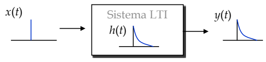
CONVOLUCION

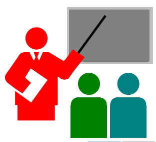


Concepto

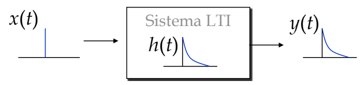
- La convolución es la forma natural de comportarse de un sistema LTI, como respuesta a un estímulo de entrada.
- Su forma de operación se deriva directamente de las propiedades de estos sistemas.

Temas a tratar

- Representación de señales en función de impulsos unitarios.
- Propiedades de la convolución.
- Integral y Sumatoria de convolución.
- Deconvolución



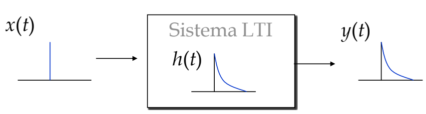
$$y(t) = x(t) * h(t)$$



- $x(t)$ es la entrada
- $h(t)$ es la respuesta impulsional del sistema
- $y(t)$ es la respuesta a la entrada $x(t)$

Integral de Convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

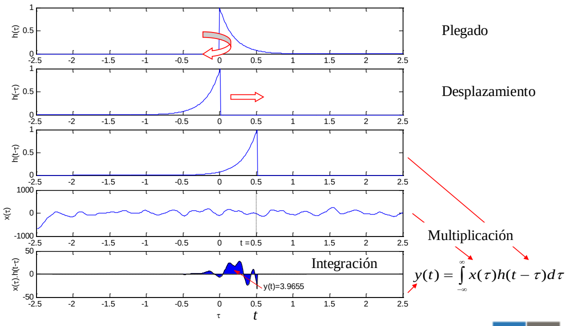


Interpretación...

- **Plegado:** tomar la imagen especular de $h(\tau)$ respecto del eje de ordenadas
- **Desplazamiento:** desplazar $h(-\tau)$ la cantidad t
- **Multiplicación:** multiplicar la función desplazada $h(t - \tau)$ por $x(t)$
- **Integración:** el área bajo la curva $y(t) = h(t - \tau).\ x(t)$ es el valor de la convolución en el tiempo t

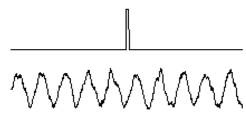
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Interpretación...



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Convolución y suavizado



- La convolución de una onda senoidal ruidosa...
- con una señal "suavizante"...
- suaviza la señal.

La propiedad de suavizado lleva al uso de la convolución para filtrado de señales.

Propiedades

- Conmutatividad
  - si existe $x*y$ entonces $x*y = y*x$
- Asociatividad
  - si existe $(x*y)*z$ entonces $(x*y)*z = x*(y*z)$
- Distributividad
  - si existen $x*y$ y $x*z$ entonces $x*(y+z) = x*y + x*z$
- Conmutatividad del producto por un escalar
  - si existe $x*y$ entonces $a\,(x*y) = (a\,x) * y = (a\,y) * x$

Más propiedades...

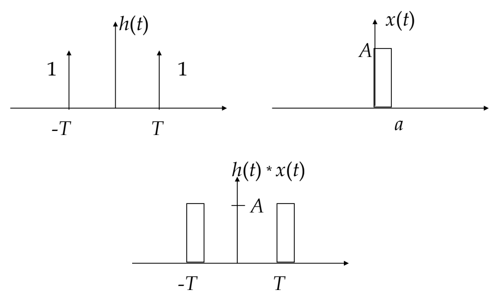
- Desplazamiento
  - si existe $(x*y)$ entonces $\sigma^t(x*y)= (\sigma^t x)*y = x*(\sigma^t y)$
- Derivabilidad
  - si existe $(x*y)$ y es derivable, entonces:

    $D(x*y)= (Dx)*y = x*(Dy)$
- Soporte de la convolución
  - si el soporte de x es $[a,b]$ y el de y es $[c,d]$, entonces el soporte de $x*y$ es $[a+c, b+d]$

Convolución con Impulsos Unitarios

- Elemento unitario de la convolución
- Caso discreto: D_k
- Caso contínuo: $d(t)$
- Relación con $h(t)$ y $h(k)$

Convolución con funciones impulso



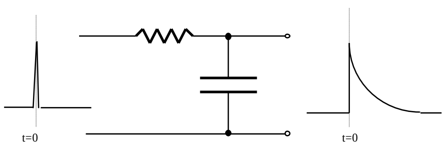
Derivación de la Convolución en Sistemas LTI

- Un sistema lineal e invariante al corrimiento temporal, responde con una señal de salida que es determinada por la convolución entre la entrada al sistema y su respuesta al impulso

¿Cómo está implicada la memoria del sistema en el concepto de convolución?

Sistemas con Memoria

- En los sistemas con memoria la salida depende no sólo de la entrada en ese instante, sino también de las entradas anteriores.



Linealidad

- Un sistema lineal es aquel que posee la propiedad de superposición, esto es, si una entrada consiste de la suma pesada de muchas entradas, entonces la salida es la suma pesada de las respuestas a del sistema a cada una de aquellas entradas.

Linealidad

- Matemáticamente, si $y_1(t)$ es la respuesta a $x_1(t)$ e $y_2(t)$ la respuesta a $x_2(t)$, entonces el sistema es lineal si:
  - La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$
  - La respuesta a $a\, x_1(t)$ es $a\, y_1(t)$

Invariancia al Corrimiento

- Un corrimiento en el tiempo de la señal de entrada causa un corrimiento en el tiempo idéntico en la señal de salida.
- Si $y(t)$ es la salida cuando $x(t)$ es la entrada, entonces $y(t - to)$ es la salida cuando $x(t - to)$ es la entrada.

Derivación

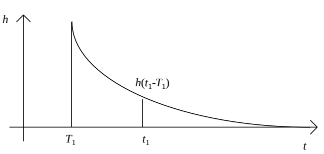
- El hecho que el sistema sea lineal e invariante en el tiempo hace que sea posible aplicar el principio de superposición, y por lo tanto también el concepto de convolución.

Derivación

- Si se quiere saber cuál es el valor de la respuesta del sistema en el instante t_1, se debe considerar la respuesta del sistema al impulso de entrada, pero corrido un tiempo t_1 a partir del instante en que se produjo el estímulo (T_1).

Derivación

- $y(t_1)= h(t_1\text{-}T_1)\cdot$(Impulso en T_1)



Derivación

- Si hubiera más de un impulso en la entrada del sistema, debería aplicarse el principio de superposición:

$$y(t_1) = h(t_1\text{-}T_1)\cdot(\text{Impulso en } T_1)+$$
$$+\, h(t_1\text{-}T_2)\cdot(\text{Impulso en } T_2)+$$
$$+\, h(t_1\text{-}T_3)\cdot(\text{Impulso en } T_3)+\ldots$$

Derivación

- Generalizando, y reemplazando t_1 por t genérico, se puede escribir esta última expresión de la siguiente manera:

$$y(t)=\sum_{T_n=0}^{T_n=t} h(t-T_n)(\text{Impulso en } T_n)$$

Derivación

Si consideramos que (Impulso en T_n) = $x(T_n)\Delta T$

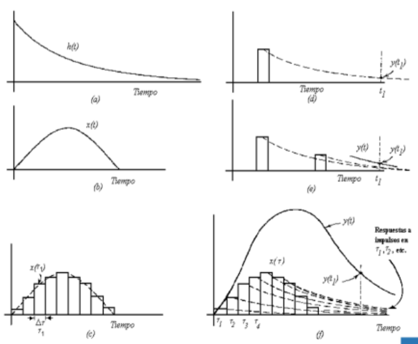
$$y(t)=\sum_{T_n=0}^{T_n=t} h(t-T_n)\; x(T_n)\; \Delta T$$

y si se hace tender ΔT a cero ($\Delta T \to 0$), entonces:

$$y(t)=\int_{T=0}^{T=t} h(t-T)\; x(T)dT$$

que concuerda con la expresión de la convolución: $y(t)=h(t)*x(t)$.

En forma gráfica...



Observaciones

- Los impulsos en $T_n > t$ no contribuyen al valor de la salida
- Las condiciones iniciales del sistema son nulas (la salida estaba fijada a cero antes que fuese colocada alguna excitación en la entrada).

Sumatoria de convolución

- Para evaluar en forma discreta la convolución de dos señales continuas muestreamos $h(t)$ y $x(t)$ con un intervalo T.

Sumatoria de convolución

- La suma de convolución o convolución discreta:

$$y[k]=\sum_{i=0}^{N-1} x[i]h[k-i]$$

- Puede ser modificada:

$$y(kT)=T\sum_{i=0}^{N-1} x(iT)h[(k-i)T]$$

- Aproximándose a la integral de convolución de tiempo continuo mediante integración numérica rectangular.

Observación

- Por lo tanto, para funciones temporalmente acotadas la convolución discreta aproxima a la convolución continua dentro del error producido por la integración numérica rectangular.
- Si el intervalo de muestreo *T* es suficientemente pequeño, el error introducido por la convolución discreta es despreciable.

Caso Discreto: Variaciones...

$$y_k = x_k * h_k$$

$$= \sum_{n=0}^{k} x_n h_{k-n} \quad h_k \text{ y } x_k \text{ causales}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h_{k-n} \quad h_k \text{ y } x_k \text{ generales}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{k} x_n h_{k-n} \quad h_k \text{ general y } x_k \text{ causal}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n h_{k-n} \quad h_k \text{ causal y } x_k \text{ general}$$

Operatoria numérica en Convolución Discreta

- Trabajaremos con la ecuación en recurrencia de un sistema discreto sencillo como ejemplo de la convolución discreta...

Ejemplo

- La ecuación en recurrencia del sistema de primer orden que se analizará a continuación es la siguiente:

$$y_n = 0.7 y_{n-1} + x_n$$

Ejemplo

$$y_n = 0.7 y_{n-1} + x_n$$
$$x_n = \delta(n)$$

n	1	2	3	4
t	*T*	*2T*	*3T*	*4T*
$x_n = x(nT)$	1	0	0	0
$h_n = h(nT)$	1	0.7	0.49	0.34

Ejemplo

$$y_n = 0.7 y_{n-1} + x_n$$
$$x_n = \delta(1) + 2\delta(3)$$

n	1	2	3	4	5	6
t	*T*	*2T*	*3T*	*4T*	*5T*	*6T*
$x_n = x(nT)$	1	0	2	0	0	0
$y_n = y(nT)$ *	1	0.7	0.49	0.34	0,24	0,17
$y_n = y(nT)$ **	0	0	2	1.4	0.98	0.68
y(nT)	**1**	**0.7**	**2.49**	**1.74**	**1.22**	**0.85**

Ejemplo: Multiplicación Término a Término

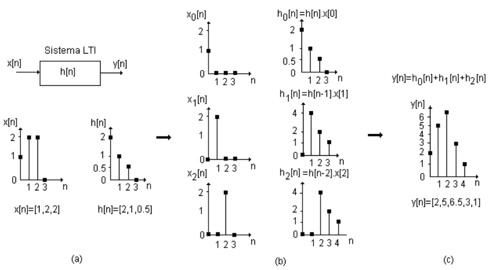
1	0,7	0,49	0,34		
1		2			
1	0,7	0,49	0,34	Δ1	Δ2
		2	1,4	0,98	0,68
1	**0,7**	**2,49**	**1,74**	**0,98**	**0,68**
				+Δ1	**+Δ2**

Convolucion Discreta

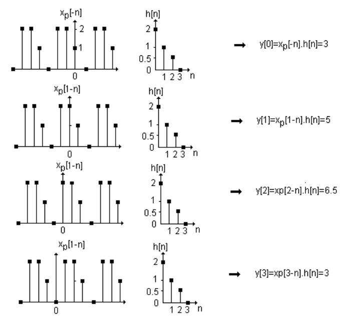
$$y(nt) = e(nt) * \mathbf{h}(nt)$$

16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125								**h**(nt)
2	2	2	0	0	0	2	2								e(nt)
32	16	8	4	2	1	0.5	0.25								
	32	16	8	4	2	1	0.5	0.25							
		32	16	8	4	2	1	0.5	0.25						
			0	0	0	0	0	0	0	0					
				0	0	0	0	0	0	0	0				
					0	0	0	0	0	0	0	0			
						32	16	8	4	2	1	0.5	0.25		
							32	16	8	4	2	1	0.5	0.25	
32	48	56	28	14	7	35.5	49.75	24.75	12.25	6	3	1.5	0.75	0.25	

Convolución lineal



Convolución circular



Convolución circular

¿Se cumplen todas las propiedades de la convolución lineal para el caso discreto?

Lineal a partir de circular

- Si $x_1[n]$ y $x_2[n]$ poseen N muestras:
  - Modificar cada una de las secuencias agregándoles N-1 ceros ($x_{1m}[n]$ y $x_{2m}[n]$).
  - Calcular la TDF de cada secuencia,
  - Multiplicarlas entre sí,
  - Calcular la TDFI.

$$\begin{matrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_{1m}[n] \\ x_{2m}[n] \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} X_{1m}[k] \\ X_{2m}[k] \end{matrix} \longrightarrow X_{1m}[k].X_{2m}[k] \longrightarrow x_{1m}[n] \; (2N\text{-}1) \; x_{2m}[n] \longrightarrow x_1[n]*x_2[n]$$

Representación Matricial

El cálculo de las *y(n)* define un sistema de ecuaciones:

$y(0)=h(0)\,x(0)$
$y(1)=h(1)\,x(0)+h(0)\,x(1)$
$y(2)=h(2)\,x(0)+h(1)\,x(1)+h(0)\,x(2)$
$y(3)=h(3)\,x(0)+h(2)\,x(1)+h(1)\,x(2)+h(0)\,x(3)$
...

Convolución y Filtrado

- La aplicación práctica más utilizada de la convolución se observa en los procedimientos de filtrado.
- Cuando se filtra una señal, lo que se intenta hacer es "sacar" las componentes frecuenciales que no interesan, o distorsionan dicha señal.
- Esto sería equivalente a convolucionar la señal de interés con otra señal que anule las componentes que no interesan.

Convolución y Filtrado

- Como el cálculo de la convolución es más complicado que multiplicar dos señales es común operar así:
  - Pasar al dominio de las frecuencias
  - Multiplicar el espectro de dicha señal por un espectro que anule las componentes frecuenciales que no interesan
  - Volver al dominio del tiempo

Deconvolución

El problema Inverso

Deconvolución

El problema Inverso

IDENTIFICACION CONTROL

Identificación

$y(0)=h(0)\,x(0)$
$y(1)=h(1)\,x(0)+h(0)\,x(1)$
$y(2)=h(2)\,x(0)+h(1)\,x(1)+h(0)\,x(2)$
$y(3)=h(3)\,x(0)+h(2)\,x(1)+h(1)\,x(2)+h(0)\,x(3)$
...

$h(0)=y(0)/x(0)$
$h(1)=[y(1) - h(0)\,x(1)]/x(0)$
$h(2)=[y(2) - h(1)\,x(1) - h(0)\,x(2)]/x(0)$
$h(3)=[y(3) - h(2)\,x(1) - h(1)\,x(2) - h(0)\,x(3)]/\,x(0)$
...

Control

y(0)=h(0) x(0)
y(1)=h(1) x(0)+h(0) x(1)
y(2)=h(2) x(0)+h(1) x(1)+h(0) x(2)
y(3)=h(3) x(0)+h(2) x(1)+h(1) x(2)+h(0) x(3)
...

x(0)=y(0)/h(0)
x(1)=[y(1) - x(0) h(1)]/h(0)
x(2)=[y(2) - x(1) h(1) - x(0) h(2)]/h(0)
x(3)=[y(3) - x(2) h(1) - x(1) h(2) - x(0) h(3)]/ h(0)
...

Matricialmente

- Identificación

  $y = X\,h \Rightarrow h = X^{-1}\,y$

- Control

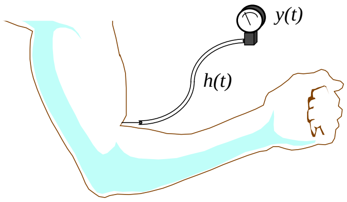
  $y = H\,x \Rightarrow x = H^{-1}\,y$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \ldots\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & 0 & 0 & 0 & .. \\ x(1) & x(0) & 0 & 0 & .. \\ x(2) & x(1) & x(0) & 0 & .. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

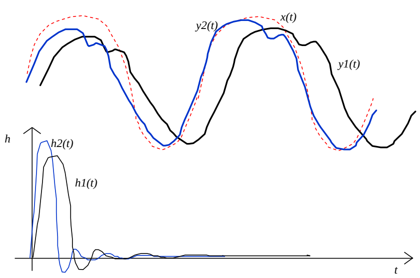
$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \ldots\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 & .. \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & .. \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & .. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Ejemplo



x(t)=?

Ejemplo

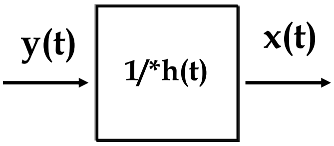


Ejemplo

- Para poder hallar la excitación del sistema, (correspondiente a la onda de presión real) es necesario aplicar deconvolución.

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow x(t) = \frac{y(t)}{*h(t)}$$

O también...



División término a término

0 0 3 5.5 2.6 0.8 0 0 |1 .5 .2

División término a término

0 0 3 5.5 2.6 0.8 0 0 |1 .5 .2
3

División término a término

0 0 3 5.5 2.6 0.8 0 0 |1 .5 .2
3 1.5 0.6 3

División término a término

0 0 3 5.5 2.6 0.8 0 0 |1 .5 .2
3 1.5 0.6 3
----
0 4 2 0.8

División término a término

0 0 3 5.5 2.6 0.8 0 0 |1 .5 .2
3 1.5 0.6 3 4
----
0 4 2 0.8

División término a término

```
0  0    3     5.5    2.6   0.8     0      0       |1     .5       .2
        3     1.5    0.6                             3    4
      ------------------------------
        0      4      2    0.8
               4      2    0.8
```


División término a término

```
0  0    3     5.5    2.6   0.8     0      0       |1     .5       .2
        3     1.5    0.6                             3    4
      ------------------------------
        0      4      2    0.8
               4      2    0.8
      ------------------------------
               0      0      0
```


Deconvolucion Discreta

$$e(nt) = \frac{y(nt)}{{}^{*}\mathbf{h}(nt)}$$

```
32 48 56 28 14 7 35.5 49.75 24.75 12.25 6 3 1.5 0.75 0.25 | 16 8 4 2 1 0.5 0.25 0.125
32 16 8 4 2 1 0.5 0.25                                    |--------------------------
-----------------------                                     2 2 2 0 0 0 2 2
0 32 48 24 12 6 35 49.5 24.75
  32 16 8 4 2 1 0.5 0.25
  -----------------------
  0 32 16 8 4 34 49 24.5 12.25
    32 16 8 4 2 1 0.5 0.25
    -----------------------
    0 0 0 0 32 48 24 12 6
      0 0 0 0 0 0 0 0
      ---------------
      0 0 0 32 48 24 12 6 3
        0 0 0 0 0 0 0 0
        ---------------
        0 0 32 48 24 12 6 3 1.5
          0 0 0 0 0 0 0 0
          ---------------
          0 32 48 24 12 6 3 1.5 0.75
            32 16 8 4 2 1 0.5 0.25 0.25
            -----------------------
            0 32 16 8 4 2 1 0.5 0.25
              32 16 8 4 2 1 0.5 0.25
              ----------------------
              0 0 0 0 0 0 0 0
```


En la frecuencia...

- La dualidad tiempo-frecuencia que se observa en el caso de la convolución, se sigue dando en la deconvolución: la deconvolución en un dominio implica la división en el otro.

$$x(t)=y(t)/^{*}h(t) \;\leftrightarrow\; X(\omega)=Y(\omega)/H(\omega)$$

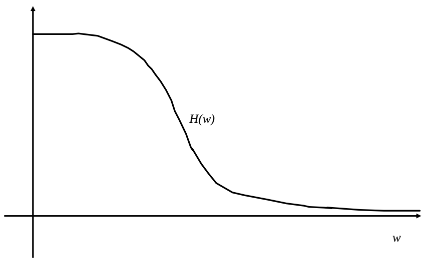
En la frecuencia...

- Por lo tanto, si se quiere hallar el espectro de la señal de excitación debe dividirse el espectro de la señal de respuesta por el espectro de la respuesta al impulso del sistema
- O, lo que es lo mismo, multiplicar el espectro de la señal de salida por el espectro inverso de la respuesta al impulso

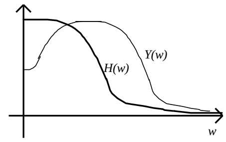
Ruido

- Este mecanismo posee una desventaja, ya que su propia naturaleza incrementa considerablemente el ruido que pudiera haber en la respuesta *y(t)*.
- La razón es que la mayor parte de los sistemas físicos poseen un ancho de banda limitado...

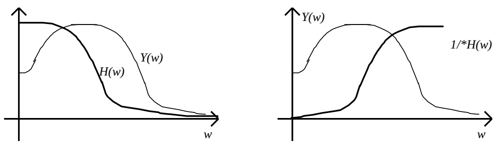
Ruido



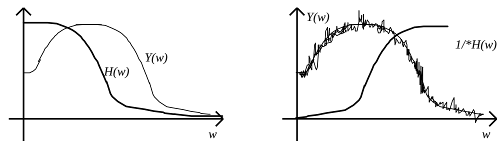
Ruido



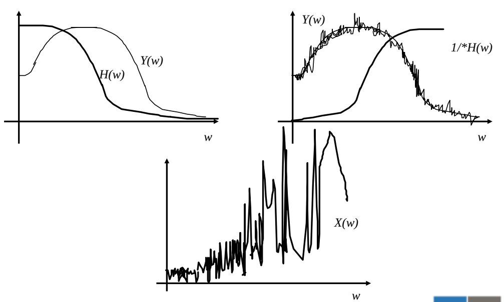
Ruido



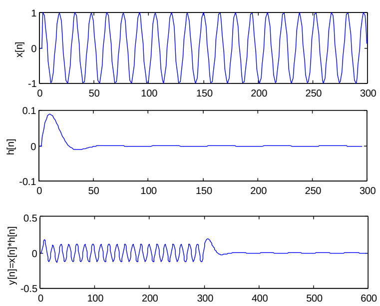
Ruido



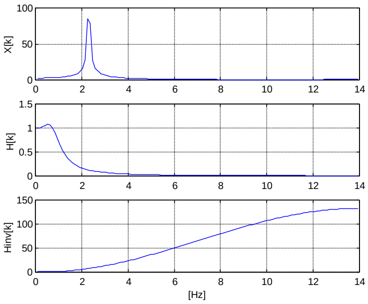
Ruido



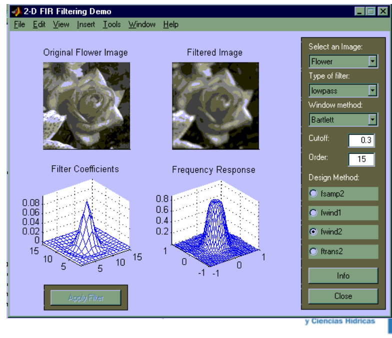
Deconvolución...



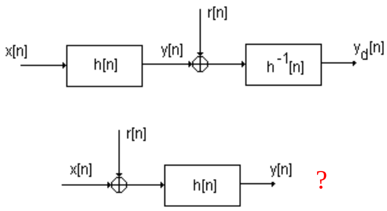
Deconvolución...



Convolución de Imágenes



Variaciones…



Función Correlación

Correlación Cruzada

Autocorrelación

Función Correlación Cruzada

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

- *x(t)* y *y(t)* son señales de energía finita
- $R_{xy}(\tau) = 0$ cuando las señales son ortogonales para un desplazamiento τ determinado
- En ese caso se dice que las señales no están correlacionadas

Interpretación

- Es una medida de la similitud entre las dos señales tanto en morfología como en ubicación temporal
- La función correlación cruzada representa la evolución de esta similitud según varía τ
- En el espacio de señales, la modificación de τ es análoga a una rotación del vector considerado

Función Autocorrelación

Función Autocorrelación

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Función Autocorrelación

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Para $\tau = 0$, $R_{xx}(\tau)$ toma el valor de la ENERGÍA de la señal según fue definida anteriormente

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|x\|_2^2$$

Propiedades

La correlación cruzada y la autocorrelación de señales reales son también reales

Propiedades

Para señales reales

$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$

$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ La función autocorrelación de una señal real es una función par

Propiedades

Teniendo en cuenta la Desigualdad de Schwarz se demuestra que

$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)\, R_{yy}(0)$

Para la autocorrelación:

$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$ En consecuencia, el valor absoluto de la función autocorrelación está acotado superiormente por la energía de la señal.

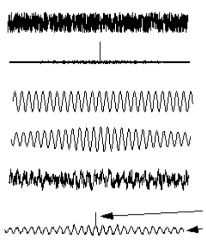
Relación entre Correlación y Convolución

Utilizando un cambio de variable t' = -t en la correlación cruzada de dos señales:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t')y(\tau - t')dt'$$

Autocorrelación y ruido

- La autocorrelation puede ser utilizada para extraer una señal inmersa en ruido aleatorio.



•El ruido aleatorio tiene una autocorrelación tipo delta

•Una función periódica tiene una autocorrelación periódica

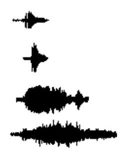
•La autocorrelación de señal más el ruido es *Rs+r*:

Rrr
Rss

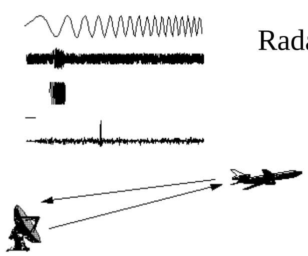
Correlación cruzada para identificar "que"

- Por ejemplo:

Canto de distintos pájaros

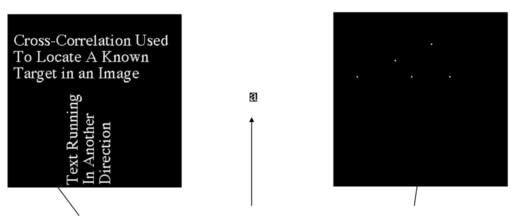


Correlación cruzada para identificar "cuando"

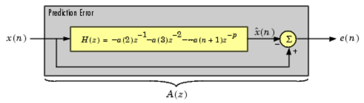


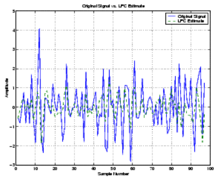
Radar o sonar

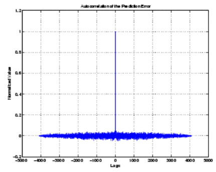
Correlación cruzada para identificar "donde"



Autocorrelación para identificación de sistemas







Bibliografía recomendada

- Kwakernaak: 3.5, 3.7, 3.8
- Brigham: 4.1 a 4.6
- Sinha: 2.5 a 2.10
- Oppenheim-Willsky: 3.1 a 3.5

(Las referencias completas se encuentran en la Planificación de Cátedra)