Mecánica del Continuo
Trabajo Práctico Nº9
Ecuaciones de Campo
y
Condiciones de Contorno

Darién Julián Ramírez

Ejercicio 1

Sea V el volumen encerrado por la superficie S cuya normal saliente unitaria es ν; y sea x el vector posición en un punto en V. Usando el *teorema de Gauss* y notación indicial mostrar que:

Teorema de Gauss (transforma integrales de superficie en integrales de volumen):

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S A\nu_i dS$$

a.

$$\int_S x_i \nu_j dS = V\delta_{ij}$$

$$\begin{aligned}\int_S x_i \nu_j dS &= \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dV \\ &= \int_V \delta_{ij}\, dV \\ &= \delta_{ij} \int_V dV \\ &= \delta_{ij} V\end{aligned} \qquad\qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

b.

$$\int_S \nu \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) dS = 2V\mathbf{a}; \qquad \mathbf{a} = \textit{vector arbitrario constante independiente de } x$$

$$
\begin{aligned}
\int_S \nu \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x})\, dS &= \int_S \varepsilon_{ijk}\nu_j(\mathbf{a} \times \mathbf{x})_k\, dS \\
&= \int_S \varepsilon_{ijk}\nu_j\varepsilon_{kem}a_e x_m\, dS \\
&= \int_S \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}\nu_j a_e x_m\, dS \\
&= \int_S \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kem}\nu_j a_e x_m\, dS \\
&= \int_S (\delta_{ie}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{je})\nu_j a_e x_m\, dS \\
&= \int_S (\delta_{ie}\delta_{jm}\nu_j a_e x_m - \delta_{im}\delta_{je}\nu_j a_e x_m)\, dS \\
&= \int_S (\delta_{jm}\nu_j a_i x_m - \delta_{je}\nu_j a_e x_i)\, dS \\
&= \int_S (\nu_j a_i x_j - \nu_j a_j x_i)\, dS \\
&= \int_S \nu_j a_i x_j\, dS - \int_S \nu_j a_j x_i\, dS \\
&= \int_S a_i x_j \nu_j\, dS - \int_S a_j x_i \nu_j\, dS \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(a_i x_j)\, dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j x_i)\, dV
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x_j}(a_i x_j) = a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = a_i \delta_{jj} = 3a_i
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x_j}(a_j x_i) = a_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = a_j \delta_{ij} = a_i
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_V 3a_i\, dV - \int_V a_i\, dV \\
&= 3a_i \int_V dV - a_i \int_V dV \\
&= 3a_i V - a_i V \\
&= 2a_i V \\
&= 2\mathbf{a}V
\end{aligned}
$$

c.

$$
\int_S \lambda \mathbf{w} \nu\, dS = \int_V \mathbf{w} \cdot \nabla \lambda dV; \qquad \mathbf{w} = rot(\mathbf{v})
$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) =$ *función vectorial arbitraria*

$\lambda = \lambda(\mathbf{x}) =$ *función escalar arbitraria*

$$
\begin{aligned}
\int_S \lambda \mathbf{w}\nu \, dS &= \int_S \lambda w_i \nu_i \, dS \\
&= \int_S \lambda (\nabla \times \mathbf{v})_i \nu_i \, dS \\
&= \int_S \lambda \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \nu_i \, dS \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) dV \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ijk} \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) dV \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial v_k^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) dV \\
&= \int_V \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \lambda \frac{\partial v_k^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) dV
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \lambda \frac{\partial v_k^2}{\partial x_i \partial x_j} &= \varepsilon_{ijk} \lambda \partial v_{k,ij} \\
&= \varepsilon_{ijk} \lambda \left(\frac{1}{2} \partial v_{k,ij} + \frac{1}{2} \partial v_{k,ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lambda \left(\varepsilon_{ijk} \partial v_{k,ij} + \varepsilon_{ijk} \partial v_{k,ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lambda \left(\varepsilon_{ijk} \partial v_{k,ij} + \varepsilon_{jik} \partial v_{k,ji} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lambda \left(\partial v_{k,ij} - \partial v_{k,ji} \right) & \partial v_{k,ij} = \partial v_{k,ji} \\
&= \frac{1}{2} \lambda \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, dV \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \, dV \\
&= \int_V (\nabla \times \mathbf{v}) \nabla \lambda \, dV \\
&= \int_V \mathbf{w} \cdot \nabla \lambda \, dV
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2

Sea el movimiento de un cierto medio continuo descrito por las ecuaciones:

$$
x_1 = a_1 e^{-t} \qquad x_2 = a_2 e^{t} \qquad x_3 = a_3 + a_2(e^{-t} - 1)
$$

El campo de temperaturas en dicho medio está dado por:

$$
T(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3)
$$

Calcule la derivada material de la temperatura en ese medio.

....

Derivada material:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \nu \cdot \nabla A = \frac{\partial A}{\partial t} + \nu_i \cdot \frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\nu_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + \nu_3 \frac{\partial A}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

$$a_1 = x_1 e^t \qquad \nu_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial t} = -a_1 e^{-t} = -x_1$$

$$a_2 = x_2 e^{-t} \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t} = a_2 e^t = x_2$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = -a_2 e^{-t} = -x_2 e^{-2t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = e^{-t}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = -2e^{-t}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = 3e^{-t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{DT}{Dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \nu_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \\
&= -e^{-t}(x_1 - 2x_2 + 3x_3) + \left(-x_1 \cdot e^{-t} + x_2 \cdot (-2e^{-t}) + (-x_2 e^{-2t}) \cdot 3e^{-t}\right) \\
&= -x_1 e^{-t} + 2x_2 e^{-t} - 3x_3 e^{-t} - x_1 e^{-t} - 2x_2 e^{-t} - 3x_2 e^{-2t} e^{-t} \\
&= -2x_1 e^{-t} - 3x_3 e^{-t} - 3x_2 e^{-2t} e^{-t} \\
&= (-2x_1 - 3x_3 - 3x_2 e^{-2t}) e^{-t}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Dos componentes del campo de velocidad de un fluido son conocidas para una región $-2 \leq x, y, z \leq 2$:

$$u = (1 - y^2)(a + bx + cx^2) \qquad w = 0$$

El fluido es incompresible. ¿Cuál es la componente v en la dirección del eje y?

. . . .

Ecuaciones de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} = 0 \qquad \textit{Si el fluido es incompresible la densidad es constante.} \qquad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\nu_j = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \nu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (1 - y^2)(b + 2cx) \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho\frac{\partial\nu_j}{\partial x_j} = 0$$
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
v = \int_{-2}^{2}\frac{\partial v}{\partial y}dy &= -\int_{-2}^{2}\frac{\partial u}{\partial x}dy \\
&= -(b+2cx)\int_{-2}^{2}(1-y^2)dy \\
&= -(b+2cx)\left(\int_{-2}^{2}dy - \int_{-2}^{2}y^2dy\right) \\
&= -(b+2cx)\left(y|_{-2}^{2} - \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-2}^{2}\right) \\
&= -(b+2cx)\left(4-\frac{16}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}(b+2cx)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Sea el campo de temperatura del fluido descrito en el problema anterior:

$$T = T_0e^{-kt}\sin{(\alpha x)}\cos{(\beta y)}$$

Encuentre la derivada material de la temperatura de una partícula ubicada en el origen $x = y = z = 0$. Halle lo mismo para una partícula en $x = y = z = 1$.

. . . .

Derivada material:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \nu\cdot\nabla A = \frac{\partial A}{\partial t} + \nu_i\cdot\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\nu_1\frac{\partial A}{\partial x_1} + \nu_2\frac{\partial A}{\partial x_2} + \nu_3\frac{\partial A}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -kT_0 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{-kt}$$

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= u = (1 - y^2)(a + bx + cx^2) \\
\nu_2 &= v = \frac{4}{3}(b + 2cx) \\
\nu_3 &= w = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x_1} &= \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T_0 e^{-kt} \cos(\beta y) \cos(\alpha x) \\
\frac{\partial T}{\partial x_2} &= \frac{\partial T}{\partial y} = -\beta T_0 e^{-kt} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
\frac{\partial T}{\partial x_3} &= \frac{\partial T}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \nu_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} &= -kT_0 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{-kt} \\
&+ ((1 - y^2)(a + bx + cx^2) \cdot \alpha T_0 e^{-kt} \cos(\beta y) \cos(\alpha x) \\
&+ \frac{4}{3}(b + 2cx) \cdot (-\beta T_0 e^{-kt} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)))
\end{aligned}$$

Para $(x = y = z = 0) = a \cdot \alpha T_0 e^{-kt}$

Para $(x = y = z = 1) = \frac{4}{3}(b + 2c) \cdot (-\beta T_0 e^{-kt} \sin\alpha \sin\beta)$

Ejercicio 5

Considere el momento de todas las fuerzas aplicadas alrededor del origen del sistema de coordenadas $O - x_1x_2x_3$ en un medio continuo V encerrado por la superficie S de normal saliente unitaria ν:

$$L_i = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \overset{\nu}{T_k} \, dS$$

y el *momento de momentum*

$$H_i = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho \nu_k dV$$

donde ν es la velocidad y ρ es la densidad del continuo. Verifique que el equilibrio de momentos puede expresarse como:

$$\frac{D}{Dt} H_i = L_i$$

Luego, utilice la *fórmula de Cauchy*, el *teorema de Gauss* y la *ecuación Euleriana del movimiento* para mostrar que

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0$$

. . . .

$$\frac{D}{Dt}H_i - L_i = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}H_i &= \frac{D}{Dt}\int_V A\,dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(A\nu_j)dV \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}x_j\rho\nu_k)dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_e}(\varepsilon_{ijk}x_j\rho\nu_k\nu_e)dV\end{aligned}$$

Obviando la integral y tomando el primer término

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}x_j\rho\nu_k) &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial t}(x_j\rho\nu_k) \\ &= \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\rho\nu_k + x_j\frac{\partial \rho}{\partial t}\nu_k + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial t}\right) && \frac{\partial x_j}{\partial t} = 0 \\ &= \varepsilon_{ijk}\left(x_j\frac{\partial \rho}{\partial t}\nu_k + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial t}\right) \\ &= \varepsilon_{ijk}x_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\nu_k + \rho\frac{\partial \nu_k}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Obviando la integral y tomando el segundo término

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_e}(\varepsilon_{ijk}x_j\rho\nu_k\nu_e) &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_e}(x_j\rho\nu_k\nu_e) \\ &= \varepsilon_{ijk}\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_e}\rho + x_j\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\right)\nu_k\nu_e + x_j\rho\left(\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + \nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right)\right) \\ &= \varepsilon_{ijk}\left(\delta_{je}\rho\nu_k\nu_e + x_j\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\nu_k\nu_e + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + x_j\rho\nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right) \\ &= \varepsilon_{ijk}\left(\rho\nu_k\nu_j + x_j\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\nu_k\nu_e + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + x_j\rho\nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right) \\ &= \varepsilon_{ijk}\rho\nu_k\nu_j + \varepsilon_{ijk}\left(x_j\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\nu_k\nu_e + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + x_j\rho\nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right) \\ &= \rho\varepsilon_{ijk}\nu_j\nu_k + \varepsilon_{ijk}\left(x_j\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\nu_k\nu_e + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + x_j\rho\nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right) \\ &= \rho(\nu\times\nu) + \varepsilon_{ijk}\left(x_j\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\nu_k\nu_e + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + x_j\rho\nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right) && (\nu\times\nu) = 0 \\ &= \varepsilon_{ijk}\left(x_j\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\nu_k\nu_e + x_j\rho\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + x_j\rho\nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right) \\ &= \varepsilon_{ijk}x_j\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_e}\nu_k\nu_e + \rho\frac{\partial \nu_k}{\partial x_e}\nu_e + \rho\nu_k\frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}\right)\end{aligned}$$

Juntando las dos expresiones

$$= \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \nu_k + \rho \frac{\partial \nu_k}{\partial t} \right) + \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_e} \nu_k \nu_e + \rho \frac{\partial \nu_k}{\partial x_e} \nu_e + \rho \nu_k \frac{\partial \nu_e}{\partial x_e} \right)$$

$$= \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \nu_k + \rho \frac{\partial \nu_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_e} \nu_k \nu_e + \rho \frac{\partial \nu_k}{\partial x_e} \nu_e + \rho \nu_k \frac{\partial \nu_e}{\partial x_e} \right)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} \nu_k + \frac{\partial \rho}{\partial x_e} \nu_k \nu_e + \rho \nu_k \frac{\partial \nu_e}{\partial x_e}$$

$$= \nu_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_e} \nu_e + \rho \frac{\partial \nu_e}{\partial x_e} \right) \quad \textit{Ecuación de continuidad}$$

$$= \nu_k \cdot 0$$

$$= 0$$

$$= \rho \frac{\partial \nu_k}{\partial t} + \rho \frac{\partial \nu_k}{\partial x_e} \nu_e$$

$$= \rho \left(\frac{\partial \nu_k}{\partial t} + \frac{\partial \nu_k}{\partial x_e} \nu_e \right) \quad \textit{Ecuación de movimiento}$$

$$= \rho \cdot 0$$

$$= 0$$

Ecuaciones de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nu_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} = 0$$

Ecuación de movimiento:

$$\rho \frac{D\nu_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial t} + \nu_j \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

$$\begin{aligned}
L_i &= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \overset{\nu}{T}_k \, dS & \overset{\nu}{T}_k = \sigma_{ke}\nu_e \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{ke}\nu_e dS & \textit{Teorema de Gauss} \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_e}(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{ke}) dV \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_e}(x_j \sigma_{ke}) dV \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_V \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_e}\sigma_{ke} + x_j \frac{\partial \sigma_{ke}}{\partial x_e} \right) dV & \frac{\partial x_j}{\partial x_e} = \delta_{je} \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_V \left(\varepsilon_{ijk}\delta_{je}\sigma_{ke} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{ke}}{\partial x_e} \right) dV \\
&= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_V \left(\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{ke}}{\partial x_e} \right) dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} &= -\varepsilon_{ikj}\sigma_{kj} \\
&= -\varepsilon_{ikm}\sigma_{km} \\
&= -\varepsilon_{ijm}\sigma_{jm} \\
&= -\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} \\
&= -\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} \\
0 &= \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} \\
0 &= 2\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} \\
0 &= \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j X_k dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{ke}}{\partial x_e} dV & \textit{Obviando las integrales} \\
&= \varepsilon_{ijk} x_j X_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{ke}}{\partial x_e} \\
&= \varepsilon_{ijk} x_j \left(X_k + \frac{\partial \sigma_{ke}}{\partial x_e} \right) & \nabla \bullet \sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \\
&= \varepsilon_{ijk} x_j \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Sean:

- La energía cinética $K = \int_V \frac{1}{2}\rho\nu_i\nu_i dV$, donde ν es el vector velocidad y ρ es la densidad del material.
- La energía gravitacional $G = \int_V \rho\phi(x)dV$, donde ϕ es el potencial gravitacional por unidad de masa, supuesto independientemente del tiempo, osea $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$.
- La energía interna $E = \int_V \rho\varepsilon dV$, donde ε es la energía interna por unidad de masa.
- La tasa de cambio de la entrada de calor $\dot{Q} = -\int_S h_i\nu_i dS = -\int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dV$, donde h es el vector de flujo de calor y ν es la normal unitaria saliente.
- La potencia o tasa de cambio del trabajo realizado sobre el cuerpo por las fuerzas de cuerpo no gravitacionales F por unidad de volumen en V y las tracciones $\overset{\nu}{T}$ por unidad de superficie en S:

$$\dot{W} = \int_V F_i \nu_i dV + \int_S \overset{\nu}{T_i} \nu_i dS$$

a. Calcule el balance de energía:

$$\frac{D}{Dt}(K + G + E) = \dot{Q} + \dot{W}$$

Simplifique las ecuaciones considerando las ecuaciones de continuidad, de movimiento, la simetría de σ_{ij} y el hecho de que las fuerzas de cuerpo totales por unidad de volumen resultan $X_i = F_i + g_i$, con $g_i = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ las fuerzas de cuerpo gravitacionales por unidad de volumen, para obtener:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} V_{ij}$$

con $V_{ij} = \frac{(\nu_{i,j} + \nu_{j,i})}{2}$

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \int_V F_i \nu_i dV + \int_S \overset{\nu}{T_i} \nu_i dS \\
&= \int_V F_i \nu_i dV + \int_S \sigma_{ij} \nu_j \nu_i dS \\
&= \int_V F_i \nu_i dV + \int_V (\sigma_{ij} \nu_i)_{,j} \, dV \\
&= \int_V F_i \nu_i dV + \int_V \sigma_{ij} \nu_{i,j} \, dV + \int_V \sigma_{ij,j} \nu_i \, dV \\
&= \int_V (F_i \nu_i + (\sigma_{ij} \nu_i)_{,j}) \, dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\left(\int_V \left(\frac{1}{2}\rho \nu_i \nu_i + \rho \phi(x) + \rho \varepsilon\right) dV\right) = \int_V \Bigg(\frac{D}{Dt}\left(\rho \frac{\nu^2}{2}\right) + \rho \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt}(\rho \phi) + \rho \phi \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} \\
+ \frac{D}{Dt}(\rho \varepsilon) + \rho \varepsilon \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j}\Bigg) dV
\end{aligned}$$

Como debe cumplirse para cualquier volúmen, debe cumplirse la igualdad en el integrando.

$$F_i = X_i + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad F_i \nu_i = x_i \nu_i + \rho \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

b. Suponga que el material obedece a la ley constitutiva (de conducción de calor) de Fourier $h_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i}$, donde T es la temperatura y k la conductividad térmica, que la energía interna es puramente térmica, dada por $\varepsilon = cT$, donde c es la capacidad calorífica por unidad de masa del material, y que el continuo se halla en reposo ($\nu = 0$). Verifique que el balance de energía se reduce a la conocida como ecuación del calor:

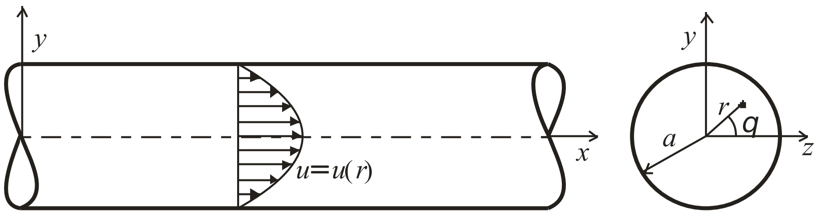
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K \frac{\partial t}{\partial x_i}\right)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)$$

Ejercicio 7

En la figura se muestra el problema del flujo de un fluido incompresible a través de un tubo cilíndrico circular de radio a en posición horizontal. Se asumen condiciones de flujo desarrollado, lejos de la entrada y la salida del tubo.



Suponiendo despreciables las fuerzas de cuerpo, hallar la solución de la forma

$$u = u(r) \qquad v = 0 \qquad w = 0$$

Use la siguiente relación entre el *Laplaciano* de una función f en coordenadas cartesianas (x, y, z) y en coordenadas cilíndricas (x, r, θ):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \cdot \nabla u \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -G$$

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{1}{\rho}G + \nu \nabla^2 u = 0 \qquad \nu = \frac{u}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho}G + \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$G + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{G}{\mu}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{G}{\mu}$$

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = -\int \frac{G}{\mu} r\, dr = -\frac{G^2}{2\mu} + A$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{G}{2\mu}r + \frac{A}{r}$$

$$u(r) = -\frac{G}{4\mu}r^2 + A \ln r + B$$

Sea $A = 0$ entonces salvamos el problema del logaritmo cuando $r = 0$.

$$u(r) = -\frac{G}{4\mu}r^2 + B$$

$$u(r = a) = 0$$

$$u(a) = -\frac{Ga^2}{4\mu} + B = 0 \qquad B = \frac{Ga^2}{4\mu} \qquad u(r) = \frac{G}{4\mu}(a^2 - R^2)$$

Con la solución hallada, mostrar que:

a. La tasa de flujo de masa a través del tubo es $Q = -\frac{\pi a^4 \rho}{8}\nabla^2 u$

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_S \rho v_j \nu_j dS \\
&= \int_S \rho \mu dS \\
&= \int_0^a \rho\mu 2\pi r\, dr \\
&= \int_0^a \frac{\rho G}{4\mu}(a^2 - r^2) 2\pi r\, dr \\
&= \int_0^a \frac{6\pi\rho}{2\mu}\left(a^2 r - r^3\right) dr \\
&= \frac{6\pi\rho}{2\mu}\left(\frac{a^2 r^2}{2}\bigg|_0^a - \frac{r^4}{4}\bigg|_0^a\right) \\
&= \frac{6\pi\rho}{2\mu}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) \\
&= \frac{6\pi\rho}{8\mu} a^4 \\
&= -\frac{\rho\pi a^4 \nabla^2 u}{8}
\end{aligned}
$$

b. La velocidad media es $u_m = -\frac{a^2}{8}\nabla^2 u$

$$
\begin{aligned}
u_m &= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\, d\Omega \\
&= \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2) 2\pi r\, dr \\
&= \frac{G}{2a^2\mu}\left(\frac{a^2 r^2}{2}\bigg|_0^a - \frac{r^4}{4}\bigg|_0^a\right) \\
&= \frac{G a^2}{8\mu} \\
&= -\frac{a^2}{8}\nabla^2 u
\end{aligned}
$$

c. El coeficiente de fricción en la pared es

$$
c_f = \frac{\textit{Tensión cortante}}{\textit{Presión dinámica media}} = \frac{-\mu \frac{\partial u}{\partial r}\,|_{r=a}}{\frac{1}{2}\rho u_m^2} = \frac{16}{R_N}
$$

donde $R_N = \frac{2a\rho u_m}{\mu}$ es un número de *Raynolds*.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{G}{2\mu}r\bigg|_{r=a} \\
&= -\frac{G}{2\mu}a \\
&= \frac{\frac{Ga}{2}}{\frac{1}{2}\rho\frac{a^2}{8}\frac{G}{\mu}u_m} \\
&= \frac{\frac{Ga}{2}}{\frac{\rho}{16}a^2\frac{G}{\mu}u_m} \\
&= \frac{16Ga\mu}{2\rho a^2 G u_m} \\
&= \frac{16\mu}{2\rho a u_m} \\
&= \frac{16}{R_N}
\end{aligned}$$

Apéndice

Teorema de Gauss (transforma integrales de superficie en integrales de volumen):

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S A\nu_i dS \tag{1}$$

Derivada material:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \nu \cdot \nabla A = \frac{\partial A}{\partial t} + \nu_i \cdot \frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\nu_1\frac{\partial A}{\partial x_1} + \nu_2\frac{\partial A}{\partial x_2} + \nu_3\frac{\partial A}{\partial x_3}\right) \tag{2}$$

Raynolds:

$$\frac{D}{Dt}\int_V A\,dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(A\nu_j)dV \tag{3}$$

$$= \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A\frac{\partial \nu_j}{\partial x_j}\right) dV \tag{4}$$

Ecuaciones de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} = 0 \qquad \textit{Si el fluido es incompresible la densidad es constante.} \qquad \frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{5}$$

$$\rho\frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} = 0 \tag{6}$$

Ecuación de movimiento:

$$\rho\frac{D\nu_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \tag{7}$$

Referencias

[1] Y. C. Fung, *A First Course in Continuum Mechanics*, tercera edición, PRENTICE HALL, 1994.