Mecánica del Continuo
Trabajo Práctico Nº8
Isotropía y Propiedades Mecánicas de los Materiales

Darién Julián Ramírez

Ejercicio 1

Demuestre que el tensor isotrópico de 4º rango más general tiene la forma

$$\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} + \gamma\delta_{ik}\delta_{jl}$$

donde α, β y γ son constantes.

. . . .

$$\begin{aligned}
&\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) && \textit{Distribuyendo} \\
&= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} + \nu\delta_{ik}\delta_{jl} - \nu\delta_{il}\delta_{jk} && \textit{Reordenando} \\
&= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} - \nu\delta_{il}\delta_{jk} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{ik}\delta_{jl} && \textit{Factor común} \\
&= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + (\mu - \nu)\delta_{il}\delta_{jk} + (\mu + \nu)\delta_{ik}\delta_{jl} && \alpha = \lambda \quad \beta = \mu - \nu \quad \gamma = \mu + \nu \\
&= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} + \gamma\delta_{ik}\delta_{jl}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Distinga los conceptos *homogéneo* e *isótropo*. Considere la atmósfera terrestre.

a. Si usted estudia un cohete a gran altura, ¿consideraría a la atmósfera homogénea o isótropa?

   Isotrópico: estado tensional (respuesta constitutiva) que no depende de la orientación de la deformación.

   Homogeneidad: en cada punto mismas propiedades.

   Isotropía: en cada punto y en cada dirección las mismas propiedades.

   - A la misma altura: homogéneo e isotrópico.
   - A distintas alturas: no homogéneo pero sigue siendo isotrópico.

b. Si estudia el flujo en el entorno inmediato de un cohete que vuela a una velocidad tal que no genera ondas de choque, ¿podría tratarse al aire como homogéneo o isótropo?

   Hay cambios de densidades muy pequeñas en comparación al tamaño del cohete. Isotrópico, no depende de la dirección.

c. ¿Y si se generaran ondas de choque en el caso anterior?

   Se genera una discontinuidad en la presión, cambian las propiedades según la dirección. No es isotrópico.

Ejercicio 3

¿Conoce algún líquido que no sea isótropo?

....

El LCD (cristal líquido). Hay una alineación estructural.

Ejercicio 4

¿Conoce algún sólido que no sea isótropo?

....

La madera.

Ejercicio 5

Suponga que ningún material aumenta su volumen cuando está sujeto a una presión hidrostática. Demuestre que el máximo valor del *coeficiente de Poisson* ν para un sólido elástico isótropo que obedece la *Ley de Hooke* es 0.5.

....

Ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Presión hidrostática:

$$\begin{aligned}
-p &= \frac{1}{3}\sigma_{rr} && \sigma_{rr} = \lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{rr} + 2\mu e_{rr} \\
&= \frac{1}{3}(\lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{rr} + 2\mu e_{rr}) && e_{\alpha\alpha} = 3e_{rr} \qquad \delta_{rr} = 1 \\
&= \frac{1}{3}(3\lambda e_{rr} + 2\mu e_{rr}) && \textit{Factor común} \\
&= \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)e_{rr} && \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2E}{2(1+\nu)}\right)e_{rr} && \textit{Simplificando} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{(1+\nu)}\right)e_{rr} && \textit{Común denominador} \\
&= \frac{3E\nu + E - 2E\nu}{3(1+\nu)(1-2\nu)}e_{rr} && \textit{Operando} \\
&= \frac{E + E\nu}{3(1+\nu)(1-2\nu)}e_{rr} && \textit{Factor común} \\
&= \frac{E(1+\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}e_{rr} && \textit{Simplificando} \\
&= \frac{E}{3(1-2\nu)}e_{rr} && \textit{Despejando} \\
e_{rr} &= -\frac{3p(1-2\nu)}{E} = \frac{3p(2\nu-1)}{E}
\end{aligned}$$

Cambio de volumen:

$$\frac{\Delta V}{V} = e_{rr} = \frac{3p(2\nu-1)}{E}$$

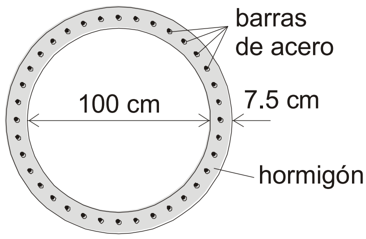
Teniendo en cuenta que $E > 0$ se pueden desprender las siguientes conclusiones analizando el resultado al cual se llegó:

- Si $\nu < \frac{1}{2}$, el cambio de volumen es negativo y satisface la física del problema indicando una contracción en el material.
- Si $\nu = \frac{1}{2}$, el cambio de volumen es nulo y el material es incompresible.
- Si $\nu > \frac{1}{2}$, el cambio de volumen es positivo, lo cual viola nuestro supuesto de que el volumen no puede aumentar cuando el material se encuentra sujeto a una presión hidrostática.

Estas observaciones nos llevan a concluir que el *coeficiente de Poisson* ν debe satisfacer la restricción $\nu \leq \frac{1}{2}$.

Ejercicio 6

El hormigón armado consiste en hormigón reforzado por barras de acero. Una columna vertical de hormigón armado de sección transversal anular de 1 [m] de diámetro interno y 7.5 [cm] de espesor contiene 36 barras de acero de 6.5 $[cm^2]$ de sección transversal, equiespaciadas a lo largo de una circunferencia (ver figura). La columna está sometida a una carga vertical cuya resultante se sitúa en el eje de la columna. El módulo de elasticidad del acero es 15 veces más grande que el del hormigón. El *coeficiente de Poisson* del hormigón es de 0.4 y el del acero es de 0.25. Determine que proporción de la carga es absorbida por cada material en una sección transversal suficientemente alejada de los extremos.



....

Se puede despreciar el efecto de *Poisson* por las dimensiones. Las tensiones se relacionan por el módulo de *Young*.

Hormigón *Acero*

$$\sigma_h = E_h e \qquad \sigma_a = E_a e = 15 E_h e \tag{1}$$

$$\sigma_h = \frac{F_h}{A_h} \qquad \sigma_a = \frac{F_a}{A_a} \tag{2}$$

Propiedades de las cargas que soporta el hormigón:

$$\frac{F_h}{F_h + F_a}$$

Propiedades de las cargas que soporta el acero:

$$\frac{F_a}{F_a + F_h}$$

De (1) y (2) obtengo:

$$F_h = A_h E_h e \qquad F_a = 15 E_h A_a e$$

Evaluando la propiedad para el hormigón:

$$F_h + F_a = E_h(A_h + 15 A_a)e \qquad prop_h = \frac{A_h}{A_h + 75 A_a}$$

$$A_a = 6{,}5 \cdot 36 \qquad A_h = \left(\frac{100 + 7{,}5}{2}\right)^2 \pi - \left(\frac{100}{2}\right)^2 \pi \cdot A_a$$

Apéndice

Tensores isotrópicos de rango 0:

$$Escalares$$

Tensores isotrópicos de rango 1 (sólo el trivial):

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tensores isotrópicos de rango 2:

$$A_{ij} = p\delta_{ij}$$

Tensores isotrópicos de rango 3 (isotrópico con respecto a las rotaciones):

$$A_{ijk} = \alpha\varepsilon_{ijk}$$

Tensores isotrópicos de rango 4:

$$A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

Presión hidrostática:

$$-p = \frac{1}{3}\sigma_{rr}$$

Referencias

[1] Y. C. Fung, *A First Course in Continuum Mechanics*, tercera edición, PRENTICE HALL, 1994.