Transformada Z

Diego Milone

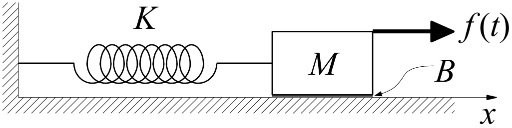
Muestreo y Procesamiento Digital
Ingeniería Informática FICH-UNL

18 de abril de 2013

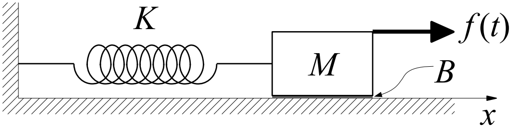
Organización de la clase

Organización de la clase

Sistemas mecánicos y ecuaciones diferenciales

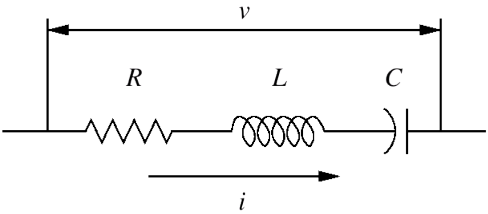


Sistemas mecánicos y ecuaciones diferenciales

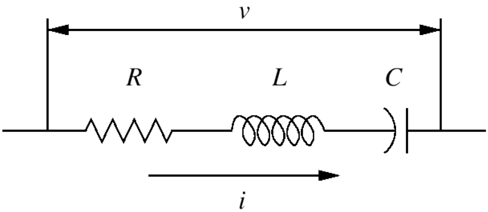


$$f(t) = Kx(t) + B\frac{dx(t)}{dt} + M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Sistemas eléctricos y ecuaciones diferenciales



Sistemas eléctricos y ecuaciones diferenciales



$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

...pasando al dominio de Laplace

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

...pasando al dominio de Laplace

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

...pasando al dominio de Laplace

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

$$\Downarrow$$

$$V(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s)$$

Impedancias en el dominio de Laplace

$$V(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s)$$

$$\swarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$Z_R(s) = R \quad Z_L(s) = sL \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

Impedancias en el dominio de Laplace

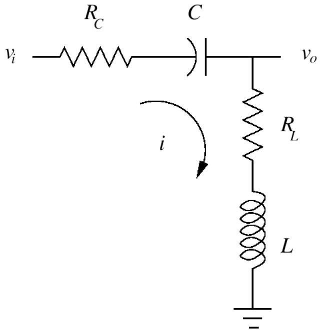
$$V(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s)$$

$$\swarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \searrow$$

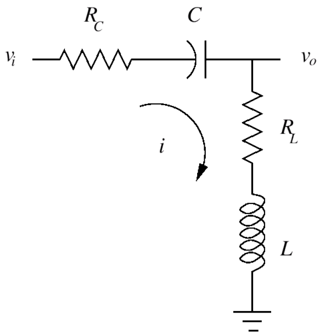
$$Z_R(s) = R \quad Z_L(s) = sL \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

$$V(s) = (Z_R + Z_L + Z_C)I(s) = Z(s)I(s)$$

Ejemplo



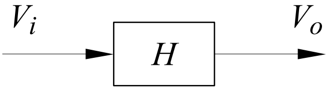
Ejemplo



$$V_i(s) = R_C I(s) + \frac{1}{sC} I(s) + R_L I(s) + sLI(s)$$

$$V_o(s) = R_L I(s) + sLI(s)$$

Función de transferencia



$$H(s) = \frac{Salida}{Entrada} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Función de transferencia: ejemplo

$$H(s) = \frac{R_L + sL}{R_C + R_L + \frac{1}{sC} + sL}$$

$$H(s) = \frac{sRL + s^2L}{(RC + RL)s + 1/C + s^2L}$$

Función de transferencia: ejemplo

$$H(s) = \frac{R_L + sL}{R_C + R_L + \frac{1}{sC} + sL}$$

$$H(s) = \frac{sRL + s^2L}{(RC + RL)s + 1/C + s^2L}$$

Supongamos que: $R_C = 1\Omega, R_L = 1\Omega, C = 1F, L = 2H$

Función de transferencia: ejemplo

$$H(s) = \frac{R_L + sL}{R_C + R_L + \frac{1}{sC} + sL}$$

$$H(s) = \frac{sRL + s^2 L}{(RC + RL)s + 1/C + s^2 L}$$

Supongamos que: $R_C = 1\Omega, R_L = 1\Omega, C = 1F, L = 2H$

$$\boxed{H(s) = \frac{s + 2s^2}{1 + 2s + 2s^2}}$$

Polos y ceros: ejemplo

$$H(s) = \frac{s + 2s^2}{1 + 2s + 2s^2}$$

Polos y ceros: ejemplo

$$H(s) = \frac{s + 2s^2}{1 + 2s + 2s^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Polos}: \quad 1 + 2s + 2s^2 &= 0 \\
&\Rightarrow p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\
&\Rightarrow p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

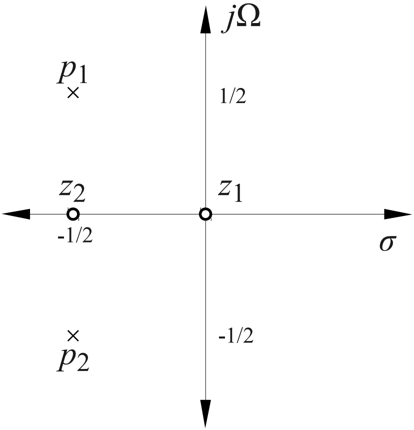
Polos y ceros: ejemplo

$$H(s) = \frac{s + 2s^2}{1 + 2s + 2s^2}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Polos :} & 1 + 2s + 2s^2 & = & 0 \\ & & \Rightarrow & p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ & & \Rightarrow & p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ceros :} & s + 2s^2 & = & 0 \\ & & \Rightarrow & c_1 = 0 \\ & & \Rightarrow & c_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Polos y ceros: interpretación gráfica



Respuesta al impulso

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow v_o(t) = ?$$

Respuesta al impulso

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow v_o(t) = h(t)$$

Respuesta al impulso

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow v_o(t) = h(t)$$

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow V_i(s) = 1$$

Respuesta al impulso

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow v_o(t) = h(t)$$

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow V_i(s) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = V_o(s)$$

Respuesta al impulso

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow v_o(t) = h(t)$$

$$v_i(t) = \delta(t) \Rightarrow V_i(s) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = V_o(s)$$

$$\Downarrow$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

Polos, ceros y estabilidad

Inversión de la transformada de Laplace por expansión en fracciones parciales

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \cdots$$

Polos, ceros y estabilidad

Inversión de la transformada de Laplace por expansión en fracciones parciales

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \cdots$$

$$H(s) = \sum_i \frac{\alpha_i}{s + a_i} + \sum_j \frac{\beta_j}{(s + b_j)^2 + w_j^2} + \sum_k \frac{\gamma_k}{s^2 + w_k^2}$$

Polos, ceros y estabilidad

Antitransformando obtenemos términos con la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_i}{s+a_i} &\longrightarrow \alpha_i e^{-a_i t} u(t) \\
\frac{\beta_j}{(s+b_j)^2+w_j^2} &\longrightarrow \frac{\beta_j}{w_j} e^{-b_j t} \sin(w_j t) u(t) \\
\frac{\gamma_k}{s^2+w_k^2} &\longrightarrow \frac{\gamma_k}{w_k} \sin(w_k t) u(t)
\end{aligned}
$$

...interpretación gráfica de la estabilidad en el tiempo...

¿Para qué la transformada Z?

Ecuaciones
diferenciales

¿Para qué la transformada Z?

Ecuaciones diferenciales $\longleftarrow$ Transformada de Laplace $\longrightarrow$

¿Para qué la transformada Z?

Ecuaciones diferenciales	$\longleftarrow$	Transformada de Laplace	$\longrightarrow$	Razón de polinomios en s

¿Para qué la transformada Z?

Ecuaciones diferenciales $\longleftarrow$ Transformada de Laplace $\longrightarrow$ Razón de polinomios en s

Ecuaciones en diferencias

¿Para qué la transformada Z?

Ecuaciones diferenciales	$\longleftarrow$	Transformada de Laplace	$\longrightarrow$	Razón de polinomios en s
Ecuaciones en diferencias	$\longleftarrow$	Transformada Z	$\longrightarrow$	

¿Para qué la transformada Z?

Ecuaciones diferenciales	$\longleftarrow$	Transformada de Laplace	$\longrightarrow$	Razón de polinomios en s
Ecuaciones en diferencias	$\longleftarrow$	Transformada Z	$\longrightarrow$	Razón de polinomios en z

¿Para qué la transformada Z?

Ecuaciones diferenciales $\longleftarrow$ Transformada de Laplace $\longrightarrow$ Razón de polinomios en s

$\uparrow$

Transformaciones conformes

$\downarrow$

Ecuaciones en diferencias $\longleftarrow$ Transformada Z $\longrightarrow$ Razón de polinomios en z

Organización de la clase

Definición de la transformada Z

Definición general

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

Definición de la transformada Z

Definición general

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

Transformada Z unilateral

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

Definición de la transformada Z

Definición general

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

Transformada Z unilateral

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

Notación

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{x[n]\right\}$$

Transformada Z: ejemplos

$$\mathbf{x} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$$

Transformada Z: ejemplos

$$\mathbf{x} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$X(z) = z^{-3}$$

Transformada Z: ejemplos

$$\mathbf{x} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$$

$$X(z) = z^{-3}$$

$$\mathbf{x} = [1 \;\; -2 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 4]$$

Transformada Z: ejemplos

$$\mathbf{x} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$$

$$X(z) = z^{-3}$$

$$\mathbf{x} = [1 \;\; -2 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 4]$$

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-4}$$

Propiedades: linealidad

Si $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$ y $x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$ entonces

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

Propiedades: inversión en el tiempo

Si $x[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$ entonces

$$x[-n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Propiedades: convolución

Si $x_1[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$ y $x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$ entonces

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z)$$

Propiedades: diferenciación en el dominio Z

Si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ entonces

$$n^m x[n] \xleftrightarrow{Z} (-z)^m \frac{d^m X(z)}{dz^m}$$

Propiedades: desplazamiento en la frecuencia

Si $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$ entonces

$$e^{j\Omega_o n}x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\Omega_o}z)$$

Propiedades: desplazamiento en el tiempo

Si $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$ entonces

$$x[n+1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} zX(z) - zx[0]$$

$$\mathcal{Z}\left\{x[n+1]\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x[n+1]\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1] z^{-n} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m] z^{-(m-1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} x[m] z^{-m+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x[n+1]\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-(m-1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}z = z\left(\sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x[n+1]\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-(m-1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}z = z\left(\sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}\right) \\
&= z\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} - x[0]z^{-0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x[n+1]\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-(m-1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}z = z\left(\sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}\right) \\
&= z\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} - x[0]z^{-0}\right) \\
&= z\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} - x[0]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x[n+1]\right\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-(m-1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}z = z\left(\sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m}\right) \\
&= z\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} - x[0]z^{-0}\right) \\
&= z\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} - x[0]\right) \\
&= z\mathcal{Z}\left\{x[n]\right\} - zx[0]
\end{aligned}
$$

Generalización del teorema del desplazamiento

Si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ y $x[n] = 0 \quad \forall n \leq 0$ entonces

$$x[n - n_o] \xleftrightarrow{Z} X(z)z^{-n_o}$$

Definición de la transformada Z inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} \, dz$$

Transformada Z inversa: ejemplo

Supongamos que tenemos

$$H(z) = \frac{z + 2z^2}{1 + 2z + 2z^2}$$

Transformada Z inversa: ejemplo

Supongamos que tenemos

$$H(z) = \frac{z + 2z^2}{1 + 2z + 2z^2}$$

... con la inversa estamos buscando la secuencia $x[n]$ tal que

$$\frac{z + 2z^2}{1 + 2z + 2z^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Transformada Z inversa: ejemplo

Supongamos que tenemos

$$H(z) = \frac{z + 2z^2}{1 + 2z + 2z^2}$$

... con la inversa estamos buscando la secuencia $x[n]$ tal que

$$\frac{z + 2z^2}{1 + 2z + 2z^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Observación: NO estamos buscando la ecuación en diferencias!!

Métodos de inversión

- División larga e inspección
- Tablas de pares transformados
- Expansión en fracciones parciales
- Integral de inversión

Métodos de inversión

- División larga e inspección
- Tablas de pares transformados
- Expansión en fracciones parciales
- Integral de inversión

(revisar en la bilbiografía)

Relación $z \ldots s$

Representación de la señal con un tren de pulsos

$$x[n] \approx x_{\delta_T}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - nT\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right) \delta\left(t - nT\right)$$

Relación $z \ldots s$

Representación de la señal con un tren de pulsos

$$x[n] \approx x_{\delta_T}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - nT\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right) \delta\left(t - nT\right)$$

En el dominio de Laplace tenemos

$$X_{\delta_T}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right) \delta\left(t - nT\right) \right] e^{-st}\, dt$$

Relación $z \ldots s$

Representación de la señal con un tren de pulsos

$$x[n] \approx x_{\delta_T}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - nT\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right)\delta\left(t - nT\right)$$

En el dominio de Laplace tenemos

$$X_{\delta_T}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right)\delta\left(t - nT\right)\right] e^{-st}\, dt$$

... e integrando

$$X_{\delta_T}(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right) e^{-snT}$$

Relación $z \dots s$

Si comparamos

$$X_{\delta_T}(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(nT\right) e^{-snT}$$

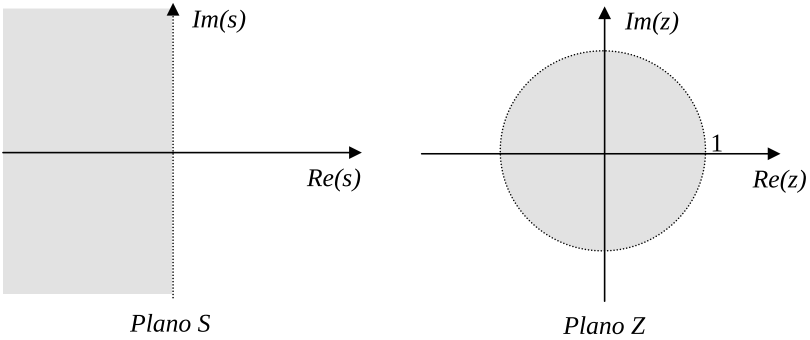
con

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Relación $z \ldots s$

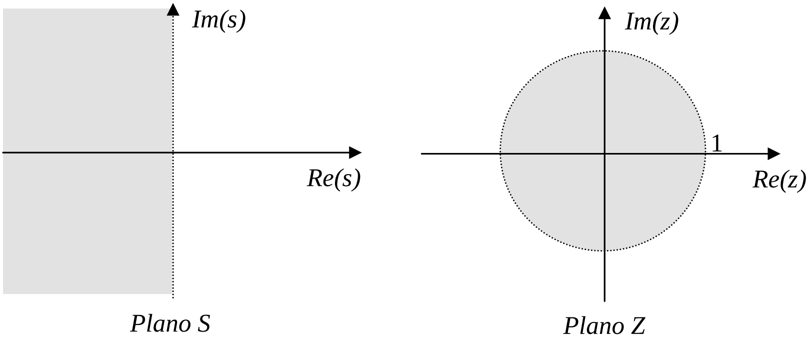
$$z = e^{sT}$$

Relación $z \ldots s$



$$z = re^{j\omega} \qquad \leftarrow e^{sT} = e^{(\sigma+j\Omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$$

Relación $z \dots s$



$$z = re^{j\omega} \qquad \leftarrow e^{sT} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$$

Polos, ceros y estabilidad...

Relación $s \ldots f$

Si recordamos que

$$s = \sigma + j\Omega$$

Relación $s \ldots f$

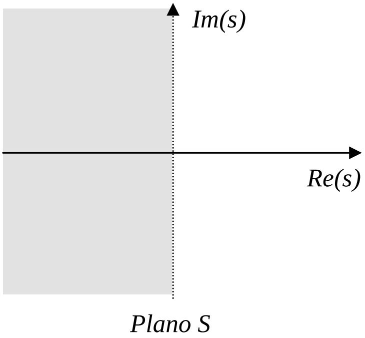
Si recordamos que

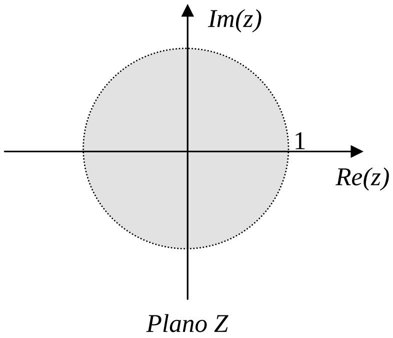
$$s = \sigma + j\Omega$$

cuando $\sigma \longrightarrow 0$ el núcleo

$$e^{st}\Big|_{\sigma=0} = e^{j2\pi ft}$$

Relación $s \dots f$





Relación $z \ldots f$

Utilizando la relación

$$z = e^{sT}$$

Relación $z \dots f$

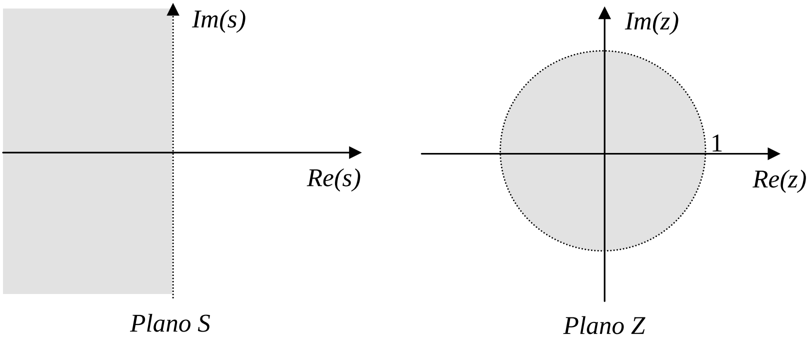
Utilizando la relación

$$z = e^{sT}$$

cuando $\sigma \longrightarrow 0$

$$z\big|_{\sigma=0} = e^{j2\pi fT}$$

Relación $z \dots f$



Relación $z \ldots k$ (TDF)

Si comparamos

$$X(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

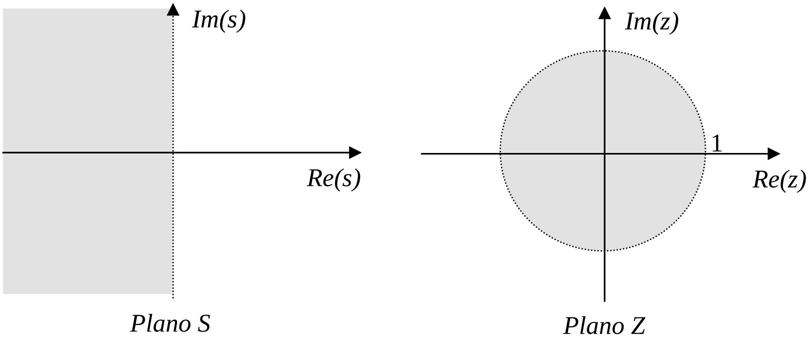
con

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Relación $z \ldots k$

$$z = e^{j\frac{2\pi k}{N}}$$

Relación $z \ldots k$



Organización de la clase

Funciones de transferencia en Z

Aplicando en teorema del desplazamiento:

- Desde la ecuación en diferencias a la función de transferencia

Funciones de transferencia en Z

Aplicando en teorema del desplazamiento:

- Desde la ecuación en diferencias a la función de transferencia

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + 2x[n-1] - 4y[n-2] \\ Y(z) &= X(z) + 2\mathcal{Z}\left\{x[n-1]\right\} - 4\mathcal{Z}\left\{y[n-2]\right\} \\ Y(z) &= X(z) + 2z^{-1}X(z) - 4z^{-2}Y(z) \end{aligned}$$

Funciones de transferencia en Z

Aplicando en teorema del desplazamiento:

- Desde la ecuación en diferencias a la función de transferencia

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + 2x[n-1] - 4y[n-2] \\ Y(z) &= X(z) + 2\mathcal{Z}\{x[n-1]\} - 4\mathcal{Z}\{y[n-2]\} \\ Y(z) &= X(z) + 2z^{-1}X(z) - 4z^{-2}Y(z) \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1+4z^{-2}}$$

Funciones de transferencia en Z

Aplicando en teorema del desplazamiento:

- Desde la ecuación en diferencias a la función de transferencia
- Desde la función de transferencia hacia la ecuación en diferencias

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-4}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Funciones de transferencia en Z

Aplicando en teorema del desplazamiento:

- Desde la ecuación en diferencias a la función de transferencia
- Desde la función de transferencia hacia la ecuación en diferencias

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-4}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\begin{aligned}
Y(z)\left\{1 + 2z^{-1} + 3z^{-4}\right\} &= X(z)\left\{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\right\} \\
y[n] + 2y[n-1] + 3y[n-4] &= x[n] + 3x[n-1] + 2x[n-2] \\
y[n] &= x[n] + 3x[n-1] + 2y[n-2] - 2y[n-1] - 3y[n-4
\end{aligned}$$

Funciones de transferencia en Z

Aplicando en teorema del desplazamiento:

- Desde la ecuación en diferencias a la función de transferencia
- Desde la función de transferencia hacia la ecuación en diferencias

Funciones de transferencia para:

- Sistemas AR
- Sistemas MA
- Sistemas ARMA

Recordemos...

Ecuaciones
diferenciales

Recordemos...

Ecuaciones diferenciales $\longleftarrow$ Transformada de Laplace $\longrightarrow$

Recordemos...

Ecuaciones diferenciales $\longleftarrow$ Transformada de Laplace $\longrightarrow$ Razón de polinomios en s

Recordemos...

Ecuaciones diferenciales $\longleftarrow$ Transformada de Laplace $\longrightarrow$ Razón de polinomios en s

Ecuaciones en diferencias

Recordemos...

Ecuaciones diferenciales	$\longleftarrow$	Transformada de Laplace	$\longrightarrow$	Razón de polinomios en s
Ecuaciones en diferencias	$\longleftarrow$	Transformada Z	$\longrightarrow$	

Recordemos...

Ecuaciones diferenciales $\longleftarrow$ Transformada de Laplace $\longrightarrow$ Razón de polinomios en s

Ecuaciones en diferencias $\longleftarrow$ Transformada Z $\longrightarrow$ Razón de polinomios en z

Recordemos...

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Ecuaciones diferenciales} & \longleftarrow & \text{Transformada de Laplace} & \longrightarrow & \text{Razón de polinomios en } s \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & \text{Transformaciones conformes} \\
 & & & & \downarrow \\
\text{Ecuaciones en diferencias} & \longleftarrow & \text{Transformada Z} & \longrightarrow & \text{Razón de polinomios en } z
\end{array}
$$

Transformaciones conformes

- Transformación ideal... $z = e^{sT} \rightarrow s = \frac{\ln(z)}{T}$
- Transformación de Euler (aproximación)
- Transformación Bilineal (aproximación)

Transformación de Euler

Aproximemos

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

En cada lado tenemos

Transformación de Euler

Aproximemos

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

En cada lado tenemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s)$$

Transformación de Euler

Aproximemos

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

En cada lado tenemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s)$$

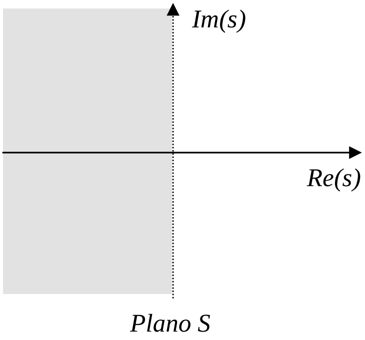
$$\mathcal{Z}\left\{\frac{y[n] - y[n-1]}{T}\right\} = \frac{\left(1 - z^{-1}\right) Y(z)}{T}$$

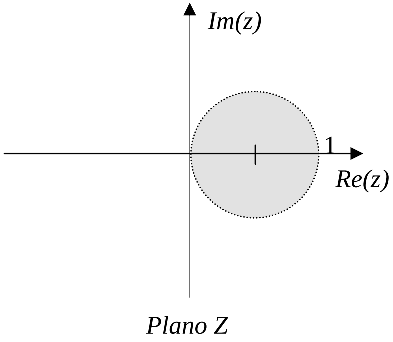
Transformación de Euler

Igualando y despejando obtenemos

$$s \approx \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Aproximación de Euler



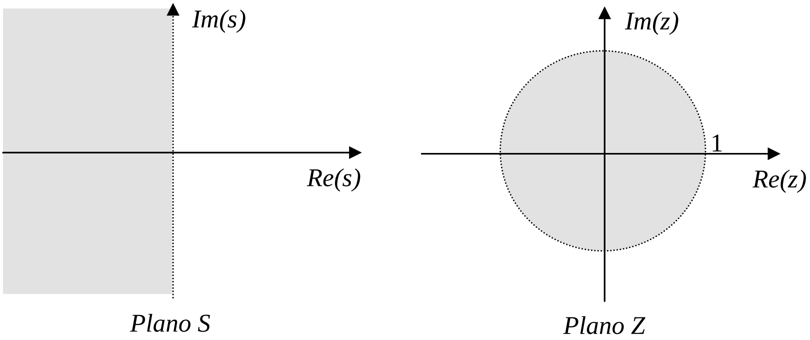


Transformación bilineal

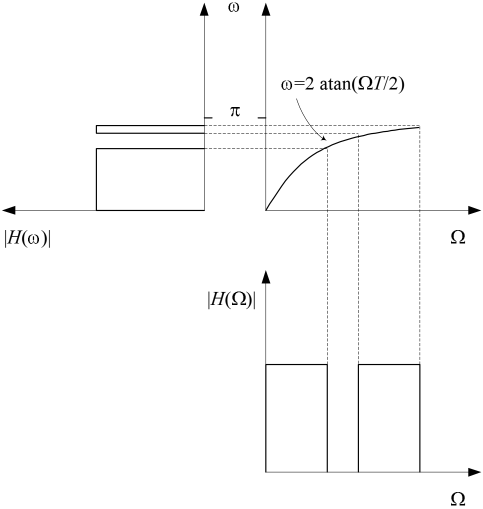
Utilizando una aproximación de 2do orden obtenemos

$$s \approx \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}$$

Aproximación bilineal



Bilineal: mapeo de frecuencias



Comparación de las transformaciones

- Relaciones gráficas
- Mapeo de frecuencias
- Aplicabilidad de cada una
- Ventajas y desventajas

Bibliografía básica

- H. Kwakernaak y R. Sivan, Modern Signal and Systems (Capítulo 8), Prentice-Hall, 1991.
- N. Sinha, Linear Systems (Capítulo 6), John Wiley & Sons, 1991.
- R. Gabel y R. Roberts, Señales y sistemas lineales (Capítulo 6: para la revisión de transformada de Laplace), Limusa: Noriega, Editores, 1994.