

Transformada Wavelet Diádica

L. Di Persia

1 de junio de 2005

Índice

1. Introducción	1
2. Transformada Wavelet continua	1
3. Transformada Wavelet Discreta	2
4. Transformada Wavelet Diádica	3
5. Propiedades de la transformada wavelet diádica	7

1. Introducción

Dada una señal discreta unidimensional $f(t)$, la Transformada Wavelet Diádica permite obtener una representación multirresolución de la misma. El objetivo de la misma es analizar no solo lo que pasa en diferentes instantes de la señal sino a su vez, lo que sucede a diversas resoluciones. Una wavelet u ondita, es una función $\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ tal que [Mallat, 1999]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1)$$

Además se pide que $\|\psi\| = 1$ y debe estar centrada en las cercanías de $t = 0$. Utilizando este tipo de funciones, se define el átomo tiempo-escala como:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2)$$

donde se ha desplazado y escalado la función original, aunque se preserva su norma unitaria y la propiedad de que su valor promedio sea nulo.

2. Transformada Wavelet continua

Utilizando estos átomos tiempo-escala se define la transformada wavelet continua como:

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{u,s}^*(t) \quad (3)$$

donde el asterisco simboliza el complejo conjugado. Se debe notar que básicamente se trata de una transformación lineal donde se compara mediante un producto interno, la señal con respecto a una base altamente redundante.

Para dicha representación, es válida la siguiente fórmula de reconstrucción:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W f(u, s) \psi_{u,s}(t) du \frac{ds}{s^2} \quad (4)$$

y

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \quad (5)$$

donde $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de fourier de $\psi(t)$.

3. Transformada Wavelet Discreta

Para el caso de una señal de tiempo discreto $f[n]$ de longitud N , no es posible definir dicha transformación en todas las escalas, sino que su transformada wavelet se computa en las escalas $s = a^j$ con $a = 2^{1/\nu}$, con lo cual se obtendrán ν escalas intermedias entre $[2^j, 2^{j+1})$. La función wavelet discreta, escalada por el factor a^j , toma la forma:

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{n}{a^j}\right) \quad (6)$$

Utilizando esta función wavelet escalada, se puede escribir la transformada wavelet discreta en forma de convolución:

$$W f[n, a^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \psi_j^*[m-n] = f[n] \circledast \psi_j^*[-n] \quad (7)$$

para $2 \leq a^j \leq \frac{N}{K}$, con K el soporte de la wavelet madre (es decir, la wavelet madre tiene valores diferentes de cero en $[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}]$), y \circledast el operador convolución circular. Nótese que en este caso se tiene un límite superior para las escalas. Una transformada wavelet calculada sólo hasta la escala a^j no constituye una representación completa de la señal. Para lograr que sea completa, es necesario tener en cuenta la información contenida en las escalas mayores, que se omitió al truncar la representación en la escala a^j . Esto se logra por medio de la introducción de una función de escala, $\phi(t)$, que esencialmente permitirá conservar las frecuencias bajas correspondientes a las escalas faltantes. Dada la función $\phi(t)$, se computa una versión escalada y discreta de la misma como:

$$\phi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \phi\left(\frac{n}{a^j}\right) \quad (8)$$

Utilizando estas funciones de escala, se obtiene la componente de bajas frecuencias para la escala a^j , como:

$$L f[n, a^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \phi_j^*[m-n] = f[n] \circledast \phi_j^*[-n] \quad (9)$$

Entonces se puede reconstruir la señal original a partir de:

$$f[n] = \frac{\log_e a}{C_\psi} \sum_{j=1}^J \frac{1}{a^j} \sum_{m=0}^{N-1} W f[m, a^j] \psi_j[n-m] + \frac{1}{C_\psi a^J} \sum_{m=0}^{N-1} L f[m, a^J] \phi_j[n-m] \quad (10)$$

Hasta este momento sólo se ha discretizado la escala. Esto genera una representación altamente redundante de la señal, con un tamaño muy grande (muchos mas coeficientes). Para mejorar esto una alternativa es realizar también un muestreo temporal. Una forma de lograr esto es muestrear el tiempo a intervalos regulares proporcionales a la escala de trabajo, esto es, un muestreo con intervalo $a^j u_0$, como sigue:

$$\psi_{j,k}[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi \left(\frac{n - k a^j u_0}{a^j} \right) \quad (11)$$

Utilizando este muestreo de la función wavelet se logra una representación más compacta. El problema que presenta dicha representación es que resulta variante frente a traslaciones. Esto es, los coeficientes wavelet obtenidos a partir de una señal pueden ser muy diferentes de los de una versión desplazada de la misma, a menos que el desplazamiento sea proporcional a $a^j u_0$. Para resolver estos problemas se utiliza la transformada diádica.

4. Transformada Wavelet Diádica

Un problema de la transformada wavelet discreta es que resulta ser una representación variante frente a la traslación, esto es, dos señales iguales pero desplazadas cierta cantidad de tiempo, obtendrán representaciones diferentes. Esto no es muy deseable desde el punto de vista del reconocimiento de patrones donde se desea que el mismo patrón, sin importar su defasaje relativo, tenga la misma representación. Además, el número de coeficientes necesarios es mucho mayor que el número N de valores usados en la representación original. Una forma de solucionar estos dos problemas consiste en utilizar la constante $a = 2$ en el desarrollo anterior.

Para entender el funcionamiento de la DWT es necesario introducir algunos conceptos del análisis multirresolución. Dada una señal f , se puede pensar en un análisis de f con resolución 2^{-j} , como una función muestreada f_i que en cada muestra tiene un promedio local de la señal f en una vecindad de tamaño 2^j . Es decir, se trata de una proyección ortogonal en un subespacio $V_j \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Se dice que la secuencia $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ es una aproximación multirresolución, si se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j \quad (12)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_{j+1} \subset V_j \quad (13)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \quad (14)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \quad (15)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{Clausura} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \right) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \quad (16)$$

Ademas existe una θ tal que $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base para el espacio V_0 [Mallat, 1999].

La primer condición asegura que el espacio es invariante ante una traslación proporcional a la escala 2^j , que se puede asimilar a un muestreo espaciado por 2^j para la resolución 2^{-j} . La segunda implica que una escala 2^j tiene toda la información necesaria para calcular la representación en escala $2^{(j+1)}$. La tercera implica que una dilatación por 2 de una función de V_j define la aproximación en la escala mas gruesa $2^{(j+1)}$. La cuarta implica que cuando la resolución 2^{-j} tiende a cero, se pierde todo el detalle de la función, y la quinta implica que cuando la resolución 2^{-j} se hace infinita, se recupera la señal original.

La existencia de una base para V_0 indica que existirán coeficientes $a[n]$ tales que foda función $\xi \in V_0$ puede ser escrita como:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \theta(t - n) \quad (17)$$

Ahora bien, como se mencionó, la aproximación de f en la resolución 2^{-j} será la proyección ortogonal de f sobre V_j . Para poder encontrar esta proyección, se necesita una base ortonormal para V_j . Esta base se construye a partir de las funciones de escala generadas mediante una ortonormalización de la base $\{\theta_j\}$ y utilizando las propiedades de escalado e invarianza a desplazamientos de la aproximación multirresolución. Dada la función de escala cuya transformada de Fourier es:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}} \quad (18)$$

se define

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \quad (19)$$

y entonces $\{\phi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituye una base ortonormal para V_j .

Ahora, la proyección de f en el subespacio V_j se puede expresar como:

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} \quad (20)$$

Se define la aproximación en la escala 2^{-j} por medio del producto interno:

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad (21)$$

Se puede observar que este producto interno es de la misma forma que la ecuación (9), es decir que estamos observando la componente de baja frecuencia en escala $s = a^j$ con $a = 2$.

Asociado con la función de escala ϕ se puede determinar un filtro discreto $h[n]$ llamado filtro conjugado en espejo (Conjugate Mirror Filter), a partir de la relación entre la dilatación y el desplazamiento de la función de escala:

$$h[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle \quad (22)$$

Ahora, se tiene una forma de calcular la proyección sobre V_j , y por otro lado se sabe que $V_j \subset V_{j-1}$ (ver ecuación (13)). Supongamos que W_j es el complemento ortogonal de V_j de forma que $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, es decir, el espacio V_{j-1} es suma directa del espacio V_j y el W_j , con lo cual todo vector de V_{j-1} se puede escribir como suma de un vector en V_j y otro en W_j . Esto quiere decir que:

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f \quad (23)$$

Para poder calcular la proyección sobre W_j se necesita una base ortonormal de dicho espacio. Esta base se puede construir a partir de una función wavelet trasladada. Sea la función wavelet cuya transformada de Fourier es:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (24)$$

donde

$$\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi)$$

Se define

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \quad (25)$$

Entonces para cada escala 2^j el conjunto $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituye una base para W_j , y mas aún, para todas las escalas, el conjunto $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ constituye una base para $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

De forma similar a la función de escala, esta función wavelet tiene asociado un filtro espejo $g[n]$, que resulta de la comparación entre la dilatación y el desplazamiento de ψ , de forma:

$$g[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right), \psi(t-n) \right\rangle \quad (26)$$

Los coeficientes de este filtro pueden ser calculados a partir de los de h utilizando la siguiente fórmula:

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n] \quad (27)$$

De esta forma la proyección de la función f sobre el espacio W_j da como resultado la información contenida en la proyección sobre V_{j-1} que no está presente en la proyección sobre V_j . La proyección es:

$$P_{W_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (28)$$

Esta información contenida en la proyección sobre V_{j-1} que no está presente en la proyección sobre V_j se denomina detalle, y esta dada por los coeficientes del producto interno:

$$d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (29)$$

Utilizando los filtros h y g se puede verificar que se cumplen las siguientes ecuaciones para los coeficientes de aproximación y detalle:

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p] a_j[n] \quad (30)$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p] a_j[n] \quad (31)$$

y para la reconstrucción,

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[p-2n] a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[p-2n] d_{j+1}[n] \quad (32)$$

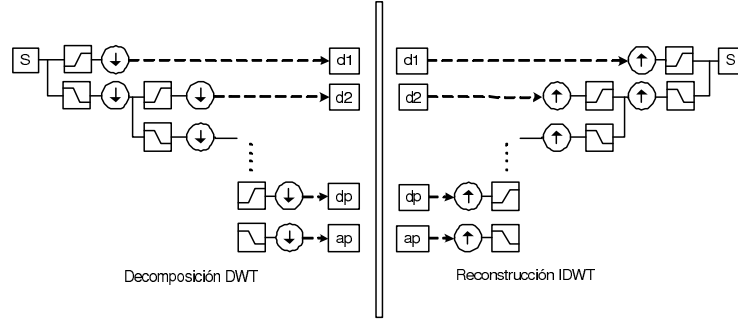


Figura 1: DWT mediante banco de filtros

Estas ecuaciones permiten ver una forma muy simple de calcular la DWT a partir de un banco de filtros. El filtro h tiene características de pasabajos, mientras que el g es un pasabandas. El algoritmo entonces consiste en lo siguiente: tomada la señal de longitud $N = 2^p$ como la aproximación inicial, se la filtra con los filtros h y g mediante las ecuaciones (30) y (31). Dado que el contenido frecuencial de cada una de estas señales resultantes se encuentra reducido, se submuestra por un factor de dos. A partir de la ecuación (32) se ve que se puede reconstruir la señal original a partir de lo anterior, simplemente remuestreando al doble de frecuencia y sumando. Esta descomposición simplemente representa

la primer escala. Este proceso se repite, siempre aplicando las ecuaciones (30) y (31) a los coeficientes de aproximación de una escala, para obtener los coeficientes de aproximación y detalle de la escala siguiente. Esto se puede realizar hasta la escala p si la señal era de longitud $N = 2^p$. Por lo tanto, la descomposición wavelet diádica completa consistirá en los $\frac{N}{2}$ coeficientes de detalle en la escala 1, los $\frac{N}{4}$ coeficientes de detalle de la escala 2, y así sucesivamente hasta obtener un coeficiente de detalle y uno de aproximación en la escala p . En la Figura [1] se puede apreciar la estructura de este algoritmo como un banco de filtros.

5. Propiedades de la transformada wavelet diádica

La DWT como se la definió presenta características particulares que la hacen muy interesantes para el procesamiento de señales de todo tipo. Una de las principales características es la forma en que particiona el plano Tiempo-Frecuencia. A partir de las ecuaciones anteriores, se puede ver que la transformada generará una representación tiempo-escala, donde para cada escala se presenta la evolución temporal de la señal proyectada sobre la wavelet a esa escala. Desde el punto de vista de un banco de filtros, el efecto de la transformada es analizar la señal con un banco de filtros en el cual el ancho de banda de los mismos varía con la escala, de forma que a medida que se pierde resolución temporal, en ancho de banda de los filtros se hace menor, ganando resolución frecuencial. Este fenómeno se puede apreciar en la Figura [2]. Esta estructura se puede asimilar con un árbol diádico para el soporte temporal, donde los nodos hijos ven reducido a la mitad su soporte, y siempre utilizando dos hijos para cada padre.

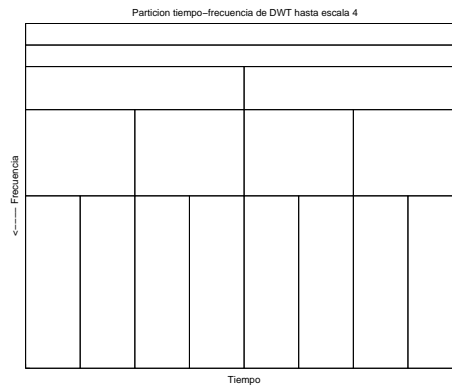


Figura 2: Partición tiempo-frecuencia de la DWT, para 4 escalas

Referencias

[Mallat, 1999] Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of signal Processing*. Academic Press, second edition.