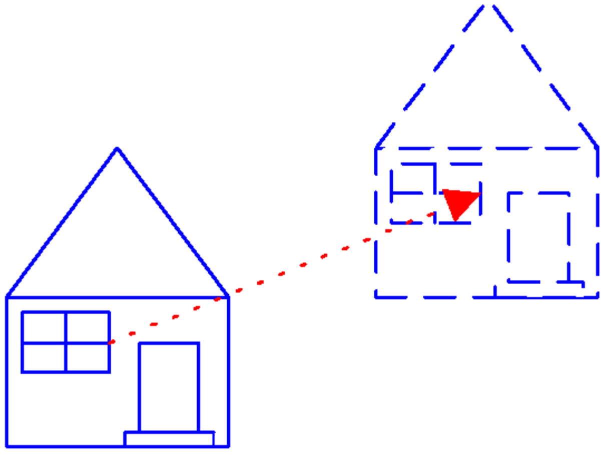
Transformações 2D

- As transformações geométricas 2D permitem alterar a posição, orientação, tamanho e forma dos objetos em um determinado plano.
- Translação
  - Deslocamento de objetos segundo um vetor

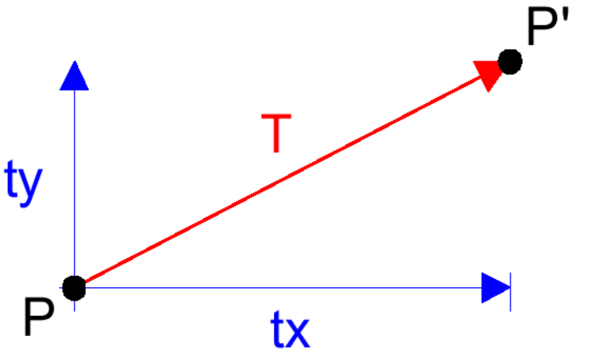


Transformações 2D – Translação

– Soma-se a cada coordenada a distância de translação

$$x' = x + tx$$

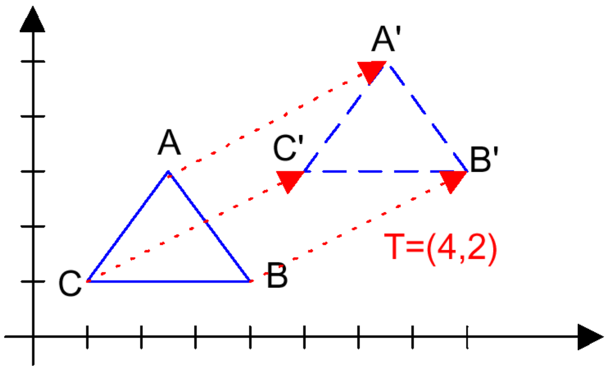
$$y' = y + ty$$



- O conjunto das distâncias é denominado vetor de translação

$$P' = P + \vec{T}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



Transformações 2D – Escala

- Escala
  - Alteração do tamanho de um objeto
  - Multiplicação das coordenadas x e y por uma constante: $x' = s_{\mathbf{x}} * x$ e $y' = s_{\mathbf{y}} * y$
  - Constante: $< 1 \Rightarrow$ reduz tamanho objeto

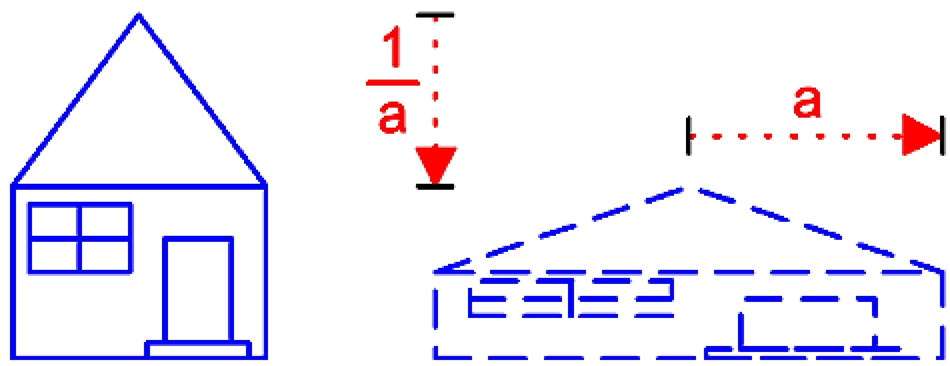
    $> 1 \Rightarrow$ aumenta objeto

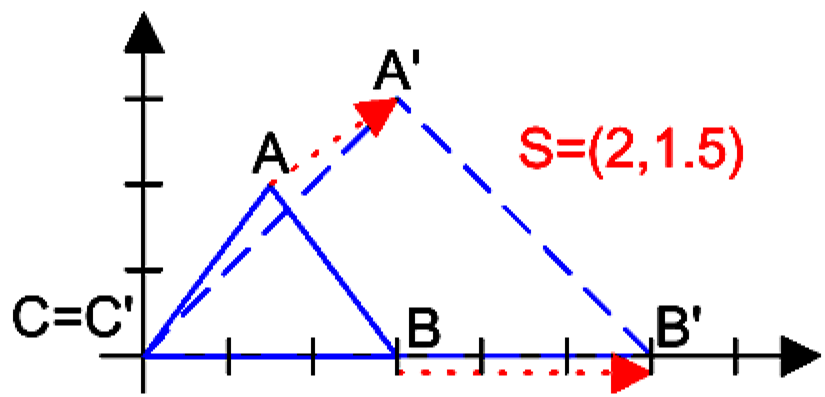
    $s_{\mathbf{x}} = s_{\mathbf{y}} \Rightarrow$ aumento uniforme nas duas direções

Transformações 2D - Escala

$$P' = S.P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

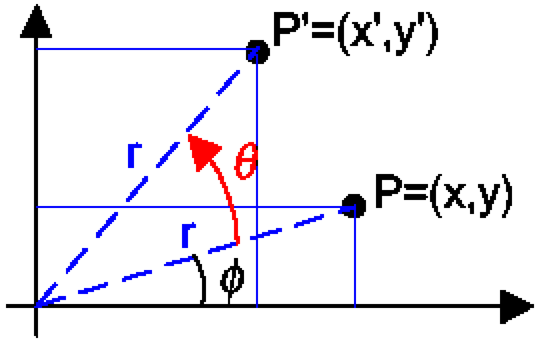




Transformações 2D – Rotação

- Rotação
  - Deslocamento circular de um objeto sobre um ponto (ex. origem dos eixos)

$$\begin{cases} x' = r.\cos(\phi+\theta) \\ y' = r.sen(\phi+\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = r.\cos(\phi)\cos(\theta) - r.sen(\phi)sen(\theta) \\ y' = r.\cos(\phi)sen(\theta) + r.sen(\phi)\cos(\theta) \end{cases}$$



como: $\begin{cases} x = r.\cos(\phi) \\ y = r.sen(\phi) \end{cases}$

então:

$$\begin{cases} x' = x.\cos(\theta) - y.sen(\theta) \\ y' = x.sen(\theta) + y.\cos(\theta) \end{cases}$$

$$P' = R.P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Muitas das aplicações gráficas envolvem sequências de transformações geométricas
  - Cálculos em excesso (no. transf X no. vértices)
- As transformações geométricas podem ser representadas por:

$$P' = M_1 . P + M_2 \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} \\ rs_{yx} & rs_{yy} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Pode-se combinar as matrizes M1 e M2 em uma única matriz de dimensão superior (3 X 3)
  - Necessário representar os vértices por vetores com três elementos

    $(x, y) \rightarrow (x_h, y_h, h)$, onde $x_h = x.h$

    $y_h = y.h$
  - Normalmente, utiliza-se h = 1.

    $(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$

Coordenadas Homogêneas

- Equações Gerais

$$P_h' = M_h . P_h \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} & t_x \\ rs_{yx} & rs_{yy} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x' = x.rs_{xx} + y.rs_{xy} + t_x \\ y' = x.rs_{yx} + y.rs_{yy} + t_y \end{cases}$$

coluna

- Translação

$$P' = T(t_x, t_y).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

linha

$$P' = P.T(t_x, t_y) \qquad \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Escala

$$P' = S(s_x, s_y).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = P.S(s_x, s_y) \qquad \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

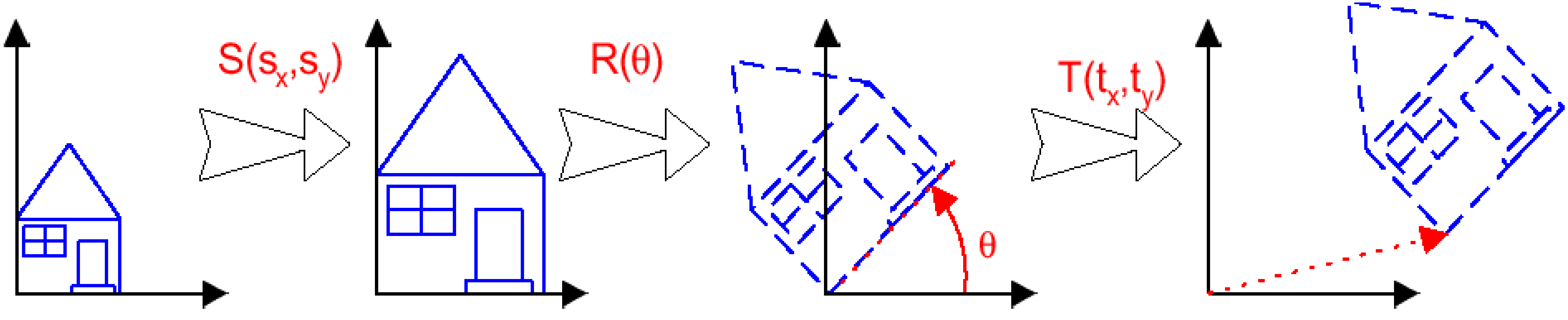
- Rotação

$$P' = R(\theta).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = P.R(\theta) \qquad \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

- Com as transformações básicas em coordenadas homogêneas é possível representar qualquer sequência de transformações por uma única matriz composta.



Composição de Transformações

- A operação que representa a composição de transformações é a concatenação de matrizes
  - Associativa, mas **não** comutativa

$$P' = \left[T(t_x, t_y).R(\theta).S(s_x, s_y)\right].P = M.P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} & t_x \\ rs_{yx} & rs_{yy} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

- Translação
  - Composição: $P' = T(t_{x2},t_{y2}).T(t_{x1},t_{y1}).P$

    $P' = T(t_{x1} + t_{x2}, t_{y1} + t_{y2}) \cdot P$
  - Inversa: $T^{-1}(t_{x1},t_{y1}) = T(-t_{x1}, -t_{y1})$
- Escala
  - Composição: $P' = S(s_{x2},s_{y2}).S(s_{x1},s_{y1}).P$

    $P' = S(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2}) \cdot P$
  - Inversa: $S^{-1}(s_{x1}, s_{y1}) = S(1/s_{x1}, 1/s_{y1})$

Composição de Transformações

- Rotação
  - Composição: $P' = R(\theta_2).R(\theta_1).P$

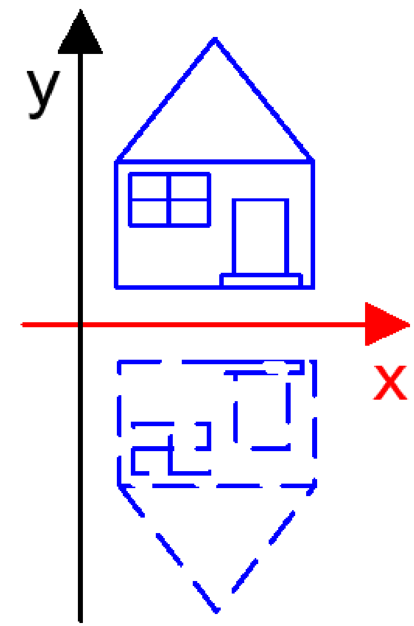
    $P' = R(\theta_1 + \theta_2) \, . \, P$
  - Inversa: $R^{-1}(\theta_1) = R(- \theta_1)$

Transformações 2D

- Reflexão

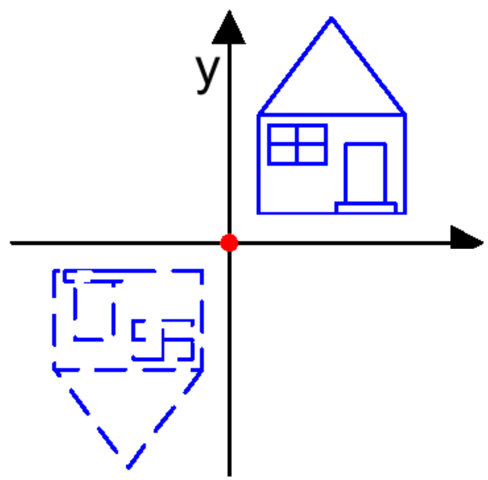
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eixo x



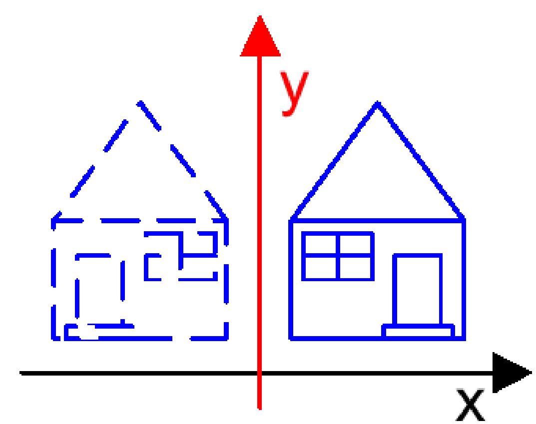
Origem

$$R_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Eixo y

$$R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

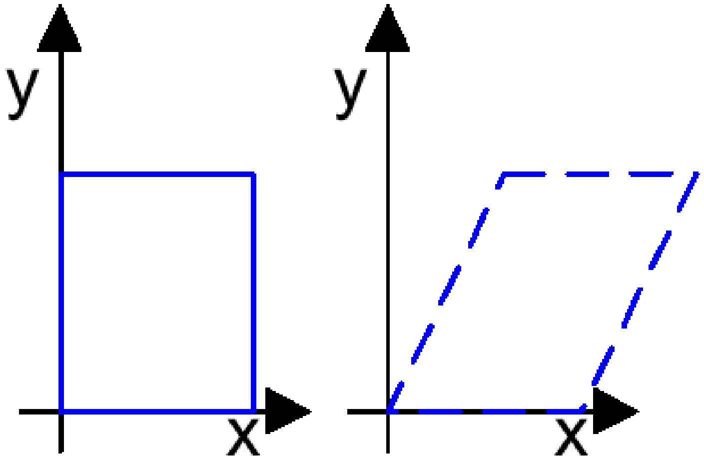


Transformações 2D

- Cisalhamento

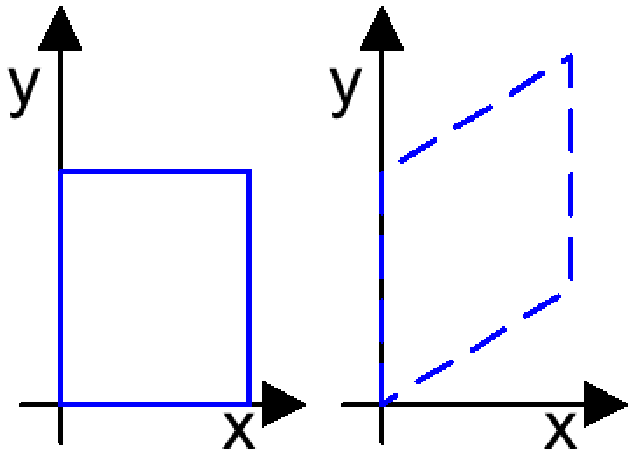
Em x

$$Sh_x(sh_x) = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Em y

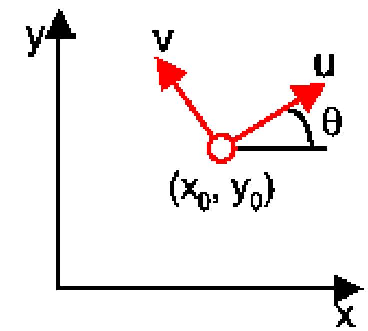
$$Sh_y(sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Transformações 2D

- É comum transformar coordenadas de um sistema de referência em outro.
  - Desloca um referencial de forma a coincidir com o outro
    - Translação da origem dos eixos:

      P’ = T(-tx, -ty).P
  - Alinha eixos
    - Rotaciona os eixos: R’(θ) = R(-θ)



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$