Universidad Nacional del Litoral
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

Nombre y Apellido:

Departamento de Informática

Mecánica del Continuo

Examen Parcial – 10/05/11

1. Un cilindro de eje paralelo al eje x_3 y cuya sección normal es el círculo de radio a está sometido a torsión por cuplas que actúan en los extremos $x_3 = -L$ y $x_3 = L$. Se asume que las componentes de tensión están dadas por:

$$\sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

donde $\psi = \psi(x_1, x_2)$ es una función conocida.

   a. Mostrar que, para este sistema sin cargas de volumen, el tensor de tensiones verifica la ecuación de equilibrio (se dice que el tensor está *autoequilibrado*).

   b. Mostrar algebraicamente que la diferencia entre la máxima tensión principal y la mínima tensión principal es $2\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2}$. Mostrar que la segunda tensión principal es nula y hallar el eje principal correspondiente a ésta.

   c. Para el caso particular $\psi = r^2 = x_1^2 + x_2^2$, mostrar que en la frontera del cilindro ($r = a$, y $x_3 = \pm L$), la componente normal del vector de tracción es nula. Mostrar además que en la superficie lateral $r = a$, la componente de corte del vector de tracción es nula, en tanto en los extremos la misma toma valores no nulos.

   d. También para el caso $\psi = r^2 = x_1^2 + x_2^2$, mostrar que en cada cara de extremidad ($x_3 = \pm L$) , la cupla externa actuante es $\pm \pi a^4$.

   Ayuda: **mostrar** que la cupla actuando sobre una cara de extremidad es igual a la integral sobre el área del momento generado por las componentes de corte del vector de tracción, o sea:

$$M = \int_A \left(\sigma_{32} x_1 - \sigma_{31} x_2 \right) dA$$

2. Sea $\mathbf{r}$ un radio vector y r su magnitud. Probar usando notación indicial (siendo n un número entero):

$$\nabla \times \left(r^n \mathbf{r} \right) = 0$$

3. Determinar las direcciones principales y los valores principales del tensor Cartesiano de segundo orden $\mathbf{T}$, cuya representación matricial es la siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolver algebraicamente y representar la solución usando el círculo de Mohr. Mostrar que los ejes principales calculados forman un conjunto de ejes ortogonales

.

1)

a) $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$

No hay cargas de volumen $\longrightarrow$ $X_i = 0$

$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} =$

$0 + 0 + \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_3}\right)}_{0} = 0$

$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} =$

$0 + 0 + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3}\right)}_{0} = 0$

$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} =$

$\left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} + 0 = 0$

QED

b)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial\Psi/\partial x_2 \\ 0 & 0 & \partial\Psi/\partial x_1 \\ -\partial\Psi/\partial x_2 & \partial\Psi/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma^k \underline{\underline{I}}\right) = 0 \qquad k = 1,2,3$

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & -\partial\Psi/\partial x_2 \\ 0 & -\sigma & \partial\Psi/\partial x_1 \\ -\partial\Psi/\partial x_2 & \partial\Psi/\partial x_1 & -\sigma \end{pmatrix} = 0$$

$$(-\sigma)\left[\sigma^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2\right]+\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)\left(-\sigma\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)=$$

$$=-\sigma^3+\sigma\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\sigma\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2=$$

$$=\sigma\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2-\sigma^2\right]=0$$

$$\therefore\quad \sigma=\begin{cases}0 & =\sigma^2\\ \sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2} & =\sigma^3\\ -\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2} & =\sigma^1\end{cases}$$

$$\sigma^3-\sigma^1=2\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2}$$

QED

$$\begin{array}{ccc|c} & \sigma^2=0 & & \begin{matrix}\phi^2_1\\ \phi^2_2\\ \phi^2_3\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & -\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} & 0\\ -\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} & 0 & 0\end{array}$$

$$\therefore\quad -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)\phi^2_3=0 \implies \phi^2_3=0$$

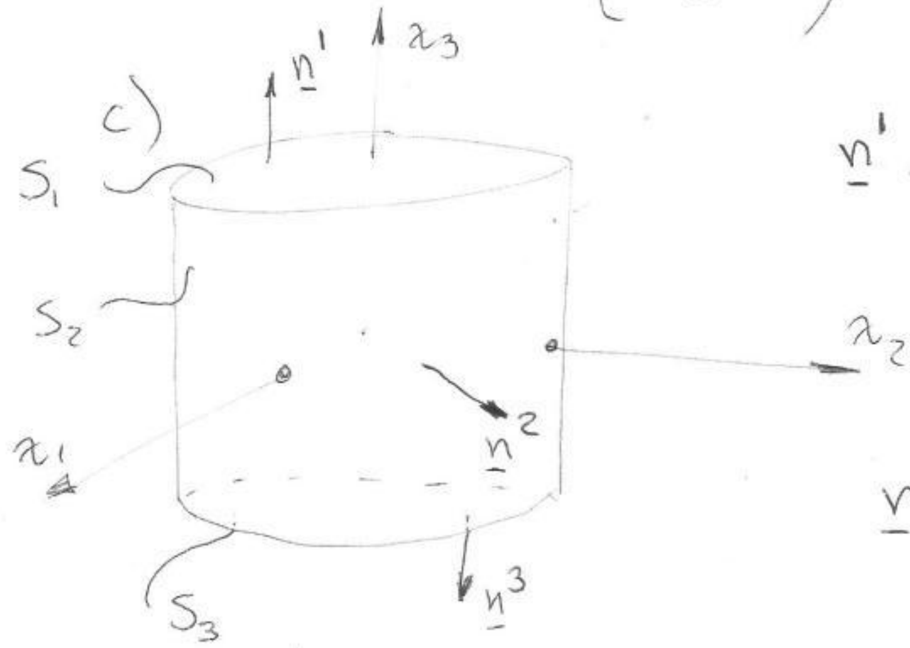
$$-\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\phi^2_1+\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\phi^2_2=0$$

Elijo $\phi_1^2 = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_1} \Rightarrow \phi_2^2 = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_2}$

$$\therefore \quad \underline{\phi}^2 = \begin{pmatrix} \partial \Psi / \partial x_1 \\ \partial \Psi / \partial x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

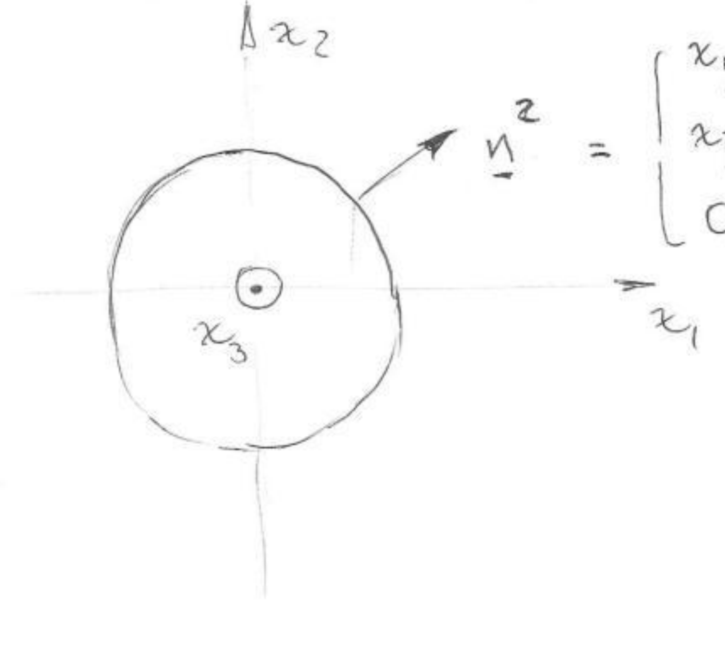
QED

c)



$$\underline{n}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{n}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\underline{n}^2 = \begin{pmatrix} x_1/r \\ x_2/r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}$

Tapas:

$$\underline{t}^{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ \pm \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comp normal:

$$t_n^{1,3} = \underline{t}^{1,3} \cdot \underline{n}^{1,3} = \begin{pmatrix} \mp \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ \pm \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = 0$$

Sup lateral:

$$\Psi = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 2x_2$$

$\therefore$

$$\underline{t}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2x_2 \\ 0 & 0 & 2x_1 \\ -2x_2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1/r \\ x_2/r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Comp normal y de corte son nulas.

Componentes de corte en tapas:

$$\underline{t}^1 = \begin{pmatrix} -\partial\Psi/\partial x_2 \\ \partial\Psi/\partial x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NO NULAS

$$\underline{t}^2 = \begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial x_2 \\ -\partial\Psi/\partial x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

QED

d) Cupla:

$$M = \int_A \left(\sigma_{32} x_1 - \sigma_{31} x_2\right) dA =$$

$$= \int_A \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} x_2\right) dA =$$

$$= \int_A 2x_1^2 + 2x_2^2 \, dA = \int_A 2r^2 \, dA =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a 2r^2 \, r \, dr \, d\theta =$$

$$= 2\pi \left. \frac{2r^4}{4} \right|_0^a = \pi a^4$$

QED

(6)

2) $\nabla \times \left(r^n \underline{r} \right) = 0$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(r^n \quad k \right) =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial r^n}{\partial x_j} x_k + \varepsilon_{ijk} r^n \frac{\partial x_k}{\partial x_j} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, n\, r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x_j} x_k + \underbrace{\underbrace{\varepsilon_{ijk} r^n}\, \underbrace{\delta_{jk}}}_{\varepsilon_{ikk} r^n = 0} = *$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\cancel{2} x_j}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_j}{r}$$

$\therefore$

$$* = \varepsilon_{ijk}\, n\, r^{n-1} \frac{x_j}{r} x_k = n r^{n-2} \underbrace{\underbrace{\varepsilon_{ijk}}\, \underbrace{x_j x_k}}_{0}$$

$$\boxed{\nabla \times \left(r^n \underline{r} \right) = 0} \quad \therefore \quad \text{QED}$$

3) $$\det \begin{pmatrix} 6-\sigma & 0 & -2 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ -2 & 0 & 6-\sigma \end{pmatrix} = 0$$

$$(6-\sigma)(-\sigma)(6-\sigma) + (-2)(-2\sigma) =$$

$$= -\sigma(6-\sigma)^2 + 4\sigma =$$

$$= \sigma\left[-(6-\sigma)^2 + 4\right] =$$

$$= \sigma\left[-36 + 12\sigma - \sigma^2 + 4\right] =$$

$$= \sigma\left[-\sigma^2 + 12\sigma - 32\right] = 0$$

$$\sigma^1 = 0$$

$$\sigma^{2,3} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 32}}{-2} =$$

$$= 6 \pm \frac{\sqrt{144 - 128}}{-2} =$$

$$= 6 \pm \frac{\sqrt{16}}{-2} = 6 \pm (-2) = \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$$

$$\sigma^1 = 0 \quad \sigma^2 = 4 \quad \sigma^3 = 8$$

(8)

$\underline{\phi}^1)$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & \phi_1^1 \\ & & & \phi_2^1 \\ & & & \phi_3^1 \\ \hline 6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6\phi_1^1 - 2\phi_3^1 = 0 \\ -2\phi_1^1 + 6\phi_3^1 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \phi_1^1 = \phi_3^1 = 0$$

Elijo $\phi_2^1 = 1$

$$\therefore \left(\sigma^1, \underline{\phi}^1\right) = \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\underline{\phi}^2)$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & \phi_1^2 \\ & & & \phi_2^2 \\ & & & \phi_3^2 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$$-4\,\phi_2^2 = 0 \Longrightarrow \phi_2^2 = 0$$

$$2\phi_1^2 - 2\phi_3^2 = 0 \Longrightarrow \phi_1^2 = \phi_3^2$$

$$-2\phi_1^2 + 2\phi_3^2 = 0 \Longrightarrow \phi_1^2 = \phi_3^2$$

Elijo $\phi_1^2 = \phi_3^2 = 1$

$$\therefore \left(\sigma^2, \underline{\phi}^2\right) = \left(4, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\underline{\phi}^3$)

$$\begin{array}{ccc|c} & & & \phi_1^3 \\ & & & \phi_2^3 \\ & & & \phi_3^3 \\ \hline -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$-8\,\phi_2^3 = 0 \longrightarrow \phi_2^3 = 0$

$-2\phi_1^3 - 2\phi_3^3 = 0 \longrightarrow \phi_1^3 = -\phi_3^3$

Elijo $\phi_1^3 = 1 \longrightarrow \phi_3^3 = -1$

$$\therefore \left(\sigma^3, \underline{\phi}^3\right) = \left(8, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Claramente:

$$\underline{\phi}^1 \cdot \underline{\phi}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{\phi}^1 \circ \underline{\phi}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{\phi}^2 \circ \underline{\phi}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore$ Los ejes principales son ortogonales.

Notar que se trata de un problema plano en los ejes (x_1, x_3), con

$$T = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Luego</u>: