

Mecánica del Continuo

Trabajo Práctico N°5

Análisis de Deformación

Darién Julián Ramírez

Ejercicio 1

Considerar una placa cuadrada de tamaño unitario como la que se observa en la figura 1. Determinar las componentes de deformación.

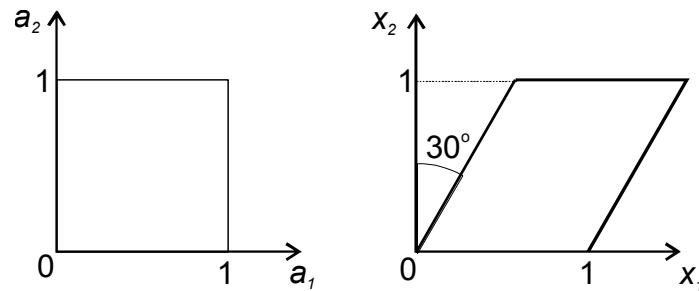


Figura 1: Placa cuadrada de tamaño unitario.

$$\tan 30^\circ = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

original(a_1, a_2)		deformado(x_1, x_2)
(0, 0)	→	(0, 0)
(1, 0)	→	(1, 0)
(0, 1)	→	$(0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$
(1, 1)	→	$(1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$

Enfoque Lagrangiano:

$$x_i = x_i(a_1, a_2) \implies \begin{cases} x_1(a_1, a_2) = a_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_2 \\ x_2(a_1, a_2) = a_2 \end{cases}$$

Tensor de deformación de Green:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_1} - \delta_{11} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_1} \right)^2 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_1} \right)^2 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} (1^2 + 0^2 - 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_2} - \delta_{22} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_2} \right)^2 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial a_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_2} \right)^2 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1^2 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_2} - \delta_{12} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_2} + \frac{\partial x_2}{\partial a_1} \frac{\partial x_2}{\partial a_2} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 \cdot 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Enfoque Euleriano:

$$a_i = a_i(x_1, x_2) \implies \begin{cases} a_1(x_1, x_2) = x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 \\ a_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}$$

Tensor de deformación de Almansi:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{11} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_1} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} (1 - 1^2 - 0^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{22} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{22} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_2} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1^2 \right) \right) \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{12} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(0 - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 0 \cdot 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}
\quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Considere la misma placa del ejercicio anterior (Figura 1), pero esta vez sujeta a una distorsión mucho más pequeña definida por:

$$x_1 = a_1 + 0,01a_2; \quad a_1 = x_1 - 0,01x_2; \quad x_2 = a_2; \quad x_3 = a_3$$

Determine las componentes de deformación.

.....
Tensor de deformación infinitesimal de Cauchy:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial a_1} = 0 & u_1 &= x_1 - a_1 = a_1 + 0,01a_2 - a_1 = 0,01a_2 \\
e_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial a_2} = 0 & u_2 &= x_2 - a_2 = a_2 - a_2 = 0 \\
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005
\end{aligned}$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0,005 \\ 0,005 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 & u_1 &= x_1 - a_1 = x_1 - x_1 + 0,01x_2 = 0,01x_2 \\
e_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 & u_2 &= x_2 - a_2 = x_2 - x_2 = 0 \\
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005
\end{aligned}$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0,005 \\ 0,005 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

Sea $ABCD$ un cuadrado unitario en el plano xy (Figura 2).

$ABCD$ forma parte de un gran cuerpo deformable sujeto a una pequeña deformación uniforme dada por:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0,001 & 0,002 & 0,003 \\ 0,002 & 0,001 & 0 \\ 0,003 & 0 & 0,002 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el cambio de longitud de las líneas AC y AE ?

.....

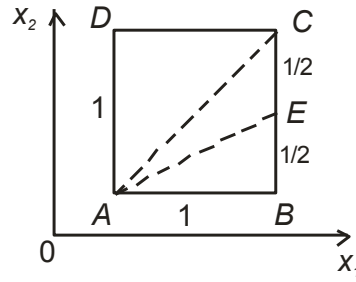


Figura 2: Cuadrado unitario ABCD.

$$\begin{aligned}
 dS^2 - dS_0^2 &= 2e_{ij}dx_i dx_j; & dS^2 - dS_0^2 &= (dS - dS_0)(dS + dS_0) \\
 (dS - dS_0)(dS + dS_0) &= 2e_{ij}dx_i dx_j; & dS &= dS_0 \\
 (dS - dS_0)(dS_0 + dS_0) &= 2e_{ij}dx_i dx_j \\
 (dS - dS_0)(2dS_0) &= 2e_{ij}dx_i dx_j \\
 dS - dS_0 &= \frac{2e_{ij}dx_i dx_j}{2dS_0} \\
 dS - dS_0 &= \frac{e_{ij}dx_i dx_j}{dS_0} \frac{dS_0}{dS_0} \\
 dS - dS_0 &= e_{ij} \frac{dx_i}{dS_0} \frac{dx_j}{dS_0} dS_0; & \frac{dx_i}{dS_0} &= n_i; \quad \frac{dx_j}{dS_0} = n_j \\
 dl &= e_{ij}n_i n_j dS_0 \\
 \int_0^l dl &= e_{ij}n_i n_j \int_0^l dS_0 \\
 \Delta l &= e_{ij}n_i n_j l_0 = n_i e_{ij} n_j l_0
 \end{aligned}$$

n_i y n_j son el mismo vector sólo que dispuesto es posición fila y dispuesto es posición columna respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AC} &= (1, 1, 0)^T; & n_{AC} &= \frac{\mathbf{AC}}{\|\mathbf{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & l_{0(AC)} &= \sqrt{2} \\
 \mathbf{AE} &= \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^T; & n_{AE} &= \frac{\mathbf{AE}}{\|\mathbf{AE}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} & l_{0(AE)} &= \sqrt{\frac{5}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta l_{AC} &= n_{ACi} \cdot e_{ij} \cdot n_{ACj} \cdot l_{0(AC)} = 0,0042 \\
 \Delta l_{AE} &= n_{AEi} \cdot e_{ij} \cdot n_{AEj} \cdot l_{0(AE)} = 0,0029
 \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Una torre de lanzamiento de cohetes está afectada por deformación térmica causada por el calentamiento no uniforme del cohete por el Sol. Asuma que el cuerpo del cohete es un cilindro circular, y estime el desplazamiento horizontal del punto extremo A si se cumplen las siguientes hipótesis:

- El coeficiente lineal de expansión térmica es $\alpha = 10^{-5} \left[\frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$
- La temperatura máxima en el cuerpo del cohete en la cara que da al Sol es 20°C más caliente que la temperatura mínima en la cara opuesta (a la sombra).
- La distribución de temperatura es uniforme a lo largo de la longitud del cohete, pero varía linealmente según el eje x.
- Como consecuencia de lo anterior, una sección plana del cohete permanece plana luego de la deformación térmica.

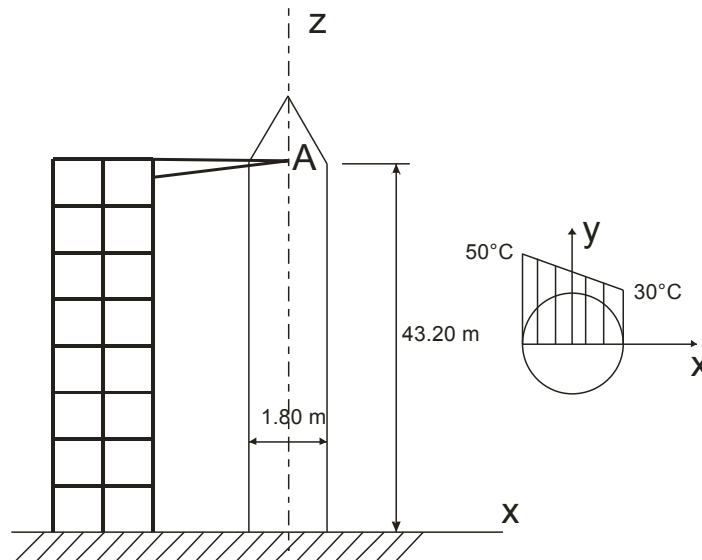


Figura 3: Torre de lanzamiento de cohetes.

e. El cohete está descargado y libre de deformar.

Sugerencia: Calcule la deformación térmica y luego integre para obtener el desplazamiento.

Respuesta: 10,36[cm]

.....

$$\Delta T > 0; \quad \Delta T = |T_1 - T_2|$$

$$\mathbf{e} = \alpha \Delta T \mathbf{I} \Rightarrow e_{ij} = \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

$$e_{zz} = \alpha \Delta T = \frac{\partial u_z}{\partial z} \Rightarrow du_z = \alpha \Delta T \cdot dz$$

$$\tan(d\theta) = \theta = \frac{\partial du_z}{D} = \frac{\alpha \Delta T}{D} dz$$

$$\theta = \int_0^z d\theta = \int_0^z \frac{\alpha \Delta T}{D} dz = \frac{\alpha \Delta T}{D} (z - 0)$$

$$\theta(z) \approx \tan \theta = \frac{du_x}{dz} = \frac{\alpha \Delta T}{D} z$$

$$\Rightarrow u_x = \int_0^z \frac{\alpha \Delta T z}{D} dz = \frac{\alpha \Delta T z^2}{2D} = 10^{-5} \left[\frac{1}{^\circ C} \right] \cdot \frac{20[^\circ C]}{180[cm]} \cdot \frac{(4320[cm])^2}{2} = 10,368[cm]$$

Ejercicio 5

Un tubo de acero de longitud 60 cm, diámetro 6 cm, y espesor de pared $\frac{1}{16}$ cm, es estirado axialmente 0.01 cm, expandido 0.001 cm en diámetro y girado en torsión 1° en su longitud. Determinar las componentes del tensor de deformación.

Respuesta:

$$e_{zz} = e_{\theta\theta} = 1,66 \times 10^{-4}; \quad e_{z\theta} = 4,363 \times 10^{-4}$$

.....

$$u_\theta = r \frac{\partial \phi}{\partial z} = r \frac{0,017453}{60[cm]}; \quad u_z = \frac{0,01[cm]}{60[cm]} z; \quad u_r = \frac{0,001[cm]}{2}$$

Componentes de deformación infinitesimal en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \\ e_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{0,001[cm]}{2r} + \frac{1}{r} \cdot 0 = \frac{0,001[cm]}{2 \cdot 3[cm]} = 1,6667 \times 10^{-4} \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \cdot 0 + \phi - \phi \right) = 0 \\ e_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0 \\ e_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \cdot 0 + r \frac{0,017453}{60[cm]} \right) = \frac{3[cm] \cdot 0,017453}{2 \cdot 60[cm]} = 4,3633 \times 10^{-4} \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{0,01[cm]}{60[cm]} = 1,6667 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Derive una expresión para el cambio de volumen de un elemento de volumen unitario sometido a deformaciones pequeñas e_{ij} . Mostrar que el invariante $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ representa el cambio de volumen por unidad de volumen.

.....

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= dS_0 \cdot dS_0 \cdot dS_0 \\ dV &= dS_1 \cdot dS_2 \cdot dS_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dS_i - dS_0 &= e_{ii} \cdot dS_0 \\ dS_i &= e_{ii} \cdot dS_0 + dS_0 \\ dS_i &= (e_{ii} + 1)dS_0 \end{aligned}$$

$$V = (e_{11} + 1)dS_0 \cdot (e_{22} + 1)dS_0 \cdot (e_{33} + 1)dS_0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{V - V_0}{V_0} \\ &= \frac{[(e_{11} + 1)(e_{22} + 1)(e_{33} + 1) - 1]dS_0 \cdot dS_0 \cdot dS_0}{dS_0 \cdot dS_0 \cdot dS_0} \\ &= \cancel{1} + e_{11} + e_{22} + e_{33} + \cancel{e_{11}e_{22}} + \cancel{e_{22}e_{33}} + \cancel{e_{33}e_{11}} + \cancel{e_{11}e_{22}e_{33}} - \cancel{1} \\ &= I_1 \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Sea un dispositivo que permita medir experimentalmente la variación de distancia entre dos puntos. Se disponen tres de estos dispositivos en forma de triángulo equilátero como en la figura 4. Dé la expresión del tensor de deformación en la zona, a partir de las medidas de los tres valores de elongación $(\Delta \ell_{12}, \Delta \ell_{23}, \Delta \ell_{31})$ y de la longitud del lado del triángulo ℓ .

.....

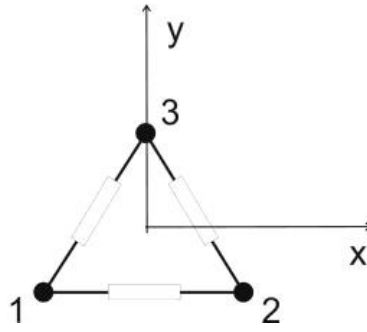


Figura 4: Disposición de los dispositivos en forma de triángulo

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta l_{12}}{l_{12}} \quad e_{1'1'} = \frac{\partial u_{1'}}{\partial x'_1} = \frac{\Delta l_{13}}{l_{13}} \quad e_{1''1''} = \frac{\partial u_{1''}}{\partial x''_1} = \frac{\Delta l_{23}}{l_{23}} \quad l = l_{12} = l_{13} = l_{23}$$

$$\begin{aligned} e_{1'1'} &= \frac{e_{11} + e_{22}}{2} + \frac{e_{11} - e_{22}}{2} \cos 2\alpha + \frac{e_{12}}{2} \sin 2\alpha & \alpha = 60^\circ \\ &= \frac{\frac{\Delta l_{12}}{l} + e_{22}}{2} + \frac{\frac{\Delta l_{12}}{l} - e_{22}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{e_{12}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} e_{1''1''} &= \frac{e_{11} + e_{22}}{2} + \frac{e_{11} - e_{22}}{2} \cos 2\alpha + \frac{e_{12}}{2} \sin 2\alpha & \alpha = 120^\circ \\ &= \frac{\frac{\Delta l_{12}}{l} + e_{22}}{2} + \frac{\frac{\Delta l_{12}}{l} - e_{22}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{e_{12}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

(1) - (2) :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l_{13}}{l} - \frac{\Delta l_{23}}{l} &= \frac{e_{12}}{\sqrt{3}} \\ e_{12} &= \frac{2}{l\sqrt{3}} (\Delta l_{13} - \Delta l_{23}) \end{aligned}$$

(1) + (2) :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l_{13}}{l} + \frac{\Delta l_{23}}{l} &= \frac{\Delta l_{12}}{l} + e_{22} - \frac{\frac{\Delta l_{12}}{l} - e_{22}}{2} \\ 2 \left(\frac{\Delta l_{13}}{l} + \frac{\Delta l_{23}}{l} \right) &= \frac{\Delta l_{12}}{l} + 2e_{22} + e_{22} \\ e_{22} &= \frac{1}{3} \left(2 \frac{\Delta l_{13}}{l} + 2 \frac{\Delta l_{23}}{l} - \frac{\Delta l_{12}}{l} \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 8

Dado un campo de tensiones σ_{ij} , con componentes referidas a un sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 :

- ¿Cuál es la definición de tensiones principales?
- ¿Cuál es la definición de ejes principales?
- Describir brevemente cómo pueden determinarse, en principio, las direcciones principales (direcciones de los ejes principales).
- Considere un tensor de deformación e_{ij} referido a los mismos ejes. ¿Cómo determinaría las deformaciones principales y las correspondientes direcciones principales de deformación?
- Si las tensiones y las deformaciones están relacionadas por la expresión

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

donde λ, μ son constantes, probar que los ejes principales de tensión coinciden con los ejes principales de deformación.

a. Las **tensiones principales** son los autovalores de τ_{ij} :

$$\begin{aligned}
 |\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| &= \left| \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \begin{vmatrix} \tau_{11} - \sigma & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma \end{vmatrix} \\
 &= -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

I_1 , I_2 y I_3 son invariantes y se calculan de la siguiente manera:

- *Suma de los elementos de la diagonal:* $I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$
- *Suma de los determinantes menores que se obtienen de recorrer la diagonal pero sin multiplicar por el pivote:*

$$I_2 = \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix}$$

- *Determinante de τ_{ij} :*

$$I_3 = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}$$

b. Las **direcciones principales** son los autovectores de τ_{ij} :

$$(\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}) \cdot \nu_j = \begin{pmatrix} \tau_{11} - \sigma & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = 0$$

c. Primero se calculan las tensiones principales utilizando lo mostrado en a. Luego se calculan las direcciones principales utilizando lo mostrado en b.

d. Las **deformaciones principales** son los autovalores de e_{ij} :

$$\begin{aligned}
 |e_{ij} - e \delta_{ij}| &= \left| \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \begin{vmatrix} e_{11} - e & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e \end{vmatrix} \\
 &= -e^3 + I_1 e^2 - I_2 e + I_3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

I_1 , I_2 y I_3 son invariantes y se calculan de la siguiente manera:

- *Suma de los elementos de la diagonal:* $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$
- *Suma de los determinantes menores que se obtienen de recorrer la diagonal pero sin multiplicar por el pivote:*

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$$

- *Determinante de e_{ij} :*

$$I_3 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}$$

Las **direcciones principales de deformación** son los autovectores de e_{ij} :

$$(e_{ij} - e\delta_{ij}) \cdot \nu_j = \begin{pmatrix} e_{11} - e & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = 0$$

e.

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} - \sigma^\alpha \delta_{ij}) \nu_j^\alpha &= 0 & \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\ (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \sigma^\alpha \delta_{ij}) \nu_j^\alpha &= 0 \\ (2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \sigma^\alpha) \delta_{ij}) \nu_j^\alpha &= 0 \\ \left(e_{ij} + \left(\frac{\lambda e_{kk} - \sigma^\alpha \delta_{ij}}{2\mu} \right) \right) \nu_j^\alpha &= 0 & -e^\alpha &= \frac{\lambda e_{kk} - \sigma^\alpha \delta_{ij}}{2\mu} \\ (e_{ij} - e^\alpha \delta_{ij}) \nu_j^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

En un estudio de sismos, Lord Rayleigh propuso una solución de las ecuaciones linealizadas de Elasticidad de la forma:

$$\begin{aligned} u &= A \exp(-by + ik(x - ct)) \\ v &= B \exp(-by + ik(x - ct)) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

Si el plano xz representa la superficie del suelo mientras y representa la profundidad dentro del suelo, y u, v, w representan los desplazamientos de las partículas de suelo, entonces la solución anterior representa una onda propagándose en la dirección x con velocidad c y una amplitud que decrece exponencialmente desde la superficie. Se supone que la onda se generó dentro del suelo y que la superficie del suelo está libre de tensiones.

Después de estudiar las ecuaciones de movimiento y las condiciones de borde, Lord Rayleigh halló las constantes A, B, b y c , obteniendo:

$$\begin{aligned} u &= A(e^{-0,8475ky} - 0,5773e^{-0,3933ky}) \cos(k(x - C_R t)) \\ v &= A(-0,8475e^{-0,8475ky} + 1,4679e^{-0,3933ky}) \sin(k(x - C_R t)) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

La constante C_R es llamada velocidad de onda de Rayleigh, y es igual a 0.9174 veces la velocidad de la onda de corte si el coeficiente de Poisson es igual a 0.25. Esta solución satisface las condiciones de una onda propagándose en un medio elástico semi-infinito con superficie libre en $y = 0$. Las partículas se mueven en el plano xy , con amplitud decreciente a medida que aumenta la distancia a la superficie libre. Esta onda constituye una de las ondas más prominentes que se observan en un sismógrafo durante un terremoto.

Responda a las preguntas siguientes, utilizando visualizaciones de los campos de desplazamiento, velocidad y deformación mediante software como Matlab® u Octave^(GNU).

- Esquematizar la forma de la onda.
- Esquematizar la trayectoria de las partículas sobre la superficie libre $y = 0$, a varios valores de x . Repetir para varias partículas a diferentes profundidades $y > 0$.
- Mostrar que el movimiento de las partículas es retrógrado.
- Determinar la localización y el valor de las máximas deformaciones principales a un instante dado.

.....

Ejercicio 10

Una membrana cuadrada ($-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$) es estirada de manera que el desplazamiento queda descrito por:

$$\begin{aligned}u &= a(x^2 + y^2) \\v &= bxy \\w &= 0\end{aligned}$$

- Calcule las componentes de deformación en (x, y) .
- Calcule las deformaciones principales en $(0, 0)$.

Asuma que las constantes a y b son mucho menores que 1.

.....

a.

$$\begin{aligned}x &= 1 - (-1) = 2 \\y &= 1 - (-1) = 2 \\e_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2ax \\e_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y} = bx \\e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(by + 2ay) \\e &= \begin{pmatrix} 2ax & \frac{1}{2}(by + 2ay) \\ \frac{1}{2}(by + 2ay) & bx \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}(e_1, e_2) &= \frac{e_x + e_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_x - e_y}{2} \right)^2 + e_{xy}^2} \\&= (0, 0)\end{aligned}$$

Apéndice

Relación de estiramiento:

$$\lambda = \frac{\text{Longitud deformada}}{\text{Longitud original}} = \frac{L}{L_0} \quad (1)$$

Coordenadas de una partícula en la configuración original del cuerpo:

$$(a_1, a_2, a_3)$$

Coordenadas de una partícula en la configuración deformada del cuerpo:

$$(x_1, x_2, x_3)$$

La configuración en un sistema se puede determinar en función de la configuración en el otro sistema:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} x_1(a_1, a_2, a_3) \\ x_2(a_1, a_2, a_3) \\ x_3(a_1, a_2, a_3) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, x_3) \\ a_2(x_1, x_2, x_3) \\ a_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Vector desplazamiento \mathbf{u} :

$$u_i = x_i - a_i \quad (4)$$

Vector desplazamiento en función de la posición original: (Para sólidos, enfoque Lagrangiano)

$$u_i(a_1, a_2, a_3) = x_i(a_1, a_2, a_3) - a_i \quad (5)$$

Vector desplazamiento en función de la posición deformada: (Para fluidos, enfoque Euleriano)

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - a_i(x_1, x_2, x_3) \quad (6)$$

Deformation vs Strain:

$$\begin{aligned} \text{deformation} &\implies \text{movimiento, traslación} \\ \text{strain} &\implies \text{deformación} \end{aligned}$$

Descripción del cambio entre dos puntos:

$$\text{Lagrangiano : } ds_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2 \quad (7)$$

$$\text{Euleriano : } ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (8)$$

Tensor de deformación de Green (Lagrangiano):

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) = E_{ji} \quad (9)$$

$$dS^2 - dS_0^2 = 2E_{ij} da_i da_j \quad (10)$$

Tensor de deformación de Almansi (Euleriano):

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right) = e_{ji} \quad (11)$$

$$dS^2 - dS_0^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j \quad (12)$$

Tensor de deformación infinitesimal de Cauchy: (Lagrangiano = Euleriano)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right) \quad (13)$$

$$dS^2 - dS_0^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j = 2e_{ij} da_i da_j \quad (14)$$

Componentes de deformación infinitesimal en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ e_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ e_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (15)$$

Tensor de rotación infinitesimal:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} = -\omega_{ji}; \quad \text{Antisimétrico} \quad (16)$$

Vector dual de rotación infinitesimal:

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \omega_{ij} \quad (17)$$

Se llama vector dual porque a partir de él se puede determinar el tensor de rotación infinitesimal y viceversa:

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (18)$$

Deformaciones principales:

$$|e_{ij} - e\delta_{ij}| = 0 \quad (19)$$

Direcciones principales de deformación:

$$(e_{ij} - e_p \delta_{ij}) \nu_j^p = 0; \quad p = 1, 2, 3 \quad (20)$$

Referencias

- [1] Y. C. Fung, *A First Course in Continuum Mechanics*, tercera edición, PRENTICE HALL, 1994.