Solución de Ecuaciones No Lineales de una variable

Victorio E. Sonzogni

Sección 1

Introduccion

Ejemplos de ecuaciones no lineales

a) Crecimiento de poblaciones

- Designaremos con $N(t)$ número de individuos de una poblacion (sean animales, plantas, bacterias, hombres, etc.). Ese número $N(t)$ es función del tiempo t. La cantidad de individuos que nacen por unidad de tiempo (en un año, en una hora, etc.) es proporcional a N:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda \ N(t)$$

  donde λ se conoce como tasa de natalidad.

- Si se tiene en cuenta, además el aporte por migraciones μ, por unid. de tiempo, la ecuación queda:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda \ N(t) + \mu \qquad (1)$$

  que es la ecuación que gobierna el crecimiento poblacional.

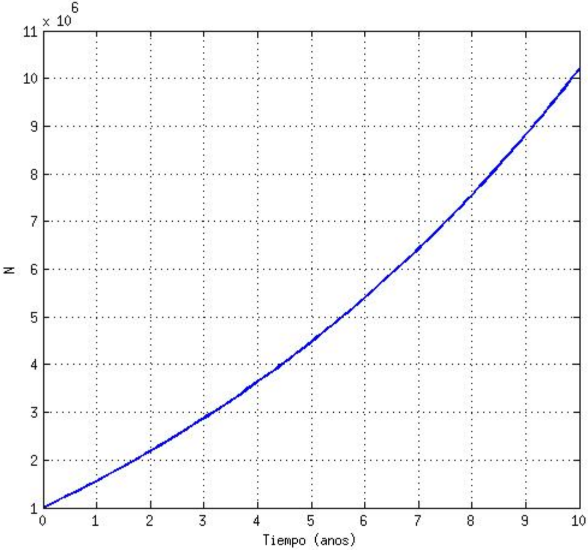
Ejemplos de ecuaciones no lineales

- La solución exacta de esa ecuación diferencial es:

$$N(t) = N_0 \; e^{\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

  donde N_0 es la población inicial (en $t = 0$)
- La curva de crecimiento de población para una tasa de crecimiento $\lambda = 0.1$, con una población inicial de un millón y un aporte migratorio de 435000 individuos por año se muestra en la figura siguiente.

Ejemplos de ecuaciones no lineales

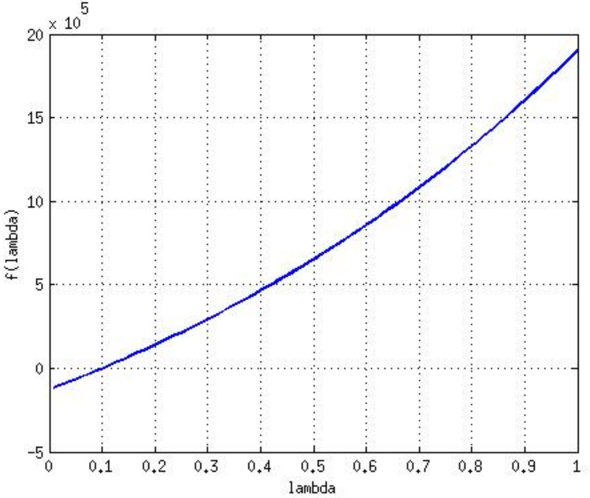


Ejemplos de ecuaciones no lineales

- Si no se conoce la solucion exacta, puede hallarse una *solución numérica*, a partir de la ecuación diferencial (1) y una condición inicial N_0, resoviendo un *Problema de Valor Inicial* (Tema 7 de la materia).
- Plantearemos aquí otro problema: Conocida la cantidad de individuos N_0 y $N(t_1)$, en tiempos t_0 y t_1, y la tasa de migraciones μ, se desea conocer la tasa de natalidad λ.
  Para ello de la ec. de arriba,
  $$N(t_1) = N_0\ e^{\lambda t_1} + \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_1} - 1)$$
  hay calcular el λ que produce la igualdad. El resto de las variables son conocidas.
- Esto equivale a resolver la ecuación no lineal
  $$f(\lambda) = 0$$
  con
  $$f(\lambda) = N(t_1) - N_0\ e^{\lambda t_1} - \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_1} - 1)$$

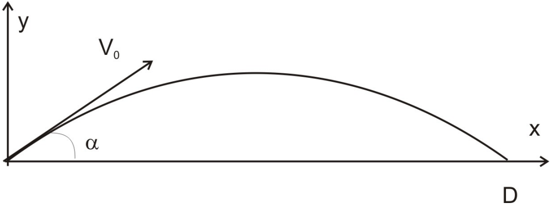
Ejemplos de ecuaciones no lineales

Función $f(\lambda)$ en función de λ



Ejemplos de ecuaciones no lineales

b) Tiro oblicuo



- Se desea conocer el ángulo α para que un disparo que sale con velocidad V_0 alcance un objetivo a una distancia D.
- Las ecuaciones:

	s/x	s/y
aceler.	$a_x = 0$	$a_y = -g$
veloc.	$v_x = V_0 \; cos\alpha$	$v_y = -g \; t + V_0 \; sin\alpha$
despl.	$d_x = V_0 \; cos\alpha \; t$	$d_y = h = V_0 \; sin\alpha \; t - \frac{1}{2} \; g \; t^2$

Ejemplos de ecuaciones no lineales

- El tiempo de impacto se obtiene de la ecuación para el desplazamiento vertical, cuando $h = 0$:

$$t_1 = \frac{2\ V_0\ sin\alpha}{g}$$

- La distancia horizontal recorrida en t_1:

$$d = \frac{2\ V_0^2\ sin\alpha\ cos\alpha}{g}$$

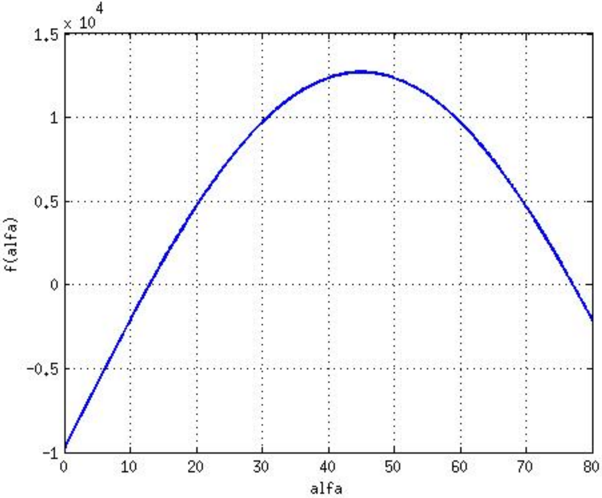
e igualando a la distancia objetivo D se obtiene la ecuación:

$$f(\alpha) = 2\ V_0^2\ sin\alpha\ cos\alpha - D\ g = 0$$

de la cual queremos calcular α.

Ejemplos de ecuaciones no lineales

La función $f(\alpha)$ en función de α, para una velocidad inicial $V_0 = 150m/s$ y una distancia del objetivo $D = 1000m$ esta graficada a continuación.



Ecuaciones no lineales

- Los ejemplos presentados son algunos de los innumerables problemas que se nos plantean donde queremos despejar, de una ecuación, una variable que no podemos escribir en forma explícita.
- Estos problemas pueden ser planteados como:

  Encontrar x
  tal que $f(x) = 0$

  El valor de x que satisface esa ecuación se llama *raiz* de la ecuación, o también *cero* de la función f.
- Hay muchos métodos numéricos para hallar raices de ecuaciones. Veremos aquí:
  - Método de la bisección
  - Iteración de punto fijo
  - Método de Newton-Raphson
  - Método de la secante
  - Método Regula Falsi

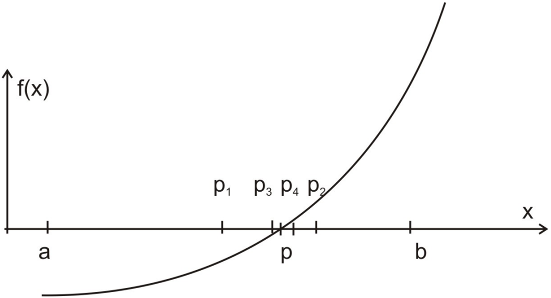
Sección 2

Método de la Bisección

Método de la Bisección

ó Método de la Búsqueda Binaria

- Sea $f(x)$ contínua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos. Entonces, por el teorema del valor medio, existe $a < p < b$ tal que $f(p) = 0$.



- El Método de la Bisección procede buscando una raiz propuesta en la mitad del intervalo (a,b). Y repitiendo iterativamente este procedimiento.

Método de la Bisección

Dados: $f(x)$, a, b, Tol_1, (Tol_2), $Kmax$
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \leftarrow a + \frac{(b-a)}{2}$
    4) si $f(p) < Tol_1$, o bien $\frac{b-a}{2} < Tol_2 \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) si $f(a)f(p) > 0$ $a \leftarrow p$
        sino $b \leftarrow p$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No se halló la raiz en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:
  1) $|p_n - p_{n-1}| \leq Tol_1$
  2) $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_i|} \leq Tol_2$
  3) $|f(p_n)| \leq Tol_3$
- El primer criterio considera el valor absoluto de la diferencia entre dos iteraciones. Y el segundo su valor relatvo. En este último caso la tolerancia Tol_2 es independiente de las unidades y significado físico de las variables. En cualquiera de estos casos puede ser que la diferencia sea pequeña pero aún se esté lejos de la solución.
- El tercer criterio examina el error en $f(p)$. También, dependiendo de la función, puede ser que este error sea pequeño pero aún no se haya llegado a la solución buscada. (Por ejemplo si la derivada de f en cercanías de p es muy pequeña).

Convergencia

- Teorema:
  Sea $f \in C[a,b]$ y sea $f(a)f(b) < 0$. El algoritmo de Bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a p tal que
  $$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$
  para $n \geq 1$.

  Demostración:
  Para $n \geq 1$,
  $$b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^{n-1}}$$
  La raiz exacta $p \in (a_n, b_n)$.
  Y $p_n = (a_n + b_n)/2$
  Luego
  $$|p_n - p| \leq \frac{(b_n - a_n)}{2} = \frac{(b-a)}{2^n}$$

Convergencia

- De alli se ve que posee convergencia lineal:

$$|p_{n+1} - p| \leq \frac{(b-a)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}|p_n - p|$$

- Si se desea p con una tolerancia ϵ, se precisan:

$$n = \log_2 \frac{|b-a|}{\epsilon}$$

- El Método de la Bisección es lento: tiene convergencia *lineal*.
- Pero *siempre* converge. Es robusto. Por eso se usa muchas veces para poner en marcha otros métodos.
- (*Observación*: en este capitulo se designara a las iteraciones con un subíndice a fin de simplificar la notación)

Sección 3

Iteración de Punto Fijo

Punto Fijo

- Se ha definido *cero* de $f(x)$ al valor de x tal que

$$f(x) = 0$$

- En forma similar se define *punto fijo* de $g(x)$ al x tal que

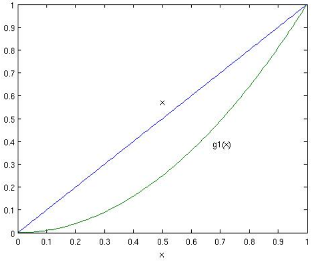
$$g(x) = x$$

- Un problema de hallar un cero de $f(x)$ se puede transformar en uno de hallar el punto fijo de $g(x)$. Por ejemplo: a partir de la ecuación $f(x) = 0$ se puede escribir $g(x) = x$ definiendo $g(x) = x + f(x)$. Así el valor de x que verifica la primera ecuación, también verifica la segunda: el cero de $f(x)$ es el punto fijo de $g(x)$.

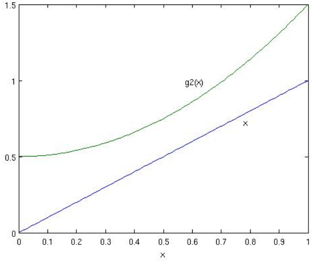
Punto Fijo

Ejemplos:

- La función $g_1(x) = x^2$, en el intervalo $[0, 1]$ tiene dos puntos fijos: $X = 0$ y $x = 1$
- La misma función en el intervalo $[2, 3]$ no tiene puntos fijos.
- La función $g_2(x) = \frac{1}{2} + x^2$, en el intervalo $[0, 1]$ no tiene puntos fijos. No los tiene en todo el eje real.
- La función identidad $g(x) = x$ en $[0, 1]$ tiene ∞ puntos fijos.

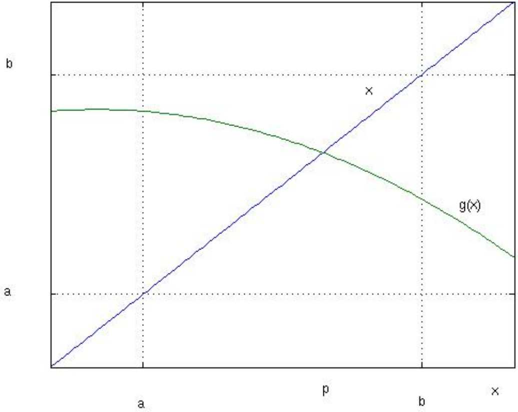


,



Punto Fijo

Teorema 1: Si $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]\ \forall\ x \in [a,b]$ entonces g *tiene* un punto fijo en $[a,b]$.
Si además, $g'(x)$ existe en (a,b) y $|g'(x)| \leq k < 1\ \forall\ x \in [a,b]$ entonces g tiene un punto fijo *único* (p) en $[a,b]$.



Punto Fijo

Demostración:

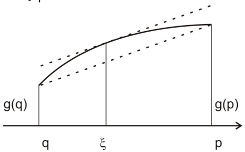
Primera parte:

- *Si* $g(a) = a$ *o* $g(b) = b$*, entonces* $\exists p$
- *Si no; debe ser* $g(a) > a$ *y* $g(b) < b$*,*
- *Sea* $h(x) = g(x) - x$*.*
- $h(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *y* $h(a) = g(a) - a > 0$ *,* $h(b) = g(b) - b < 0$*.*
- *Por teorema del valor medio,* $\exists p \mid h(p) = 0$ *y por tanto* $g(p) = p$*.*
  O sea: existe un Punto Fijo en $[a, b]$

Punto Fijo

Segunda parte:

- *Supóngase que* $|g'(a)| \leq k < 1$ *y que* p *y* q *sean Puntos Fijos de* g. $(p \neq q)$
- *Por Teorema del Valor Medio,* $\exists\ \xi$ *entre* q *y* p *tal que* $|g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\ |p - q|$



- *Por ser* p *y* q *puntos fijos, y por ser* $|g'(\xi)| < 1$*:*

$$|p - q| < |p - q|$$

- *A esta contradicción se ha llegado al suponer que* $p \neq q$*. Luego el punto fijo es único.*

Iteración funcional

- Para encontrar el punto fijo de una función se usa una *técnica iterativa de punto fijo* o *iteración funcional*.
- Se propone un valor de partida p_0.
- Se construye una sucesión $\{p_n\}$ con la fórmula:

  $$p_n = g(p_{n-1})$$

  para $n = 1, 2, \ldots$
- Si $\{p_n\} \to p$ y g es continua, entonces:

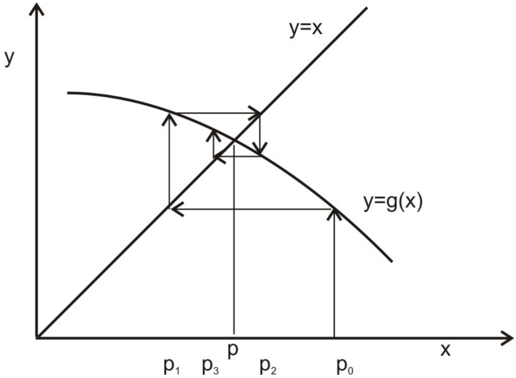
  $$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}) = g(p)$$

  Es decir que p es el punto fijo de g.

Algoritmo de Punto Fijo

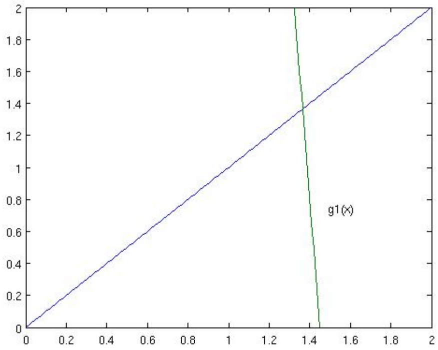
Dados: $g(x)$, p_0, Tol, $Kmax$
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
 3) $p \leftarrow g(p_0)$
 4) si $|p - p_0| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
 5) $i \leftarrow i + 1$
 6) $p_0 \leftarrow p$
 7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Interpretación gráfica de la Iteración Funcional



Ejemplo

- Sea obtener la raiz de
$$f(x) = x^3 + 4\ x^2 - 10$$
Esta función tiene una sola raiz en $[1,2]$: $p = 1.365230013$
- Hay muchas maneras de obtener la función $g(x)$ para un problema de punto fijo $g(x) = x$:
  1) De la ecuacion original: $f(x) = 0$
  $$x - f(x) = x$$
  con $g_1(x) = x - x^3 - 4\ x^2 + 10$

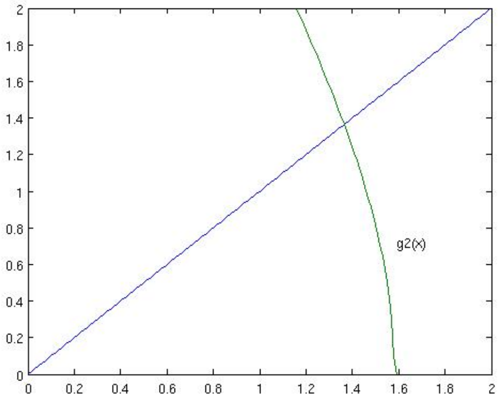


Ejemplo

2) De la ecuacion original: $x^3 = 10 - 4x^2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

de donde: $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$

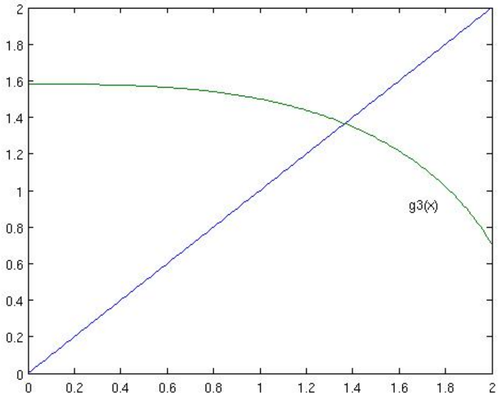


Ejemplo

3) De la ecuacion original: $4x^2 = 10 - x^3$

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

de donde: $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

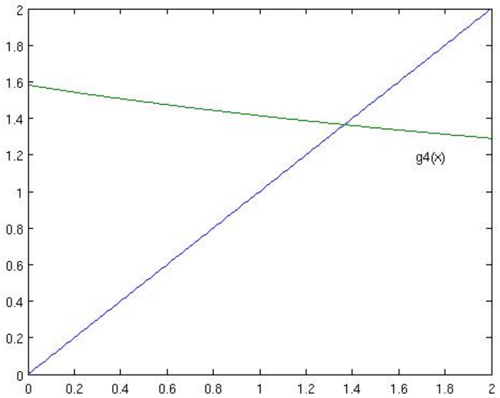


Ejemplo

4) De la ecuacion original: $x^2(x+4) = 10$

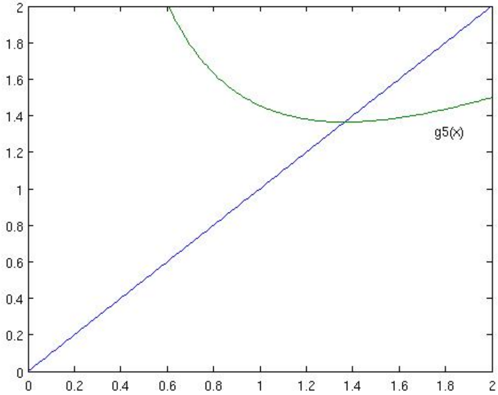
$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

de donde: $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$



Ejemplo

5) Dividiendo la ecuacion original por $3x^2 + 8x$ y operando:
$g_5(x) = x - \frac{x^3+4\ x^2-10}{3x^2+8x}$



Ejemplo

- Resolviendo el problema por Iteración Funcional, partiendo del valor inicial $p_0 = 1.5$, y obteniendo los resultados con 9 dígitos despues de la coma, se llegó a:
- Con $g1(x)$ no se obtuvo convergencia.
- Con $g2(x)$ no se obtuvo convergencia.
- Con $g3(x)$ se requirieron 30 iteraciones.
- Con $g4(x)$ se requirieron 15 iteraciones.
- Con $g5(x)$ se requirieron 4 iteraciones.
- Con el método de la Bisección se requirieron 27 iteraciones.

Punto Fijo

Teorema 2:
Sea $g \in C[a, b]$ y que $g(x) \in [a, b]$ $\forall$ $x \in [a, b]$. Además supóngase que $\exists$ $g'(x)$ en (a, b) con

$$|g'(x)| \leq k < 1 \; \forall \; x \in [a, b] \qquad (*)$$

.
Si p_0 es cualquier número en $[a, b]$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad n \geq 1 \qquad (**)$$

converge al único Punto Fijo en $[a, b]$.

Punto Fijo

Demostración:

- Por Terorema 1, existe un P.F. $p \in [a, b]$.
- Como $g(x) \in [a, b]$ entonces $p_n \in [a, b] \ \ \forall n$.

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi)||p_{n-1} - p| \leq k \ |p_{n-1} - p|$$

- la primera igualdad es por ser P.F y por (**); la segunda por el T. del Valor Medio (con $\xi \in [a, b]$); y la desigualdad es por (*).

$$|p_n - p| \leq k \ |p_{n-1} - p| \leq k^2 \ |p_{n-2} - p| \ldots \leq k^n \ |p_0 - p|$$

- Como $k < 1$:

$$\lim_{n \to \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \to \infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

Es decir $\{p_n\}$ converge a p.

Punto Fijo

Corolario 1:
Si g satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \quad \forall n \geq 1$$

Corolario 2:
Si g satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_0 - p_1| \quad \forall n \geq 1$$

- La velocidad de convergencia depende de $\frac{k^n}{1-k}$
- Cuanto menor sea k, más rápido converge.
- Si $k \sim 1$ la convergencia es lenta.
- Si $|g'(p)| \neq 0$ la convergencia es lineal.
- Si $|g'(p)| = 0$ puede tener convergencia cuadrática.

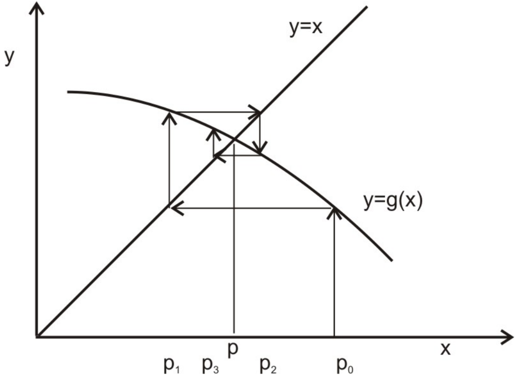
Ejemplo

Del ejemplo anterior se ve que:

- No hay ningún intervalo conteniendo a $p = 1.365230013$ tal que $|g_1'(x)| \ < 1$. Por eso diverge.
- La función $g_2(x)$ no manda $[1, 2]$ a $[1, 2]$. Y no hay ningún intervalo conteniendo a p tal que $|g_1'(x)| \ < 1$. Por eso diverge.
- La derivada $g_3'(2) \simeq 2.12$. No satisface que sea menor que 1. Pero en el intervalo $[1, 1.5]$ $g_3'(x) \leq g_3'(1.5) \simeq 0.66$. Por eso ha convergido.
- La derivada $g_4'(x) \leq 0.15 \quad \forall x \in [1, 2]$. Converge más rápido que g_3
- Cosa similar sucede con g_5 para la cual k es menor aún.

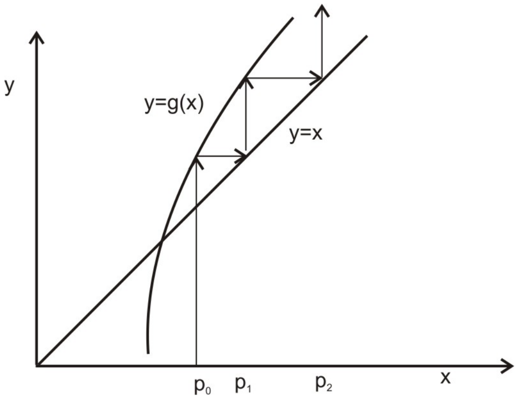
Iteración Funcional

Caso en que $|g'(x)| < 1$



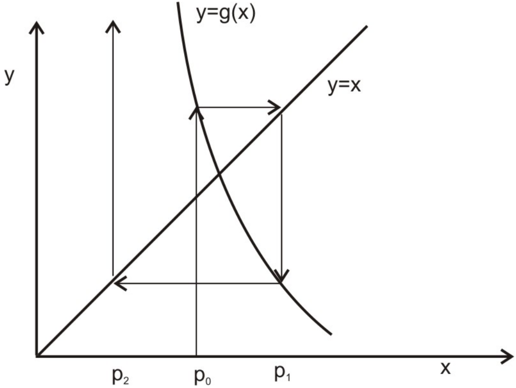
Iteración Funcional

Caso en que $|g'(x)| > 1$



Iteración Funcional

Caso en que $g'(x) < -1$



Sección 4

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

- Sea $f(x) \in C^2[a, b]$ (continuamente diferenciable 2 veces), y se desea hallar p tal que $f(p) = 0$.
- Sea $\bar{x}$ una aproximación a p ($|\bar{x} - p|$ pequeño), y $f'(\bar{x}) \neq 0$
- El desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\bar{x}$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\bar{x}) + \dots$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(x))$$

  donde $\xi(x)$ está entre x y $\bar{x}$.

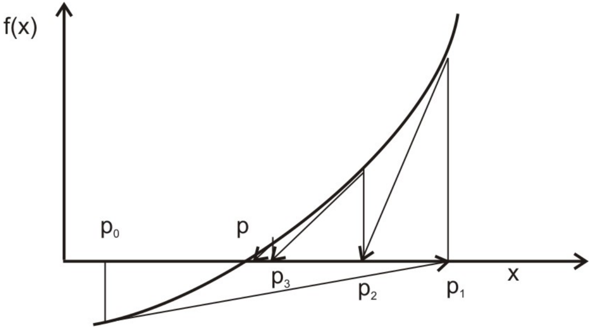
- Particularizando en $x = p$:

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(p))$$

Método de Newton-Raphson

- Al ser $(p-\bar{x})$ pequeño podemos despreciar el término cuadrático frente al lineal:
$$0 \simeq f(\bar{x}) + (p-\bar{x})f'(\bar{x})$$
- De alli:
$$p \simeq \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$
- El Método de Newton-Raphson construye una sucesión $\{p_n\}$ con la fórmula de recurrencia:
$$p_n \simeq p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \qquad n \geq 1$$
- Observación: El Método de Newton-Raphson puede ser mirado como un caso de iteración funcional, con $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Interpretación gráfica Método de Newton-Raphson



Algoritmo del Método de Newton-Raphson

Dados: $f(x)$, $f'(x)$, p_0, Tol, K_{max}
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
   3) $p \leftarrow p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$
   4) si $|p - p_0| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
   5) $i \leftarrow i + 1$
   6) $p_0 \leftarrow p$
   7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en K_{max} iteraciones*'
Parar.

Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:
  1) $|p_n - p_{n-1}| \leq Tol_1$
  2) $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} \leq Tol_2$
  3) $|f(p_n)| \leq Tol_3$
- La tolerancia Tol_1 es en valor absoluto, mientras que latolerancia Tol_2 es independiente de las unidades y significado físico de las variables.
- Según la función puede ser que algún criterio sea mejor que los otros.

Convergencia

- El error en la iteración n:

$$e_n = p_n - p$$

- En p, $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$
- Se puede escribir:

$$e_{n+1} = p_{n+1} - p = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - p = e_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} = \frac{e_n f'(p_n) - f(p_n)}{f'(p_n)}$$

- Por el Teorema de taylor:

$$f(p) = 0 = f(p_n - e_n) = f(p_n) - e_n f'(p_n) + \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

con ξ_n entre p_n y p. De alli:

$$e_n f'(p_n) - f(p_n) = \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

Convergencia

- Sustituyendo en la expresión de e_{n+1}:

$$e_{n+1} = e_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(p_n)}$$

- Si p_n es cercano a p se puede escribir:

$$e_{n+1} \simeq e_n^2 \, \frac{f''(p)}{2f'(p)} = C \; e_n^2$$

- El Método NR posee convergencia *cuadrática*.
- Al obtener la fórmula del error, hemos supuesto que $f'(p) \neq 0$, y buscamos que $f(p) = 0$. Pero puede haber problemas si simultánemente con $f(p)$ también $f'(p)$ tiende a cero.

Convergencia

- Definición: Una solución p de $f(x) =$ es un *cero de multiplicidad* m de la funcion f si para $x \neq p$ se puede escribir $f(x) = (x-p)^m\, q(x)$ siendo $q(p) \neq 0$.
- Las raices de ecuaciones pueden ser *simples* o *múltiples*. Las raices simples son las que tienen multiplicidad $m = 1$.
- Teorema: $f \in C^1[a,b]$ tiene un cero simple p en (a,b) si y solo si $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$.
- Teorema: Si el método de Newton-Raphson genera una sucesión $\{p_n\}$ que converge a un cero p de $f(x)$, entonces:
  - Si p es raíz simple, la convergencia es **cuadratica**:

$$e_{n+1} \simeq \frac{f''(p)}{2f'(p)}\, e_n^2$$

  - Si p es raíz múltiple, la convergencia es **lineal**

$$e_{n+1} \simeq \frac{m-1}{m}\, e_n$$

Convergencia

- Teorema: Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $p \in [a, b]$ es un cero de f y $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ el metodo de Newton-Raphson genera una sucesión $\{p_n\}$que converge a p.
- Este teorema, asegura que el M. N-R converge para cualquier p_0 dentro de ese intervalo $[p - \delta, p + \delta]$.
- La convergencia se dice que es *local*, pues precisa que el punto inicial este suficientmente cerca del cero buscado.
- El método de la biseccion, en contraposición con éste, tiene convergencia *global* ya que para cualquier $p_0 \in [a, b]$ converge.

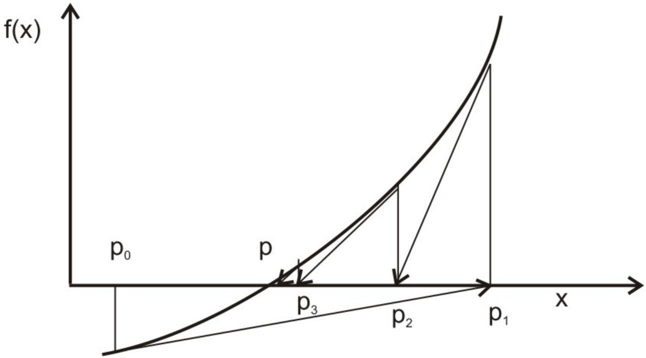
Convergencia

Resumiendo:

- El método de Newton-Raphson, para raices simples, tiene convergencia cuadrática. Esto es bueno.
- Para raices múltiples, la convergencia es lineal.
- Su convergencia es local. Hay casos en que este método no converge.
- Se precisa cierta regularidad en la derivada de la función, y comenzar con una estimación inicial cercana a p
- Otro inconveniente es que se precisa evaluar la derivada de la función.

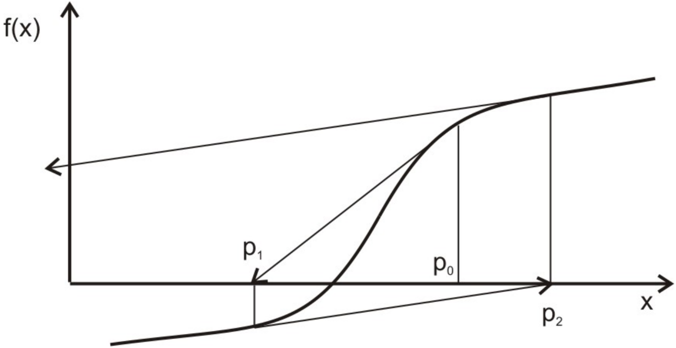
Convergencia del M. Newton-Raphson

Caso en que el M. Newton-Raphson converge



Convergencia del M. Newton-Raphson

Caso en que el M. Newton-Raphson no converge



Sección 5

Método de la Secante

Método de la Secante

- Un problema del M. Newton-Raphson es que se debe calcular la derivada de la función, y a veces no se dispone de ella.
- Esto se puede remediar recordando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Se puede aproximar a la derivada, en la iteración n,:

$$f'(p_n) \simeq \frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}$$

- Y la fórmula de recurrencia del M. Newton-Raphson, con este cambio:

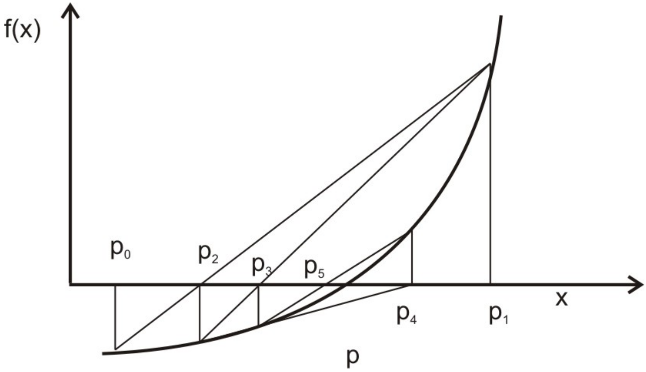
$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n - p_{n-1})\ f(p_n)}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

- Esta es la fórmula del *Método de la Secante*

Algoritmo del Método de la Secante

Dados: $f(x)$, p_0, p_1, Tol, K_{max}
Salida: p
1) $i \leftarrow 2$; $q_0 \leftarrow f(p_0)$; $q_1 \leftarrow f(p_1)$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \ \leftarrow \ p_1 - \frac{q_1(p_1 - p_0)}{(q_1 - q_0)}$
    4) si $|p - p_1| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) $p_0 \leftarrow p_1$; $q_0 \leftarrow q_1$; $p_1 \leftarrow p$; $q_1 \leftarrow f(p)$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Método de la Secante



Método de la Secante

- El método de la secante evita tener que evaluar derivadas.
- La convergencia es más lenta que la del M.Newton-Raphson, pero más rápida que el M. Bisección.
- Posee una convergencia *superlineal*, para el caso de raices simples:

$$e_{n+1} \simeq \left[\frac{f''(p)}{2f'(p)}\right]^{1-\phi} e_n^{\phi} = C\ e_n^{\phi}$$

  donde $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.618\ldots$.
- Precisa 2 estimaciones iniciales: p_0 y p_1.

Sección 6

Metodo de la Regula Falsi

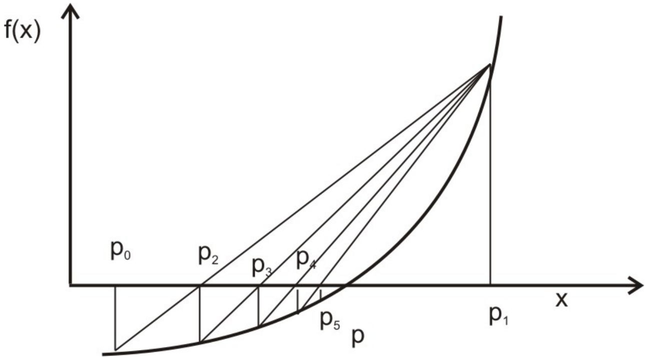
Método Regula Falsi

- El Método llamado *Regula Falsi* o de la Falsa Posición, es similar al Metodo de la Secante, pero en cada iteración toma -para trazar la secante- los dos últimos puntos que acotan la raiz buscada. Como lo hacía el metodo de la Bisección.
- La fórmula de recurrencia es similar a la del M. Secante

$$p_n = b_n - \frac{(b_n - a_n)\ f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

  pero los puntos a_n y b_n se eligen de modo de encerrar la raiz.
- Para la iteración siguiente p_n reemplaza, ya sea a a_n o a b_n, según quienes encierran la raíz buscada, tal como se hace en el método de la Bisección.
- Este método tiene convergencia lineal. Pero, siempre converge (convergencia global), cosa que no siempre ocurre con el método de la secante.

Método Regula Falsi



Sección 7

Ceros de polinomios

Ceros de polinomios

- Un polinomio de grado n se puede escribir (de distintas formas, por ejemplo):

$$P(x) \;=\; a_n x^n \;+\; a_{n-1} x^{n-1} \;+ \ldots\; a_1 x \;+\; a_0$$

  donde a_i son los coeficientes (constantes) y $a_n \neq 0$

- **Teorema fundamental del álgebra**:
  Si $P(x)$ es polinomio de grado $n \geq 1$, entonces $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz. En el caso más general esta raíz es compleja.

- **Corolario 1**:
  Si $P(x)$ es polinomio de grado $n \geq 1$, existen constantes únicas $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tales que $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ y

$$P(x) \;=\; a_n (x - x_1)^{m_1} \; (x - x_2)^{m_2} \; \ldots (x - x_k)^{m_k}$$

Ceros de polinomios

- En la fórmula anterior x_i son los *ceros* del polinomio y m_k es la *multiplicidad* de ese cero.
  En el extremo, un polinomio de grado n con n ceros distintos se escribe:
  $$P(x) \;=\; a_n(x - x_1)\,(x - x_2)\;\ldots(x - x_n)$$
  y un polinomio con *un* solo cero de multiplicidad n:
  $$P(x) \;=\; a_n(x - x_1)^n$$
- **Corolario 2**:
  Sean $P(x)$ y $S(x)$ polinomio de grado no mayor que n, si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ con $k > n$ son números distintos, y $P(x_i) = S(x_i)$ para $i = 1, \ldots k$, entonces $P(x) = S(x)\ \forall x$

Ceros de polinomios

- Si se toma un valor x_0 se puede escribir

$$Q(x) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$$

- De donde

$$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + P(x_0)$$

- $Q(x)$ se denomina *cociente* de dividir $P(x)$ por el factor $(x - x_0)$, y $P(x_0)$ es el *resto*.
- $Q(x)$ es de un grado menor que $P(x)$.

Ceros de polinomios

- Si x_1 es un cero del polinomio:

$$P(x) = (x - x_1)\, Q(x)$$

- En este caso el polinomio es exactamente dividido por el factor $(x - x_1)$ y el resto es cero.
- El proceso de quitar un factor lineal de un polinomio se llama *deflación*. Si x_1 es un cero de $P(x)$, entonces la deflación del polinomio dará:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x - x_1}$$

- Hay un procedimiento práctico para evaluar los coeficientes de $Q(x)$ y el resto (en caso en que x_0 no sea un cero): el Método de Horner. Se introducirá con el siguiente teorema.

Metodo de Horner

- **Teorema**:
  Sea un polinomio de grado n

  $$P(x) \; = \; a_n x^n \; + \; a_{n-1} x^{n-1} \; + \ldots \; a_1 x \; + \; a_0$$

  Si $b_n = a_n$, y dado un valor x_0, se toma $b_k \; = \; a_k \; + \; b_{k+1} x_0$, para $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$, entonces

  $$P(x) \; = \; (x - x_0) \; Q(x) \; + \; b_0$$

  donde

  $$Q(x) \; = \; b_n x^{n-1} \; + \; b_{n-1} x^{n-2} \; + \ldots \; b_2 x \; + \; b_1$$

  y

  $$b_0 \; = P(x_0)$$

- La demostración es sencilla y se hará como práctica.

Metodo de Horner

- **Ejemplo:**
  Aplicar el método de Horner para evaluar
  $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ en $x_0 = -2$.
  El procedimiento se conoce como *división sintética* y se puede organizar:

	Coef. de x^4	Coef. de x^3	Coef. de x^2	Coef. de x	Cte
$x_0 = -2$	$a_4 = 2$	$a_3 = 0$	$a_2 = -3$	$a_1 = 3$	$a_0 = -4$
		$b_4x_0 = -4$	$b_3x_0 = 8$	$b_2x_0 = -10$	$b_1x_0 = 14$
	$b_4 = 2$	$b_3 = -4$	$b_2 = 5$	$b_1 = -7$	$b_0 = 10$

De donde:

$$P(x) = (x+2)\,(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) + 10$$

y $P(-2) = 10$

Metodo de Horner

- El Método de Horner puede ser útil para evaluar, no sólo el polinomio en un punto x_0, sino también su derivada.
- En efecto

$$P(x) \;=\; (x - x_0)\; Q(x) \;+\; b_0$$

donde

$$Q(x) \;=\; b_n x^{n-1} \;+\; b_{n-1} x^{n-2} \;+ \ldots\; b_2 x \;+\; b_1$$

derivando con respecto a x

$$P'(x) \;=\; (x - x_0)\; Q'(x) \;+\; Q(x)$$

y evaluando en x_0

$$P'(x_0) \;=\; Q(x_0)$$

Metodo de Horner

- El método de Horner puede ser útil para varias tareas:
  - Para evaluar el polinomio en un punto x_0:
    De teorema se ve que $P(x_0) = b_0$
  - Para evaluar la derivada del polinomio en un punto x_0:
    Vimos que $P'(x_0) = Q(x_0)$, de modo que aplicando el algoritmo de Horner a $Q(x)$ obtendremos $Q(x_0)$.
  - Para evaluar derivadas de orden superior del polinomio en un punto x_0:
    Aplicando recursivamente el algoritmo de Horner
  - Para, dado un cero de $P(x)$: x_1, obtener por deflación $Q(x) \;\; = \frac{P(x)}{x-x_1}$,
- En particular, si aplicamos el método de Newton-Raphson, debemos calcular $P(x_0)$ y $P'(x_0)$, y para ello puede ser útil el algoritmo de Horner.
- El método de Horner es más eficiente para evaluar un polinomio en un punto, que si se hacen las operaciones como lo indica la expresión del polinomio dada.

Algoritmo de Horner

Para evaluar $P(x_0)$ y $P'(x_0)$

Dados: $n,\ a_n,\ a_{n-1},\ \ldots\ a_0,\ x_0.$
Salida: $\alpha = P(x_0),\ \beta = P'(x_0)$
1) $\alpha = a_n\ ;\ \beta = a_n$
2) Para $i - n - 1, n - 2, \ldots, 1$
    3) $\alpha = x_0\alpha + a_i$
    4) $\beta = x_0\beta + \alpha$
5) $\alpha = x_0\alpha + a_0$
6) Salida: $\alpha,\ \beta$
Parar.

Sección 8

Estrategias

Estrategias de análisis

- Lo primero a realizar es una gráfica de la función a la cual se quiere hallar el cero. Nada reemplaza la inspeccion visual que permite observar:
  - Si la funcion tiene ceros en el intervalo deseado.
  - Si hay un cero o más de uno.
  - Si cada cero es simple o tiene multiplicidad mayor a uno.
  - Cuál es el intervalo en que debe buscarse el cero.
  - Cuál puede ser un buen valor inicial.
  - Cómo es la curva en proximidades del cero (esto tiene influencia en la forma de determinar el error para detener las iteraciones).

Estrategias de análisis

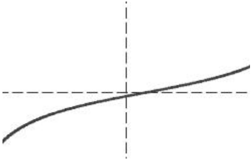
- Si hay varios ceros en el intervalo elegido conviene definir un intervalo que encierre exclusivamente el cero de interés para el problema.
- El método de Newton-Raphson tiene convergencia cuadrática, pero precisa una estimación inicial cercana al cero pues no es seguro que converja de otro modo. Posee *convergencia local*.
- El método de la Bisección, por otro lado asegura convergencia pero ésta es lenta. Se dice que tiene *convergencia global*.
- A veces se usa un esquema híbrido: se inicia con algunas iteraciones de Bisección y luego se cambia a Newton-Raphson para acelerar el proceso.

Estrategias de análisis

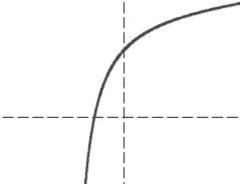
- El examen del grafico puede detectar raices múltiples. Si en el lugar donde $f(x) = 0$ tambien es $f'(x) = 0$, esto indica raices múltiples.
- Con raices de multiplicidad mayor que uno, el metodo de Newton-Raphson pierde su convergencia cuadrática.
- Hay métodos de *aceleración* (Aitken, Steffensen, Muller) que no seran discutidos aquí, que permiten acelerar la convergencia de algoritmos de convergencia lineal.

Estrategias de análisis

- Si la función tiene derivadas pequeñas en proximidades del cero, un criterio de parada basado en $|f(p_i)| < Tol$ no es adecuado pues esto puede satisfacerse aún cuando $|p_i - p_{i-1}|$ sea grande. Un criterio basado en $|p_i - p_{i-1}| < Tol$ sería mejor.



- Si la función tiene derivadas grandes en proximidades del cero, un criterio de parada basado en $|p_i - p_{i-1}| < Tol$ no sería adecuado, sino mas bien uno basado en $|f(p_i)| < Tol$.



Resumen

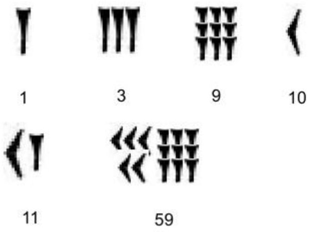
En este capítulo hemos visto:

- Problemas de hallar el cero de una función, o bien la raiz de una ecuación.
- Métodos para hallar ceros de funciones:
  - Método de la búsqueda binaria, o de la bisección.
  - Iteración funcional, o iteración de punto fijo
  - Método Newton-Raphson
  - Método de la secante
  - Método de la Regula Falsi
- Condiciones de convergencia y algoritmos de cada uno.
- Método de Horner, para evaluar polinomios y sus derivadas en un punto.
- Estategias para analizar el problema y elegir el método a usar.

Apendice: Ejemplos

Calculo de la raiz cuadrada por el método de la bisección

- Este problema era resuelto en Babilonia ($\sim$ 1800 años antes de la era cristiana), por el método de la biseccion.
- Su sistema de numeración era en base 60 (sistema sexagesimal) y la escritura del mismo se denomina *cuneiforme*. pues se basaba en cuñas talladas en tablillas de arcilla.



Apendice: Ejemplos

- El procedimiento para hallar la raiz cuadrada de A era el siguiente:
  - Se eligen dos números a_1 y b_1 tal que $a_1^2 < A$ y $b_1^2 > A$
  - Se calcula
  $$c = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$$
  y se calcula su cuadrado.
  - Si $c_1^2 < A$ se reemplaza a_1 por c_1, y si $c_1^2 > A$ se reemplaza b_1 por c_1
  - Se repite el proceso hasta lograr una aproximación satisfactoria.
  - Como se ve el proceso es precisamente una técnica de bisección.

Apendice: Ejemplos

Calculo de la raiz cuadrada por el método de Newton-Raphson

- Se desea calcular la raiz cuadrada de un número real A. Se quiere hallar el número real x tal que $x^2 = A$, o bien

$$x^2 - A = 0$$

- La funcion $f(x) = x^2 - A$ es a la cual queremos hallar un cero.
- El método de Newton-Raphson itera con la fórmula

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)}$$

- La derivada

$$f'(x) = 2x$$

Apendice: Ejemplos

- Sustituyendo

$$p_{k+1} = p_k - \frac{(p_k^2 - A)}{2p_k}$$

Que puede escribirse:

$$p_{k+1} = \frac{1}{2}\left(p_k + \frac{A}{p_k}\right)$$

- Esta fórmula brinda también una interpretación geométrica. Si A es el área de un cuadrado cuyo lado buscamos, en una iteración cualquiera es el área de un rectángulo de lados p_k y $\frac{A}{p_k}$. Si estos no coinciden se hace un promedio de ambos para la próxima iteración.

Apendice: Ejemplos

Cálculo de la raiz cuadrada de 39 por bisección

it.	a	b	c	c^2
1	4	8	6	36
2	6	8	7	49
3	6	7	6.5	42.25
4	6	6.5	6.25	39.0625
5	6	6.25	6.125	37.515625
6	6.125	6.25	6.1875	38.28515625
7	6.1875	6.25	6.21875	38.67285156
8	6.21875	6.25	6.230938	38.82458836
9	6.230938	6.25	6.240469	38.94345334

Apendice: Ejemplos

Cálculo de la raiz cuadrada de 39 por Newton-Raphson

it.	p_{k-1}	p_k	p_k^2
1	7	6,2857142857	39.510204
2	6,2857142857	6,2451298701	39.001647
3	6,2451298701	6,2449979998	39