

# Introducción al Diseño de Filtros Digitales

Diego Milone

Procesamiento Digital de Señales  
Ingeniería Informática FICH-UNL

3 de mayo de 2012

# Organización de la clase

## Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

## Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

## Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

## Modulación

Conceptos básicos

# Organización de la clase

## Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

## Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

## Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

## Modulación

Conceptos básicos

# Concepto

- ¿Qué es un filtro?

# Concepto

- ¿Qué es un filtro?
- Filtros vs. Sistemas

# Concepto

- ¿Qué es un filtro?
- Filtros vs. Sistemas
- Ejemplos...

# Clasificación de los filtros

- Respuesta al impulso
  - IIR (recursivos, AR/ARMA)
  - FIR (no-recursivos, MA)

## Clasificación de los filtros

- Respuesta al impulso
  - IIR (recursivos, AR/ARMA)
  - FIR (no-recursivos, MA)
- Banda de paso
  - Pasa-Bajos
  - Pasa-Altos
  - Pasa-Banda
  - Rechaza-Banda
  - Multibanda



## Clasificación de los filtros

- Adaptativos vs. estáticos
- Filtros de fase lineal
- Filtros para compensación de fase

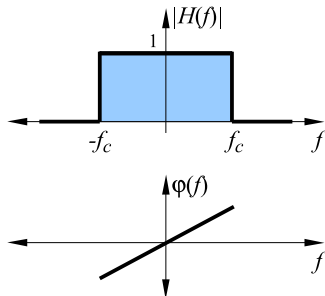
# Clasificación de las técnicas de diseño

- Filtros IIR
  - Prototipos analógicos
    - Butterworth
    - Chebyshev I y II
    - Elípticos
    - Bessel
  - Diseño digital directo (Yule-Walk)

# Clasificación de las técnicas de diseño

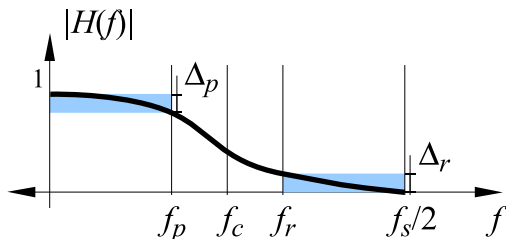
- Filtros IIR
  - Prototipos analógicos
    - Butterworth
    - Chebyshev I y II
    - Elípticos
    - Bessel
  - Diseño digital directo (Yule-Walk)
- Filtros FIR
  - Método de Fourier + Ventaneo
  - Otros (mínimos cuadrados, minimax, etc)

## Filtro pasa bajos ideal



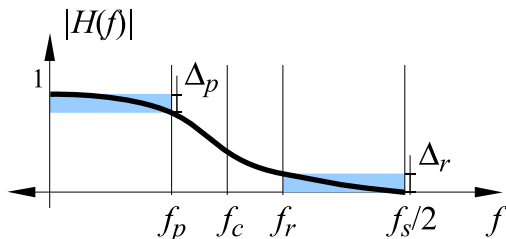
- Magnitud
- Fase
- Frecuencia de corte (-3 dB)

## Filtros realizables



- Filtro pasa bajos
  - Bandas de paso, rechazo y transición

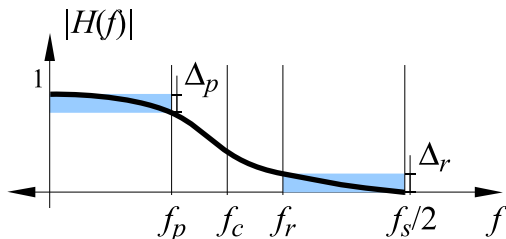
## Filtros realizables



- Filtro pasa bajos
  - Bandas de paso, rechazo y transición
  - Tolerancias en las bandas de paso y rechazo



## Filtros realizables



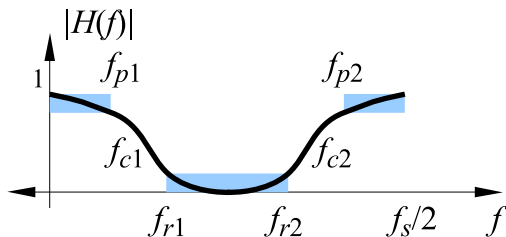
- Filtro pasa bajos
  - Bandas de paso, rechazo y transición
  - Tolerancias en las bandas de paso y rechazo
  - Frecuencias de paso, corte y rechazo
  - Fase



Figure 1 shows a plot of the magnitude of the transfer function  $|H(f)|$  versus frequency  $f$ . The curve starts at a low value, rises through a passband, and levels off at a high value. The passband is shaded blue. The stopband is shaded light blue. The passband edge is marked by  $f_r$  and  $f_p$ . The stopband edge is marked by  $f_s/2$ . The passband ripple is labeled  $\Delta_r$  and the stopband ripple is labeled  $\Delta_p$ .

- Filtro pasa altos
  - Bandas de paso, rechazo y transición
  - Tolerancias en las bandas de paso y rechazo
  - Frecuencias de paso, corte y rechazo
  - Fase

- Filtro pasa banda
  - Bandas de paso, rechazo y transición
  - Tolerancias en las bandas de paso y rechazo
  - Frecuencias de paso, corte y rechazo
  - Fase



## Filtros digitales vs. analógicos

- ++ Estabilidad (componentes electrónicos)
- ++ Precisión
- Frecuencia limitada por la conversión A/D ( $\Rightarrow$  costos)

# Organización de la clase

## Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

## Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

## Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

## Modulación

Conceptos básicos

# Algoritmos de diseño IIR

- Método 1
  - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
  - Transformación en frecuencia (analógica, en  $s$ )
  - Transformación conforme (bilineal)

# Algoritmos de diseño IIR

- Método 1
  - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
  - Transformación en frecuencia (analógica, en  $s$ )
  - Transformación conforme (bilineal)
- Método 2
  - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
  - Transformación conforme (bilineal)
  - Transformación en frecuencia (digital, en  $z$ )

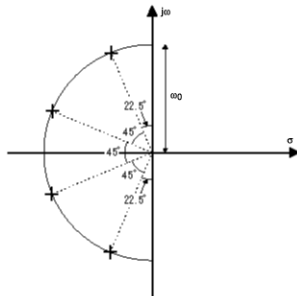
## Diseño analógico: Butterworth

- Función de transferencia
- Tolerancias en la banda de paso y rechazo
- Forma de la respuesta en frecuencia
- Diseño:
  - Especificaciones típicas ( $w_p$ ,  $A$  y  $K_0$ )
  - Fórmula para la estimación del orden ( $N$ )



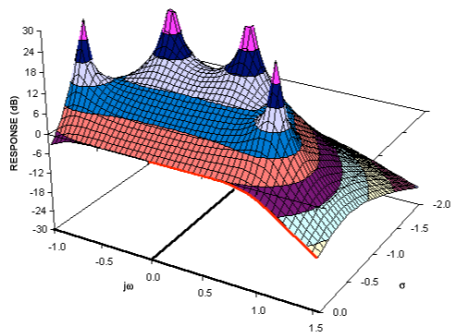
# Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$



# Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$



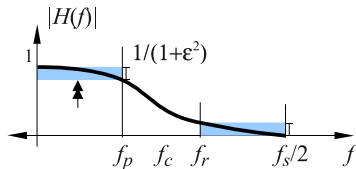
# Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$

# Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$

$$\text{si } |\omega| \leq \omega_P \Rightarrow |H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

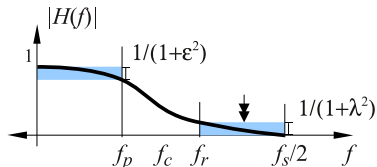


# Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$

$$\text{si } |\omega| \leq \omega_P \Rightarrow |H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

$$\text{si } |\omega| \geq \omega_R \Rightarrow |H(j\omega)|^2 < \frac{1}{1+\lambda^2}$$



# Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$

$$\text{si } |\omega| \leq \omega_P \Rightarrow |H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

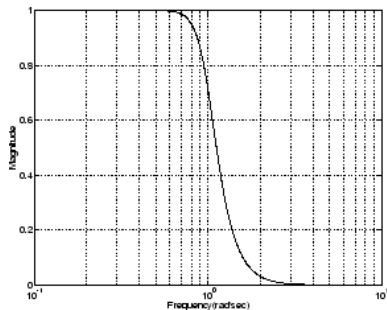
$$\text{si } |\omega| \geq \omega_R \Rightarrow |H(j\omega)|^2 < \frac{1}{1+\lambda^2}$$

$$\text{si } N \rightarrow \infty$$

$$\omega_R \rightarrow \omega_P$$

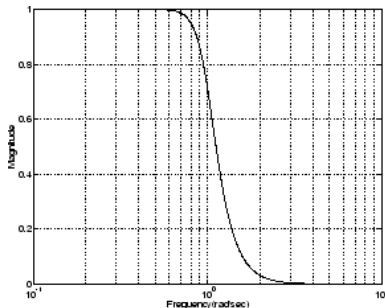
$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$\lambda \rightarrow \infty$$



# Características del filtro de Butterworth

- Respuesta monotónicamente decreciente
- Respuesta máximamente plana cerca de  $\omega = 0$
- Fase tendiendo a  $-N\pi/2$  para  $\omega \rightarrow \infty$



# Diseño Butterworth

- Datos
  - $\omega_p$  : frecuencia de corte
  - $A$  : relación de atenuación máxima
  - $K_0$  : relación de ancho de transición
- Se requiere
  - $N$  : orden del filtro



## Ecuación de diseño Butterworth

Se debe cumplir:

$$N > \frac{\log A}{\log \left( \frac{1}{K_0} \right)}$$

siendo:

$$A = \frac{\lambda}{\epsilon} = \sqrt{\frac{10^{0,1A_R-1}}{10^{0,1A_P-1}}}$$

$$K_0 = \frac{\omega_P}{\omega_R}$$

## Diseño analógico: Chebyshev

- Función de transferencia tipo I y tipo II
- Forma de la respuesta en frecuencia
- Tolerancias en la banda de paso y rechazo
- Fórmula para la estimación del orden ( $N$ )

## Filtro de Chebyshev tipo I

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

## Filtro de Chebyshev tipo I

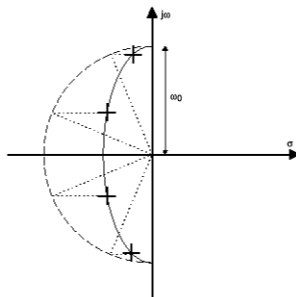
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

Polinomio de Chebyshev:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = x$$



## Filtro de Chebyshev tipo I

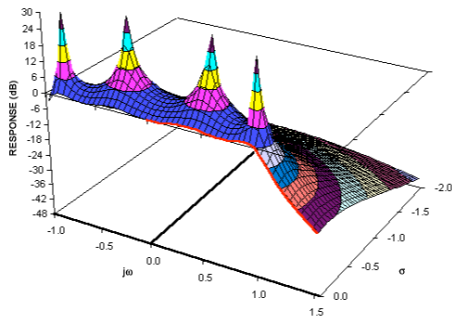
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

Polinomio de Chebyshev:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = x$$



## Filtro de Chebyshev tipo I

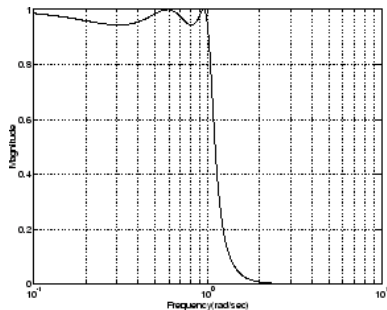
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

Polinomio de Chebyshev:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

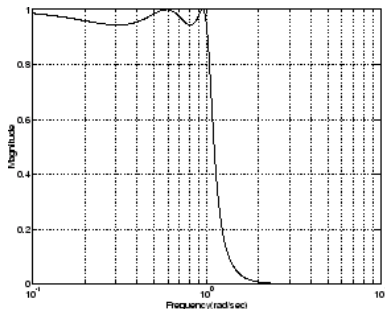
$$V_0 = 1$$

$$V_1 = x$$



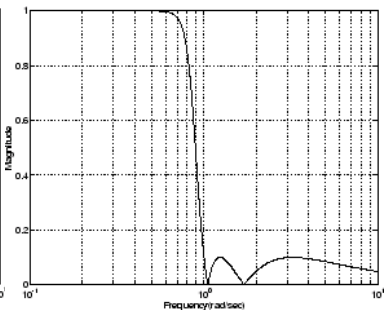
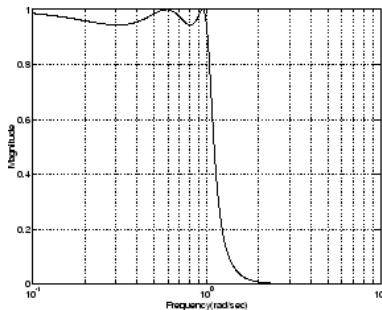
# Características de los filtros de Chebyshev

- Tipo I: ondulaciones en la banda de paso y monotónico decreciente en la banda de rechazo



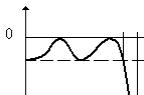
## Características de los filtros de Chebyshev

- Tipo I: ondulaciones en la banda de paso y monotónico decreciente en la banda de rechazo
- Tipo II: ondulaciones en la banda de rechazo y monotónico decreciente en la banda de paso



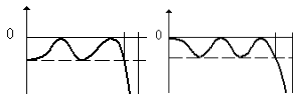


- Tipo I: ondulaciones en la banda de paso y monótonico decreciente en la banda de rechazo
- Tipo II: ondulaciones en la banda de rechazo y monótonico decreciente en la banda de paso
- Diferentes formas para orden par o impar



## Características de los filtros de Chebyshev

- Tipo I: ondulaciones en la banda de paso y monotónico decreciente en la banda de rechazo
- Tipo II: ondulaciones en la banda de rechazo y monotónico decreciente en la banda de paso
- Diferentes formas para orden par o impar



## Ecuación de diseño Chebyshev (tipos I y II)

Se debe cumplir:

$$N > \frac{\cosh^{-1} A}{\cosh^{-1} \left( \frac{1}{K_0} \right)}$$

siendo:

$$A = \frac{\lambda}{\epsilon} = \sqrt{\frac{10^{0,1A_R-1}}{10^{0,1A_P-1}}}$$

$$K_0 = \frac{\omega_P}{\omega_R}$$

## Diseño analógico: filtros elípticos

- Función de transferencia
- Forma de la respuesta en frecuencia
- Tolerancias en la banda de paso y rechazo
- Fórmula para la estimación del orden ( $N$ )

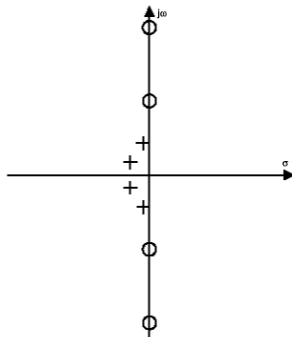
# Filtros elípticos

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_N^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)}$$

## Filtros elípticos

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

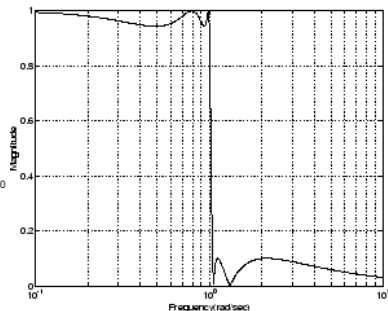
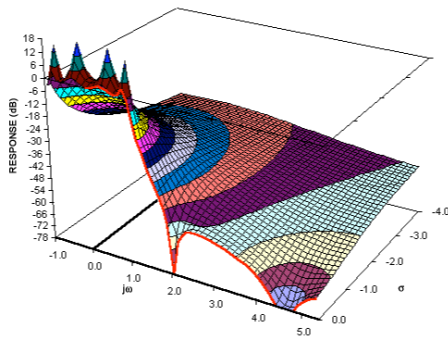
$F_N(x)$ : función elíptica Jacobiana



# Filtros elípticos

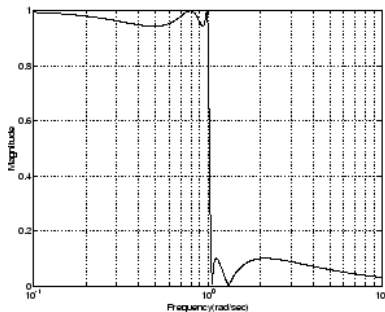
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_N^2 \left( \frac{\omega}{\omega_P} \right)}$$

$F_N(x)$ : función elíptica Jacobiana



## Características de los filtros elípticos

- Ondulaciones en las bandas de paso y rechazo
- Corte más abrupto que los anteriores (para igual orden)
- Diferentes formas para orden par o impar





## Ecuación de diseño para filtros elípticos

Se debe cumplir:

$$N > \frac{\log(16A)}{\log\left(\frac{1}{q}\right)}$$

siendo:

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$q_0 = \frac{1 - (1 - K_0^2)^{0,25}}{2 \left[ 1 + (1 - K_0^2)^{0,25} \right]}$$

# Algoritmos de diseño IIR

- Método 1
  - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
  - Transformación en frecuencia (analógica, en  $s$ )  $\Leftarrow$
  - Transformación conforme (bilineal)
- Método 2
  - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
  - Transformación conforme (bilineal)
  - Transformación en frecuencia (digital, en  $z$ )  $\Leftarrow$

# Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$

# Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-altos  $s \rightarrow \frac{\omega_P}{s}$

# Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-altos  $s \rightarrow \frac{\omega_P}{s}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-banda  $s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{P1}\omega_{P2}}{s(\omega_{P2} - \omega_{P1})}$

## Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-altos  $s \rightarrow \frac{\omega_P}{s}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-banda  $s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{P1}\omega_{P2}}{s(\omega_{P2} - \omega_{P1})}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Rechaza-banda  $s \rightarrow \frac{s(\omega_{P2} - \omega_{P1})}{s^2 + \omega_{P1}\omega_{P2}}$

# Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$

$$\alpha = \frac{\sin((\omega_N - \omega_P)/2)}{\sin((\omega_N + \omega_P)/2)}$$

## Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-altos  $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$

$$\alpha = -\frac{\cos((\omega_N+\omega_P)/2)}{\cos((\omega_N-\omega_P)/2)}$$



## Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-altos  $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-banda  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$

$$\alpha = \frac{\cos((\omega_{P2} + \omega_{P1})/2)}{\cos((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2)}$$

$$k = \cos((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2) \tan(\omega_N/2)$$

## Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-bajos  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-altos  $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Pasa-banda  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$
- Pasa-bajos  $\rightarrow$  Rechaza-banda  $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{k+1}z^{-1}+1}$

$$\alpha = \frac{\cos((\omega_{P2} + \omega_{P1})/2)}{\cos((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2)}$$

$$k = \tan((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2) \tan(\omega_N/2)$$

# Organización de la clase

## Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

## Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

## Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

## Modulación

Conceptos básicos

## Filtros FIR: ventajas y desventajas

- ++ Se puede lograr fase lineal
- ++ Presentan mayor estabilidad
- ++ Diseño hardware eficiente
- ++ Frecuencias de corte abruptas
- ++ Cortos transitorios de inicialización
- Requieren más cálculos

## Filtros FIR: relaciones importantes

- Coeficientes FIR
- Respuesta al impulso
- Convolución
- Sistemas MA

## Fase lineal: interpretación gráfica

- Descomposición de una onda cuadrada en dos componentes senoidales

## Fase lineal: interpretación gráfica

- Descomposición de una onda cuadrada en dos componentes senoidales
- Aplicación de un filtro de fase constante a ambas componentes por superposición

## Fase lineal: interpretación gráfica

- Descomposición de una onda cuadrada en dos componentes senoidales
- Aplicación de un filtro de fase constante a ambas componentes por superposición
- Aplicación de un filtro de fase lineal a ambas componentes por superposición



## Fase lineal: interpretación gráfica

- Descomposición de una onda cuadrada en dos componentes senoidales
- Aplicación de un filtro de fase constante a ambas componentes por superposición
- Aplicación de un filtro de fase lineal a ambas componentes por superposición
- Filtro sin fase lineal (y con magnitud constante) deforma la onda en el tiempo

## Fase lineal: definiciones

- Definiciones de módulo y fase
- Definición de retardo de fase:  $\tau_\phi(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$
- Definición de retardo de grupo  $\tau_\gamma(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$
- Fase lineal:  $\phi(\omega) = \tau\omega$   
(...  $\tau_\phi$  y  $\tau_\gamma$  constantes ...)

## Diseño FIR por Fourier y ventaneo

1. Especificación de los requerimientos (mód. y fase)
2. Muestreo de la respuesta en frecuencia
3. Aplicación de la TDF inversa
4. Truncado temporal (ventanas temporales)
5. Corrección de amplitud
6. Corrección para obtener la causalidad

# Truncado y ventaneo temporal

## Objetivos:

- Reducción del orden del filtro resultante
- Reducción de los artefactos del truncado
  - reducción de los lóbulos laterales
  - “reducción” del ancho en el lóbulo central

## Interpretación gráfica

# Ventanas

- Ventana rectangular:  $\omega_R[n] = 1$

# Ventanas

- Ventana rectangular:  $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning:  $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$

## Ventanas

- Ventana rectangular:  $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning:  $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Hamming:  $\omega_H[n] = \frac{27}{50} - \frac{23}{50} \cos(2\pi n/N)$

## Ventanas

- Ventana rectangular:  $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning:  $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Hamming:  $\omega_H[n] = \frac{27}{50} - \frac{23}{50} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Bartlett:

$$\omega_B[n] = \begin{cases} 2n/N & \text{si } 0 < n \leq N/2 \\ 2 - 2n/N & \text{si } N/2 < n \leq N \end{cases}$$



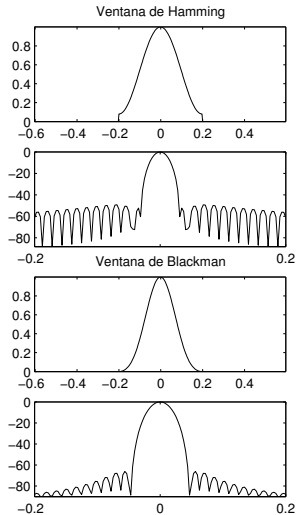
## Ventanas

- Ventana rectangular:  $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning:  $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Hamming:  $\omega_H[n] = \frac{27}{50} - \frac{23}{50} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Bartlett:

$$\omega_B[n] = \begin{cases} 2n/N & \text{si } 0 < n \leq N/2 \\ 2 - 2n/N & \text{si } N/2 < n \leq N \end{cases}$$

- Ventana de Blackman:

$$\omega_K[n] = \frac{21}{50} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N) + \frac{2}{25} \cos(4\pi n/N)$$



## Ventanas: ancho del lóbulo central

- Rectangular:  $4\pi/N$
- Bartlet:  $8\pi/N$
- Hanning:  $8\pi/N$
- Hamming:  $8\pi/N$
- Blackman:  $12\pi/N$

## Ventanas: relación de energía entre lóbulos laterales y central

- Rectangular: -13 dB
- Bartlet: -25 dB
- Hanning: -31 dB
- Hamming: -41 dB
- Blackman: -57 dB

# Organización de la clase

## Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

## Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

## Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

## Modulación

Conceptos básicos

# Modulación: conceptos básicos

- Modulación en amplitud (sinusoidal)
- Demodulación sincrónica y asincrónica
- Multiplexado en frecuencia
- Modulación en frecuencia

## Bibliografía básica

- D.J. DeFatta, J.J. Lucas, W.S. Hodgkiss, Digital Signal Processing: A System Design Approach (Capítulos 4 y 5), John Wiley, 1988.
- R. Kuc, Introduction to Digital Signal Processing (Capítulos 6, 7, 8 y 9), Mcgraw-Hill, 1988.
- A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, Signals and Systems (modulación en amplitud y en frecuencia, Secciones 7.1,7.2,7.3,7.5,7.6), Prentice-Hall, 1999.