EXAMEN FINAL

Mecánica del Continuo

29 de diciembre de 2005

1. Mostrar que el campo de velocidades $v_i = Ax_i/r^3$, donde $r^2 = x_i x_i$ y A es una constante arbitraria, satisface la ecuación de continuidad para flujo incompresible. Recordar que para flujo incompresible $v_{k,k} = 0$.

2. Si el vector ν_i esta dado en términos de los vectores a_i, b_i y c_i, $(i = 1, 2, 3)$, que generan una base en R^3; tal que $\nu_i = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i$, mostrar que:

$$\alpha = \frac{\epsilon_{ijk} v_i b_j c_k}{\epsilon_{pqr} a_p b_q c_r}.$$

3. Sea V el volumen encerrado por la superficie S cuya normal saliente n_i tiene módulo unitario; y sean x_i el vector posición en un punto de V y a_i un vector arbitrario constante, $(i = 1, 2, 3)$. Usando el teorema de Gauss y notación indicial mostrar que:

$$\int_S n \times (a \times x)\ dS = 2aV.$$

4. Usando notación indicial probar que:

$$[a \cdot b \times c]\ r = (a \cdot r)\ b \times c + (b \cdot r)\ c \times a + (c \cdot r)\ a \times b$$

donde a, b, c y r son vectores en R^3.

5. Se propone el campo de tensiones siguiente:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{P(L-x)}{I} \\
\sigma_{zz} &= 0 \\
\sigma_{xz} &= \frac{P}{2I}\left[\frac{h^2}{4} - z^2\right]
\end{aligned}$$

para el problema de la viga empotrada de espesor unitario planteado en la figura 1. Verificar si el campo propuesto puede ser solución al problema planteado si $I = h^3/12$.

Figure 1: .

6. En un medio continuo el campo de tensiones esta dado por el tensor de tensiones

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & (1-x_2^2)x_1 & 0 \\ (1-x_2^2)x_1 & (x_2^3 - 3x_2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}$$

Determine:

(a) la distribución de fuerzas de volumen si las ecuaciones de equilibrio son satisfechas por dicho campo,

(b) las tensiones principales en el punto $P(a, 0, 2\sqrt{a})$,

(c) la tensión máxima de corte en P.

7. En un medio continuo el campo de tensiones esta dado por el tensor de tensiones

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & cx_3 & 0 \\ cx_3 & dx_2 & -cx_1 \\ 0 & -cx_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde c y d son constantes. Determine:

(a) la distribución de fuerzas de volumen si las ecuaciones de equilibrio son satisfechas por dicho campo,

(b) en la posición $x = (4, 7, -4)$, calcular el vector de tensión actuando en la superficie plana $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$ y en la superficie esférica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81$,

(c) las tensiones de corte y normal en dicho punto.

8. **[Opcional]** Probar que $\sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{kj}$ es un invariante del tensor de tensiones.

9. Sea un cuerpo cuya configuración ocupa una región R definida con respecto a un sistema de referencia ortonormal fijo (e_1, e_2, e_3) tal que $R = \{(x_1, x_2, x_3)\ /\ |x_1| \leq a, |x_3| \leq a, |x_3| \leq b\}$, donde a y b son constantes positivas. Además sean las componentes del tensor de tensiones en R en un dado tiempo t,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} \;=\; -\,\sigma_{22} \;&=\; -\frac{q}{a^2}(x_1^2 - x_2^2),\\
\sigma_{12} \;&=\; \frac{2q}{a^2} x_1 x_2,\\
\sigma_{23} \;=\; \sigma_{31} \;=\; \sigma_{33} \;&=\; 0
\end{aligned}
$$

donde q es una constante no nula.

(a) Determinar la tracción que debe ser aplicada sobre la frontera ∂R del cuerpo para mantener tal campo de tensiones.

(b) Calcular la resultante de fuerzas y momentos actuando en las caras $x_1 = a$ y $x_2 = -a$ con respecto al origen.

(c) Asumiendo que el cuerpo esta en reposo, mostrar que el campo de tensiones puede ser mantenido sin la aplicación de fuerzas de volumen.