Cálculo Numérico 2016
Trabajo Práctico 7

Algoritmos para problemas de valores iniciales

Ejercicio 1: Defina los errores cometidos al resolver numéricamente una ecuación diferencial: error local de truncamiento, error local de redondeo, error global de truncamiento, error global de redondeo y error total.

Ejercicio 2: Defina métodos de un paso, multipasos, explícitos e implícitos.

Ejercicio 3: Clasifique los siguientes esquemas según las definiciones del ejercicio 2 e indique el orden de cada uno.

(a) Euler hacia adelante:

$$w_{n+1} = w_n + hf_n$$

(b) Euler hacia atrás:

$$w_{n+1} = w_n + hf_{n+1}$$

(c) Trapezoidal o Crank-Nicholson:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

(d) Euler modificado (Runge-Kutta):

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}[f(t_n, w_n) + f(t_n + h, w_n + hf(t_n, w_n))]$$

(e) Heun (Runge-Kutta):

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{4}[f_n + 3f(t_n + \frac{2}{3}h, w_n + \frac{2}{3}hf_n)]$$

(f) Runge-Kutta:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \alpha \\
k_1 &= h \cdot f(t_i, w_i) \\
k_2 &= h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(t_i + h, w_i + k_3) \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1
\end{aligned}$$

Ejercicio 4: Implemente en Octave la función `function [w,t] = CN_Newton(f,dfdy,a,b,y0,N)` que resuelve un PVI de la forma

$$y' = \mathtt{f}(t, y) \quad \mathtt{a} \leq t \leq \mathtt{b} \quad y(0) = \mathtt{y0}$$

mediante el método de Crank-Nicholson con iteraciones de Newton para avanzar la solución, donde `dfdy` es la derivada parcial de la función `f` respecto de y, y `N` es el número de pasos. Dicha función devuelve la solución aproximada en el vector `w` y el vector de los pasos de tiempo `t`. Previamente debe explicitar y justificar en un pseudo-código las ecuaciones que se resuelven en cada paso del procedimiento.
Repita el ejercicio para el método de Euler hacia atrás.

Ejercicio 5: Analice el comportamiento del error para los métodos de Euler hacia adelante y Crank-Nicholson cuando se resuelve el siguiente PVI

$$y' = te^{3t} - 2y \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 0$$

cuya solución exacta es $y(t) = te^{3t}/5 - e^{3t}/25 + e^{-2t}/25$. Considere los siguientes pasos $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Determine si el orden empírico para cada uno de los métodos se corresponde con el teórico.

Ejercicio 6: Obtenga los coeficientes A y B de la fórmula multipaso predictora de Adams-Bashford $w_{n+1} = w_n + h(Af_{n-1} + Bf_n)$ usando el método de coeficientes indeterminados.

Ejercicio 7: Utilice los esquemas de Runge-Kutta de cuarto orden y el siguiente esquema preditor-corrector de Adams de cuarto orden para resolver el PVI del ejercicio 4. Compare los resultados obtenidos.

(a) Adams-Bashford de 4to orden (predictor)

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

(b) Adams-Moulton de 4to orden (corrector)

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

Conceptos de consistencia, orden, estabilidad y convergencia: sea un método multipaso escrito en su forma general (donde el número de pasos del método es $p + 1$)

$$w_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j w_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, w_{n-j})$$

para el PVI $y' = f(t, y)$, $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$, y su error local de truncamiento

$$T_n(y) = y(t_{n+1}) - \sum_{j=0}^{p} a_j y(t_{n-j}) - h \sum_{j=-1}^{p} b_j y'(t_{n-j})$$

podemos analizar:

- *Consistencia:* una condición necesaria y suficiente para que el método multipaso dado sea *consistente* es que se cumpla

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1 \quad \text{y} \quad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$$

- *Orden:* para que el método multipaso sea $O(h^m)$ es necesario y suficiente que además de las ecuaciones anteriores se verifique

$$\sum_{j=0}^{p}(-j)^k a_j + k\sum_{j=-1}^{p}(-j)^{k-1}b_j = 1 \quad \text{para } k = 2, 3, \cdots, m$$

- *Condición de la Raíz:* consiste en analizar las raíces del polinomio característico

$$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j r^{p-j}$$

  Si sus raíces (no necesariamente distintas) cumplen $|r_i| \leq 1$ para cada $i = 1, 2, \cdots, m$ y *si todas las raíces con valor absoluto igual a 1 son simples*, se dice que el método cumple la condición de la raíz.

- *Estabilidad:* los métodos se clasifican de la siguiente manera según su *estabilidad*:

  (a) *Fuertemente Estables*: son aquellos que cumplen la condición de la raíz y tienen a $r = 1$ como *la única* raíz de la ecuación característica cuya magnitud es igual a uno.

  (b) *Débilmente Estables*: aquellos que cumplen la condición de la raíz pero tienen más de una raíz cuyo valor absoluto o módulo es igual a uno.

  (c) *Inestables*: aquellos que no cumplen la condición de la raíz.

Relaciones entre las definiciones: un método multipaso de la forma

$$w_0 = \alpha, \quad , w_1 = \alpha_1, \cdots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

donde

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_{m-1}w_i + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \cdots, w_{i+1-m})$$

es estable si y sólo si cumple la condición de la raíz. Además, si el método es consistente, entonces será estable si y sólo si es convergente.

Ejercicio 8: Analice consistencia, estabilidad, orden y convergencia de los métodos Euler hacia atrás y Crank-Nicholson.

Ejercicio 9: Utilice el método predictor-corrector de Adams del ejercicio 7 para resolver el siguiente PVI,

$$t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3\ln(t) \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

cuya solución exacta es: $y(t) = (7/4)t + (1/2)t^3\ln(t) - (3/4)t^3$. Considere el método de Runge-Kutta de cuarto orden para calcular la solución en los pasos 1, 2 y 3 (el 0 es la condición inicial) requeridos por el predictor. Resuelva el problema para los pasos $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Presente una tabla con los errores máximos obtenidos para cada ecuación y saque conclusiones.