Coloquio – Tema 63 – 10/08/17

Problema de Hertz

El estado tensional sobre un cuerpo elástico es de deformación plana, si el cuerpo tiene forma de prisma recto de longitud infinita, y las fuerzas existentes son tales que sobre cada plano perpendicular al eje baricéntrico del prisma recto, dichas fuerzas son paralelas al plano e idénticas sobre todos los planos perpendiculares. Si se considera un sistema de coordenadas cartesianas en que el eje Z sea paralelo al eje baricéntrico, las fuerzas por unidad de superficie vienen dadas por:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(de manera similar se aplica para las fuerzas en los bordes). Podemos trabajar entonces con fuerzas y desplazamientos como campos vectoriales de dimensión dos:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}; \qquad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$$

La expresión del Principio de Trabajos Virtuales para deformación plana, es enteramente similar a la expresión para tensión plana, con la única diferencia que la ley de Hooke se escribe en este caso:

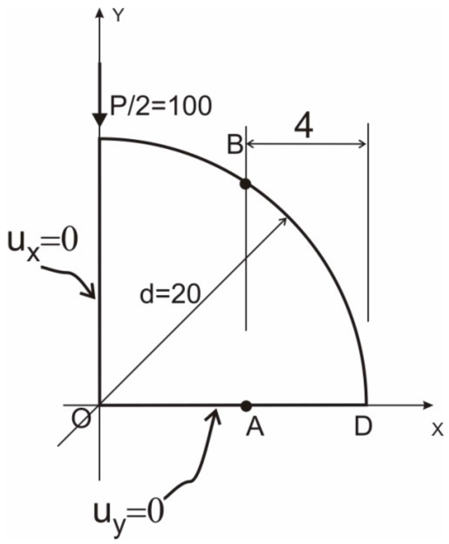
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

1. Plantear el Principio de Trabajos Virtuales para el problema de elasticidad con deformación plana. Aplicarlo al problema mostrado en la figura.

   Utilizar un módulo de elasticidad E=1.0, y un coeficiente de Poisson $\nu=1/3$. La pieza tiene espesor infinito: las cargas se definen por unidad de longitud, y el análisis se hace sobre un espesor unitario; luego, podemos considerar el análisis como si tuviéramos una pieza de espesor unitario.

   La contribución de la carga concentrada en el Principio de Trabajos Virtuales está dada por:

$$\delta u_y\big|_{x=0,y=10} \cdot P/2$$



2. Obtener la solución al problema planteado. Graficar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}$.
3. Graficar la forma del cuerpo deformado.
4. Graficar la distribución de vectores de desplazamiento en el dominio.
5. Comparar la solución en tensiones obtenida con la solución analítica (*d* es el diámetro de la pieza):

$$\sigma_{yy}\Big|_{\text{línea OD}} = \frac{2P}{\pi d}\left[1 - \frac{4d^4}{\left(d^2+4x^2\right)^2}\right]$$

6. Graficar la distribución de la tensión σ_{xx} a lo largo de la línea A-B.
7. Determinar el valor que debe tener la carga para que la tensión σ_{xx} en el punto A sea igual a 0.54.
8. **Opcional:** Comparar los resultados con una solución obtenida por elementos finitos.
9. Presentar un informe detallando los pasos seguidos, programa realizado, gráficas de resultados y conclusiones.

Sugerencias y ayudas:

- Para imponer las condiciones de borde en x=0, en la aproximación del campo u_x, multiplicar la base completa de polinomios por el monomio (x), y para imponer las condiciones de borde en y=0, en la aproximación al campo u_y, multiplicar la base de polinomios por el monomio (y).
- Hacer las primeras pruebas con un grado bajo de polinomios (menor o igual a 2). Una vez que el programa esté depurado, utilizar polinomios de grado alto para lograr precisión en los resultados.
- Para graficar el cambio de forma, utilizar la función *mesh ()*. Para graficar los vectores de desplazamiento, utilizar la función *quiver ().* La gráfica de variación de tensión a lo largo de la línea A-B, podrá realizarla utilizando la función *plot().*