

Transformaciones lineales

Diego Milone
FICH - UNL

Una nueva descripción

Señales

que son

Transformadas

por

Sistemas

Organización de la clase

- ▷ Independencia lineal,
- ▷ Bases y transformaciones,
- ▷ Ortogonalidad y ortonormalidad,
- ▷ El producto interno en las transformaciones,
- ▷ Ejemplos de transformaciones lineales.
- ▷ Bibliografía recomendada

Bases

- ▷ Independencia lineal y conjunto generador
- ▷ Definición de base para un espacio vectorial
- ▷ Cambio de base
 - Ejemplo
 - Beneficios de la ortonormalidad
 - Interpretación gráfica

Independencia lineal y conjuntos generadores

¿Se acuerdan...?

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{x}_i$$

Independencia lineal y conjuntos generadores

¿Se acuerdan...?

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{x}_i$$

¿... y para señales continuas?

Base

Una base es un *CONJUNTO*

Generador

+

Linealmente independiente

Ortogonalidad y ortonormalidad

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j \quad \mathbf{y}$$

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = k \quad \forall i = j$$

Cambio de base

La base canónica:

$$X_e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Cambio de base

La base canónica:

$$X_e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

¿Qué señales forman la base canónica?

¿... y en el caso continuo?

Cambio de base

Otra base ortonormal:

$$X_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$$

¿Cómo podemos pasar una señal de X_e a X_1 ?

Cambio de base

Otra base ortonormal:

$$X_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$$

¿Cómo podemos pasar una señal de X_e a X_1 ?

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1\beta_1 + \mathbf{x}_2\beta_2 + \mathbf{x}_3\beta_3$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle = \beta_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + \beta_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle + \beta_3 \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \rangle$$

Cambio de base: importancia del producto interno!

$$\beta_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle$$

PARECIDO

entre la señal y los elementos de la base.

Cambio de base: notación matricial

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1\beta_1 + \mathbf{x}_2\beta_2 + \mathbf{x}_3\beta_3$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \beta_1 + \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \beta_2 + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \beta_3$$

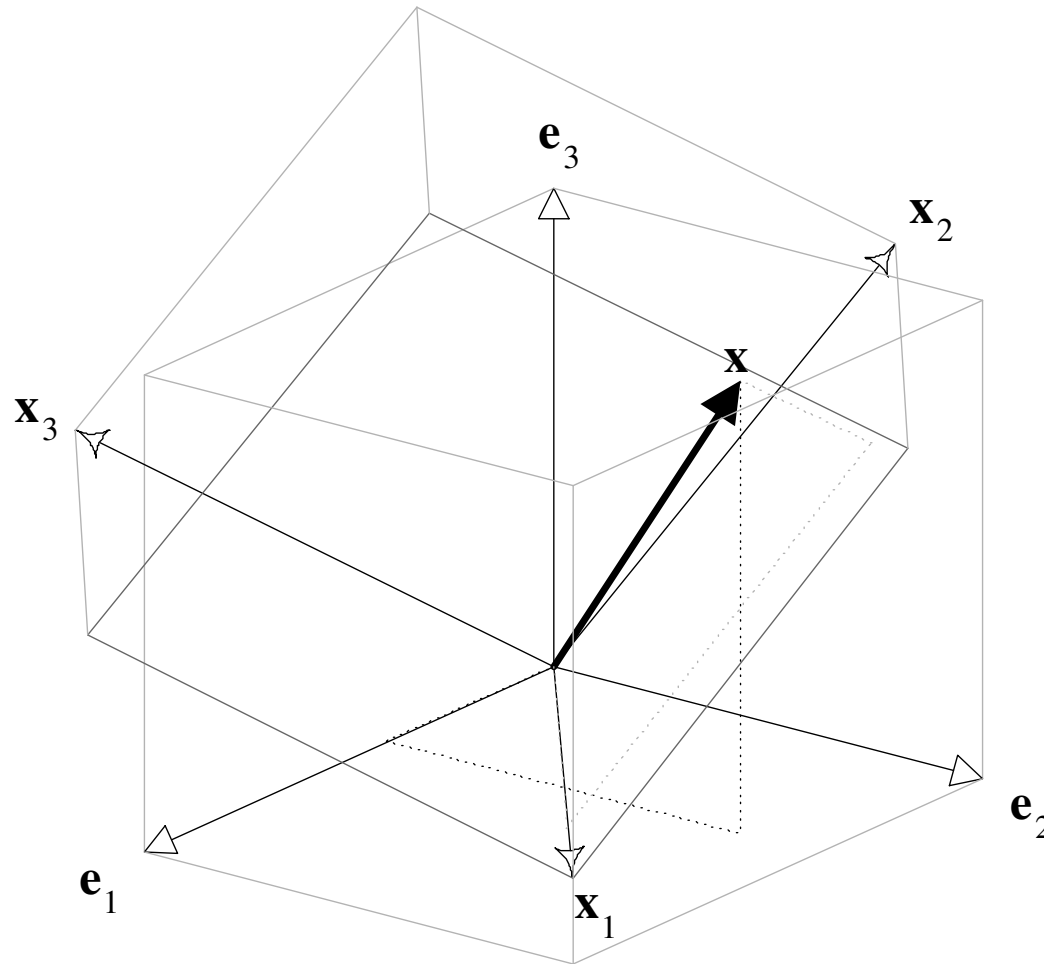
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Cambio de base: notación matricial

$$\mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_{\beta}$$

Un caso particular de TRANSFORMACIÓN LINEAL!

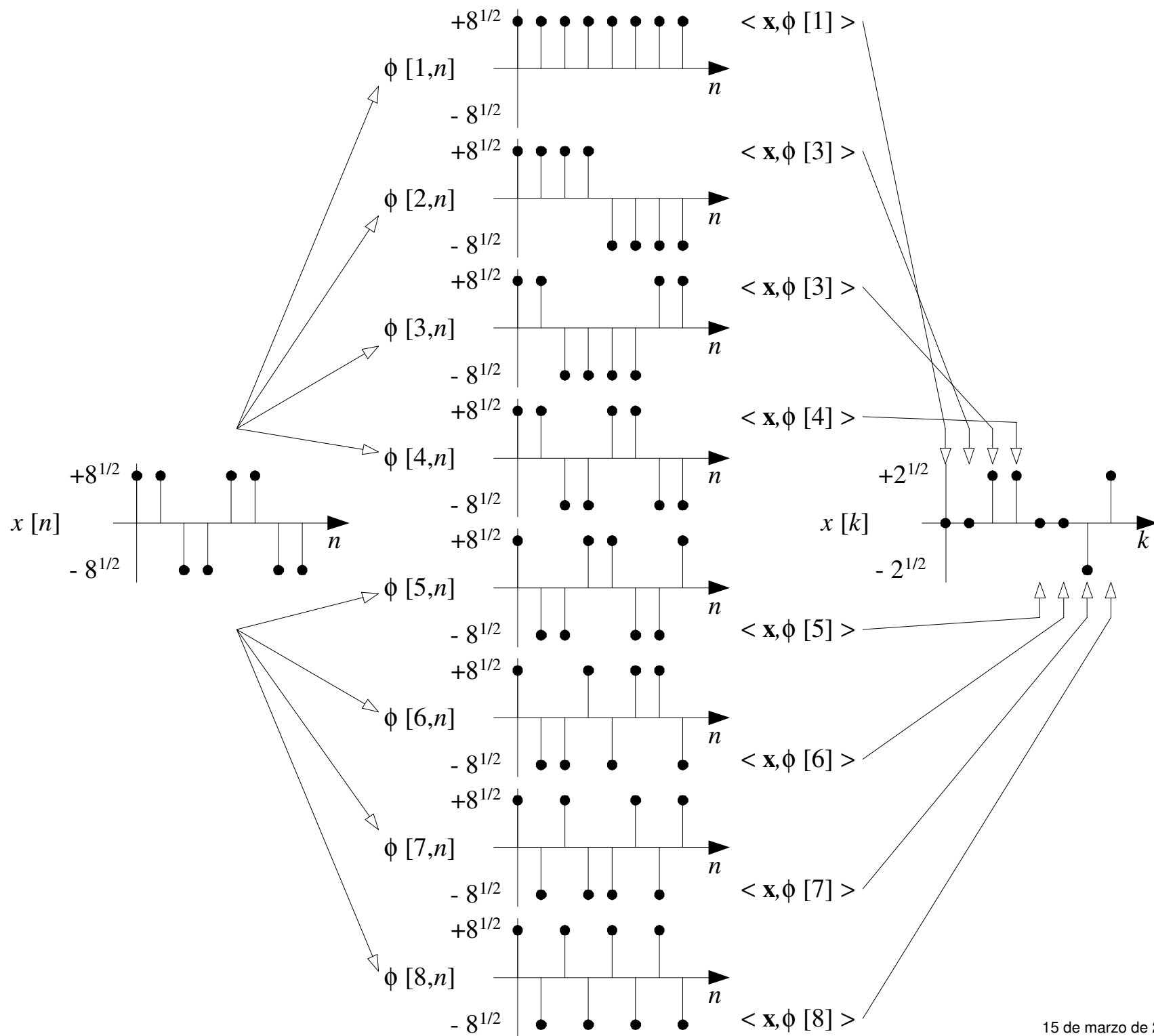
Cambio de base: ¿cambió el tamaño de la señal?



cambio de base = cambio de perspectiva

Transformaciones lineales y producto interno

¿Cuál es el rol del producto interno en las transformaciones lineales?



Transformaciones lineales: discretizaciones...

¿Cómo es la base en cada caso?

▷ $x[n] \rightarrow x[k]$

▷ $x[n] \rightarrow x(f)$

▷ $x(t) \rightarrow x[k]$

▷ $x(t) \rightarrow x(f)$

¿Cómo se hacen los productos internos?

Bibliografía para esta Unidad

El material de estudio provisto para esta Unidad cubre ampliamente la temática. Para profundizar puede consultarse:

- ▷ Franks, Teoría de la señal
- ▷ De Coulon, Signal Theory and Processing
- ▷ Lathi, Modern Digital and Analog Communication Systems

(Las referencias completas se encuentran en la Planificación de Cátedra)