Mecánica del Continuo
Trabajo Práctico Nº6
Campos de Velocidad y Condiciones de Compatibilidad

Darién Julián Ramírez

Ejercicio 1

Considere el movimiento de un fluido con componentes de velocidad u y v derivadas de un potencial Φ:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

mientras que la componente w es idénticamente cero. Dibuje los campos de velocidad para los potenciales siguientes:

a) $\Phi = \frac{1}{4\pi}\log(x^2+y^2) = \frac{1}{2\pi}\log r; \quad r^2 = x^2+y^2$

b) $\Phi = x$

c) $\Phi = Ar^n\cos(n\theta); \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

d) $\Phi = \frac{\cos\theta}{r}$

Se recomienda presentar los resultados utilizando software como Matlab® u Octave(GNU).

Nota: Un flujo de un campo cuyas componentes de velocidad se obtienen de una función potencial $\Phi(x,y,z)$ es llamado *flujo potencial*. En los ejemplos mencionados en este problema tenemos varios casos en los cuales Φ se expresa en términos de coordenadas polares r,θ. Si notamos que el vector velocidad (u,v) es exactamente el gradiente de una función escalar $\Phi(x,y,z)$, vemos por análisis vectorial que las componentes de velocidad en coordenadas polares son:

$$u_r = \frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial \theta}$$

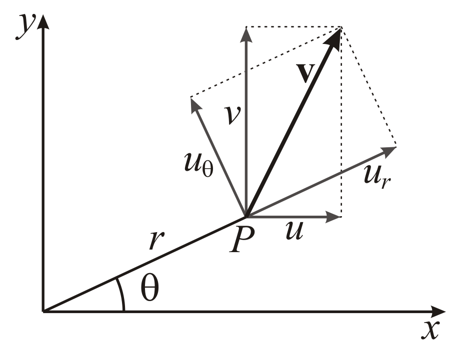


Figura 1: Relación entre condenadas cartesianas y polares.

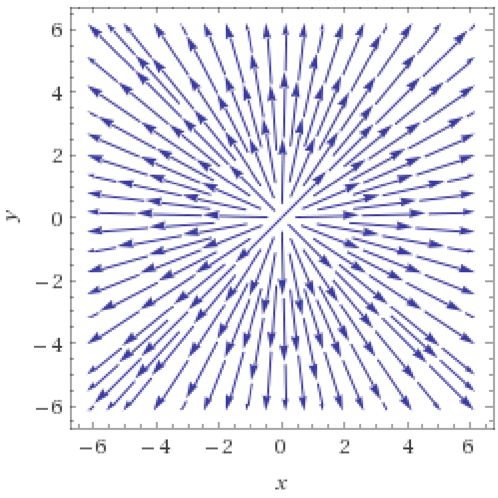
donde u_r, u_θ son las componentes de velocidad en las direcciones radial y tangencial, respectivamente. Quedan relacionadas con las componentes en coordenadas Cartesianas de esta forma:

$$u_r = \frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u\cos\theta + v\sin\theta$$

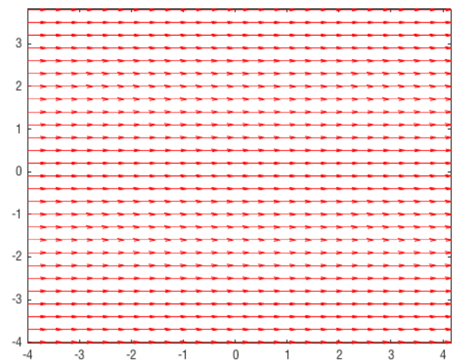
$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = -u\sin\theta + v\cos\theta$$

....

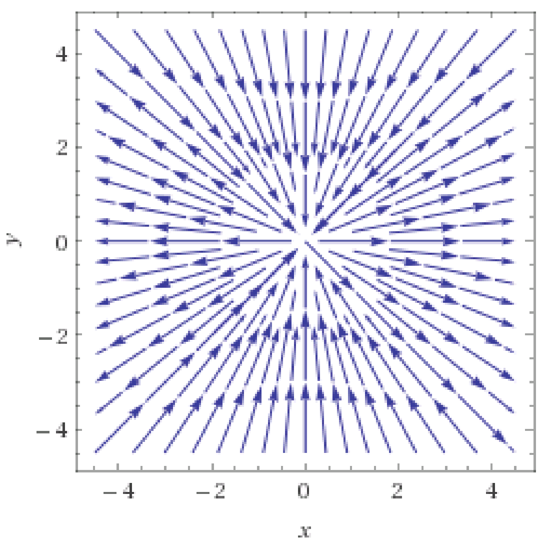
a)
$$u = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$v = \frac{1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$



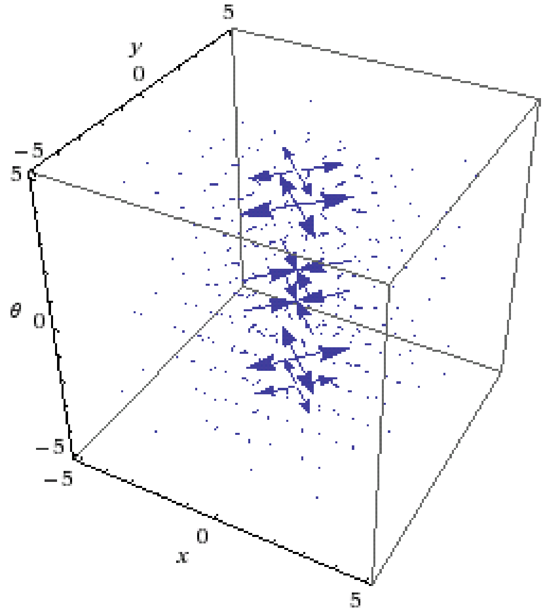
b)
$$u = 1$$
$$v = 0$$



c)
$$u = 2An\cos(n\theta)(x^2+y^2)^{n-1}x$$
$$v = 2An\cos(n\theta)(x^2+y^2)^{n-1}y$$



d)
$$u = -\frac{x\cos\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$v = -\frac{y\cos\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Ejercicio 2

El movimiento de un fluido incompresible en dos dimensiones puede obtenerse de una *función de corriente* Ψ del siguiente modo:

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial\Psi}{\partial x}; \quad w = 0$$

Esquematice las líneas de corriente $\Psi = cte$ para las siguientes funciones y compare los resultados con los del problema anterior:

a) $\Psi = c\theta$

b) $\Psi = y$

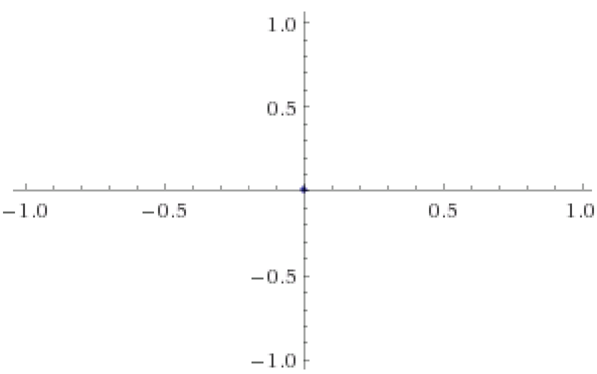
c) $\Psi = Ar^n\sin(n\theta)$

d) $\Psi = -\frac{\sin\theta}{r}$

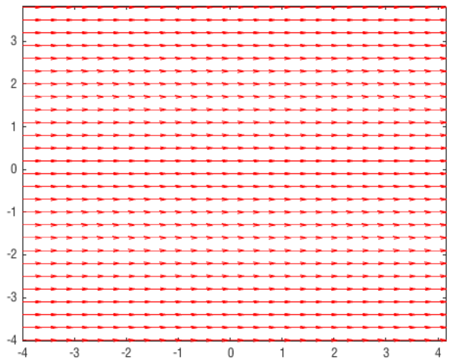
Superponga las gráficas de estas funciones con su correspondiente campo del ejercicio 1.

....

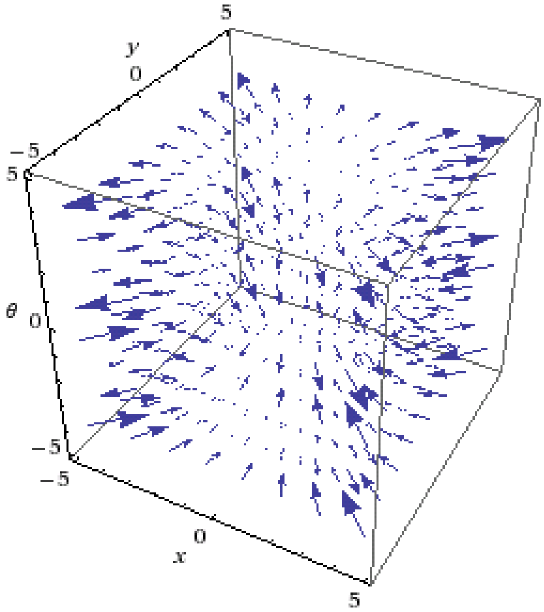
a)
$$u = 0$$
$$v = 0$$



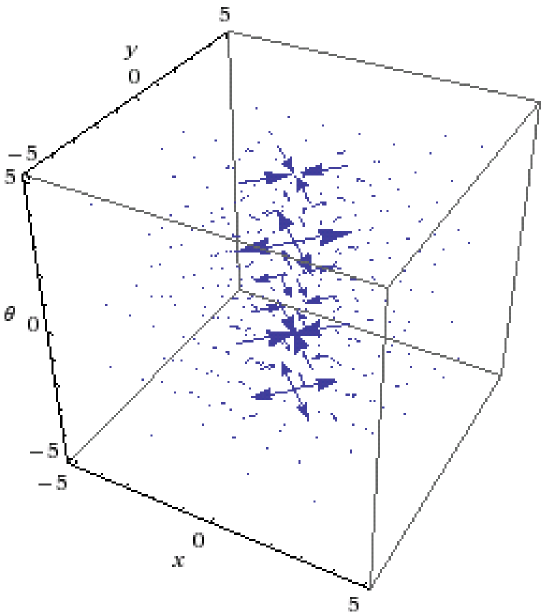
b)
$$
\begin{aligned}
u &= -1 \\
v &= 0
\end{aligned}
$$



c)
$$
\begin{aligned}
u &= 2An\sin{(n\theta)}(x^2+y^2)^{n-1}x \\
v &= 2An\sin{(n\theta)}(x^2+y^2)^{n-1}y
\end{aligned}
$$



d)
$$
\begin{aligned}
u &= \frac{x\sin\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
v &= \frac{y\sin\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$



Ejercicio 3

Para los flujos descritos por los potenciales listados en el ejercicio de arriba:

a) Muestre que la vorticidad desaparece en cada caso.

b) Obtenga las expresiones para el tensor tasa de deformación.

....

a) *Tensor de vorticidad:*

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

Ψa.

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Ψb.

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Ψc.

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(4A(n-1)nxy\sin(n\theta)(x^2+y^2)^{n-2} - 4A(n-1)nxy\sin(n\theta)(x^2+y^2)^{n-2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Ψd.

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3xy\sin\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3xy\sin\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

b) *Tensor tasa de deformación:*

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Ψa.

$$V_{ij} = \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

Ψb.

$$V_{ij} = \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

Ψc.

$$\begin{aligned}V_{ij} &= \frac{1}{2}\left(4A(n-1)nxy\sin(n\theta)(x^2+y^2)^{n-2} + 4A(n-1)nxy\sin(n\theta)(x^2+y^2)^{n-2}\right)\\ &= 4A(n-1)nxy\sin(n\theta)(x^2+y^2)^{n-2}\end{aligned}$$

Ψd.

$$\begin{aligned}V_{ij} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3xy\sin\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3xy\sin\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\\ &= -\frac{3xy\sin\theta}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Suponga que se nos da el siguiente campo de desplazamiento definido en un círculo unitario:

$$u = ax^2 + bxy + c$$
$$v = by^2 + cx + mz$$
$$w = mz^3$$

¿Existe compatibilidad?

....

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right)$$
$$2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}$$
$$2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}$$
$$2\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}$$

Se ha verificado utilizando cálculo simbólico.

Ejercicio 5

Suponga que el campo de desplazamiento en un círculo unitario es:

$$u = ar \log \theta$$
$$v = ar^2 + c \sin \theta$$
$$w = 0$$

a) ¿El campo es compatible?

b) Grafique el campo de desplazamientos e interprete los resultados.

Ayuda: Convertir el campo de desplazamientos a coordenadas polares y luego utilizar la siguiente condición de compatibilidad:

$$S_{zz} \equiv \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta r}}{\partial \theta \partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r}\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} = 0$$

También puede verificar esta ecuación de compatibilidad utilizando sofware simbólico (Maple®, Mathematica®, Matlab®, Octave(GNU) ó Maxima(GNU)).

....

Como el campo es continuo y diferenciable, verifica compatibilidad. Como el $\ln \theta$ en u posee discontinuidades en $\theta = 0$, no es un campo de desplazamientos válido.

u y v dependen de r y θ pero generan sus componentes proyectadas en ejes cartesianos.

Se restringe el problema físico a $0 < \theta \leq 2\pi$ y se evita la discontinuidad en cero y la doble asignación de desplazamientos para $\theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 6

Rotación infinitesimal y vorticidad. Sean, $u(x)$ $v(x)$ campos de desplazamiento y velocidad, respectivamente. Definimos el *tensor de spin* o de *rotación infinitesimal* como:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Para este tensor, construimos un vector dual (vector de rotación):

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\omega_{ij} \implies \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{1}$$

Por otra parte, definimos el tensor de vorticidad como:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

Para este tensor, construimos un vector dual (vector de vorticidad) con una convención ligeramente distinta a la anterior:

$$\Omega_k = \varepsilon_{kij}\Omega_{ij} \implies \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k \tag{2}$$

(Notar que esta definición está cambiada en la tercera edición de Fung respecto de la segunda edición).

a. Demostrar que el vector de rotación o de spin puede interpretarse físicamente como la rotación que sufre el entorno del punto considerado.

$$\begin{aligned}
du_i &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j + \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}dx_j - \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}dx_j \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)dx_j \\
&= -\omega_{ij}dx_j + e_{ij}dx_j && e_{ij} = 0 \\
&= -\omega_{ij}dx_j && \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \\
&= -\varepsilon_{ijk}\omega_k dx_j \\
&= \varepsilon_{ikj}\omega_k dx_j \\
&= (\omega \times \mathbf{dx})_i
\end{aligned}$$

b. Demostrar la relación que da el tensor de rotación en función de su vector dual (Ecuación: 1).

Demostrar que $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k$ donde $\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\omega_{ij}$.

$$
\begin{aligned}
\omega_{ij} &= \varepsilon_{ijk}\omega_k && \textit{Por definición de vector de rotación infinitesimal.}\\
&= \varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\varepsilon_{kem}\omega_{em} && \textit{Reordenando.}\\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}\omega_{em} && \textit{Permutando el primer épsilon.}\\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kem}\omega_{em} && \textit{Identidad épsilon-delta.}\\
&= \frac{1}{2}(\delta_{ie}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{je})\omega_{em} && \textit{Distribuyendo.}\\
&= \frac{1}{2}(\delta_{ie}\delta_{jm}\omega_{em} - \delta_{im}\delta_{je}\omega_{em}) && \textit{Contrayendo índices.}\\
&= \frac{1}{2}(\delta_{ie}\omega_{ej} - \delta_{im}\omega_{jm}) && \textit{Contrayendo índices.}\\
&= \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) && \textit{Antisimetría del tensor de rotación infinitesimal.}\\
&= \frac{1}{2}(\omega_{ij} + \omega_{ij}) && \textit{Sumando.}\\
&= \frac{1}{2}2\omega_{ij} && \textit{Simplificando.}\\
&= \omega_{ij}
\end{aligned}
$$

c. Demostrar la relación que da el tensor de vorticidad en función de su vector dual (Ecuación 2).

Demostrar que $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k$ donde $\Omega_k = \varepsilon_{kij}\Omega_{ij}$.

$$
\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k && \textit{Por definición de vector de vorticidad.}\\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kem}\Omega_{em} && \textit{Permutando el primer épsilon.}\\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kem}\Omega_{em} && \textit{Identidad épsilon-delta.}\\
&= \frac{1}{2}(\delta_{ie}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{je})\Omega_{em} && \textit{Distribuyendo.}\\
&= \frac{1}{2}(\delta_{ie}\delta_{jm}\Omega_{em} - \delta_{im}\delta_{je}\Omega_{em}) && \textit{Contrayendo índices.}\\
&= \frac{1}{2}(\delta_{ie}\Omega_{ej} - \delta_{im}\Omega_{jm}) && \textit{Contrayendo índices.}\\
&= \frac{1}{2}(\Omega_{ij} - \Omega_{ji}) && \textit{Antisimetría del tensor vorticidad.}\\
&= \frac{1}{2}(\Omega_{ij} + \Omega_{ij}) && \textit{Sumando.}\\
&= \frac{1}{2}2\Omega_{ij} && \textit{Simplificando.}\\
&= \Omega_{ij}
\end{aligned}
$$

d. Demostrar que: $\mathbf{\Omega} = \mathbf{rot}(\mathbf{v})$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{rot}(\mathbf{v}) &= \nabla \times \mathbf{v} \\
&= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \\
&= \varepsilon_{ijk}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) \\
&= \varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)+\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) \\
&= \varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}+\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) \\
&= \varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}+\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\varepsilon_{ikj}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) \\
&= \varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}+\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) \\
&= \varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}+\frac{1}{2}\cdot 0 \\
&= \varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \\
&= \Omega_i \\
&= \mathbf{\Omega}
\end{aligned}
$$

e. Dar la interpretación física del vector vorticidad.

$$
\begin{aligned}
dv_i &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j+\frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial v_j}dx_j \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j+\frac{1}{2}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j+\frac{1}{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx_j-\frac{1}{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx_j \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)dx_j+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx_j \\
&= -\Omega_{ij}dx_j+V_{ij}dx_j && V_{ij}=0 \\
&= -\Omega_{ij}dx_j && \Omega_{ij}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k dx_j \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\Omega_k dx_j \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{dx})_i
\end{aligned}
$$

Apéndice

Tensor tasa de deformación (simétrico):

$$V_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=V_{ji}$$

Tensor de vorticidad (antisimétrico):

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\Omega_{ji}$$

Gradiente de velocidad (matriz - tensor de rango 2):

$$\begin{aligned}\nabla v &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \text{Tensor tasa de deformación} - \text{Tensor de vorticidad} \\ &= V_{ij} - \Omega_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

Vector de vorticidad:

$$\Omega_k = \varepsilon_{kij}\Omega_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k$$

*Comparativa entre **rotación infinitesimal** y **vorticidad**:*

	Rotación infinitesimal	Vorticidad
Tensor	$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \varepsilon_{ijk}\omega_k$	$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_k$
Vector	$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\omega_{ij}$	$\Omega_k = \varepsilon_{kij}\Omega_{ij}$

*Comparativa entre **deformación infinitesimal**, **rotación infinitesimal**, **tasa de deformación** y **vorticidad**:*

Deformación infinitesimal	$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$
Rotación infinitesimal	$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$
Tasa de deformación	$V_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$
Vorticidad	$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$

Ecuación de compatibilidad para el estado plano de tensiones:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) \\ 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \\ 2\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Referencias

[1] Y. C. Fung, *A First Course in Continuum Mechanics*, tercera edición, PRENTICE HALL, 1994.

[2] Lawrence E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, 1969.