Transformações 3D

- Num espaço 3D, a representação em coordenadas homogêneas envolve a utilização de vetores de dimensão 4.

vetor coluna

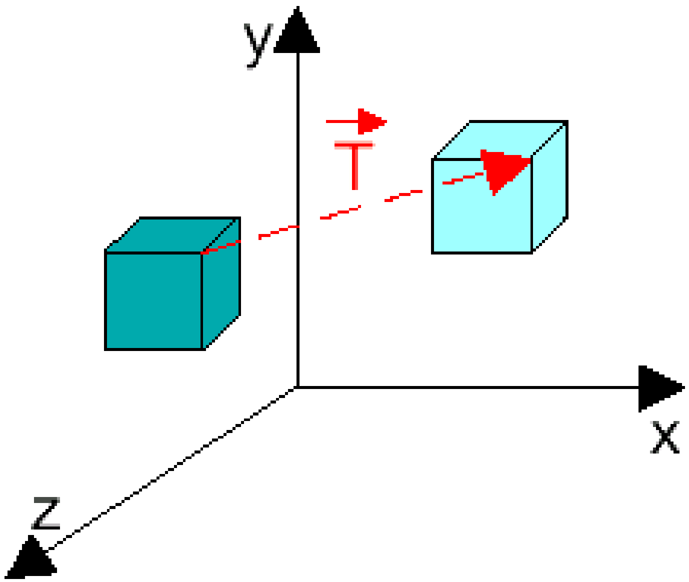
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

vetor linha

$$P = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 3D

- Translação
  - Deslocamento dos objetos segundo um determinado vetor.



Translação

- Adição a cada coordenada das distâncias de translação.

$$P' = P.T(t_x, t_y, t_z) \quad \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \\ z' = z + t_z \end{cases}$$

$$P' = T(t_x, t_y, t_z).P \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

- Propriedades
  - Transformação inversa

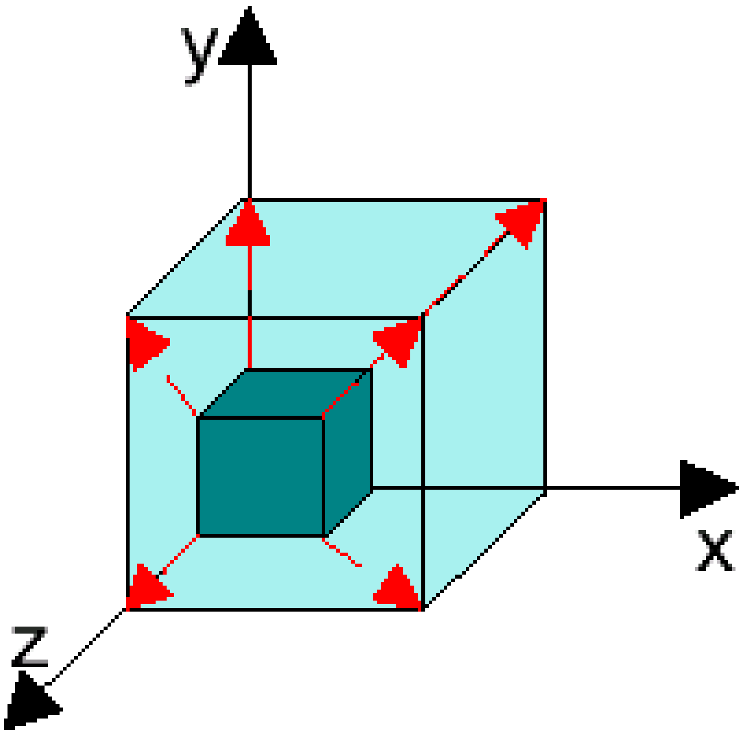
$$T^{-1}(t_x, t_y, t_z) = T(-t_x, -t_y, -t_z)$$

  - Composição de translações

$$T(t_{x2}, t_{y2}, t_{z2}).T(t_{x1}, t_{y1}, t_{z1}) = T(t_{x1} + t_{x2}, t_{y1} + t_{y2}, t_{z1} + t_{z2})$$

Alteração de escala

- Alteração do tamanho de um objeto.



Alteração de escala

- Multiplicação das coordenadas x, y e z por constantes

$$\begin{cases} x' = S_x . x \\ y' = S_y . y \\ z' = S_z . z \end{cases}$$

$$P' = S\left(S_x, S_y, S_z\right).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alteração de escala

$$P' = P.S(S_x, S_y, S_z)$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alteração de escala

- Propriedades
  - Transformação inversa

$$S^{-1}\left(S_x, S_y, S_z\right) = S\left(\frac{1}{S_x}, \frac{1}{S_y}, \frac{1}{S_z}\right)$$

  - Composição de alterações de escala

$$S\left(S_{x2}, S_{y2}, S_{z2}\right).S\left(S_{x1}, S_{y1}, S_{z1}\right) = S\left(S_{x1}.S_{x2}, S_{y1}.S_{y2}, S_{z1}.S_{z2}\right)$$

Alteração de escala em função de um ponto de referência

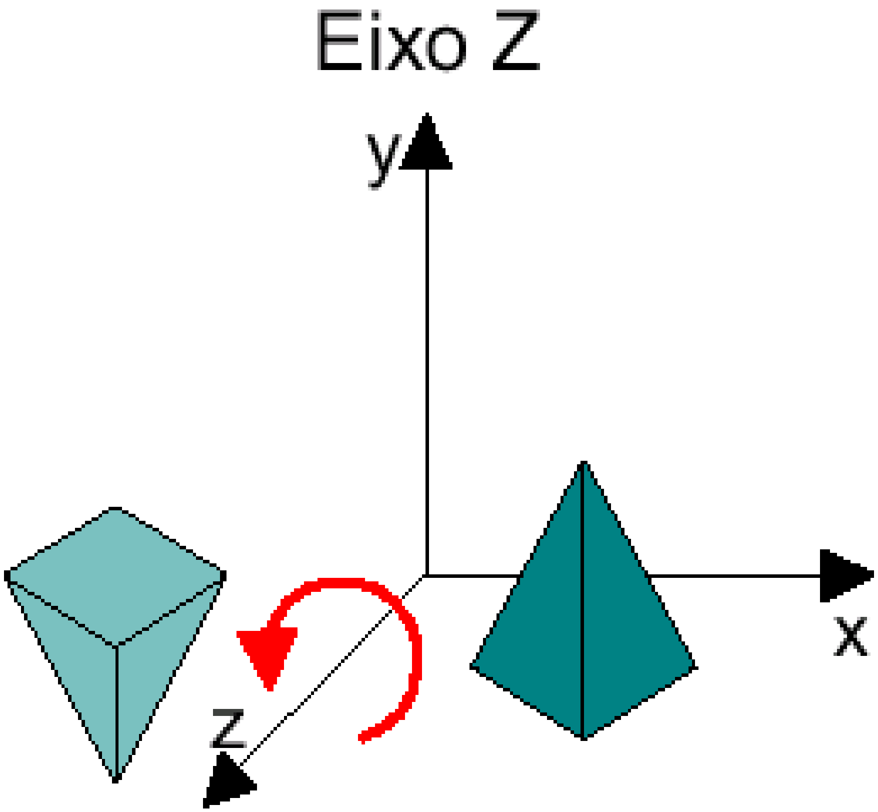
1. Translação do ponto de referência para a origem.
2. Alteração de escala.
3. Translação do ponto de referência da origem para a sua posição inicial.

$$P' = S(S_x, S_y, S_{z,} x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}).P = T^{-1}(-x_{ref}, -y_{ref}, -z_{ref}).S(S_x, S_y, S_z).T(-x_{ref}, -y_{ref}, -z_{ref}) =$$
$$= T(x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}).S(S_x, S_y, S_z).T(-x_{ref}, -y_{ref}, -z_{ref})$$

Transformações 3D

- Rotação
  - Deslocamento circular de um objeto sobre um determinado eixo

Rotação



$$\begin{cases} x' = x.\cos(\theta) - y.\mathrm{sen}(\theta) \\ y' = x.\mathrm{sen}(\theta) + y.\cos(\theta) \\ z' = z \end{cases}$$

Rotação

- Vetor coluna

$$P' = R_z(\Theta) \bullet P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & -sen(\Theta) & 0 & 0 \\ sen(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

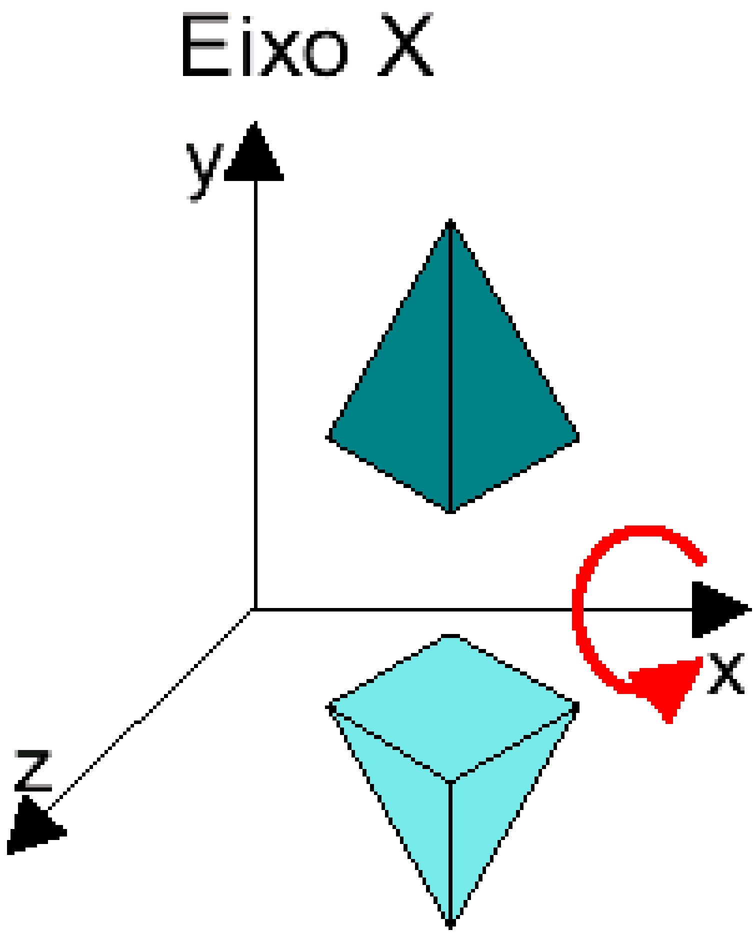
Rotação

- Vetor linha

$$P' = P.R_z(\Theta)$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & sen(\Theta) & 0 & 0 \\ -sen(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y.\cos(\theta) - z.\text{sen}(\theta) \\ z' = y.\text{sen}(\theta) + z.\cos(\theta) \end{cases}$$

Rotação

- Vetor coluna

$$P' = R_x(\Theta) \bullet P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta) & -sen(\Theta) & 0 \\ 0 & sen(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

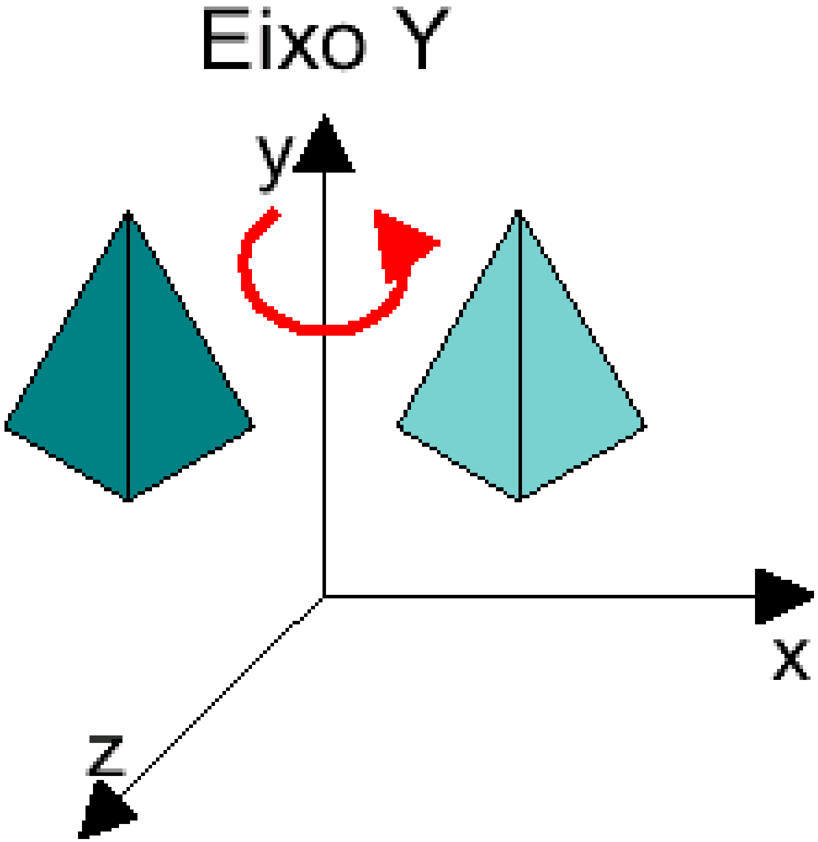
Rotação

- Vetor linha

$$P' = P.R_x(\Theta)$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Theta) & sen(\Theta) & 0 \\ 0 & -sen(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação



$$\begin{cases} x' = x.\cos(\theta) + z.\mathrm{sen}(\theta) \\ y' = y \\ z' = -x.\mathrm{sen}(\theta) + z.\cos(\theta) \end{cases}$$

Rotação

- Vetor coluna

$$P' = R_y(\Theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & sen(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

- Vetor linha

$$P' = P.R_y(\Theta)$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & -sen(\Theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sen(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

- Propriedades da rotação
  - Transformação inversa

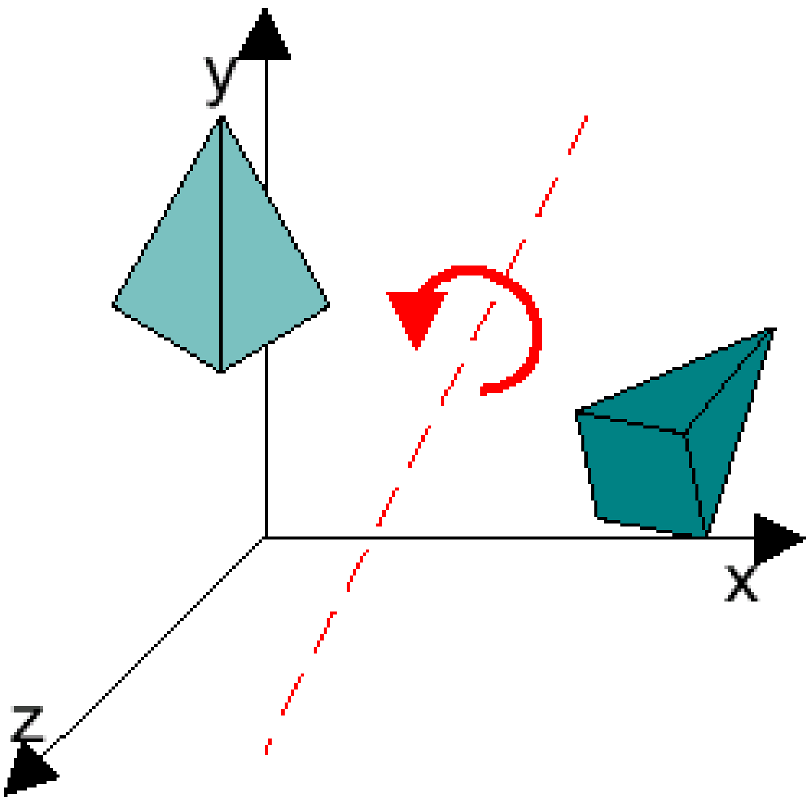
$$R^{-1}(\Theta) = R(-\Theta)$$

  - Composição de rotações

$$R(\Theta_2) \bullet R(\Theta_1) = R(\Theta_1 + \Theta_2)$$

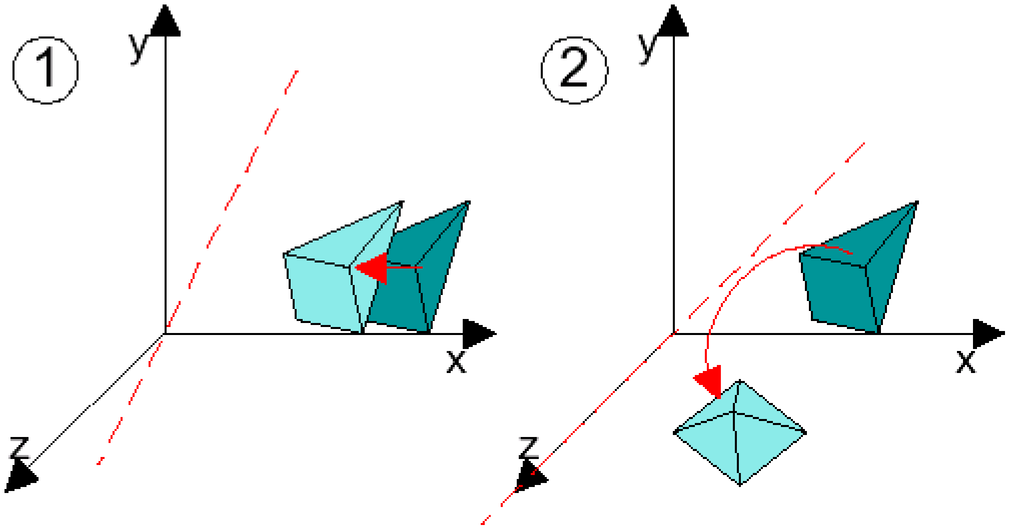
Rotação

- Rotação em torno de um eixo arbitrário



Rotação

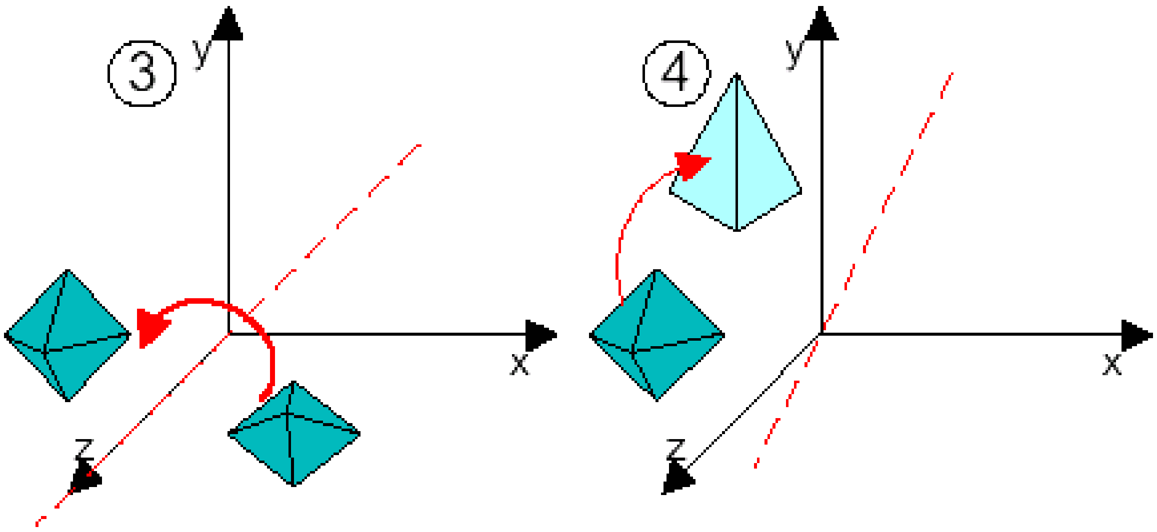
1. Aplicar uma translação de forma a que o eixo passe pela origem do referencial.
2. Aplicar rotações de forma a que o eixo de rotação coincida com um dos eixos coordenados.



Rotação

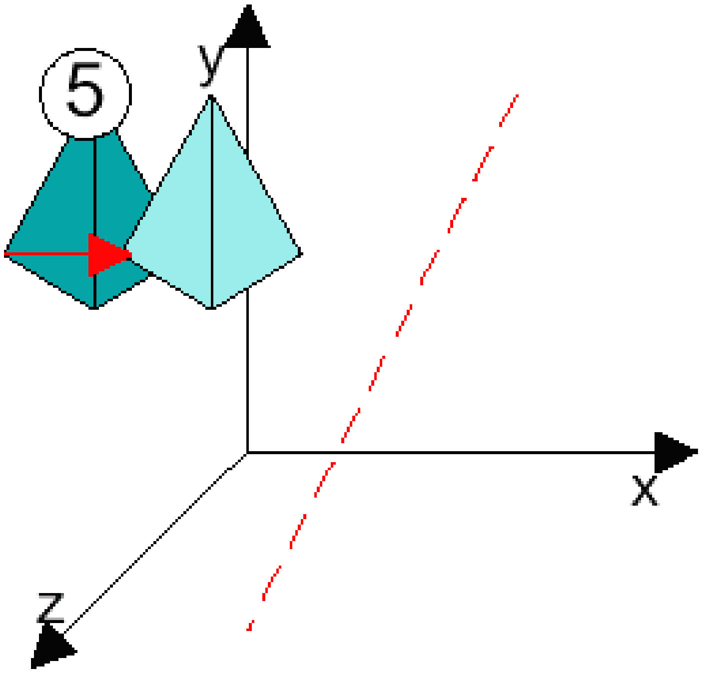
3. Realizar a rotação desejada sobre o eixo coordenado escolhido.

4. Aplicar as rotações inversas para colocar o eixo na sua orientação original.



Rotação

5. Aplicar a translação inversa de forma a colocar o eixo na sua posição inicial.



Rotação

$$P' = R_z(\Theta).R_y(\beta).R_x(\alpha).T(-x_1,-y_1,-z_1).P$$

$$R_z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & -sen(\Theta) & 0 & 0 \\ sen(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

3. Rotação inversa

$$P' = R_x^{-1}(\alpha).R_y(\beta)^{-1}.R_z(\Theta).R_y(\beta).R_x(\alpha).T(-x_1,-y_1,-z_1).P$$

4. Translação inversa

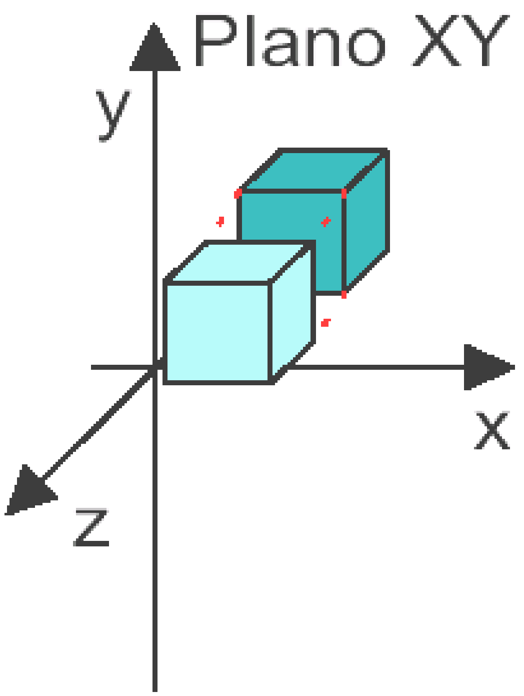
$$P' = T^{-1}(-x_1,-y_1,-z_1)R_x(\alpha)^{-1}.R_y(\beta)^{-1}.R_z(\Theta).R_y(\beta).R_x(\alpha).T(-x_1,-y_1,-z_1).P$$

$$\boxed{P' = T(x_1,y_1,z_1)R_x(-\alpha).R_y(-\beta).R_z(\Theta).R_y(\beta).R_x(\alpha).T(-x_1,-y_1,-z_1).P}$$

Reflexão

- Produz uma imagem "espelhada" de um objeto em relação a um determinado plano.

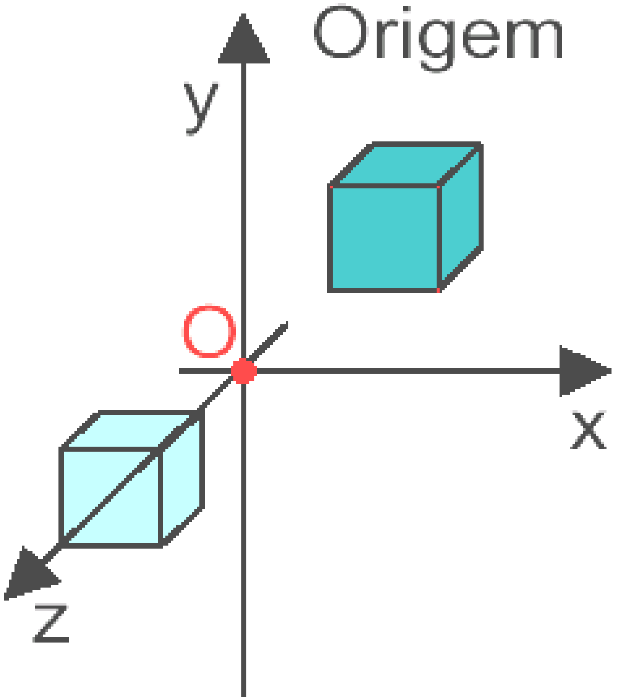
$$\begin{cases} x' = S_x . x \\ y' = S_y . y \\ z' = S_z . z \end{cases}$$



$$RF_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

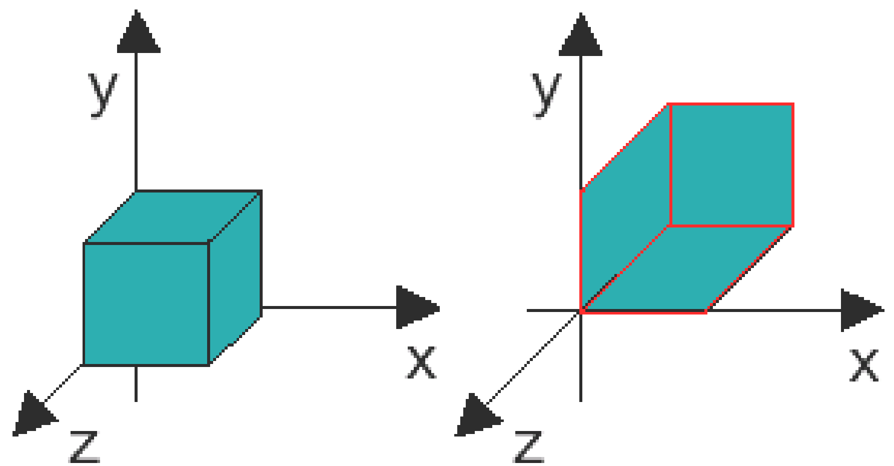


$$RF_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Shear

- Causa a distorção de um determinado objeto segundo uma determinada direção.

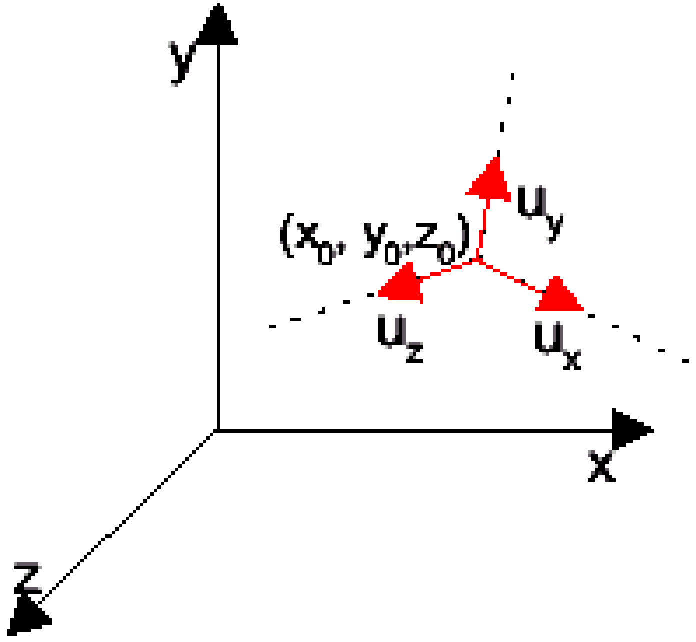
$$\begin{cases} x' = x + sh_x.z \\ y' = y + sh_y.z \\ z' = z \end{cases}$$



$$Sh_z(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 3D

- Transformações entre sistemas de coordenadas
  - Frequentemente é necessário converter as coordenadas que descrevem objetos num determinado referencial para outro.



Transformações 3D

- Dado um novo sistema coordenado definido por:
  - Um ponto origem.
  - Um vetor unitário por eixo.
- Para se obter a matriz transformação
  - Desloca-se o novo referencial de forma a coincidir com o antigo:

Transformações 3D

1. Translação para a origem:

$$P' = T(-x_0, -y_0, -z_0).P$$

2. Rotação do referencial:

- O produto das matrizes de rotação produz um resultado em que a sub-matriz (3x3) do canto superior esquerdo é constituída por três vetores linha (ou coluna) ortogonais.

Transformações 3D

- Utilizando os vetores unitários do novo referencial obtemos a matriz rotação **R**.

$$P' = R.T(-x_0, -y_0, -z_0).P$$

$$R = \begin{bmatrix} u_{x_x} & u_{x_y} & u_{x_z} & 0 \\ u_{y_x} & u_{y_y} & u_{y_z} & 0 \\ u_{z_x} & u_{z_y} & u_{z_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 3D

– Para obter a transformação inversa:

$$P' = T^{-1}\left(-x_0, -y_0, -z_0\right).R^{-1}.P' = T\left(x_0, y_0, z_0\right).R^{-1}.P'$$