Exámen Final
Mecánica del Continuo
6 de octubre de 2005

1) Elasticidad bidimensional:

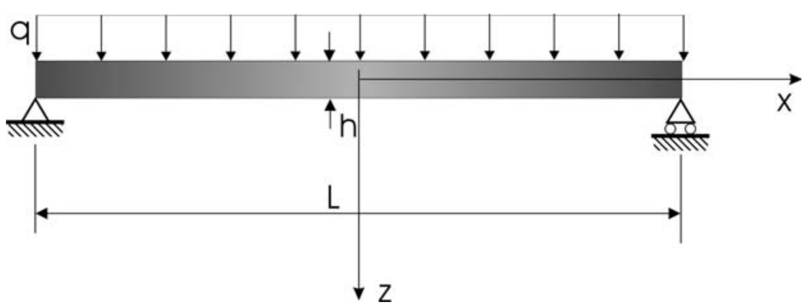
Se propone el campo de tensiones siguiente:

$$\sigma_{xx} = -\frac{q}{2I}\left[x^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]z + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}z^3 - \frac{h^2}{10}z\right)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{q}{2I}\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{h^2}{4}z + \frac{h^3}{12}\right]$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{q}{2I}\left[\frac{h^2}{4} - z^2\right]x$$

para el problema de la viga apoyada de espesor unitario planteado en la figura:



Verificar si el campo propuesto puede ser solución del problema planteado. La constante $I = h^3/12$. Para ello:

a. Verificar que la solución cumple la ecuación de equilibrio en el interior del dominio.
b. Verificar que se cumplen las condiciones de borde en tensiones en las fronteras superior e inferior.
c. Verificar que, en las fronteras izquierda y derecha, las condiciones de borde en tensiones se cumplen de forma integral. O sea, que la integral de las tracciones de superficie en dirección vertical es igual a la reacción en el apoyo. Además, verificar si la componente horizontal de las tracciones de superficie en ambas fronteras es nula.

2) Sea $b = rot(v)$, mostrar que

$$\int_S \lambda b_i n_i \, dS = \int_V \lambda_{,i} b_i \, dV \,,$$

donde $n_i\, dS$ representa el diferencial de superficie S que encierra al volumen V, n_i es la normal saliente y $\lambda = \lambda(x_i)$ es una función escalar de las coordenadas x_i.

Sugerencia: usar el teorema de Green.

3) Un medio continuo experimenta un desplazamiento $u = (3X_2 - 4X_3)e_1 + (2X_1 - X_3)e_2 + (4X_2 - X_1)e_3$, donde (e_1, e_2, e_3) es una base unitaria de R^3.
   a. Determine la posición después de la deformación (posición desplazada) del vector que une las partículas A(1,0,3) y B(3,6,6).
   b. Determine la posición desplazada del vector posición C(2,6,3) que es paralelo al vector que une las partículas A y B.
   c. Muestre que los dos vectores se mantienen paralelos después de la deformación.

4) Si $\dot{u} = \omega \times u$ y $\dot{v} = \omega \times v$, utilizando notación indicial muestre que

$$\frac{d}{dt}(u \times v) = \omega \times (u \times v)$$

Ayuda adicional : Teorema de Green:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\cdots}\, dV = \int_S n_i A_{jkl\cdots}\, dS$$