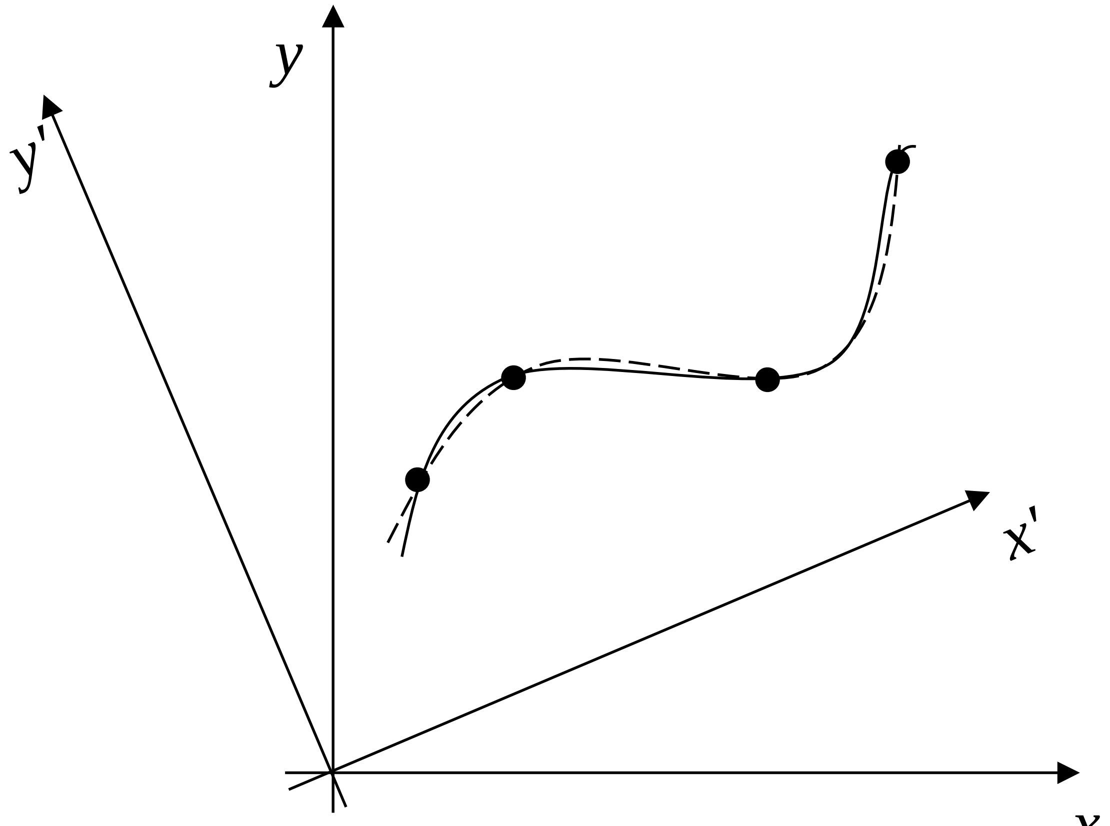
Curvas Paramétricas

Curvas Interpoladas

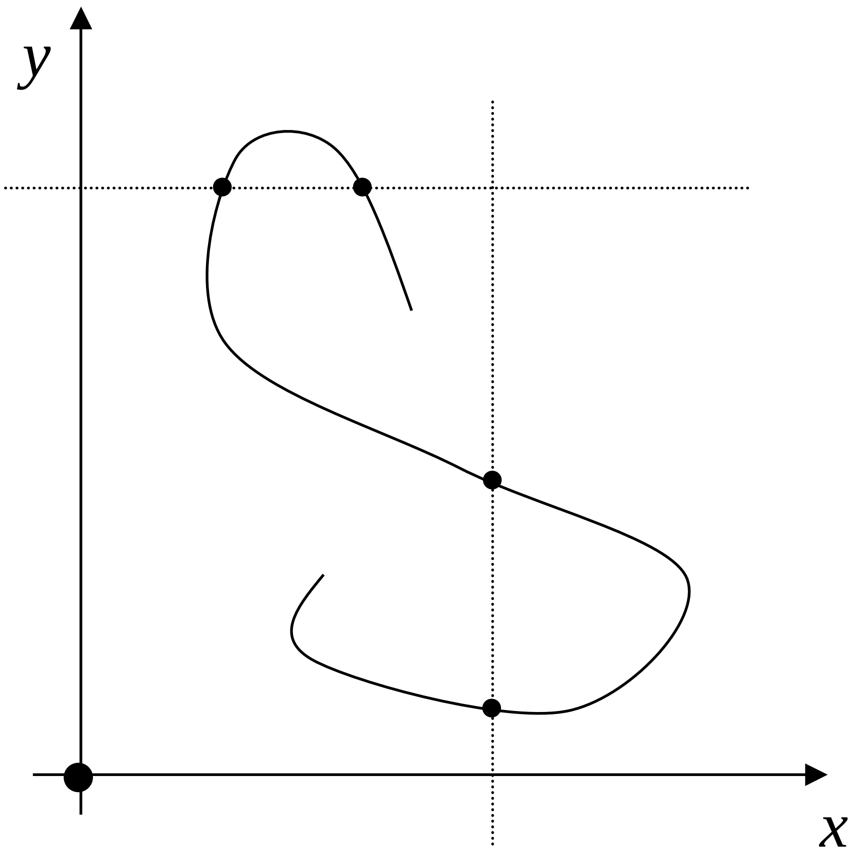
Formas de Hermite

Formas de Bezier

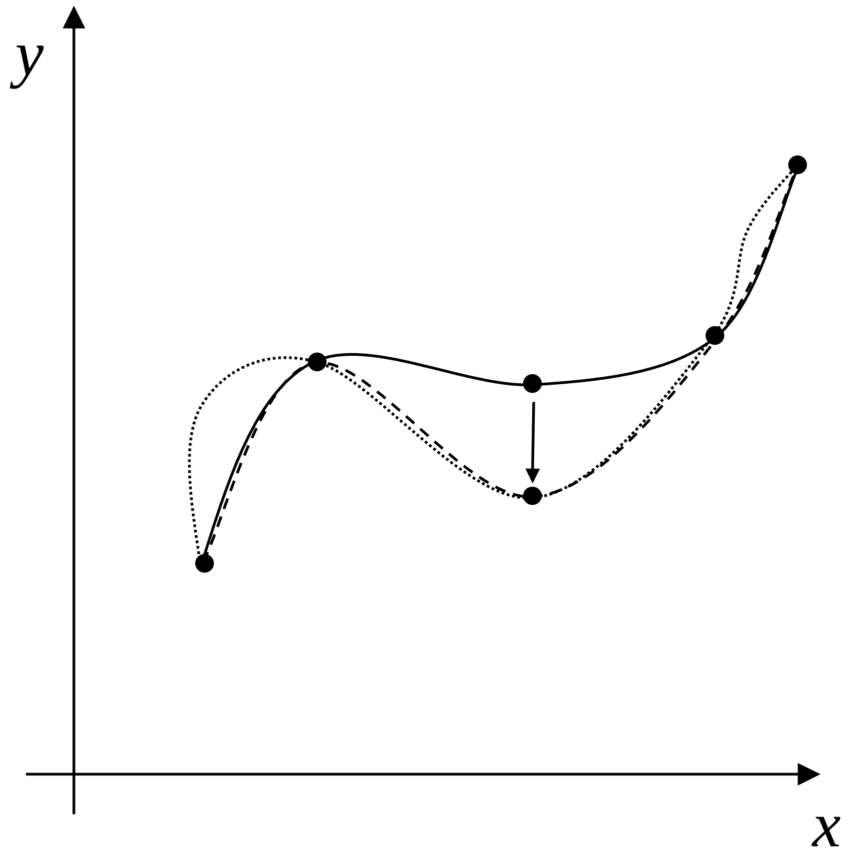
Requisitos: Independência de eixos



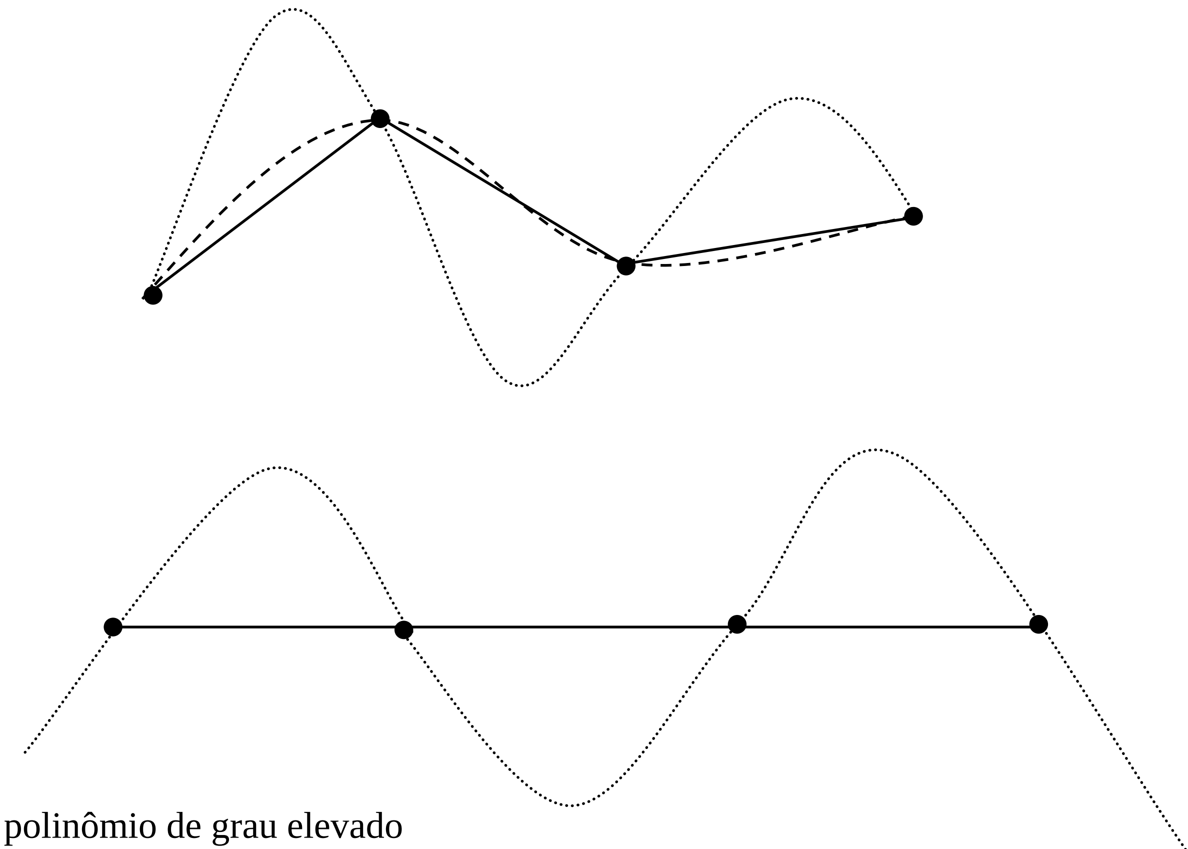
Requisitos: Valores Múltiplos



Requisitos: Controle Local

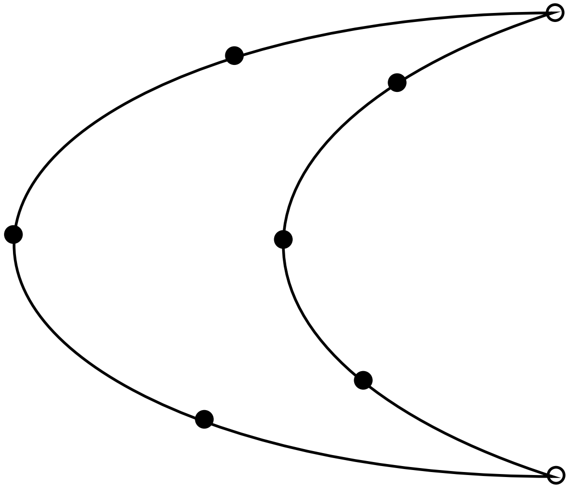


Requisitos: Redução da Variação

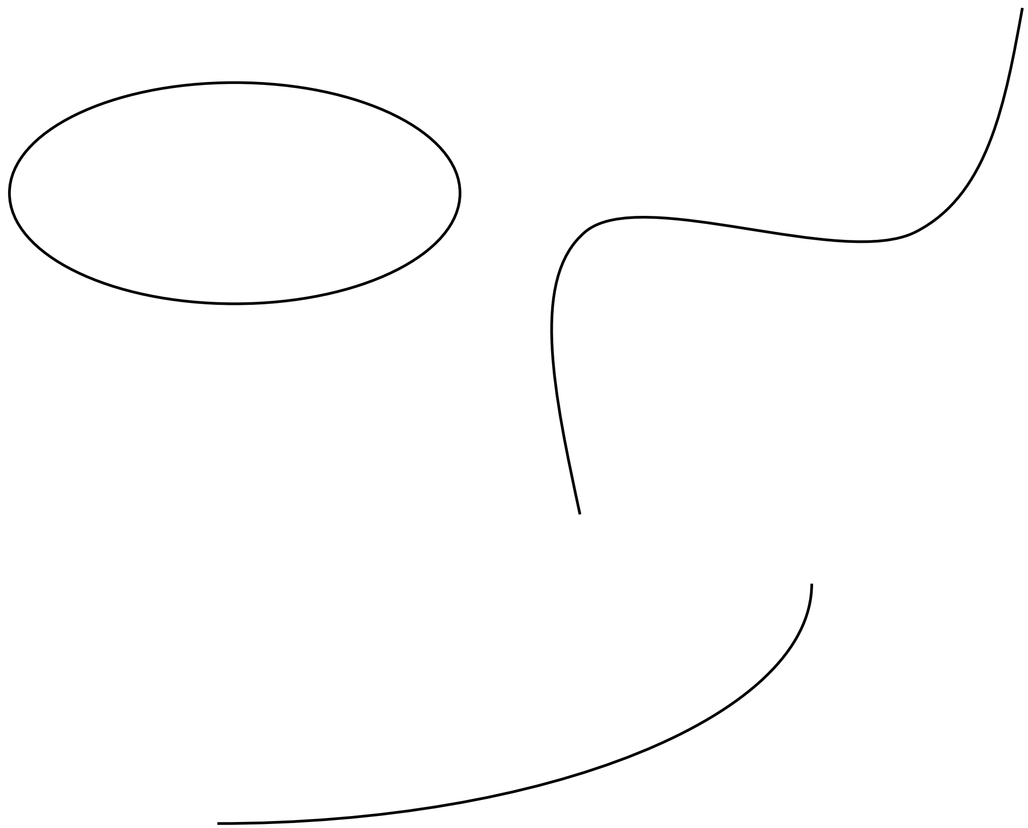


polinômio de grau elevado

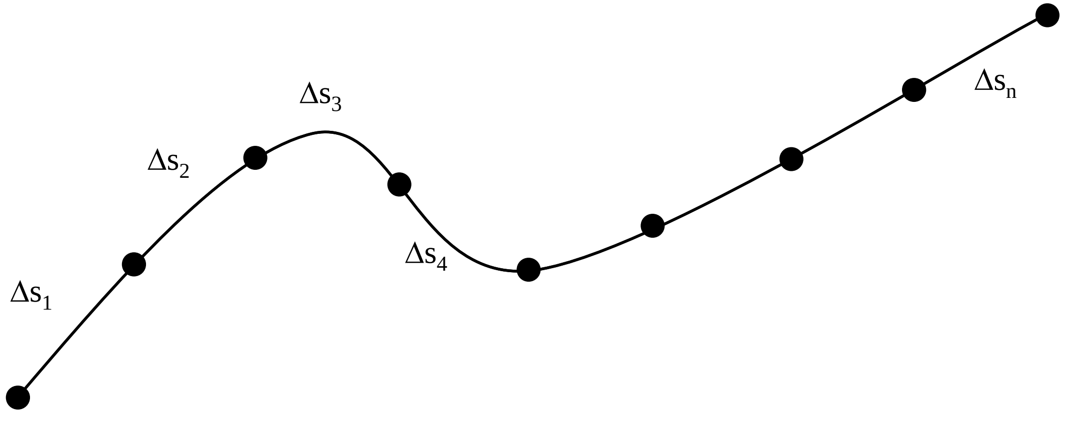
Requisitos: Continuidade Variável



Requisitos: Versatilidade

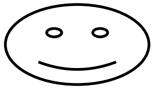


Requisitos: Amostragem Uniforme



$$\Delta s_i \approx \Delta s_j$$

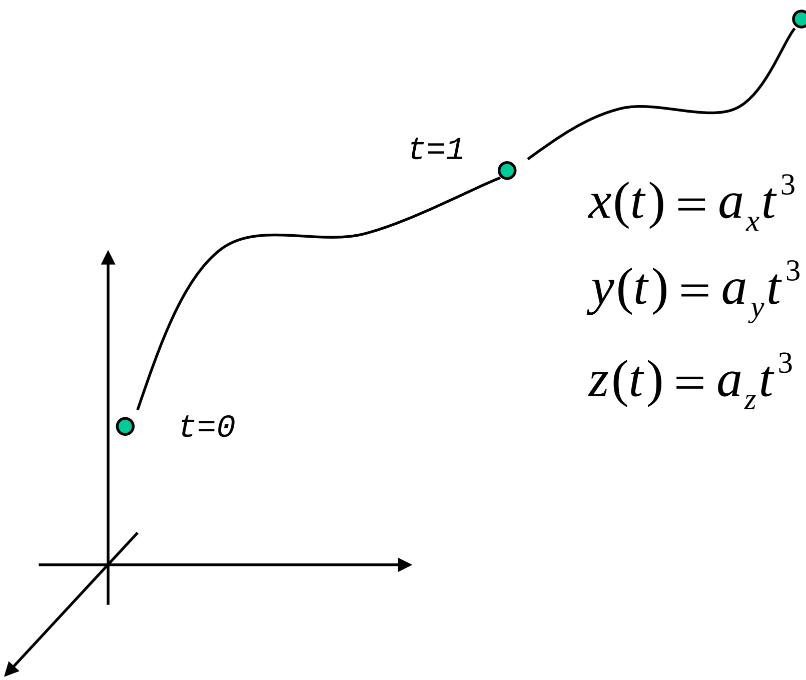
Finalizando:



Formulação matemática tratável

Solução

Curva representada por partes através de polinômios de grau baixo (geralmente 3)

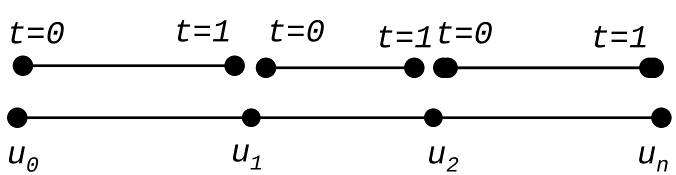


$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

Parametrização

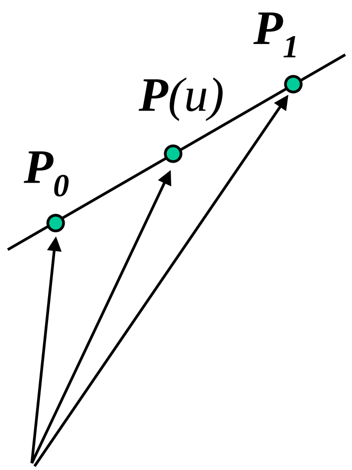


$t \in [0,1]$ *local*

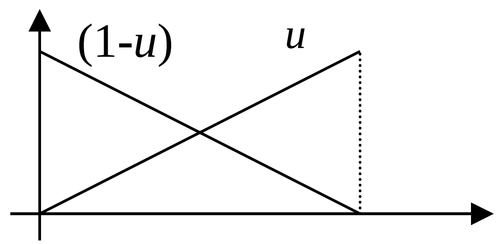
ou

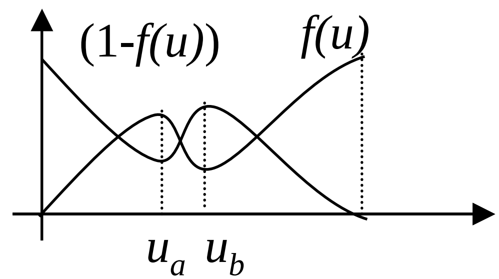
$u \in [u_0, u_n]$ *global*

Requisitos da parametrização

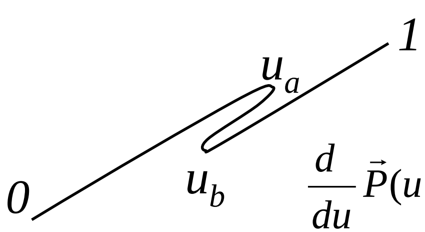


$$\vec{P}(u) = (1-u)\vec{P}_0 + u\,\vec{P}_1$$





$$\vec{P}(u) = (1-f(u))\vec{P}_0 + f(u)\,\vec{P}_1$$



$$\frac{d}{du}\vec{P}(u) = 0$$

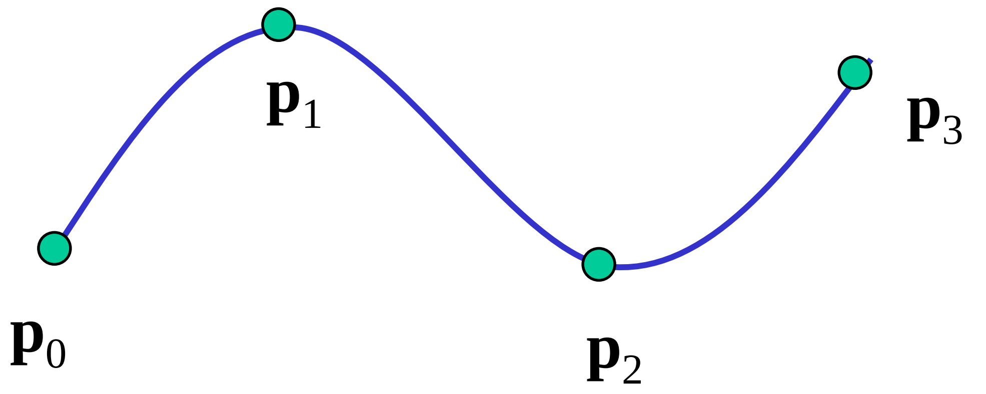
Forma Matricial

$$\mathrm{p}(u) = \sum_{k=0}^{3} c_k u^k$$

Seja $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$

então $\mathrm{p}(u) = \mathbf{u}^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{u}$

Curva Interpolada



Dados quatro pontos (pontos de controle) $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ determinar a cúbica $\mathbf{p}(u)$ que passa por cada um deles

Deve-se calcular $\mathbf{c}_0$,$\mathbf{c}_1$,$\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$

Equações de Interpolação

Aplicar as condições de interpolação em $u=0,\ 1/3,\ 2/3,\ 1$

$$p_0=p(0)=c_0$$
$$p_1=p(1/3)=c_0+(1/3)c_1+(1/3)^2c_2+(1/3)^3c_2$$
$$p_2=p(2/3)=c_0+(2/3)c_1+(2/3)^2c_2+(2/3)^3c_2$$
$$p_3=p(1)=c_0+c_1+c_2+c_2$$

ou na forma matricial com $\mathbf{p} = [p_0\ p_1\ p_2\ p_3]^T$

$$\mathbf{p=Ac} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \left(\frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ 1 & \left(\frac{2}{3}\right) & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Interpolação

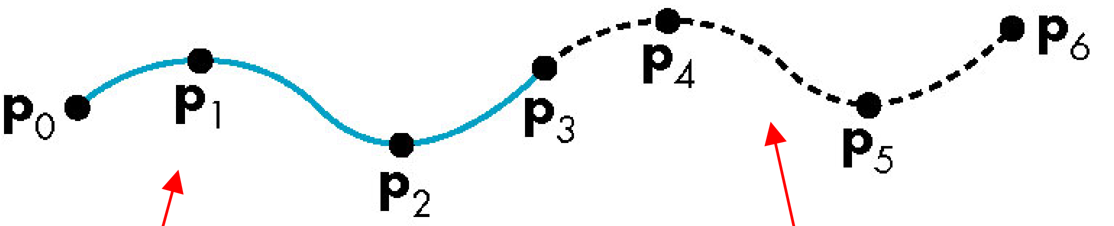
Resolvendo para $\mathbf{c}$ obtemos a *matriz de interpolação*

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5.5 & 9 & -4.5 & 1 \\ 9 & -22.5 & 18 & -4.5 \\ -4.5 & 13.5 & -13.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_I \mathbf{p}$$

Note que $\mathbf{M}_I$ não depende dos dados de entrada e pode ser utilizada para cada um dos segmentos em x, y e z

Interpolação de Múltiplos Segmentos



usa-se $\mathbf{p} = [p_3\ p_4\ p_5\ p_6]^T$

usa-se $\mathbf{p} = [p_0\ p_1\ p_2\ p_3]^T$

Obtém-se continuidade nos pontos de junção mas não continuidade das derivadas

Funções de Mistura (Blending)

Reescrevendo a equação para p(u)

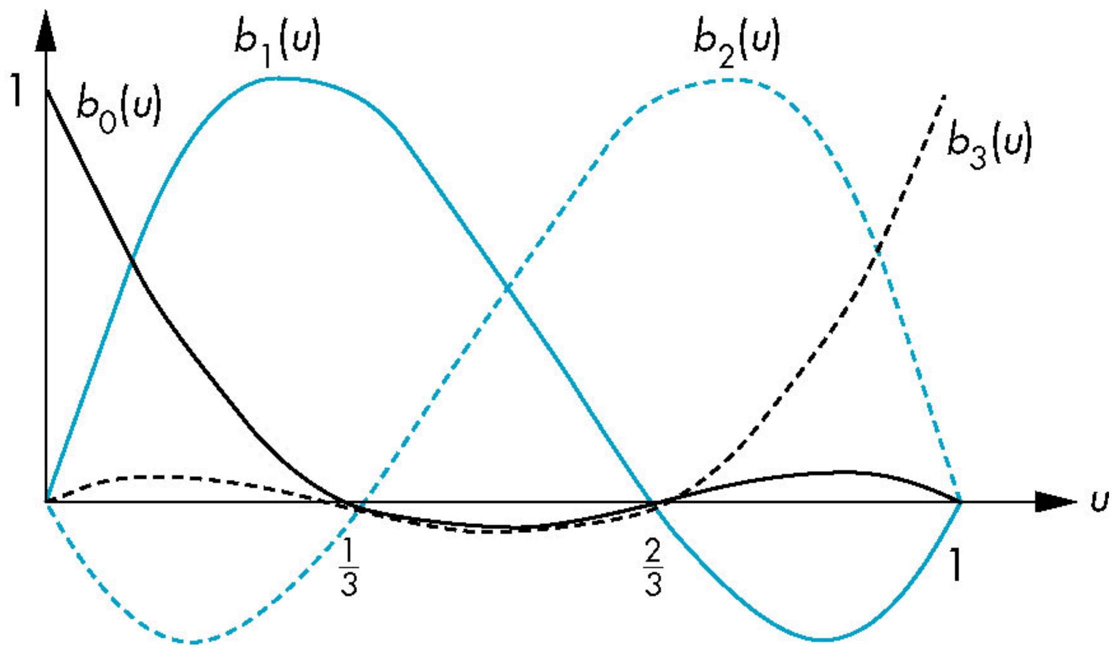
$$p(u)=\mathbf{u}^T\mathbf{c}=\mathbf{u}^T\mathbf{M}_I\mathbf{p} = \mathbf{b(}u\mathbf{)}^T\mathbf{p}$$

em que $b(u) = [b_0(u)\ b_1(u)\ b_2(u)\ b_3(u)]^T$ é um vetor com os polinômios de mistura (*blending polynomials)* tais que $p(u) = b_0(u)p_0 + b_1(u)p_1 + b_2(u)p_2 + b_3(u)p_3$

$$b_0(u) = -4.5(u-1/3)(u-2/3)(u-1)$$
$$b_1(u) = 13.5u\ (u-2/3)(u-1)$$
$$b_2(u) = -13.5u\ (u-1/3)(u-1)$$
$$b_3(u) = 4.5u\ (u-1/3)(u-2/3)$$

Funções de Mistura (Blending)

- Essas funções não são suaves
  - Portanto a interpolação não será suave

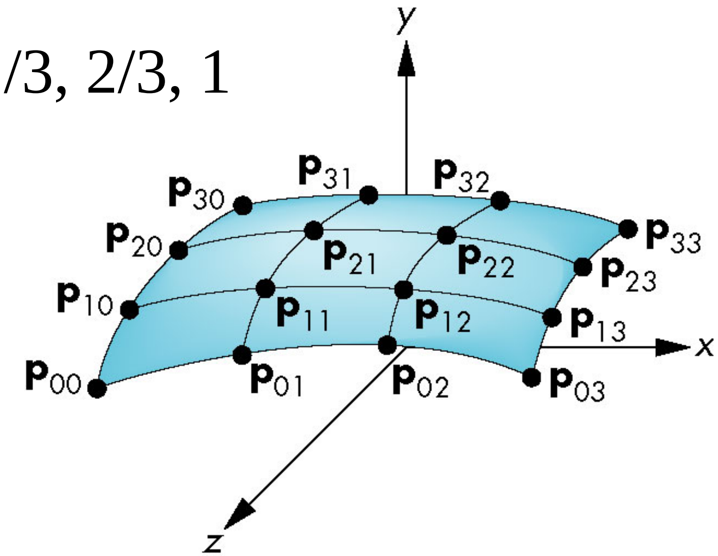


Retalhos Interpolados

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} c_{ij} u^i v^j$$

Necessita de 16 condições para determinar 16 coeficientes c_{ij}

Escolher em $u,v = 0, 1/3, 2/3, 1$



Forma Matricial

Seja : $\mathbf{v} = [1\ v\ v^2\ v^3]^T$

$\mathbf{C} = [c_{ij}] \qquad \mathbf{P} = [p_{ij}]$

Então: $p(u,v) = \mathbf{u}^T C \mathbf{v}$

Se observamor que para u (ou v) constante, obtemos uma curva interpolada em v (ou u), podemos mostrar que

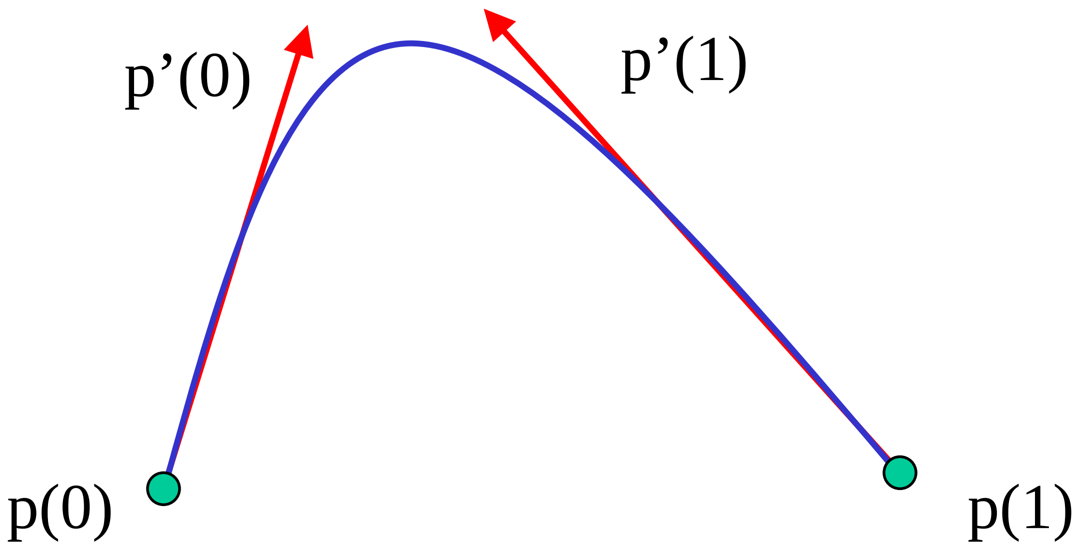
$$\mathbf{C} = M_I\, P\, M_I^T$$

$$p(u,v) = u^T M_I P M_I^T v$$

Outros Tipos de Curvas Paramétricas

- Como podemos contornar as limitações da forma interpolada
  - Ausência de suavidade
  - Descontinuidade de derivadas nas junções
- Existem quatro condições (para cúbicas) que são aplicadas a cada segmento
  - Usá-las para outras finalidades (além da interpolação)
  - Podemos aproximar os dados (não é necessário passar pelos pontos de controle)

Forma de Hermite



Usa duas condições para interpolação e
duas condições para derivadas por segmento

Garante continuidade da curva e da derivada
de primeira ordem entre segmentos

Equações

Condições de interpolação não mudam nas extremidades

$$p(0) = p_0 = c_0$$
$$p(1) = p_3 = c_0+c_1+c_2+c_3$$

Diferenciando obtém-se : $p'(u) = c_1+2uc_2+3u^2c_3$

Avaliando p'(u) nos pontos extremos

$$p'(0) = p'_0 = c_1$$
$$p'(1) = p'_3 = c_1+2c_2+3c_3$$

Forma Matricial

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_3 \\ p'_0 \\ p'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{c}$$

Resolvendo, obtém-se $\mathbf{c} = \mathbf{M}_H\,\mathbf{q}$ onde $\mathbf{M}_H$ é a matriz de Hermite

$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinômios de Mistura (Blending)

$$p(u) = \mathbf{b}(u)^T\mathbf{q}$$

$$\mathbf{b}(u) = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix}$$

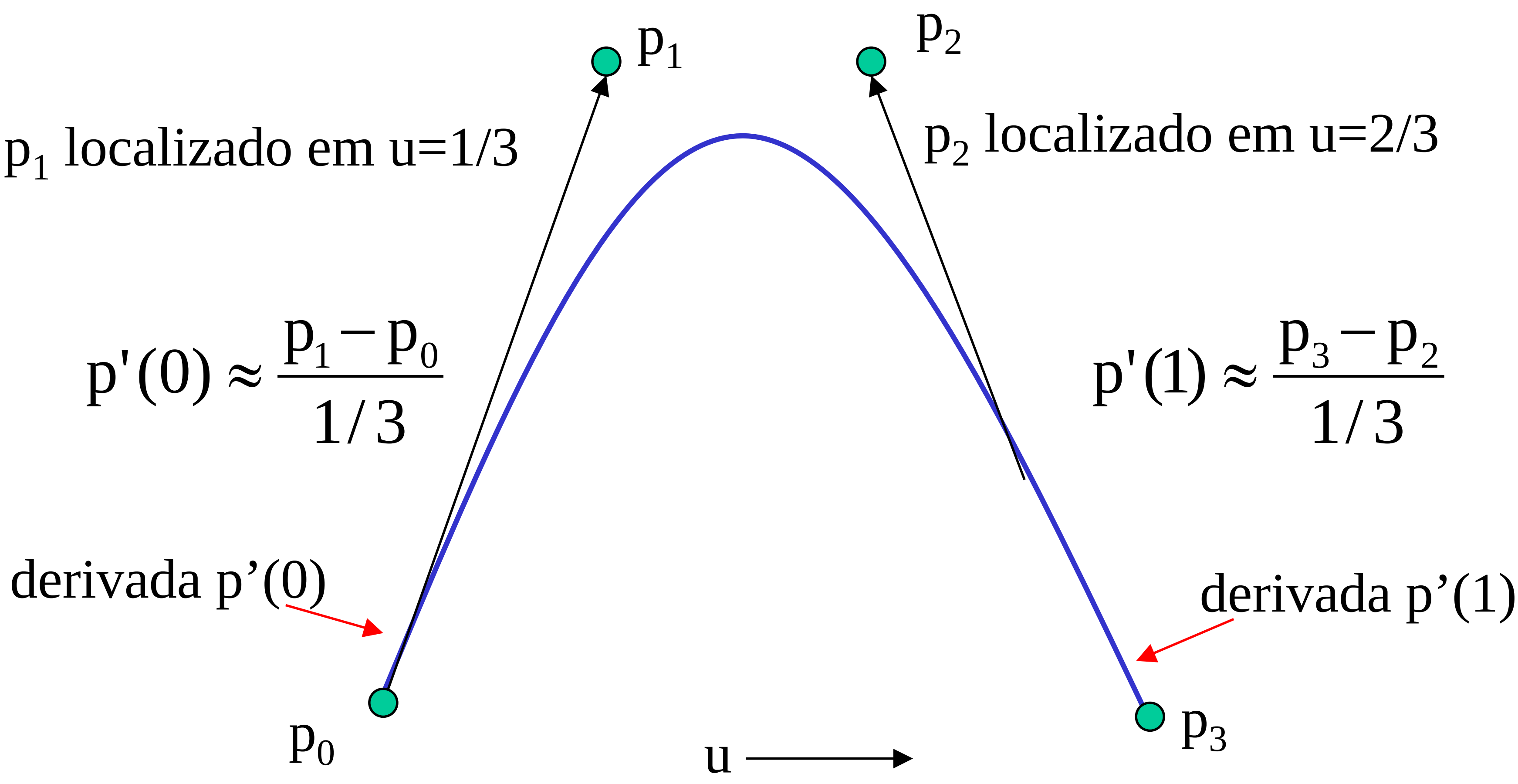
Embora essas funções seja suaves, a forma de Hermite não é usada diretamente na computação gráfica e CADs pois geralmente temos pontos de controle e não derivadas

Todavia, a ela serve de base para a forma de Bezier

Curva de Bezier - Motivação

- Em CG e CADs, geralmente não se tem dados sobre as derivadas
- Bezier sugeriu utilizar os mesmos 04 pontos utilizados na interpolação cúbica para aproximar as derivadas necessárias à forma de Hermite

Derivadas Aproximadas



Equações

Condições de interpolação são as mesmas de antes

$$p(0) = p_0 = c_0$$
$$p(1) = p_3 = c_0+c_1+c_2+c_3$$

Condições para as derivadas aproximadas são :

$$p'(0) = 3(p_1 - p_0) = c_0$$
$$p'(1) = 3(p_3 - p_2) = c_1+2c_2+3c_3$$

Deve-se resolver o sistema de equação para obter $\mathbf{c} = \mathbf{M}_B\, \mathbf{p}$

Matriz de Bezier

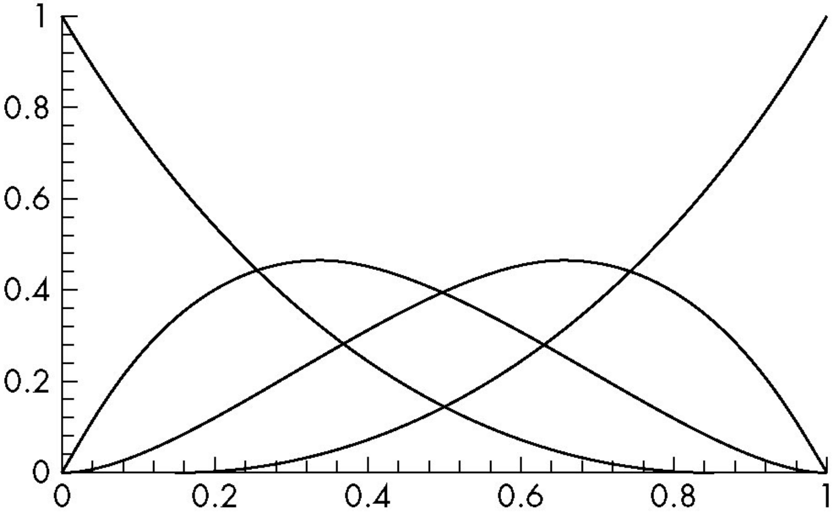
$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{u}) = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_B \, \mathbf{p} = \mathbf{b}(\mathrm{u})^{\mathrm{T}} \mathbf{p}$$

funções de mistura (blending)

Funções de Mistura (Blending)

$$\mathbf{b}(u) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 \\ 3u(1-u)^2 \\ 2u^2(1-u) \\ u^3 \end{bmatrix}$$



Note que todos as raízes estão em 0 ou 1 o que força as funções a serem suaves no intervalo (0,1)

Polinômios de Bernstein

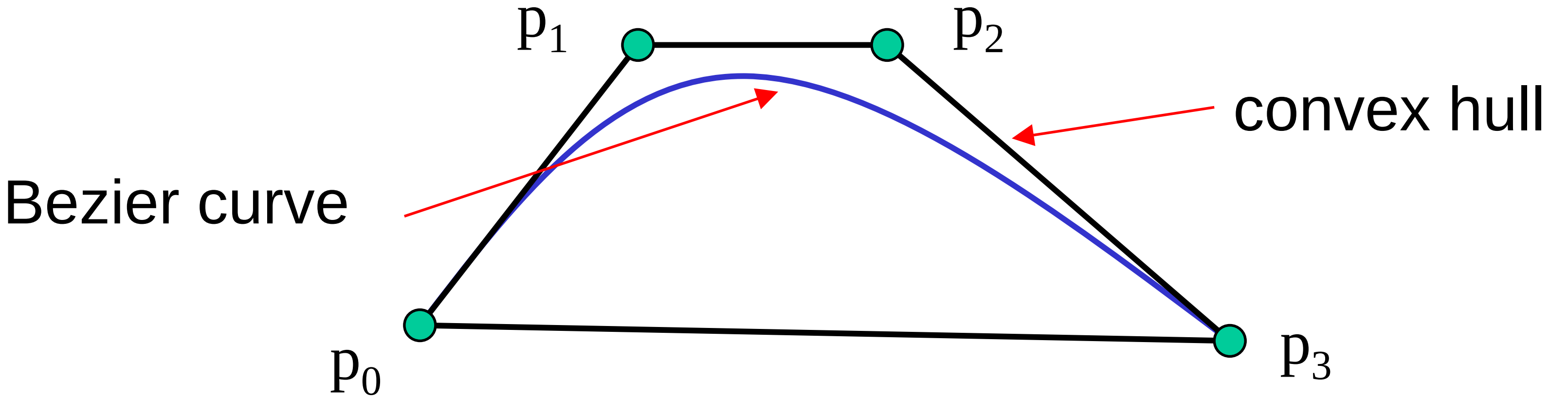
- As funções de mistura (blending) são um caso especial dos polinômios de Bernstein

$$b_{\mathrm{kd}}(u) = \frac{d!}{k!(d-k)!} u^k (1-u)^{d-k}$$

- Tais polinômios fornecem as funções de mistura para uma forma de Bezier de grau arbitrário
  - Todas as raízes estão em 0 e 1
  - Para qualquer grau a soma deles totaliza 1
  - Sempre valem entre 0 e 1 no intervalo (0,1)

Propriedade da Envoltória Convexa

- As propriedades dos polinômios de Bernstein garantem que qualquer curva de Bezier sempre estará dentro da envoltória convexa de seus pontos de controle
- Dessa forma, mesmo sem interpolar todos os dados, não estaremos muito distante deles

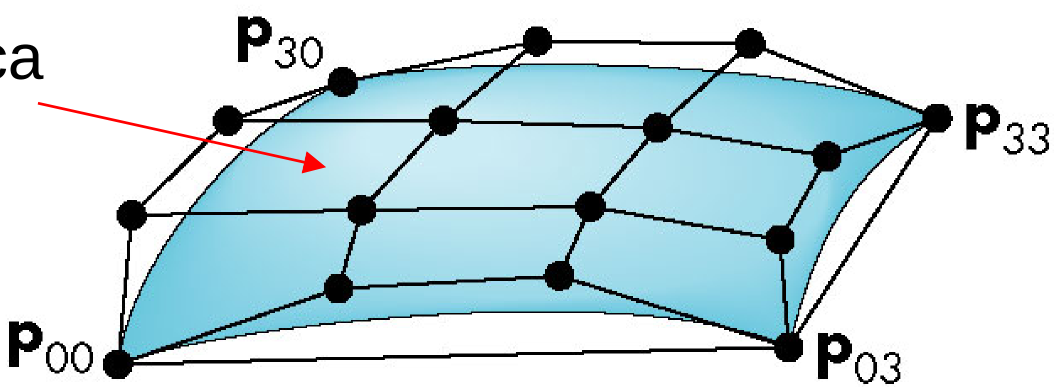


Retalhos de Bezier

Usando a mesma matriz de pontos $\mathbf{P}=[p_{ij}]$ da interpolação

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} b_i(u)\,b_j(v)\,p_{ij} = u^T\,\mathbf{M}_B\,\mathbf{P}\,\mathbf{M}_B^T\,v$$

Retalho fica dentro da envoltória convexa



Análise

- Embora a forma de Bezier seja muito melhor que a forma interpolada, observa-se que as derivadas não são contínuas nas junções
- Como podemos melhorar ?
  - Usar curvas de Bezier de graus mais elevados
    - Mais trabalho (esforço computacional)
    - Continuidade das derivadas ainda aproximada
  - Aplicar condições diferentes
    - Difícil se não permitir aumentar a ordem (grau) das curvas