*[m-n] = f[n] \otimes \phi_j^*[-n]$$

DWT: reconstrucción

- Con la descomposición con la función wavelet y la función de escala, se obtiene una representación completa
- La formula de reconstrucción es:

$$f[n] = \frac{\log_e a}{C_\psi} \sum_{j=1}^J \frac{1}{a^j} \sum_{m=0}^{N-1} Wf[m, a^j] \psi_j[n-m] \\ + \frac{1}{C_\psi a^j} \sum_{m=0}^{N-1} Lf[m, a^j] \phi_j[n-m]$$

Función Wavelet y de Escala



Transformada Wavelet Discreta

- Hasta aquí sólo se ha discretizado la escala
- Esto genera altísima redundancia
- Se suele también discretizar el dominio temporal
- Para esto la wavelet se modifica como sigue:

$$\psi_{j,k}[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{n - ka^j u_0}{a^j}\right)$$

- Esto genera un muestreo en intervalos $a^j u_0$

Transformada Wavelet Diádica (DDWT)

- Si se restringe el valor de a de manera que $a=2$, se obtiene la transformada Wavelet Diádica
- Esta transformada no se evalúa siguiendo la ecuación de la transformada discreta, sino que se utiliza un algoritmo basado en filtrado pasabajo con un filtro h y pasaaltos con un filtro g obtenidos la función de escala y de la wavelet madre respectivamente.

Algoritmo para la TW DDWT

- A partir de los filtros h y g se pueden verificar las siguientes ecuaciones:

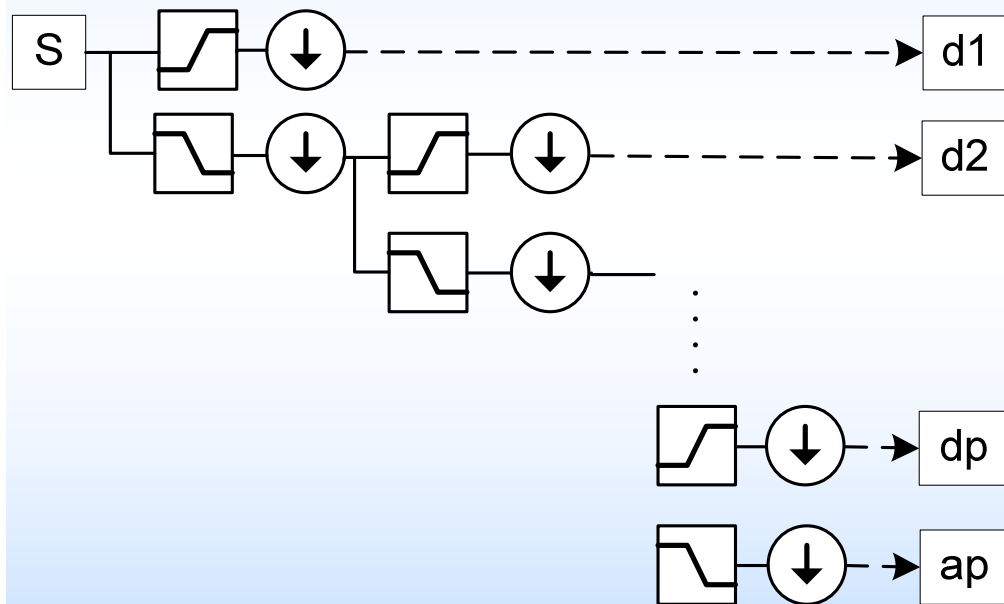
$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p]a_j[n]$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p]a_j[n]$$

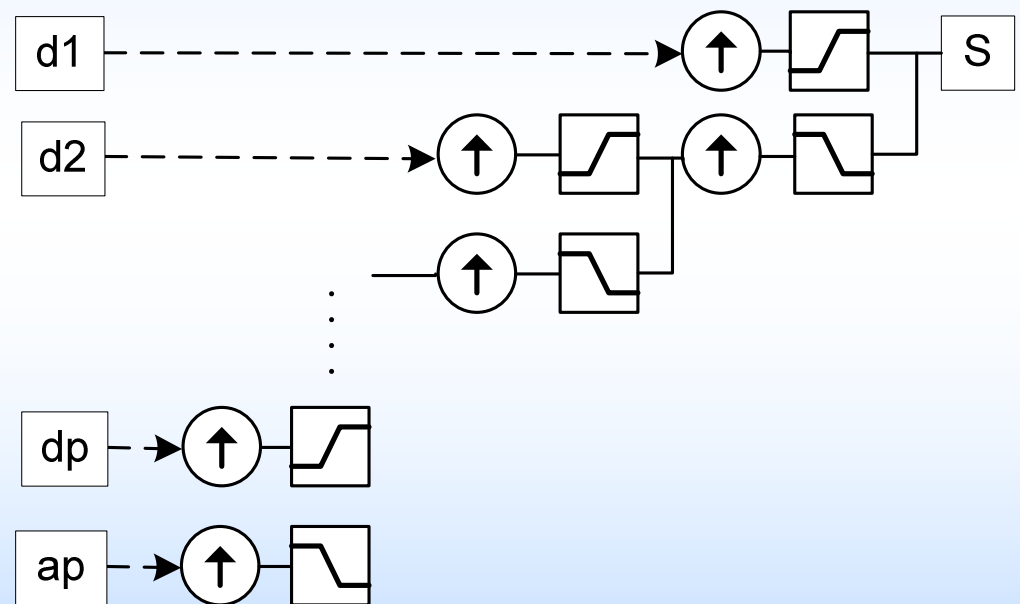
y para la reconstrucción

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n]a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n]d_{j+1}[n]$$

Algoritmo para TW diádica

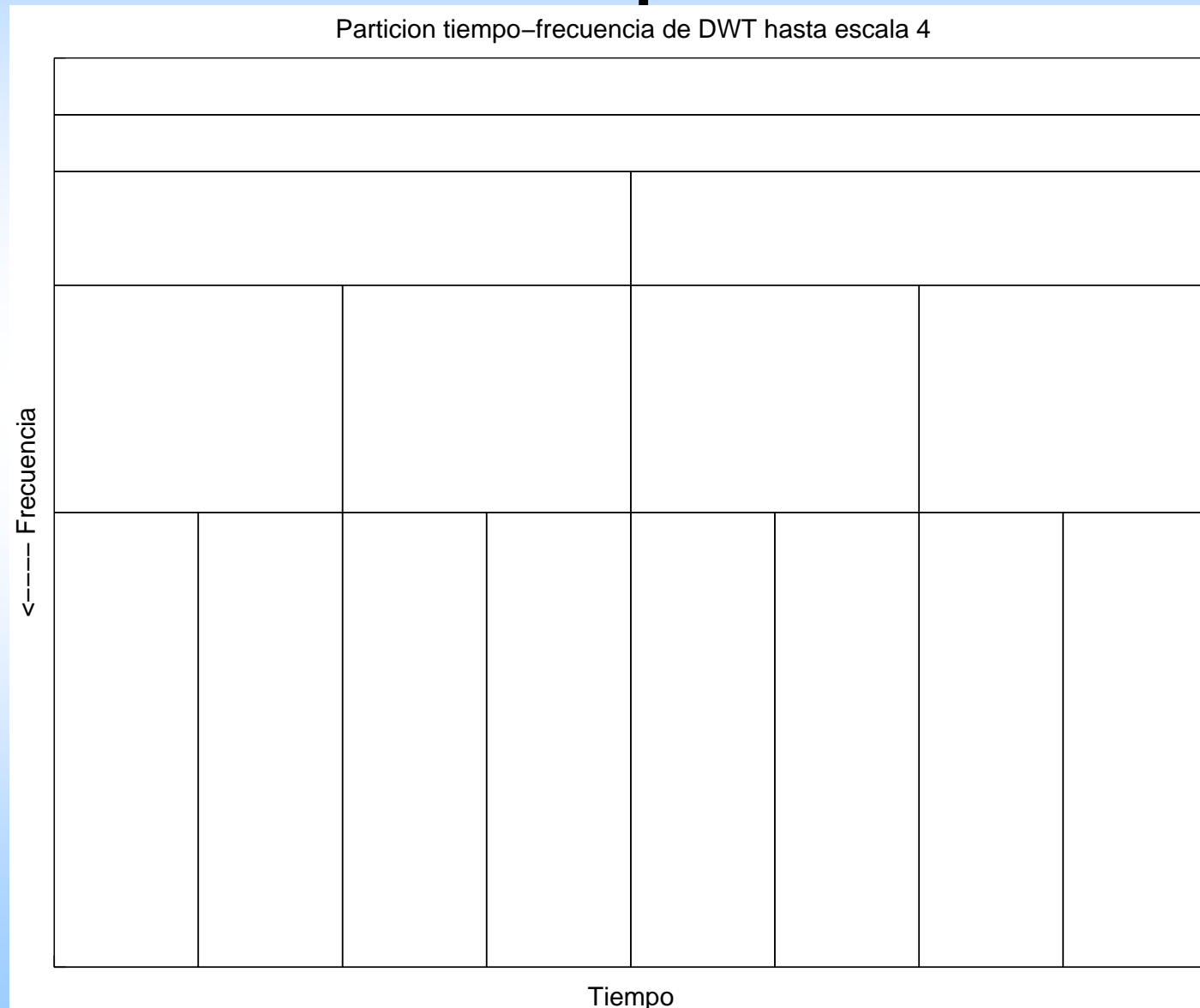


Decomposición DWT

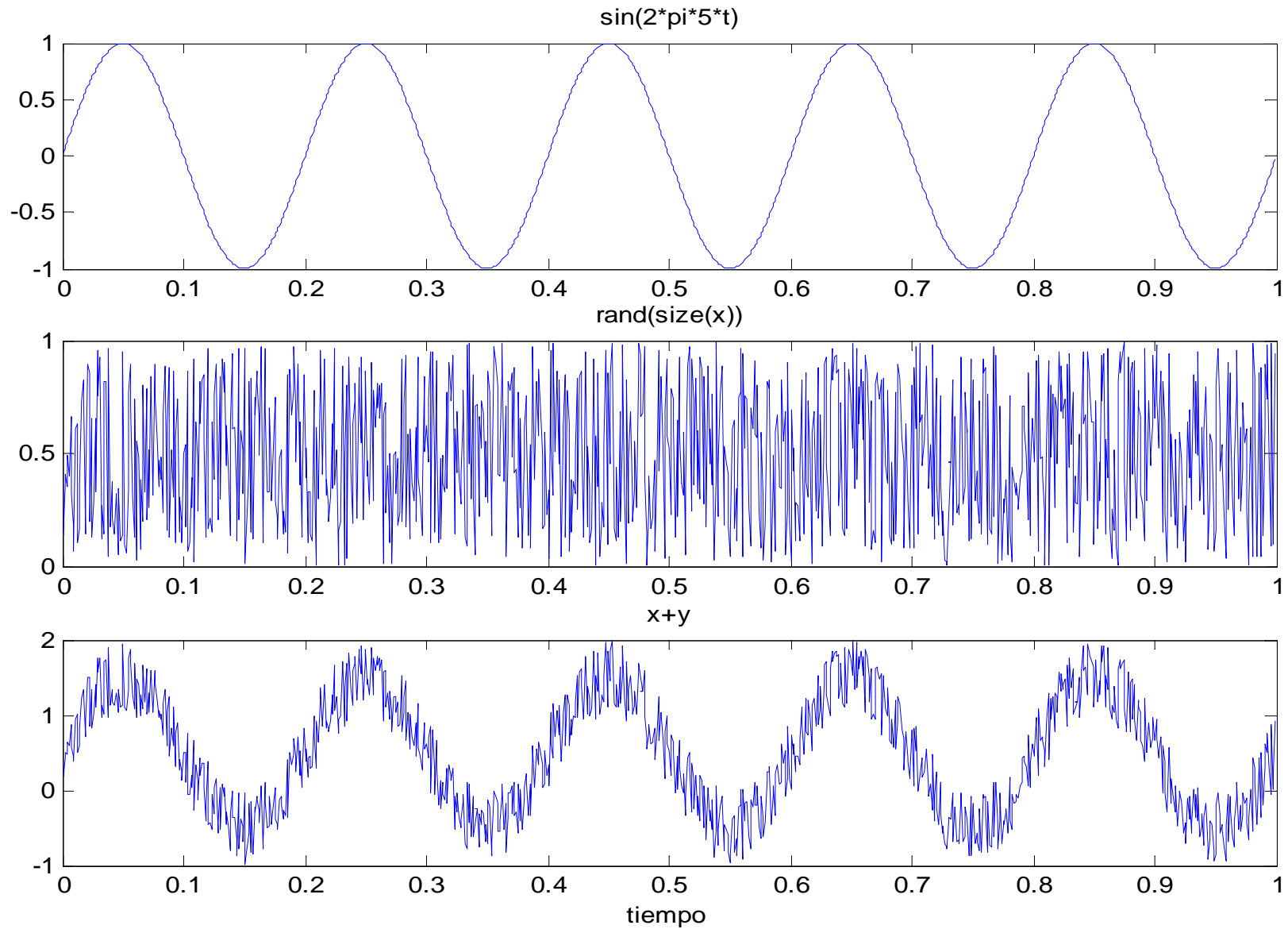


Reconstrucción IDWT

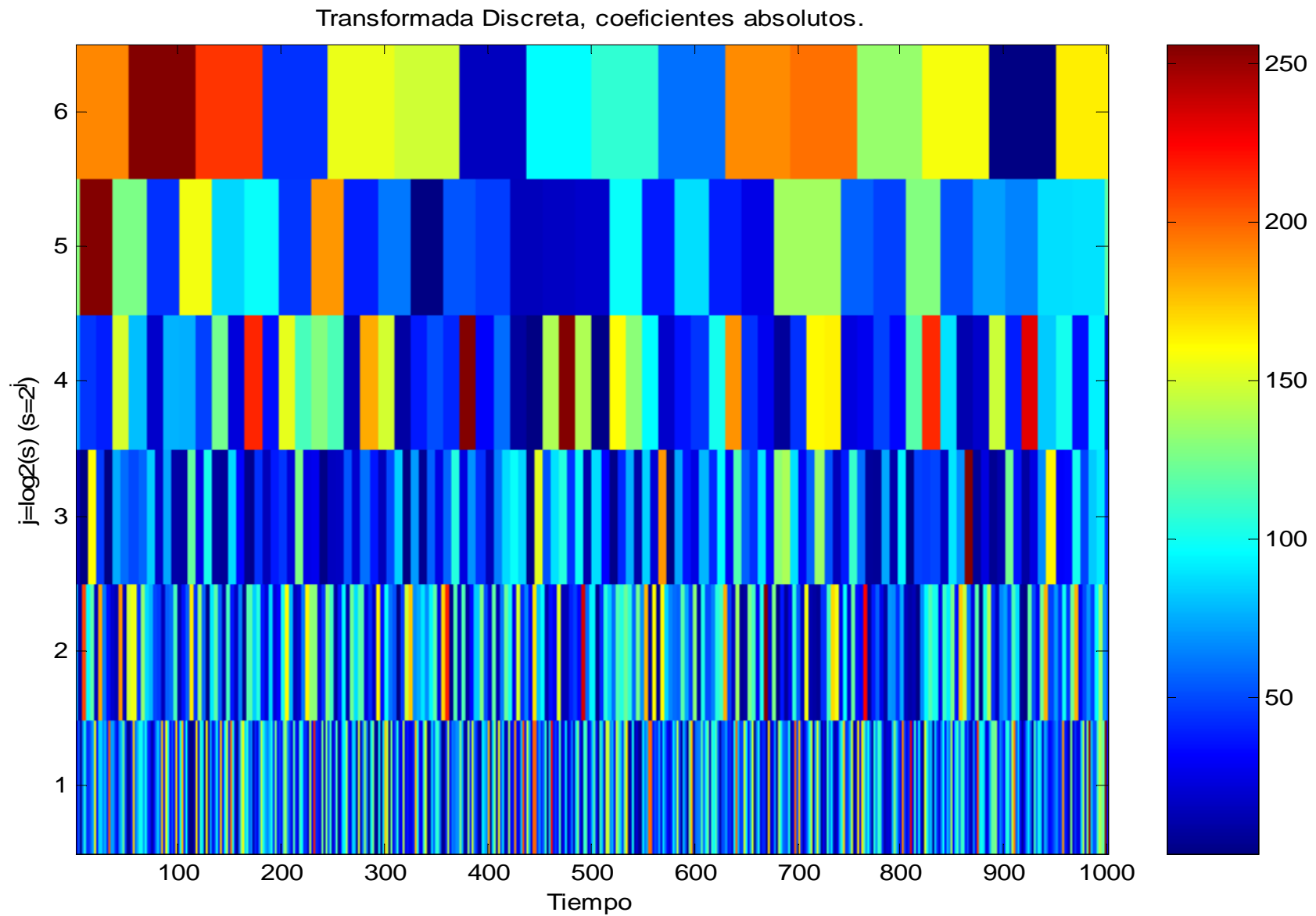
Cuadrícula tiempo-frecuencia



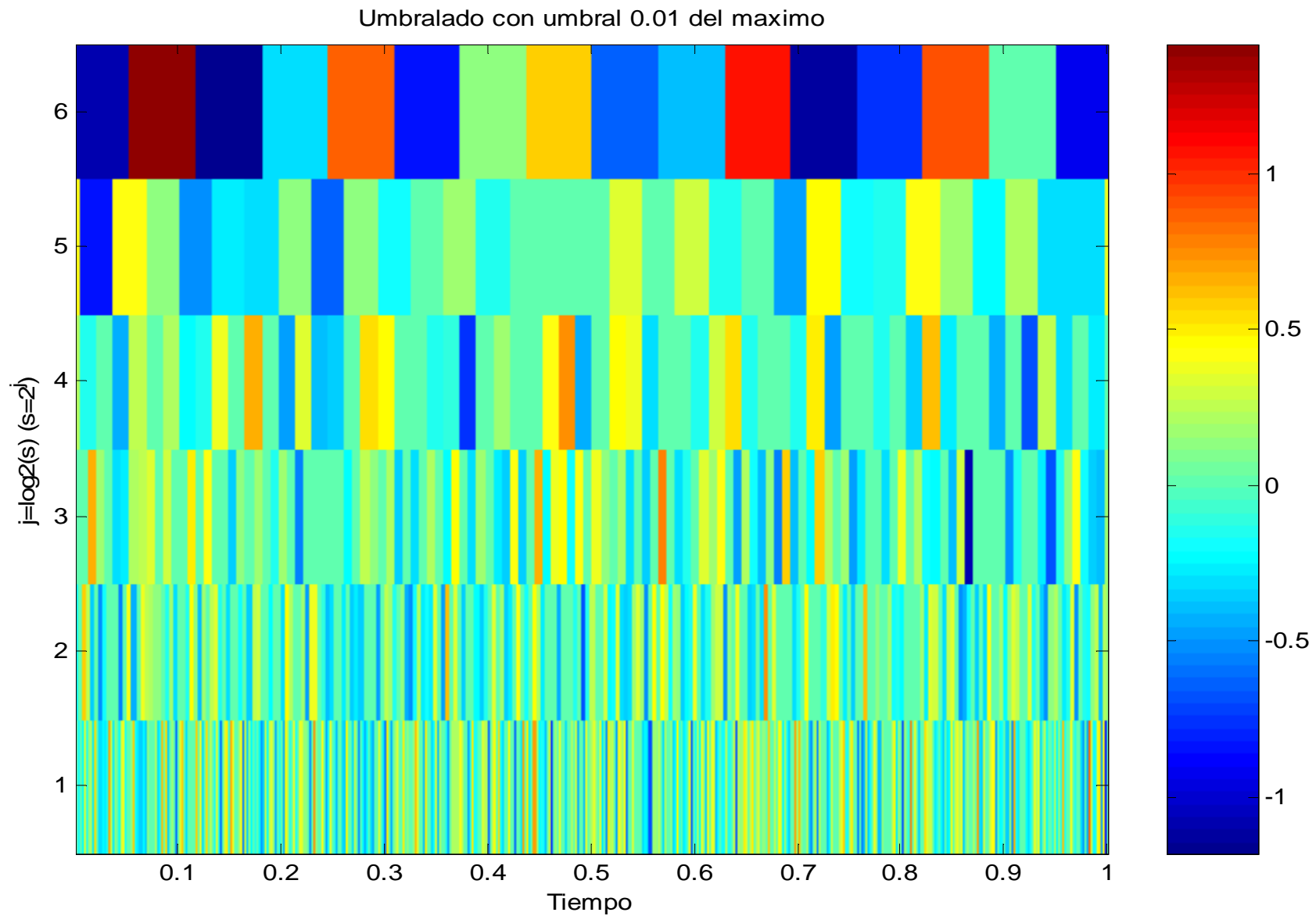
Ej.: Denoising



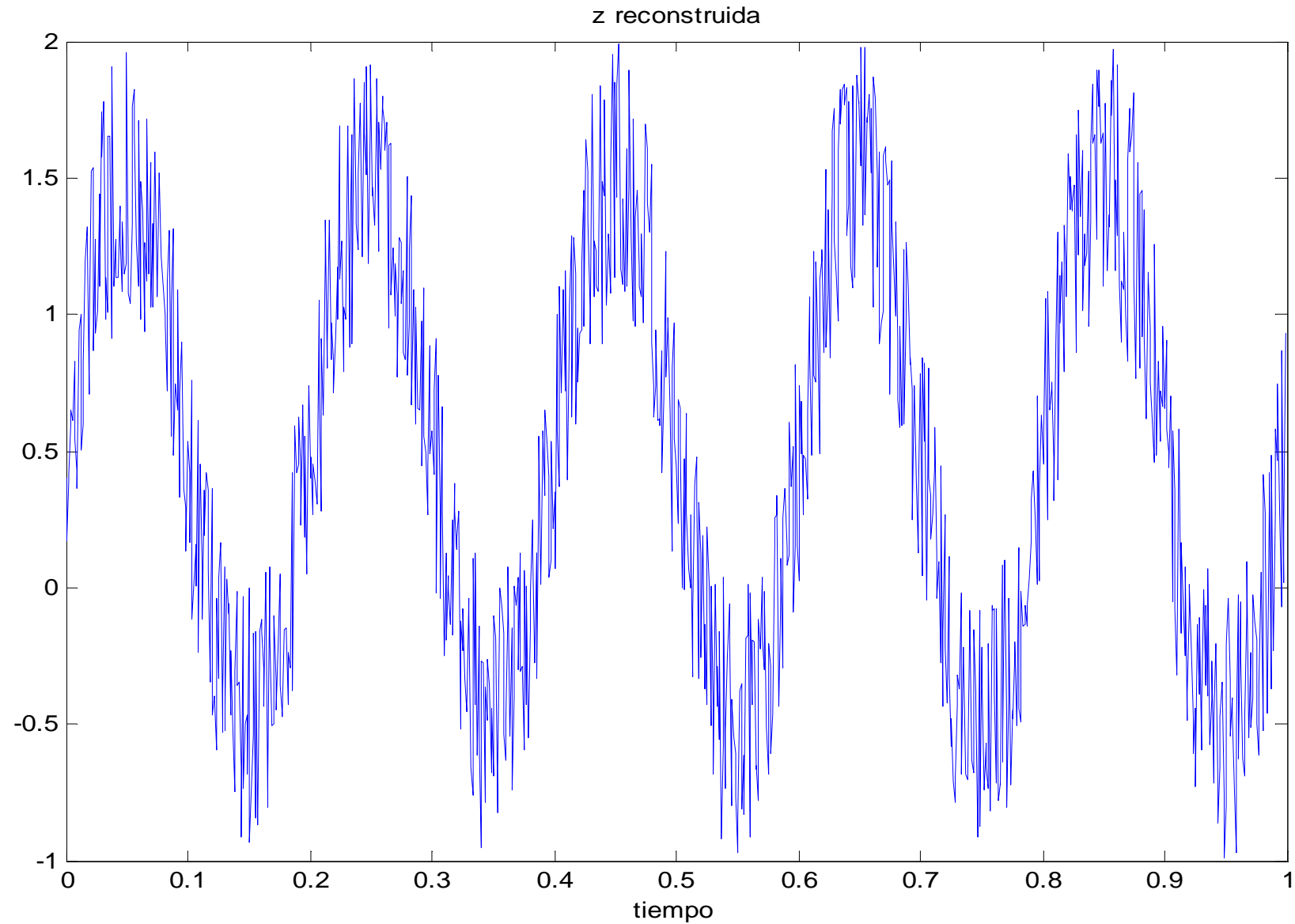
Ej.: Denoising



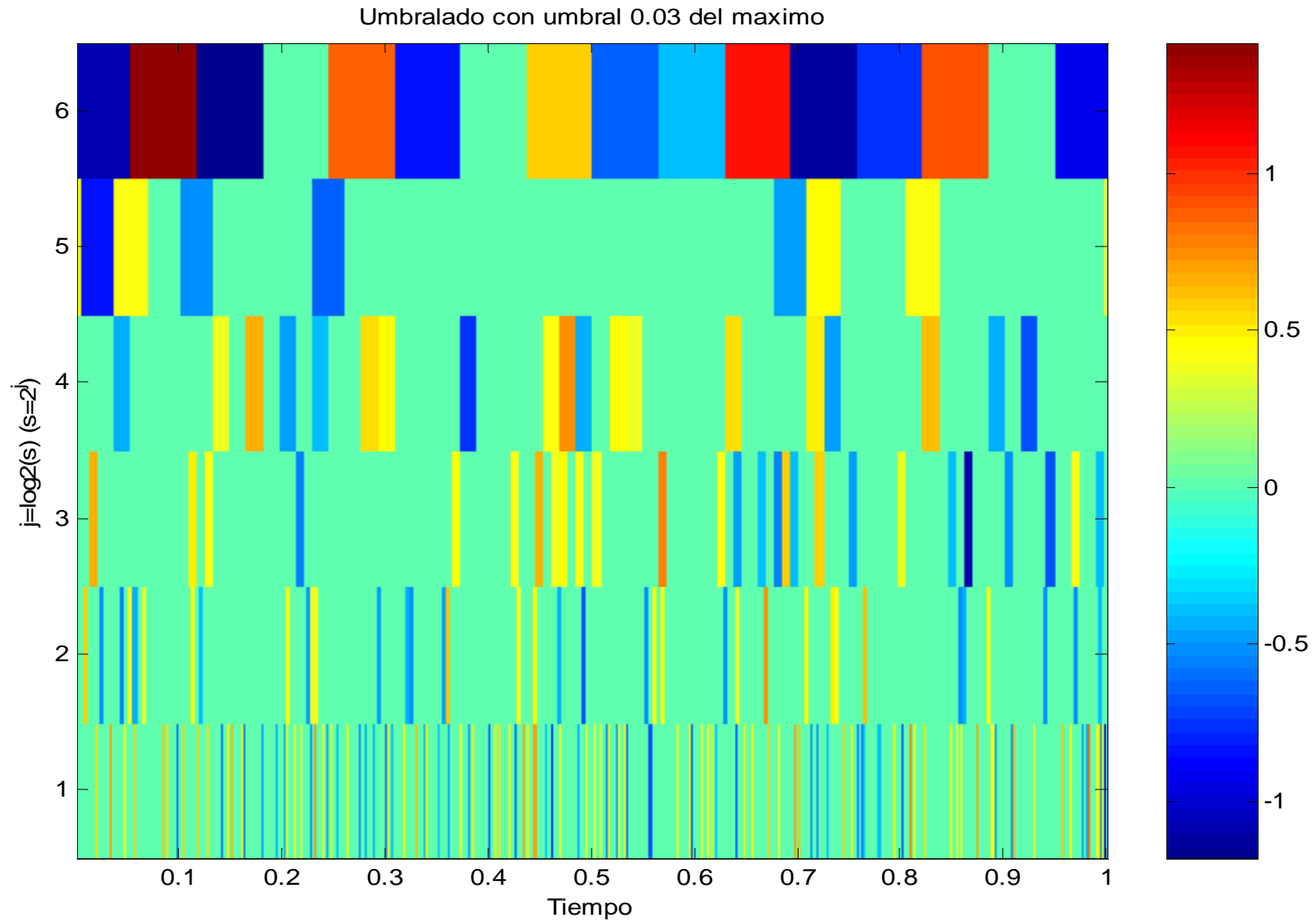
Ej.: Denoising



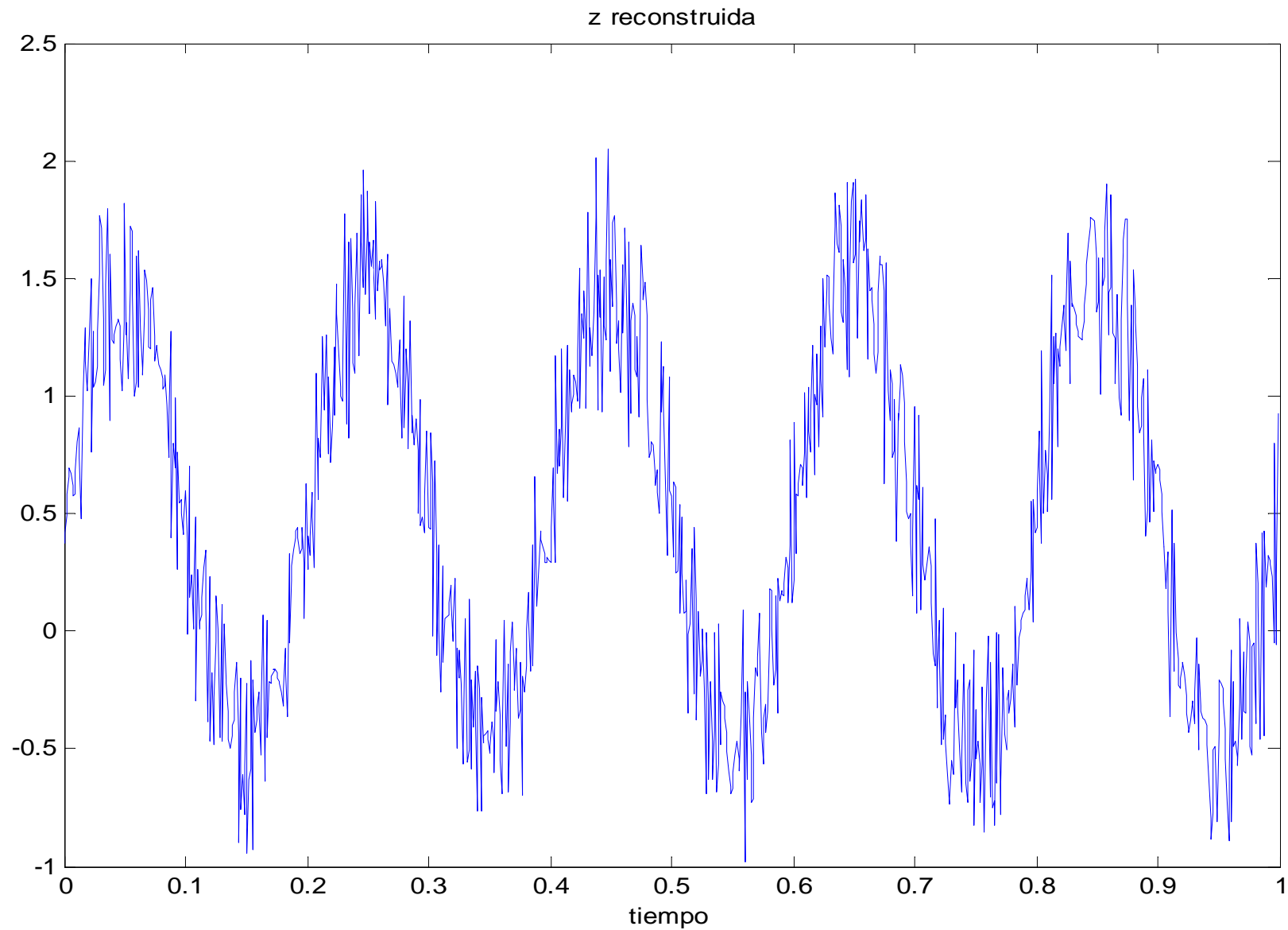
Ej.: Denoising



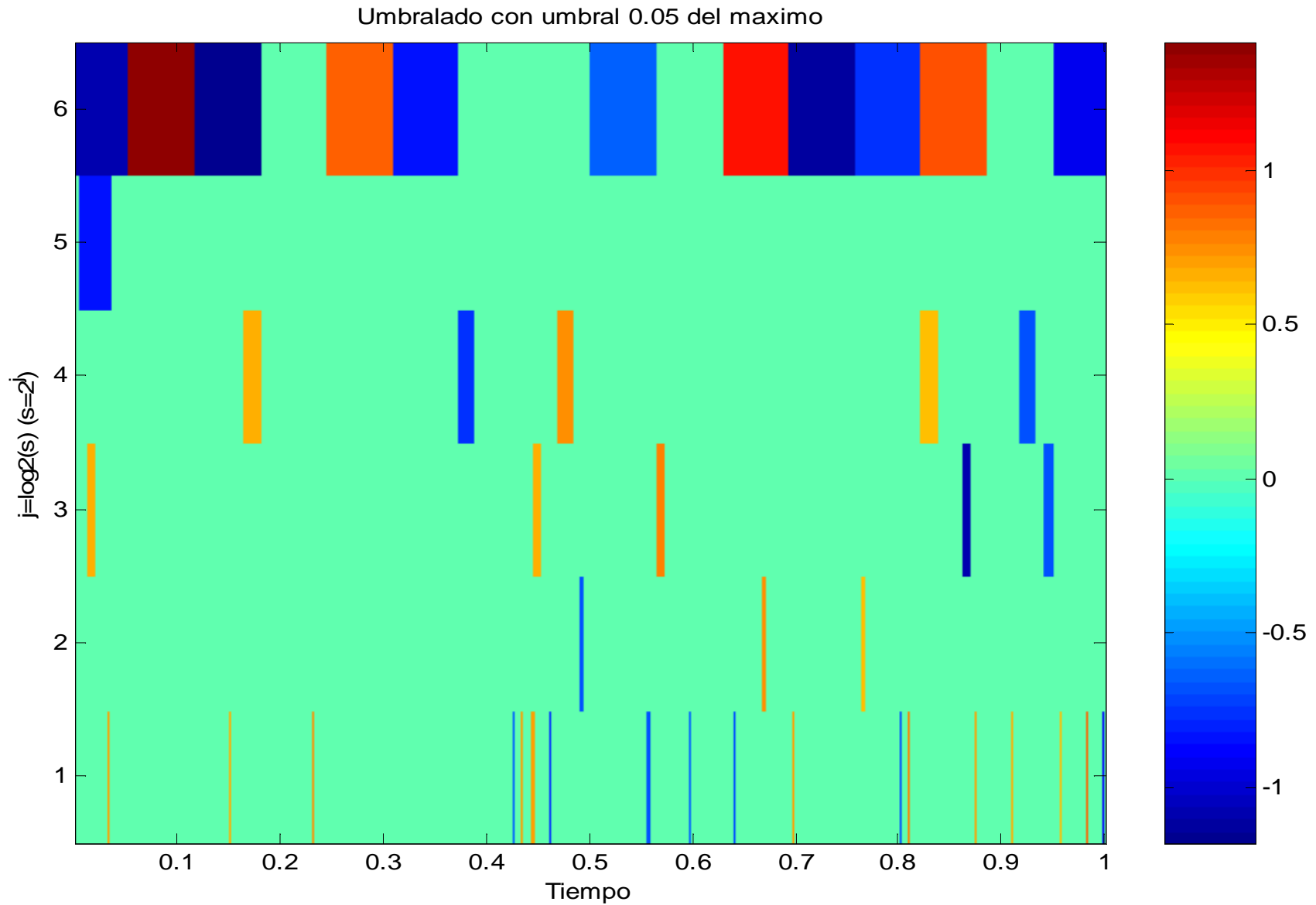
Ej.: Denoising



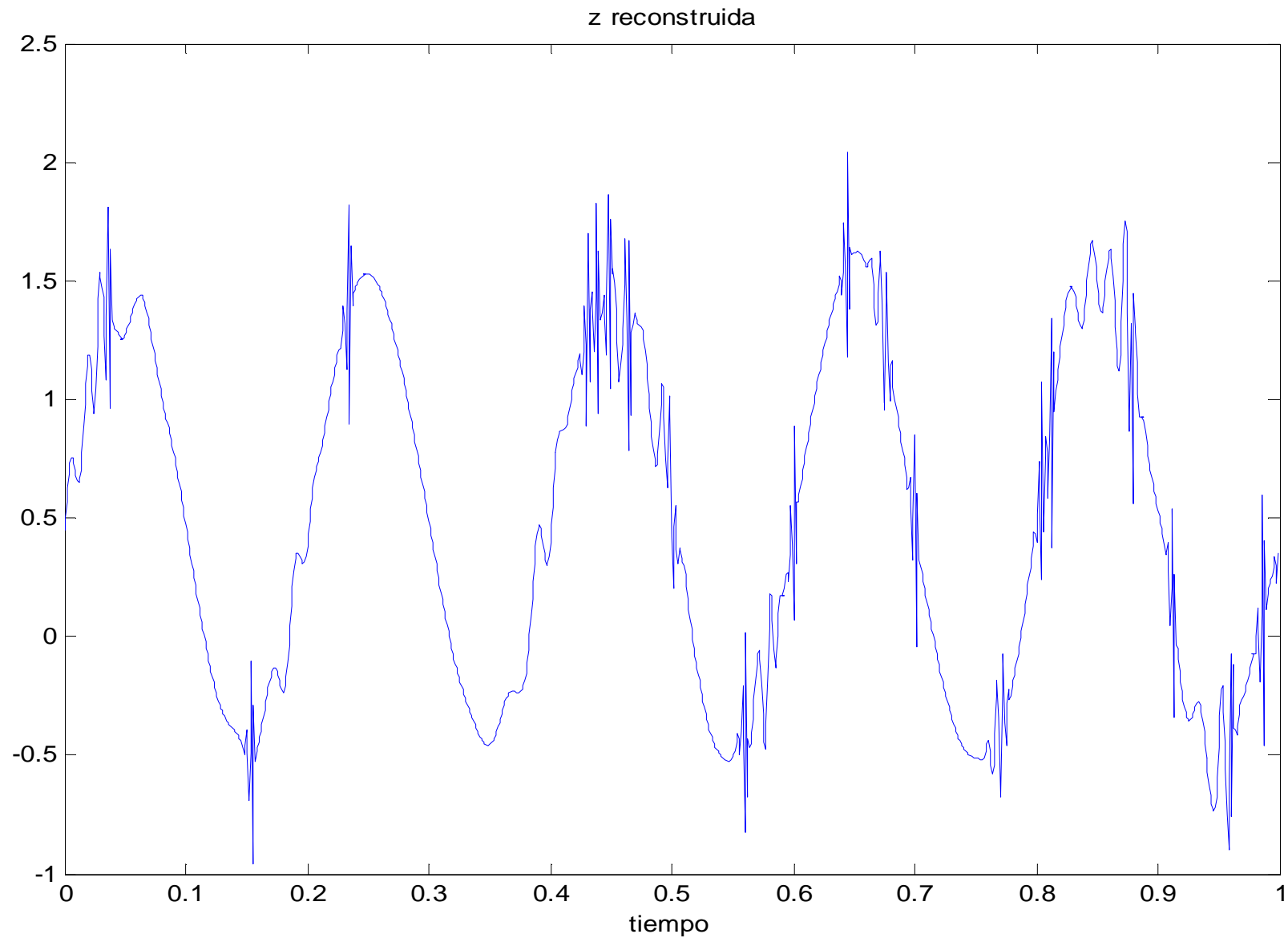
Ej.: Denoising



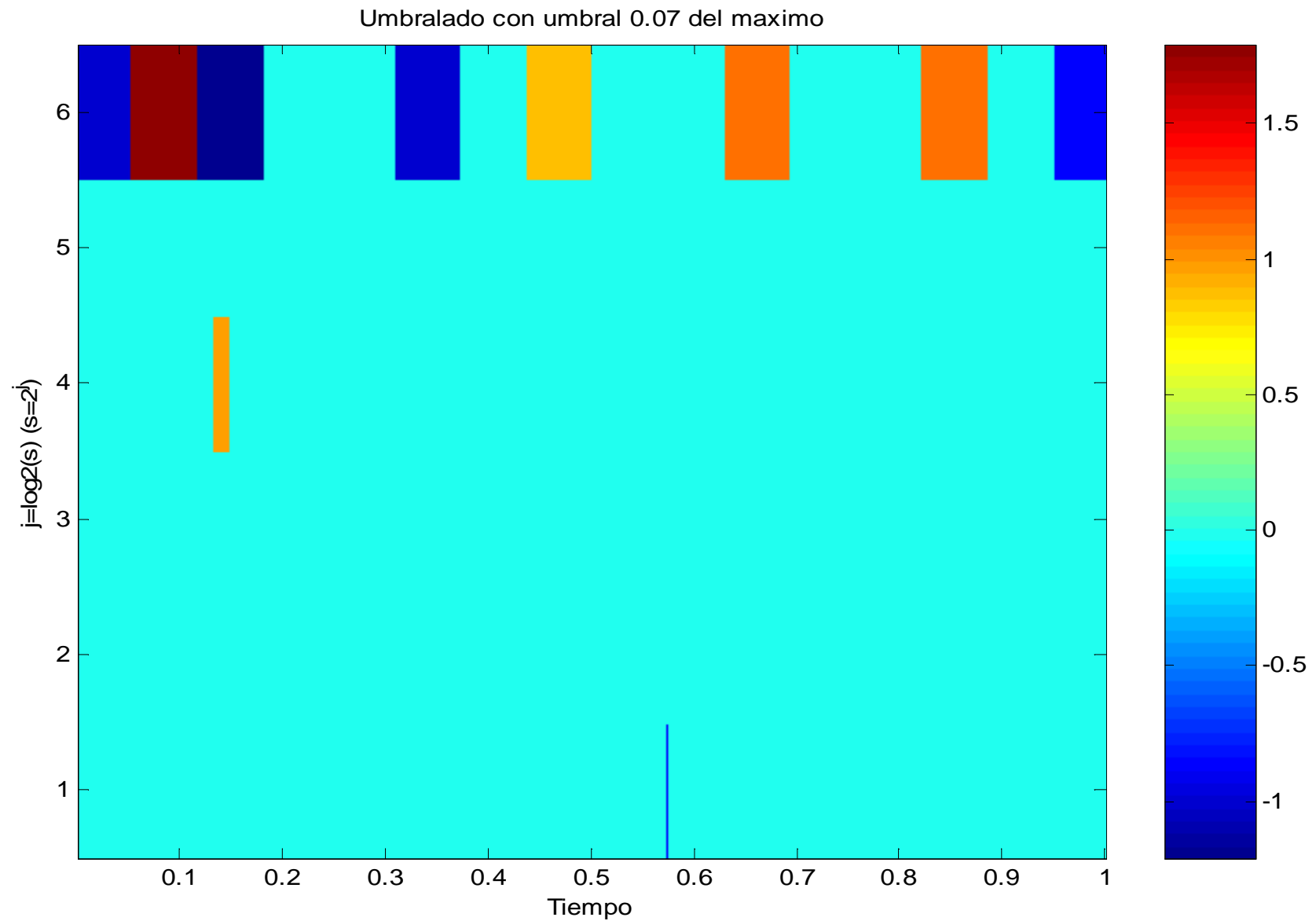
Ej.: Denoising



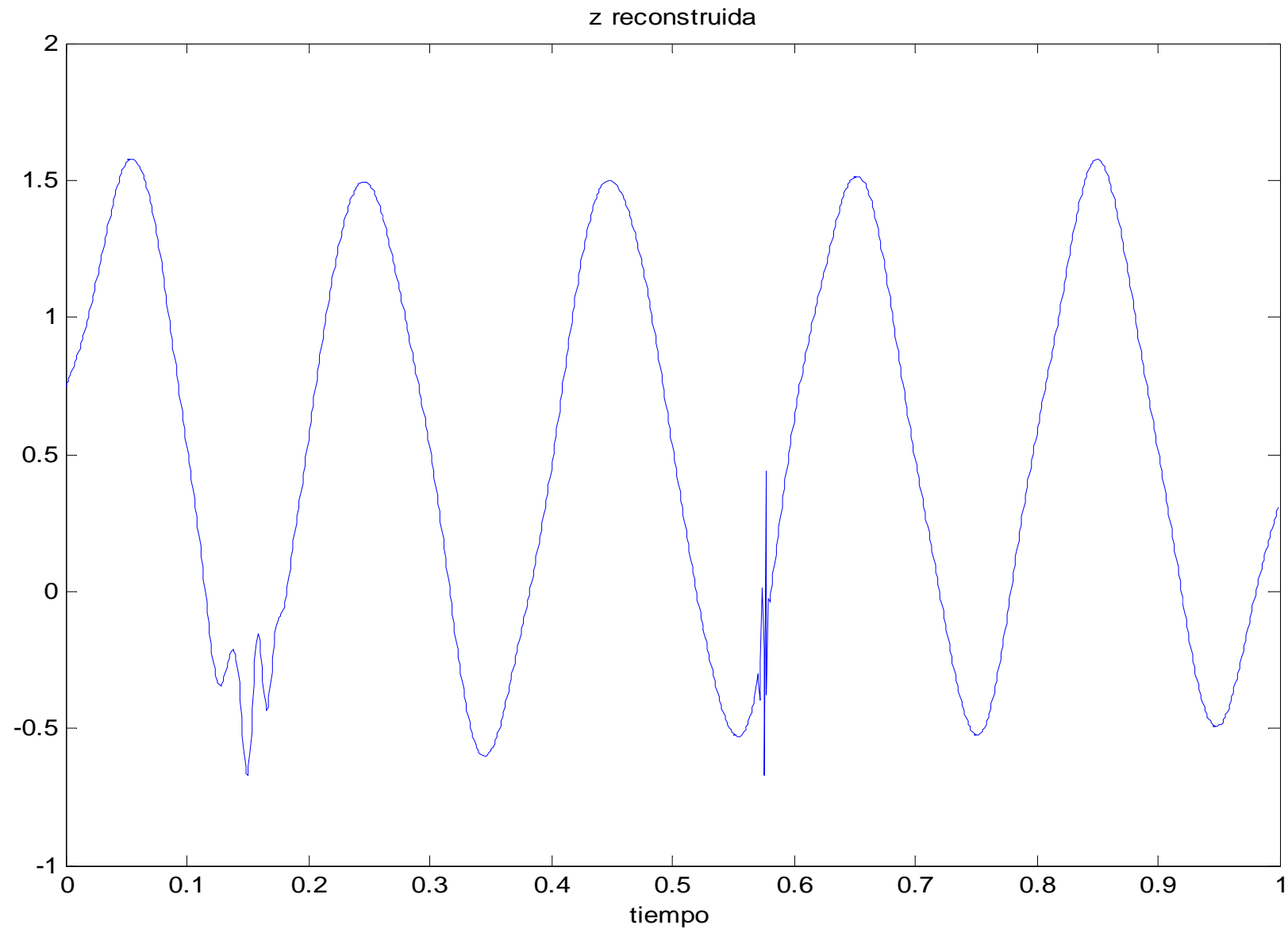
Ej.: Denoising



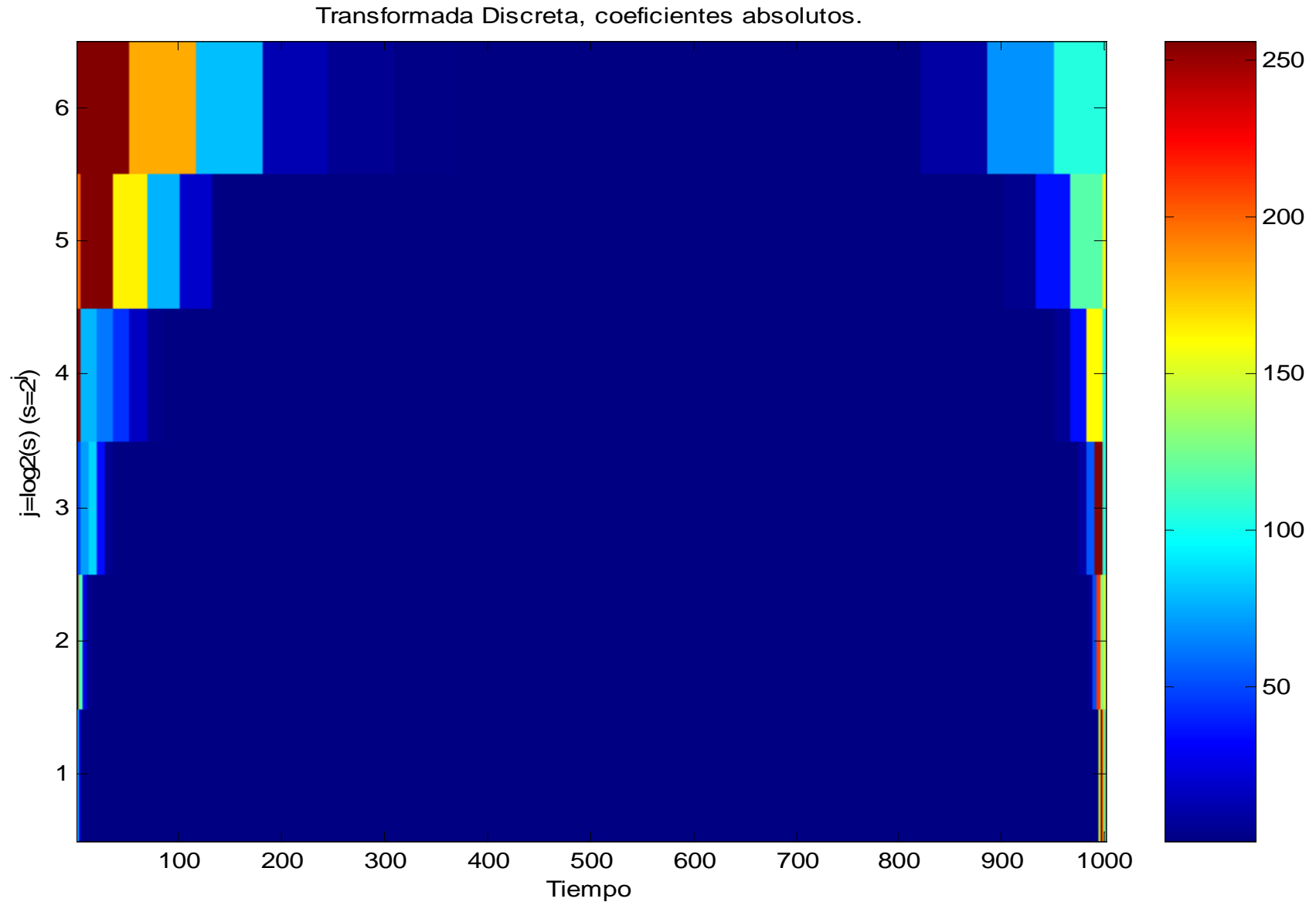
Ej.: Denoising



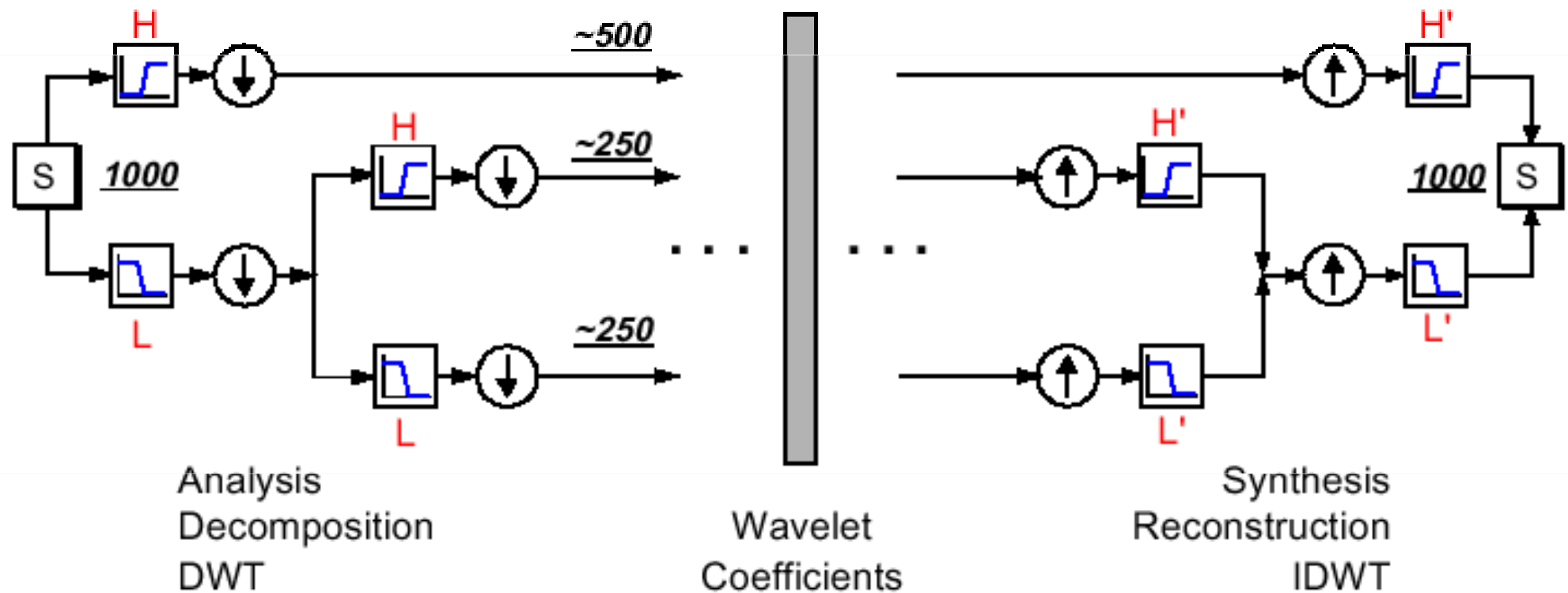
Ej.: Denoising



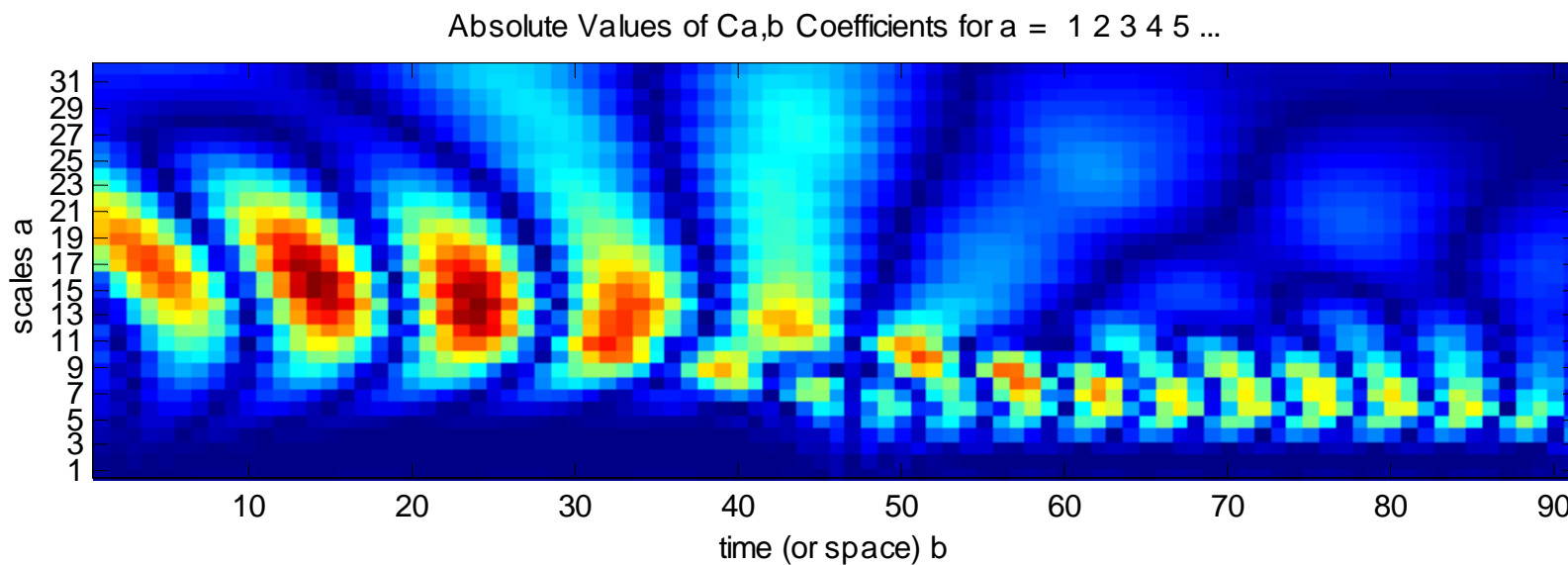
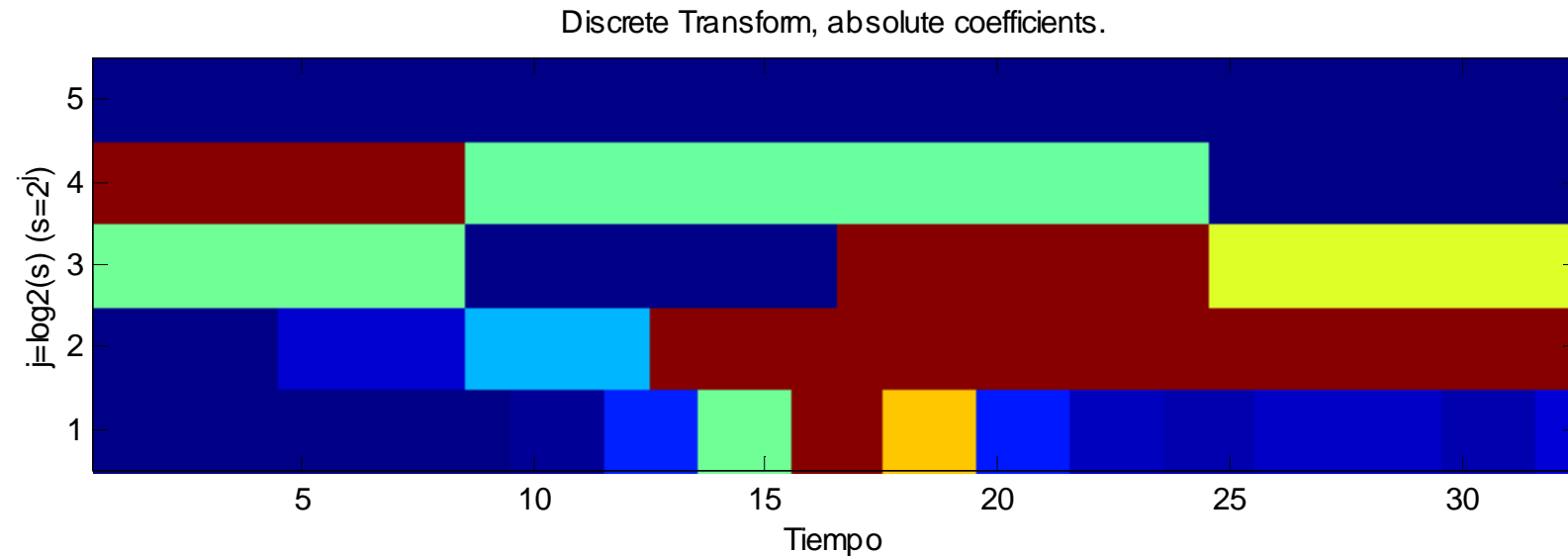
Ej.: Denoising



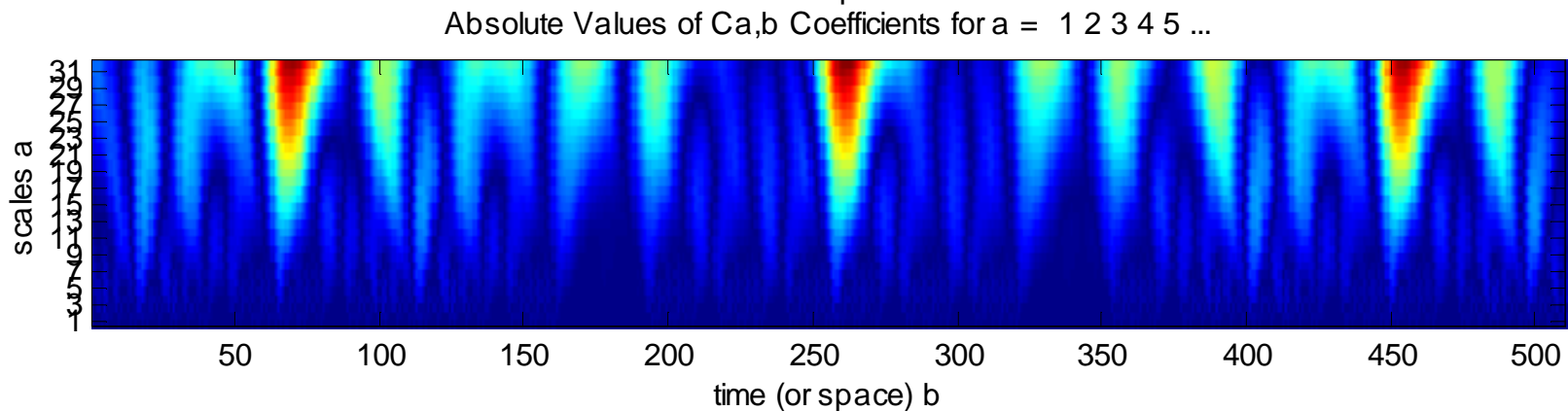
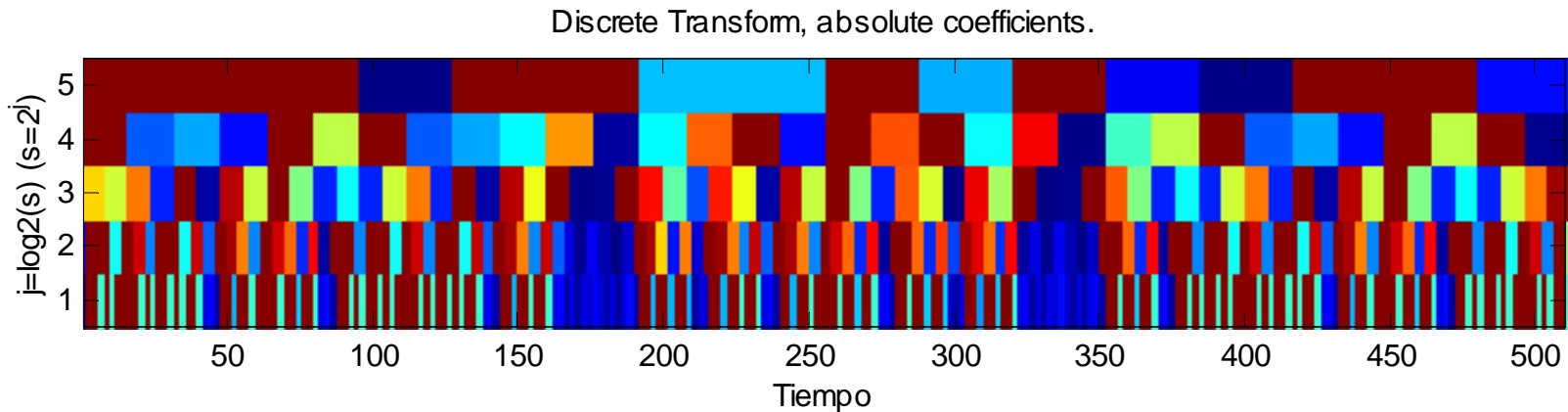
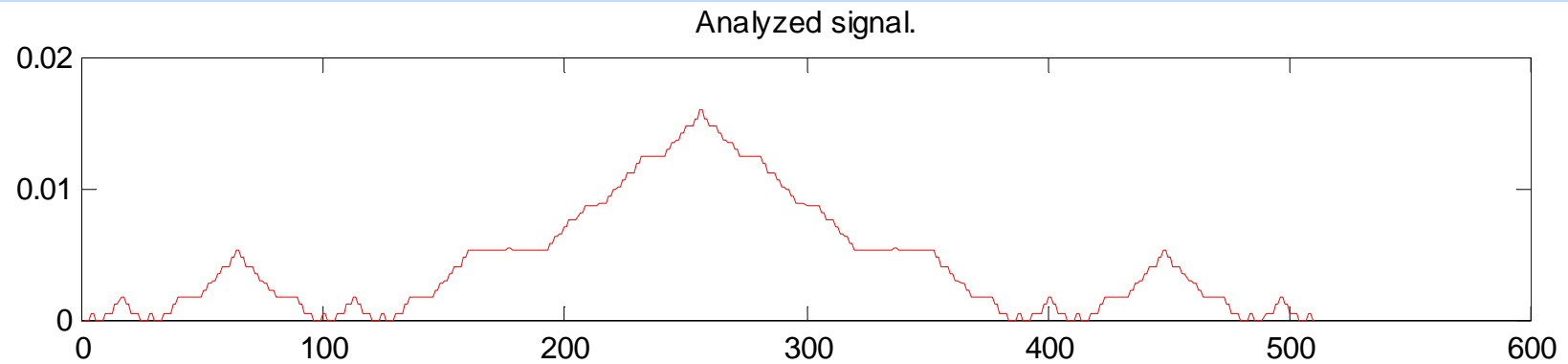
Transformada Wavelet Diádica



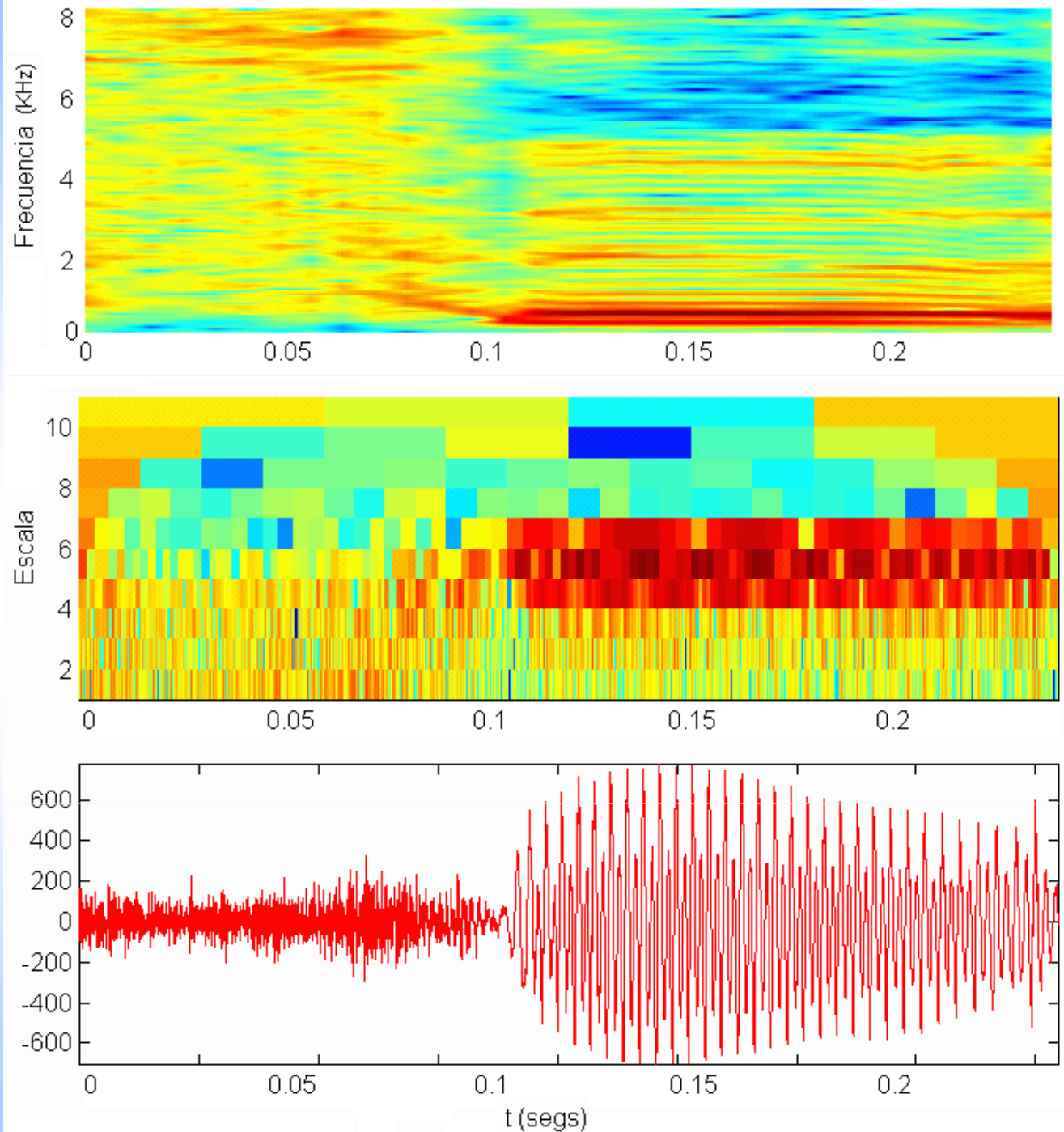
Comparación Discreta-Diádica



Comparación Discreta-Diádica



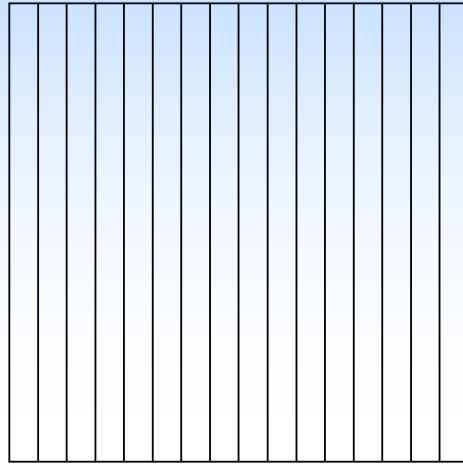
Comparación Espectrograma – DDWT



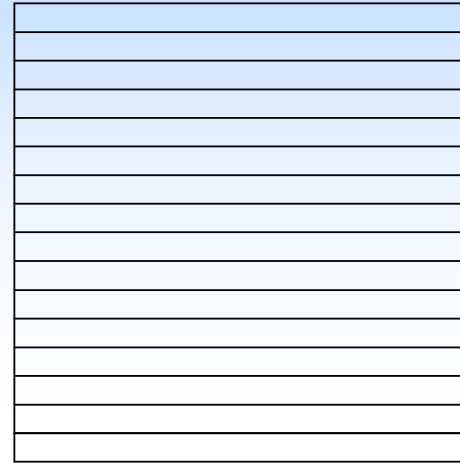
Aplicaciones

- Denoising
- Compresión
- Análisis multirresolución
- Reconocimiento del habla
- Detección de frecuencia instantánea
- Fractales
- Etc.

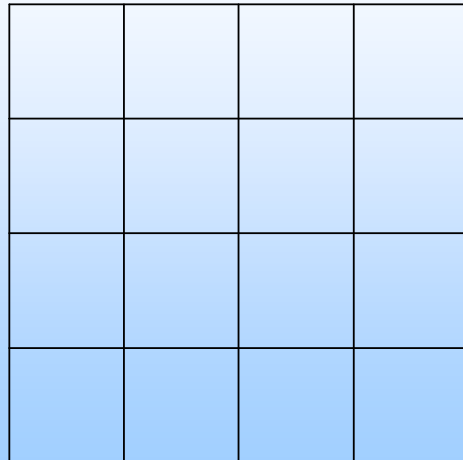
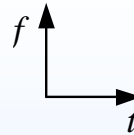
Cuadriculas tiempo-frecuencia



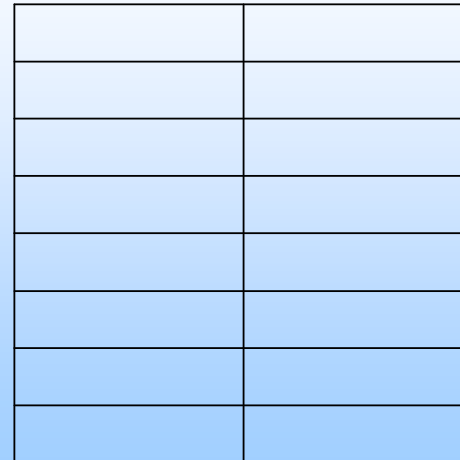
Dirac



Fourier

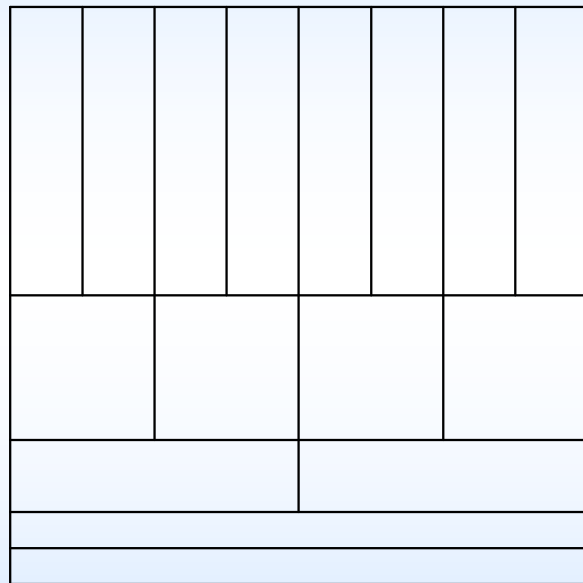


STFT (banda ancha)

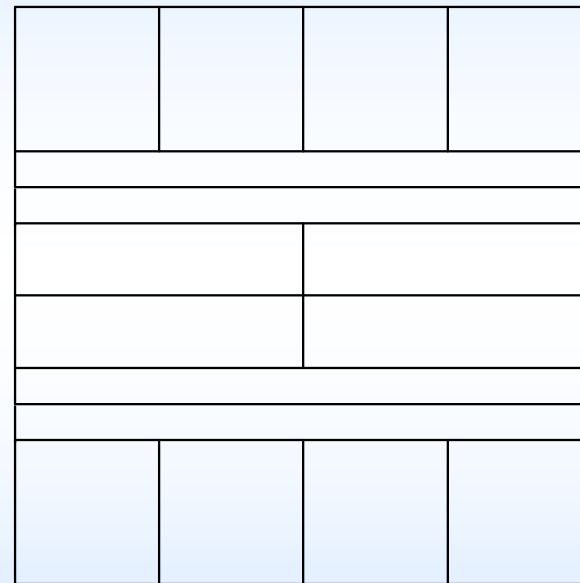


STFT (banda angosta)

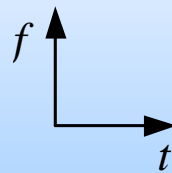
Cuadrículas tiempo-frecuencia



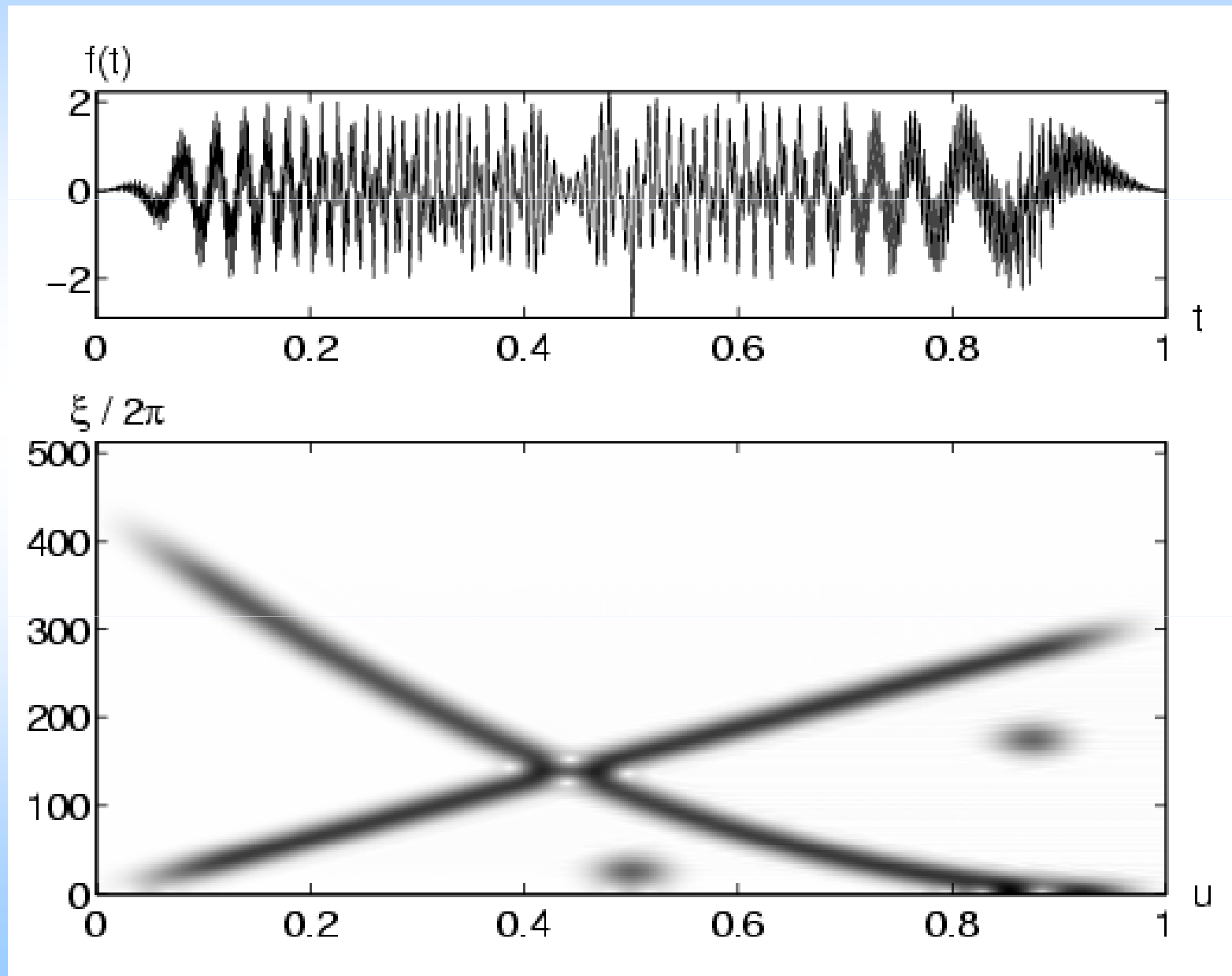
WD



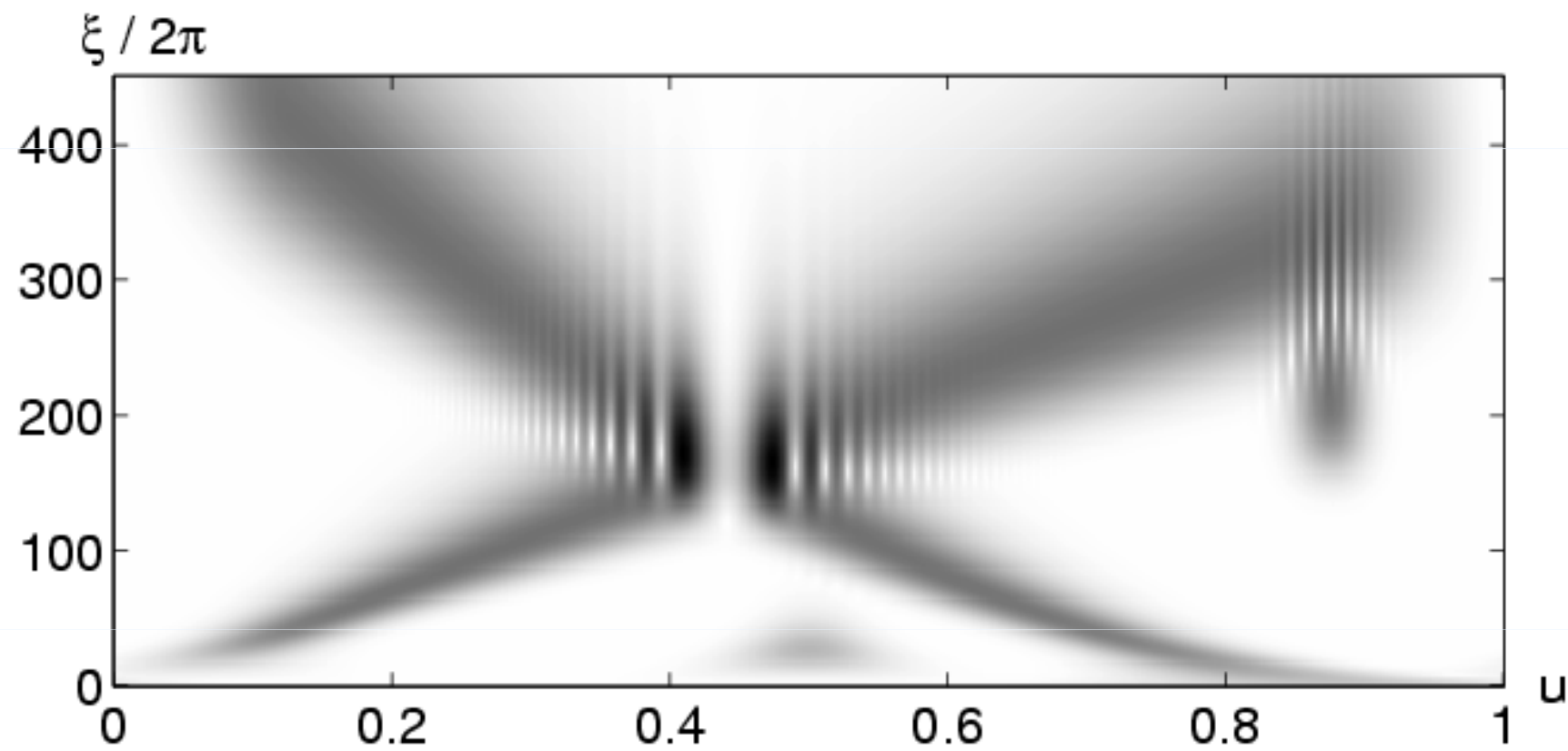
WP



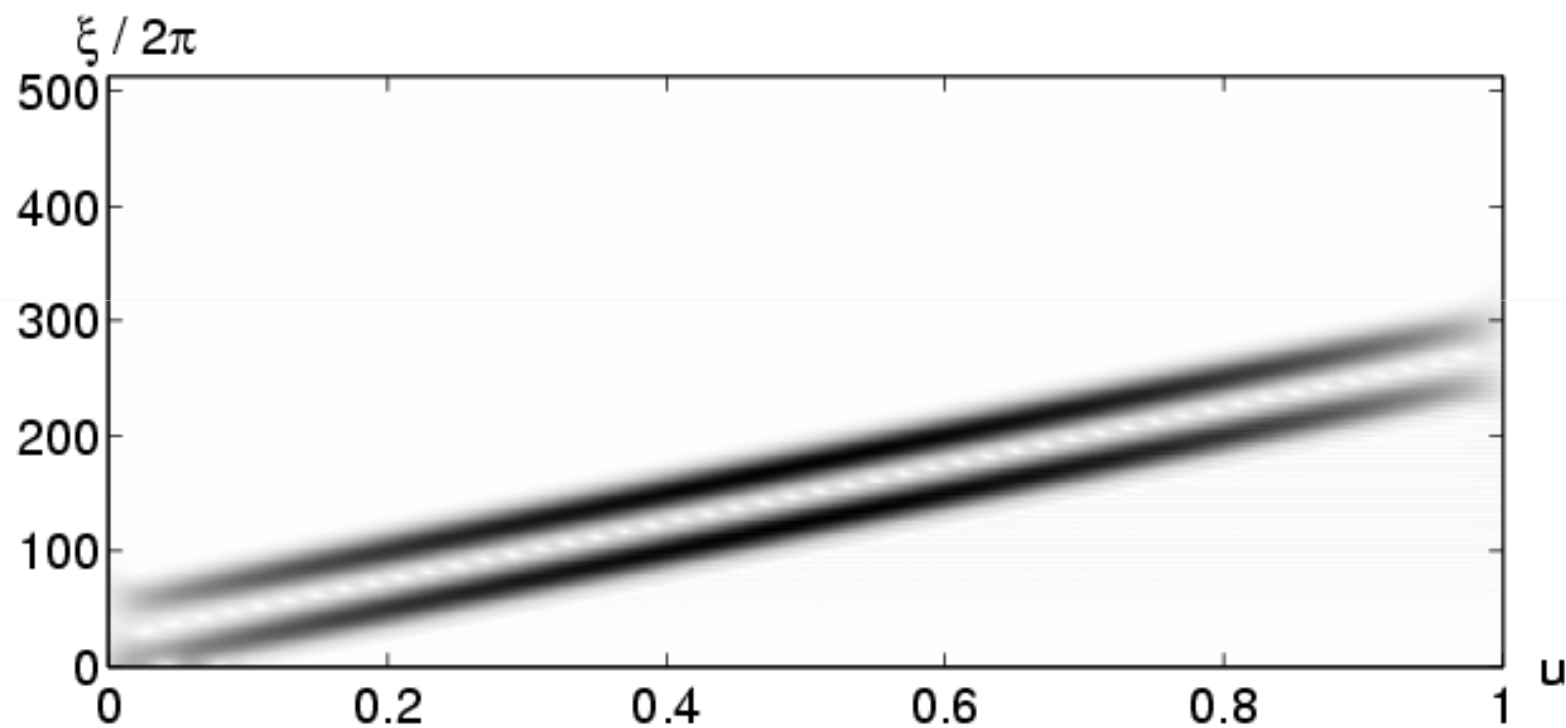
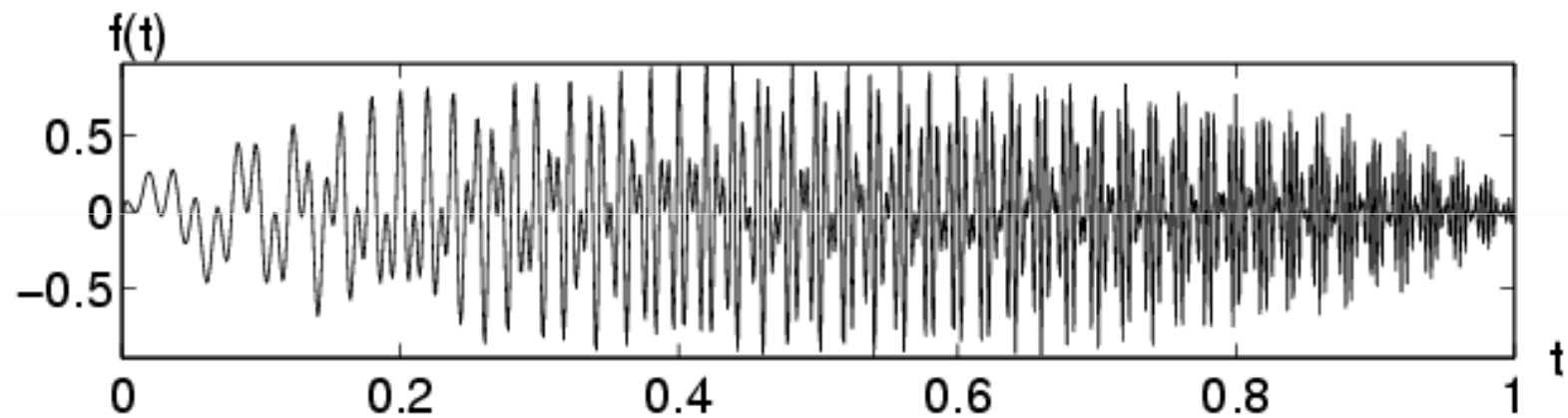
Ejemplos



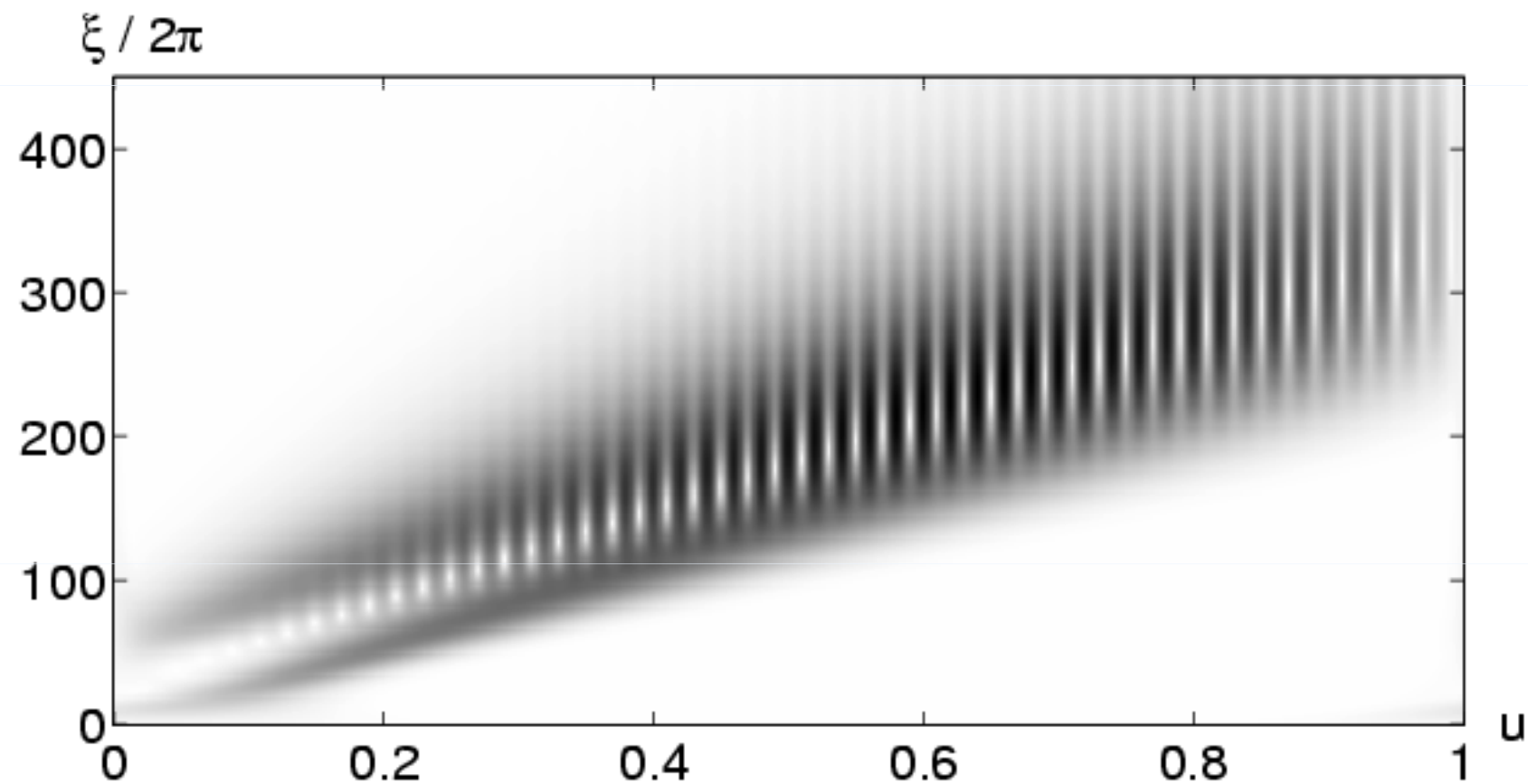
Ejemplos



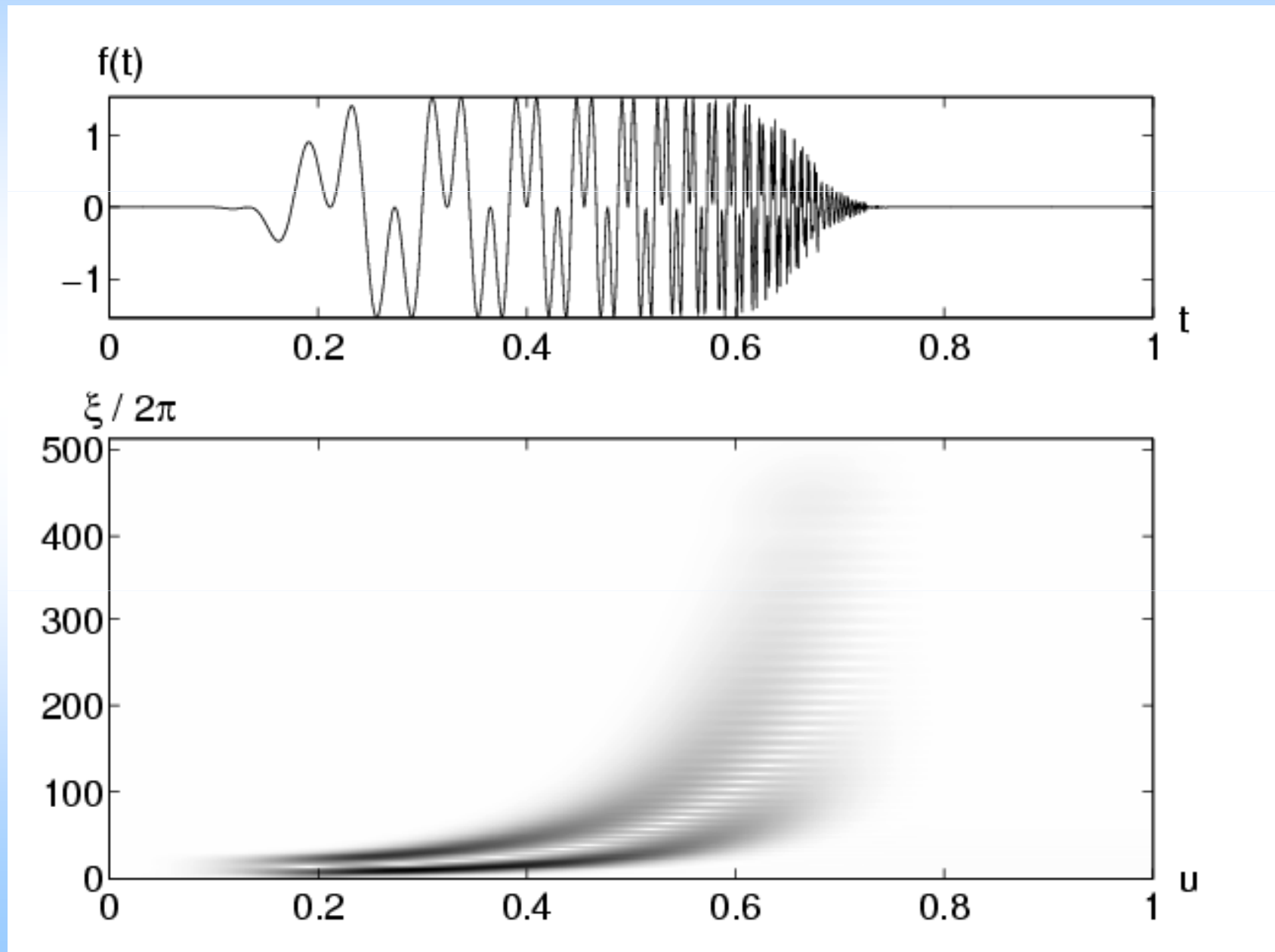
Ejemplos



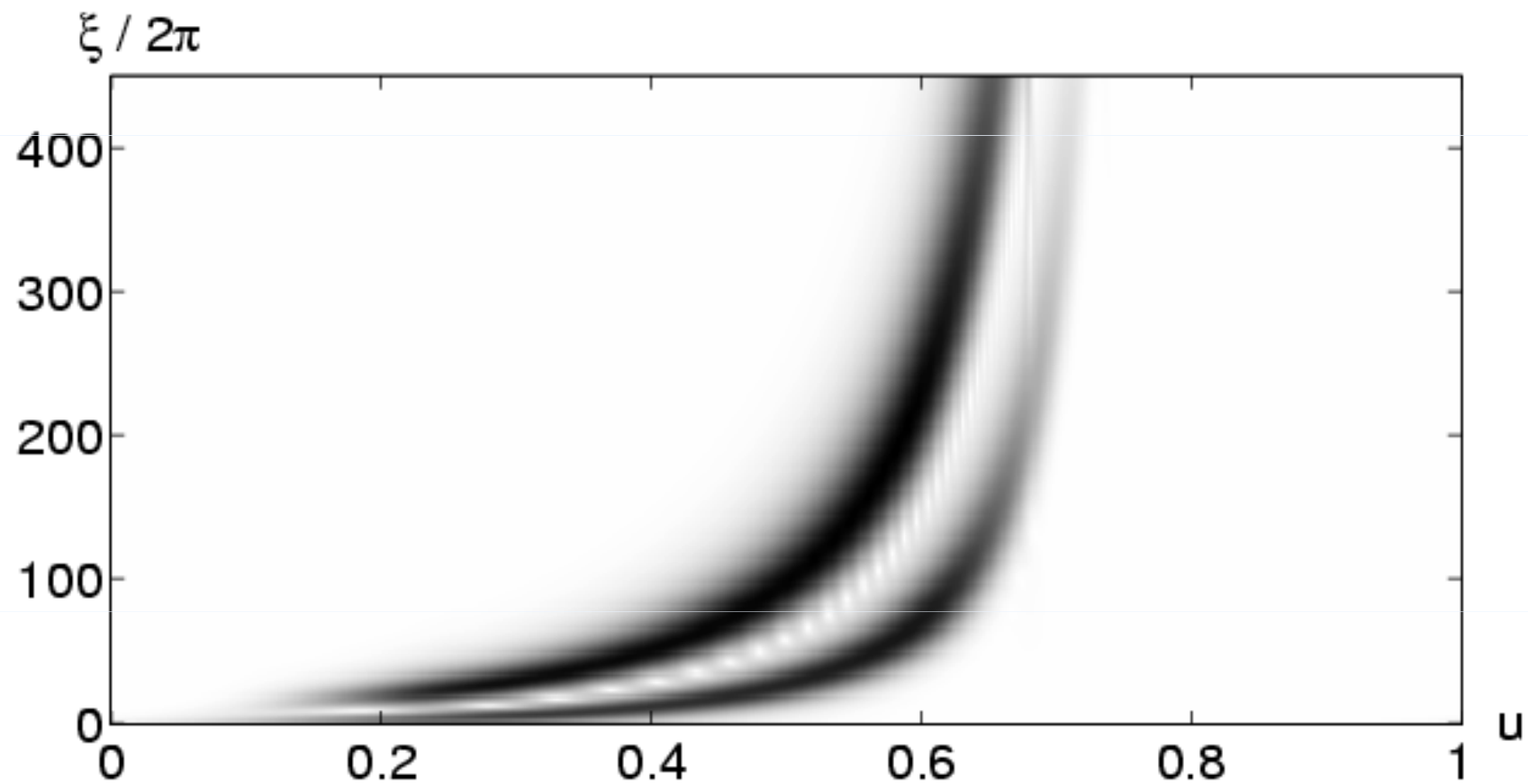
Ejemplos



Ejemplos



Ejemplos



Distribución de Wigner-Ville

- Otra de las representaciones tiempo-frecuencias clásicas para el análisis de señales
- Ventana: versión desplazada de la misma señal.
- Se analiza comparando la información de la señal con su propia información en otros instantes

Distribución de Wigner-Ville

Se define como:

$$P_v f(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\xi\tau} d\tau$$

Su versión discreta esta dada por:

$$P_v f[n, k] = \sum_{p=-N}^{N-1} f\left[n + \frac{p}{2}\right] f^*\left[n - \frac{p}{2}\right] e^{\frac{-i2\pi kp}{N}}$$

Como ésta requiere conocer los valores en muestras intermedias, se recurre a una interpolación en frecuencias agregando ceros entre cada muestra

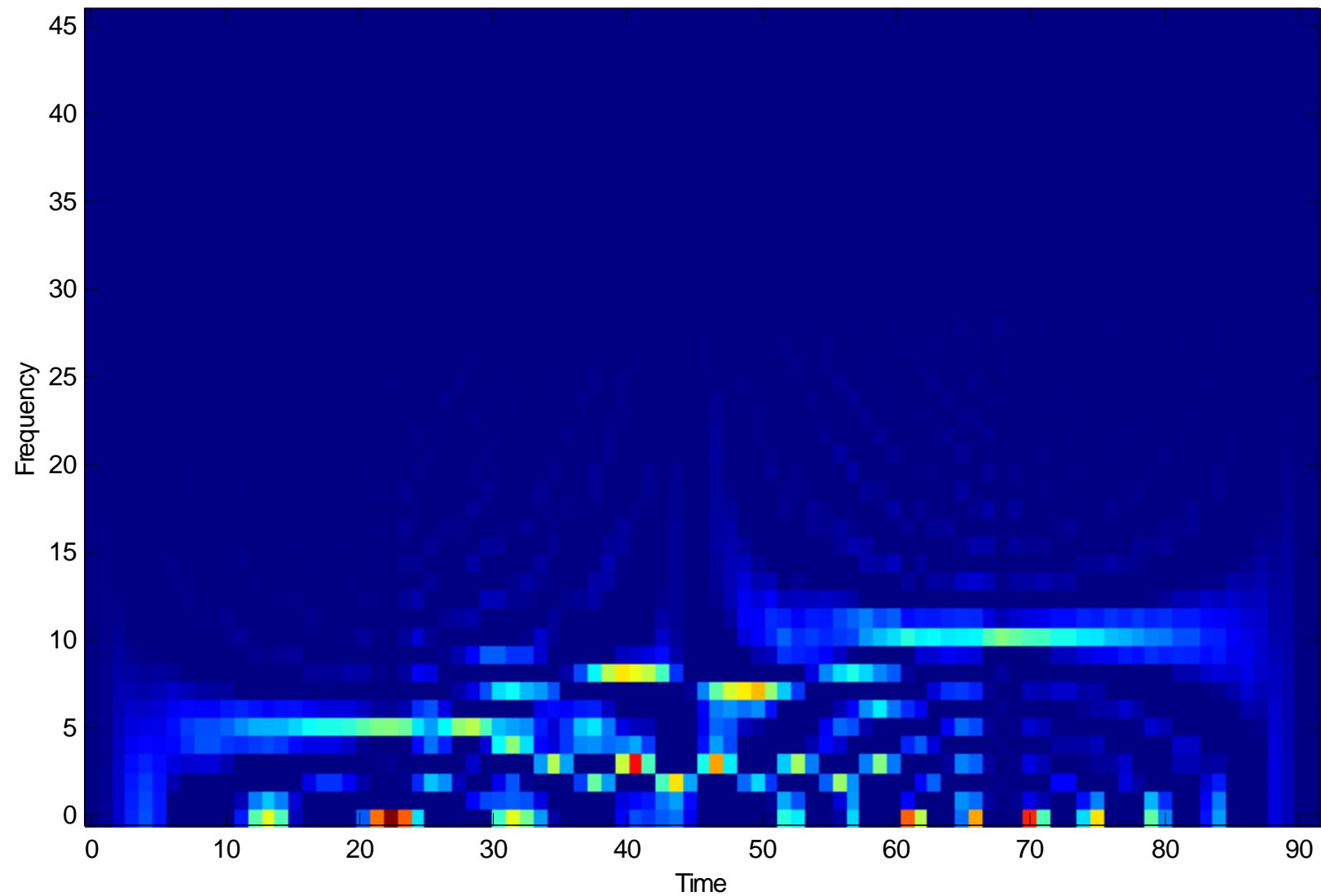
Propiedades

- Preserva desplazamientos en el tiempo y en frecuencia (covarianza tiempo-frecuencia)
- Conserva el soporte
- Conserva la energía: $E_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_v f(u, \xi) du d\xi$
- Conserva las energías marginales

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_v(u, \xi) du = |F(\xi)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_v(u, \xi) d\xi = |f(u)|^2$$

Distribución de Wigner-Ville



Distribución de Wigner-Ville

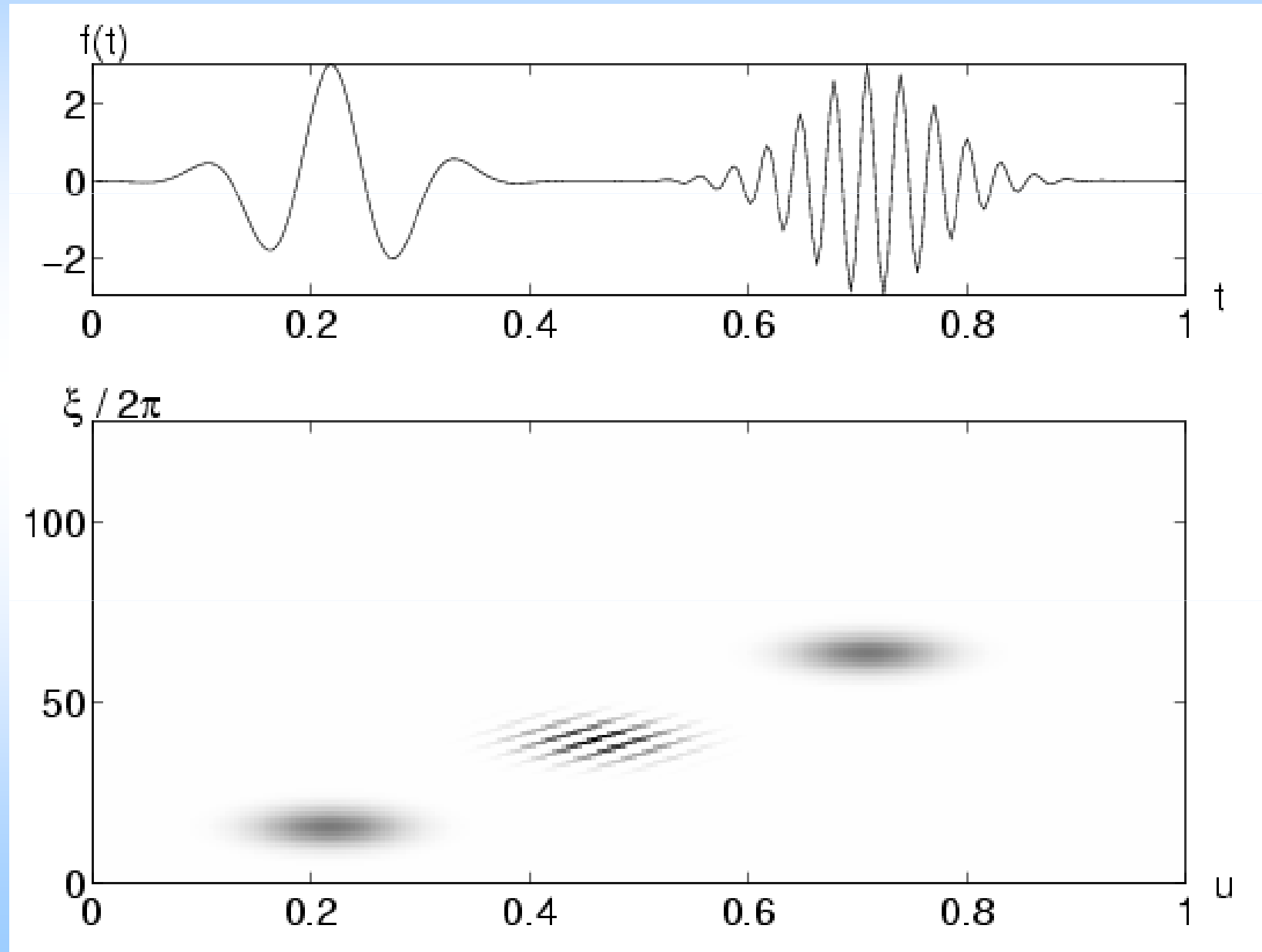
- Desventaja: al ser cuadrática con respecto a f , si $f = f_1 + f_2$, aparecen términos de interferencia:

$$P_v f = P_v f_1 + P_v f_2 + P_v [f_1, f_2] + P_v [f_2, f_1]$$

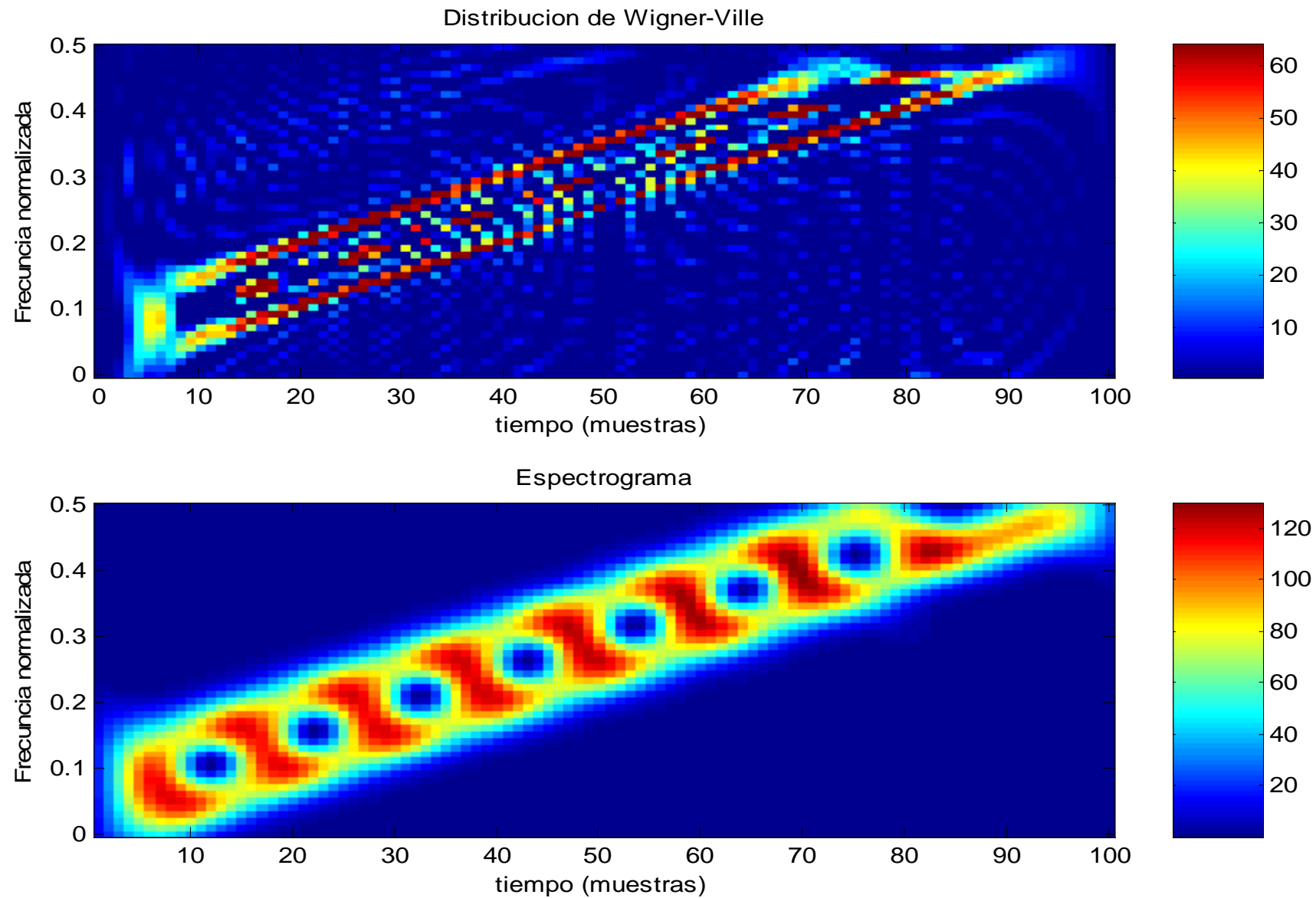
Donde

$$P_v [h, g](u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(u + \frac{\tau}{2}\right) g^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\xi\tau} d\tau$$

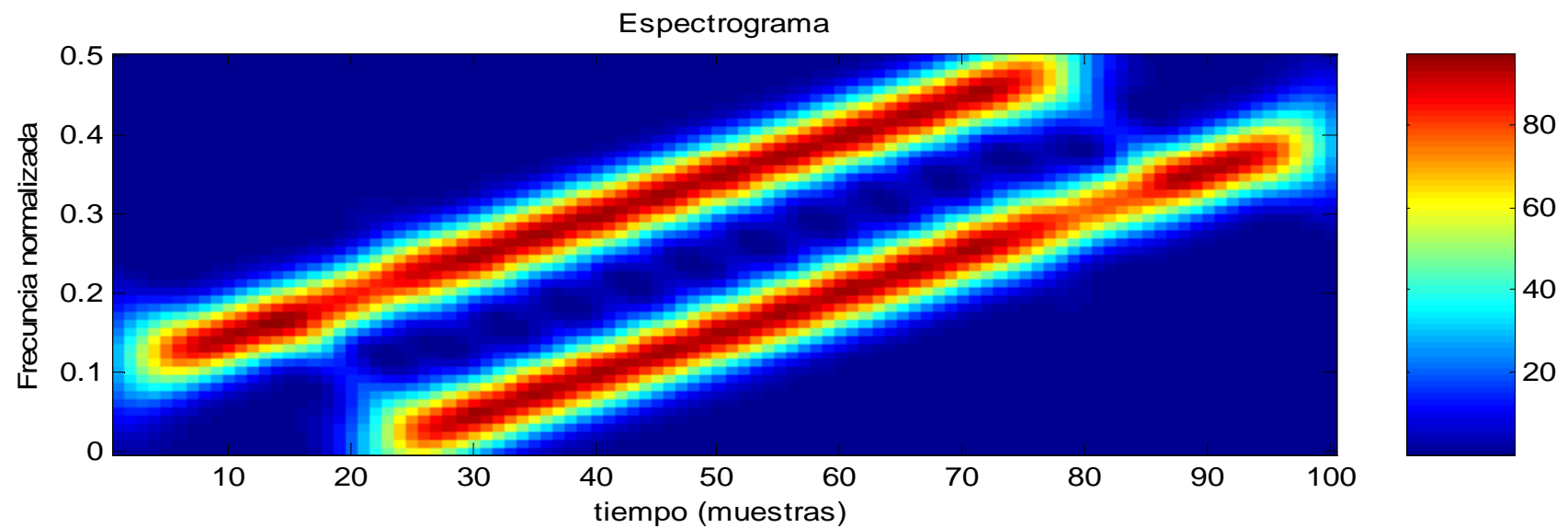
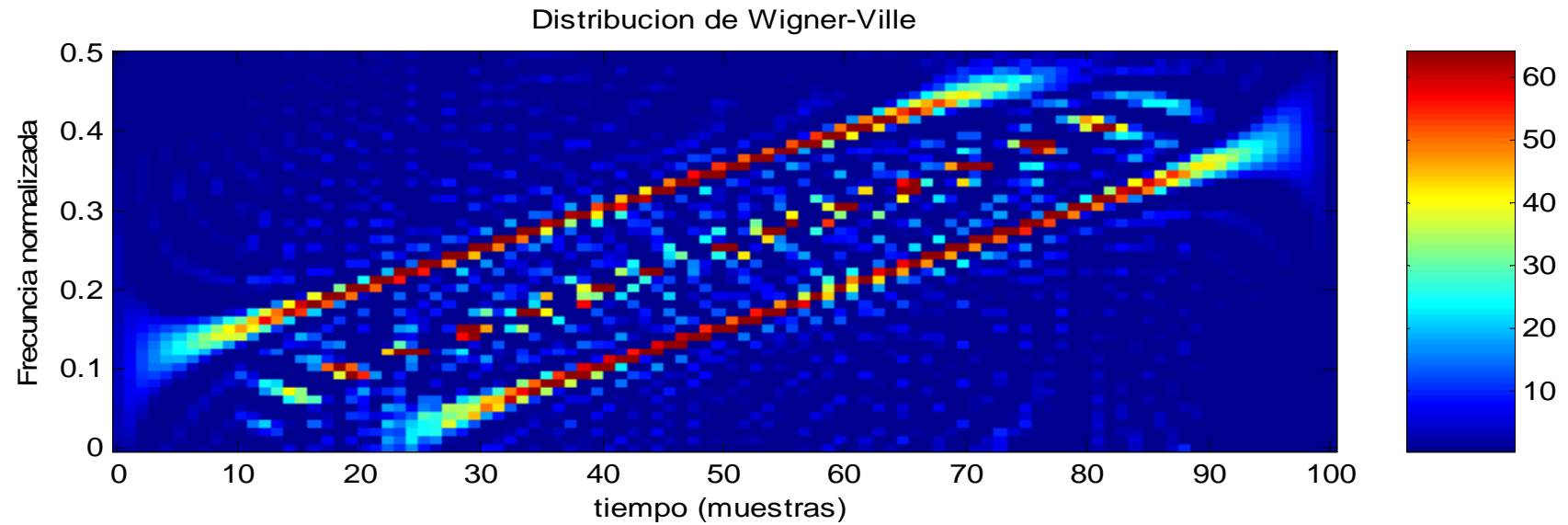
Distribución de Wigner-Ville



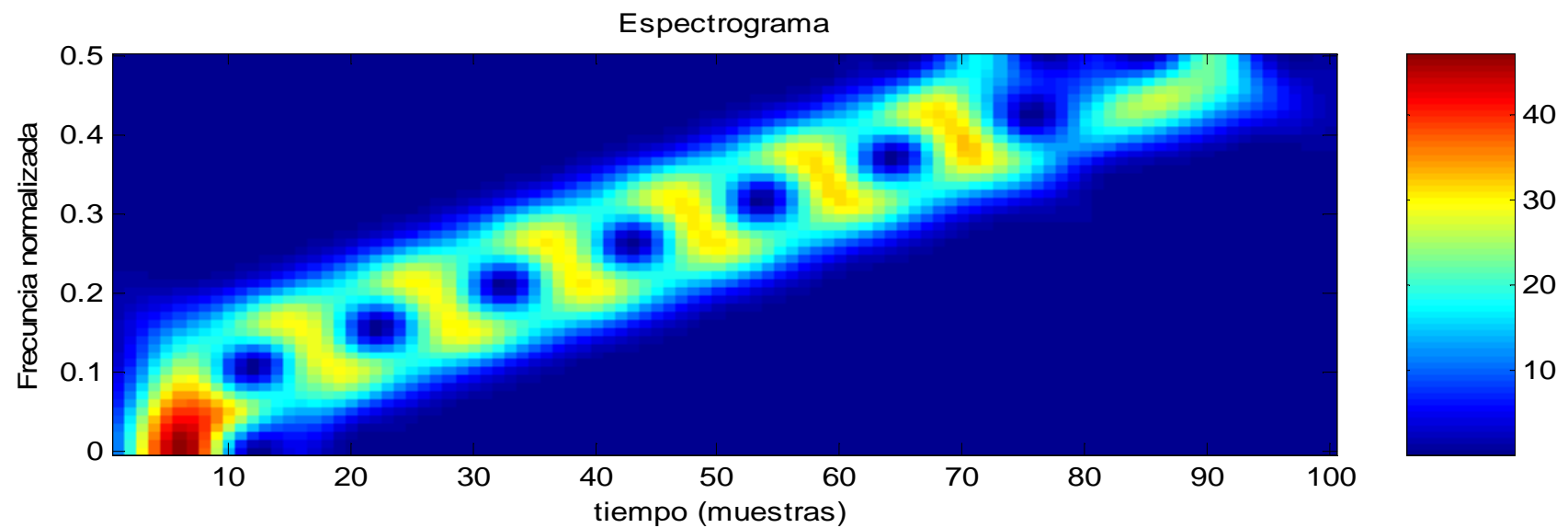
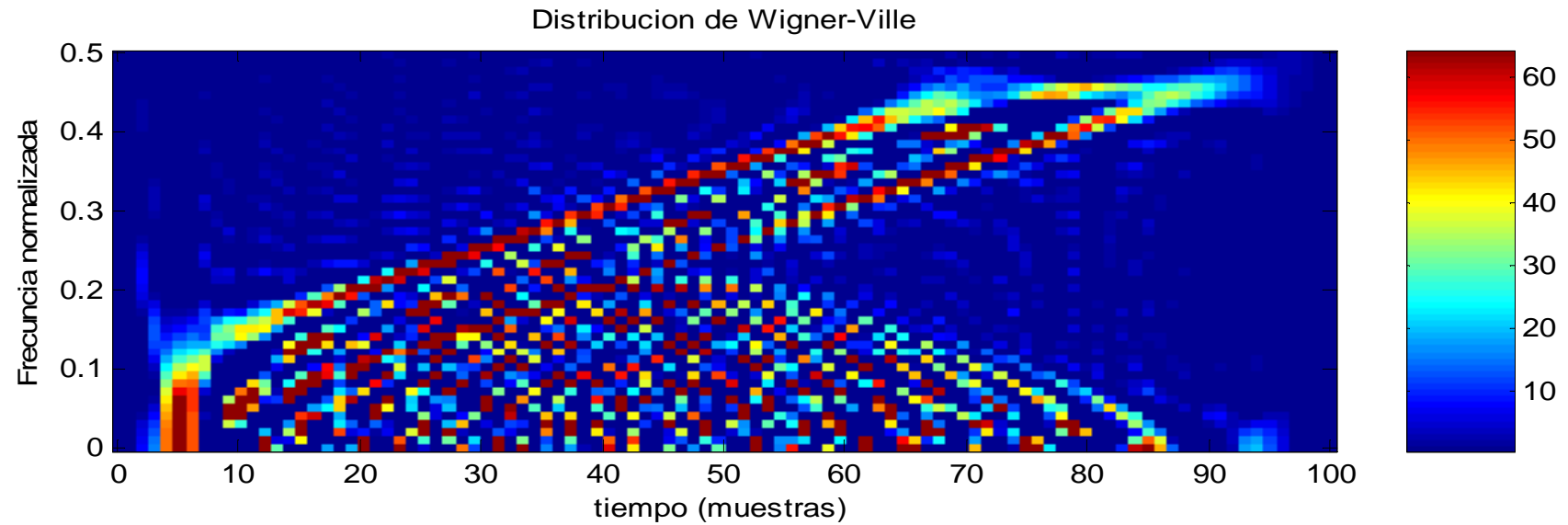
Ej.: FM lineal



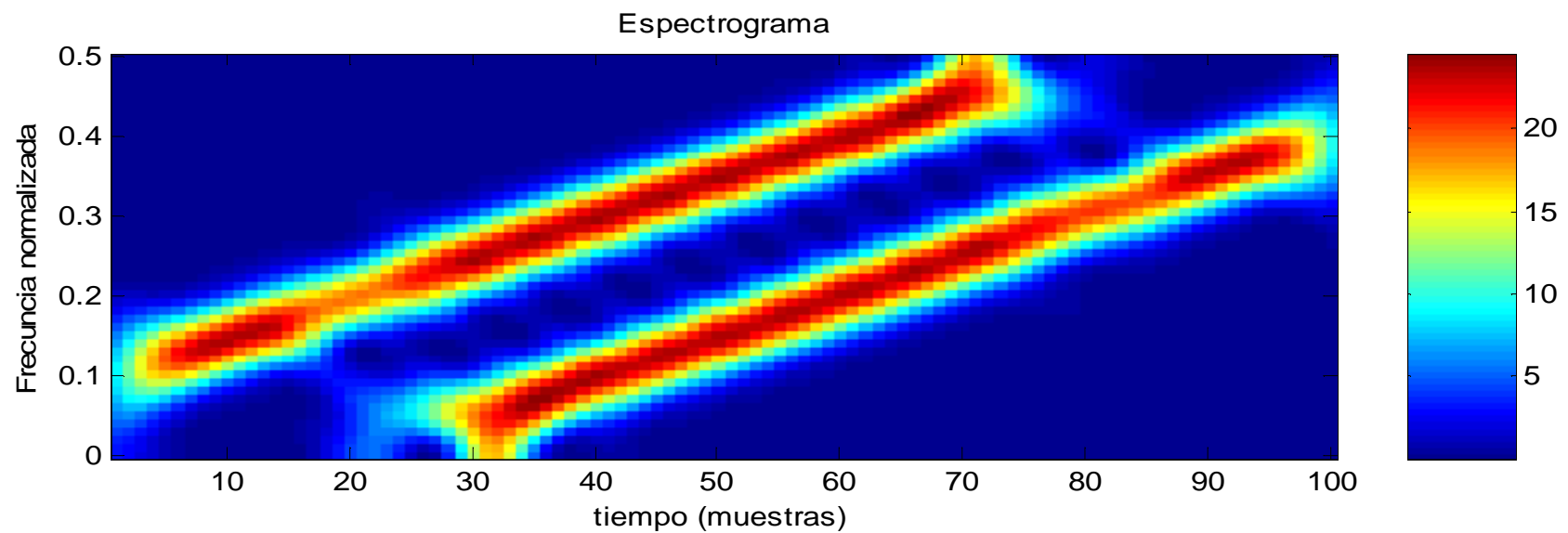
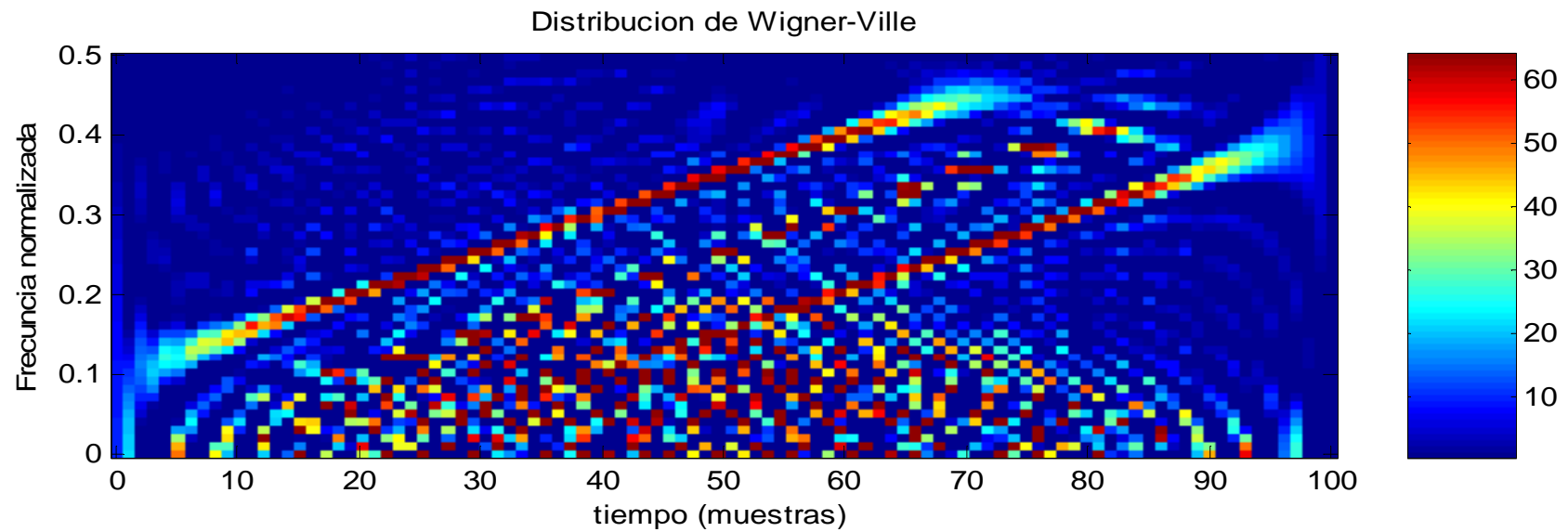
Ej.: FM lineal



Ej.: FM lineal



Ej.: FM lineal



Clases de Cohen

- Una familia de distribuciones cuadráticas tiempo-frecuencia
- Cumplen con covarianza tiempo-frecuencia
- Dadas por:

$$C_f(t, \nu; h) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\xi(s-t)} h(\xi, \tau) f(s + \tau/2) f(s - \tau/2) e^{-i2\pi\nu\tau} d\xi ds d\tau$$

donde h se denomina “función de parametrización

Clases de Cohen

- La ecuación anterior se puede escribir:

$$C_f(t, v; \Pi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t-s, v-\xi) P_v f(s, \xi) ds d\xi$$

donde

$$\Pi(t, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \tau) e^{-i2\pi(v\tau + \xi t)} d\tau d\xi$$

- Esta puede verse como un “promediado” con el kernel de promedación dado por Π

Clases de Cohen

- Usando un kernel particular, se obtiene el ESPECTROGRAMA:

$$P_s f(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_\nu g(s - t, \xi - \nu) P_\nu f(s, \xi) ds d\xi$$

- Con otras formas de kernel de promediación se obtienen otras distribuciones utilizadas.
- Estas promediaciones logran reducir o incluso anular los términos de interferencia

Distribución de Choi-Williams

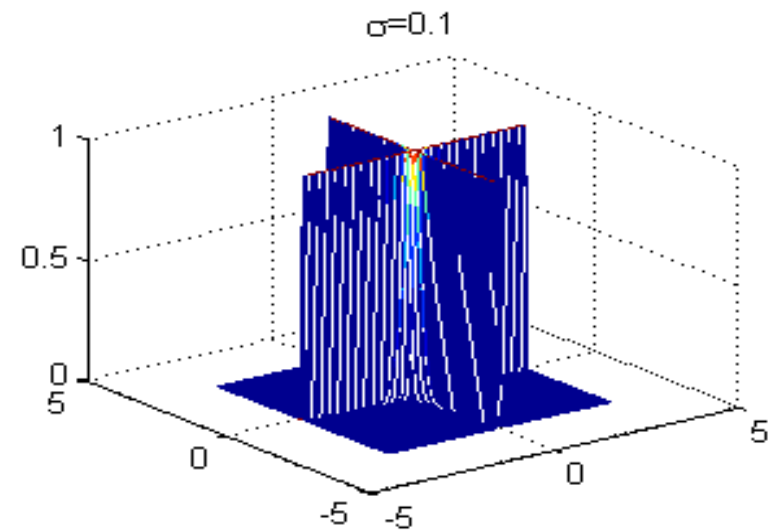
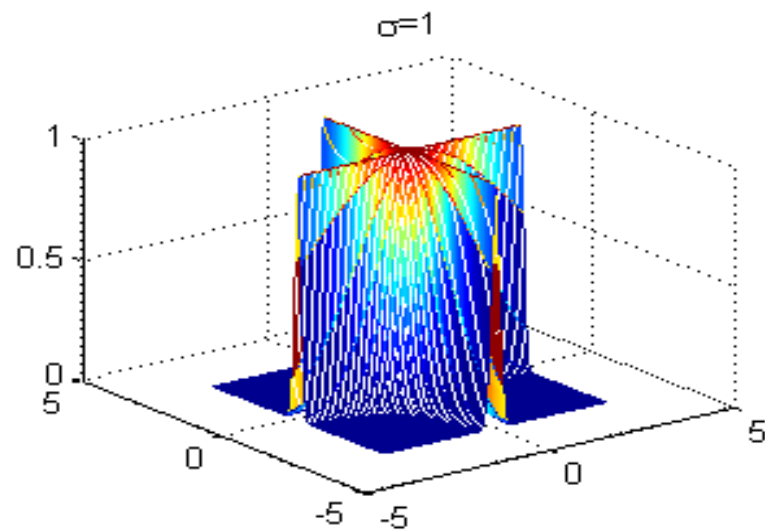
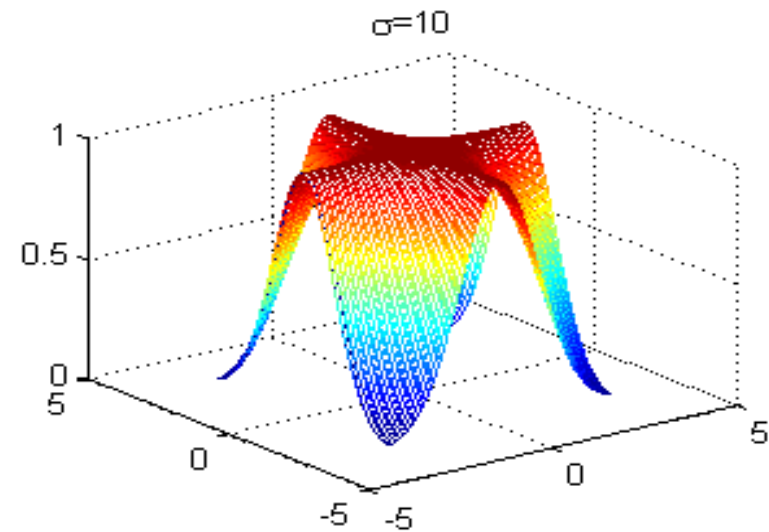
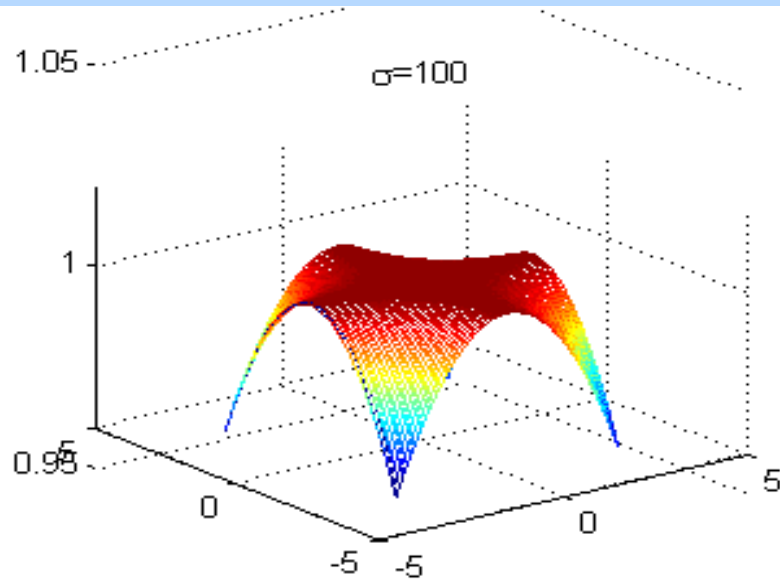
- Una clase de distribuciones se obtiene si el kernel es de la forma:

$$h(\xi, \tau) = \Phi(\xi\tau)$$

- La distribución de Choi-Williams se obtiene a partir del kernel:

$$h(\xi, \tau) = e^{-\frac{(\pi\xi\tau)^2}{2\sigma^2}}$$

Kernel de Choi-Williams



Bibliografía recomendada

- S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1999, Cap. 4
- G. Strang y T.Nguyen, Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, Secciones 2.4 a 2.6
- Documentación del toolbox Wavelab de Matlab