Identificación de Sistemas

Diego Milone

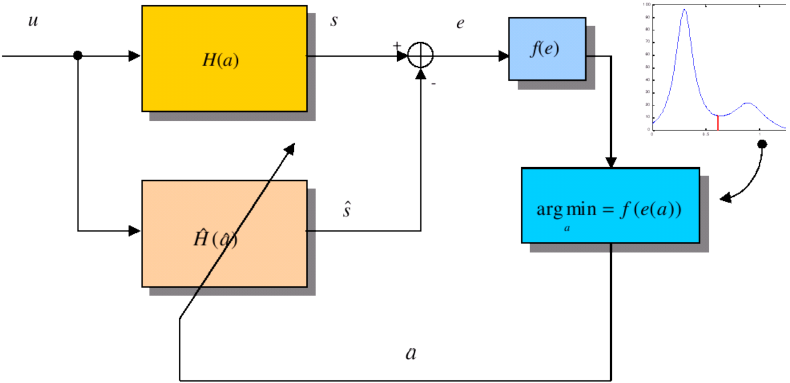
Procesamiento Digital de Señales
Ingeniería Informática FICH-UNL

2 de mayo de 2013

Organización de la clase

Organización de la clase

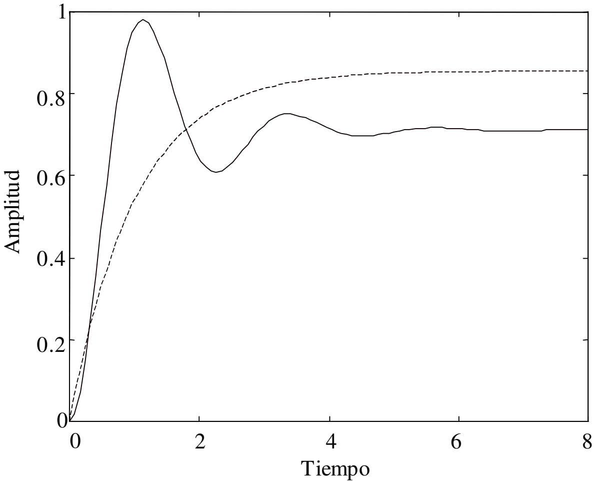
Identificación de sistemas: conceptos básicos



Clasificación de los métodos

- Hipótesis generales
  - Métodos convencionales
  - Métodos no-convencionales
- Análisis de la respuesta en sistemas continuos
  - Análisis en el tiempo
  - Análisis en la frecuencia

Sistemas de 1er y 2do orden



¿Cómo analizamos un sistema de orden 34?

Organización de la clase

Métodos de predicción lineal (LPC)

Estructura general:

- El modelo ARMA, el modelo AR
- Cuadrados mínimos
- Sistemas de Wiener-Hopf
- Determinación de la constante de ganancia G
- Procesos de estimación del orden

El modelo LTI más general

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell u_{n-\ell}$$

$$H(z) = G \frac{1 + \sum\limits_{\ell=1}^{q} b_\ell z^{-\ell}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

Simplificaciones iniciales

$$H(z) = \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}}$$

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n$$

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

Notación vectorial...

$$\hat{s}_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ s_{n-2} \\ \vdots \\ s_{n-k} \\ \vdots \\ s_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$\hat{s}_n = -\mathbf{s}_n^T \mathbf{a}$$

Minimización del error cuadrático

Una medida del error instantáneo:

$$e_n^2 = (s_n - \hat{s}_n)^2 = \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2$$

Una medida del error total (señales determinísticas):

$$\xi^2 = \sum_n e_n^2$$

Buscando el mínimo...

$$\nabla_{\mathbf{a}} \ \xi^2 = 0$$

Resolviendo obtenemos

Resolviendo el gradiente obtenemos:

$$\left(\sum_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right) \mathbf{a} = -\sum_n \mathbf{s}_n s_n$$

Conocido como sistema de Wiener-Hopf:

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = -\mathbf{r}$$

Demostrar

- $\mathbf{Ra} = -\mathbf{r}$ a partir de $\nabla_{\mathbf{a}} \ \varepsilon^2 = 0$
- $\mathbf{r}$ es la autocorrelación de $\mathbf{s}_n$
- $\mathbf{R}$ es la matriz de autocorrelación de $\mathbf{s}_n$
- $\mathbf{R}$ es Toeplitz $(R_{i,j} = r_{i-j})$

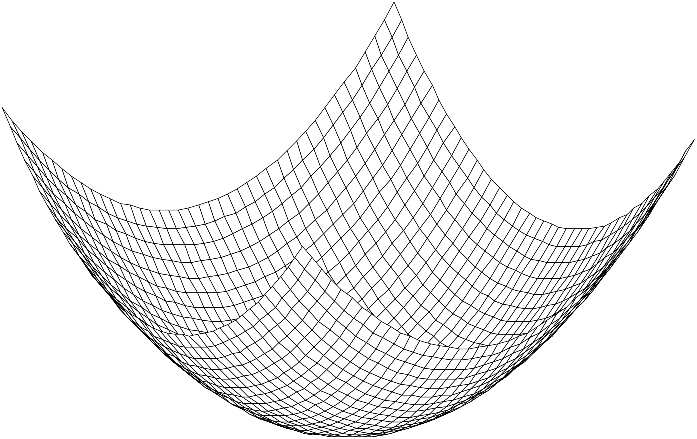
¿Tiene ξ^2 un único mínimo?

Supóngase s_n estacionaria:

$$\xi^2 = \mathcal{E}\left[e_n^2\right] = \mathcal{E}\left[s_n^2\right] + \mathbf{a}^T 2\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right] + \mathbf{a}^T \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a}$$

¿Tiene ξ^2 un único mínimo?

Si el sistema fuera de 2do orden $(\xi^2(a_1, a_2))$



¿Tiene ξ^2 un único mínimo?

Buscando el mínimo:

$$\xi^2 = \mathcal{E}\left[e_n^2\right] = \mathcal{E}\left[s_n^2\right] + \mathbf{a}^T 2\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right] + \mathbf{a}^T \mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a}$$

$$\nabla \xi^2 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{E}\left[e_n^2\right]}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \mathcal{E}\left[e_n^2\right]}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}\left[e_n^2\right]}{\partial a_p} \end{array} \right\} = 2\mathcal{E}\left[s_n \mathbf{s}_n\right] + 2\mathcal{E}\left[\mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T\right] \mathbf{a} = 0$$

Resolución del sistema de Wiener-Hopf

Algoritmo de Levinson-Durbin

A partir de $E_0 = r_0$:

$$\text{Para} 1 \leq i \leq p \rightarrow \begin{cases} k_i = -\frac{1}{E_{i-1}} \left[r_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i-1} r_{i-j} \right] \\ a_{i,i} = k_i \\ a_{j,i} = a_{j,i-1} + k_i a_{i-j,i-1}, \quad 1 \leq j \leq i-1 \\ E_i = E_{i-1}(1 - k_i^2) \end{cases}$$

Determinación de la constante de ganancia G

En la simplificación inicial hicimos:

$$s_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k} + G u_n \approx -\sum_{k=1}^{p} a_k s_{n-k}$$

por lo tanto al minimizar el error está acodado según:

$$e_n = s_n - \hat{s}_n \geq G u_n$$

Determinación de la constante de ganancia G

Si consideramos una entrada blanca o impulsiva:

$$h_n = -\sum_{k=1}^{p} a_k h_{n-k} + G\,\delta_n$$

se puede demostrar que:

$$\mathbf{r}^T\,\mathbf{a} = -r_0 + G^2$$

de lo que concluimos:

$$G^2 = \mathbf{r}^T\mathbf{a} + r_0 = E_p$$

Estimación del orden: error de predicción final

Se busca p tal que E_p sea mínimo.

Definimos el error normalizado como:

$$V_p = \frac{E_p}{r_0}$$

Incrementamos p hasta satisfacer:

$$1 - \frac{V_{p+1}}{V_p} < \gamma$$

(V_p decrece monotónicamente con p)

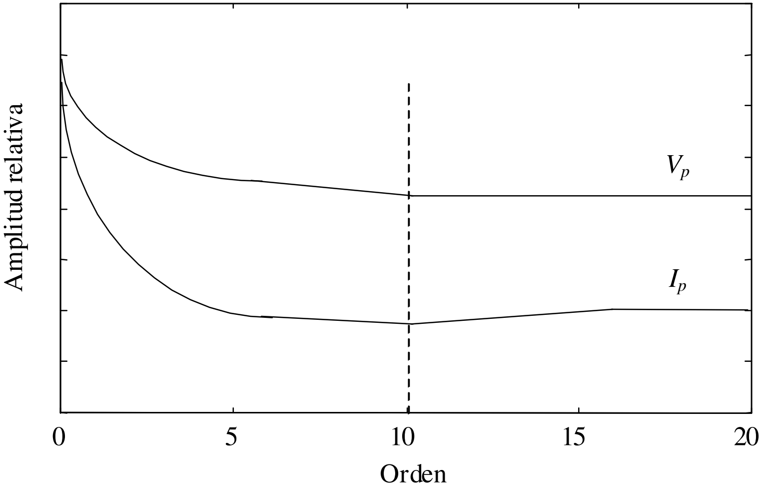
Estimación del orden: criterio de Akaike

Basado en teoría de la información define:

$$I_p = \log V_p + \frac{2p}{N_e}$$

Este criterio provee un mínimo en el p óptimo.

Estimación del orden: comparación



Organización de la clase

Método adaptativo de Widrow

Consideremos s_n no-estacionaria y volvamos al error cuadrático instantáneo:

$$e_n^2 = (s_n - \hat{s}_n)^2 = \left(s_n + \mathbf{s}_n^T \mathbf{a}\right)^2 = \xi_n^2$$

Tenemos que buscar el mínimo en cada instante n:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mu(-\nabla \xi_n^2)$$

Método adaptativo de Widrow

$$\hat{\nabla}\xi_n^2 = \frac{\partial\, e_n^2}{\partial\, \mathbf{a}_n} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial e_n^2}{\partial a_{1,n}} \\ \frac{\partial e_n^2}{\partial a_{2,n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial e_n^2}{\partial a_{p,n}} \end{array} \right\} = 2e_n \frac{\partial\left(s_n + \mathbf{a}_n^T \mathbf{s}_n\right)}{\partial \mathbf{a}_n}$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n - 2\mu e_n \mathbf{s}_n$$

con $0 < \mu < \frac{1}{T(\mathbf{R})}$

Bibliografía básica

- J. Makhoul, “Linear Prediction: A Tuturial Review,” Proc. IEEE, vol 63, no. 4, pp. 561-580, apr. 1975.
- L. R. Rabiner y B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Prentice Hall, chap. 12, 1975.
- J. R. Deller, J. G. Proakis, J. H. Hansen, Discrete-Time Processing of Speech Signals, Prentice Hall, chap. 5, 1993.