Trabajo práctico Nº5

Darién Julián Ramírez
Universidad Nacional del Litoral. ianshalaga@gmail.com

I. Ejercicio 7.

a) Se modifica la función desarrollada en el ejercicio 6.b) de manera que permita computar los coeficientes del trazador cúbico sujeto. Se prevee además el ingreso de los valores de la derivada de la función en los extremos del intervalo de interpolación.

Función desarrollada en el ejercicio 6.b): Trazador cúbico natural

```
function [a,b,c,d] = cubic_spline_natural(x,f)
    n = length(x);
    b = zeros(n,1);
    c = zeros(n,1);
    d = zeros(n,1);
    for i=1:n-1
        h(i)=x(i+1)-x(i);
    end
    for i=2:n-1
        alfa(i) = ((3*(f(i+1)-f(i)))/h(i)) - ((3*(f(i)-f(i-1)))/h(i-1));
    end
    l(1) = 1;
    u(1) = 0;
    z(1) = 0;
    for i=2:n-1
        l(i) = (2*(x(i+1)-x(i-1))) - (h(i-1)*u(i-1));
        u(i) = h(i)/l(i);
        z(i) = (alfa(i)-(h(i-1)*z(i-1)))/l(i);
    end
    l(n) = 1;
    z(n) = 0;
    c(n) = 0;
    for j=n-1:-1:1
        c(j) = z(j)-(u(j)*c(j+1));
        b(j) = ((f(j+1)-f(j))/h(j)) - ((h(j)*(c(j+1)+(2*c(j))))/3);
        d(j) = (c(j+1)-c(j))/(3*h(j));
    end
    a = f';
endfunction
```

Trazador cúbico sujeto:

```
function [a,b,c,d] = cubic_spline_clamped(x,f,df)
    n = length(x);
    b = zeros(n,1);
    c = zeros(n,1);
    d = zeros(n,1);
    for i=1:n-1
        h(i)=x(i+1)-x(i);
    end
    alfa(1) = ((3*(f(2)-f(1)))/h(1)) - (3*df(1));
    alfa(n) = (3*df(2)) - ((3*(f(n)-f(n-1)))/h(n-1));
    for i=2:n-1
        alfa(i) = ((3*(f(i+1)-f(i)))/h(i)) - ((3*(f(i)-f(i-1)))/h(i-1));
    end
    l(1) = 2*h(1);
    u(1) = 0.5;
    z(1) = alfa(1)/l(1);
    for i=2:n-1
```

```
        l(i) = (2*(x(i+1)-x(i-1))) - (h(i-1)*u(i-1));
        u(i) = h(i)/l(i);
        z(i) = (alfa(i)-(h(i-1)*z(i-1)))/l(i);
    end
    l(n) = h(n-1)*(2-u(n-1));
    z(n) = (alfa(n)-(h(n-1)*z(n-1)))/l(n);
    c(n) = z(n);
    for j=n-1:-1:1
        c(j) = z(j)-(u(j)*c(j+1));
        b(j) = ((f(j+1)-f(j))/h(j)) - ((h(j)*(c(j+1)+(2*c(j))))/3);
        d(j) = (c(j+1)-c(j))/(3*h(j));
    end
    a = f';
endfunction
```

El *Teorema 3.12* [1] justifica el algoritmo anterior:
Si f definida en $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, y es diferenciable en a y b, entonces f tiene un único trazador sujeto que interpola los nodos $x_0,x_1,\ldots,x_n$, es decir, un interpolante de trazador que cumple las condiciones de frontera $S'(a)=f'(a)$ y $S'(b)=f'(b)$.

<u>Demostración:</u>
Se tiene que $S_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)+c_j(x-x_j)^2+d_j(x-x_j)^3$ entonces $S'_j(x)=b_j+2c_j(x-x_j)+3d_j(x-x_j)^2$ por lo tanto, se debe dar que $f'(x_0)=S'(x_0)\, y\, f'(x_n)=S'(x_n)$ entonces $f(a)=S'(a)=S'(x_0)=b_0$.
Evaluando la ecuación $b_j=\frac{1}{h_j}(a_{(j+1)}-a_j)-\frac{h_j}{3}(2c_j+c_{(j+1)})$ **(1)** en j = 0 se obtiene $f'(a)=\frac{1}{h_0}(a_1-a_0)-\frac{h_0}{3}(2c_0+c_1)$ que se puede escribir también como $2h_0c_0+h_0c_1=\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)-3f'(a)$.
De manera semejante para x_n con la ecuación $b_{j+1}=b_j+h_j(c_j+c_{j+1})$ se obtiene $f'(x_n)=b_n=b_{n-1}+h_{n-1}(c_{n-1}+c_n)$.
Usando la ecuación **(1)** j=n-1, $f'(b)=\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}}-\frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1}+c_n)+h_{n-1}(c_{n-1}+c_n)=\frac{a_n-a_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1}+2c_n)$ que se puede reordenar como $h_{n-1}c_{n-1}+2h_{n-1}c_n=3f'(b)-\frac{3}{h_{n-1}}(a_n-a_{n-1})$.
Se obtuvieron los dos primeros renglones del sistema de ecuaciones lineales que dependen de la primera derivada:

$$2h_0c_0+h_0c_1=\frac{3}{h_0}(a_1-a_0)-3f'(a)$$

$$h_{(n-1)}c_{(n-1)}+2h_{(n-1)}c_n=3f'(b)-\frac{3}{h_{(n-1)}}a_n-a_{(n-1)}$$

Un trazador cúbico sujeto es un sistema de ecuaciones lineales dado por $h_{(j-1)}c_{(j-1)}+2(h_{(j-1)}+h_j)c_j+h_jc_{(j+1)}=\frac{3}{h_j}(a_{(j+1)}-a_j)-\frac{3}{h_{(j-1)}}(a_j-a_{(j-1)})$.
Con todo esto se puede armar el siguiente sistema:

$$A=\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & h_{(n-2)} & 2(h_{(n-2)}+h_{(n-1)}) & h_{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2h_{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1-a_0)-3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1)=\frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ \frac{3}{h_{(n-1)}}(a_n-a_{(n-1)})-\frac{3}{h_{(n-2)}}(a_{(n-1)}-a_{(n-2)}) \\ 3f'(b)-3_h(n-1)(a_n-a_{(n-1)}) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

El sistema tiene solución única si A es e.d.d. esto puede verse ya que, h_i es siempre positivo, ya que es la resta de dos posiciones x_{i+1} y x_i (según se los definió en el teorema). El primer renglón solo tiene dos elemento donde $a_{1,1}$ es el doble de $a_{1,2}$, algo similar ocurre en el último renglón. Como se puede observar los elementos de la diagonal siempre son mayores a la suma de los elementos de las filas, los elementos de la diagonal son la suma de los elementos que no están en la diagonal por dos. Con esto se verifica que a es e.d.d. y por lo tanto el sistema Ax=b tiene solución única.

Para el caso del sistema matricial del trazador cúbico natural, la matriz A solo tiene un elemento en el primer renglón y en el último. El elemento a_{11} = 1 = $a_{n+1,n+1}$, y el primer y último elemento del vector b son ceros.

c) Se quiere determinar la trayectoria plana seguida por un brazo robot industrial (idealizado por un punto material) durante un ciclo de trabajo. El brazo robot debe satisfacer las siguientes restricciones: se debe encontrar en reposo en el punto (0, 0) en el instante inicial. Luego de 1s se debe encontrar en el punto (2, 4), 1s después debe alcanzar el punto (6, 6) y detenerse allí. En una segunda etapa retoma inmediatamente su movimiento y alcanza, luego de otro segundo más el punto (3, 2) para finalmente retornar al origen luego de otro segundo más, donde quedará detenido para repetir el ciclo de trabajo. Encuentre el trazador cúbico sujeto correspondiente utilizando el código desarrollado en el primer inciso y luego realice las siguientes gráficas: (i) x vs. t (ambos tramos en la misma gráfica), (ii) y vs. t (idem anterior), y finalmente (iii) en el plano xy la trayectoria encontrada.

Del enunciado se determinan los siguientes valores de t, x, y:

t = [0 1 2 3 4]
x = [0 2 6 3 0]
y = [0 4 6 2 0]

Se fijaran las derivadas de los extremos en 0 puesto que es donde se encuentra la velocidad cero del movimiento del brazo mecánico: df = [0 0]

i)

Aplicando el algoritmo se obtienen los coeficientes de los trazadores:

t	x	a	b	c	d
0	0	0	0	1,5	0,5
1	2	2	4,5	3	-3,5
2	6	6	-	-	-

t	x	a	b	c	d
2	6	6	0	-4,5	1,5
3	3	3	-4,5	0	1,5
4	0	0	-	-	-

Se confeccionan los siguientes trazadores:

```
function [xvsy0] = xvsy0(x)
  xvsy0 = 0+0*(x-0)+1.875*(x-0).^2-0.4375*(x-0).^3;
endfunction

function [xvst1] = xvst1(x)
  xvst1 = 2+4.5*(x-1)+3*(x-1).^2-3.5*(x-1).^3;
endfunction

function [xvst2] = xvst2(x)
  xvst2 = 6+0*(x-2)-4.5*(x-2).^2+1.5*(x-2).^3;
endfunction

function [xvst3] = xvst3(x)
  xvst3 = 3-4.5*(x-3)+0*(x-3).^2+1.5*(x-3).^3;
endfunction
```

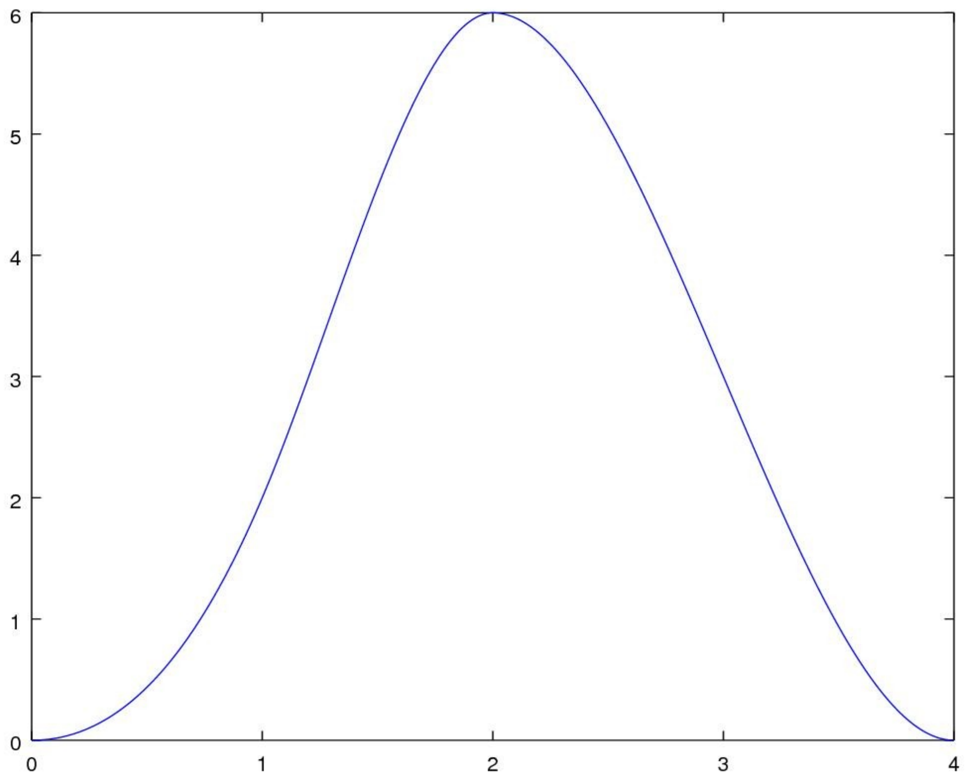

Figura 1: x vs t

ii)

Aplicando el algoritmo se obtienen los coeficientes de los trazadores:

t	y	a	b	c	d
0	0	0	0	7,5	-3,5
1	4	4	4,5	-3	0,5
2	6	6	-	-	-

t	x	a	b	c	d
2	6	6	0	-7,5	3,5
3	2	2	-4,5	3	-0,5
4	0	0	-	-	-

Se confeccionan los siguientes trazadores:

```
function [yvst0] = yvst0(x)
  yvst0 = 0+0*(x-0)+7.5*(x-0).^2-3.5*(x-0).^3;
endfunction

function [yvst1] = yvst1(x)
  yvst1 = 4+4.5*(x-1)-3*(x-1).^2+0.5*(x-1).^3;
endfunction

function [yvst2] = yvst2(x)
  yvst2 = 6+0*(x-2)-7.5*(x-2).^2+3.5*(x-2).^3;
endfunction

function [yvst3] = yvst3(x)
  yvst3 = 2-4.5*(x-3)+3*(x-3).^2-0.5*(x-3).^3;
endfunction
```

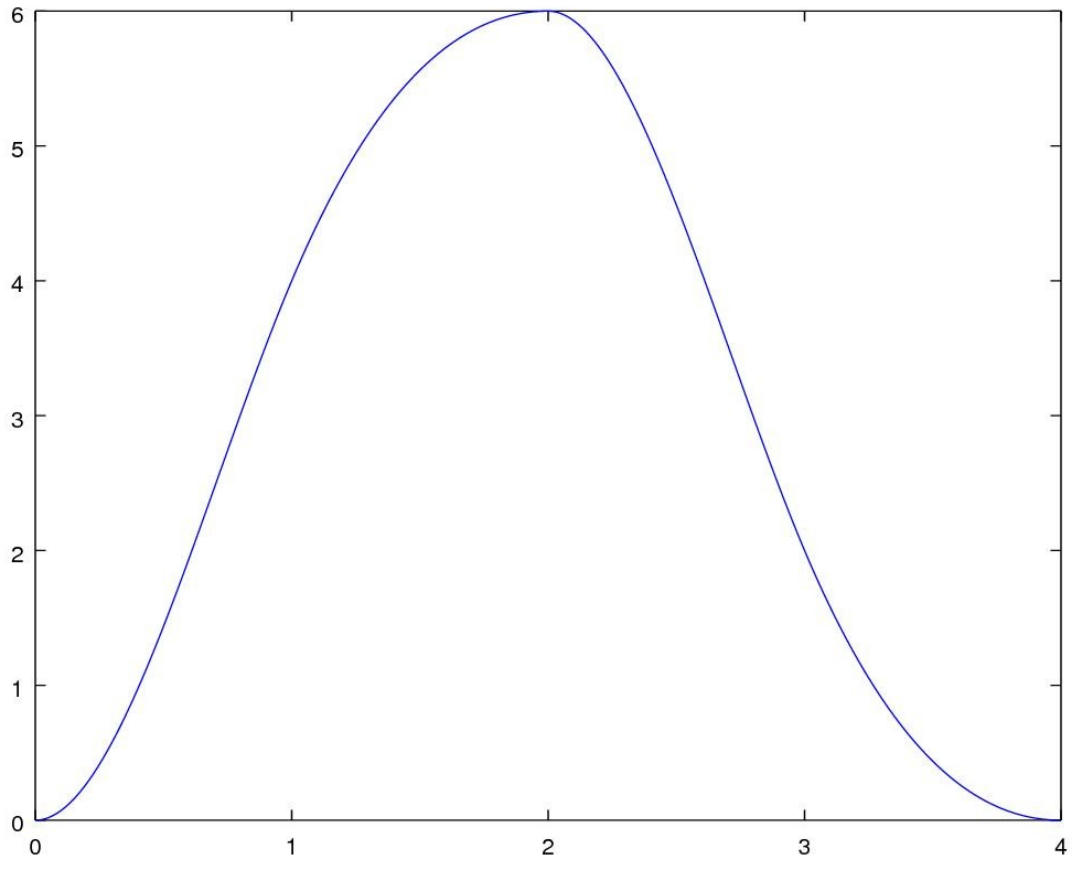

Figura 2: y vs t

iii)

Aplicando el algoritmo se obtienen los coeficientes de los trazadores:

x	y	a	b	c	d
0	0	0	0	1,875	-0,4375
2	4	4	2,25	-0,75	0,07812
6	6	6	-	-	-

x	y	a	b	c	d
0	0	0	0	0,16667	0,01852
3	2	2	1,5	0,33333	-0,12963
6	6	6	-	-	-

Se confeccionan los siguientes trazadores:

```
function [xvsy0] = xvsy0(x)
  xvsy0 = 0+0*(x-0)+1.875*(x-0).^2-0.4375*(x-0).^3;
endfunction

function [xvsy1] = xvsy1(x)
  xvsy1 = 4+2.25*(x-2)-0.75*(x-2).^2+0.07812*(x-2).^3;
endfunction

function [xvsy2] = xvsy2(x)
  xvsy2 = 0+0*(x-0)+0.16667*(x-0).^2+0.01852*(x-0).^3;
endfunction

function [xvsy3] = xvsy3(x)
  xvsy3 = 2+1.5*(x-3)+0.33333*(x-3).^2-0.12963*(x-3).^3;
endfunction
```

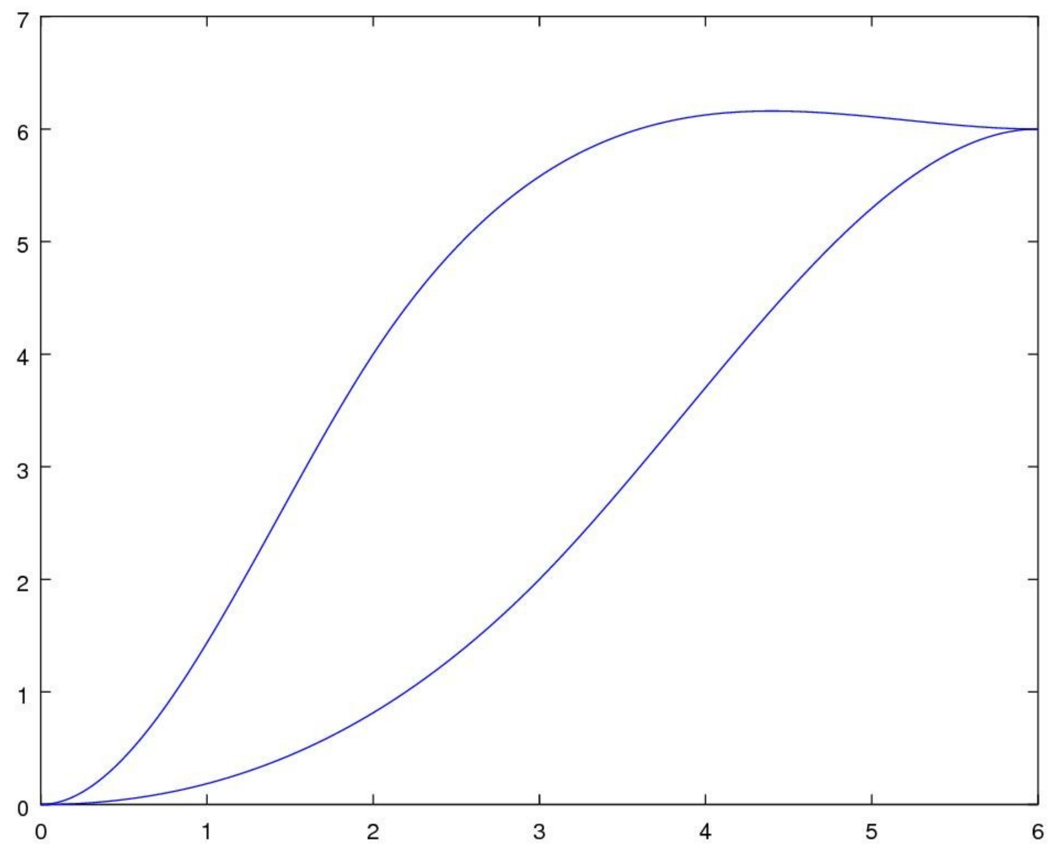

Figura 3: x vs y

REFERENCIAS

[1] Richard L. Burden & J.Douglas Faires, *Análisis Numérico*.