

Cálculo Numérico 2016

Trabajo Práctico 4

Raíces de ecuaciones

Ejercicio 1:

- Realice cuatro iteraciones con el método de la bisección para obtener una aproximación a una de las raíces de la ecuación $f(x) = 3(x+1)(x-0.5)(x-1)$ en el intervalo $[-2, 1.5]$. ¿A cuál de las raíces converge el método? Luego estime una cota para la precisión del resultado obtenido.
- Implemente una función de Octave `function [x,h] = biseccion(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero x de la ecuación no lineal homogénea $f(x) = 0$ y la convergencia h usando el método de la bisección, para una tolerancia tol , un número máximo de iteraciones $kmax$ y los extremos del intervalo inicial de búsqueda $xmin$, $xmax$, con $xmin \neq xmax$. Justifique si la bisección es o no un método globalmente convergente.
- Obtenga una cota para el número de iteraciones que se requieren para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^{-3} a la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que se encuentra en el intervalo $[1,4]$. Obtenga una aproximación de la raíz con esta exactitud mediante el método de la bisección.
- Utilice la definición 2.6 del libro de Burden para demostrar que el método de la bisección tiene convergencia lineal ($\alpha = 1$) y constante de error asintótica $\lambda = 1/2$.

Ejercicio 2:

- Implemente una función de Octave `function [x,h] = puntofijo(g,x0,kmax,tol)` que devuelva un cero o raíz de $f(x) = 0$ y la convergencia h , resolviendo el problema de punto fijo asociado,

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad k \geq 0$$

hasta que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < tol$, para una tolerancia tol dada, un número máximo de iteraciones $kmax$, y una abscisa inicial $x0$. Notar que previamente debe transformarse la ecuación $f(x) = 0$ a la forma $g(x) = x$, lo cual puede hacerse de diversas maneras. Luego, la función $g(x)$ hallada será uno de los argumentos de entrada para la función `puntofijo()` pedida. Responda si este método es o no globalmente convergente.

- La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz única en $[1, 2]$. Dadas las siguientes funciones g_1 y g_2 , proporcione los resultados del método de iteración de punto fijo programado en el ítem (a) para ambas funciones, considerando $p_0 = 1.5$, $tol = 1e-3$ y como criterio de convergencia $|p_n - p_{n-1}| < tol$. Analice los resultados según el teorema correspondiente.

$$(i) \quad x = g_1(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}, \quad (ii) \quad x = g_2(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$$

- Indique si las cotas de error dadas por el Corolario 2.4 del libro de Burden son válidas para las funciones g_1 y g_2 propuestas en el ítem (b). Si lo fueran, aplíquelas para verificar los resultados obtenidos numéricamente.

Ejercicio 3:

- (a) Sea $f(x) = x^2 - 6$. Con $p_0 = 3$ y $p_1 = 2$ encuentre p_3 . Aplique primero el método de la secante, luego el de la posición falsa y saque conclusiones sobre los resultados obtenidos con ambos procedimientos.
- (b) Implemente una función en Octave `function [x,h] = secante(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero de $f(x) = 0$ y la convergencia h usando dicho método para una tolerancia tol , un número máximo de iteraciones $kmax$, y dos abscisas iniciales $xmin$, $xmax$, con $xmin \neq xmax$.
- (c) Implemente una función en Octave `function [x,h] = posicionfalsa(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero de $f(x) = 0$ y la convergencia h usando dicho método para una tolerancia tol , un número máximo de iteraciones $kmax$, y dos abscisas iniciales $xmin$, $xmax$, con $xmin \neq xmax$.

Ejercicio 4:

- (a) Implemente una función de Octave `function [x,h] = newton(f,x0,kmax,tol)` que devuelva un cero x de $f(x) = 0$ y la convergencia h usando dicho método para una tolerancia tol , un número máximo de iteraciones $kmax$, y una abscisa inicial $x0$.
- (b) Use el método de Newton para aproximar, con una exactitud de 10^{-4} , el valor de x que en la gráfica de $y = x^2$ produce el punto más cercano a $(1, 0)$. *Ayuda:* Reduzca al mínimo $[d(x)]^2$ donde d es la función distancia de la gráfica al punto.
- (c) Demuestre que la función $f(x) = e^x - x - 1$ tiene un cero de multiplicidad dos en $p = 0$. Aplique el método de Newton a dicha función con $p_0 = 1$ y saque conclusiones sobre la convergencia.

Ejercicio 5: La ecuación de estado de un gas (la cual relaciona la presión p , el volumen V y la temperatura T) está dada por

$$[p + a(N/V)^2](V - Nb) = kNT$$

donde a y b son dos coeficientes que dependen del gas en particular que hayamos considerado, N es el número de moléculas que se encuentran en el volumen V y k es la constante de Boltzmann.

Asumiendo que el gas es dióxido de carbono (CO_2), los coeficientes a y b toman los siguiente valores: $a = 0.401 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6$ y $b = 42.7e - 6 \text{ m}^3$. Encuentre el volumen que ocupan 1000 moléculas de dicho gas a una temperatura $T = 300 \text{ K}$ y presión $p = 3.5e + 7 \text{ Pa}$ mediante el método de bisección y el método de Newton, con una tolerancia de $1e - 12$ (la constante de Boltzmann vale $k = 1.3806503e - 23 \text{ J/K}$).

Ejercicios sugeridos: S.2.1:1-14,17,18; S.2.2:1-15,19,20,23; S.2.3: 1-10,12-16,19-24,27,30; S.2.4:1-6,8,9.