ndlonghi@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral
FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS HÍDRICAS

Departamento de Informática

Mecánica del Continuo

INSUFICIENTE (4) 15/100

Examen Final – 05/12/13

100

1. Indicar cuáles de las siguientes proposiciones referidas a la teoría de elasticidad lineal son correctas. Justificar en cada caso. 20
   a. Las componentes del tensor de Hooke $\mathbf{C}$ de un material elástico anisotrópico no varían con la orientación del sistema de ejes coordenados.
   b. El comportamiento constitutivo de un material isótropo queda totalmente caracterizado definiendo el módulo de elasticidad E y la relación de Poisson ν.
   c. El comportamiento constitutivo de un material ortótropo queda totalmente caracterizado definiendo el módulo de deformación volumétrica K y el módulo de deformación transversal G.

50

2. Un cilindro de eje paralelo al eje x_3 y cuya sección normal es el cuadrado $-a \leq x_1 \leq a, \quad -a \leq x_2 \leq a$ está sometido a torsión por cuplas que actúan en los extremos $x_3 = 0$ y $x_3 = L$. Las componentes de tensión están dadas por: 30

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

donde $\psi = \psi(x_1, x_2)$.

   a. Mostrar que este tensor de tensiones está autoequilibrado. ✓
   b. Mostrar que la diferencia entre la máxima componente de tensión y la mínima componente de tensión es $2\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2}$, y hallar el eje principal que corresponde al valor principal cero. N
   c. Para el caso particular $\psi = \left(x_1^2 - a^2\right)\left(x_2^2 - a^2\right)$, mostrar que las superficies laterales están libres de tracción, y que la cupla actuando en cada cara de extremidad es $32a^6/9$. N

50

3. Escribir el siguiente conjunto de ecuaciones en una única ecuación usando notación indicial: 20

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right] \qquad e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right] \qquad e_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz}$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right] \qquad e_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xz}$$

0

4. La teoría de flujo potencial describe el comportamiento cinemático de los fluidos basándose en el concepto matemático de función potencial, asegurando que el campo de velocidades (que es un campo vectorial) del flujo de un fluido es igual al gradiente de una función potencial que determina el movimiento de dicho fluido: 30

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi$$

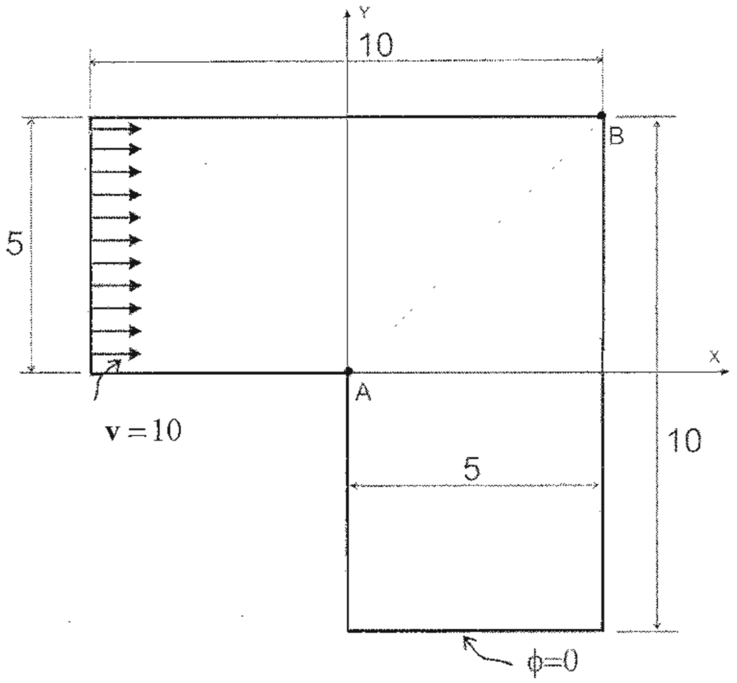
donde el campo de velocidades queda definido como

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

A un fluido que se comporta según esta teoría se le denomina fluido potencial, que da lugar a un flujo potencial.

a. Dar la expresión del Principio de Trabajos Virtuales para la ecuación de Laplace (ecuación de balance de energía, donde ϕ reemplaza al campo de temperatura y la conductividad es unitaria).

b. Indicar qué condiciones de borde pondría en las fronteras del dominio para ϕ a fin de resolver el problema de la figura. Explicar.



LONGHI, Nicolás

EXAMEN FINAL

MECANICA DEL CONTINUO

1) a) FALSO.

~~PARA UN MATERIAL ANISOTROPO~~

EN EL CASO DE UN MATERIAL ISOTROPICO ~~EN~~ LA ECUACION $\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$ SE CUMPLE PARA CUALQUIER ~~EJE~~ SISTEMA DE COORDENADAS CON LAS COMPONENTES DEL TENSOR C_{ijkl} CONSTANTES.

EN EL CASO ANISOTROPICO, AL NO COMPORTARSE EL MATERIAL DE LA MISMA MANERA EN TODAS LAS DIRECCIONES, AL CAMBIAR LA ORIENTACION DEL SISTEMA DE EJES, CAMBIAN LAS COMPONENTES DE C_{ijkl}

b) VERDADERO.

EN EL CASO DE UN MATERIAL ISOTROPO LA ECUACION CONSTITUTIVA DE HOOKE SE PUEDE EXPRESAR DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

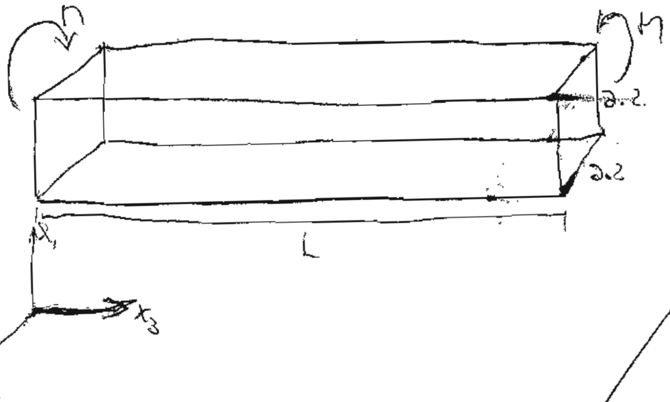
Y SI DEFINIMOS $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ Y $\lambda = \dfrac{\nu E}{3(1+\nu)}$ PODEMOS CARACTERIZAR EL COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL ~~A~~ TRAVÉS DE E Y ν.

c) FALSO.

EL MODULO DE DEFORMACION VOLUMETRICA K Y EL MODULO DE DEFORMACION TRANSVERSAL G ESTAN RELACIONADOS A E Y ν; Y ~~PARA~~ UN MATERIAL ORTÓTROPO TIENE UNA DE ESTAS CARACTERISTICAS EN CADA DIRECCION: ES DECIR, E_x, E_y, E_z, ν_x, ν_y, ETC... POR LO TANTO, NO ALCANZA CON DEFINIR K Y G PARA CARACTERIZAR EL COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL.

2)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}$$



a) DEBEMOS VERIFICAR LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO SUPONIENDO QUE NO HAY FUERZAS DE CUERPO:

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 : \quad \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 ; \quad \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 ; \quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = 0$$

PORQUE ψ NO DEPENDE DE x_3

b) PRIMERO HALLAMOS LAS TENSIONES PRINCIPALES:

$$|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0 \Rightarrow -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

DONDE

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0 + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}^2\right) + \left(-\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2\right) = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$-I_2\sigma \equiv \sigma\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\sigma^3 + \sigma^2\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2\right) = 0}_{\times}$$

$$\underbrace{\sigma^2\left(-\sigma + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2\right) = 0}_{\times}$$

$\sigma_1 = 0$

$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}^2}$

$\sigma_3 = -\sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}^2}$

NO

$\sigma_1 = 0$?

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2$

LLEGA AL RESULTADO CORRECTO AUN CUANDO EL PASO ANTERIOR ESTABA MAL!!

LA DIFERENCIA ENTRE LA MINIMA Y LA MAXIMA ES:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}^2} + \sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}^2} = 2\sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}^2}$$

EL EJE PRINCIPAL QUE CORRESPONDE A $\sigma_1 = 0$ ES $\underline{v}_1$ TAL QUE:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_1\delta_{ij})v_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} w_1 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} w_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = 0 \\ u_1 = \dfrac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}} v_1 \end{array} \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}} v_1 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ES DECIR, EL EJE PRINCIPAL CORRESPONDIENTE A $\sigma_1 = 0$ PUEDE TOMAR CUALQUIER VALOR $x_2 = v_1$

ESTE VECTOR DA LA ORIENTACION DEL EJE. NORMALIZANDO $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) c) $\psi = (x_1^2 - a^2)(x_2^2 - a^2)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 2x_1(x_2^2 - a^2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 2x_2(x_1^2 - a^2)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_2(x_1^2-a^2) \\ 0 & 0 & -2x_1(x_2^2-a^2) \\ 2x_2(x_1^2-a^2) & -2x_1(x_2^2-a^2) & 0 \end{pmatrix}$$

LOS VECTORES NORMALES A LAS SUPERFICIES LATERALES SON $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T_1 = \sigma_{ij} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_2(x_1^2-a^2) \end{pmatrix}$ Y LA TENSION NORMAL ES: $\boxed{T_1 v_1 = 0}$

$T_2 = \sigma_{ij} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x_1(x_2^2-a^2) \end{pmatrix}$ Y EN SENTIDO NORMAL A LA SUPERFICIE: $T_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x_1(x_2^2-a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

MUESTRA LIBRE DE TRACCION NORMAL.
FALTA VER LIBRE TRACCION DE CORTE.
(TRIVIAL, PUES SOBRE LAS SUP $x_1 = \pm a$ y $x_2 = \pm a$, LOS VECTORES T_1 y T_2 SE ANULAN).
FALTA CALCULAR LA CUPLA.

3) ESTE CONJUNTO DE ECUACIONES SURGE DE LA LEY DE HOOKE:

$\sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$ ESTABLECIENDO LAS RELACIONES $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ Y $\lambda = \frac{\nu E}{3(1+\nu)}$ $\boxed{\text{VER ATRAS}}$

Y DESPEJANDO e_{ij} $\Rightarrow$ DE ESTA MANERA OBTENEMOS: $e_{\alpha\alpha} = \frac{3}{E}$ ... Y DESPEJANDO:

$$e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \lambda \frac{3}{E} \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{2\mu} \delta_{ij}$$

FINALMENTE REEMPLAZAMOS λ Y μ Y TENEMOS:

$$e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}(1+\nu)}{E} - \frac{\nu E (1+\nu)}{3(1+\nu) E} \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{E} \delta_{ij} = \sigma_{ij}\frac{(1+\nu)}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}$$

Y DE AQUI SURGEN LAS 6 ECUACIONES

4) a) PRINCIPIO DE TRABAJOS VIRTUALES:

SEA UN CUERPO B CON UNA FUERZA DE CUERPO X_i Y UNA SUPERFICIE DEL CUERPO $S = S_\sigma + S_0$, DONDE S_0 ESTA LIBRE Y S_σ SUJETA A TENSION $\bar{E}$:

$$\int_B X_i \delta u_i \, dV + \int_{S_\sigma} \bar{E}_i \delta u_i \, dS = \int_B \sigma_{ij} \delta e_{ij} \, dV$$

; DONDE δu_i SON DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES (MUY PEQUEÑOS Y DERIVABLES MUCHAS VECES) Y δe_{ij} DEFORMACIONES VIRTUALES.

ESTO INDICA QUE EL TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS EXTERNAS (DE CUERPO Y EN LA FRONTERA) ES IGUAL AL REALIZADO POR LAS INTERNAS

EJ3) NO ESTA MOSTRANDO LA RELACION ENTRE LAS ECS PLANTEADAS Y LA ECUACION OBTENIDA. NO ES NECESARIO PARTIR DE LA LEY DE HOOKE. LA RELACION DEBE OBTENERSE EN BASE A CONSIDERACIONES DE NOTACION INDICIAL SOLAMENTE.