

Métodos Directos de resolución de SEAL

Victorio E. Sonzogni

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{aligned} E_1 : \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots \\ E_n : \quad & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

puede representarse matricialmente:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- \mathbf{x} es un vector conteniendo n incógnitas;
- \mathbf{A} una matriz cuadrada de $n \times n$ con los coeficientes del sistema;
- \mathbf{b} un vector con los términos independientes,

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Sistemas de ecuaciones lineales

- Las características de la matriz determinan si el sistema de ecuaciones tiene solución; si ésta única; si es poco sensible a la variación en los datos; si es fácil o difícil de resolver; etc.
- El sistema de ecuaciones anterior tiene solución única si se da una de las siguientes (equivalentes) condiciones:
 - La matriz \mathbf{A} es invertible
 - El rango de \mathbf{A} es n (su determinante no es nulo)
 - El sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ admite solamente la solución nula.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Tipos de matrices

En cuanto a la estructura de las matrices, éstas se denominan:

- **Matriz general:** el caso más general que no corresponde a alguno de los listados abajo
- **Matriz simétrica:** cuando $a_{ij} = a_{ji}$
- **Matriz diagonal:** cuando solamente los elementos a_{ii} son distintos de cero
- **Matriz triangular:** cuando los elementos estrictamente por arriba de la diagonal son nulos (diagonal inferior) o los elementos estrictamente por debajo de la diagonal son nulos (diagonal superior)
- **Matriz banda:** cuando hay una banda, alrededor de la diagonal principal, donde pueden estar los elementos no nulos. Fuera de esa banda son todos nulos.
- **Matriz rala** (*sparse*): matriz poblada de ceros con pocos elementos no nulos.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Tipos de matrices

- Definición: **Matriz diagonalmente dominante:**
Una matriz se dice *estrictamente diagonal dominante* si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

- Una matriz estrictamente diagonal dominante es no singular.
- Definición: **Matriz simétrica definida positiva:**
Una matriz \mathbf{A} simétrica se dice *definida positiva* si

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Obs: Una matriz \mathbf{B} no simétrica es positiva definida si y solo si su parte simétrica $\frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)$ lo es

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Tipos de matrices

- También una matriz es definida positiva si y solo si todos sus autovalores son positivos.
- Si una matriz simétrica \mathbf{A} es definida positiva, entonces:

a) \mathbf{A} no es singular

b) $a_{ii} > 0 \quad \forall i$

c) $\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$

d) $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj} \quad \forall i \neq j$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Sistemas de ecuaciones lineales

- La resolución de un SEAL puede realizarse de diferentes métodos que suelen clasificarse en:.
 - Métodos *directos*
En ellos a través un número finito de pasos se obtiene la solución del problema.
 - Métodos *iterativos*
En estos se contruye una secuencia de soluciones que se aproxima a la solución.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Sistemas de ecuaciones lineales

- Sistemas equivalentes:

Dos sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{Bx} = \mathbf{d}$ se dicen equivalentes si tienen la misma solución \mathbf{x}

- Se puede demostrar que realizando una serie de *operaciones elementales* sobre un SEAL se obtiene otro equivalente.

- Operaciones elementales:

- Intercambio de 2 ecuaciones:

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

- Multiplicación de una ecuación por un escalar ($\neq 0$):

$$\lambda E_i \rightarrow E_i$$

- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra:

$$E_i + \lambda E_j \leftrightarrow E_i$$

Métodos directos

- Hay métodos que se basan en transformar un SEAL mediante operaciones elementales de modo de obtener un sistema equivalente, más fácil de resolver.
- ¿Que sistemas pueden ser fáciles para resolver? Por ejemplo:
 - Sistemas con matrices diagonales
 - Sistemas con matrices triangulares

Sistemas con matrices diagonales

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Su resolución es trivial. La solución es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Sistemas con matrices triangulares

- Para un sistema con matriz triangular superior:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- La resolución comienza con el término x_n y progresa hacia arriba

$$x_n = b_n/a_{nn}$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}$$

...

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)/a_{ii} \quad \text{para } i = n-1, \dots, 1$$

- Análogamente se resuelve un sistema con matriz triangular inferior.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Eliminación de Gauss

- Un método basado en esta transformación del sistema de ecuaciones es el método de Eliminación de Gauss
- Se basa en realizar una serie de transformaciones sobre el sistema de modo de obtener un sistema equivalente, con matriz triangular.
- En un sistema de n ecuaciones se efectúan $n - 1$ pasos de eliminación.
- La matriz \mathbf{A} del sistema, va siendo transformada en matrices $\mathbf{A}^{(k)}$ en cada paso k de la eliminación.
- El vector de términos independientes va transformándose también en sucesivos vectores $\mathbf{b}^{(k)}$
- Se introducirá el método a través de un ejemplo sencillo.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Eliminación de Gauss

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Se propone transformar el sistema en varios pasos

En el primer paso se propone un sistema:

$$\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 - 2E_1 \\ E_3 - \frac{1}{2}E_1 \\ E_4 - (-1)E_1 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Eliminación de Gauss

En el segundo paso se propone un sistema:

$$\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - 3E_2 \\ E_4 - (-\frac{1}{2})E_2 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

En el tercer paso:

$$\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 - 2E_3 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Eliminación de Gauss

- El sistema ha quedado transformado en uno equivalente con matriz triangular superior, que es más sencillo para resolver.
- La solución del sistema triangular se realiza por retrosustitución, dando:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Eliminación de Gauss

- Se forma una sucesión de sistemas con matrices $\mathbf{A}^{(k)}$
- En el paso k la k – *esima* fila queda inalterada, igual que las filas superiores a ella. Se modifican las filas inferiores.
- En el paso k el elemento a_{kk} se denomina *pivote*. La fila k se llama *fila pivote* y la columna k *columna pivote*

Eliminación de Gauss

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{matrix} & & & \text{col.}k & & \text{col.}j & & \\ & & & & & & & \\ \begin{matrix} \text{fila } k \\ \text{fila } i \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1k}^{(k)} & \dots & a_{1j}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ik}^{(k)} & \dots & a_{ij}^{(k)} & \dots & a_{in}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nj}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Eliminación de Gauss

Los elementos de la matriz $\mathbf{A}^{(k+1)}$ se calculan:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \text{si } i \leq k \\ a_{ij}^{(k)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \right) a_{kj}^{(k)} & \text{si } i \geq k+1 \text{ y } j \geq k+1 \\ 0 & \text{si } i \geq k+1 \text{ y } j \leq k \end{cases}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Algoritmo para eliminación de Gauss

Input: $n, \tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$

Output: x , o mensaje de error

Eliminacion

```
for  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  do
  for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$  do
     $m \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$ 
     $a_{ik} \leftarrow 0$ 
    for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n + 1$  do
       $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m a_{kj}$ 
    end
  end
end
end
```

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Algoritmo para eliminación de Gauss (cont.)

```
if  $a_{nn} = 0 \rightarrow$  mens. error: 'no hay sol. unica'
```

Retrosustitucion

```
 $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$   
for  $i = n - 1, n - 2, \dots 1$  do  
     $s \leftarrow a_{i,n+1}$   
    for  $j = i + 1, i + 2, \dots n$  do  
         $s \leftarrow s - a_{ij}x_j$   
    end  
     $x_i \leftarrow s/a_{ii}$   
end
```

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU

Una forma de abordar la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es *factorizar* la matriz. Es decir buscar

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

donde \mathbf{L} y \mathbf{U} son matrices triangulares inferior y superior, respectivamente, tales que multiplicadas dan la matriz \mathbf{A} . Si se tiene esa factorización, el sistema se puede escribir:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

Llamando

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

El sistema queda

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

De esta última ecuación se obtiene el vector \mathbf{y} y de la anterior, el vector \mathbf{x}

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU

La solución se hace entonces en tres etapas:

1) Factorización de la matriz

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

2) Solución del sistema

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

por sustitución hacia adelante

3) Solución del sistema

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

por sustitución hacia atrás

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU

- La factorización \mathbf{LU} no es única
- Factorización de Doolittle: los términos de la diagonal de \mathbf{L} son unitarios
- Factorización de Crout: los términos de la diagonal de \mathbf{U} son unitarios

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU

- Si se observa el ejemplo de eliminación de Gauss, puede verse que en la primera etapa el sistema se construyó:

$$\begin{aligned} E_1 \\ E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} E_1 \\ E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} E_1 \\ E_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} E_1 \end{aligned}$$

- En la segunda:

$$\begin{aligned} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} E_2 \\ E_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}} E_2 \end{aligned}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU

- En la tercera etapa:

$$\begin{aligned} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 - \frac{a_{43}}{a_{33}} E_3 \end{aligned}$$

- Los multiplicadores usados pueden colocarse para formar una matriz triangular inferior:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}}{a_{22}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}}{a_{22}} & \frac{a_{43}}{a_{33}} & 1 \end{bmatrix}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU

- Si se define

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n-1)}$$

siendo esta la última matriz obtenida en el proceso de eliminación de Gauss. Ésta matriz, junto con la matriz triangular inferior \mathbf{L} de la transparencia anterior, son los factores de la matriz \mathbf{A} .

- Teorema: Si todos los elementos $a_{kk}^{(k)}$ de la descomposición de Gauss son distintos de cero, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, donde \mathbf{L} y \mathbf{U} , son las matrices triangulares recién definidas.
- Siguiendo las operaciones como en el algoritmo de eliminación de Gauss, el algoritmo para descomposición \mathbf{LU} se muestra a continuación.
- Las matrices \mathbf{L} y \mathbf{U} se almacenan sobre la matriz original \mathbf{A} . (La diagonal de \mathbf{L} no precisa almacenarse pues son todos 1).

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU kij

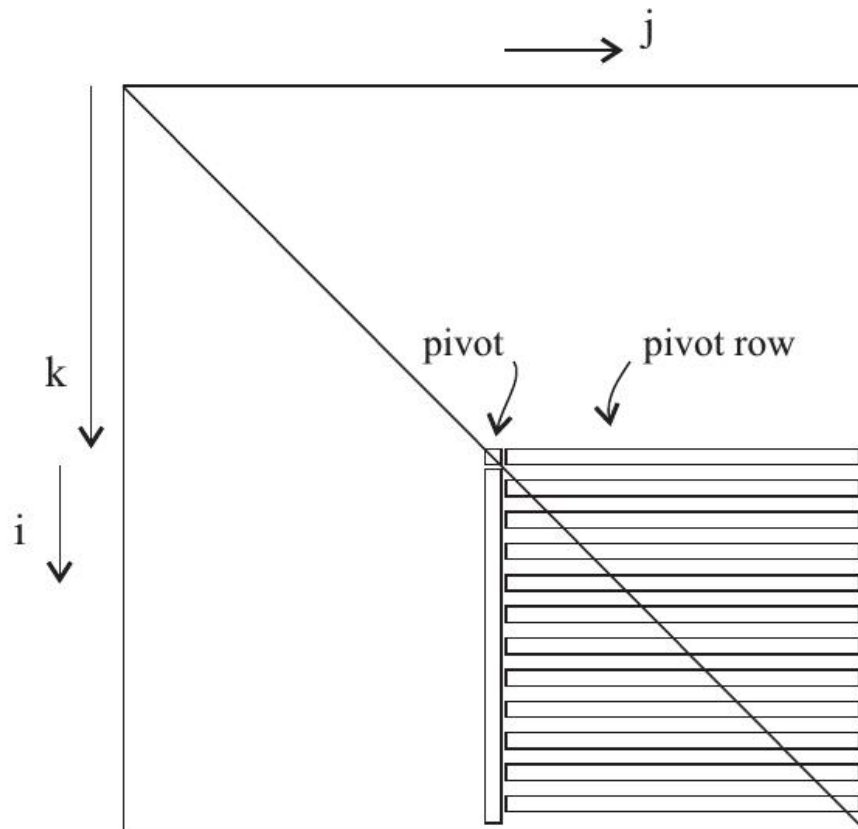
```
for  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  do                                fila pivotal
    for  $i = k + 1, \dots, n$  do
         $s \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$ 
         $a_{ik} \leftarrow s$                                      $l_{ik}$ 
        for  $j = k + 1, \dots, n$  do
             $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - s a_{kj}$                      $u_{ij}$ 
        end
    end
end
end
```

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU kij



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU

- Para cada etapa, parándose en el pivote (índice k), se inicia un ciclo sobre las filas (índice i), y otro sobre las columnas (índice j).
- Por debajo del pivote (a_{kk}) queda formada una columna de la matriz \mathbf{L} .
- A la derecha de la diagonal va quedando formada la matriz \mathbf{U} .
- Esta descomposición puede hacerse de distintas formas. La indicada se denomina *kij* por el orden en que se realizaron las cuentas.
- A continuación se muestran las factorizaciones *kji* y *jki*

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU kji

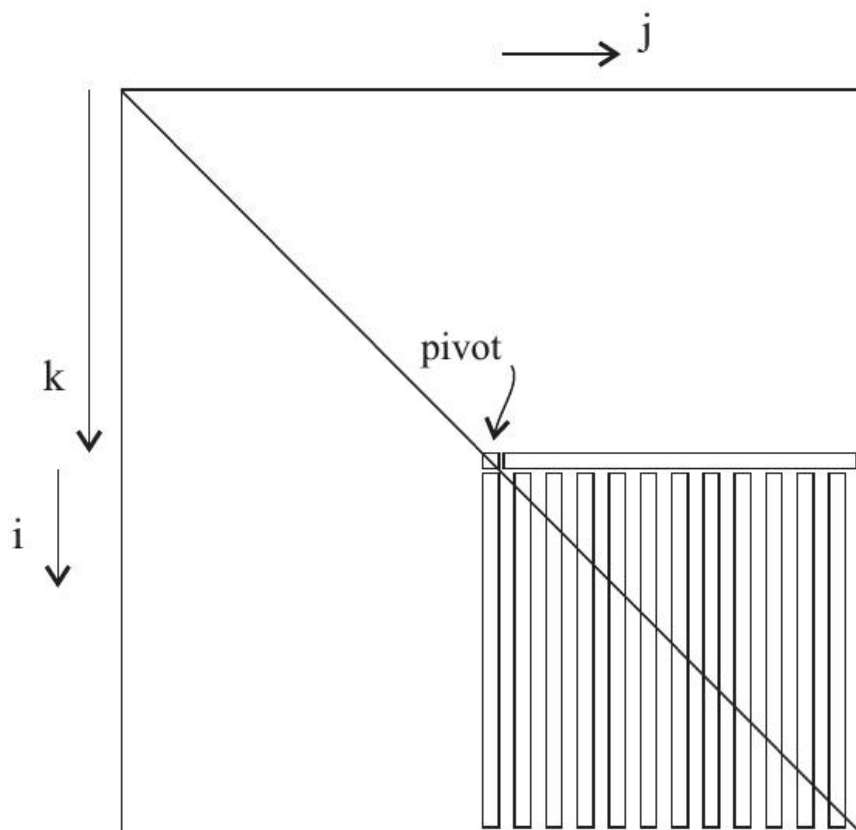
```
for  $k = 1, \dots, n - 1$  do
  for  $i = k + 1, \dots, n$  do
     $s \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$ 
     $a_{ik} \leftarrow s$   $l_{ik}$ 
  end
  for  $j = k + 1, \dots, n$  do
    for  $i = k + 1, \dots, n$  do
       $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$   $u_{ij}$ 
    end
  end
end
end
```

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU kji



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU jki

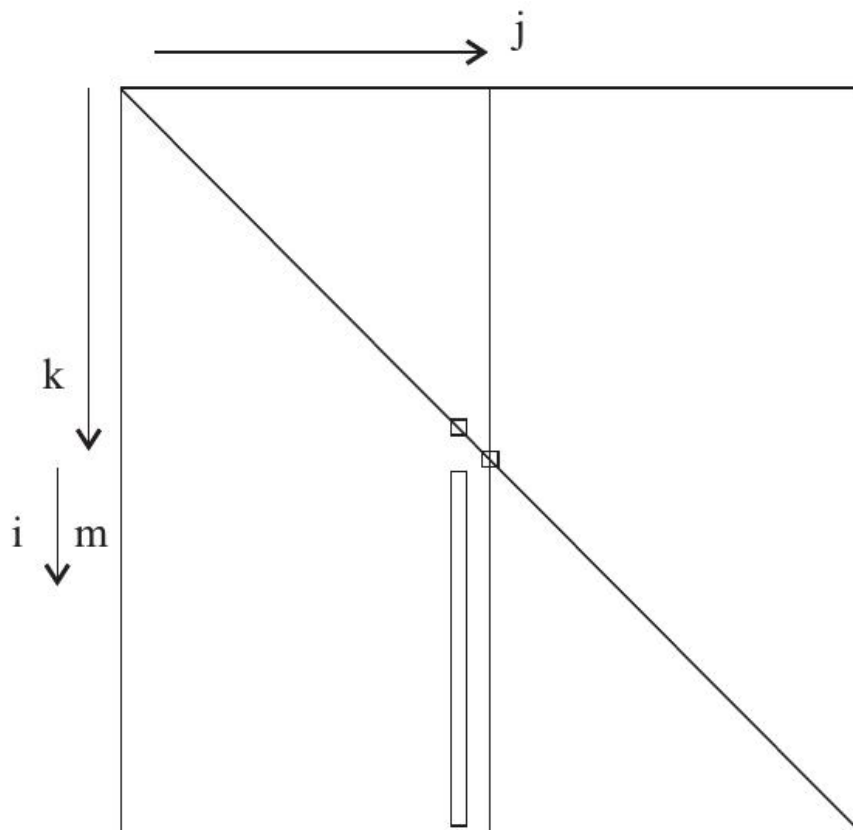
```
for  $j = 2, \dots, n$  do
  for  $m = j, \dots, n$  do
     $s \leftarrow a_{m,j-1} / a_{j-1,j-1}$ 
     $a_{m,j-1} \leftarrow s$   $l_{mk}$ 
  end
  for  $k = 1, \dots, j-1$  do
    for  $i = k+1, \dots, n$  do
       $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$   $u_{ij}$ 
    end
  end
end
end
```

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU jki



Navigation icons: back, forward, search, etc.

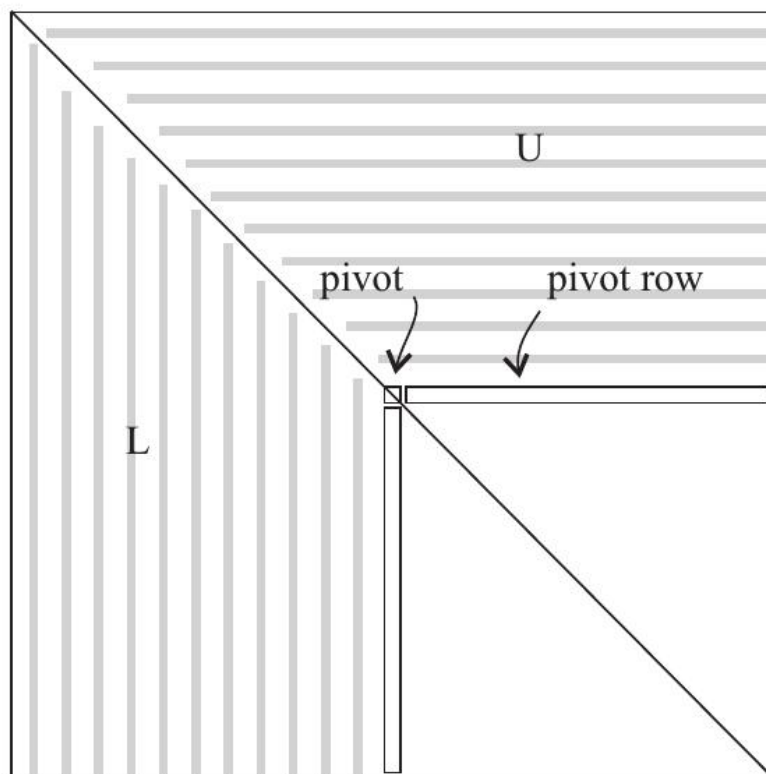
Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

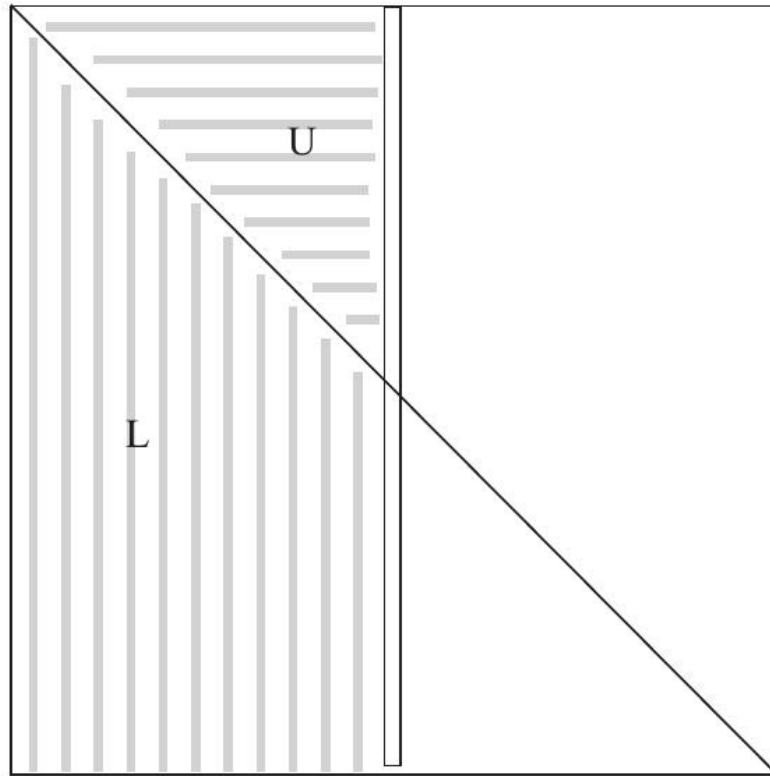
Factorización LU

- En realidad los tres ciclos imbricados pueden recorrerse de 6, maneras diferentes:
 - kij
 - kji
 - ijk
 - ikj
 - jik
 - jki

Factorización LU kij y kji



Factorización LU jik y jki

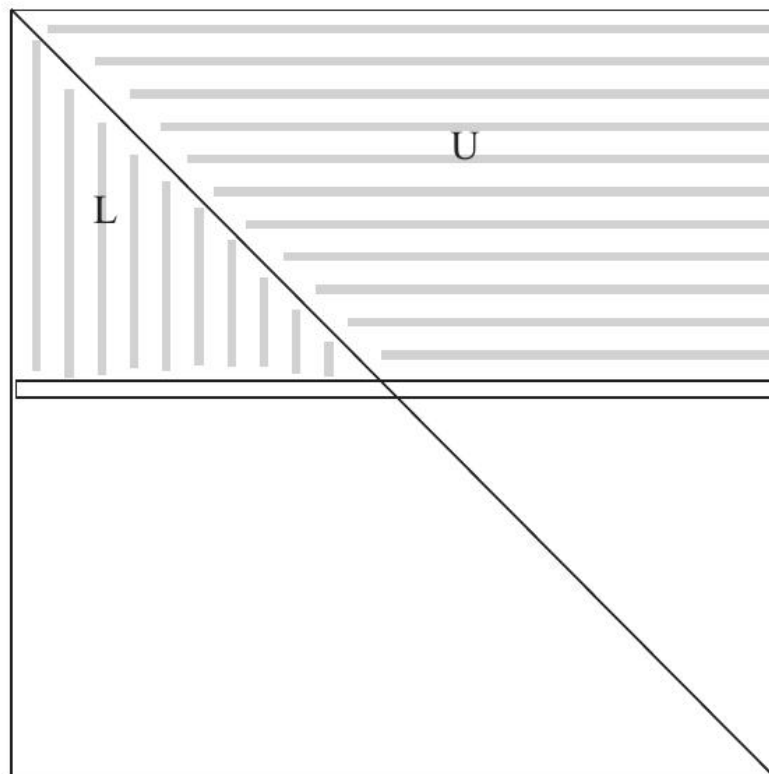


Navigation icons: back, forward, search, and other presentation controls.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización LU ikj y ijk



Navigation icons: back, forward, search, and other presentation controls.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Pivoteo

- La factorización descripta puede fallar si alguno de los pivotes (a_{kk}) es cero o un numero muy pequeño.
- Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{con } \epsilon \ll 1$$

aplicando el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & 1 - \epsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \epsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Pivoteo

y de allí puede obtenerse

$$x_2 = \frac{2 - \epsilon^{-1}}{1 - \epsilon^{-1}} \simeq 1$$

$$x_1 = (1 - x_2) \epsilon^{-1} \simeq 0$$

La solución correcta debería ser

$$x_1 = \frac{1}{1 - \epsilon} \simeq 1$$

$$x_2 = \frac{1 - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \simeq 1$$

La solución numérica es exacta para x_2 , pero no para x_1 .

El problema se da cuando a_{kk} , de la diagonal, es pequeño frente a los otros coeficientes de la columna.

Si se intercambian filas, no hay error numérico y los resultados son correctos.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

- Este problema puede remediarse intercambiando las filas de la matriz para evitar que ese término (nulo o muy pequeño) quede en la diagonal.
- Hay dos maneras de realizar esos cambios en la matriz: *pivoteo total* o *parcial*
- El pivoteo parcial se describe a continuación.
- En realidad las filas no se intercambian físicamente. Se mantiene un vector \mathbf{r} que indica el orden en que se ha realizado la factorización.

Factorización kij con pivoteo parcial

```
for  $i = 1, \dots, n$  do
     $r_i = i$ 
end
for  $k = 1, \dots, n - 1$  do
    buscar  $p \in \{k, k + 1, \dots, n\}$ 
    tal que  $|a_{r_p k}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{r_i k}|$ 
    if  $a_{r_p k} = 0 \rightarrow$  mensaje de error
    if  $r_p \neq r_k$ 
         $z \leftarrow r_p$ 
         $r_p \leftarrow r_k$ 
         $r_k \leftarrow z$ 
    for  $i = k + 1, \dots, n$  do
         $s \leftarrow a_{r_i k} / a_{r_k k}$ 
         $a_{r_i k} \leftarrow s$ 
        for  $j = k + 1, \dots, n$  do
             $a_{r_i j} \leftarrow a_{r_i j} - s a_{r_k j}$ 
        end
    end
end
end
```

fila pivotal

Solución con pivoteo parcial

- El intercambio de filas equivale a afectar a la matriz con una matriz de permutación P , que es el producto de las matrices de permutación de cada paso k .
- De modo que la factorización se ha hecho para

$$PA = LU$$

- El sistema a resolver es

$$PAx = Pb$$

$$LUx = Pb$$

- y puede escribirse:

$$Ly = Pb$$

$$Ux = y$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Pivoteo parcial escalado

- A veces el pivoteo parcial no alcanza. Si el término de la diagonal es pequeño frente a los de su fila, no debería ser pivote.
- En el pivoteo parcial escalado se elige el mayor valor absoluto de los a_{ij} en cada fila

$$s_i = \max_{j=1,n} |a_{ij}|$$

la fila pivotal se elige:

se busca $p \in \{k, k+1, \dots, n\}$ tal que $\frac{|a_{r_p k}|}{s_{r_p}} = \max_{k \leq i \leq n} \frac{|a_{r_i k}|}{s_{r_i}}$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Algoritmo fact. LU con pivoteo parcial escalado

```
Input:  $n, A$   
Output:  $L$  y  $U$  (sobre  $A$ )  
for  $i = 1, 2, \dots, n$  do  
     $s_i = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$   
     $r_i = i$   
end  
for  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  do  
    fila pivotal  
    se busca  $p \in \{k, k + 1, \dots, n\}$  tal que  $\frac{|a_{r_p k}|}{s_{r_p}} = \max_{k \leq i \leq n} \frac{|a_{r_i k}|}{s_{r_i}}$   
    si  $a_{r_p k} = 0 \rightarrow$  mensaje de error y termina.  
    si  $r_p \neq r_k$   
         $x \leftarrow r_p$   
         $r_p \leftarrow r_k$   
         $r_k \leftarrow x$   
    for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$  do  
         $m \leftarrow a_{r_i k} / a_{r_k k}$   
         $a_{r_i k} \leftarrow m$   
        for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$  do  
             $a_{r_i j} \leftarrow a_{r_i j} - m a_{r_k j}$   
        end  
    end  
end  
end
```

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Conteo de operaciones solución con descomposición LU

La factorización

- Para la primera fila pivotal se requieren n multiplicaciones y n sumas. Esas n operaciones se hacen para las $(n - 1)$ filas o sea: $n(n - 1)$ flops. (flop = Floating point Operations). Es decir que para la primera fila pivotal se realizan del orden de n^2 flops.
- A medida que avanza el proceso (la fila pivotal) se hacen las mismas cuentas con matrices cada vez menores. En total:

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \simeq \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2$$

flops.

$$(\text{Aquí se usó el hecho de que: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1))$$

- Si n es grande, n^3 es dominante, y entonces la factorización LU requiere $\sim \frac{1}{3}n^3$ flops.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Conteo de operaciones solución con descomposición LU

La actualización del vector \mathbf{b}

- Son $(n - 1)$. En el primero hay $(n - 1)$ flops; en el segundo $(n - 2)$; en el tercero $(n - 3)$; y así.

Luego

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$(\text{Aquí se usó el hecho de que: } \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n + 1))$$

La retrosustitución

- Hay 1 flop para calcular la incógnita x_n ; 2 flops para calcular x_{n-1} ; etc. Luego son:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Conteo de operaciones solución con descomposición LU

En resumen:

- para factorizar: $\frac{1}{3}n^3$
- para las 2 sustituciones: n^2

Por eso, si hay varios vectores \mathbf{b} , conviene hacer la factorización de la matriz, una sola vez ($\frac{1}{3}n^3$ flops) y luego hacer varias veces las sustituciones (n^2 flops).

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización de Cholesky

Teorema: Si \mathbf{A} es matriz real, simétrica y definida positiva, entonces tiene una factorización *única* $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$, donde \mathbf{C} es matriz triangular inferior con diagonal positiva.

Demostración:

Como \mathbf{A} es simétrica (o sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$):

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{A}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{U}\mathbf{L}^{T-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T\mathbf{L}^{T-1}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{L}^{T-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización de Cholesky

El miembro izquierdo es una matriz triangular superior y el derecho una triangular inferior. Esto es así dado que se puede demostrar que la inversa de una matriz triangular es también triangular, y si la matriz tiene 1 en su diagonal, también los tiene su inversa. Además el producto de dos matrices triangulares superiores es también una matriz triangular superior. Así, deben ser ambos miembros matrices diagonales.

$$\mathbf{U}\mathbf{L}^{T-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T = \mathbf{D}$$

luego:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T$$

y entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización de Cholesky

Puede demostrarse que \mathbf{M} es una matriz definida positiva y \mathbf{N} no es singular, si y solo si \mathbf{NMN}^T es definida positiva.

Como \mathbf{A} es definida positiva también lo es \mathbf{D} , y por ser ésta diagonal sus términos son positivos.

Haciendo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$$

se puede escribir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$

Lo cual completa la demostración.

La factorización de Cholesky es un caso particular de la factorización LU. En lugar de tener 1 en la diagonal, tiene $\sqrt{d_{ii}}$.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Factorización de Cholesky

Input: n , \mathbf{A} (simétrica, definida positiva)

Output: \mathbf{C} (sobrescrita en el triángulo inferior de \mathbf{A})

```

$$c_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$$

$$\text{for } i = 2, \dots, n \text{ do}$$

$$c_{i1} \leftarrow a_{i1} / c_{11}$$

$$\text{end}$$

$$\text{for } i = 2, \dots, n - 1 \text{ do}$$

$$c_{ii} \leftarrow \left( a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} c_{is}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{for } j = i + 1, i + 2, \dots, n \text{ do}$$

$$c_{ji} \leftarrow \left( a_{ji} - \sum_{s=1}^{i-1} c_{js} c_{is} \right) / c_{ii}$$

$$\text{end}$$

$$\text{end}$$

$$c_{nn} \leftarrow \left( a_{nn} - \sum_{s=1}^{n-1} c_{ns}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

```

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Normas, radio espectral y número de condición

Normas, radio espectral y número de condición

- Veremos aquí algunas medidas que se pueden hacer sobre una matriz, tales como **norma**, **radio espectral** y **número de condición**.
- Ellas permiten evaluar el comportamiento de la matriz en la solución de un SEAL, cuan fácil o rápido será la solución, o cuan estables serán los resultados frente a errores en los datos.

Normas Vectoriales

- Una *norma* para un espacio vectorial V es una función que, aplicada a un vector, da un escalar no nulo, tal que:

- 1) $\|\mathbf{x}\| > 0$ si $\mathbf{x} \neq 0, \mathbf{x} \in V$
- 2) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ para $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V$
- 3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

(Con doble raya se designa la norma. Así $\|\mathbf{x}\|$ se lee *norma de x*)

- Algunas normas para vectores:

- Norma Euclídea

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Norma Infinito

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{i=1} |x_i|$$

- Norma L_1

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Normas Vectoriales

- Para un vector en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

la norma euclídea es el módulo del vector.

- Por ejemplo para un vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, será:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = 1$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 2$$

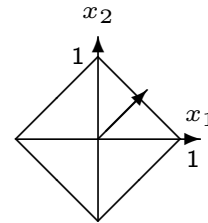
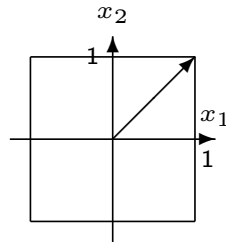
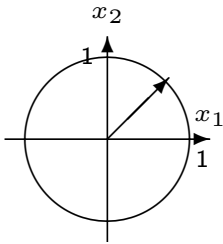
Navigation icons: back, forward, search, etc.

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Normas Vectoriales

- Todos los vectores en \mathbb{R}^2 de $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ tienen su extremo en un círculo (figura de la izq.).
- Todos los vectores en \mathbb{R}^2 de $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ tienen su extremo en un cuadrado de lado 2 (figura central).
- Todos los vectores en \mathbb{R}^2 de $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ tienen su extremo en un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ (figura de la derecha).



◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Normas Matriciales

- Una norma para matrices, debe cumplir las tres condiciones mencionadas.
- Si bien puede definirse de distintas formas, se la suele definir asociada a una definición de norma vectorial; Estas normas se denominan **naturales**, o **inducidas**, o **subordinadas**, o **asociadas** a una norma vectorial. Y se define como:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup\{ \|\mathbf{A}\mathbf{u}\| : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{u}\| = 1 \}$$

- Puede verificarse que esta definición de norma natural cumple las tres condiciones pedidas.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Normas Matriciales

- Además, de la definición surge una importante consecuencia:

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

Demostración:

Para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se verifica.

Para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, es tal que $\|\mathbf{v}\| = 1$

De la definición de norma matricial:

$$\|\mathbf{A}\| \geq \|\mathbf{Av}\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{Ax} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{Ax}\|$$

Luego

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Lo que completa la demostración.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Normas Matriciales

- Además de las condiciones (1) a (3), la norma matricial subordinada verifica:

- $\|\mathbf{I}\| = 1$ (\mathbf{I} matriz identidad)
- $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$

- Ejemplo:

Para la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

la norma matricial subordinada es:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Normas Matriciales

Otros ejemplos:

- Una transformación de un vector puede mirarse como una matriz.
- La matriz identidad $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mantiene inalterado al vector.
- Una matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ por ejemplo cuando multiplicada por un vector, duplica las componentes según x_1 . O sea lo *estira* al doble en el sentido de ese eje.
- Una matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ cuando multiplicada por un vector, lo hace rotar un ángulo α .

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

Victorio E. Sonzogni

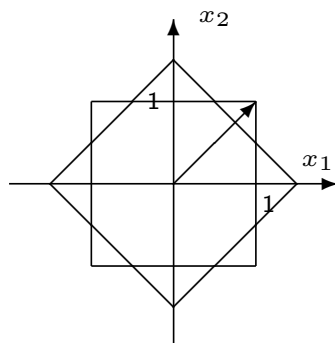
Métodos Directos

Normas Matriciales

- Supóngase una matriz de rotación con $\alpha = 45^\circ$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

- La norma infinito es: $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sqrt{2}$
- Todos los vectores de norma inf. unitaria están sobre un cuadrado. Al rotar 45° el de mayor norma inf. es $\sqrt{2}$



◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Radio espectral

- Se define como *radio espectral* de una matriz \mathbf{A} :

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| \mid \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\}$$

- λ son los autovalores de \mathbf{A} , soluciones de la ecuación:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Una matriz de $n \times n$ tiene n autovalores (algunos pueden ser repetidos; los autovalores pueden ser reales o complejos)

- $\rho(\mathbf{A})$ es el módulo del mayor autovalor; o sea el radio del menor círculo en el plano complejo, que contiene a todos los autovalores.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Radio Espectral

- Se puede demostrar que:
 - $[\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})]^{1/2} = \|\mathbf{A}\|_2$
 - $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$ para toda norma de \mathbf{A}
- En particular, si \mathbf{A} es simétrica:

$$\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2$$

- Si el $\rho(\mathbf{A}) < 1$ la matriz se llama **convergente** y ello equivale a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{ij})^k = 0$$

para cada elemento a_{ij} de la matriz. Esto será útil para estudiar la convergencia de procedimientos iterativos, en el próximo capítulo.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Número de condición

- Sea $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Supóngase que existe \mathbf{A}^{-1} . Luego

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Considérese el caso en que se perturba el vector \mathbf{b} . En su lugar se tiene $\tilde{\mathbf{b}}$. La solución será:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$$

El error absoluto es: $e = x - \tilde{x}$

La norma del error absoluto:

$$\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}\| = \|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|$$

El error relativo

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})\| \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{b}\|} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})\|}{\|\mathbf{b}\|} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Número de condición

- Esta expresión puede escribirse:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Donde se ha definido el **número de condición**:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$$

- Si el número de condición es pequeño, una pequeña perturbación en los datos (**b**) produce errores relativos pequeños en la solución.
- Si el número de condición es grande el error en la solución es grande.

Número de condición

- Ejemplo:

$$\text{Sea } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \epsilon \\ 1 - \epsilon & 1 \end{bmatrix} \text{ con } \epsilon > 0.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \epsilon^{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 - \epsilon \\ -1 + \epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

Usando $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = 2 + \epsilon \quad \text{y} \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = (2 + \epsilon)\epsilon^{-2}$$

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{(2 + \epsilon)^2}{\epsilon^2} > \frac{4}{\epsilon^2}$$

$$\text{Si } \epsilon = 0.01 \rightarrow \kappa(\mathbf{A}) > 4 \times 10^4$$

Un error en los datos produce errores 40.000 veces mayor en la solución.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Número de condición

- Una solución aproximada tiene un error: $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$
- De la ecuación se obtiene $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, pero si se reemplaza \mathbf{x} por $\tilde{\mathbf{x}}$ se tiene $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \mathbf{r}$
- Allí \mathbf{r} es el residuo, definido también como: $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}$
- Restando $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ se obtiene:

$$\mathbf{Ae} = \mathbf{r}$$

- Los errores relativos de los datos y la solución están asociados por la misma relación funcional que los datos y la solución.
- Puede verse que

$$\|\mathbf{r}\| \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{Ae}\| \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{b}\|$$

De donde

$$\frac{1}{\kappa(\mathbf{A})} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Victorio E. Sonzogni

Métodos Directos

Número de condición

- Juntando esto con la expresión obtenida en transparencias anteriores se obtienen cotas superiores e inferiores para el error en la solución:

$$\frac{1}{\kappa(\mathbf{A})} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Si $\kappa(\mathbf{A})$ pequeño (o moderado) \rightarrow *matriz bien condicionada*
- Si $\kappa(\mathbf{A})$ grande \rightarrow *matriz mal condicionada*

Resumen

En este capítulo hemos visto:

- Los métodos *directos* de resolución de SEAL
- En particular:
 - el método de eliminación de Gauss
 - factorización (o descomposición) **LU**
 - una particularización de **LU** para matrices simétricas: el método de Cholesky
- Hicimos un conteo de operaciones de estos métodos observando que el número de operaciones requeridas son de $O(n^3)$ lo que los hace inviables para sistemas muy grandes.
- Vimos luego como calcular *normas* de vectores y matrices, *radio espectral* y *número de condición* de una matriz y la implicancia de este último en la solución del sistema.