Metodos de Identificacion basadas en Tecnicas de Subespacio

Leonardo Giovanini

Contenidos

- Formulacion del problema
- Identificacion de sistemas deterministicos
- Identificacion de sistemas estocasticos
- Identificacion combinada
- Ejemplo

Formulacion del problema

El problema de identificar un sistema puede ser formulado como

Dado un conjunto de datos

$$U(k) = \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \cdots & u(k+N) \end{bmatrix}$$
$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+N) \end{bmatrix}$$

encontrar

- el orden del sistema n,
- la magnitud del tiempo muerto T_d ,
- y las matrices *A, B, C* y *D.*

Formulacion del problema

Hay varias formas de resolver el problema de identificacion

- **Minimizar el error predicho**

$$\min_{\Theta} \left\| Y(k) - \hat{Y}(k) \right\|^2 \\ st. \\ \hat{Y}(k) = f\left(U(k), \Theta\right) \qquad (1)$$

- **Utilizar tecnincas de estimacion**

$$\min_{\tilde{X}(t)} E\left(\left[Y(k) - \hat{Y}(k)\right]\left[Y(k) - \hat{Y}(k)\right]^T\right) \\ st. \\ \hat{Y}(k) = f\left(\tilde{X}(k), U(k)\right) \qquad (2)$$

donde $\tilde{X}(k) = \left[X(k) \quad \Theta\right]$

Identificacion de sistemas deterministico

Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \qquad (3)$$

Los estados y salidas futuras

$$\begin{aligned} x(k+i+1) &= A^{i+1}x(k) + \sum_{j=0}^{i} A^{j}Bu(k+i-j) \\ y(k+i) &= Cx(k+i) + Du(k+i) \end{aligned} \qquad (4)$$

y la salida es

$$y(k+i) = CA^{i+1}x(k) + \sum_{j=0}^{i} CA^{j}Bu(k+i-j) + Du(k+i)$$

Identificacion de sistemas deterministico

Definiendo las siguientes matrices

$$\Delta = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & A^{N-3}B & \cdots & B \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C & CA & \cdots & CA^{N-1} \end{bmatrix}^T$$

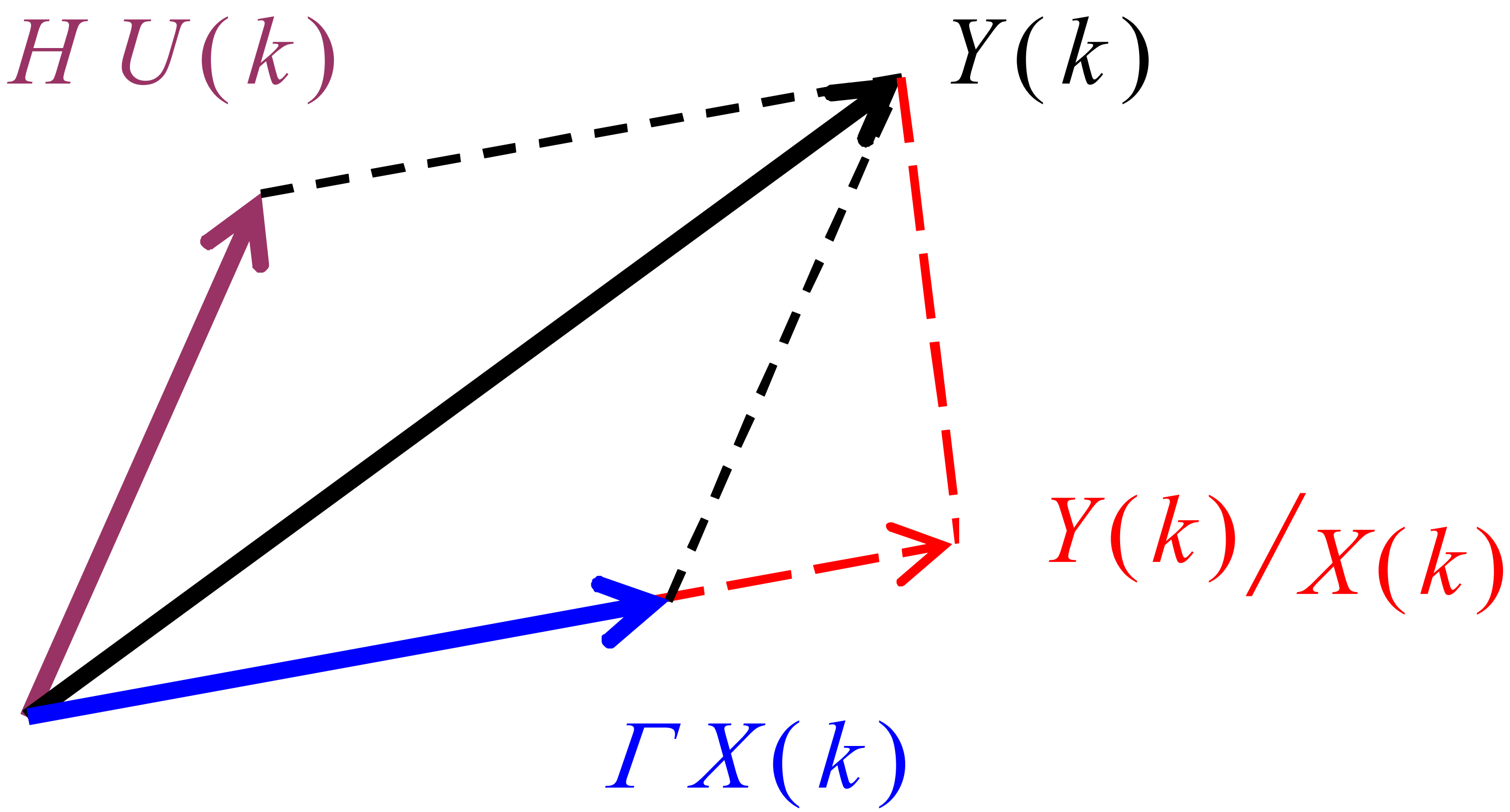
y el vector de estados

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) & x(k+1) & \cdots & x(k+N) \end{bmatrix},$$

El sistema (3) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + \Delta U(k), \\ Y(k) &= \Gamma X(k) + HU(k) \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

La ecuacion (5) puede interpretarse geometricamente



Identificacion de sistemas deterministico

Los vectores $X(k)$, $U(k)$ y $Y(k)$ son divididos

$$X(k)=\begin{bmatrix}X_p & X_f\end{bmatrix};\ U(k)=\begin{bmatrix}U_p & U_f\end{bmatrix};\ Y(k)=\begin{bmatrix}Y_p & Y_f\end{bmatrix};$$

y defieniendo

$$W_p=\begin{bmatrix}U_p & Y_p\end{bmatrix};\ W_f=\begin{bmatrix}U_f & Y_f\end{bmatrix};$$

de manera que

$$\begin{aligned} X_f &= A^{\frac{N}{2}} X_p + \Delta U_p \\ Y_p &= \Gamma X_p + H U_p \\ Y_f &= \Gamma X_f + H U_f \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

Definicion: La secuencia $u(k)$ es **persistentemente excitida de orden** N si verifica

$$rank\left(E\left(U(k)U(k)^T\right)\right)=N \qquad \textbf{(7)}$$

Identificacion de sistemas deterministico

Si

- $u(k)$ esta persistentemente excitada de orden N,
- La interseccion del espacio de las filas de U_f y X_p es vacio,

entonces

i) El producto de los estados y la matriz de observabilidad extendida $\mathcal{O} = \Gamma X_f$ es igual a la **proyeccion oblicua** de Y_f sobre W_p

ii) El orden del sistema n esta dado por los valores singulares de $W_1 \Gamma X_f W_2$ diferentes de cero

iii) La matriz Γ es igual a $\Gamma = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} T$

i) A partir de la ecuacion **(6)** tenemos

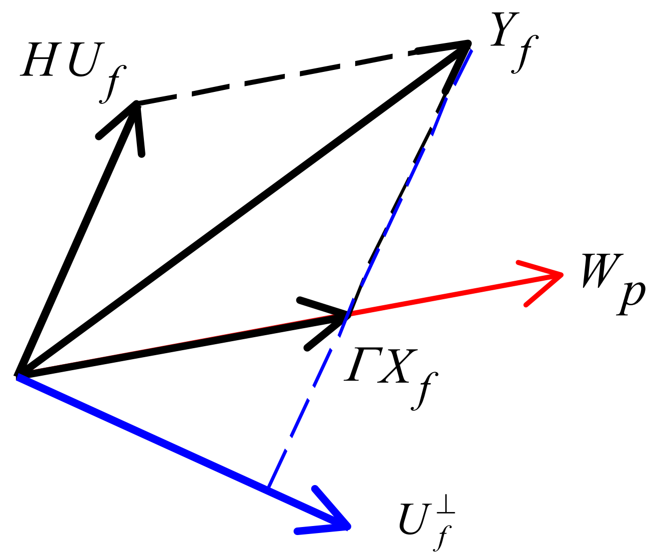
$$X_f = A^{\frac{N}{2}} X_p + \Delta U_p$$

o

$$X_f = \left[\Delta - A^{\frac{N}{2}}\Gamma H \quad A^{\frac{N}{2}}\Gamma\right]\begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix} = L_p W_p \qquad \textbf{(8)}$$

Remplazando en ecuacion **(6)** tenemos

$$Y_f = \Gamma L_p W_p + H U_f$$



Multiplicando por el complemento ortogonal de U_f

$$Y_f / U_f^{\perp} = \Gamma L_p W_p / U_f^{\perp}$$

$$\Gamma L_p W_p = \quad Y_f / U_f^{\perp} \left(W_p / U_f^{\perp}\right)^{+} W_p \qquad \textbf{(9)}$$

$$\Gamma X_f = Y_f / U_f^{\perp} \left(W_p / U_f^{\perp}\right)^{+} W_p = Y_f /_{U_f} W_p = \mathcal{O}$$

Identificacion de sistemas deterministico

ii) A partir de la ecuacion **(9)** tenemos

$$W_1 \mathcal{O} W_2 = W_1 \Gamma X_f W_2, \qquad \textbf{(10)}$$

entonces

$$rank(W_1 \mathcal{O} W_2) = \min\big(rank(W_1\Gamma), rank(X_f W_2)\big) = n,$$

y

$$rank(W_1\Gamma) = \min\big(rank(W_1), rank(\Gamma)\big) = n,$$
$$rank(X_f W_2) = rank(\Gamma L_p W_p W_2) = n.$$

iii) Calculando la SVD de **(10)** resulta

$$W_1 \Gamma X_f W_2 = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix},$$
$$= U_1 S_1 V_1 = U_1 S_1^{1/2} T T^{-1} S_1^{1/2} V_1,$$
$$\Rightarrow \begin{cases} W_1 \Gamma = U_1 S_1^{1/2} T, \\ X_f W_2 = T^{-1} S_1^{1/2} V. \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

Algoritmo 1

1. Calculale la proyeccion oblicua $\mathcal{O}_N = Y_f \big/_{U_f} W_p$
2. Calculate la **SVD** de $W_1 \mathcal{O}_N W_2 = USV^T$
3. Determine el orden del sistema y particione V y U.
4. Determine Γ_N y Γ_{N-1} $\Gamma_N = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2}$, $\Gamma_{N-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{N-l} \end{bmatrix}$
5. Determine X_f y X_{f+1} $X_f = \Gamma_N^{+} \mathcal{O}_N, \quad X_{f+1} = \Gamma_{N-1}^{+} \mathcal{O}_{N-1},$
6. Resuelva la ecuacion $\begin{bmatrix} X_{f+1} \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_f \\ U_f \end{bmatrix}$

Algoritmo 2

1. Calcule la proyeccion oblicua $$\mathcal{O}_N = Y_f \big/_{U_f} W_p$$
2. Calcule la **SVD** de $$W_1 \mathcal{O}_N W_2 = USV^T$$
3. Determine el orden del sistema y particione V y U.
4. Determine Γ_N and $\Gamma_N^\perp$ as $$\Gamma_N = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2},$$ $$\Gamma_N^\perp = U_2^T W_1$$
5. Determine A and C from Γ_N and V
6. Solve the linear equation resulting from **(6)** for B and D.

Ejemplo

Consideremos los datos obtenidos para la identificacion de un motor de combustion interna con un sistema de injeccion en puerto

El sistema que queremos identificar es multivariable:

- **Tres salidas**: relacion Aire-Combustible (**A/F)**, la velocidad (**S)** y el torque (**T**)
- **Cinco entradas:** angulo de la pantalla (α_T), combustible injectado (F), bypass de aire (α_{IAC}), el angula de avance de la chispa (α_S), y el control de recirculacion de gases de escape (α_{EGR}).

Los datos utilizados en la identificacion fueron obtainidos en experimentos con una senal binaria pseudo aleatoria en cada entrada

$$\alpha_T = 50 \pm 20,\ F = 10\ 10^{-3} \pm 3 10^{-3},\ \alpha_S = 20 \pm 10\ ,$$
$$\alpha_{EGR} = 70 \pm 20 \text{ y } \alpha_{IAC} = 0$$

Ejemplo

Antes de identificar el modelo, debemos **remover el valor medio** de la senal y los **tiempos muertos**.

Para ello utilizamos la informacion disponible

$$T_{A/F} = \frac{92.22}{2\pi S} + 0.0156,$$

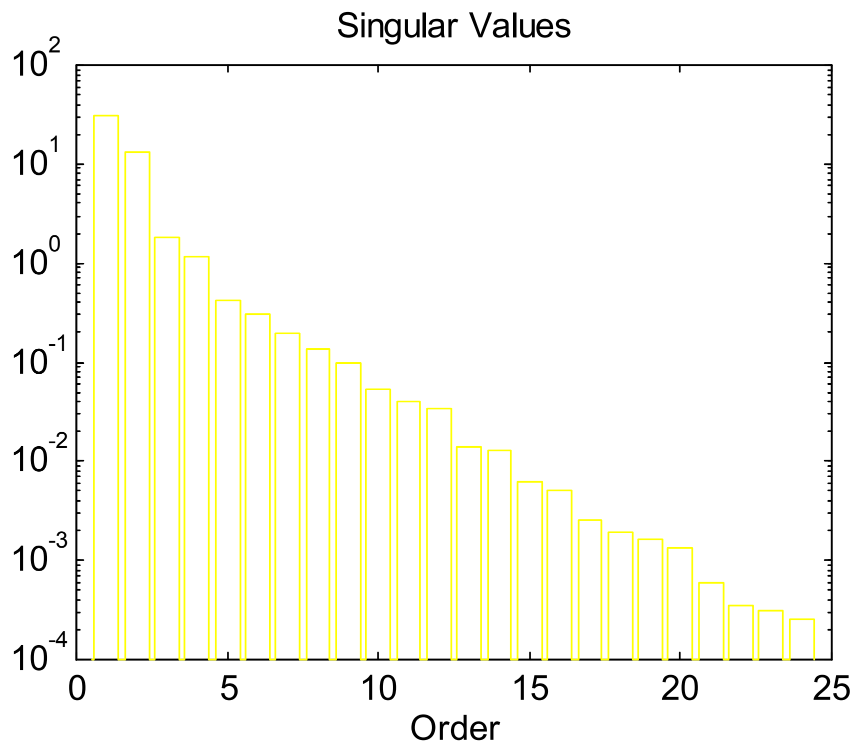
$$T_{\alpha_S T} = \frac{\alpha_S + 45}{6S},$$

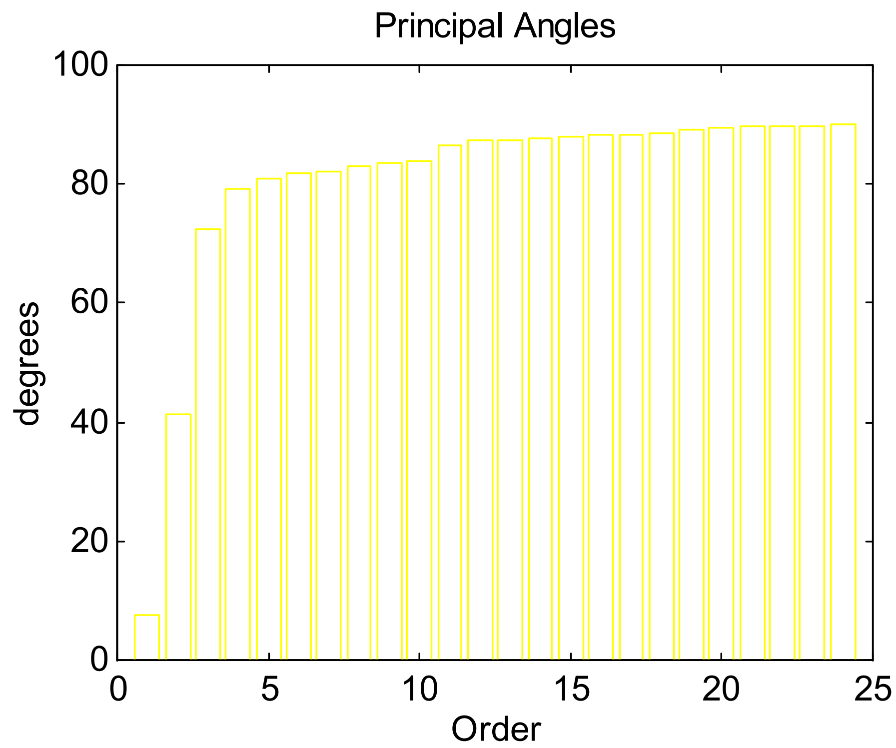
$$T_F = \frac{120}{S}.$$

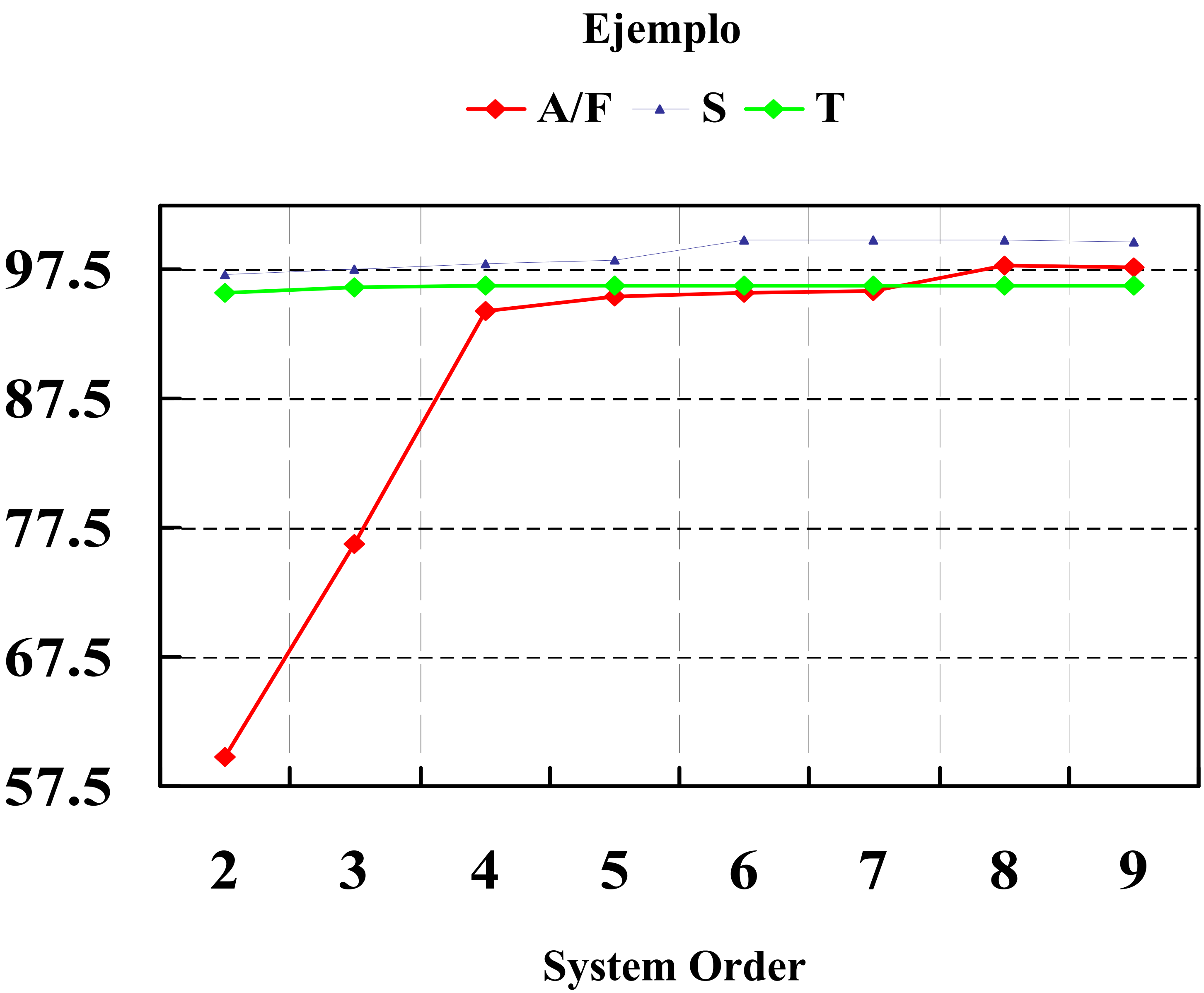
Finalmente, dividimos el conjunto de datos en dos subconjuntos con el mismo tamano: uno para la **identificacion** el otro para la **validacion**.

Ejemplo

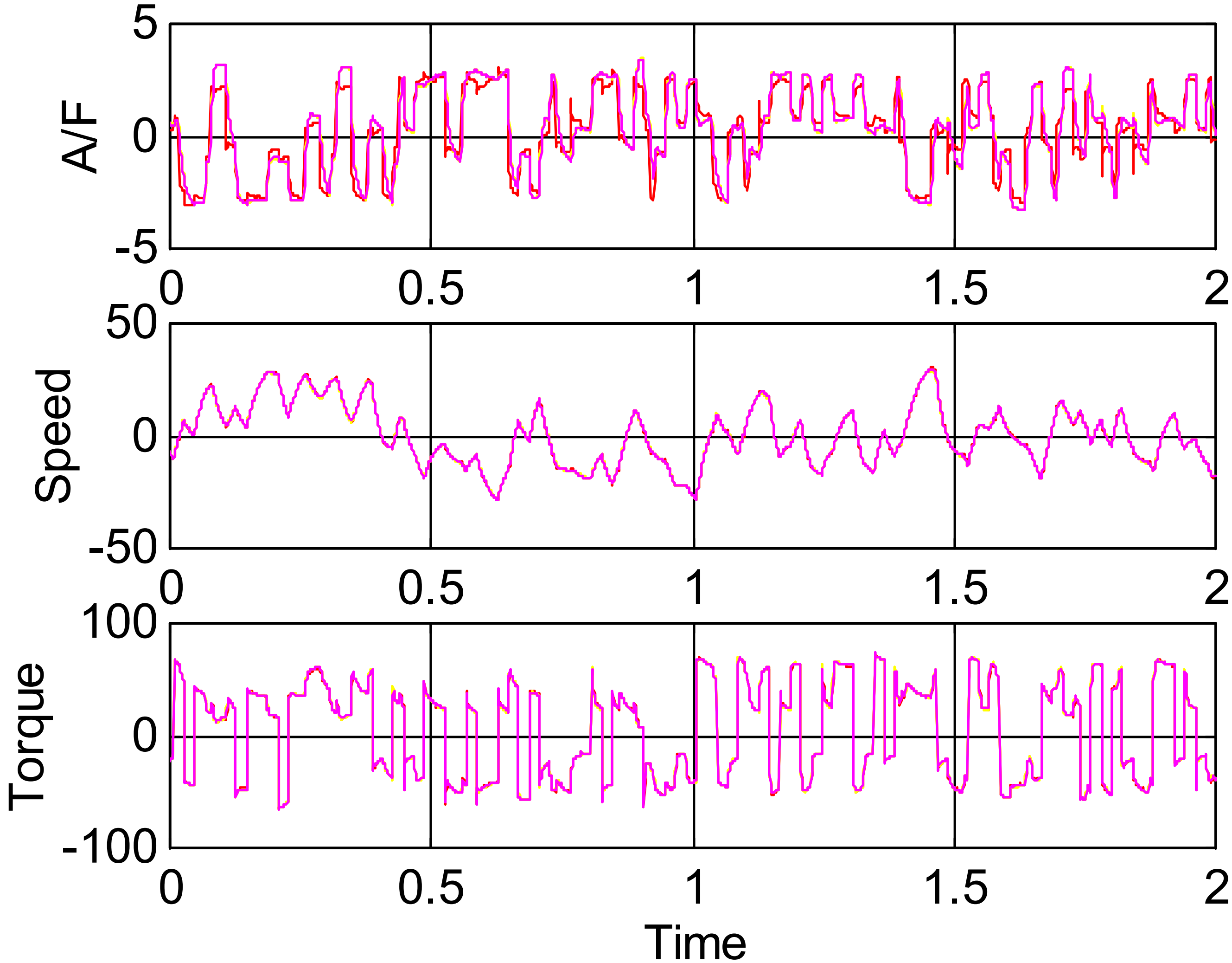
En primer lugar determinanamos el orden del sistema a partir de analizar el comportamiento de los valores singulares y los angulos principales






Ejemplo
A/F
S
T
97.5
87.5
77.5
67.5
57.5
2
3
4
5
6
7
8
9
System Order

Ejemplo



5
0
-5
A/F
0
0.5
1
1.5
2
50
0
-50
Speed
0
0.5
1
1.5
2
100
0
-100
Torque
0
0.5
1
1.5
2
Time