

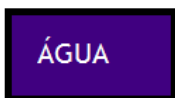
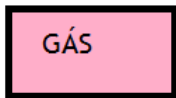
# ALGORITMOS EM GRAFOS

## PLANARIDADE

Prof. Alexei Machado

# Problema das 3 casas

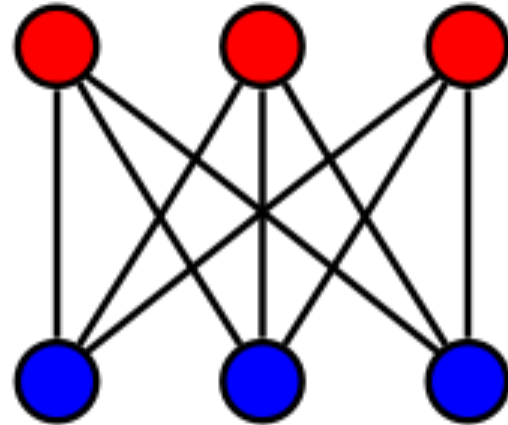
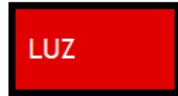
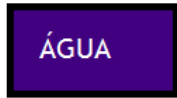
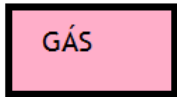
2



- É possível conectar as três casas aos três serviços sem cruzar as tubulações?

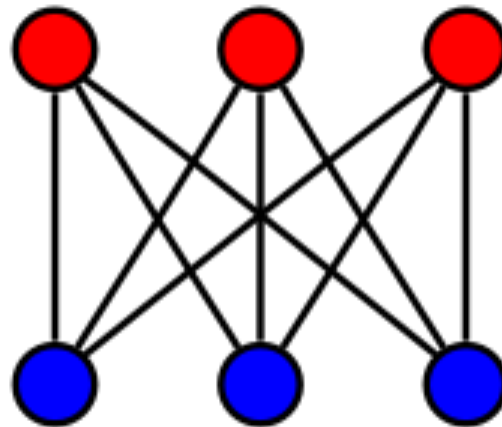
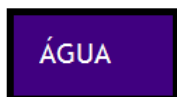
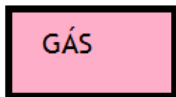
# Problema das 3 casas

3



# Problema das 3 casas

4

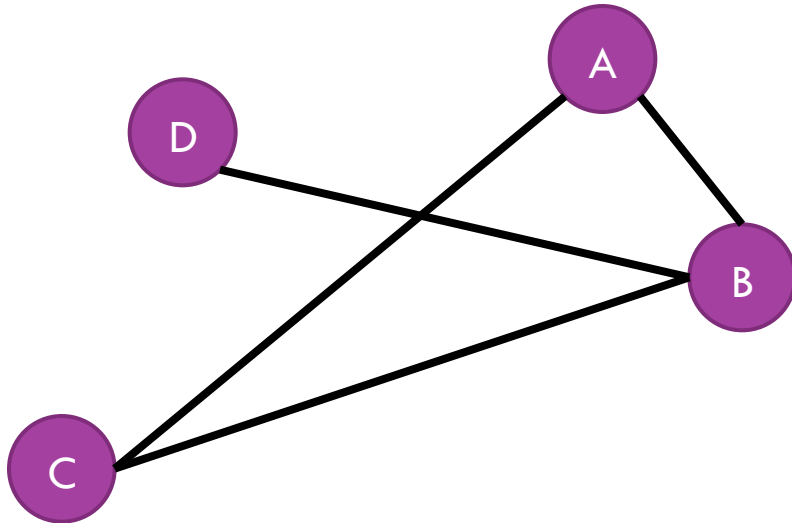


Grafo bipartido completo –  $K_{3,3}$

# Grafo planar

5

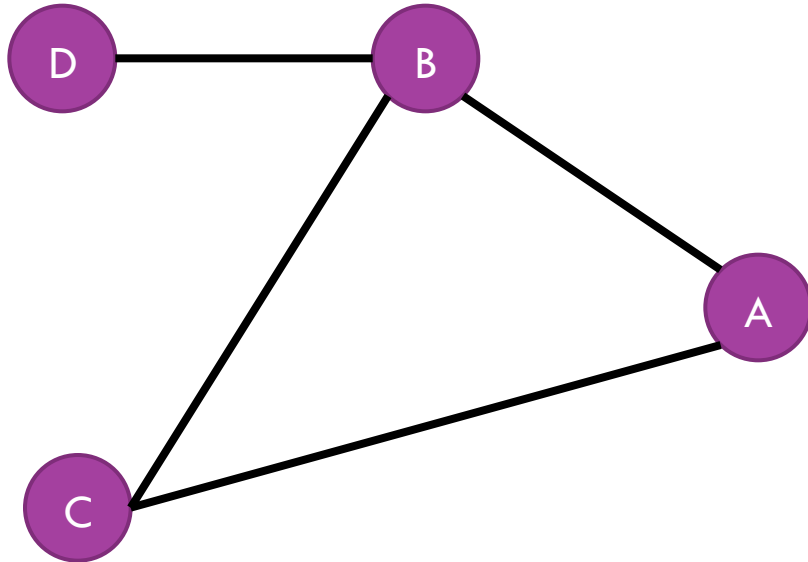
- Um grafo  $G$  é **planar** se existe uma representação gráfica de  $G$  no plano sem cruzamento de arestas.



# Grafo planar

6

- Um grafo  $G$  é **planar** se existe uma representação gráfica de  $G$  no plano sem cruzamento de arestas.

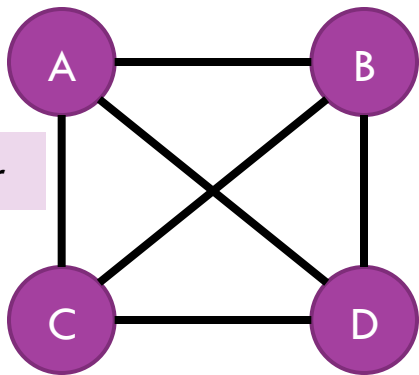


# Grafo planar e grafo plano

7

- Usaremos o termo **grafo plano** para uma representação planar de um grafo planar.

Grafo planar

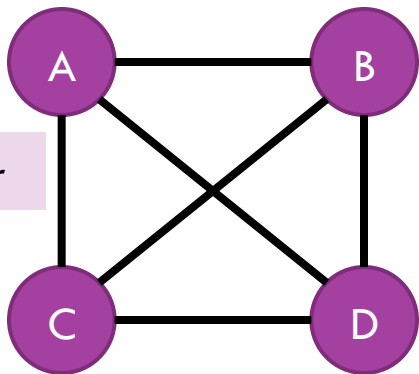


# Grafo planar e grafo plano

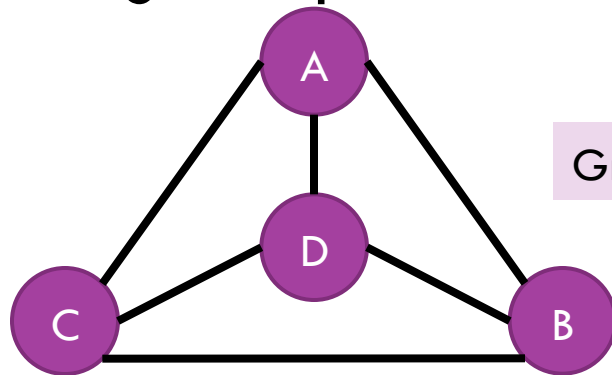
8

- Usaremos o termo **grafo plano** para uma representação planar de um grafo planar.

Grafo planar



Grafo plano





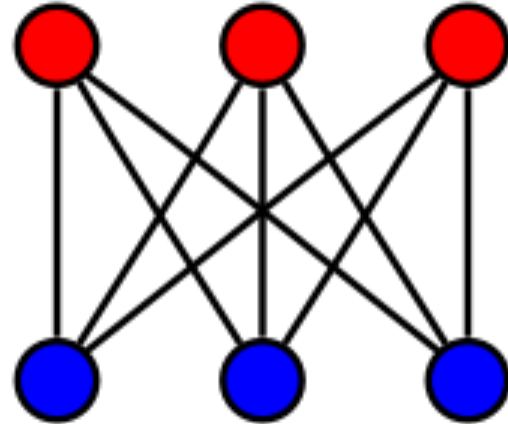
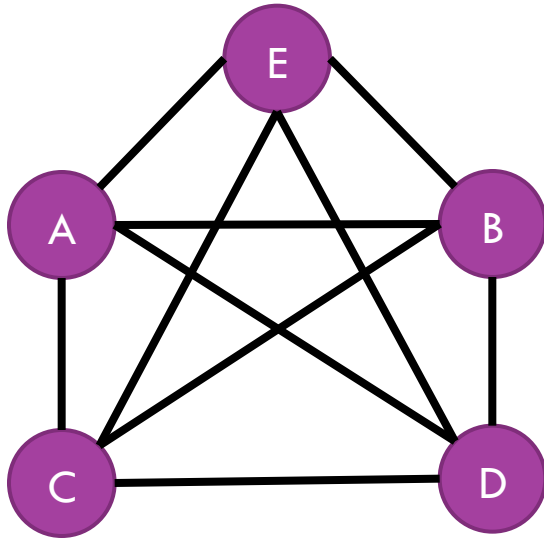
# Grafos planares e Kuratowski

9

- Existem dois grafos não planares que são muito importantes para o estudo de planaridade. Eles são chamados de grafos de Kuratowski

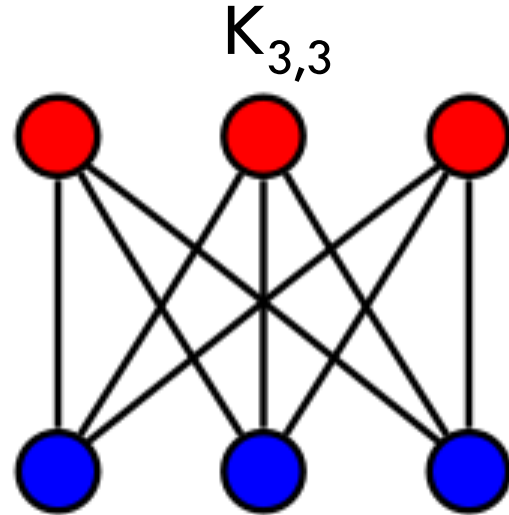
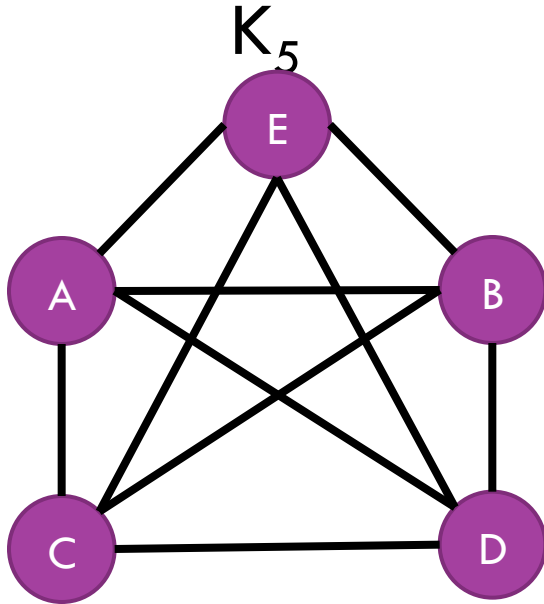
# Grafos de Kuratowski

10



# Grafos de Kuratowski

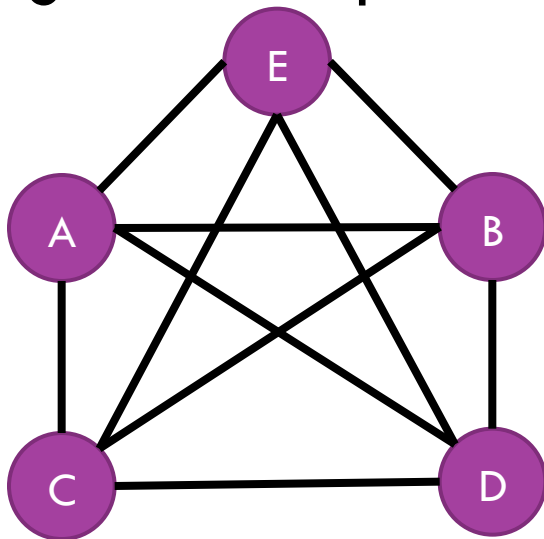
11



# Grafos de Kuratowski

12

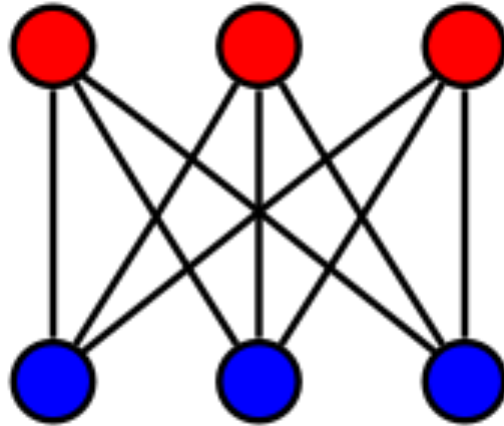
- $K_5$ : grafo não planar com o menor número de vértices



# Grafos de Kuratowski

13

- $K_{3,3}$ : grafo não planar com o menor número de arestas



# Grafos de Kuratowski

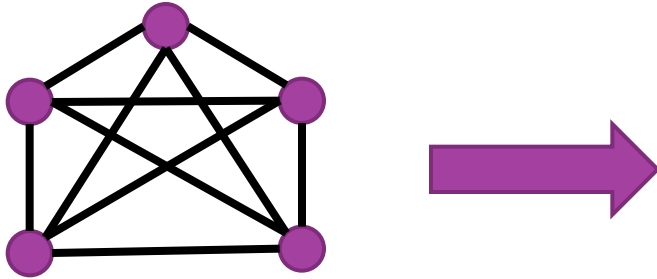
14

- Propriedades em comum de  $K_5$  e  $K_{3,3}$ 
  1. Ambos são regulares
  2. Ambos são não planares
  3. A remoção de uma aresta ou um vértice torna ambos os grafos planares

# Grafos de Kuratowski

15

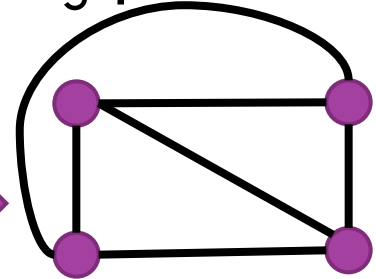
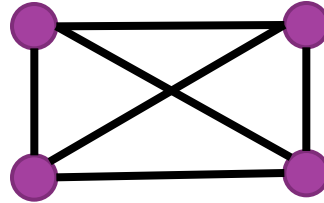
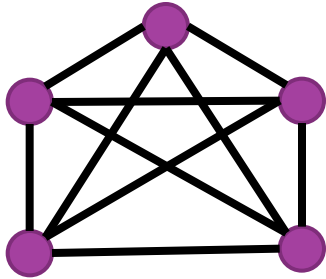
- A remoção de um vértice ou aresta torna  $K_5$  planar?



# Grafos de Kuratowski

16

□ A remoção de um vértice ou aresta torna  $K_5$  planar?

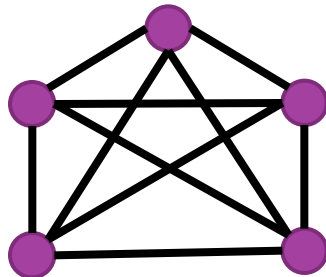
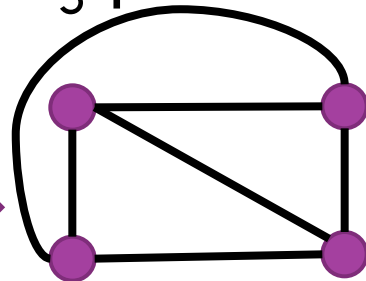
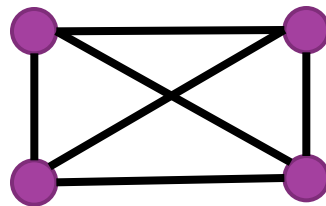
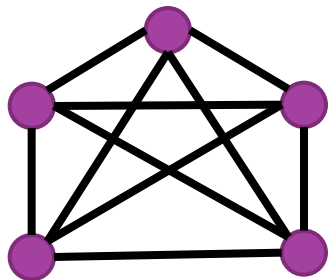




# Grafos de Kuratowski

17

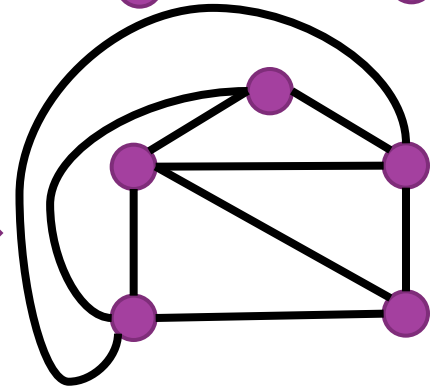
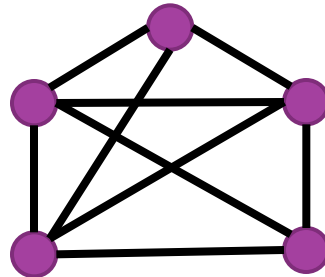
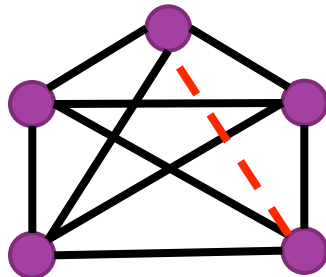
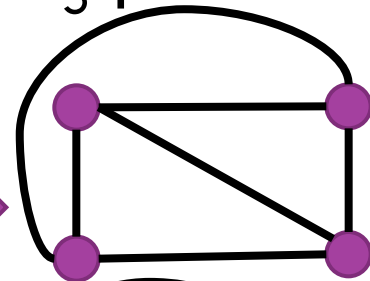
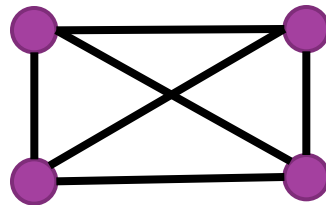
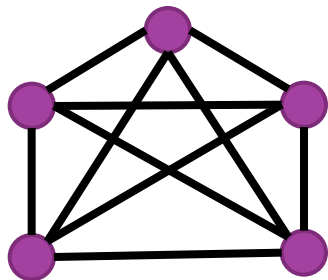
□ A remoção de um vértice ou aresta torna  $K_5$  planar?



# Grafos de Kuratowski

18

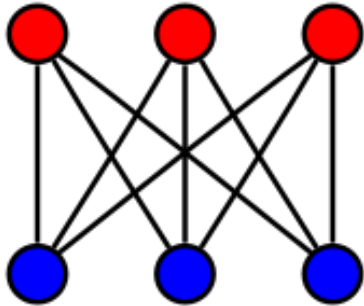
□ A remoção de um vértice ou aresta torna  $K_5$  planar?



# Grafos de Kuratowski

19

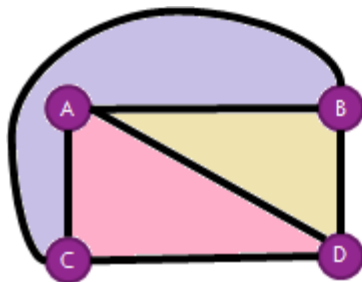
- A remoção de uma aresta ou vértice torna  $K_{3,3}$  planar?



# Planaridade

20

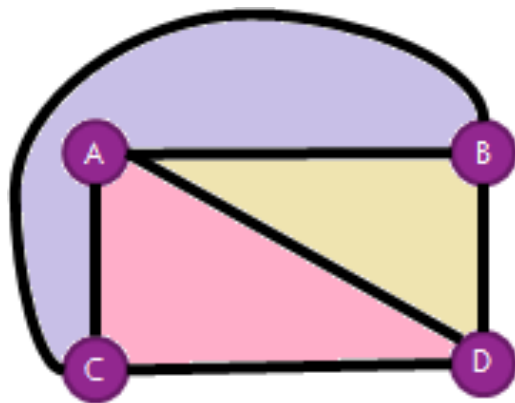
- **Região (ou face):** uma representação gráfica planar de um grafo divide o plano em *regiões* ou *faces*. Cada região é caracterizada pelas arestas que a contornam.



# Faces

21

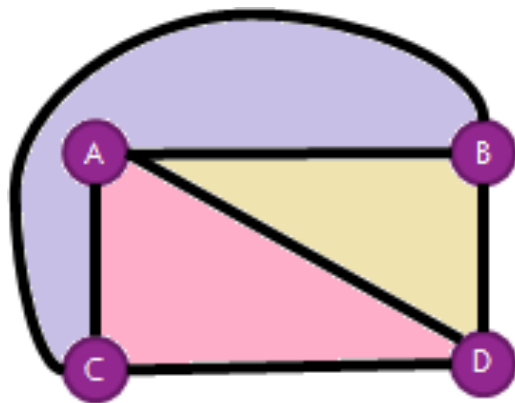
- Cada aresta de  $G$  pertence à fronteira de uma ou duas faces de  $G$ .
- O grau (comprimento), de uma face  $f$  de  $G$ , representado por  $d(f)$  é igual ao número de arestas da fronteira de  $f$ .



# Faces

22

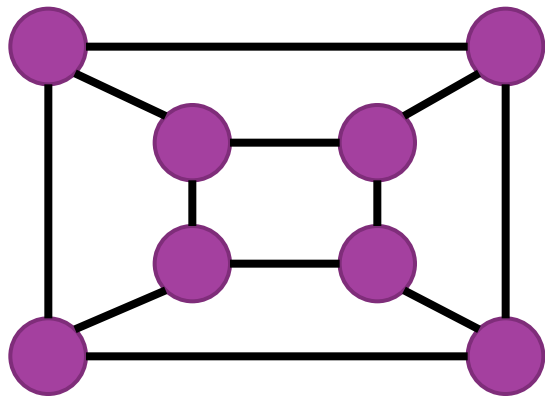
- Cada face da representação planar de um grafo corresponde a um passeio fechado do grafo constituído pelos vértices e arestas que delimitam a face. Chamamos **grau da face**,  $d(f)$ , ao comprimento do passeio correspondente.



# Faces

23

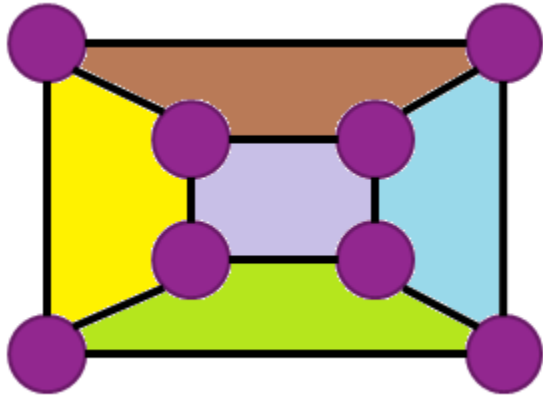
□ Quantas faces temos neste grafo?



# Faces

24

- Quantas faces temos neste grafo?

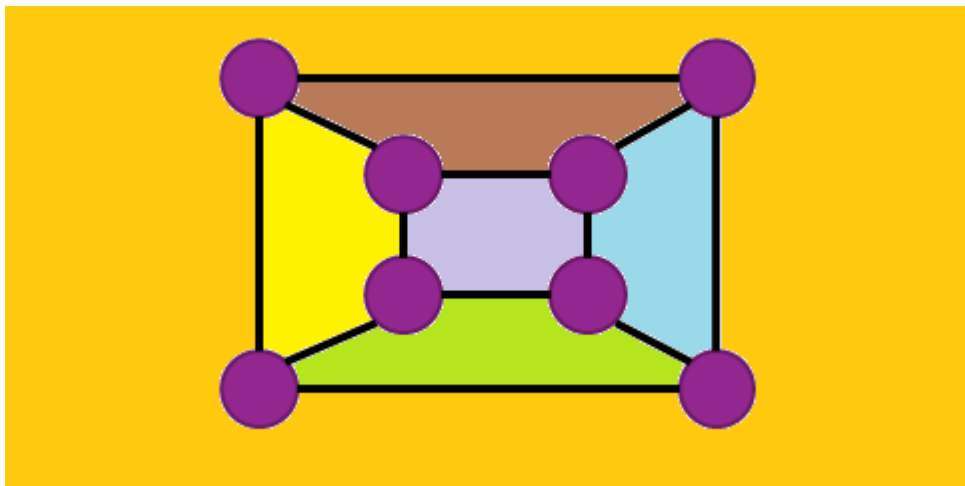




# Faces

25

- Quantas faces temos neste grafo? **SEIS**



Face infinita:  
porção infinita do  
plano que não é  
contornada por  
arestas

# Fórmula de Euler

26

- TEOREMA: Seja  $G$  um grafo conexo planar com  $\underline{n}$  vértices e  $\underline{e}$  arestas. O número de faces do grafo é

$$f = e - n + 2$$

# Fórmula de Euler

27

- TEOREMA: Seja  $G$  um grafo conexo planar com  $\underline{n}$  vértices e  $\underline{e}$  arestas. O número de faces do grafo é

$$f = e - n + 2$$

***“Apesar das inúmeras maneiras de se desenhar um grafo no plano, o número de faces irá permanecer o mesmo.”***

# Fórmula de Euler

28

- COROLÁRIO:  $e \leq 3n - 6$
- Condição necessária mas não suficiente para um grafo ser planar

# Detecção de planaridade

29

- Um grafo desconexo é planar se e somente se cada um de seus componentes for planar

# Detecção de planaridade

30

- Um grafo desconexo é planar se e somente se cada um de seus componentes for planar
- Se  $G$  é planar, então, a inclusão ou remoção de:
  - arestas paralelas
  - loops
  - vértices de grau 2 (arestas em série)
- não afetam a planaridade de  $G$

# Detecção de planaridade

31

- Técnica de *redução* auxilia nesta detecção

# Detecção de planaridade

32

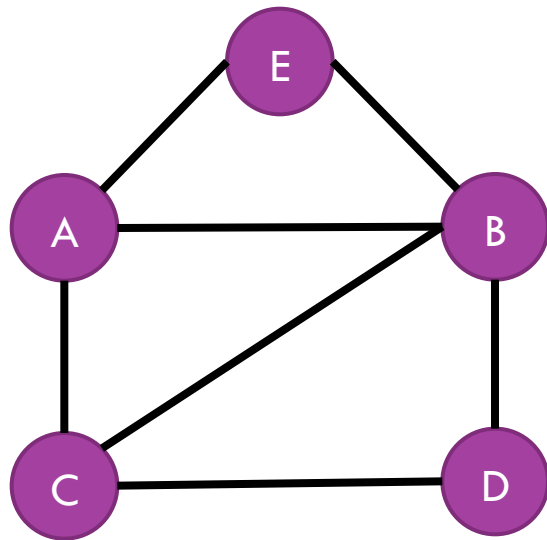
## □ Redução elementar

```
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça  
    remover loops  
    remover as arestas paralelas  
    contrair as arestas em série  
fim enquanto
```



# Detecção de planaridade

enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça  
    remover loops  
    remover as arestas paralelas  
    contrair as arestas em série  
fim enquanto



# Detecção de planaridade

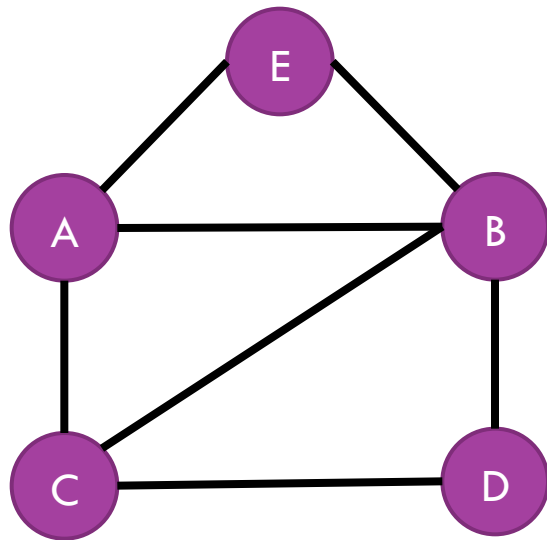
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto



# Detecção de planaridade

enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

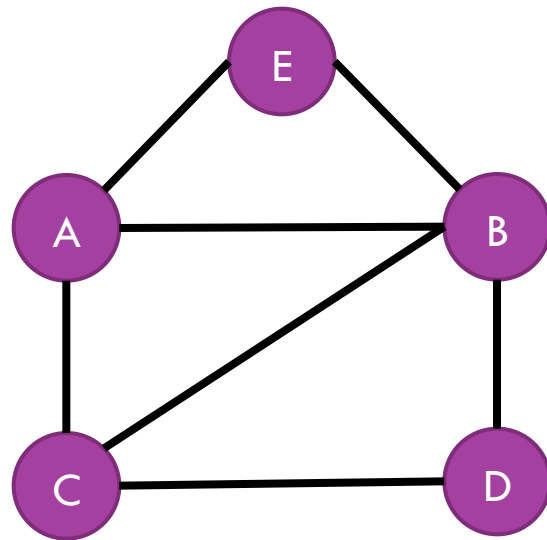
remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto

□ AE e EB



# Detecção de planaridade

enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

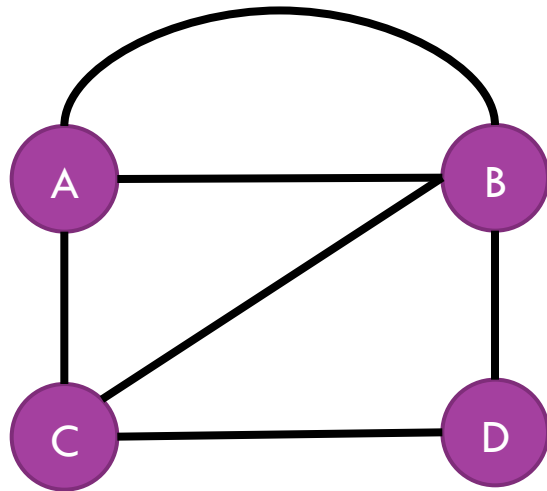
remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto

□ AE e EB



# Detecção de planaridade

enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

remover loops

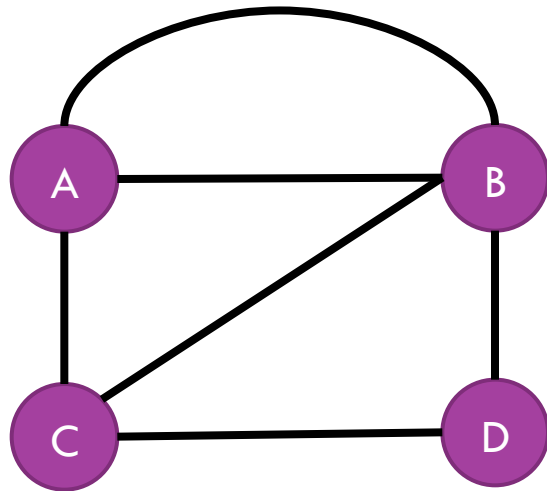
remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto

□ AE e EB

□ BD e DC



# Detecção de planaridade

enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

remover loops

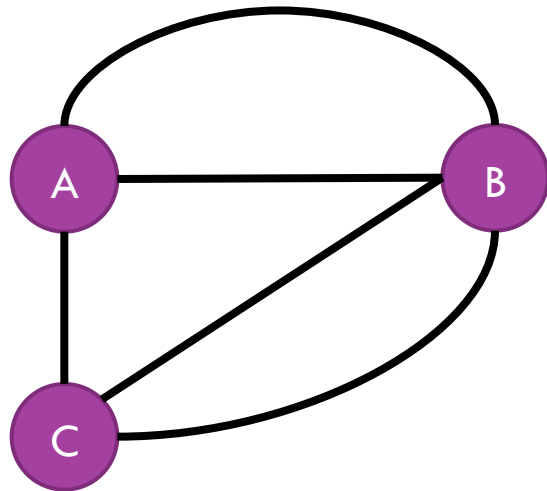
remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto

□ AE e EB

□ BD e DC



# Detecção de planaridade

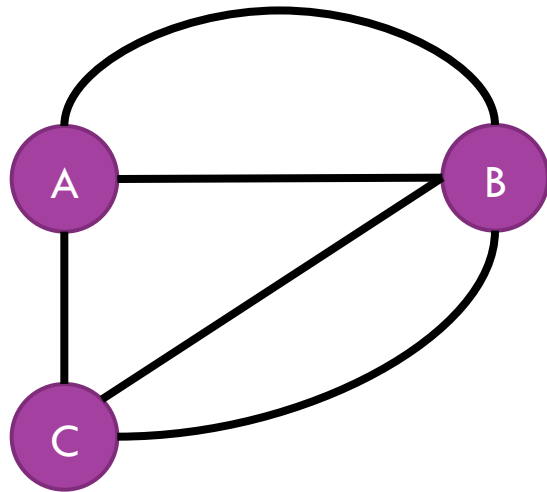
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto



# Detecção de planaridade

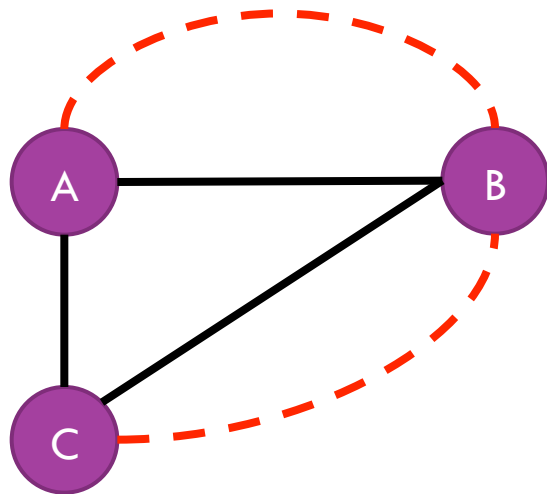
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto





# Detecção de planaridade

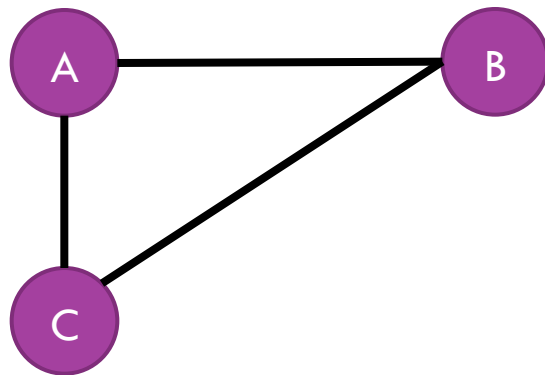
enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto



# Detecção de planaridade

enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

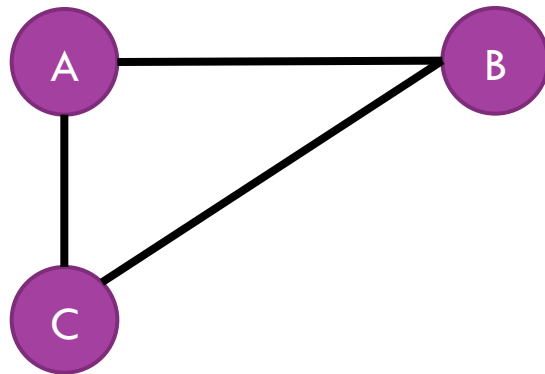
remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto

□ CA e AB



# Detecção de planaridade

enquanto G tem loops, arestas paralelas ou em série faça

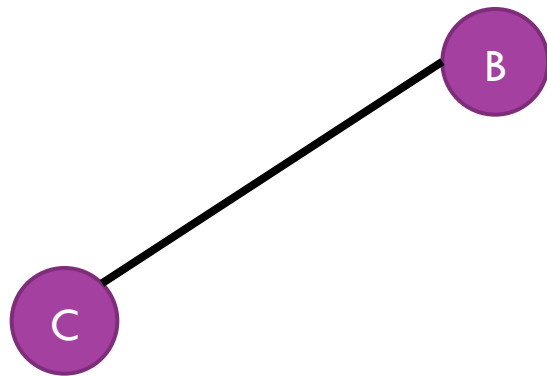
remover loops

remover as arestas paralelas

contrair as arestas em série

fim enquanto

□ CA e AB



# Detecção de planaridade

44

- De maneira geral, após aplicar o procedimento a cada um dos componentes  $G_i$ , qual será o grafo reduzido  $H_i$ ?
  1. Uma única aresta, ou
  2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
  3. Um grafo simples com  $n \geq 5$  e  $e \geq 7$

# Detecção de planaridade

45

1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. Um grafo simples com  $n \geq 5$  e  $e \geq 7$

# Detecção de planaridade

46

1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. Um grafo simples com  $n \geq 5$  e  $e \geq 7$

PLANAR!!

# Detecção de planaridade

47

1. Uma única aresta, ou
2. Um grafo completo com 4 vértices, ou
3. Um grafo simples com  $n \geq 5$  e  $e \geq 7$

INVESTIGAR!!

# Detecção de planaridade

48

3. Um grafo simples com  $n \geq 5$  e  $e \geq 7$

INVESTIGAR!!

□ Podemos verificar se  $e \leq 3n-6$ .

■ Se o grafo reduzido não satisfaz a inequação, então o grafo é não planar. Se a inequação for satisfeita, é necessário fazer testes adicionais.



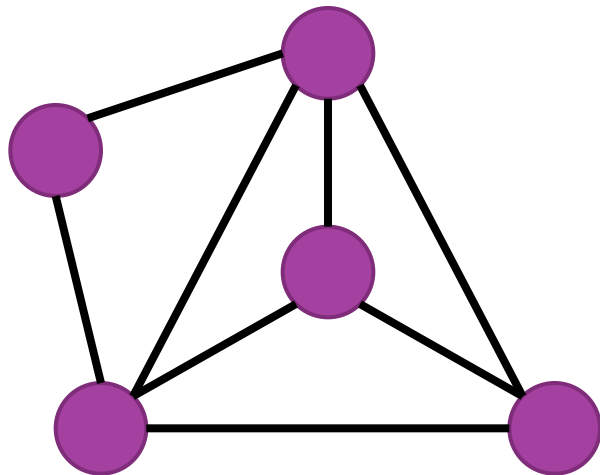
# Homeomorfismo

49

- Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são **homeomorfos** se os grafos  $H_1$  e  $H_2$  obtidos a partir das reduções elementares de  $G_1$  e  $G_2$  forem isomorfos
- $G_1$  e  $G_2$  são **homeomorfos** se pudermos obter  $G_2$  a partir da inserção de vértices intermediários nas arestas de  $G_1$

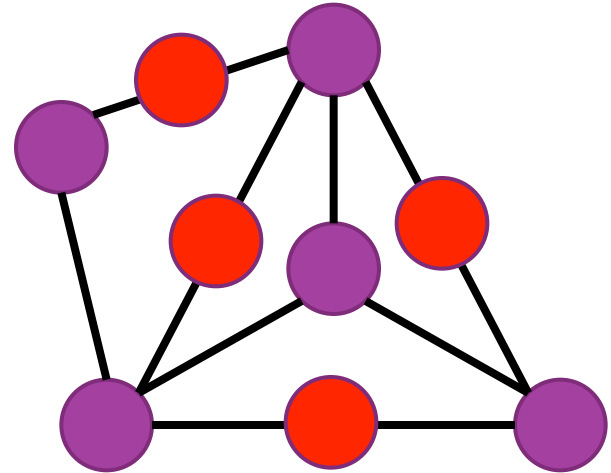
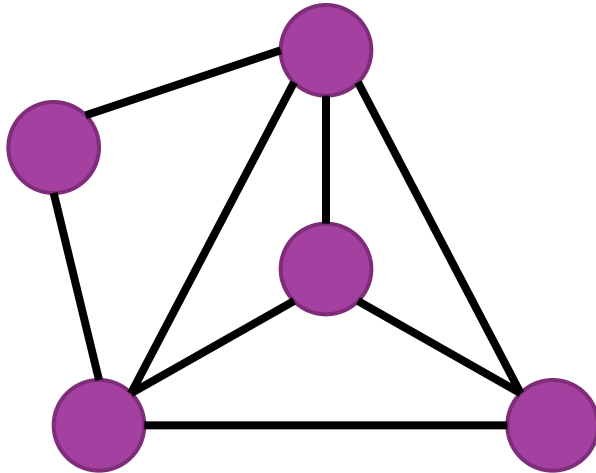
# Homeomorfismo

50



# Homeomorfismo

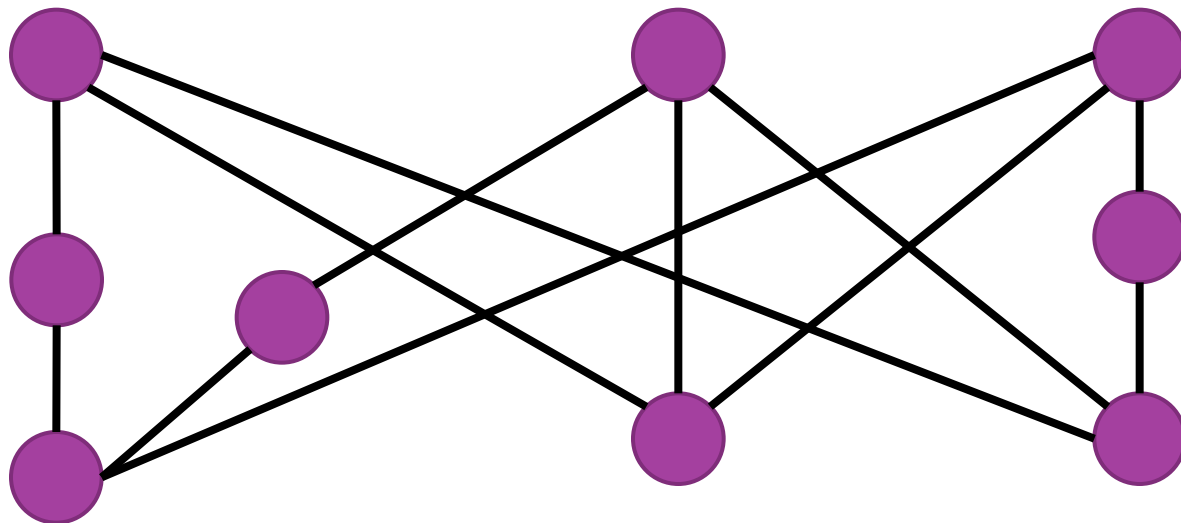
51



# Teorema

52

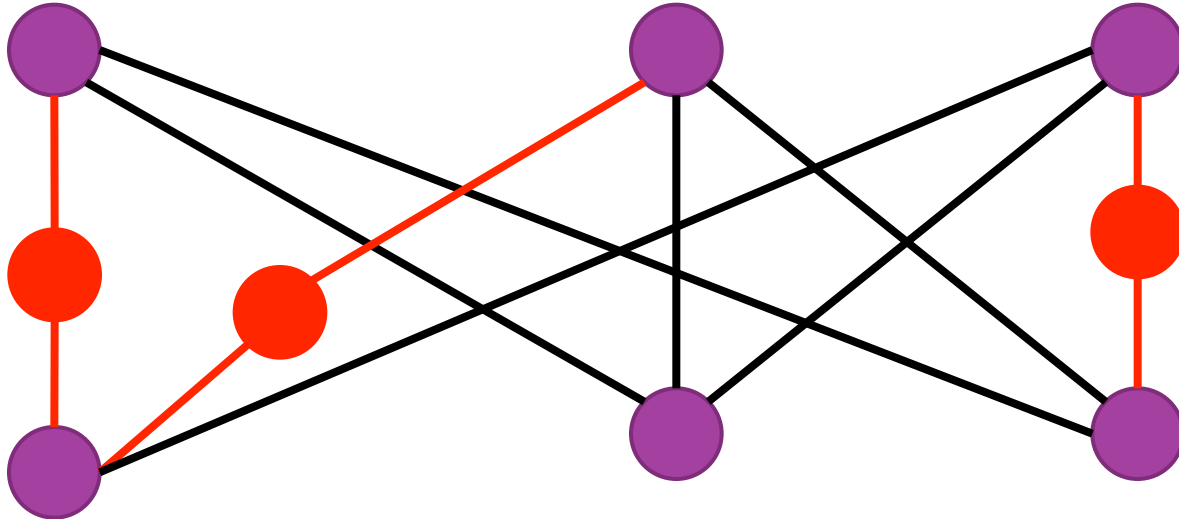
- Um grafo  $G$  é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .



# Teorema

53

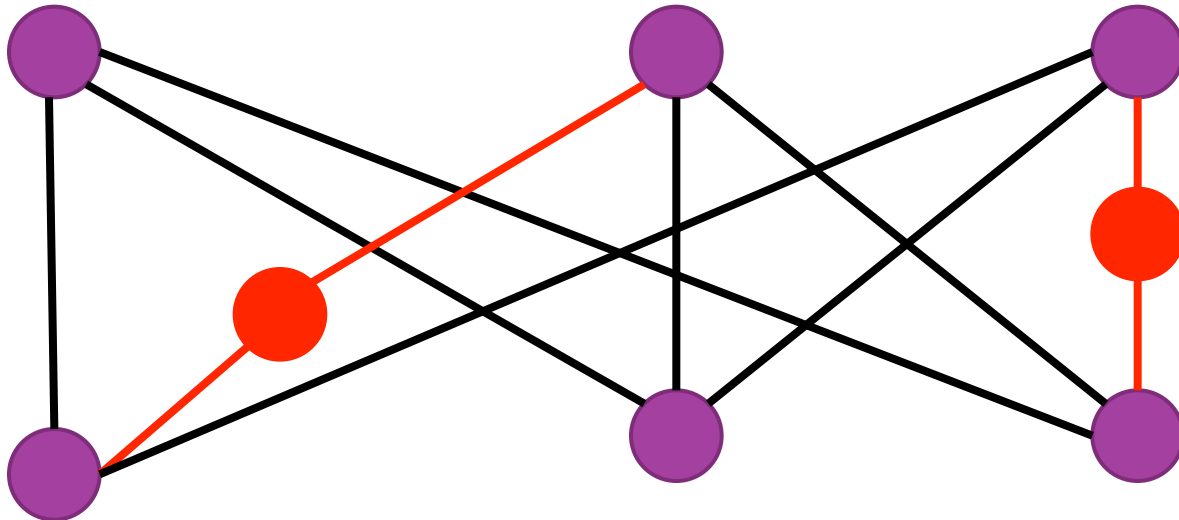
- Um grafo  $G$  é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .



# Teorema

54

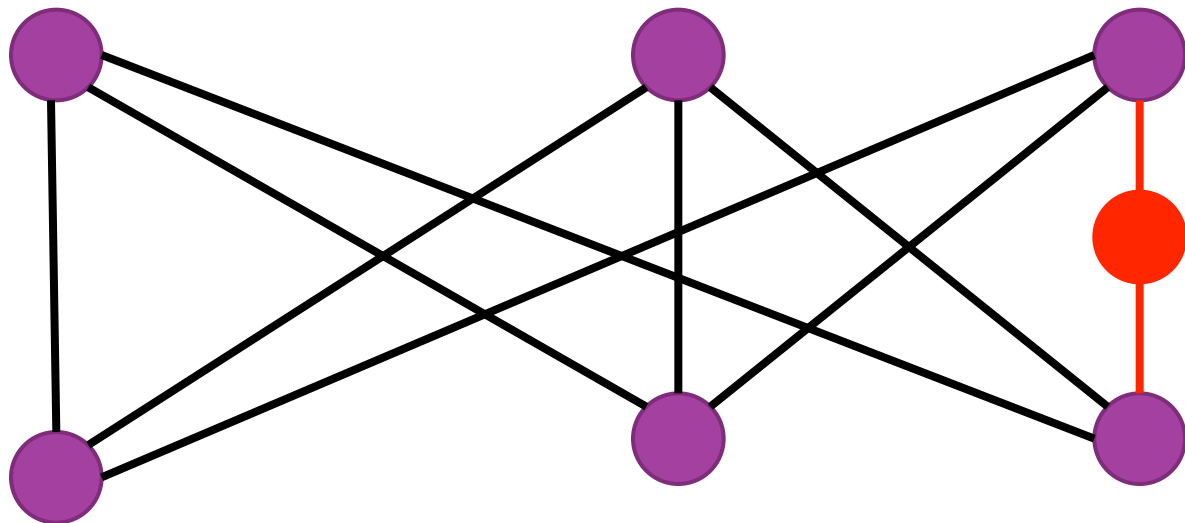
- Um grafo  $G$  é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .



# Teorema

55

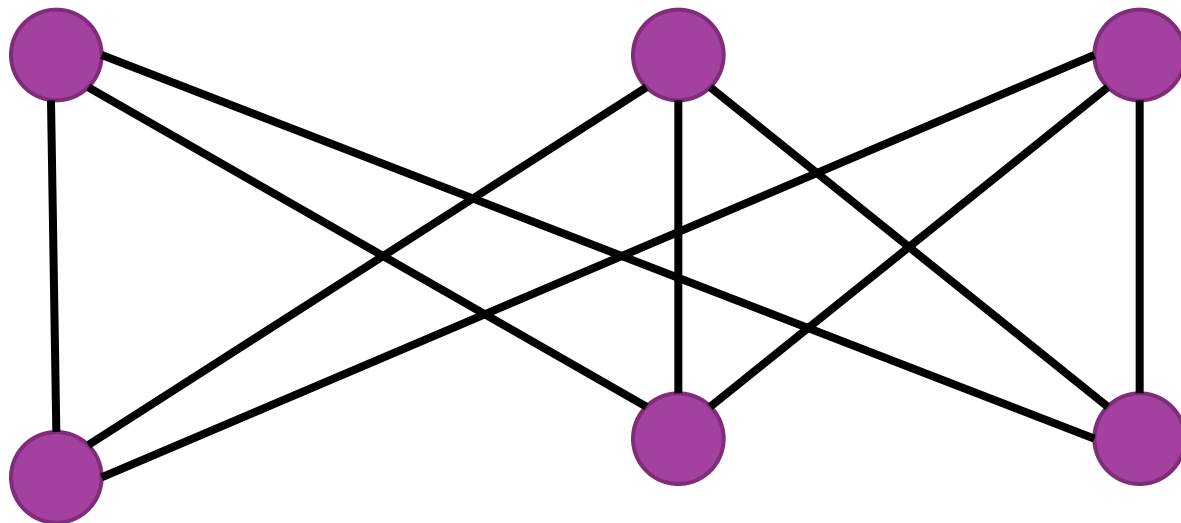
- Um grafo  $G$  é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .



# Teorema

56

- Um grafo  $G$  é planar se e somente se nenhum subgrafo seu for homeomorfo a  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .





# Exercícios

# Dualidade

58

- Dado um grafo  $G$  planar, o grafo  $G^*$ , chamado **dual** de  $G$ , é construído da seguinte forma:
  - para cada face  $f$  de  $G$ ,  $G^*$  tem um vértice

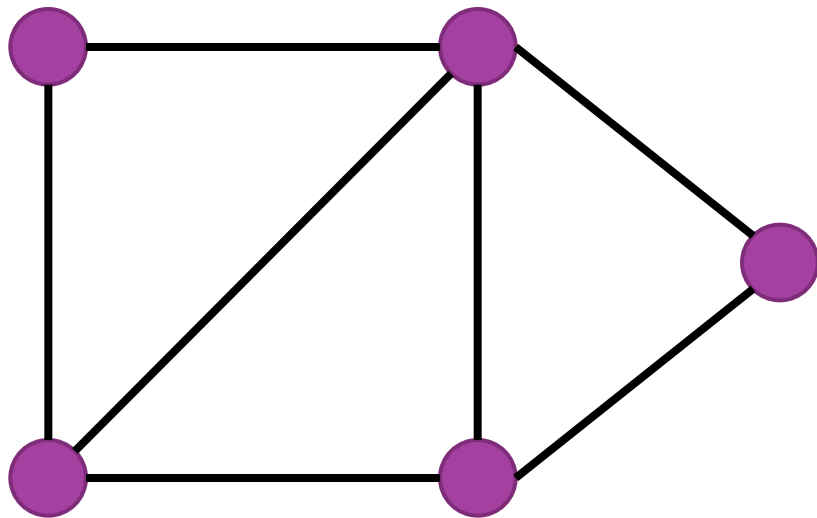
# Dualidade

59

- una os vértices de  $G^*$  da seguinte forma
  - se 2 regiões  $f_i$  e  $f_k$  são adjacentes (possuem alguma aresta em comum) coloque uma aresta entre  $v_i$  e  $v_k$  interceptando a aresta em comum
  - se existirem mais de uma aresta em comum entre  $f_i$  e  $f_k$  coloque uma aresta entre  $v_i$  e  $v_k$  para cada aresta em comum
  - se uma aresta está inteiramente em uma região,  $f_i$ , coloque um loop no vértice  $v_i$ .

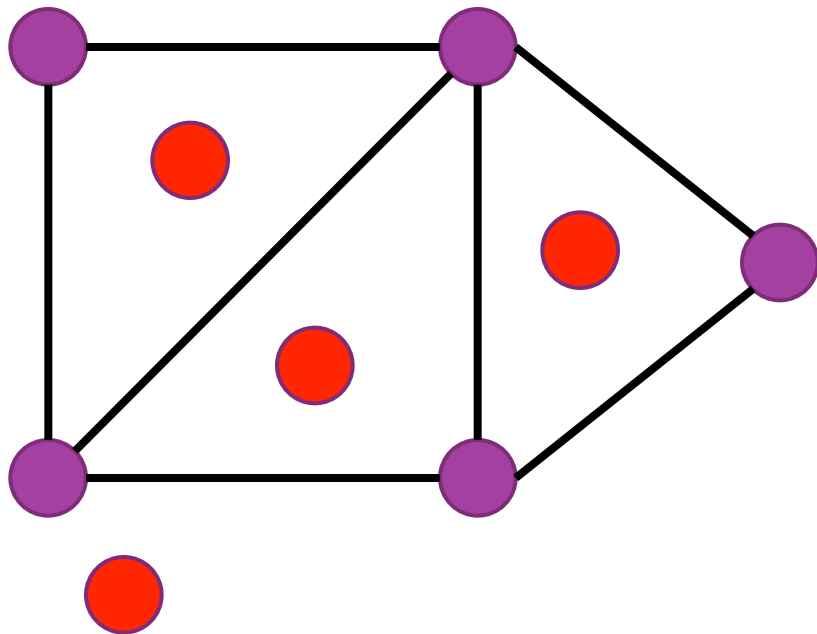
# Dualidade

60



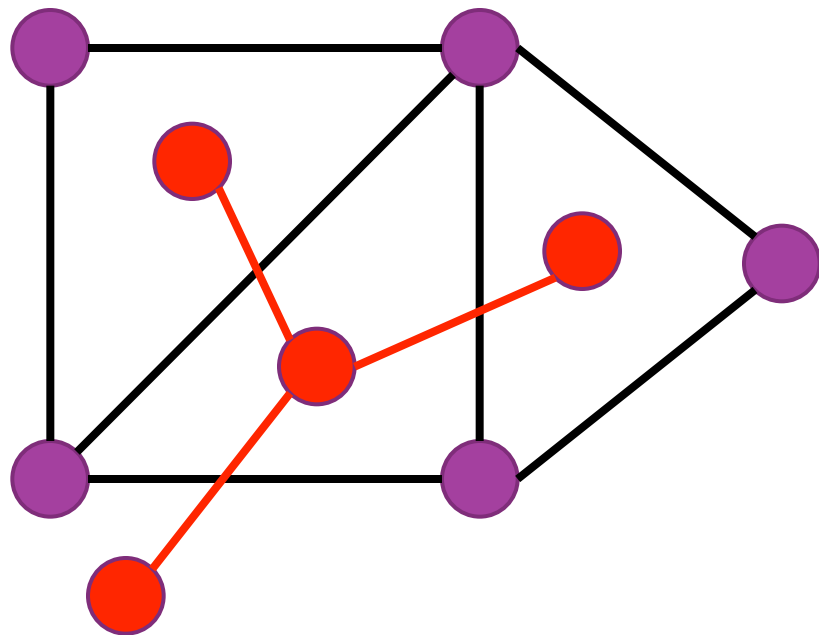
# Dualidade

61



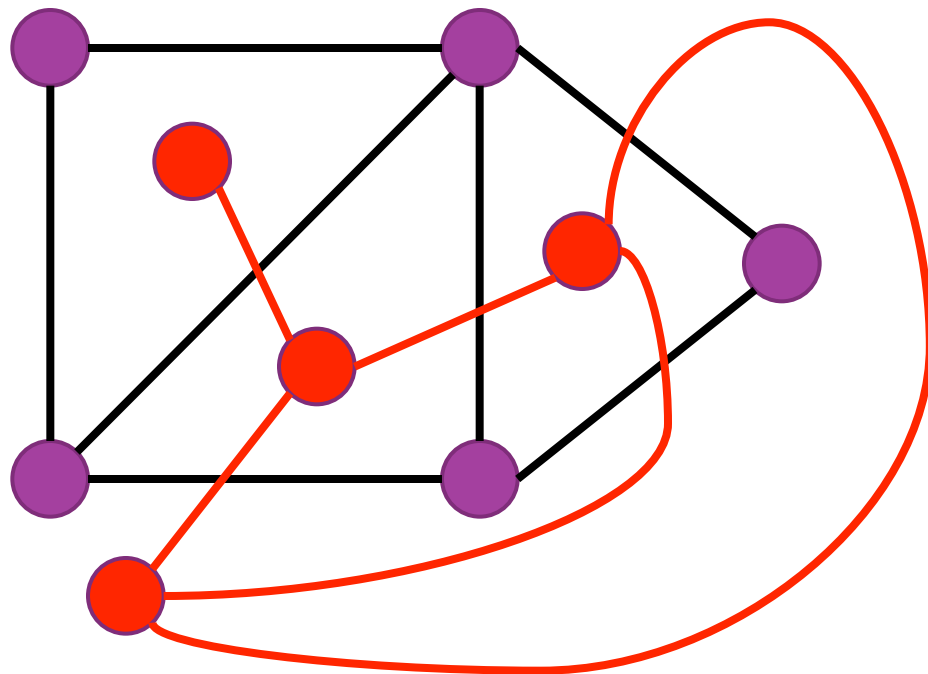
# Dualidade

62



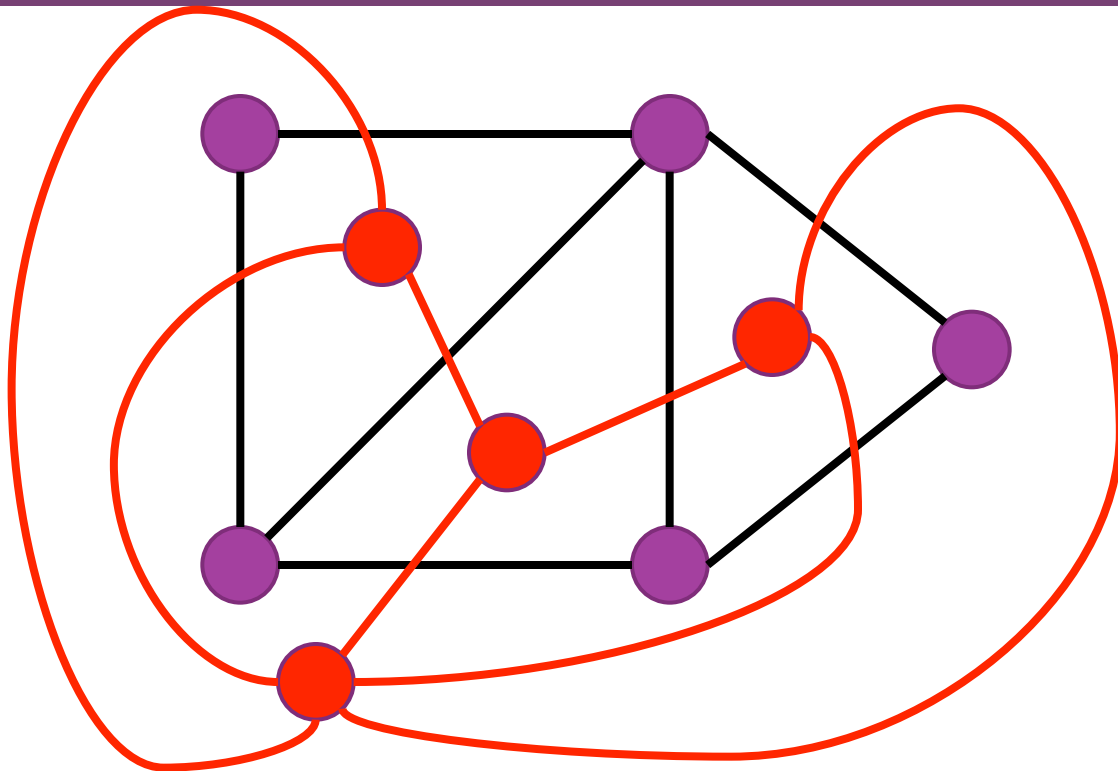
# Dualidade

63



# Dualidade

64

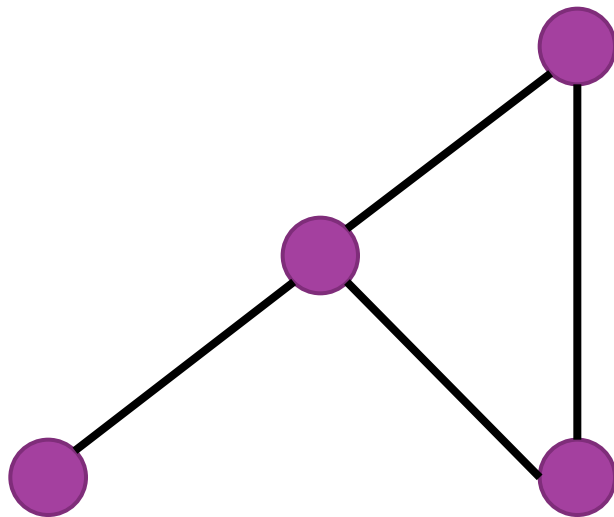




# Dualidade

65

□ Qual é o dual deste grafo  $G$ ?



# Dualidade

66

- Qual é o dual deste grafo  $G$ ?
  - ▣ Arestas contidas em uma região tornam-se *loops* no dual

