

Capítulo 5

Flujo irrotacional ideal

A pesar de que las ecuaciones de conservación para un fluido newtoniano existen y que el sistema es cerrado (mismo número de ecuaciones que de incógnitas), su uso es limitado. Solo en casos especiales este conjunto de ecuaciones se puede resolver.

Un caso simplificado, el cual se puede resolver analíticamente, es el del fluido inviscido. Si suponemos que los efectos viscosos no son importantes, la complejidad de las ecuaciones se reduce considerablemente y se pueden encontrar soluciones a flujos complicados. Sin embargo, las soluciones que se obtienen se deben utilizar con reservas en el contexto de aplicaciones de ingeniería: suponer que la viscosidad es cero tiene implicaciones físicas considerables.

En este capítulo se verá la teoría general del flujo no viscoso.

MMFM:dynamics:Potential flow

5.1. Ecuaciones de Euler

La ecuación que gobierna el movimiento del flujo no viscoso se obtiene directamente de las ecuaciones de Navier-Stokes. Simplemente se supone que la viscosidad es cero ($\mu = 0$); así, el término que tiene el laplaciano de la velocidad desaparece:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} \quad (5.1)$$

En este caso, el cambio de momentum en el fluido es resultado únicamente de dos tipos de fuerzas: fuerzas de presión y fuerzas gravitacionales. Este

sistema de ecuaciones se conocen las ecuaciones de Euler.

Cabe notar que el orden de este sistema de ecuaciones es menor que el de las ecuaciones de Navier Stokes. Matemáticamente, esto implica que se necesitará un número menor de condiciones de frontera para encontrar soluciones. De hecho, la condición que no se requiere satisfacer es la *condición de no deslizamiento*. Esta consecuencia matemática es la que, precisamente, causa que las soluciones de estas ecuaciones no sean *reales*.

La ecuación de conservación de masa se mantiene igual, a pesar de haber considerado que los efectos viscosos no son importantes:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (5.2)$$

5.2. Ecuación de Bernoulli

Es posible obtener una versión simplificada de la ecuación de conservación de momentum para el caso de un flujo ideal.

Consideremos, inicialmente, las ecuaciones de Euler. Si consideramos que \vec{g} es un campo conservativo entonces se puede representar como

$$\vec{g} = \nabla \Phi$$

. Podemos usar la siguiente identidad vectorial para simplificar el término $\vec{v} \nabla \vec{v}$ que aparece dentro de la derivada material de \vec{v} :

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \times \nabla \times \vec{v}$$

(esta identidad es la definición del triple producto cruz).

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación de N-S para en la ecuación de Euler, tenemos:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \Phi$$

Rearreglando términos podemos escribir

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \Phi \right) = \vec{v} \times \nabla \times \vec{v}$$

Si tomamos el caso de un flujo estacionario, $\partial/\partial t = 0$, y un flujo irrotacional $\nabla \times \vec{v} = 0$, entonces la expresión anterior se reduce a:

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \Phi \right) = 0$$

Una línea de corriente es aquella línea que es tangente al vector velocidad en cada punto. De la definición de una línea de corriente sabemos que:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Para que para cualquier campo de presiones y velocidades, el gradiente de $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \Phi$ sea cero, la única posibilidad es que este término sea constante:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} - \Phi = \text{constante}$$

Para un campo gravitacional ordinario podemos escribir $\Phi = -gz$. Entonces:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + gz = \text{constante} \quad (5.3)$$

que se conoce como la ecuación de Bernoulli.

5.2.1. Ejemplos de aplicación

Sección sin completar.

5.3. Flujo potencial

El método mas común para la solución de las ecuaciones de Euler consiste en resolver la ecuación de conservación de masa para un flujo dado. Una vez conocido el campo de velocidades, la ecuación de conservación de momentum se usa solo para obtener el campo de presiones del flujo.

En esta sección analizaremos este método detalladamente.

5.3.1. Vorticidad e irrotacionalidad

Además de suponer que el fluido es inviscido, podemos suponer que no existen ni gradientes de entropía ni gradientes de densidad. Considerando estas tres suposiciones podemos decir, sin perder generalidad, que el flujo es irrotacional.

La vorticidad esta definida como el rotacional de la velocidad:

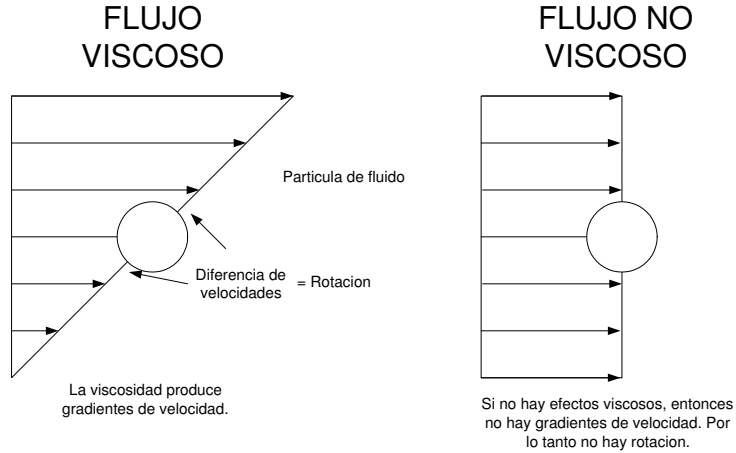
$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

Físicamente, la vorticidad representa la rotación de las partículas de las partículas de fluido.

En un flujo irrotacional, la vorticidad es cero en todas partes:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$$

Entonces, si el fluido es no viscoso las partículas de fluido *resbalan* una sobre otras. No existen gradientes de velocidad.



El hecho de que el rotacional del campo de velocidades sea cero tiene consecuencias importantes. Recordamos la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

(el rotacional del gradiente de cualquier función escalar es siempre cero).

Entonces, en base a la identidad anterior, para un flujo irrotacional podemos expresar al campo de velocidades como el gradiente de una función escalar:

$$\vec{v} = \nabla \phi$$

La función escalar ϕ se conoce como función potencial de velocidades.

En coordenadas rectangulares podemos expresar cada componente del campo de velocidades como:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Ahora, si sustituimos la expresión $\vec{v} = \nabla \phi$ en la ecuación de conservación de masa, tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla \phi &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.4)$$

Entonces, si resolvemos la ecuación anterior y encontramos $\phi(x, y, z)$ podemos inferir el campo de velocidades $\vec{v}(x, y, z)$. Una vez conocido el campo de velocidades, podemos calcular el campo de presiones sustituyendo \vec{v} en las ecuaciones de Euler. Mas aun, podemos utilizar la forma simplificada de las ecuaciones de Euler (Ecuación de Bernoulli) para encontrar la presión.

La ecuación $\nabla^2 \phi = 0$ se conoce como la ecuación de Laplace. Es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden. En forma explícita, para coordenadas rectangulares,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Obviamente, para encontrar soluciones de esta ecuación debemos tener condiciones de frontera. Los dos tipos de condiciones de frontera que, generalmente se consideran son:

- velocidad aguas arriba: u, v o w conocidas.
- velocidad normal a la pared es cero: $\partial\phi/\partial n = 0$.

Esta última condición se conoce como condición de no-penetración: el flujo no puede penetrar una superficie sólida. Es importante tener en cuenta que para este tipo de flujos la condición de no deslizamiento no se satisface.

5.3.2. Técnicas de solución

Para flujos no viscosos la técnica de solución de problemas es muy diferente a la que se utiliza para encontrar soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes. En este caso se busca, primero, resolver la ecuación de Laplace para encontrar la función potencial de velocidades $\phi(x, y, z)$. Una vez que se conoce ϕ , se pueden calcular las componentes de velocidad; después, utilizando la ecuación de Bernoulli, se puede calcular el campo de presiones.

las técnicas más comunes para resolver problemas en flujo potencial son:

- superposición de funciones elementales
- mapeo (o transformación) conforme
- analogía mecánica o eléctrica
- análisis numérico

5.3.3. Función de corriente

Además de la función potencial de velocidades, ϕ , podemos definir una función adicional que también puede servir para obtener soluciones en flujo potencial. Para un flujo plano (2-D), podemos definir una función de corriente ψ tal que,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Recordando la condición de irrotacionalidad, $\nabla \times \vec{v} = 0$, sabemos que para un flujo plano tenemos,

$$\omega_z = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Sustituyendo la definición de la función de corriente en la expresión anterior tenemos:

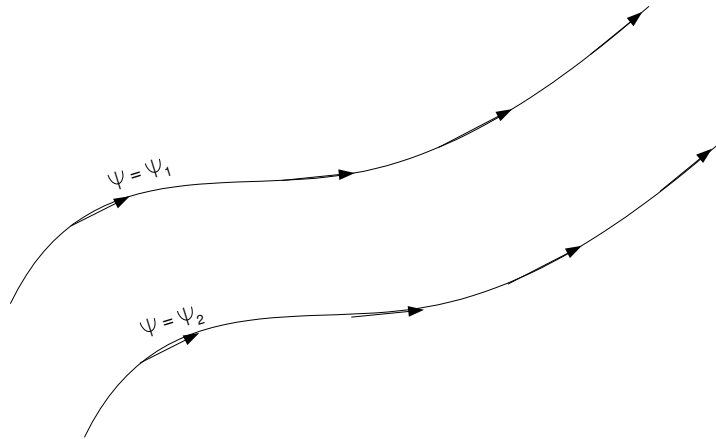
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}$$

entonces

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (5.5)$$

La función de corriente también satisface la ecuación de Laplace.

La ventaja que se tiene al utilizar la función de corriente, en vez de la función potencial de velocidades, es que las líneas $\psi = \text{constante}$ representan líneas de corriente en el flujo.



Si $\psi = \psi(x, y)$, entonces

$$\partial \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

Si $\psi = \text{constante}$, entonces $\partial \psi = 0$ y por lo tanto,

$$0 = -v dx + u dy$$

entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u}$$

que es la definición matemática de una línea de corriente. Una línea de corriente es aquella línea cuya tangente es paralela a \vec{v} para un t dado.

De igual manera, para encontrar soluciones a la ecuación $\nabla^2\psi = 0$ debemos tener condiciones de frontera. Podemos considerar, en general, dos tipos de condiciones de frontera:

- corriente aguas arriba, u, v conocidas
- superficie sólida, ψ conocida (la forma de la superficie sólida, de hecho, es una línea de corriente, $\psi = \text{constante}$).

Para resolver un problema de flujo potencial podemos encontrar ψ o ϕ o ambas.

Notemos además que ψ y ϕ son perpendiculares:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

y

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Si encontramos tanto ψ como ϕ podemos construir la *red* del flujo.

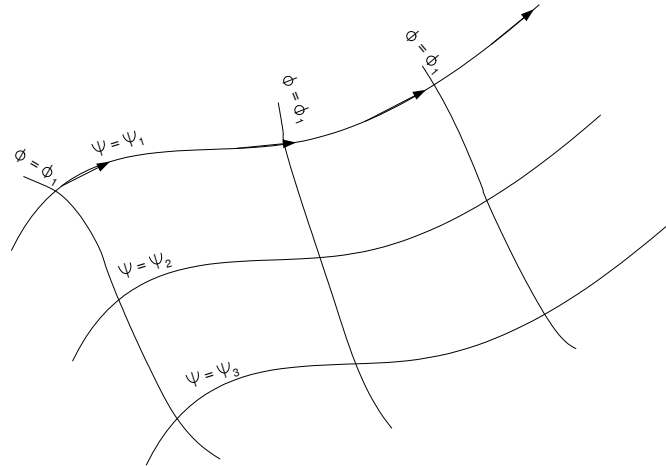
5.4. Soluciones elementales en 2-D

Un método sencillo para construir soluciones en flujo potencial es el proponer expresiones matemáticas que satisfagan a la ecuación de Laplace. Posteriormente se busca la interpretación física de estas funciones.

Corriente uniforme

Sea $\phi = ax + by$. Considerando un flujo bidimensional, $\vec{v} = (u, v)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = a \\ v &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = b \end{aligned}$$



entonces, $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$. En este caso la velocidad del flujo es constante en cualquier punto del fluido.

Calculemos la líneas de corriente.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \psi = ay + C_1 \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \psi = -bx + C_2 \end{aligned}$$

Así,

$$-bx + C_2 = ay + C_1$$

entonces

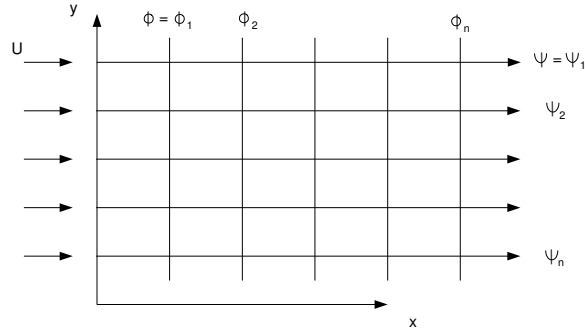
$$y = \frac{-b}{a}x + C$$

que es una línea recta: líneas de corriente rectas.

Sea, por ejemplo, $b = 0$ y $a = U$. Entonces,

$$\begin{aligned} \phi &= Ux \\ \psi &= Uy + C_1 \end{aligned}$$

Para este caso: $u = U$ y $v = 0$, flujo unidireccional uniforme.



Fuente y/o sumidero

Supongamos que un punto emite un caudal uniforme: flujo radial.

Si el flujo es estacionario, la cantidad de fluido que atraviesa una superficie circular de radio r es constante:

$$Q = v_r(2\pi r)L = 2\pi Lm = \text{constante}$$

por lo tanto

$$v_r = \frac{m}{r}$$

donde m es una constante. Si $m > 0$ entonces tenemos una fuente (líneas de corriente apuntan hacia afuera). Si $m < 0$ entonces tenemos un sumidero. Para este caso la velocidad tangencial es cero, $v_\theta = 0$.

Podemos obtener ϕ y ψ en coordenadas polares:

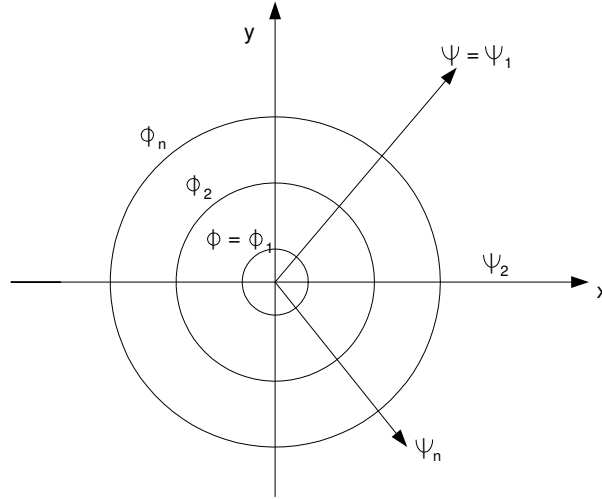
$$\begin{aligned} v_r &= \frac{m}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta &= 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

entonces

$$\psi = m\theta$$

y

$$\phi = m \ln r$$



Las funciones ϕ y ψ pueden expresarse en términos de coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned}\psi &= m \arctan \frac{y}{x} \\ \phi &= m \ln \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Puede comprobarse que estas expresiones satisfacen a la ecuación de Laplace.

Torbellino o vórtice bidimensional

Supongamos ahora que $v_\theta \neq 0$ y $v_r = 0$. Si $\psi = -\kappa \ln r$ y $\phi = k\theta$, entonces $v_r = 0$ y $v_\theta = \kappa/r$.

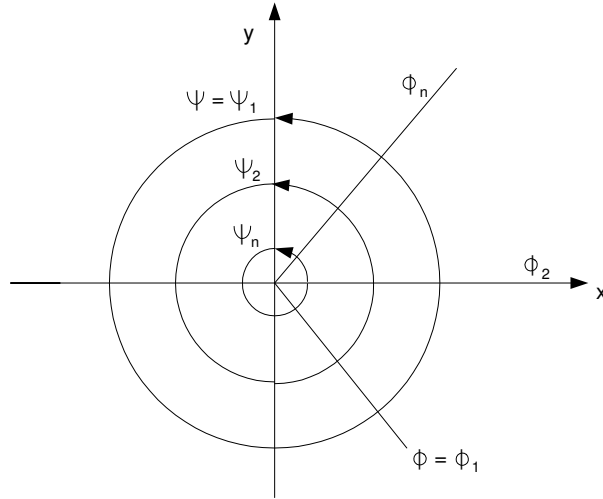
éste es un flujo circulatorio puro con una velocidad tangencial que disminuye como $1/r$, κ es la intensidad del torbellino.

Circulación

El flujo descrito por un torbellino o vórtice bidimensional es irrotacional en todas partes excepto en el origen donde la vorticidad es finita.

Definamos

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C (u dx + v dy + w dz)$$



donde C es una curva cerrada. Γ es la circulación del flujo dentro de C .

De la definición de ϕ :

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = \nabla \phi \cdot \vec{s} = d\phi$$

entonces

$$\Gamma = \int_C d\phi = \phi_f - \phi_i$$

Puesto que C es una curva cerrada $\phi_f = \phi_i$, entonces $\Gamma = 0$

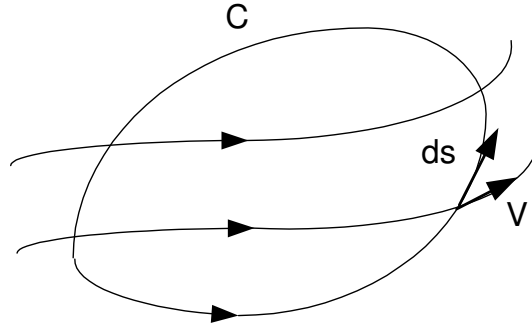
Para el caso de un vórtice

$$\phi = \kappa\theta$$

Esto implica que hay un cambio de ϕ en una cantidad $2\pi\kappa$ en cada vuelta. Por lo tanto

$$\Gamma_{\text{torbellino}} = \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{r} r d\theta = 2\pi\kappa$$

En general Γ es igual a la suma de algebraica de todos los remolinos que haya en el interior de una curva cerrada.



5.4.1. Superposición de soluciones

La consecuencia mas importante que surge de suponer que el flujo es potencial es que la ecuación a resolver (ecuación de Laplace) es lineal. Una de las propiedades de las ecuaciones lineales es que soluciones simples se pueden sumar para obtener una solución compleja:

La solución de una suma es igual a la suma de la soluciones individuales.

Así, podemos encontrar la solución a flujos mas interesantes sumando soluciones simples de ϕ_s y ψ_s . La solución total estará dada por

$$\phi_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \phi_i$$

$$\psi_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \psi_i$$

Fuente y sumidero separados una distancia $2a$

Consideremos la suma de una fuente y un sumidero de igual intensidad, separados una distancia $2a$. Sea ϕ_1 una fuente de intensidad m situada en $(a, 0)$ y sea ϕ_2 un sumidero de intensidad $-m$ en $(-a, 0)$:

$$\phi_1 = m \ln r$$

$$\phi_2 = -m \ln r$$

y sus correspondientes funciones de corriente:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= m\theta \\ \psi_2 &= -m\theta\end{aligned}$$

Para ψ_1 el valor de la función aumenta en la dirección de las manecillas del reloj.

La solución total estará entonces dada, en coordenadas rectangulares, por:

$$\psi = m \arctan \frac{y}{x+a} - m \arctan \frac{y}{x-a}$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\arctan \alpha - \arctan \beta = \arctan \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$$

tenemos entonces

$$\psi = -m \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

La función potencial de velocidades queda dada por

$$\phi = m \ln r - m \ln r$$

En coordenadas rectangulares, tenemos:

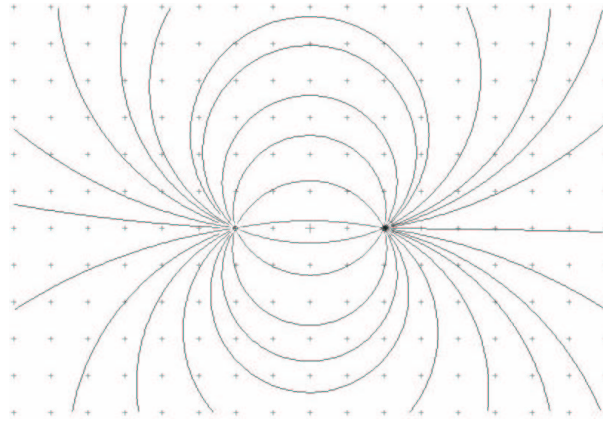
$$\phi = \ln \left(\sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

Dipolo

Si para el caso anterior consideramos el caso en que la distancia entre la fuente y el sumidero tiende a cero ($a \rightarrow 0$). Debemos considerar que la intensidad m de cada elemento debe crecer para hacer que las velocidades se mantengan finitas.

Así, debemos hacer que el producto $2am = \lambda$ se mantenga constante. Para la función de corriente consideremos:

$$\psi = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ 2am = \text{const}}} \left(-m \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$



Entonces

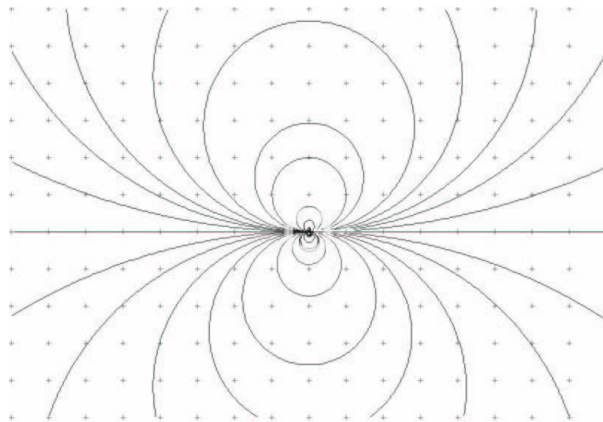
$$\psi = -m \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2}$$

pero sabemos que para $\alpha \ll 1$, $\arctan \alpha = \alpha$. Por lo tanto

$$\psi = -m \frac{2ay}{x^2 + y^2} = \frac{-\lambda y}{x^2 + y^2}$$

De manera análoga,

$$\phi = \frac{\lambda x}{x^2 + y^2}$$



En coordenadas polares ψ y ϕ se escriben como:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{-\lambda \sin \theta}{r} \\ \phi &= \frac{\lambda \cos \theta}{r}\end{aligned}$$

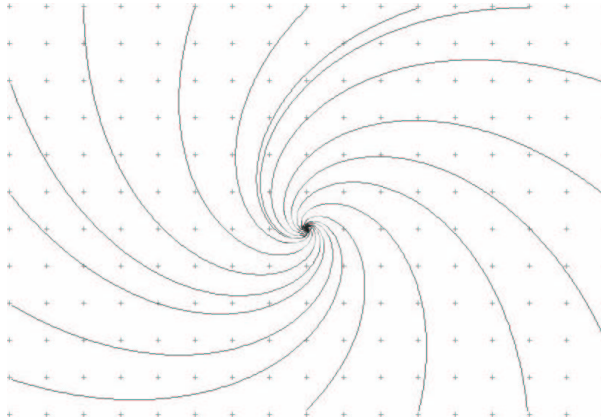
Sumidero mas torbellino

Para este caso debemos considerar, en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\psi_{total} &= \psi_{sumidero} + \psi_{remolino} \\ &= -m\theta + \kappa \ln r\end{aligned}$$

Y para la función potencial,

$$\begin{aligned}\phi_{total} &= \phi_{sumidero} + \phi_{remolino} \\ &= -m \ln r + \kappa \theta\end{aligned}$$



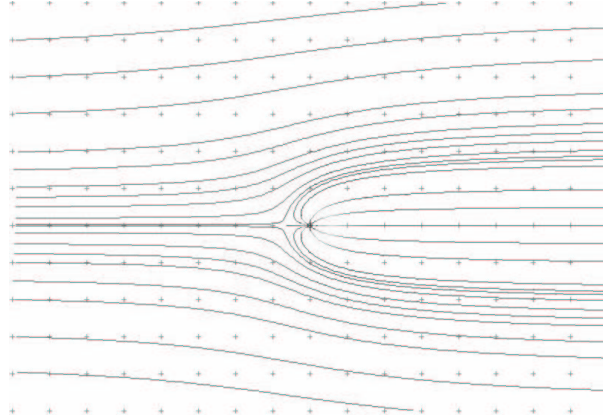
Cuerpo semi-infinito de Rankine

El flujo alrededor de la parte frontal de un cuerpo largo se puede simular superponiendo las soluciones de una corriente uniforme y una fuente.

$$\begin{aligned}\psi_{total} &= \psi_{corr.unif.} + \psi_{fuente} \\ &= U_o y + m \arctan(y/x) \\ &= U_o r \sin \theta + m \theta\end{aligned}$$

También,

$$\phi = U_o r \cos \theta + m \ln r$$



De la figura podemos observar que en un punto la velocidad del flujo se hace cero, es decir aparece un punto de estancamiento. En este punto el flujo de la corriente uniforme se *cancela* con el flujo generado por la fuente. Podemos calcular la posición de este punto de estancamiento.

Los componentes de velocidad en cada dirección, en coordenadas polares, son:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_o \cos \theta + \frac{m}{r} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_o \sin \theta \end{aligned}$$

La magnitud al cuadrado de la velocidad es entonces

$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(U_o \cos \theta + \frac{m}{r}\right)^2 + (-U_o \sin \theta)^2$$

por lo tanto

$$V^2 = U_o^2 + 2U_o \frac{m}{r} \cos \theta + \frac{m^2}{r^2}$$

En punto de estancamiento, que se encuentra en $r = r_e$ y $\theta = \pm\pi$, sabemos que $V = 0$. Entonces,

$$0 = U_o^2 + 2U_o \frac{m}{r_e} (-1) + \frac{m^2}{r_e^2}$$

Reescribiendo esta expresión tenemos

$$r_e^2 U_o - 2m U_o r_e + m^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, podemos calcular el valor de r_e :

$$r_e = \frac{m}{U_o}$$

En el punto de estancamiento, la presión es máxima. Esto se puede inferir utilizando la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2} \rho U_o^2 + P_o = \frac{1}{2} \rho (0)^2 + P_e$$

por lo que

$$P_e = P_o + \frac{1}{2} \rho U_o^2$$

Podemos también determinar la forma del perfil del cuerpo de Rankine. Sabemos que la forma de cuerpo estará dada por una línea de $\psi = \text{constante}$. Sabemos también que en el punto de estancamiento, coincide con la parte frontal del cuerpo. Entonces en $(r = m/U_o, \theta = \pm\pi)$:

$$\psi_{\text{cuerpo}} = U_o \frac{m}{U_o} \sin(\pm\pi) \pm m\pi$$

Por lo tanto

$$\psi_{\text{cuerpo}} = \pm m\pi$$

Podemos también calcular el grosor del cuerpo de Rankine, aguas abajo del punto donde se localiza la fuente. Sobre el cuerpo sabemos que $\psi = \pm m\pi$, entonces podemos escribir, en coordenadas rectangulares por simplicidad:

$$\pm m\pi = U_o y + m \arctan(y/x)$$

Puesto que nos interesa conocer la altura y_* , lejos del origen, consideremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = U_o y_* + m \arctan(y_*/x)$$

Despejando y_* tenemos el grosor del cuerpo:

$$y_* = \pm \frac{\pi m}{U_o}$$

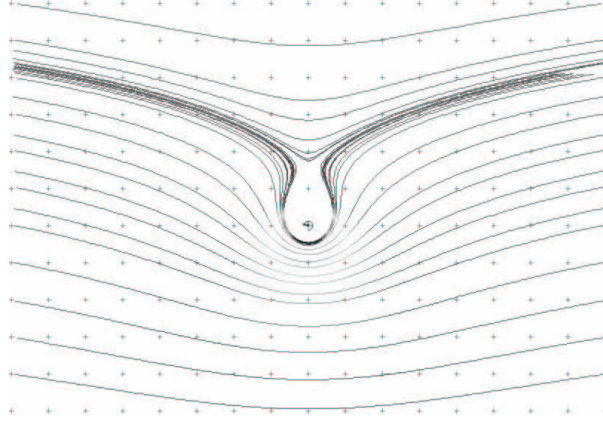
También se puede modelar el flujo en la parte posterior del cuerpo de Rankine si consideramos la suma de una corriente uniforme y un sumidero.

Corriente uniforme mas torbellino

Consideremos la suma lineal de un remolino, $\psi = -\kappa \ln r$, y una corriente uniforme, $\psi = U_o r \sin \theta$:

$$\psi = U_o r \sin \theta - \kappa \ln r$$

El flujo generado por esta superposición se muestra en la figura.



Para este caso, observamos que también aparece un punto de estancamiento en un punto del flujo. Para encontrar la posición de este punto, debemos primero calcular las componentes de velocidad del flujo:

$$\begin{aligned} v_r &= U_o \cos \theta \\ v_\theta &= -U_o \sin \theta + \frac{\kappa}{r} \end{aligned}$$

De la misma manera que en el ejemplo anterior, podemos calcular la magnitud cuadrada de la velocidad:

$$V^2 = U_o^2 - 2\frac{\kappa}{r}U_o \sin \theta + \frac{\kappa^2}{r^2}$$

En el punto de estancamiento sabemos que $V = 0$ y que $\theta = \pi/2$, entonces:

$$0 = U_o^2 - 2U_o \frac{\kappa}{r_e} + \frac{\kappa^2}{r_e^2}$$

por lo tanto

$$r_e = \frac{\kappa}{U_o}$$

Fila infinita de vórtices

Consideremos la superposición de una fila infinita de remolinos de la misma intensidad κ y separados entre si una distancia a . La función de corriente total estará dada por

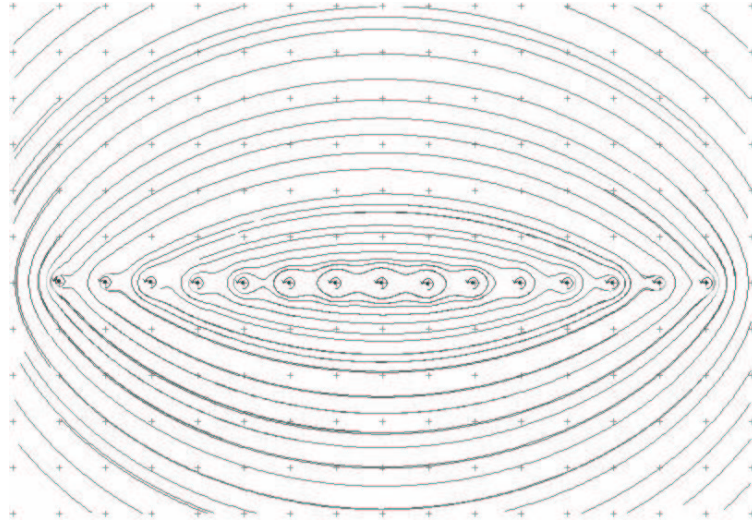
$$\psi = -\kappa \sum_{i=1}^{\infty} \ln r_i$$

Puede demostrarse que la suma infinita de logaritmos converge a la siguiente expresión:

$$\psi = -\frac{1}{2}\kappa \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right\}$$

La comprobación de esta transformación requiere conocimientos de variable compleja.

Las líneas de corriente de este flujo forma *ojos de gato* alrededor de cada vórtice. Cabe notar que en la figura se uso un número finito de vórtices.



Se se considera un numero muy grande de torbellinos entonces el flujo es prácticamente horizontal por encima y debajo de la linea de vórtices. De hecho se puede comprobar que para $|y| \gg$

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ u &= \pm \frac{\pi\kappa}{a} \end{aligned}$$

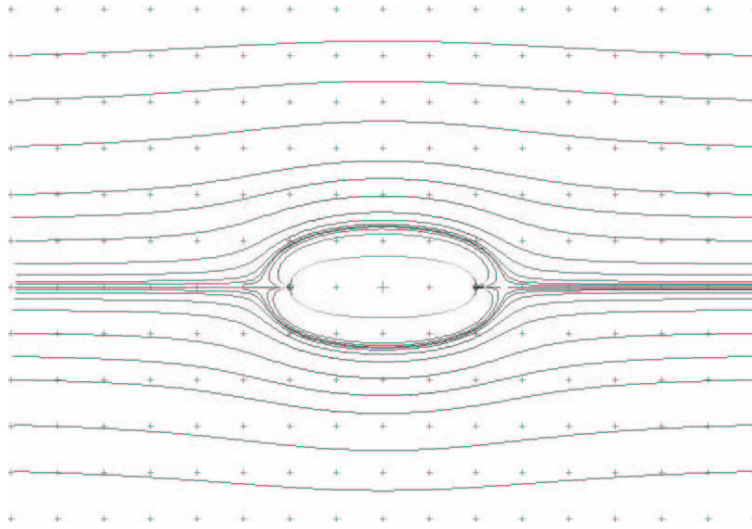
Si consideramos el caso en que $a \rightarrow 0$, podemos definir una capa continua de torbellinos.

Flujo alrededor de cuerpos cerrados

Existe diferentes maneras de modelar el flujo alrededor de cuerpos cerrados en flujo potencial.

El mas sencillo, es el caso de un cuerpo ovalado generado por la superposición de un par fuente-sumidero (separados una distancia $2a$) y una corriente uniforme:

$$\psi = U_o y - m \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$



La figura muestra las líneas de corriente, líneas de $\psi = \text{constante}$, para esta combinación. Se obtiene un cuerpo de forma oval. Las semi-longitudes horizontal y vertical, L y h , respectivamente, dependen de la intensidad relativa del par fuente-sumidero con respecto a la corriente uniforme; es decir, la relación $m/U_o a$ determina la forma del objeto. En general, solo se muestran las líneas por fuera del óvalo. Se puede demostrar que la línea de corriente que corresponde al cuerpo es $\psi = 0$.

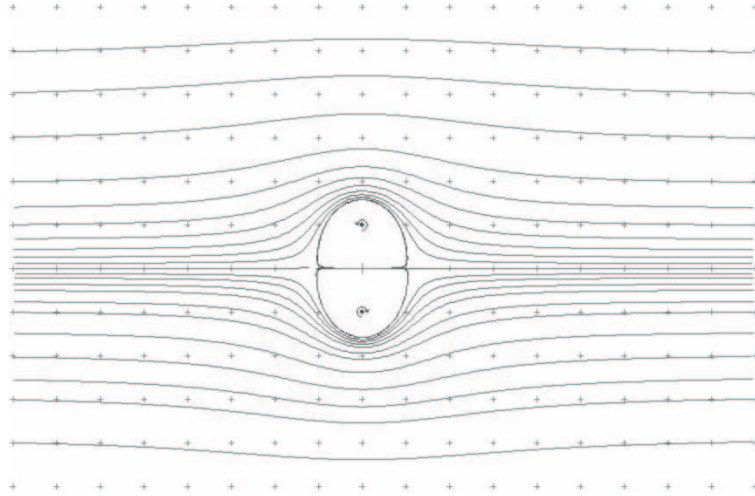
Podemos también notar que existen dos puntos de estancamiento sobre el cuerpo, uno en la parte frontal y otro en la parte posterior, en los puntos $x = \pm L, y = 0$. Nótese también que en los puntos $x = 0, y = \pm h$ existen

puntos de presión mínima, que a su vez corresponden a puntos de velocidad máxima. Las siguientes relaciones pueden obtenerse:

$$\begin{aligned}\frac{h}{a} &= \cot \left\{ \frac{h/a}{2m/U_o a} \right\} \\ \frac{L}{a} &= \left\{ 1 + \frac{2m}{U_o a} \right\}^{1/2} \\ \frac{U_{max}}{U_o} &= 1 + \frac{2m/U_o a}{1 + h^2/a^2}\end{aligned}$$

Óvalo de Kelvin

Otra manera de simular el flujo alrededor de objetos *altos* se obtiene superponiendo una corriente uniforme con un par de vórtices, con direcciones de rotación opuestas, separados verticalmente una distancia $2a$.



Para este caso la función de corriente es

$$\psi = U_o y - \frac{1}{2} \kappa \ln \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

5.4.2. Flujo alrededor de un cilindro

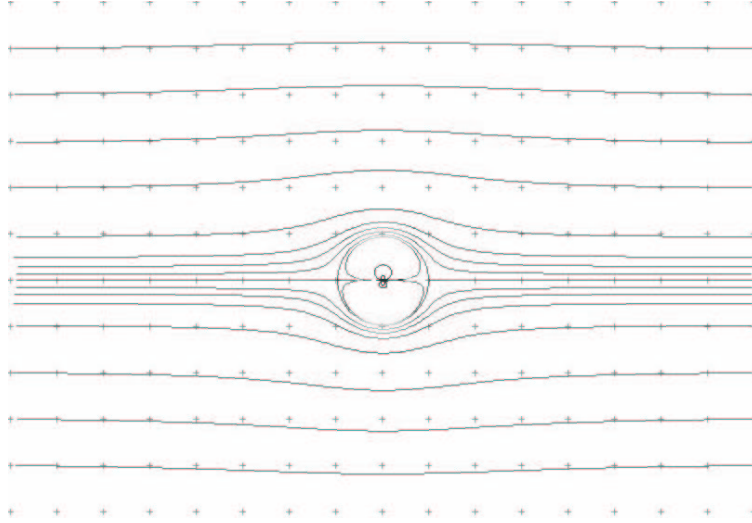
El estudio del flujo alrededor de un cilindro ha sido muy importante para el desarrollo de la mecánica de fluidos moderna. Dada su relativa simplicidad,

es posible analizar este flujo con cierto detalle. A continuación, analizaremos este flujo considerando un flujo ideal.

La función de corriente para modelar este flujo se puede obtener superponiendo una corriente uniforme con un doblete:

$$\psi = U_o r \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r}$$

La figura muestra las líneas de corriente para esta caso.



Los componentes de velocidad para el flujo alrededor del cilindro son:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(U_o - \frac{\lambda}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(U_o + \frac{\lambda}{r^2} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

Podemos observar que existen dos puntos de estancamiento ($v_r = v_\theta = 0$) en $\theta = \pi, 0$ y en $r = R$. Para este caso tenemos:

$$0 = \left(U_o - \frac{\lambda}{R^2} \right) (\pm 1)$$

entonces,

$$R = \sqrt{\frac{\lambda}{U_o}}$$

es el radio del cilindro (los puntos de estancamiento coinciden con la superficie del cuerpo).

Podemos entonces reescribir la función de corriente como función de R :

$$\psi = U_o \sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right)$$

Calculemos la velocidad en la superficie del cilindro:

$$\begin{aligned} v_r(r = R) &= U_o \left(1 - \frac{R^2}{R^2} \right) \cos \theta = 0 \\ v_\theta(r = R) &= -U_o \left(1 + \frac{R^2}{R^2} \right) \sin \theta = -2U_o \sin \theta \end{aligned}$$

Nótese que, en efecto, en la superficie sólida no hay flujo a través de la pared ($v_r = 0$) pero si hay deslizamiento ($v_\theta \neq 0$). También vemos que la velocidad tangencial sobre la pared varía como función de θ , desde cero en los puntos de estancamiento $\theta = 0, \pi$ hasta un valor máximo en $\theta = \pm\pi/2$.

La magnitud cuadrada de la velocidad sobre la superficie del cilindro es

$$V^2 = 4U_o^2 \sin^2 \theta$$

La distribución de presiones en la superficie del cilindro se puede calcular utilizando la ecuación de Bernoulli:

$$P_o + \frac{1}{2}\rho U_o^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho(4U_o^2 \sin^2 \theta)$$

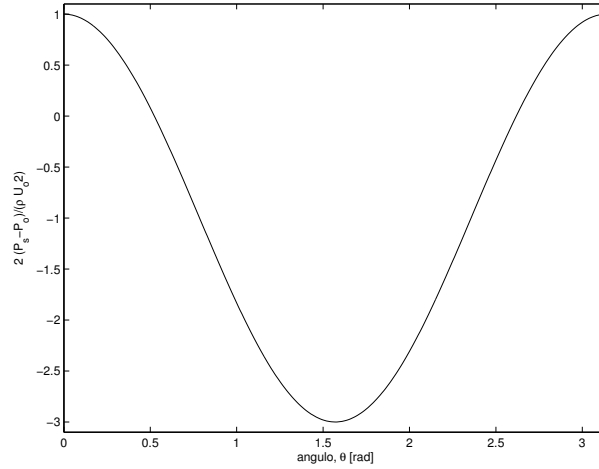
entonces

$$P_s - P_o = \frac{1}{2}\rho U_o^2(1 - 4 \sin^2 \theta)$$

La distribución de presiones sobre la superficie se muestra en la figura, como función del ángulo θ .

Arrastre sobre un cilindro en flujo potencial: Paradoja de Dálmabert

La fuerza de arrastre sobre el cilindro se puede calcular si se integra en esfuerzo sobre el área. Para el caso de un flujo potencial, no hay esfuerzos viscosos. Por lo tanto el único esfuerzo que actúa sobre la superficie del cilindro es la presión.



La fuerza, en cada una de las direcciones coordenadas será la integral de la componente del vector de presión respectiva sobre el área del cilindro. Ver figura. En la dirección x el componente de la presión es entonces

$$P_x = P \cos \theta$$

La fuerza de arrastre F_D es

$$F_D = \int_S (P \cos \theta) dS = \int_S (P_s - P_o) \cos \theta dS$$

Para calcular la integral, debemos expresar dS en términos de θ . Consideremos la figura siguiente. Para un ángulo pequeño, $d\theta$, podemos considerar que

$$\tan d\theta \approx d\theta = \frac{dS}{R}$$

Entonces, el elemento diferencial de área dS , por unidad de profundidad L se puede escribir como:

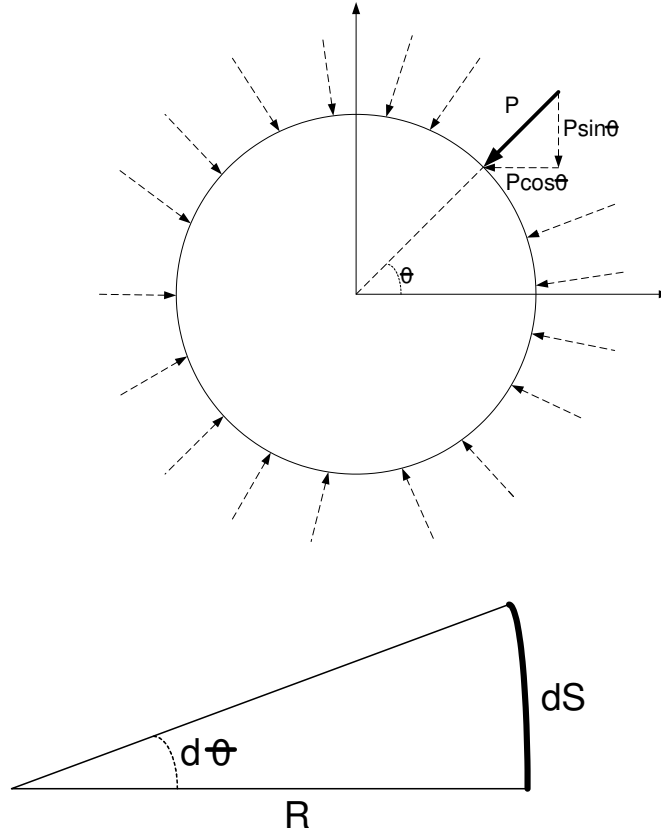
$$dS = LR d\theta$$

Así, la fuerza de arrastre se expresa como

$$F_D = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \rho U_o^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right) \cos \theta LR d\theta$$

entonces

$$F_D = \frac{1}{2} \rho U_o^2 LR \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \rho U_o^2 LR \left\{ \sin \theta - \frac{4}{3} \sin^3 \theta \right\}_0^{2\pi}$$



Por lo tanto

$$F_D = 0$$

Este resultado se conoce como la paradoja de Dálmber. A pesar de que somos capaces de calcular el campo de velocidades para cualquier punto en el espacio, el hecho de haber eliminado los esfuerzos viscosos causa que el flujo no produzca arrastre. Este resultado no es solo caso especial de un cilindro. El arrastre para cualquier objeto, cualquiera que sea su forma, sumergido en un flujo potencial es cero.

Podemos también calcular la fuerza de sustentación, F_L (fuerza en la dirección perpendicular al flujo). Entonces, de manera análoga, tenemos

$$F_L = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \rho U_o^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right) \sin \theta L R d\theta$$

entonces

$$F_L = \frac{1}{2} \rho U_o^2 L R \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{5}{3} \cos \theta + \frac{4}{3} \sin^2 \theta \cos \theta \right\}_0^{2\pi}$$

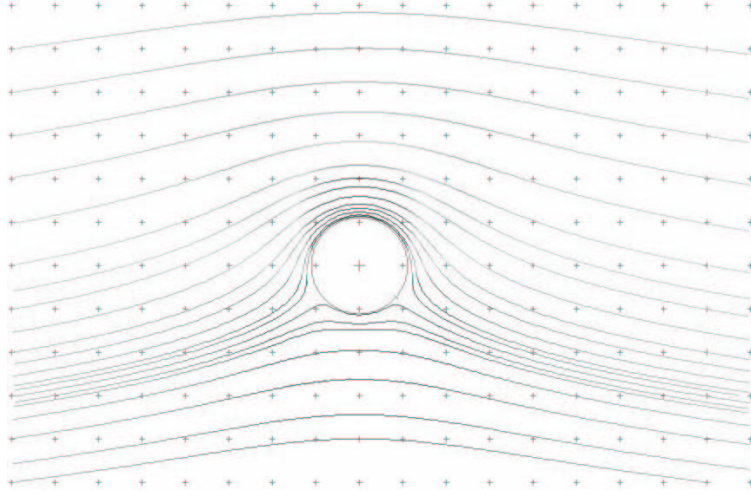
No es sorprendente encontrar que

$$F_L = 0$$

Cilindro con circulación

Si añadimos un vórtice en el centro del cilindro, es decir añadimos circulación al flujo, entonces tenemos la siguiente función de corriente

$$\psi = U_o \sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right) - \kappa \ln \frac{r}{a}$$



Podemos, de la misma manera que para el cilindro sin circulación, calcular el campo de velocidades, la velocidad y la presión en la superficie.

El campo de velocidades está dado por:

$$\begin{aligned} v_r &= \left(U_o - \frac{\lambda}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= \left(U_o - \frac{\lambda}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\kappa}{r} \end{aligned}$$

La velocidad en la superficie es:

$$\begin{aligned} v_r(r = R) &= 0 \\ v_\theta(r = R) &= -2U_o \sin \theta + \frac{\kappa}{R} \end{aligned}$$

La presión en la superficie es:

$$P_s - P_o = \frac{1}{2}\rho U_o^2(1 - 4\sin^2 \theta + 4\beta \sin \theta - \beta^2)$$

donde $\beta = \kappa/(U_o R)$.

Si calculamos tanto el arrastre como la sustentación tenemos:

$$\begin{aligned} F_D &= \int_0^{2\pi} (P_s - P_o) \cos \theta L R d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F_L &= \int_0^{2\pi} (P_s - P_o) \sin \theta L R d\theta \\ &= -\rho U_o (2\pi \kappa) L \end{aligned}$$

Entonces, la sustentación por unidad de profundidad es

$$\frac{F_L}{L} = -\rho U_o \Gamma$$

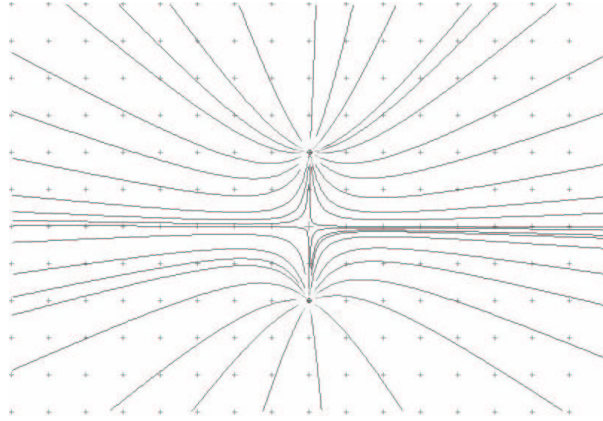
donde $\Gamma = 2\pi \kappa$.

5.4.3. Método de imágenes

En muchos ejemplos prácticos se debe considerar la presencia de paredes rígidas. Existe una manera para simular el efecto de una pared sólida fija.

Consideremos, por ejemplo, el flujo generado por una fuente situada a una distancia a de una pared horizontal sólida. Sabemos que la pared debe satisfacer la condición de no-flujo a través de ella. Es decir, debemos asegurarnos que la pared corresponda a una línea de corriente del flujo.

Para simular la pared, y hacer que esta sea una línea de corriente del flujo, se debe colocar una fuente *virtual* de la misma intensidad a la misma



distancia por debajo de la pared. Por simetría, las dos fuentes dan lugar a una línea de corriente horizontal entre ellas que representa, entonces, la pared. La función de corriente para este caso será:

$$\psi = m \arctan \frac{y - a}{x} + m \arctan \frac{y + a}{x}$$

La misma técnica se puede utilizar para simular el efecto de que tiene una pared en el flujo generado por cualquier otra de las soluciones elementales o sus combinaciones.

De la misma manera que para todos los otros ejemplos anteriores, una vez conocida la función de corriente, o la función potencial de velocidades, se puede deducir el campo de velocidades y también el campo de presiones.

