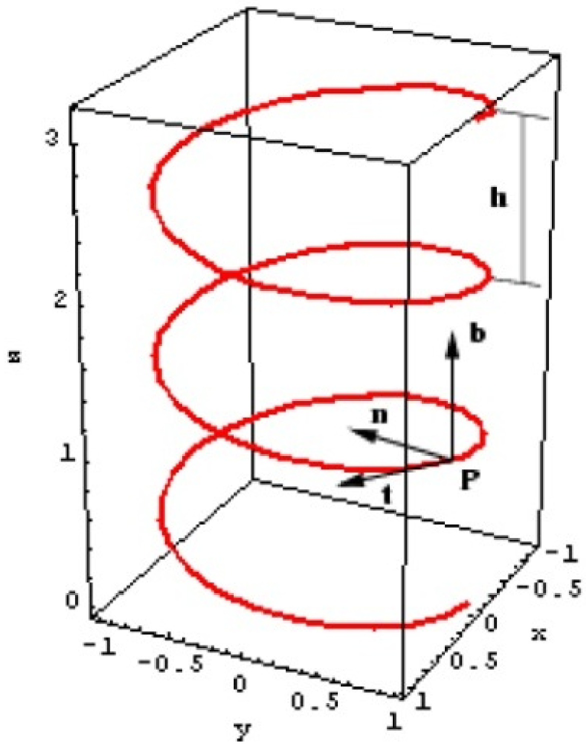
Mecánica del Continuo
Trabajo Práctico Nº2
Vectores y Tensores Cartesianos

Darién Julián Ramírez

Ejercicio 1

Una partícula está restringida a moverse en una curva helicoidal circular como la de la figura, cuyo radio es a y paso h, con velocidad (magnitud) v. ¿Cuál es la aceleración de la partícula P?

Expresar los vectores velocidad y aceleración en función de los vectores unitarios $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ que son, tangente, normal y binormal a la curva en P, respectivamente.



Ayuda:

$$\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}; \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}; \quad \mathbf{n}' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} - \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \bullet \mathbf{t}\right)\mathbf{t}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}'}{\|\mathbf{n}'\|}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

....

$$k = \frac{r}{r + \frac{h}{2\pi}}; \quad v = constante$$

$$T = f(s); \quad x^*(T) = x^*(f(s)) = X(s); \quad \mathbf{v} = \frac{dx^*}{dt} = \frac{dX(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dT} = \mathbf{t}v$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (v\mathbf{t}) = \frac{dv}{dT}t + v\frac{dt}{dT} = vk\mathbf{n} = v\frac{r}{r + \frac{h}{2\pi}}\mathbf{n}$$

$$T_v = \frac{2\pi r}{a}; \quad h = T_v w = \frac{2\pi r}{u}w \implies w = \frac{hu}{2\pi r}$$

$$v = \sqrt{w^2 + u^2} = \sqrt{\left(\frac{hu}{2\pi r}\right)^2 + u^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi r}\right)^2 + 1} \cdot u$$

Ejercicio 2

Probar que:

- $\delta_{ii} = 3$

$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33};$ *Por la definición del Delta de Kronecker.*
$= 1 + 1 + 1 = 3$

- $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$

$\delta_{ij}\delta_{ij}; \quad \mathbf{I} = \mathbf{I^T} \implies \delta_{ij} = \delta_{ji}$
$= \delta_{ij}\delta_{ji};$ *Por contracción de índices repetidos.*
$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33};$ *Por definición del delta de Kronecker.*
$= 1 + 1 + 1 = 3$
No importa qué índice se utilice, el resultado será el mismo:
$\delta_{ij}\delta_{ij}; \quad \mathbf{I} = \mathbf{I^T} \implies \delta_{ij} = \delta_{ji}$
$= \delta_{ji}\delta_{ij};$ *Por contracción de índices repetidos.*
$\delta_{jj} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33};$ *Por definición del delta de Kronecker.*
$= 1 + 1 + 1 = 3$

- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jki} = 6$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jki}; \quad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$
$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk};$ *Por la identidad epsilon-delta*
$\delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{kj} = 3 * 3 - \delta_{jj} = 9 - 3 = 6$

- $\varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$

$\varepsilon_{ijk}A_jA_k;$ *Sólo quedarán los términos donde épsilon sea distinto de cero.*
$= \varepsilon_{123}A_2A_3 + \varepsilon_{312}A_1A_2 + \varepsilon_{231}A_3A_1 + \varepsilon_{321}A_2A_1 + \varepsilon_{132}A_3A_2 + \varepsilon_{213}A_1A_3$
Las permutaciones cíclicas de 123 valen 1 y las permutaciones cíclicas de 321 valen -1.
$= A_2A_3 + A_1A_2 + A_3A_1 - A_2A_1 - A_3A_2 - A_1A_3$
Como el producto escalar conmutativo se pueden reordenar los términos
$= \cancel{A_2A_3} \cancel{+A_1A_2} \cancel{+A_3A_1} \cancel{-A_1A_2} \cancel{-A_2A_3} \cancel{-A_3A_1} = 0$

Otra forma de demostrarlo es jugar con los índices:

$\varepsilon_{ijk}A_jA_k = -\varepsilon_{ikj}A_jA_k = -\varepsilon_{ikj}A_kA_j;$ $\quad j = m$
$= -\varepsilon_{ikm}A_kA_m;$ $\quad k = j$
$= -\varepsilon_{ijm}A_jA_m;$ $\quad m = k$
$= -\varepsilon_{ijk}A_jA_k;$ *Pasando al otro término.*
$\implies \varepsilon_{ijk}A_jA_k + \varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$ *Sumando.*
$\implies 2\varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$ *Pasando el 2 dividiendo.*
$\implies \varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$

- $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$

  $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik};$ *Por contracción de índices repetidos.*

- $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$

  $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iik} = \varepsilon_{jjk} = 0;$ *Porque el símbolo de permutación es cero cuando hay índices repetidos.*

Ejercicio 3

Probar la siguiente identidad usando elementos de geometría:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\mathbf{C}$$

. . . .

Sea $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{W}$ y $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{D} \implies \mathbf{D} \perp \mathbf{B}; \quad \mathbf{D} \perp \mathbf{C}$
$(\mathbf{A} \times \mathbf{D}) \perp \mathbf{A}; \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) \perp (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \implies \mathbf{W}$ está en el plano $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.
Cualquier vector en el plano de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.
$\mathbf{W} = \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_2\mathbf{C}; \quad \alpha_1 = f(\mathbf{A}, \mathbf{C}); \quad \alpha_2 = f(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
$\mathbf{W}$ es una función lineal de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.
α_1 es una función lineal de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C} \implies \alpha_1 = \lambda\mathbf{AC}$
α_2 es una función lineal de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \implies \alpha_2 = \mu\mathbf{AC}$
$\mathbf{W} = \lambda(\mathbf{AC})\mathbf{B} + \mu(\mathbf{AB})\mathbf{C};$ *Le damos valores particulares a* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$.
$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{W} = \mathbf{i} \times \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$
$\mathbf{AC} = 0; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{i}.\mathbf{i} = 1; \quad -\mathbf{j} = \lambda 0\mathbf{i} + \mu 1\mathbf{j} \implies \mu = -1$
$\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{W} = \mathbf{j} \times \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$
$\mathbf{AC} = 1; \quad \mathbf{AB} = \mathbf{j}.\mathbf{i} = 0; \quad -\mathbf{j} = \lambda 1\mathbf{i} - \mu 1\mathbf{j} \implies \lambda = 1$

Ejercicio 4

Probar el ejercicio anterior usando notación indicial.

. . . .

Sea $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{D} \implies [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i = [\mathbf{A} \times \mathbf{D}]_i$
$= \varepsilon_{ijk}A_jD_k = \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{kem}B_eC_m$ *Reordenando.*
$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}A_jB_eC_m$ *Permutando el primer épsilon.*
$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kem}A_jB_eC_m$ *Por la identidad épsilon-delta.*
$= (\delta_{ie}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{je})A_jB_eC_m$ *Distribuyendo.*
$= \delta_{ie}\delta_{jm}A_jB_eC_m - \delta_{im}\delta_{je}A_jB_eC_m$ *Reduciendo índices.*
$= A_jB_iC_j - A_jB_jC_i$ *Reordenando.*
$= (A_jC_j)B_i - (A_jB_j)C_i$ *Pasando a vectorial.*
$= (\mathbf{AC})_jB_i - (\mathbf{AB})_jC_i = [(\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\mathbf{C}]_i$

Ejercicio 5

Probar que si $A_{\alpha_1\ldots\alpha_R}$ y $B_{\alpha_1\ldots\alpha_R}$ son dos tensores de orden R, la ecuación

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = B_{\alpha_1\ldots\alpha_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

es una ecuación tensorial; y por ello *si es válida en un sistema de coordenadas cartesianas lo es en cualquier sistema de coordenadas cartesianas.*

....

Multiplicando ambos lados por $\beta_{i\alpha_1\ldots k\alpha_R}$:
$\beta_{i\alpha_1\ldots k\alpha_R} A_{\alpha_1\ldots\alpha_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \beta_{i\alpha_1\ldots k\alpha_R} B_{\alpha_1\ldots\alpha_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\implies \overline{A}_{i\ldots k}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \overline{B}_{i\ldots k}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$

Ejercicio 6

Probar usando notación indicial que la contracción de dos índices cualesquiera de un tensor Cartesiano de orden n es un tensor cartesiano de orden $n - 2$.

....

$$\overline{A}_{ijk\ldots n}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = \beta_{i\alpha_1}\beta_{j\alpha_2}\beta_{k\alpha_3}\ldots\beta_{n\alpha_R} A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\overline{A}_{iik\ldots n}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = \beta_{i\alpha_1}\beta_{i\alpha_2}\beta_{k\alpha_3}\ldots\beta_{n\alpha_R} A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\overline{A}_{ik\ldots n}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = \delta_{\alpha 1\alpha 2}\beta_{k\alpha_3}\ldots\beta_{n\alpha_R} A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ejercicio 7

Probar (usando notación indicial) que si $\mathbf{A}_{ij}$ es un tensor de rango 2, $\mathbf{A}_{ii}$ es un escalar.

....

A_{ij} *:Es un tensor cartesiano de rango 2*
$\implies A_{ii}$ *:Es un tensor cartesiano de rango 0*

$\overline{A_{ij}} = \beta_{ie}\beta_{jm}A_{em} \implies \overline{A_{ii}} = \beta_{ie}\beta_{im}A_{em};$ β *es una matriz ortogonal:* $\beta^T = \beta^{-1}$
$(\beta^T_{ie}\beta_{im} = \beta_{ei}\beta_{im} = \beta^{-1}\beta = \mathbf{I} = \delta_{em})$
$= \delta_{em}A_{em} = A_{ee} = A_{mm}$

Ejercicio 8

Siendo **a**, **b**, **c** y **d** vectores, usar notación indicial para probar:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$ *Intercambiando j y k.*
$= -\varepsilon_{ikj}a_jb_k$ *Reordenando.*
$= -\varepsilon_{ikj}b_ka_j = [-\mathbf{b} \times \mathbf{a}]_i$

- $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = a_i(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k && \textit{Rotando los índices hacia la derecha.}\\
&= a_i \varepsilon_{kij} b_j c_k && \textit{Reordenando.}\\
&= c_k \varepsilon_{kij} a_i b_j = c_k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = [\mathbf{c} \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = a_i(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = a_i \varepsilon_{jki} b_j c_k && \textit{Rotando los índices hacia la izquierda.}\\
&= a_i \varepsilon_{jki} b_j c_k && \textit{Reordenando.}\\
&= b_j \varepsilon_{jki} c_k a_i = b_j(\mathbf{c} \times \mathbf{a})_j = [\mathbf{b} \bullet (\mathbf{c} \times \mathbf{a})]_j
\end{aligned}$$

- $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{a})]_i = a_i(\mathbf{b} \times \mathbf{a})_i = a_i \varepsilon_{ijk} b_j a_k && \textit{Rotando los índices hacia la izquierda.}\\
&= a_i \varepsilon_{jki} b_j a_k && \textit{Reordenando.}\\
&= b_j \varepsilon_{jki} a_k a_i = b_j(\mathbf{a} \times \mathbf{a})_j = [\mathbf{b} \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{a})]_j = [\mathbf{b} \bullet \mathbf{0}]_j = 0; && \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

- $(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \bullet \mathbf{a})\,(\mathbf{d} \bullet \mathbf{b}) - (\mathbf{c} \bullet \mathbf{b})\,(\mathbf{d} \bullet \mathbf{a})$

$$\begin{aligned}
&[(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]_i = (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_i(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} c_j d_k \varepsilon_{iem} a_e b_m && \textit{Reordenando.}\\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{iem} a_e b_m c_j d_k && \textit{Por la identidad épsilon-delta.}\\
&= (\delta_{je}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ke}) a_e b_m c_j d_k && \textit{Distribuyendo.}\\
&= \delta_{je}\delta_{km} a_e b_m c_j d_k - \delta_{jm}\delta_{ke} a_e b_m c_j d_k && \textit{Reduciendo índices.}\\
&= a_j b_k c_j d_k - a_k b_j c_j d_k && \textit{Reordenando.}\\
&= a_j c_j b_k d_k - a_k d_k b_j c_j = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c})_j (\mathbf{b} \bullet \mathbf{d})_k - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{d})_k (\mathbf{b} \bullet \mathbf{c})_j
\end{aligned}$$

Ejercicio 9

Sea $\mathbf{r}$ un radio vector y r su magnitud. Probar usando notación indicial (siendo n un número entero):

Consideraciones:

$$[\mathbf{r}]_i = r_i = x_i; \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_2^2} \implies r^2 = r_i r_i = x_i x_i$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \delta_{ji}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = \delta_{ii} = \delta_{jj} = 3$$

- $\nabla \bullet (r^n \mathbf{r}) = (n+3)\, r^n$

$$\begin{aligned}
&\nabla \bullet (r^n \mathbf{r}) = \frac{\partial (r^n \mathbf{r})_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (r^n r_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial r^n}{\partial x_i} r_i + r^n \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = n r^{n-2} x_i r_i + r^n \delta_{ii}\\
&= n r^{n-2} x_i x_i + 3 r^n = n r^{n-2} r^2 + 3 r^n = n r^n + 3 r^n = (n+3) r^n
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r^n}{\partial x_i} = n r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x_i} = n r^{n-1} \frac{x_i}{r} = n r^{n-1} n^{-1} x_i = n r^{n-2} x_i$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \left((x_j x_j)^{\frac{1}{2}} \right)}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (x_j x_j)}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} 2 x_i = \frac{1}{\sqrt{(x_j x_j)}} x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial (x_j x_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} x_j + x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij} = 2 \delta_{ij} x_j = 2 x_i$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii}$$

- $\nabla \times (r^n \mathbf{r}) = \mathbf{0}$

$$\nabla \times (r^n\mathbf{r}) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial (r^n\mathbf{r})_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial (r^n r_k)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial r^n}{\partial x_j} r_k + r^n \frac{\partial r_k}{\partial x_j}\right)$$
$$= \varepsilon_{ijk}(nr^{n-2}x_j r_k + r^n\delta_{jk}) = \varepsilon_{ijk}(nr^{n-2}x_j x_k + r^n\delta_{jk}) = \varepsilon_{ijk}nr^{n-2}x_j x_k + \varepsilon_{ijk}r^n\delta_{jk}$$
$$= nr^{n-2}\varepsilon_{ijk}x_j x_k + r^n\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = nr^{n-2}[\mathbf{x}\times\mathbf{x}]_i + r^n\varepsilon_{ikk} = nr^{n-2}\cdot\mathbf{0} + r^n\cdot 0 = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial r^n}{\partial x_j} = nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x_j} = nr^{n-1}\frac{x_j}{r} = nr^{n-1}n^{-1}x_j = nr^{n-2}x_j$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial\left((x_i x_i)^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(x_j x_j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial (x_i x_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(x_i x_i)^{-\frac{1}{2}}2x_j = \frac{1}{\sqrt{(x_i x_i)}}x_j = \frac{x_j}{r}$$

$$\frac{\partial (x_i x_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}x_i + x_i\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}x_i + x_i\delta_{ij} = 2\delta_{ij}x_i = 2x_j$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial x_j} = \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}$$

- $\Delta\left(r^n\right) = n\left(n+1\right)r^{n-2}$

$$\Delta\left(r^n\right) = \nabla \bullet \nabla(r^n) = \nabla \bullet \frac{\partial (r^n)_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial (r^n)_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(nr^{n-2}x_i)$$
$$= n(n-2)r^{n-3}\frac{\partial r}{\partial x_i}x_i + nr^{n-2}\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n(n-2)r^{n-3}\frac{x_i}{r}x_i + nr^{n-2}\delta_{ii}$$
$$= n(n-2)r^{n-3}r^{-1}x_i x_i + 3nr^{n-2} = n(n-2)r^{n-4}r^2 + 3nr^{n-2}$$
$$= n(n-2)r^{n-2} + 3nr^{n-2} = (n(n-2)+3n)r^{n-2} = (n^2-2n+3n)r^{n-2}$$
$$= (n^2+n)r^{n-2} = n(n+1)r^{n-2}$$

$$\frac{\partial (r^n)_j}{\partial x_i} = nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x_i} = nr^{n-1}\frac{x_i}{r} = nr^{n-1}n^{-1}x_i = nr^{n-2}x_i$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial\left((x_j x_j)^{\frac{1}{2}}\right)}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_j x_j)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial (x_j x_j)}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_j x_j)^{-\frac{1}{2}}2x_i = \frac{1}{\sqrt{(x_j x_j)}}x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial (x_j x_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}x_j + x_j\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}x_j + x_j\delta_{ij} = 2\delta_{ij}x_j = 2x_i$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii}$$

Ejercicio 10

Usando notación indicial probar las siguientes identidades ($\phi(x_1, x_2, x_3)$: función escalar; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$: campos vectoriales):

- $\nabla \bullet (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \Delta\phi$

$$\nabla \bullet (\nabla\phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla\phi\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} = \Delta\phi$$

- $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$

$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$ *Por la derivada de un producto.*
$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i x_j} = \varepsilon_{ijk} u_{k,ij}$ *Para los épsilon distintos de cero.*
$= \varepsilon_{123} u_{3,12} + \varepsilon_{312} u_{2,31} + \varepsilon_{231} u_{1,23} + \varepsilon_{321} u_{1,32} + \varepsilon_{213} u_{3,21} + \varepsilon_{132} u_{2,13}$; *Remplazando.*
$= u_{3,12} + u_{2,31} + u_{1,23} - u_{1,32} - u_{3,21} - u_{2,13}$; *Reordenando numeradores.*
$= \cancel{u_{3,12}} \cancel{+u_{2,31}} \cancel{+u_{1,23}} \cancel{-u_{2,31}} \cancel{-u_{1,23}} \cancel{-u_{3,12}} = 0$

Otra forma de demostrarlo:

$\varepsilon_{ijk} u_{k,ij}$; *Artilugio:* $u_{k,ij} = \frac{u_{k,ij} + u_{k,ij}}{2}$
$= \varepsilon_{ijk} \frac{u_{k,ij} + u_{k,ij}}{2} = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{u_{k,ij}}{2} + \frac{u_{k,ij}}{2} \right)$ *Distribuyendo.*
$= \varepsilon_{ijk} \frac{u_{k,ij}}{2} + \varepsilon_{ijk} \frac{u_{k,ij}}{2}$ *Permutando el segundo épsilon.*
$= \varepsilon_{ijk} \frac{u_{k,ij}}{2} - \varepsilon_{jik} \frac{u_{k,ji}}{2} = 0$

- $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

$\nabla \times (\nabla \phi) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (\nabla \phi)_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \phi_{,jk} = 0$
Porque ϕ es un escalar.

- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \bullet \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{u})_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{kem} \frac{\partial u_m}{\partial x_e} \right)$; *Por la derivada de un producto.*
$= \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{kem} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_e} \right) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kem} u_{m,je}$ *Permutando el primer épsilon.*
$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kem} u_{m,je}$ *Por la identidad épsilon-delta.*
$= (\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}) u_{m,je}$ *Distribuyendo.*
$= \delta_{ie} \delta_{jm} u_{m,je} - \delta_{im} \delta_{je} u_{m,je}$ *Contrayendo índices.*
$= \delta_{jm} u_{m,ji} - \delta_{je} u_{i,je}$ *Contrayendo índices.*
$= u_{j,ji} - u_{i,jj} = \nabla (\nabla \bullet \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$

$$\nabla (\nabla \bullet \mathbf{u}) = \frac{\partial (\nabla \bullet \mathbf{u})_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = u_{j,ji}$$

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \bullet \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial (\nabla \mathbf{u})_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = u_{i,jj}$$

- $\nabla \bullet (\phi \mathbf{u}) = \nabla \phi \bullet \mathbf{u} + \phi \nabla \bullet \mathbf{u}$

$\nabla \bullet (\phi \mathbf{u}) = \frac{\partial (\phi \mathbf{u})_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (\phi u_i)}{\partial x_i}$ *Por la derivada de un producto.*
$= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} u_i + \phi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \phi \cdot \mathbf{u} + \phi \cdot \nabla \bullet \mathbf{u}$

- $\nabla \times (\phi \mathbf{u}) = \nabla \phi \times \mathbf{u} + \phi (\nabla \times \mathbf{u})$

$\nabla \times (\phi \mathbf{u}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (\phi \mathbf{u})_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (\phi u_k)}{\partial x_j}$ *Por la derivada de un producto.*
$= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} u_k + \phi \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$ *Distribuyendo.*
$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u_k + \varepsilon_{ijk} \phi \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ *Reordenando.*
$= \varepsilon_{ijk} (\nabla \phi)_j u_k + \phi \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ *Producto vectorial y definición de rotacional.*
$= (\nabla \phi) \times \mathbf{u} + \phi (\nabla \times \mathbf{u})$

- $\nabla \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \bullet (\nabla \times \mathbf{v})$

$$
\begin{aligned}
&\nabla \bullet (\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \tfrac{\partial(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i}{\partial x_i} = \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{ijk}u_j v_k) && \textit{Por la derivada de un producto.}\\
&= \varepsilon_{ijk}\tfrac{\partial(u_j v_k)}{x_i} = \varepsilon_{ijk}\left(\tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}v_k + u_j\tfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) && \textit{Distribuyendo.}\\
&= \varepsilon_{ijk}\tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}v_k + \varepsilon_{ijk}u_j\tfrac{\partial v_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk}u_{j,i}v_k + \varepsilon_{ijk}u_j v_{k,i} && \textit{Reordenando.}\\
&= v_k\varepsilon_{ijk}u_{j,i} + u_j\varepsilon_{ijk}v_{k,i} && \textit{Permutando los épsilon.}\\
&= v_k\varepsilon_{kij}u_{j,i} - u_j\varepsilon_{jik}v_{k,i} = \mathbf{v}(\nabla\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}(\nabla\times\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

- $\nabla \times (\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\nabla\bullet\mathbf{v})\,\mathbf{u} - (\nabla\bullet\mathbf{u})\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\bullet\nabla)\,\mathbf{u} - (\mathbf{u}\bullet\nabla)\,\mathbf{v}$

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_{k,j} = \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{kem}u_e v_m)_{k,j} && \textit{Derivada de un producto.}\\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}(u_e v_m)_{,j} && \textit{Derivada de un producto.}\\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}(u_{e,j}v_m + u_e v_{m,j}) && \textit{Distribuyendo.}\\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}u_{e,j}v_m + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}u_e v_{m,j} && \textit{Permutando el épsilon ijk a kij.}\\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kem}u_{e,j}v_m + \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kem}u_e v_{m,j} && \textit{Por la identidad épsilon-delta.}\\
&= (\delta_{ie}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{je})u_{e,j}v_m + (\delta_{ie}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{je})u_e v_{m,j} && \textit{Distribuyendo.}\\
&= \delta_{ie}\delta_{jm}u_{e,j}v_m - \delta_{im}\delta_{je}u_{e,j}v_m + \delta_{ie}\delta_{jm}u_e v_{m,j} - \delta_{im}\delta_{je}u_e v_{m,j}\\
&\textit{Contrayendo índices}\\
&= \delta_{ie}u_{e,j}v_j - \delta_{im}u_{j,j}v_m + \delta_{ie}u_e v_{j,j} - \delta_{im}u_j v_{m,j} && \textit{Contrayendo índices.}\\
&= u_{i,j}v_j - u_{j,j}v_i + u_i v_{j,j} - u_j v_{i,j} = (\mathbf{v}\bullet\nabla)\mathbf{u} - (\nabla\bullet\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{u}(\nabla\bullet\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{u}\bullet\nabla)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11

Es sabido que las rotaciones son no-conmutativas. Por ejemplo, tome un libro, y fije un sistema de coordenadas con ejes x, y, z dirigidos a lo largo de los lados del libro. Luego, rote primero el libro 90º en torno a y ; luego rótelo 90º en torno a z obteniendo una cierta configuración. Si invierte el orden de rotación, verá obtiene un resultado distinto.

La rotación de coordenadas también es no-conmutativa; en otras palabras, el producto de las matrices β_{ij} es no-conmutativo. Demuestre esto en el caso especial análogo a la rotación del libro mencionada más arriba. Primero transforme x, y, z a x', y', z' mediante una rotación de 90º en torno al eje y; luego transforme x', y', z' a x'', y'', z'' mediante una rotación de 90º en torno al eje z'. O sea:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}
$$

Obtenga la matriz de transformación de x, y, z a x'', y'', z''. Luego invierta el orden de rotación y muestre que se logra un resultado distinto.

. . . .

$$
\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Primer transformación:
$\mathbf{x}' = \beta_1\mathbf{x}$
$\mathbf{x}'' = \beta_2\mathbf{x}' = \beta_2\beta_1\mathbf{x}$

Segunda transformación:
$\mathbf{x}' = \beta_2\mathbf{x}$

$\mathbf{x}'' = \beta_1 \mathbf{x}' = \beta_1 \beta_2 \mathbf{x}$

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta_2 \cdot \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \beta_1 \cdot \beta_2 \neq \beta_2 \cdot \beta_1$$

Ejercicio 12

Las rotaciones infinitesimales son, sin embargo, conmutativas. Demuestre esto considerando una rotación infinitesimal de un ángulo θ en torno a y seguida de otra rotación infinitesimal de un ángulo ψ en torno al eje z. Compare los resultados con el caso en que el orden de rotaciones es invertido.

. . . .

$$\beta_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}; \quad \beta_z = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer transformación:
$\mathbf{x}' = \beta_y \mathbf{x}$
$\mathbf{x}''_1 = \beta_z \mathbf{x}' = \beta_z \beta_y \mathbf{x}$

Segunda transformación:
$\mathbf{x}' = \beta_z \mathbf{x}$
$\mathbf{x}''_2 = \beta_y \mathbf{x}' = \beta_y \beta_z \mathbf{x}$

Los ángulos θ y Ψ son infinitesimales, entonces:

$\cos(\theta) \approx 1; \quad \sin(\theta) \approx 0$
$\cos(\Psi) \approx 1; \quad \sin(\Psi) \approx 0$

$$\beta_y \cdot \beta_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \beta_z \cdot \beta_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \beta_y \cdot \beta_z = \beta_z \cdot \beta_y$$

$\mathbf{x}''_1 = \mathbf{x}''_2 \implies \beta_z \beta_y \mathbf{x} = \beta_y \beta_z \mathbf{x} \implies \beta_z \beta_y = \beta_y \beta_z$

Ejercicio 13

Demostrar que para una matriz $\mathbf{A}$ de 3×3, se verifica:

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

. . . .

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$ *Reordenando.*
$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$
$- a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23}$
$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13}$

Se puede apreciar que en los seis términos que quedan aparecen en el segundo subíndice los valores 1,2 y 3. Es decir, en cada término aparecen 1, 2 y 3 como segundos subíndices . Los primeros subíndices son permutaciones que varían según la fila o columna que se utiliza para calcular el determinante.

$= \varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$

Apéndice

Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

Símbolo de permutación:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ; \quad ijk = 123, 312, 231 \\ -1 & ; \quad ijk = 321, 132, 213 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Identidad $\varepsilon - \delta$:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iem} = \delta_{je}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ke}$$

Producto escalar (producto punto, producto interno): *Tensor de rango 0 (escalar)*

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_i v_i = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Módulo de un vector:

$$u^2 = u_i u_i = \sum_{i=1}^{3} u_i u_i = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Producto matricial:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff A_{ik}B_{kj} = C_{ij}$$

Producto matrix-vector:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff A_{ij}x_j = b_i$$

Determinante de una matrix:

$$\det \mathbf{A} = \det A_{ij} = \varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$$

Producto vectorial (producto cruz): *Tensor de rango 1 (vector)*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk}u_j v_k \mathbf{e}_i \iff [\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_i = \varepsilon_{ijk}u_j v_k$$

Derivadas:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}; \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} = v_{i,ij} = v_{i,ji} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i}; \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = v_{i,jj}$$

Gradiente de un campo escalar: *Tensor de rango 1 (vector)*

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

Vector gradiente: *Tensor de rango 2 (matriz)*

$$\text{grad } \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\text{Para i=1:} \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$\text{Para i=2:} \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$$

$$\text{Para i=3:} \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_3}{\partial x_j} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Divergencia: *Tensor de rango 0 (escalar)*

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \bullet \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Rotacional: *Tensor de rango 1 (vector)*

$$\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$\text{Para ijk=123, 312, 231:} \quad \varepsilon_{123} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \varepsilon_{312} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \varepsilon_{231} \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$\text{Para ijk=321, 132, 213:} \quad \varepsilon_{321} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \varepsilon_{132} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \varepsilon_{213} \frac{\partial v_3}{\partial x_1}$$

Laplaciano: *Tensor de rango 1 (vector)*

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \bullet \nabla \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i \partial x_i}$$

Referencias

[1] Y. C. Fung, *A First Course in Continuum Mechanics*, tercera edición, PRENTICE HALL, 1994.