Curvas Paramétricas

B-Splines

Renderização de Curvas

Conversão entre Curvas

Renderização de Superfícies

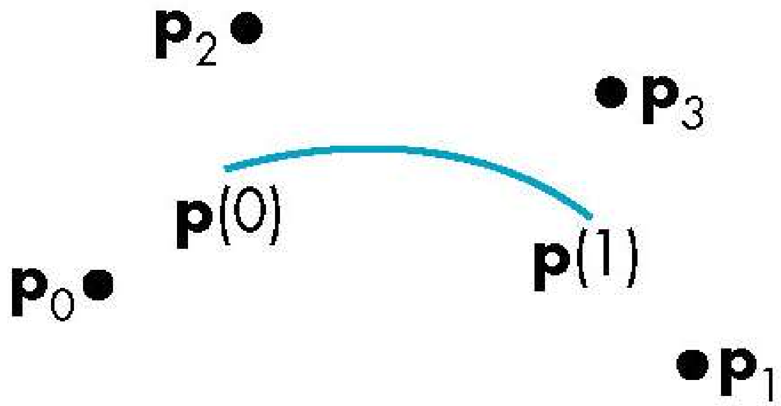
B-Splines

- Basis splines: usa os dados em $\mathbf{p}=[p_{i-2}\ p_{i-1}\ p_i\ p_{i-1}]^T$ para definir uma curva apenas entre p_{i-1} e p_i
- Permite impor um maior número de condições de continuidade para cada segmento
- Para cúbicas, temos continuidade da função e das derivadas primeira e segunda nas junções
- Custo é o triplo
- Para superfícies, representa 9 vezes mais trabalho

B-Spline Cúbica

$$p(u) = \mathbf{u}^{T}\mathbf{M}_{S}\mathbf{p} = \mathbf{b}(u)^{T}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{M}_{S} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



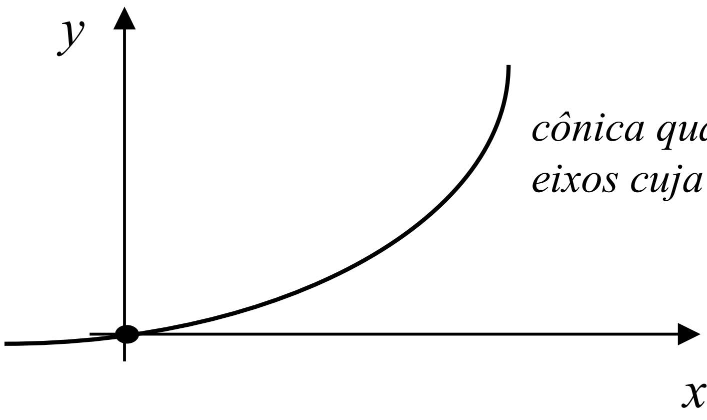
Generalizando Splines

- Podemos estender as splines para qualquer grau
- Dados e condições não precisam estar igualmente espaçados (*knots*)
  - Splines uniformes e não-uniformes
  - Pode haver *knots* repetidos
    - Podemos forçar a interpolação em alguns pontos

NURBS

- Nonuniform Rational B-Spline introduzem uma quarta variável w
  - Pode ser interpretada como peso para se dar maior importância para alguns pontos de controle
  - Também pode ser interpretada como a uso de coordenadas homogêneas

Cônicas



cônica qualquer escrita num sistema de eixos cuja origem é um ponto da cônica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

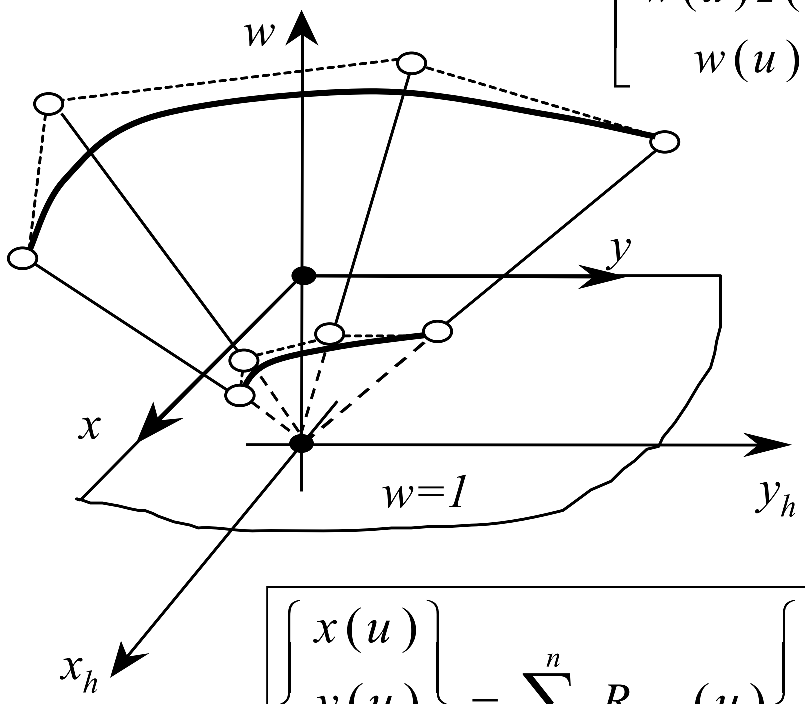
$$x = ty$$

$$at^2y^2 + bty^2 + cy^2 + dty + ey = 0$$

$$y = -\frac{dt + e}{at^2 + bt + c} \qquad x = -\frac{dt^2 + et}{at^2 + bt + c}$$

Qualquer cônica pode ser representada parametricamente como uma fração de polinômios quadráticos

NURBS
Non Uniform Rational B-Splines



$$\begin{bmatrix} w(u)x(u) \\ w(u)y(u) \\ w(u)z(u) \\ w(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{k=0}^{n} w_k N_{k,p}(u)} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad onde \quad R_{i,p}(u) = \frac{w_i N_{i,p}(u)}{\sum_{k=0}^{n} w_k N_{k,p}(u)}}$$

Cônicas como NURBS

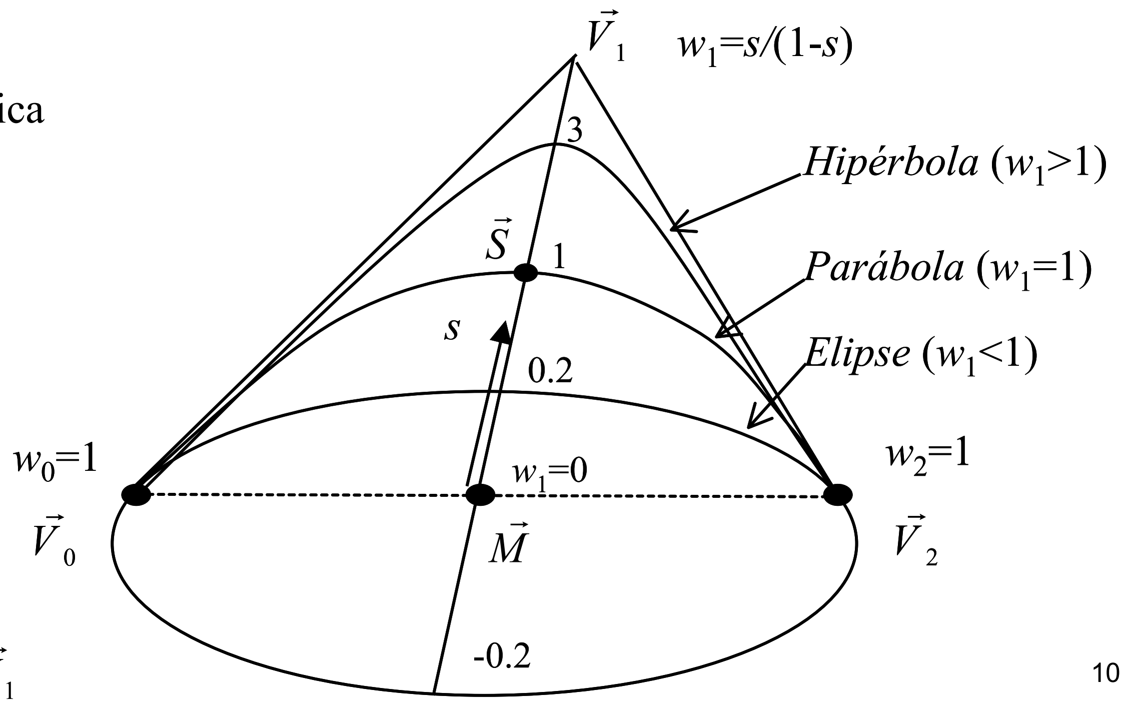
$$\vec{P}(u) = \frac{B_{0,2}(u)w_0\vec{V}_0 + B_{1,2}(u)w_1\vec{V}_1 + B_{2,2}(u)w_2\vec{V}_2}{B_{0,2}(u)w_0 + B_{1,2}(u)w_1 + B_{2,2}(u)w_2}$$

$onde:$

$$B_{i,2}(u) = N_{i,2}(u) \quad com \quad U = \{0,0,0,1,1,1\}$$

Faux et al.

$w_0 w_2 / w_1$ - determina a cônica



$\vec{P}(1/2) = \vec{S} \quad e$

$\vec{S} = (1 - s)\vec{M} + s\vec{V}_1$

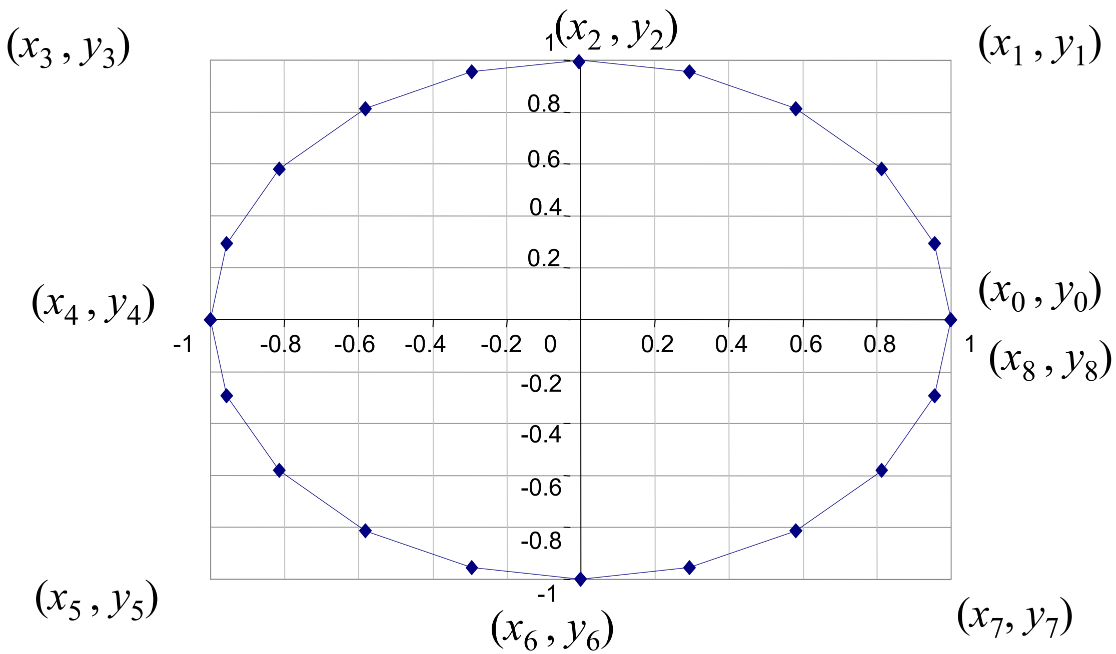
Círculo através de NURBS

$$\begin{Bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{8} R_{i,2}(u) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \qquad onde \qquad R_{i,2}(u) = \frac{w_i N_{i,2}(u)}{\sum_{k=0}^{8} w_k N_{k,2}(u)}$$

$$\{w\} = \{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$$

U={0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1}

n=8
p=2
m=12



Toda Curva é uma Curva de Bezier

- Pode-se renderizar um dado polinômio usando o método recursivo basta encontrar os pontos de controle de sua representação como uma curva de Bezier
- Suponha que $p(u)$ é dada pela curva interpolada a partir dos pontos $\mathbf{q}$

$$p(u)=\mathbf{u}^T\mathbf{M}_I\mathbf{q}$$

- Existem pontos de controle de Bezier $\mathbf{p}$ tal que

$$p(u)=\mathbf{u}^T\mathbf{M}_B\mathbf{p}$$

- Igualando e resolvendo, obtém-se $\mathbf{p}=\mathbf{M}_B{}^{-1}\mathbf{M}_I\,\mathbf{q}$

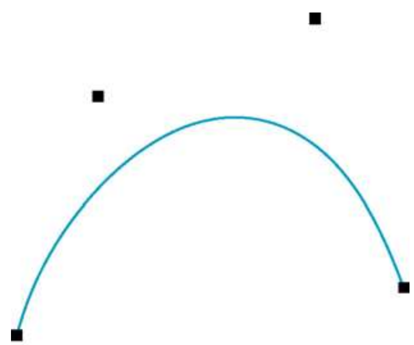
Matrizes de Conversão

Interpolação para Bezier $\mathbf{M}_B^{-1}\mathbf{M}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

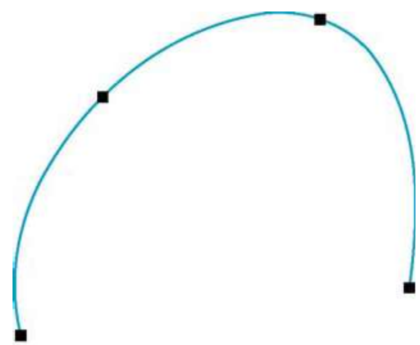
B-Spline para Bezier $\mathbf{M}_B^{-1}\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

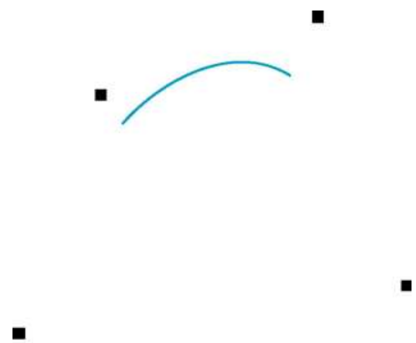
Estas três curvas foram totas geradas a partir do mesmos dados originais usando o método recursivo a partir da conversão dos pontos de controle para pontos de controle de Bezier



Bezier



Interpolating



B Spline