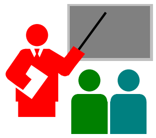
Análisis de Fourier
DFT/FFT

Temas a tratar

- Introducción
- Series de Fourier
- Transformada continua de Fourier
- Propiedades y transformada inversa
- Transformada discreta de Fourier
- Alias de muestreo en el dominio de la frecuencia
- Algoritmos de cálculo.



“Análisis” en frecuencias

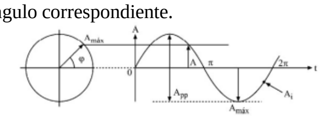
- La luz del sol puede descomponerse en un espectro de colores.
- El sonido puede descomponerse en señales de frecuencias puras.
- Este análisis puede extenderse también a una amplia variedad de señales analógicas o digitales.

Un poco de historia...

- En 1807 Fourier estudiaba el fenómeno de la conducción del calor en un cuerpo.
- Le interesaba en particular el problema de la difusión del calor en los cañones…

Un poco de historia...

- Sabía que:
  - **una cuerda puede vibrar de varios modos**, **pero todos armónicos** (la relación entre sus frecuencias es un número fraccionario, *Euler 1748*).
  - las **proyecciones de un vector rotativo** con velocidad angular fija sobre los ejes *x* e *y* **dan el coseno y el seno** del ángulo correspondiente.



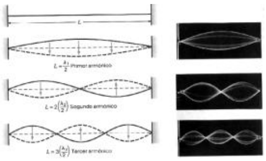
Un poco de historia...

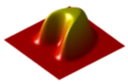
- La nota producida por una cuerda vendrá determinada por la longitud (*L*), la tensión (*T*), la densidad (*d*) y la sección (*S*).
  - Así, si disponemos de una cuerda muy tensa y fina, obtendremos una nota aguda;
  - y por el contrario, si la cuerda está poco tensa y es gruesa, la nota será grave.

Un poco de historia...

- La frecuencia se puede encontrar a partir de la fórmula:

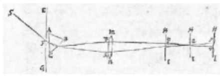
$$f = \frac{1}{2 \cdot L}\sqrt{\frac{T}{d \cdot S}}$$





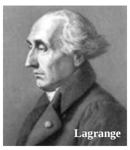
Un poco de historia...

- Con estos conceptos Fourier elaboró su teoría:
  - Sumando funciones armónicas de diferente amplitud y fase podemos construir cualquier función periódica (y la uso para resolver la ecuación del calor).
  - El conjunto de estas armónicas forma el **espectro** (por "*spectrum", Newton 1670*).

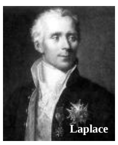


Un poco de historia...

- Su trabajo fue publicado recién en 1822:

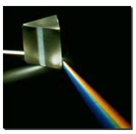



THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
Par M. FOURIER.
A PARIS,



¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Análisis:
  - Consiste en aislar los componentes del sistema que tienen una forma compleja para tratar de comprender mejor su naturaleza u origen.



¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Se dedica al estudio de señales: periódicas o no periódicas, continuas o discretas, en el dominio del tiempo, o de cualquier otra variable unidimensional, bidimensional o multidimensional.
- En sus versiones más avanzadas estudia: procesos estocásticos, funciones de distribución, y topologías complejas, pero sus fundamentos siguen siendo muy simples.

¿Qué es el Análisis de Fourier...?

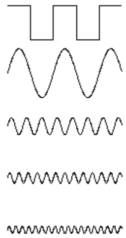
Las señales pueden ser tan variadas como:

- La población de un país a lo largo de los siglos.
- La altura de las mareas en su ciclo mensual.
- La irradiación de una antena, en función del ángulo.
- La forma de onda de la vocal /A/ del francés.
- La iluminación en cada punto de una imagen de TV.
- Las espigas de un electroencefalograma (EEG).
- las rugosidades en el perfil de un terreno.
- las variaciones de resistividad eléctrica, mientras se explora el perfil de un pozo de petróleo.

Transformada de Fourier

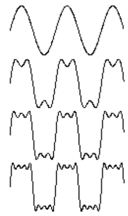
- La TF es una representación de una función en el dominio de la frecuencia:
  - Contiene exactamente la misma información que la señal original
  - Sólo difiere en la manera en que se presenta

Por ejemplo:



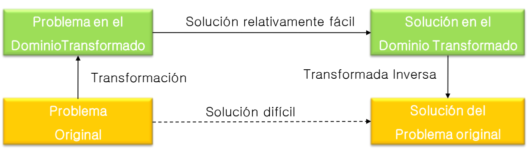
Una onda cuadrada puede obtenerse sumando:

- la fundamental
- menos 1/3 de la 3er armónica...
- más 1/5 de la 5ta armónica...
- menos 1/7 de la 7ma armónica....



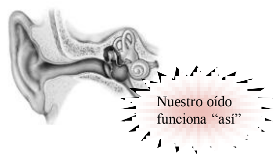
Solución de Problemas

- Un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" (dominio *t*) originales, a menudo, es más sencillo de resolver al transformarlo al dominio *f*.
- Después, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.

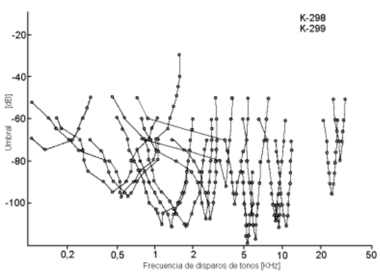


El piano como "analizador" espectral:

- Abrir la tapa del piano y presionar el pedal que controla la intensidad.
- Aplaudir fuerte sobre el piano.
- Se verán y oirán las cuerdas vibrando como eco al sonido del aplauso.
- Las cuerdas que vibran muestran las componentes de frecuencia.
- La cantidad de vibración muestra la amplitud de cada una.
- Cada cuerda actúa como un resonador sintonizado cuidadosamente.



El oído como analizador espectral



- Curvas de sintonía de las fibras del nervio auditivo

Tiempo vs Frecuencia

- Entender la relación entre tiempo y frecuencia es útil:
  - Algunas señales se visualizan mejor en la frecuencia.
  - Algunas señales se visualizan mejor en el tiempo.
  - Esto tiene que ver con la forma en que se presenta la información en cada dominio.
- Ejemplo:
  - Una onda senoidal utiliza "mucha" información para definirse adecuadamente en el tiempo, pero no en la frecuencia.

Volvamos sobre los espacios...

Volviendo sobre espacios...

- Para representar un vector **f** en un espacio de *n* dimensiones generado por el conjunto $\{\mathbf{v}_i\}$, i=1..*n* puede usarse la siguiente combinación lineal:
- $\mathbf{f} = c_1\, \mathbf{v}_1 + c_2\, \mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\, \mathbf{v}_n$
- Si efectuamos el producto interno por vi en ambos miembros:
- $\mathbf{f} .\mathbf{v}_i = c_1\, \mathbf{v}_1 .\mathbf{v}_i + c_2\, \mathbf{v}_2 .\mathbf{v}_i + \ldots + c_n\, \mathbf{v}_n .\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{f} .\mathbf{v_i} = c_1\, \mathbf{v_1} .\mathbf{v_i} + c_2\, \mathbf{v_2} .\mathbf{v_i} + \ldots + c_n \mathbf{v_n} .\mathbf{v_i}$$

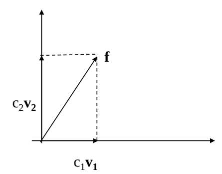
- Si el conjunto de generadores es ortogonal

$$\mathbf{f} .\mathbf{v_i} = c_i\, \mathbf{v_i} .\mathbf{v_i}$$

- de donde $c_i = \mathbf{f} .\mathbf{v_i} / (\mathbf{v_i} .\mathbf{v_i})$

Entonces, los coeficientes c_i que permiten expresar a **f** en función de una base ortogonal de vectores serán:

$$c_i = \frac{\mathbf{f}.\mathbf{v_i}}{\mathbf{v_i}.\mathbf{v_i}} = \frac{\mathbf{f}.\mathbf{v_i}}{\|\mathbf{v_i}\|^2}$$



Qué ocurre si $\{\mathbf{v_i}\}$ no genera el espacio en que está contenido **f** ?

- Entonces la suma vectorial anterior es sólo una aproximación a **f**, y lleva implícito un error.
- ¿De qué manera se pueden seleccionar adecuadamente los c_i para reducir el error de aproximación?

Vamos a considerar el espacio de las señales definidas en $[t_1, t_2]$

- Supongamos que queremos representar a la función $f(t)$ en términos de un conjunto $\{\phi_i\}_{i=1,..,N}$ que es ortogonal en $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ k_i, & i = j \end{cases}$$

Si expresamos la combinación lineal

$$f(t) \sim c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + ... + c_N\phi_N(t)$$

podemos hallar los coeficientes que minimicen el ECM

$$ECM = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left(f(t) - \sum_{i=1}^{N} c_i\phi_i(t)\right)^2 dt$$

Los c_i que cumplen tal condición son los *coeficientes generalizados de Fourier*:

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t)dt}$$

Si las funciones $\phi_i(t)$ son complejas se obtienen los coeficientes:

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_i^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_i^*(t)dt}$$

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$es ortonormal

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$es ortonormal

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$c_i = \frac{\int_{t1}^{t2} f(t)\phi_i^*(t)dt}{\int_{t1}^{t2} \phi_i(t)\phi_i^*(t)dt}$$

1

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$es ortonormal

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$c_i = \int_{t1}^{t2} f(t)\phi_i^*(t)dt$$

La familia de Fourier

Funciones de Fourier

- Senos y cosenos con frecuencias discretas
  - Series seno y coseno
- Exponenciales complejos con frecuencia discreta
  - Series de Fourier
- Exponenciales complejos continuos
  - Transformada continua de Fourier
- Exponenciales complejos discretos
  - Transformada discreta de Fourier

$x(t)$
- periódica ⇨ Serie de Fourier (discreta e infinita) (FS) (Caso Par/Impar Coseno/Seno)
- no periódica ⇨ Transformada de Fourier (continua) (FT)
- muestreada ⇨ Transformada de Fourier de una Secuencia Discreta (continua y periódica) (DFT)
  - ⇩ Transformada Discreta de Fourier (DFT) (discreta y finita)
  - ⇩ Transformada Rápida de Fourier (FFT)

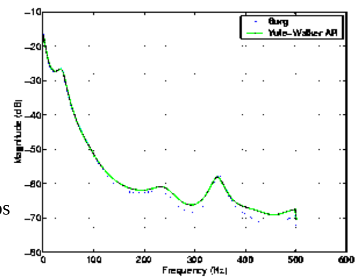
¿Y si $x(t)$ es aleatoria?

⇩

Estimación Espectral

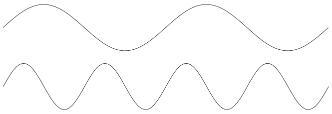
Estimación espectral

- Si $x(t)$ es aleatoria no puedo conocer exactamente su espectro, debo estimarlo.
- Métodos:
  - No paramétricos
  - Paramétricos
  - Subespacio



Series seno: base

$$\varphi_n(t) = \sin\left(2\pi n f_0 t\right)$$



$$\vdots$$

Series seno: transformación

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin\left(2\pi n f_0 t\right) dt$$

Series seno: inversa

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(2\pi n f_0\, t\right)$$

Series coseno:

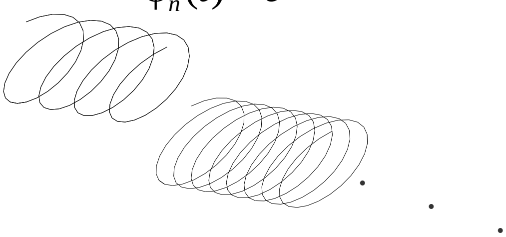
$$\varphi_n(t)=\cos\left(2\pi n f_0\, t\right)$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos\left(2\pi n f_0\, t\right)dt$$

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\left(2\pi n f_0\, t\right)$$

Series de Fourier: base

$$\varphi_n(t)=e^{j2\pi n f_0 t}$$



Serie de Fourier

Si $x(t) = x(t+T)$ $\quad\forall\, t$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(2\pi kt/T)+b_k\ \mathrm{sen}(2\pi kt/T)]$$

donde

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\cos(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\mathrm{sen}(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=1,2,\ldots$$

Serie de Fourier

$\frac{1}{T}=f_0$

$2\pi f_0=\omega_0$

Si $x(t) = x(t+T)$ $\quad\forall\, t$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(2\pi kt/T)+b_k\ \mathrm{sen}(2\pi kt/T)]$$

donde

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\cos(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).\mathrm{sen}(2\pi kt/T)\,dt \qquad k=1,2,\ldots$$

Serie de Fourier

La forma compleja de la serie de Fourier es

Ecuación de Análisis

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{(-j2k\pi t/T)}dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi t/T)} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

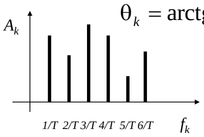
Ecuación de Síntesis

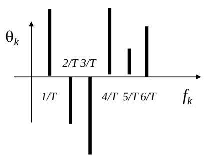
Serie de Fourier

x(t) puede expresarse como una suma de armónicos de la frecuencia fundamental 1/T

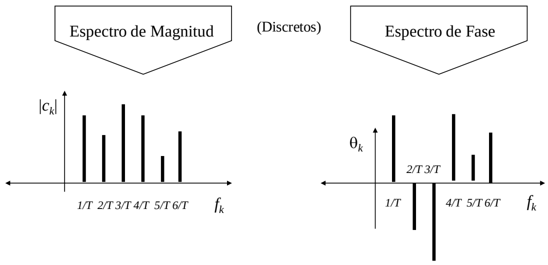
$$A_k = (a_k^{\,2} + b_k^{\,2})^{1/2}$$

$$\theta_k = \mathrm{arctg}(-b_k / a_k)$$





Espectro de una señal periódica



De la Serie de Fourier a la Transformada de Fourier

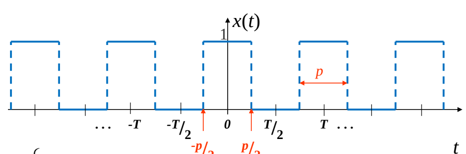
- La SF nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de *funciones periódicas* $x(t)$.
- ¿Es posible extender las SF para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de ***funciones no periódicas***?

¿Qué ocurre cuando $T \to \infty$?

¿ó $f_0 \to 0$?

Consideremos la función periódica:

- Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:



$$x(t) = \begin{cases} 0 & \frac{-T}{2} < t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

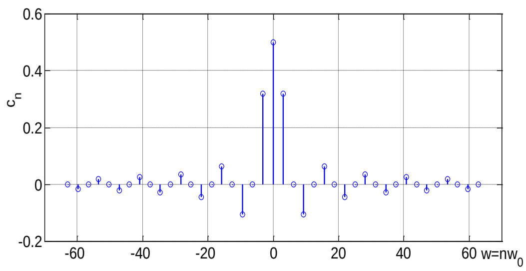
Haciendo las cuentas…

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier son (en este caso todos reales):

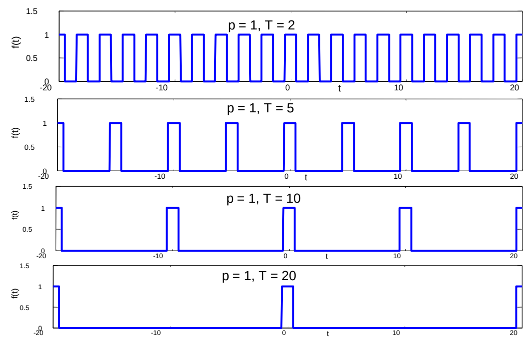
$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right) \frac{sen(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $\omega = n\omega_0$.

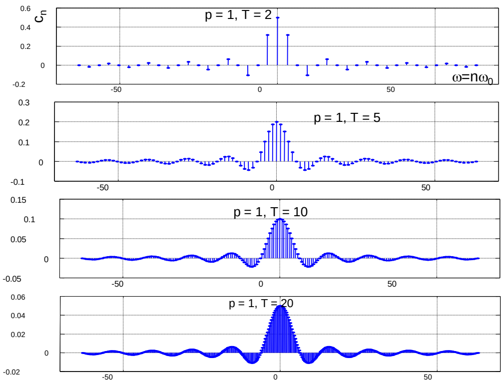
Espectro del tren de pulsos para p = 1, T = 2



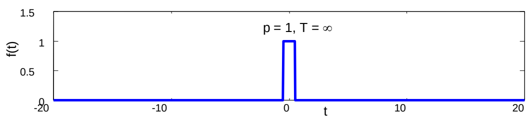
Si el periodo del tren de pulsos aumenta...



...el espectro se "densifica".

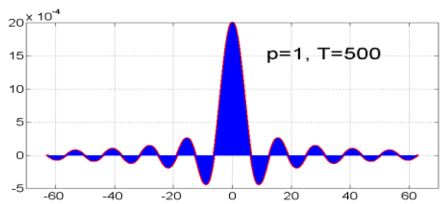


En el límite cuando $T \rightarrow \infty$, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Si se hace T muy grande ($T \rightarrow \infty$), el espectro se vuelve "*continuo*":



Transformada de Fourier

$$\boxed{T \rightarrow \infty}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{(-j2k\pi/T)} dt$$

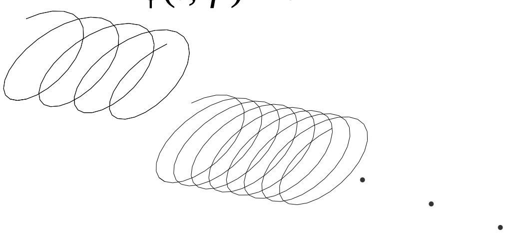
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi/T)}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Transformada continua de Fourier: base

$$\varphi(t, f) = e^{j2\pi f t}$$



Propiedades de la Transformada de Fourier

En general la TF es un complejo:

$$X(f) = R(f) + j\,I(f) = |X(f)|\, e^{j\theta(f)}$$

donde:

- $R(f)$ es la parte real de la TF
- $I(f)$ es la parte imaginaria
- $|X(f)|$ es la amplitud o espectro de Fourier de $x(t)$
- $\theta(f)$ es el ángulo de fase de la TF

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$
$$\theta(f) = tan^{-1}[I(f)/R(f)]$$

Existencia de la FT

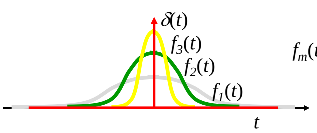
$$\exists\, X(f) \;\; si \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$$

Es decir, si la señal es de *energía finita*

Las señales transitorias cumplen con esa condición

Existencia de la FT

- Las señales periódicas $(-\infty, \infty)$ <u>no</u> cumplen con esa condición.
- Se requiere la utilización de *funciones generalizadas* o *teoría de distribuciones.*



$f_m(t) = m \exp[-(mt)^2]/\sqrt{\pi}$

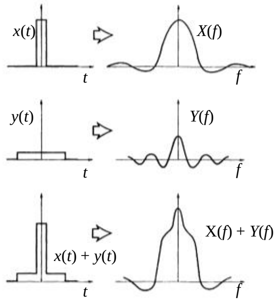
Linealidad

- Si $x(t)$ y $y(t)$ tienen transformadas de Fourier $X(f)$ y $Y(f)$, entonces:

$$a\,x(t) + b\,y(t) \Longleftrightarrow a\,X(f) + b\,Y(f)$$

Linealidad

$$F\{ax(t)+by(t)\} = aF\{x(t)\}+bF\{y(t)\}$$



Simetría (Dualidad)

- Si $x(t)$ y $X(f)$ son un par de transformadas de Fourier, entonces:

$$X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Desplazamiento Temporal (retardo)

- Si $x(t)$ está desplazada un valor t_o, entonces:

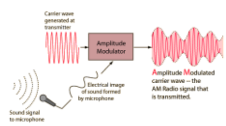
$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_o}$$

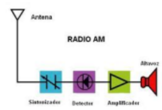
el desplazamiento temporal no afecta la magnitud de la TF

Desplazamiento Frecuencial (modulación)

- Si $X(f)$ está desplazada un valor f_0, entonces:

$$X(f - f_0) \Leftrightarrow x(t)\, e^{j2\pi t f_o}$$





Escala Temporal

- Si $X(f)$ es la transformada de $x(t)$, entonces:

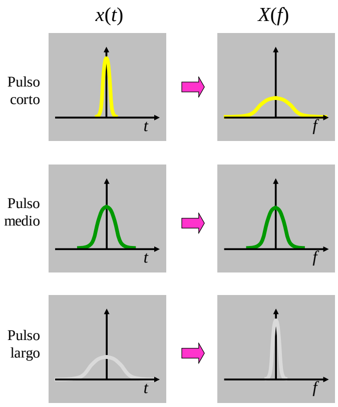
$$x(k\,t) \Leftrightarrow 1/k\; X(f/k)$$

Escala Frecuencial

- Si $X(f)$ es la transformada de $x(t)$, entonces:

$$X(k\,f) \Leftrightarrow 1/|k|\; x(t/k)$$

Efecto de la propiedad de escalado



Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.

Funciones pares

- Si $x_p(t)$ es una función par, la FT de $x_p(t)$ será par y real:

$$x_p(t) \Longleftrightarrow R_p(f)$$

Funciones impares

- Si $x_i(t)$ es una función impar, la FT de $x_i(t)$ será impar e imaginaria pura:

$$x_i(t) \Longleftrightarrow I_i(f)$$

Convolución en el tiempo

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$$

Convolución en la frecuencia

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

No se cumple para la DFT

De la FT a la DFT

¿Qué ocurre ahora cuando discretizamos?:

$$t \cong nT \qquad f \cong kF$$

$$n = 1 \cdots N,$$

$$k = 1 \cdots N,$$

(simplificando un poco...)

Transformada discreta de Fourier: transformación

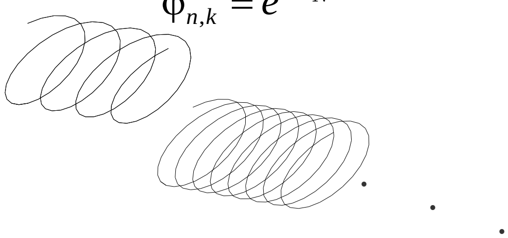
$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n e^{-j\frac{2\pi\ nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: inversa

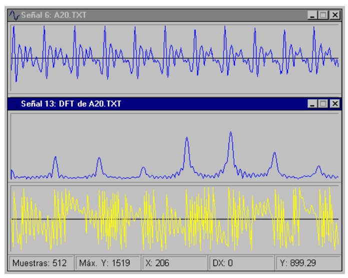
$$x_n = \sum_{k=1}^{N} X_k e^{j\frac{2\pi\ nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: base

$$\varphi_{n,k} = e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

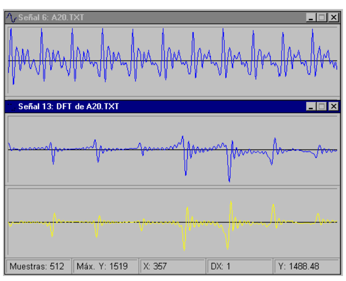


Ejemplo: SigTeach...



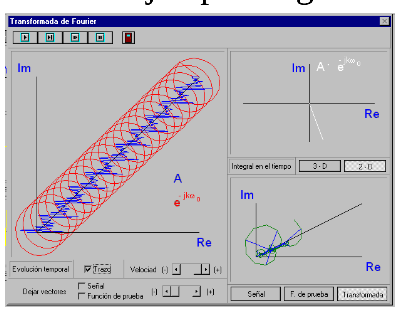
- Magnitud y fase de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Parte Real e Imaginaria de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Otra forma de verlo...

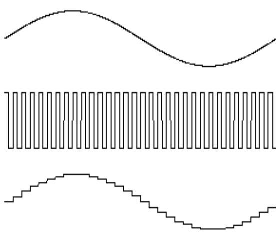
Algunas observaciones...

- Para poder realmente calcular la DFT en la práctica debemos pasar de la señal analógica a una digital
- Esto parece relativamente sencillo, pero no debemos olvidar que en general perdemos información.
- La señal original "sufre" 3 transformaciones:
  - Muestreo (variable independiente)
  - Ventaneo (variable independiente)
  - Cuantización (variable dependiente)

Algunas observaciones...

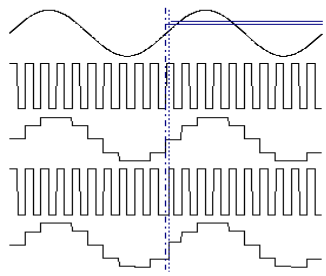
- Muestreo:
  - Solo medimos a intervalos prefijados por lo cual perdemos los cambios rápidos.
  - Dependemos de la fiabilidad del reloj del sistema.
- Ventaneo:
  - Solo medimos durante un intervalo finito de tiempo por lo cual perdemos los cambios más lentos.
  - La forma de esta ventana también afecta el resultado.

Algunas observaciones...



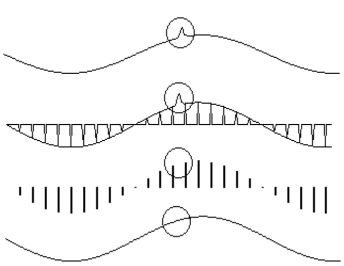
- Una señal continua
- ...medida contra un reloj...
- ...mantiene su valor entre cada pulso del reloj...

Algunas observaciones...



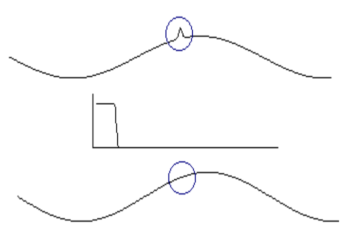
- Un reloj preciso...
- .... conduce a valores precisos.
- Un error en el reloj...
- ... se traduce en error en los valores.

Algunas observaciones...



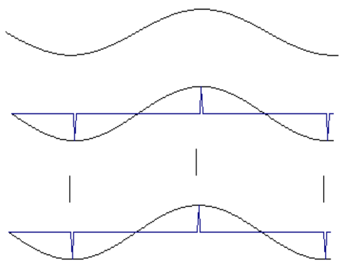
- Una "evento" de la señal...
- que ocurre entre muestras...
- parece como...
- si no hubiese estado allí

Algunas observaciones...



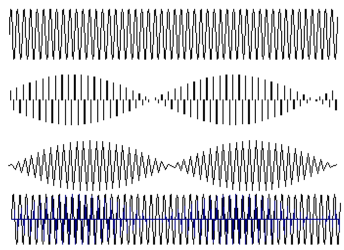
- Las componentes de alta frecuencia...
- ...pasadas por un filtro pasa bajos...
- ...desaparecen

Algunas observaciones...



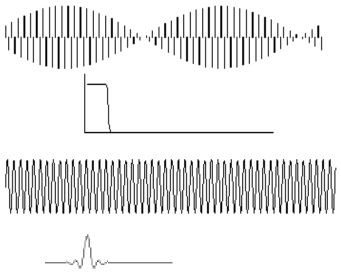
- Una señal periódica...
- muestreada dos veces por ciclo...
- tiene suficiente información como...
- para ser reconstruida

Algunas observaciones...



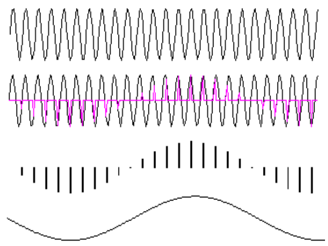
- Una señal de alta frecuencia...
- ...muestreada suficientemente rápido...
- ...puede verse todavía mal...
- ...pero puede ser reconstruida.

Algunas observaciones...



- Una señal muestreada...
- ...debe ser procesada por un filtro pasa-bajos...
- ...para reconstruir la señal original.
- La respuesta al impulso del filtro debe ser una sincrónica.

Algunas observaciones...

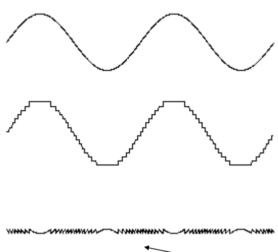


- Una señal de alta frecuencia...
- muestreada a una tasa muy baja...
- parece como...
- una señal de menor frecuencia.

Algunas observaciones...

- Cuantización:
  - La precisión está limitada al número de bits disponible.
  - Depende también del rango dinámico de la señal.
  - Los errores introducidos en el proceso son no lineales y dependientes de la señal.
  - También pueden cometerse errores aritméticos dentro del procesador debido a la precisión.

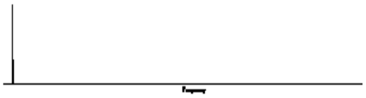
Algunas observaciones...



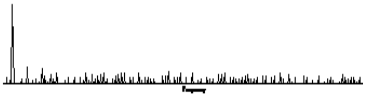
- La precisión limitada en la cuantización...
- ...conduce a errores...
- ... que dependen de la señal

Ruido de cuantización (± ½ LSB)

Algunas observaciones...



- Por ello el espectro de un tono puro...



- ...se ensucia cuando lo cuantizamos.

Algunas observaciones...

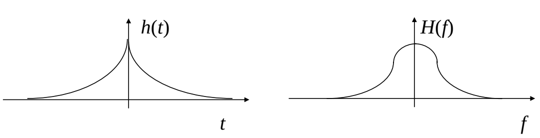
- Ya no podemos movernos libremente entre el dominio frecuencial y temporal sin perder información:
  - Debido a los errores producidos en los cálculos por la precisión, o a que hay información que no podemos medir o calcular.

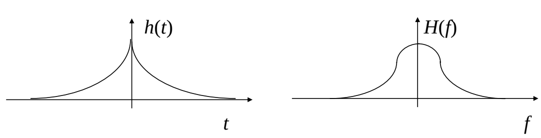
Algunas observaciones...

- Como resumen:
  - Debemos tener bien claros todos estos efectos y tratar de minimizarlos al máximo, en función de los recursos disponibles.

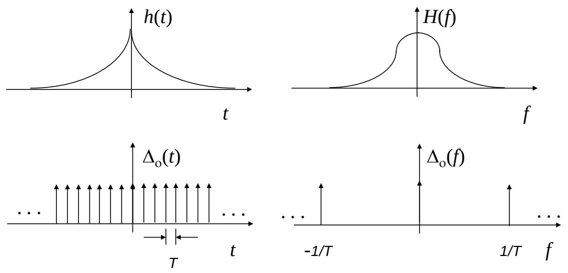
Transformada Discreta de Fourier DFT

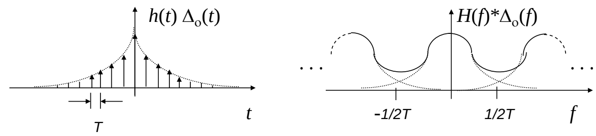
Desarrollo Intuitivo

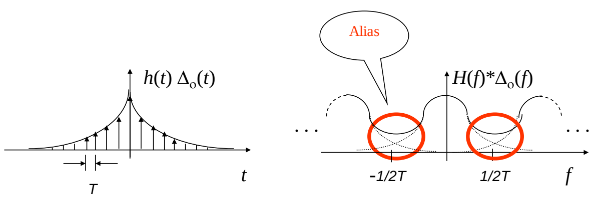


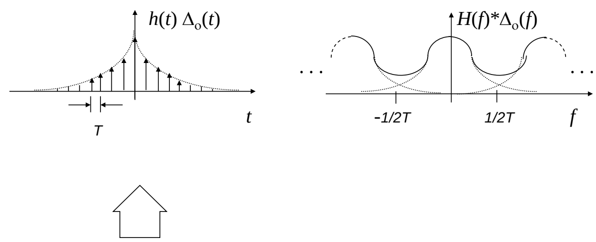


- Buscamos modificar el dominio de la variable tiempo y el de la variable frecuencia para obtener secuencias en ambos dominios aptas de tratarse mediante procesamiento digital.

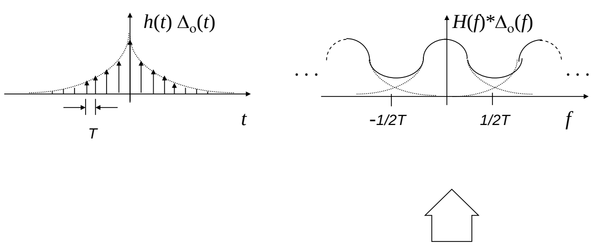




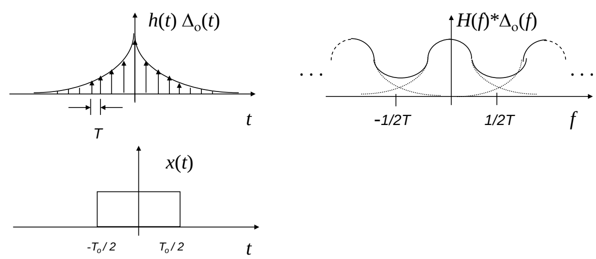


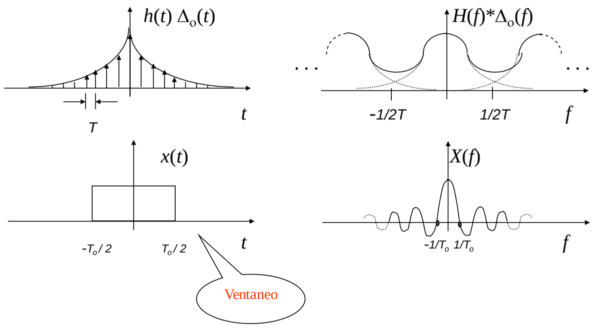


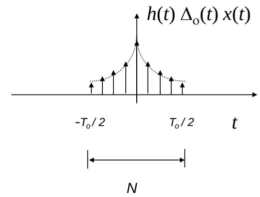
Infinitas muestras

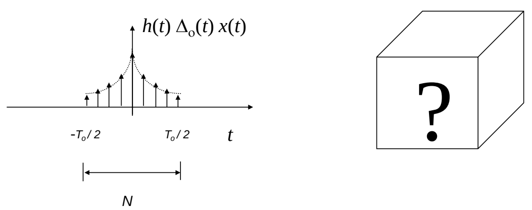


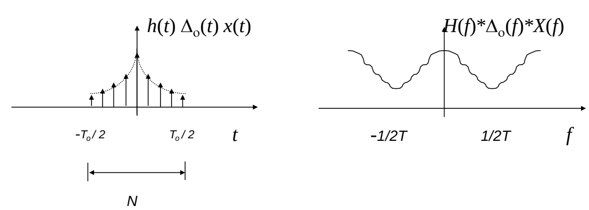
espectro continuo







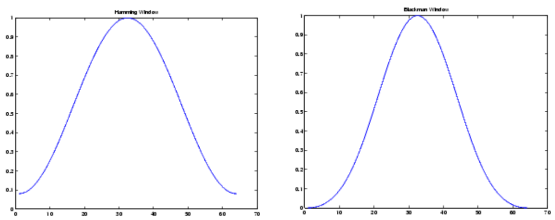


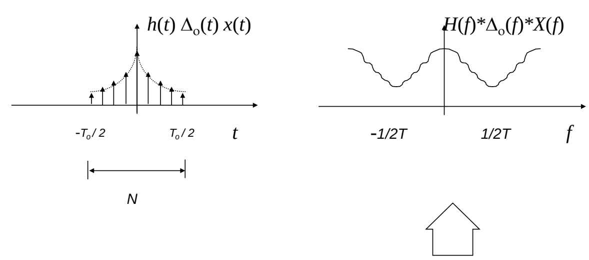


Ventanas: Hamming y Blackman

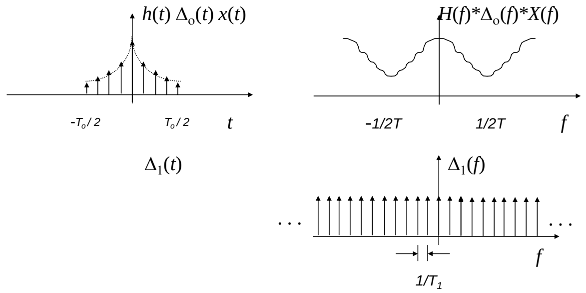
$$w[k+1] = 0.54 - 0.46\cos\left(2\pi\frac{k}{n-1}\right), \qquad k = 0, \dots, n-1$$

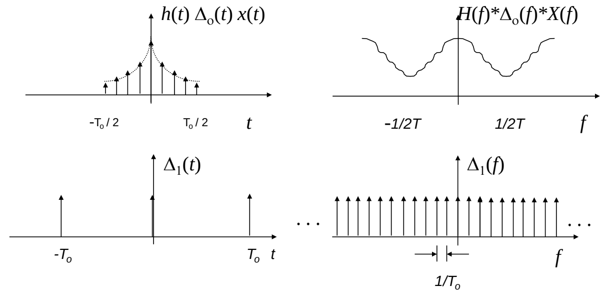
$$w[k+1] = 0.42 - 0.5\cos\left(2\pi\frac{k}{n-1}\right) + 0.08\cos\left(4\pi\frac{k}{n-1}\right), \qquad k = 0, \dots, n-1$$

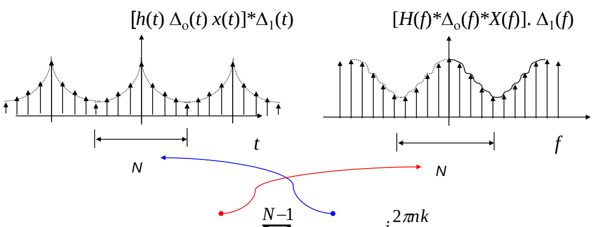




sigue continuo







$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$n, k = 0, 1, 2, 3, \ldots N - 1$

Transformada Rápida de Fourier

FFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Si consideramos que $W = e^{-j2\pi/N}$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}$$

$n=0, 1, 2, 3, \ldots N-1$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}$$

Esta expresión define un sistema de N ecuaciones.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{nk}$$

Si $N = 4$

$X(0) = x(0)W^0 + x(1)W^0 + x(2)W^0 + x(3)W^0$
$X(1) = x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3$
$X(2) = x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + x(3)W^6$
$X(3) = x(0)W^0 + x(1)W^3 + x(2)W^6 + x(3)W^9$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W^{nk}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\W^0 & W^1 & W^2 & W^3\\W^0 & W^2 & W^4 & W^6\\W^0 & W^3 & W^6 & W^9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W^{nk}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & W^1 & W^2 & W^3\\1 & W^2 & W^4 & W^6\\1 & W^3 & W^6 & W^9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

Como W es complejo y $x(n)$ puede serlo, son necesarias **N^2 multiplicaciones complejas** y **$N(N-1)$ sumas complejas** para realizar este cálculo.

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & W^1 & W^2 & W^3\\1 & W^2 & W^4 & W^6\\1 & W^3 & W^6 & W^9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \bmod N)}$

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & W^1 & W^2 & W^3\\1 & W^2 & W^4 & W^6\\1 & W^3 & W^6 & W^9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \bmod N)}$

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & W^1 & W^2 & W^3\\1 & W^2 & W^0 & W^2\\1 & W^3 & W^2 & W^1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

Es posible factorizar la matriz $\boldsymbol{W}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Observación: Se intercambiaron los renglones 2 y 3 de X

Podemos tomar un vector intermediario

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Podemos tomar un vector intermediario

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

donde $x_1(0)$ puede calcularse como $x_1(0) = x(0) + W^0 x(2)$

$$x_1(0) = x(0) + W^0 x(2)$$

Una multiplicación y una suma complejas

$$x_1(2) = x(0) + W^2 x(2)$$

Una multiplicación y una suma complejas

$$x_1(2) = x(0) + W^2 x(2)$$

donde además se verifica que $W^0 = -W^2$
por lo que

$$x_1(2) = x(0) - W^0 x(2)$$

pero el segundo término **ya fue calculado** para hallar $x_1(0)$

$$x_1(2) = x(0) - W^0 x(2)$$

por lo cual estamos ahorrando una multiplicación compleja

Análogamente $x_1(3)$ también puede calcularse con sólo **una** suma y **ninguna** multiplicación adicional.

Por lo que el vector intermediario $\boldsymbol{x_1}$ puede calcularse con cuatro sumas y dos multiplicaciones

Volviendo al cálculo inicial tenemos

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

Donde, por un razonamiento análogo, puede realizarse la operación con cuatro sumas y 2 multiplicaciones

- En total hemos empleado 4 multiplicaciones y 8 sumas complejas
- El cálculo realizado en la forma primitiva hubiese requerido 16 multiplicaciones y 12 sumas complejas

- Para $N = 2^\gamma$ el algoritmo de la FFT es simplemente un procedimiento para factorizar una matriz $N \times N$ en γ matrices que minimizan el número de productos y sumas complejas

FFT

- $N\gamma/2$ multiplicaciones complejas
- $N\gamma$ sumas complejas

DFT

- N^2 multiplicaciones complejas
- $N(N-1)$ sumas complejas

FFT

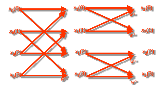
- $N\gamma/2$ multiplicaciones complejas
- $N\gamma$ sumas complejas

DFT

- N^2 multiplicaciones complejas
- $N(N-1)$ sumas complejas

Si $\boldsymbol{N}$**=1024** y asumimos que el tiempo de cómputo es proporcional al número de multiplicaciones, la relación de velocidades es de

200 a 1

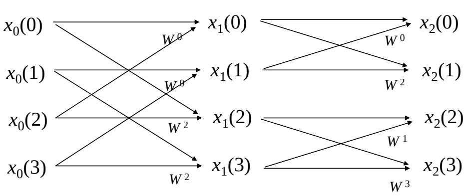


Diagramas “mariposa”

Revisando la factorización …

Gráfico de flujo de la FFT

$N = 4$



Diagramas “mariposa”

Gráfico de flujo de la FFT

$N = 4$

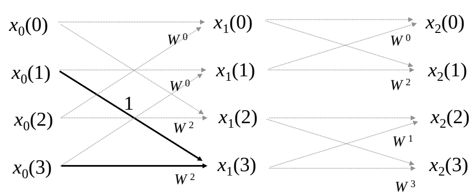


Gráfico de flujo de la FFT

$N = 4$

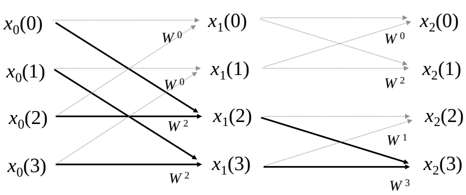
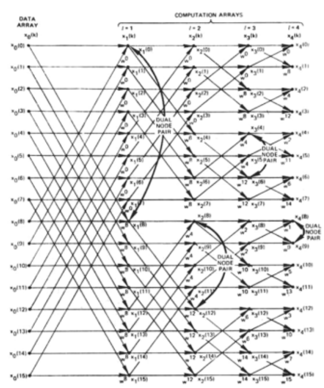
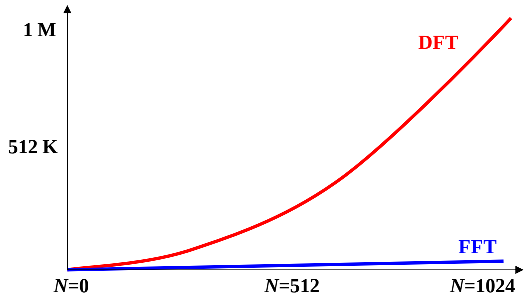


Gráfico de flujo de la FFT

$N = 16$



Multiplicaciones FFT vs. DFT

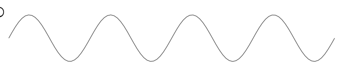


Introducción al Análisis Tiempo-Frecuencia

¿Problemas con señales no estacionarias o transitorias...?

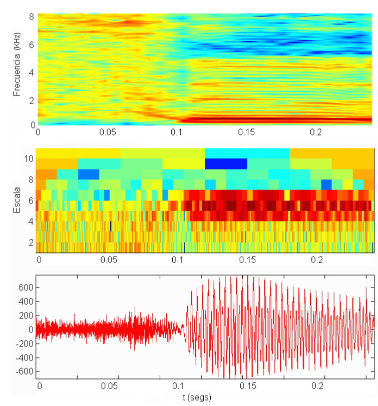
- La familia de Fourier está "diseñada" para analizar señales cuyo "comportamiento" o propiedades no varien en el tiempo...

$t \to -\infty$ . . .



$t \to \infty$ . . .

- Se requiere otra "base" que permita realizar este análisis...



Espectrograma

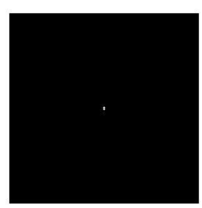
Escalograma

Sonograma

Análisis de Fourier en Imágenes

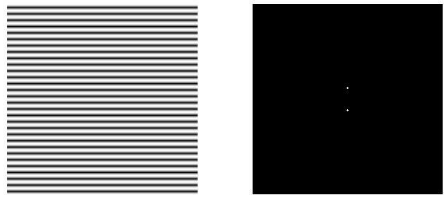
Transformada de Fourier en 2D

$$\mathrm{sen}(y) = \mathrm{sen}(1y)$$

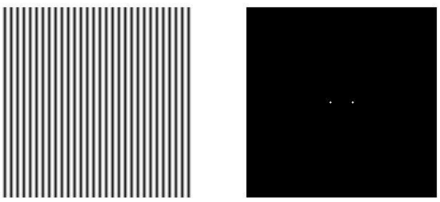



sen(2*y*)

sen(15*y*)

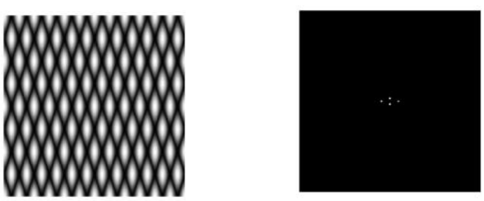


sen(15*x*)



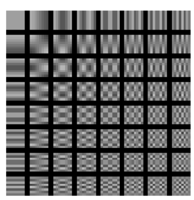
sen(3.5*x* + 7*y*)

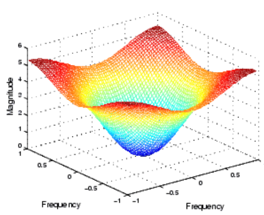
sen(12*x*) + sen(4*y*)

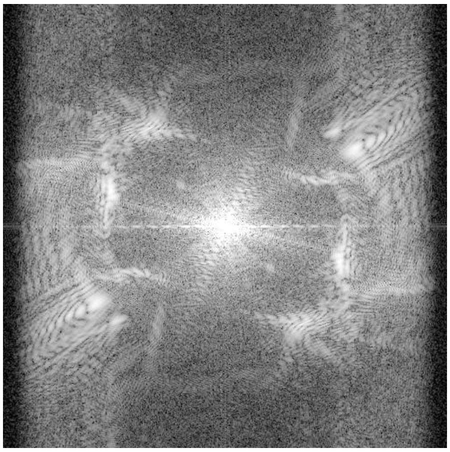


Fourier Bidimensional

- Ahora la base es:





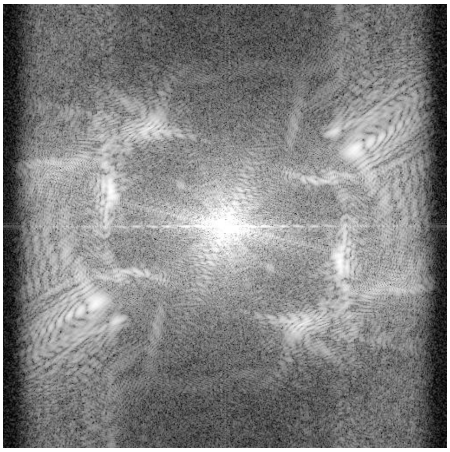


Ejemplo: Compresión 2D

Para almacenar o transmitir.

Submuestreo,
en el espacio de la imagen.

Filtrado,
en el espacio de frecuencias.



Bibliografía recomendada

- Brigham: 2.1 a 2.3, 5.1, 5.3, 5.4, 6.1 a 6.3, 6.5
- Oppenheim, A. V. and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989, p. 611-619.
- Cooley, J. W. and J. W. Tukey, *"An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series,"* Mathematics of Computation, Vol. 19, April 1965, pp. 297-301.
- Duhamel, P. and M. Vetterli, *"Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art,"* Signal Processing, Vol. 19, April 1990, pp. 259-299.