Examen Final

Mecánica del Continuo

27 de febrero de 2003

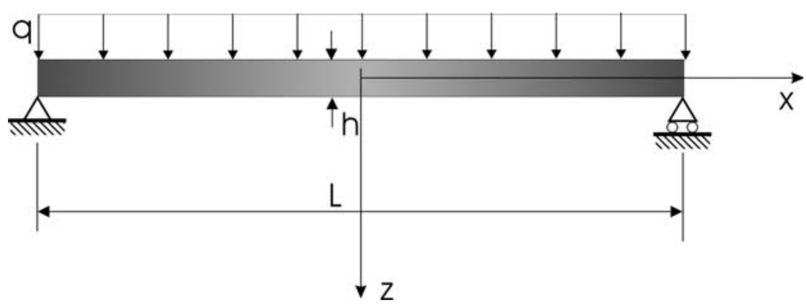
1) Elasticidad bidimensional:
Se propone el campo de tensiones siguiente:

$$\sigma_{xx} = -\frac{q}{2I}\left[x^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]z + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}z^3 - \frac{h^2}{10}z\right)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{q}{2I}\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{4}z + \frac{h^3}{12}\right]$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{q}{2I}\left[\frac{h^2}{4} - z^2\right]x$$

para el problema de la viga apoyada de espesor unitario planteado en la figura:



Verificar si el campo propuesto puede ser solución del problema planteado. La constante $I = h^3/12$.

2) Ecuación de continuidad – Derivada material.
Si $P^{**}_{ij\ldots}(x,t)$ representa una dada propiedad escalar, vectorial o tensorial por unidad de masa de un medio continuo tal que $P^{*}_{ij\ldots}(x,t) = \rho P^{**}_{ij\ldots}(x,t)$, mostrar que:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho P^{**}_{ij\ldots}(x,t)dV = \int_V \rho \frac{dP^{**}_{ij\ldots}(x,t)}{dt}dV$$

siendo $\rho = \rho(x,t)$ la función *densidad de masa.*

3) Elasticidad – Ecuación de equilibrio:
La ecuación de Navier-Cauchy (ecuación de equilibrio para un sólido elástico) puede ser escrita de la forma $\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu}u_{j,ji} + \rho b_i = 0$ que para el caso incompresible ($\nu = 1/2$) esta claramente indeterminada. Use las ecuaciones de

equilibrio para esta situación demostrando que la ecuación se transforma en $\mu u_{i,jj} + \sigma_{kk,i}/3 + \rho b_i = 0$.

4) Tensor de tensiones:
Pruebe que $\sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{kj}$ es un invariante del tensor de tensiones.

5) Elasticidad:
Para un cuerpo elástico en equilibrio bajo la acción de fuerzas de másicas b_i y fuerzas de superficie $t_{ij}^{(n)}$, mostrar que la energía total de deformación es igual a la mitad del trabajo hecho por las fuerzas externas que producen los desplazamientos u_i. Es decir

$$\int_V \rho b_i u_i dV + \int_S t_i^{(n)} u_i dS = 2\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2dV$$

6) Probar que el tensor $B_{ik} = \varepsilon_{ijk} a_j$ es antisimétrico

7) Si B_{ij} es un tensor cartesiano antisimétrico de segundo orden para el vector $b_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{jk}$, mostrar que $B_{pq} = \varepsilon_{pqi} b_i$.

8) Muestre que $\int_S x_i n_j dS = V\delta_{ij}$, donde $n_j dS$ representa el elemento de superficie S, que contiene al volumen V. x_i es el vector posición de $n_j dS$ y n_j es la normal saliente.
Sugerencia: use el teorema de la divergencia de Gauss