

# ALGORITMOS EM GRAFOS

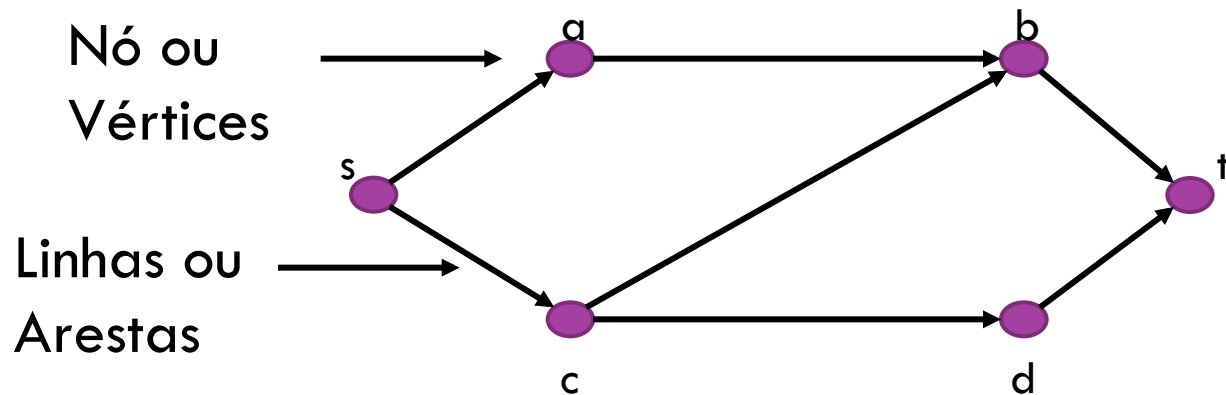
FLUXO EM REDES

ALGORITMO DE FORD E FULKERSON

Prof. Alexei Machado

# O que são redes?

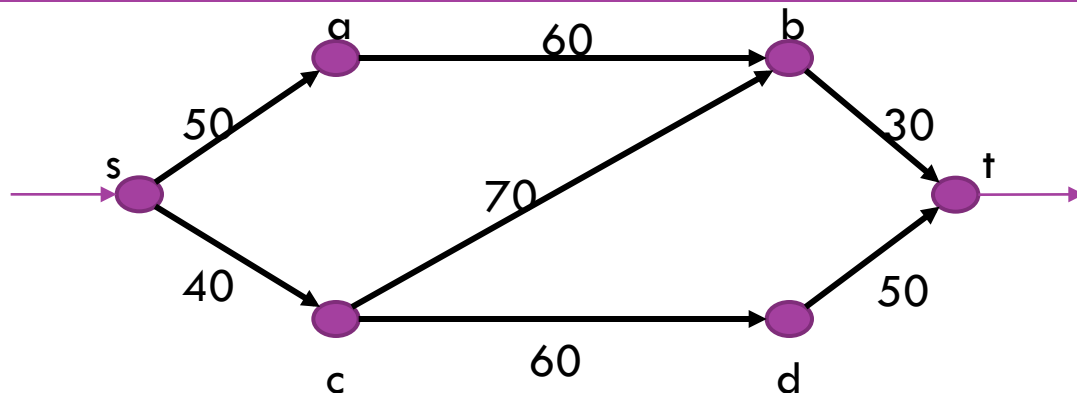
2



Rede = grafo

# Fluxo em grafos

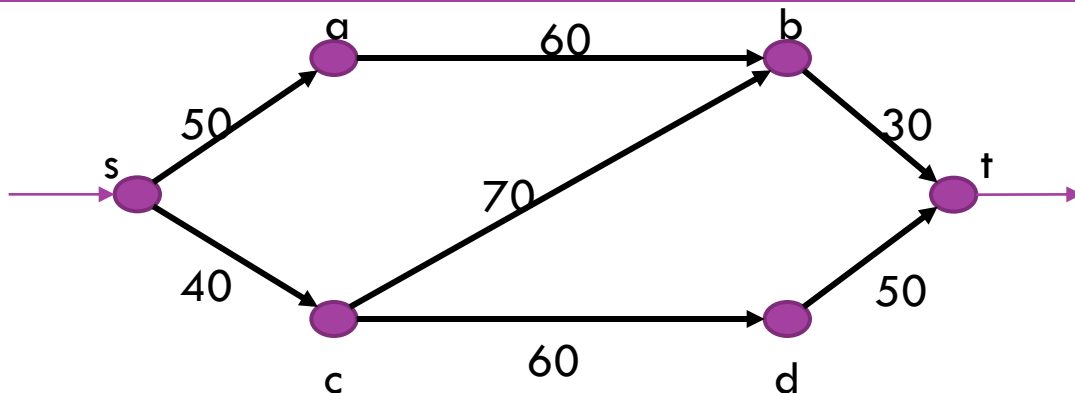
3



- Exemplo de uma malha rodoviária.
- Os ‘pesos’ das arestas mostram o número máximo de veículos que podem passar pelos arcos numa determinada unidade de tempo.
- Estes números são chamados de **capacidades**.

# Fluxo em grafos

4

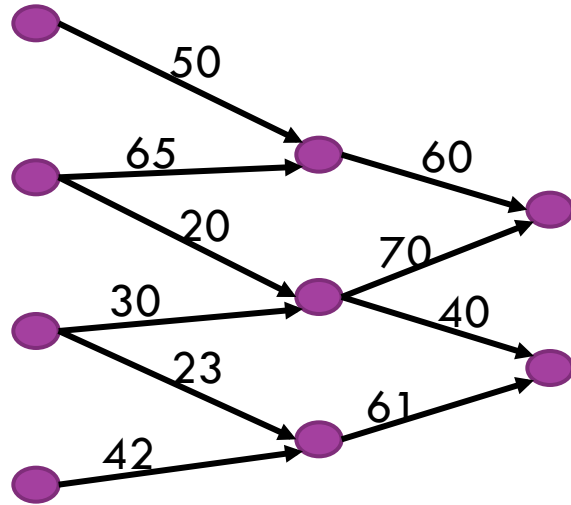


- s: fonte - emissor de fluxo
- t: terminal - quem consome ou recebe o fluxo

# Fluxo em grafos

5

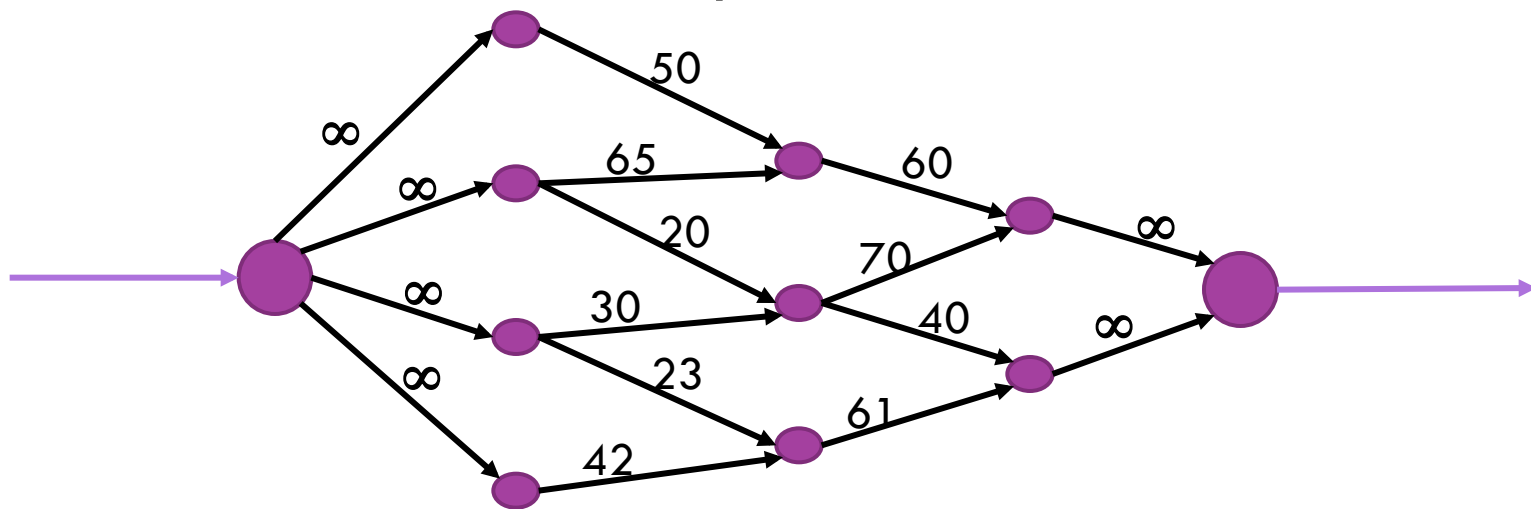
- Como lidar com múltiplas fontes ou terminais?



# Fluxo em grafos

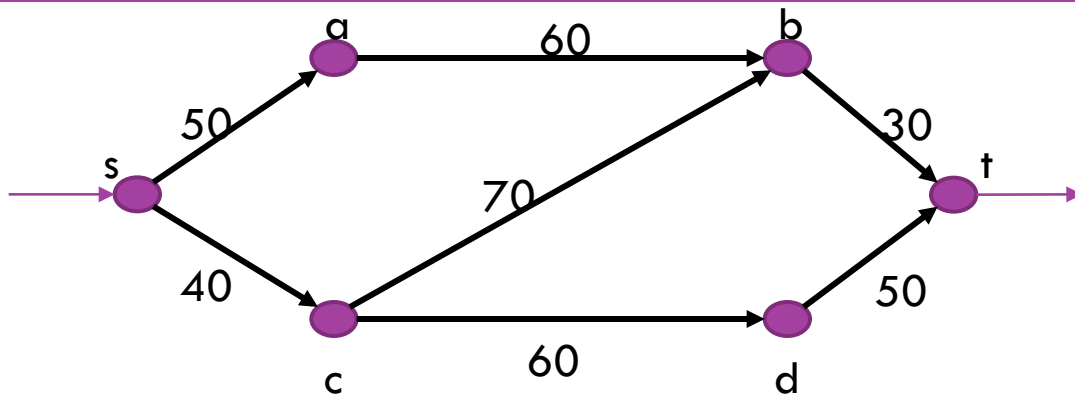
6

- Como lidar com múltiplas fontes ou terminais?



# Fluxo em grafos

7



- Qual a capacidade máxima de veículos nesta rede?  
Ou seja, quanto veículos conseguem sair de  $s$  e chegam a  $t$ ?

# Fluxo em grafos

8

- Problema do fluxo: recursos que se movem por meio dos arcos de um grafo.
- Exemplos:
  - Líquidos em canos
  - Tráfego em rede de computadores
  - Veículos e rodovias
  - Taxa de produção em linha de montagem



# Fluxo em grafos

9

- Um fluxo  $f(u,v)$  na rede de fluxo  $G = (V,E)$  é uma função com as restrições:
  - O fluxo não pode exceder a **capacidade** de nenhum arco, para todo arco pertencente a  $E$
  - O fluxo de entrada em um vértice é igual ao fluxo de saída (**conservação** de fluxo)
  - O somatório do fluxo em todos os vértices é o **valor total** do fluxo

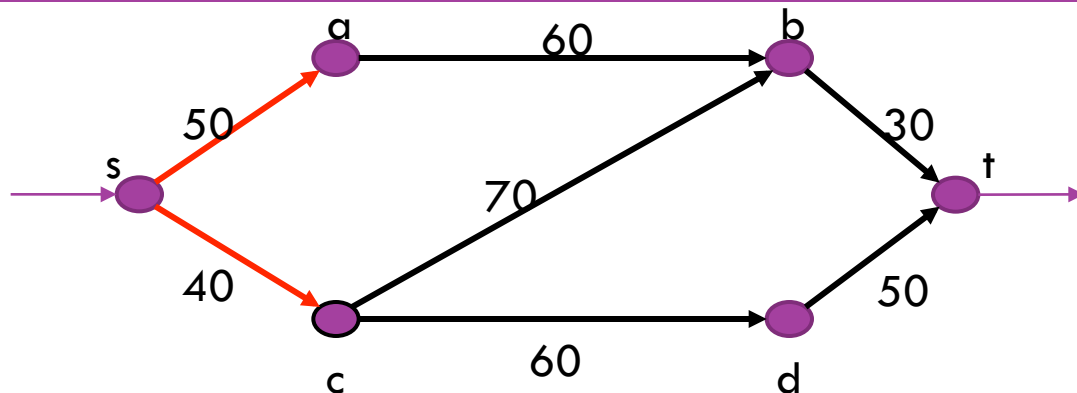
# O problema do fluxo máximo

10

- Corresponde a achar a maior quantidade de fluxo que pode passar por um dado grafo
- Relacionado ao conceito de **corte**:
  - Um corte  $(S,T)$  em uma rede de fluxo  $G = (V,E)$  é uma partição  $V$  em dois conjuntos  $S$  e  $T$  tais que  $s \in S$  e  $t \in T$

# O problema do fluxo máximo

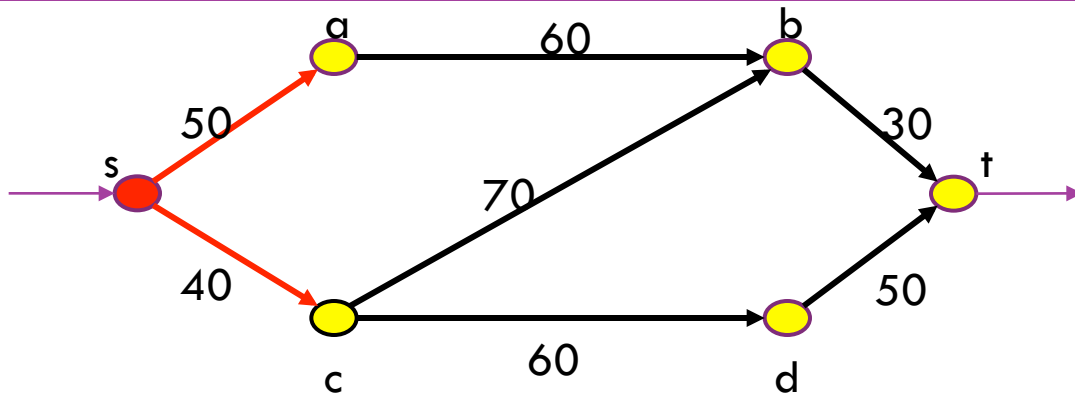
11



- O conjunto  $\{sa, sc\}$  é um corte com capacidade 90.
- $S = \{s\}$  e  $T = \{a, b, c, d, t\}$

# O problema do fluxo máximo

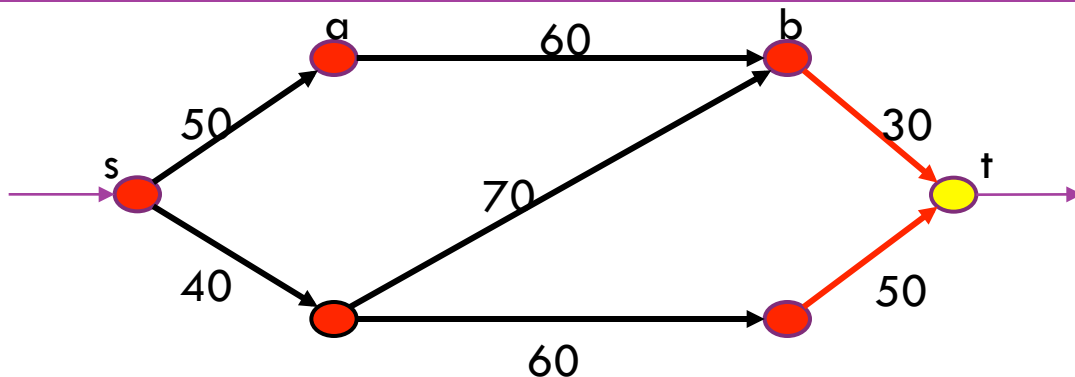
12



- O conjunto  $\{sa, sc\}$  é um corte com capacidade 90.
- $S = \{s\}$  e  $T = \{a, b, c, d, t\}$

# O problema do fluxo máximo

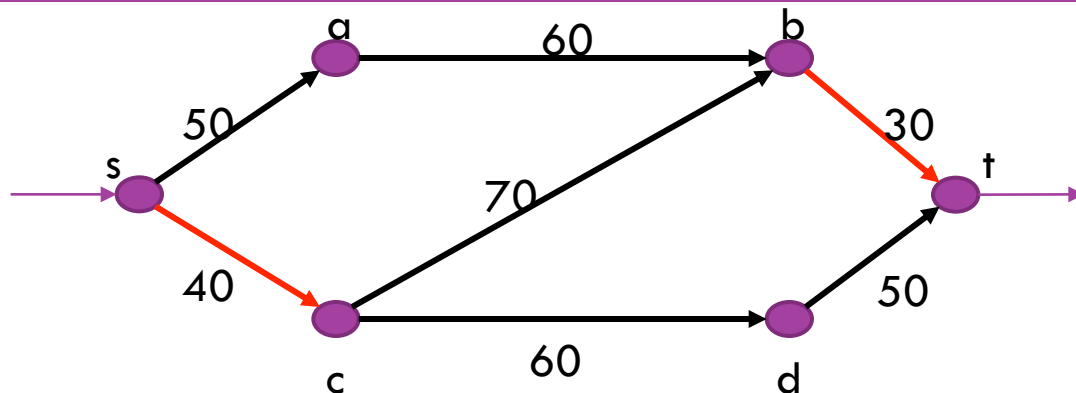
13



- O conjunto  $\{b, t, d, t\}$  é um corte com capacidade 80.
- $S = \{s, a, b, c, d\}$  e  $T = \{t\}$

# O problema do fluxo máximo

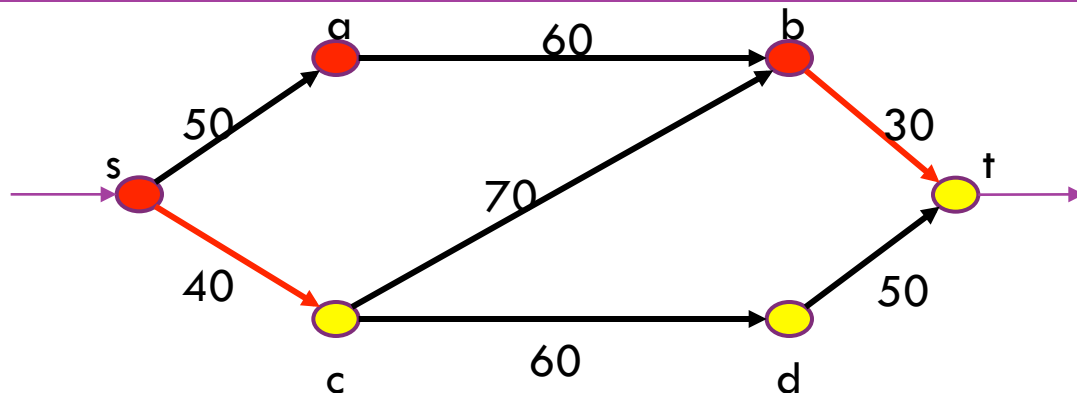
14



- O conjunto  $\{sc, bt\}$  é um corte com capacidade 70.
- $S = \{s, a, b\}$  e  $T = \{c, d, t\}$

# O problema do fluxo máximo

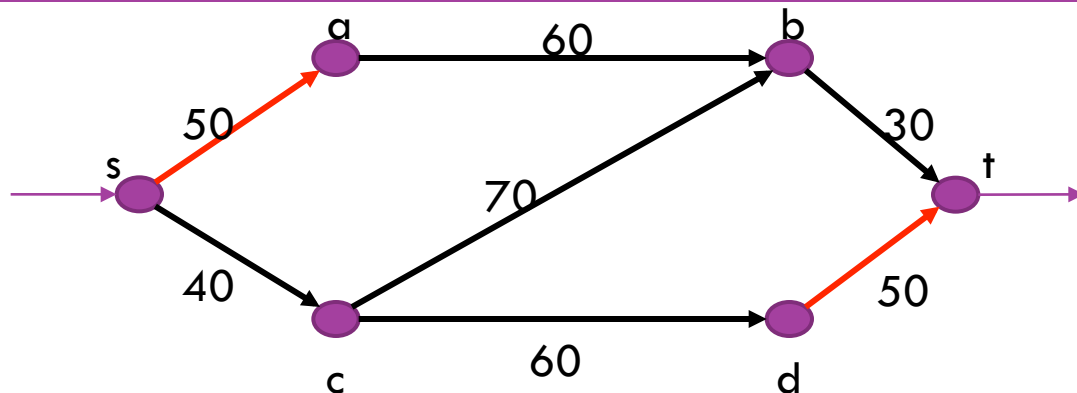
15



- O conjunto  $\{sc, bt\}$  é um corte com capacidade 70.
- $S = \{s, a, b\}$  e  $T = \{c, d, t\}$

# O problema do fluxo máximo

16



- O conjunto  $\{sa, dt\}$  **não** é um corte, pois sua retirada não particiona  $V$  de maneira que  $s$  e  $t$  estejam desconectados



# Teorema de Ford e Fulkerson

17

- Partindo de um fluxo nulo, este fluxo terá capacidade menor do que qualquer corte no fluxo.
- Aumentando este fluxo aos poucos, pode-se testar para comparar o seu valor com as capacidades dos cortes.
- Em um dado momento, o valor se tornará igual a uma das capacidades, e é claro que isso acontecerá com a menor de todas capacidades.

# Teorema de Ford e Fulkerson

18

- Portanto, um corte cuja capacidade possa se tornar igual ao valor de um fluxo é um corte de **mínima capacidade**.
- Veja que **o fluxo não pode mais aumentar**, pois ele passa por todo o corte, e este já estará saturado.
- Portanto, este fluxo será **máximo**.

# Teorema de Ford e Fulkerson

19

## □ Teorema de Ford e Fulkerson

***max flow-min cut:***

*"O valor do fluxo máximo em um grafo é igual à capacidade do corte de capacidade mínima."*

# Algoritmo de Ford e Fulkerson

20

- A capacidade residual de  $(u, v)$  é a quantidade de fluxo adicional que podemos enviar de  $u$  para  $v$  sem ultrapassar a sua capacidade. Ou seja,  $c(a) - f(a)$
- Uma rede residual consiste em arestas que podem admitir mais fluxo

# Algoritmo de Ford e Fulkerson

21

- Dado um digrafo capacitado e um fluxo que respeita a capacidade dos arcos, dizemos que um arco  $u,v$  está cheio se o fluxo no arco é igual a sua capacidade.

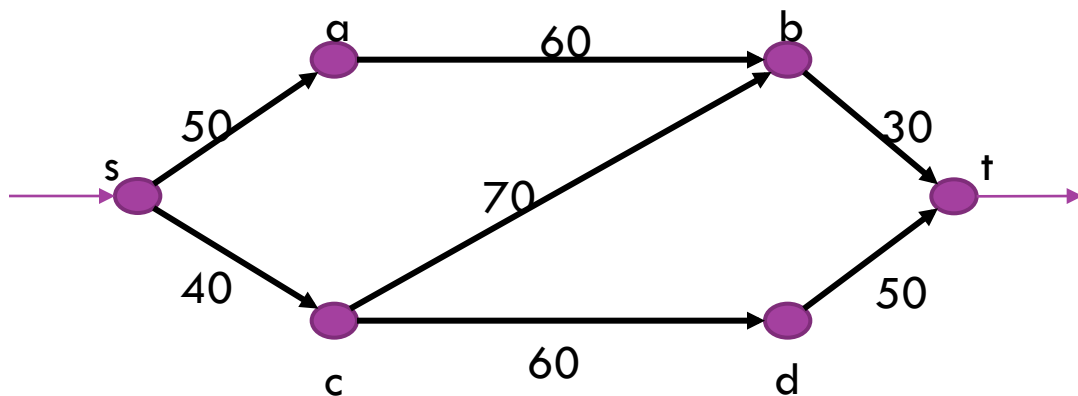
# Algoritmo de Ford e Fulkerson

22

- Assim, em um caminho de  $s$  para  $t$  no grafo, se nenhum arco do caminho está cheio, então podemos chamá-lo de **Caminho de Aumento**
- A capacidade residual do caminho de aumento é a menor capacidade residual do seus arcos

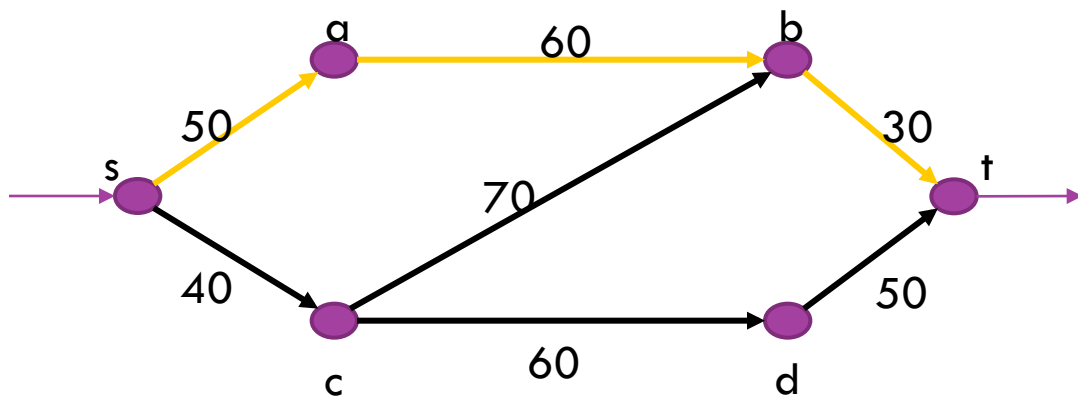
# Caminhos de Aumento

23



# Caminhos de Aumento

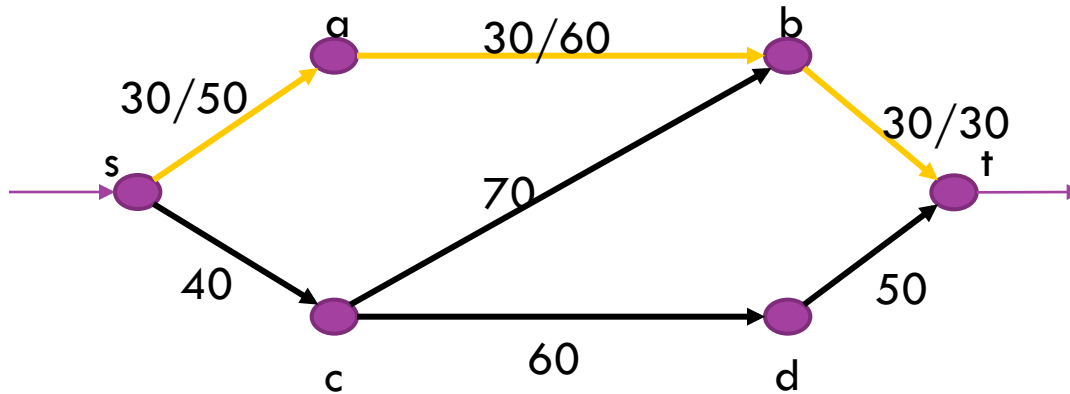
24





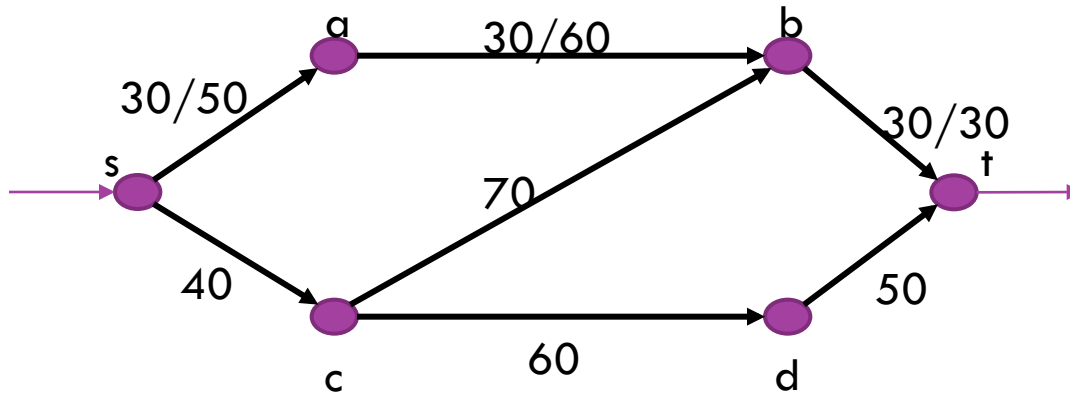
# Caminhos de Aumento

25



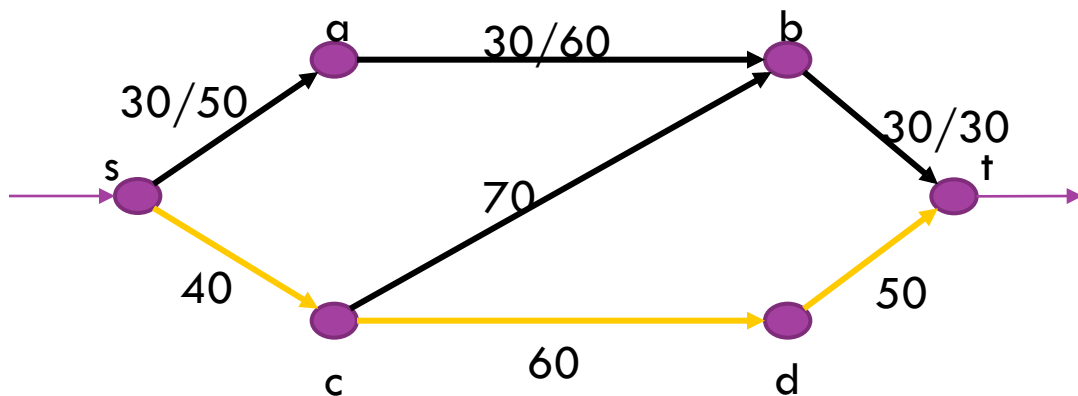
# Caminhos de Aumento

26



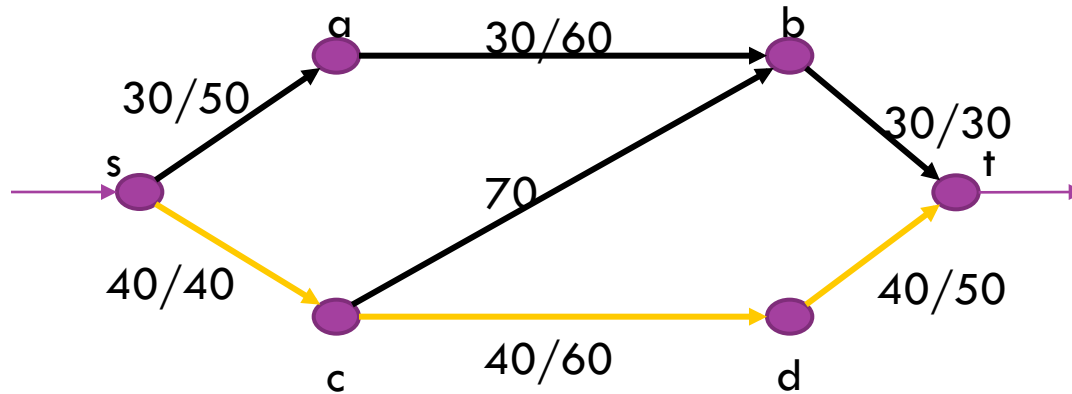
# Caminhos de Aumento

27



# Caminhos de Aumento

28



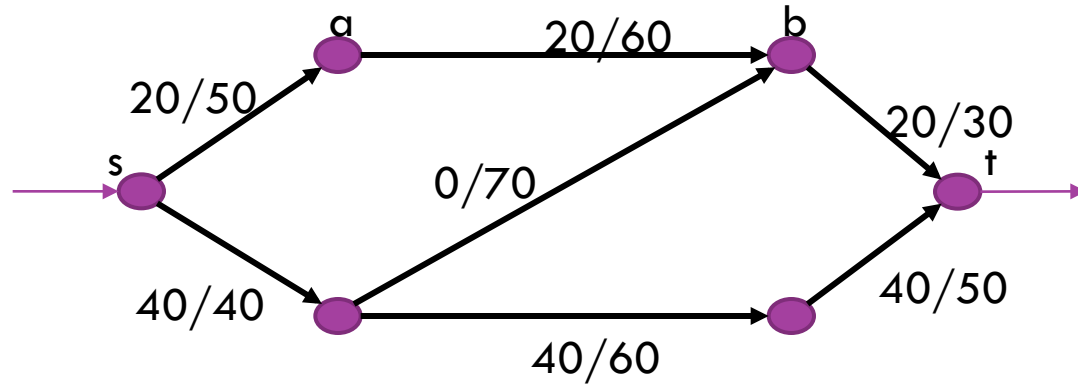
# Arcos reversos

29

- A partir do grafo original, um arco reverso: representa a capacidade de um fluxo “retornar” por aquele caminho, na tentativa de encontrar caminhos com maior capacidade residual

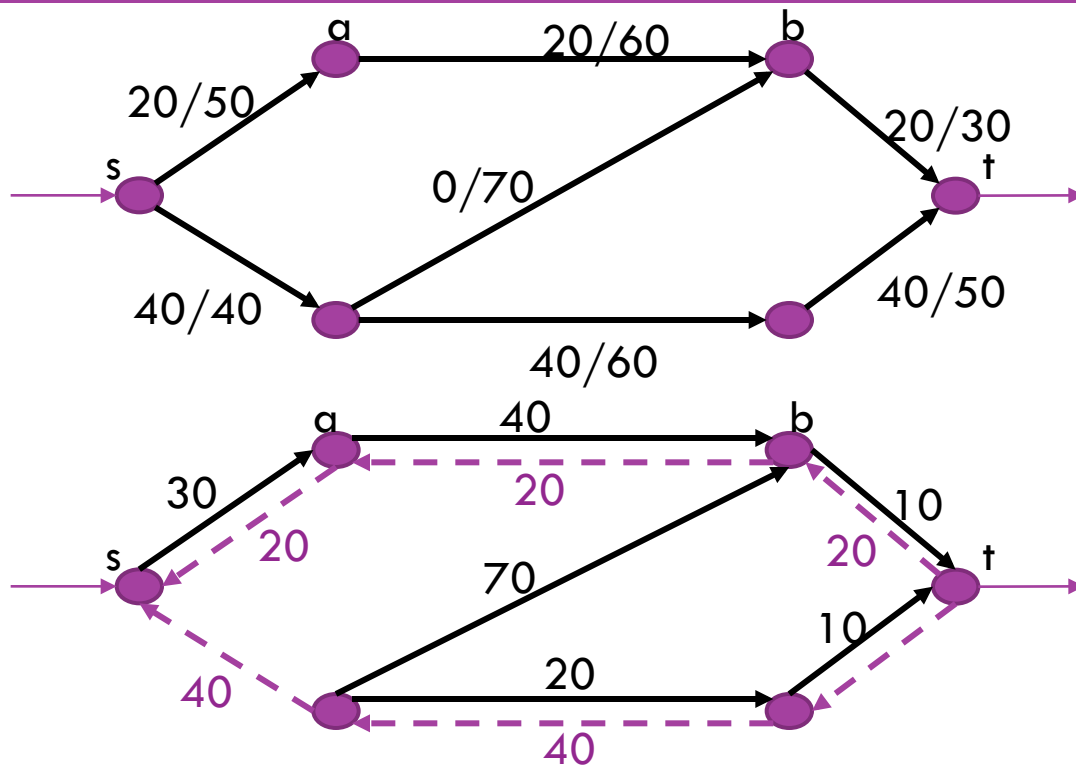
# Rede residual e arcos reversos

30



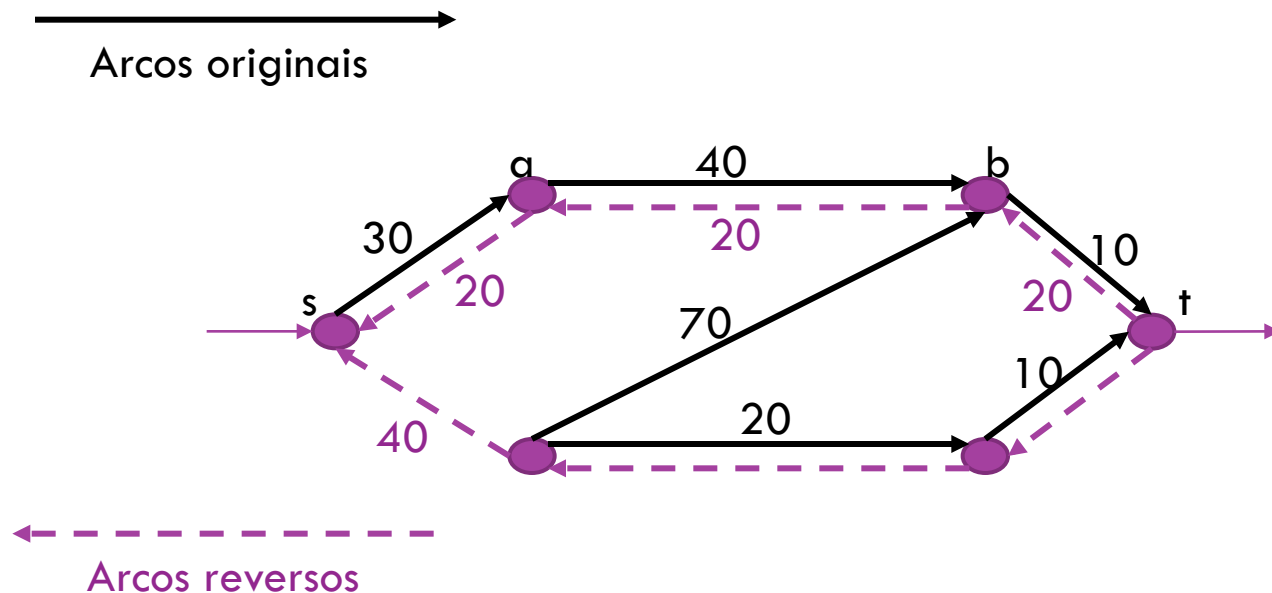
# Rede residual e arcos reversos

31



# Rede residual e arcos reversos

32





## Algoritmos para Fluxo Máximo - Ford-Fulkerson

- Dada uma **rede de fluxos** como calcular o seu fluxo máximo?
- Uma hipótese é usar o **método de Ford-Fulkerson**  
(chamamos de método porque é uma ideia que pode ser concretizada depois com vários algoritmos)

### Método de Ford-Fulkerson: fluxo máximo no grafo $G$ , de $s$ para $t$

Ford-Fulkerson( $G, s, t$ ):

Inicializar fluxo  $f$  a zero

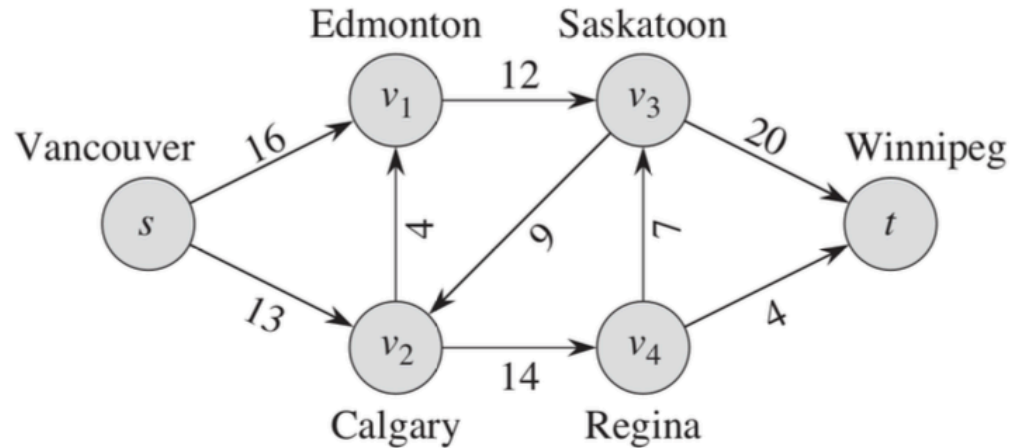
**Enquanto** existir um *caminho de aumento*  $p$  no grafo residual  $G_f$  **fazer**:  
    aumentar fluxo  $f$  ao longo de  $p$

**retornar**  $f$

- Um **caminho de aumento** (*augmenting path*) é um caminho pelo qual ainda é possível enviar fluxo
- Um **grafo residual**  $G_f$  é um grafo que indica como podemos modificar o fluxo nas arestas de  $G$  depois de já aplicado o fluxo  $f$ .

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Vejamos agora um exemplo do Ford-Fulkerson passo a passo para que possa compreender bem os conceitos usados.

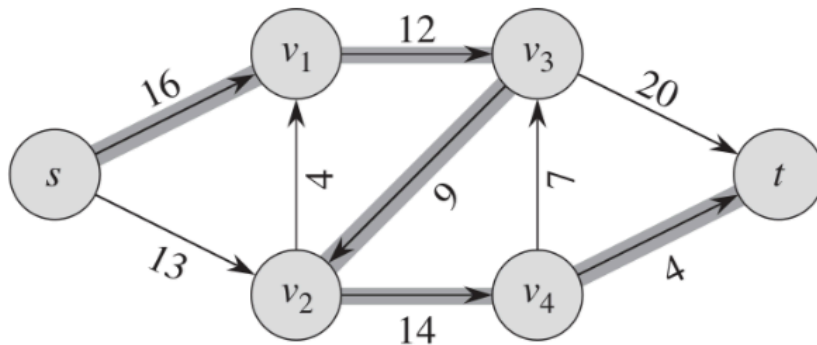


*(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)*

- Este é o grafo inicial com as capacidades indicadas nas arestas.

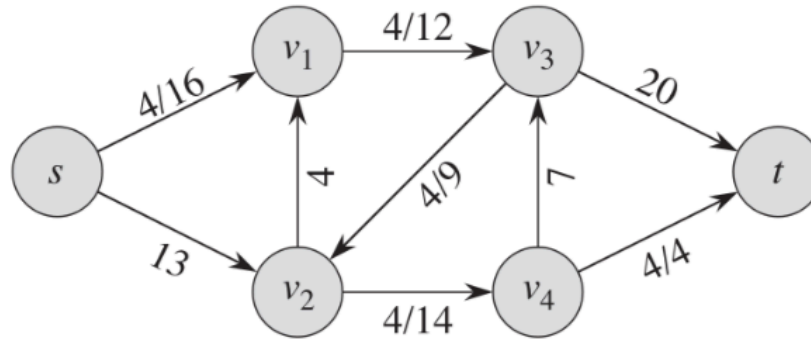
## Ford-Fulkerson passo a passo

- Um caminho de aumento é um caminho entre a origem  $s$  e o destino  $t$  que nos permite adicionar fluxo, ou seja, um caminho onde a capacidade mínima das arestas é maior que 0.
- No caso do nosso grafo existem vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho  $s \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow t$ , indicado a cinzento.
- A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 16, 12, 9, 14 e 4), pelo que podemos enviar um fluxo de 4.



## Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:  
(a/b nas aresta indica fluxo/capacidade)



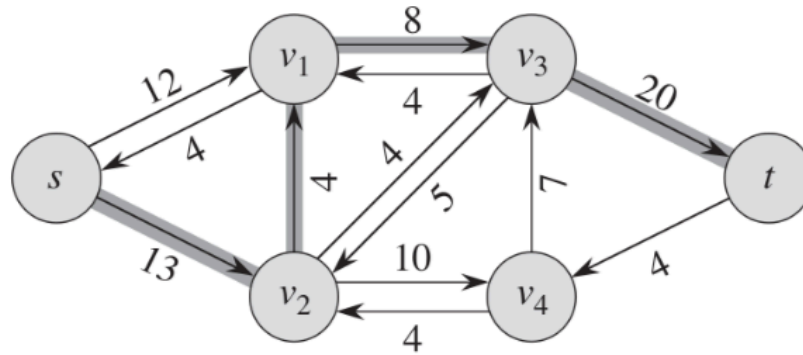
(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

## Ford-Fulkerson passo a passo

- O grafo residual mostra onde podemos ainda aplicar fluxo.
- Depois de adicionarmos um fluxo  $f(a)$  longo de um caminho, o grafo residual é obtido fazendo as seguintes transformações ao longo de cada aresta  $(u, v)$  no caminho de aumento que escolhemos:
  - ▶ Na direção do caminho que tomamos, reduzimos o peso das arestas em  $f(a)$ , ou seja,  $c(u, v) = c(u, v) - f(a)$ . Se  $c(u, v)$  ficar a zero, retiramos a aresta. Isto representa a quantidade de fluxo que ainda podemos fazer passar pela aresta na direção original
  - ▶ Na direção oposta, aumentamos o peso da aresta em  $f(a)$ , ou seja,  $c(v, u) = c(v, u) + f(a)$ . Se a aresta não existia, cria-se. Isto representa que se quisermos podemos "retirar" fluxo ao longo desta aresta, o que pode dar jeito para aumentar depois via outro caminho.

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

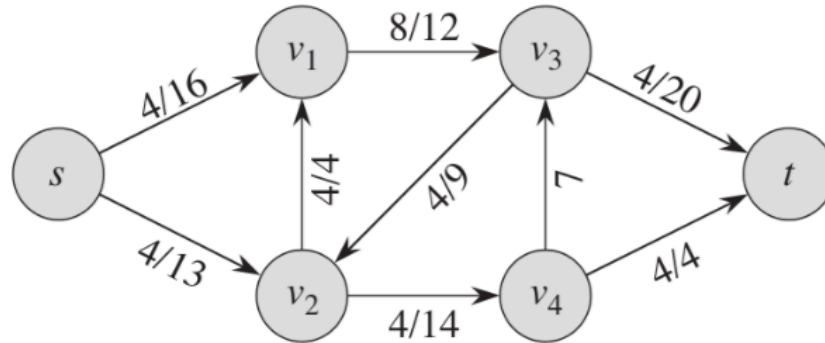


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho  $s \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow t$ . A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 13, 4, 8 e 20).

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:  
(a/b nas aresta indica fluxo/capacidade)

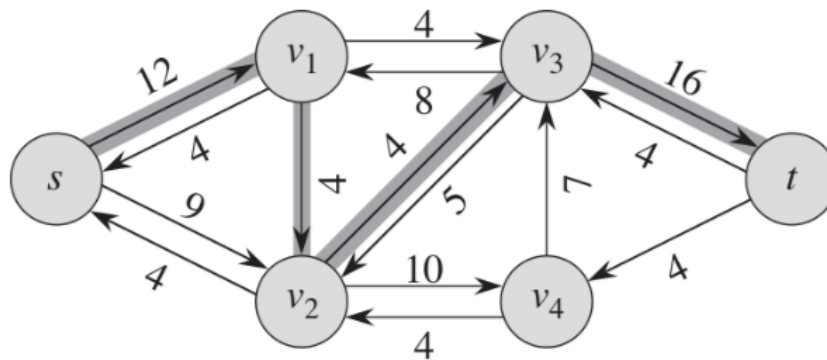


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 8 ( $4 + 4$ ).

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.



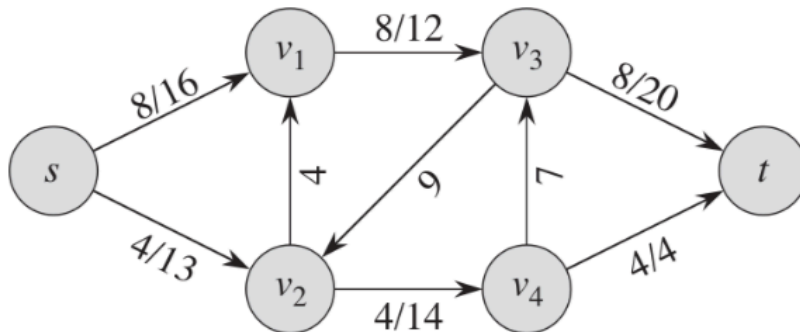
(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho  $s \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow t$ . A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 12, 4, 4 e 16). Note como está a ser usada a aresta  $(v_1, v_2)$  que tinha sido criada anteriormente.



## Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:  
(a/b nas aresta indica fluxo/capacidade)

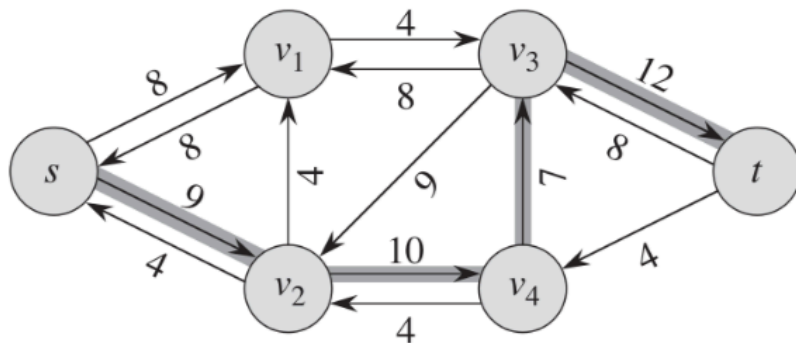


*(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)*

- O fluxo total a sair da origem é agora de 12 ( $8 + 4$ ).

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

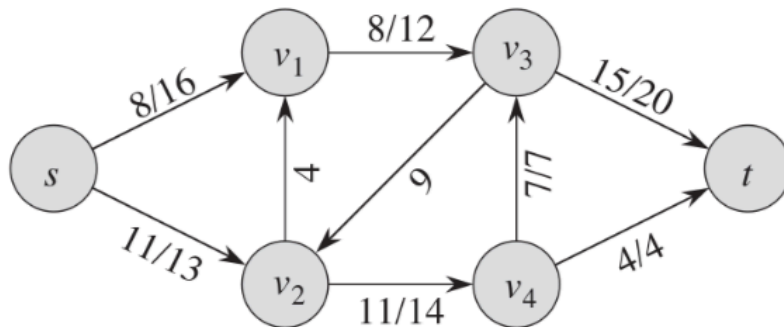


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho  $s \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow t$ . A capacidade mínima ao longo do caminho é 7 (mínimo entre 9, 10, 7 e 12).

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 7 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:  
(a/b nas aresta indica fluxo/capacidade)

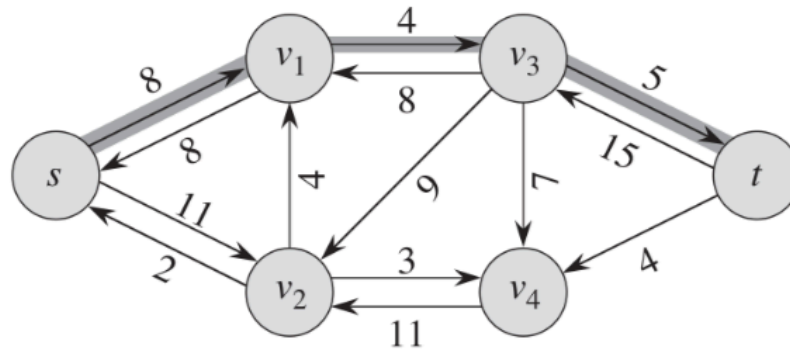


*(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)*

- O fluxo total a sair da origem é agora de 19 (8 + 11).

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 7 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

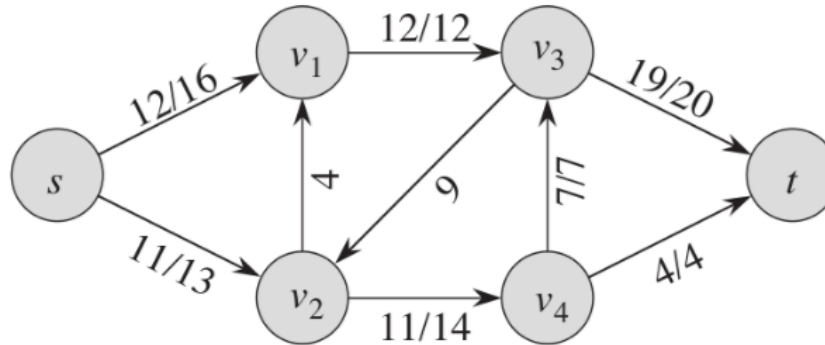


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda um caminhos de aumento:  
 $s \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow t$ . A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 8, 4 e 5).

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:  
(a/b nas aresta indica fluxo/capacidade)

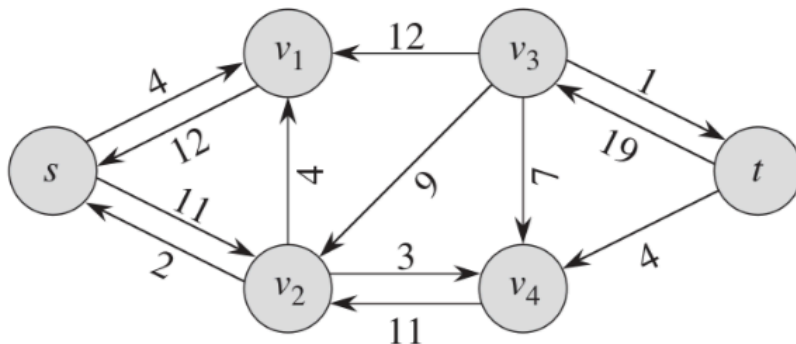


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 23 (12 + 11).

## Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.



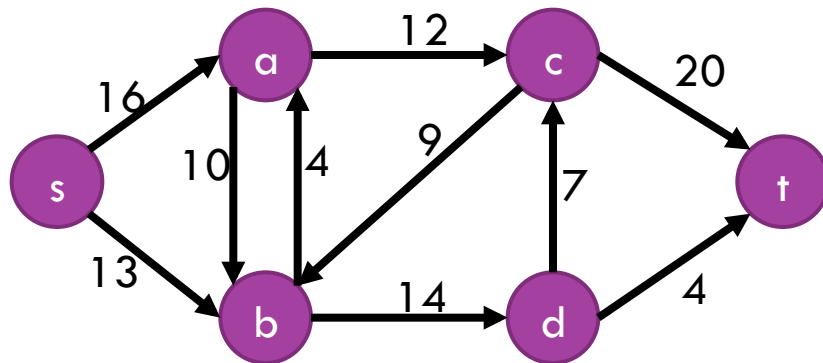
(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

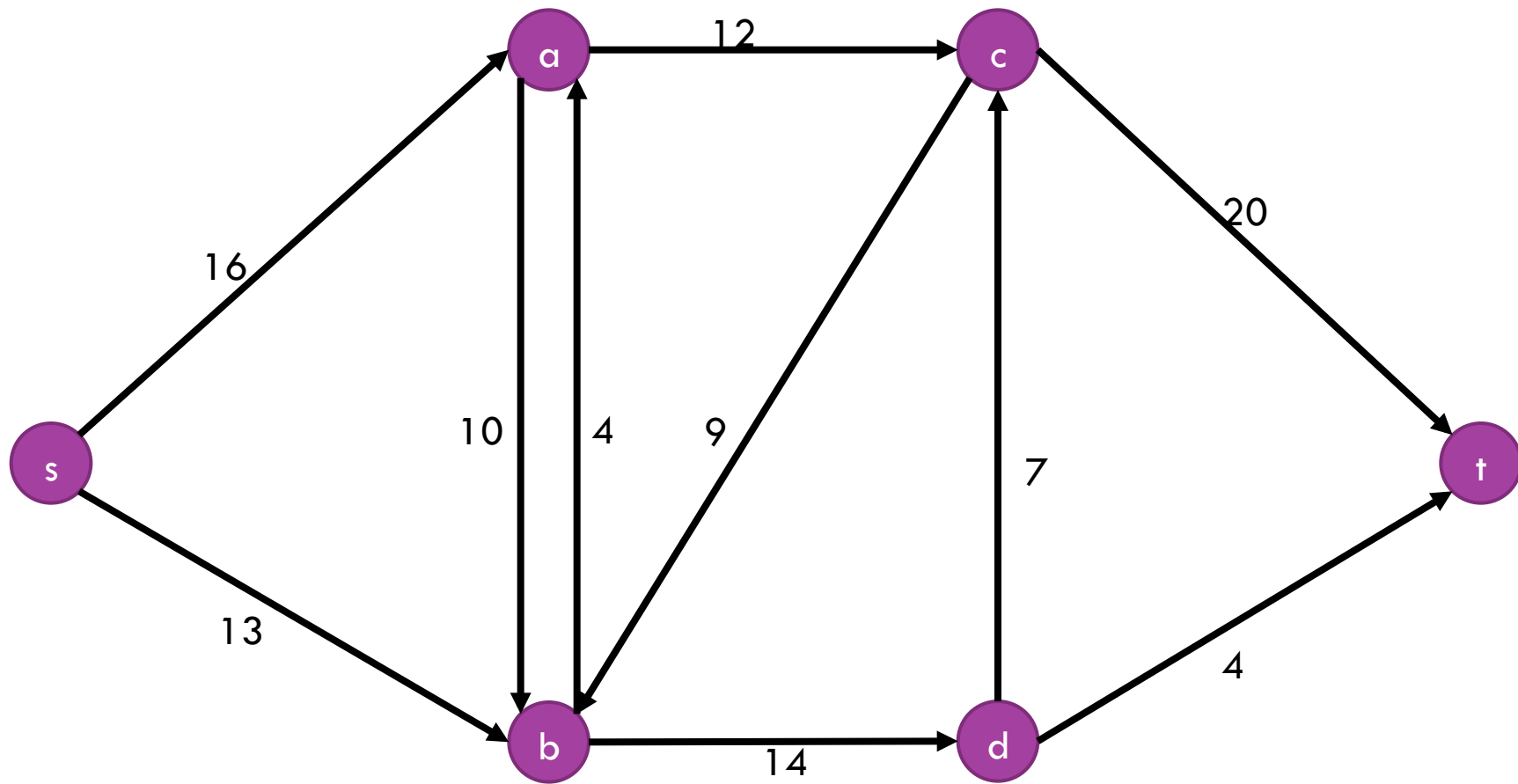
- Este grafo residual já não admite mais caminhos de aumento e o nosso método de Ford-Fulkerson fica por aqui!
- Este é o grafo residual do fluxo máximo que é de 23.

# Exemplo: Ford e Fulkerson

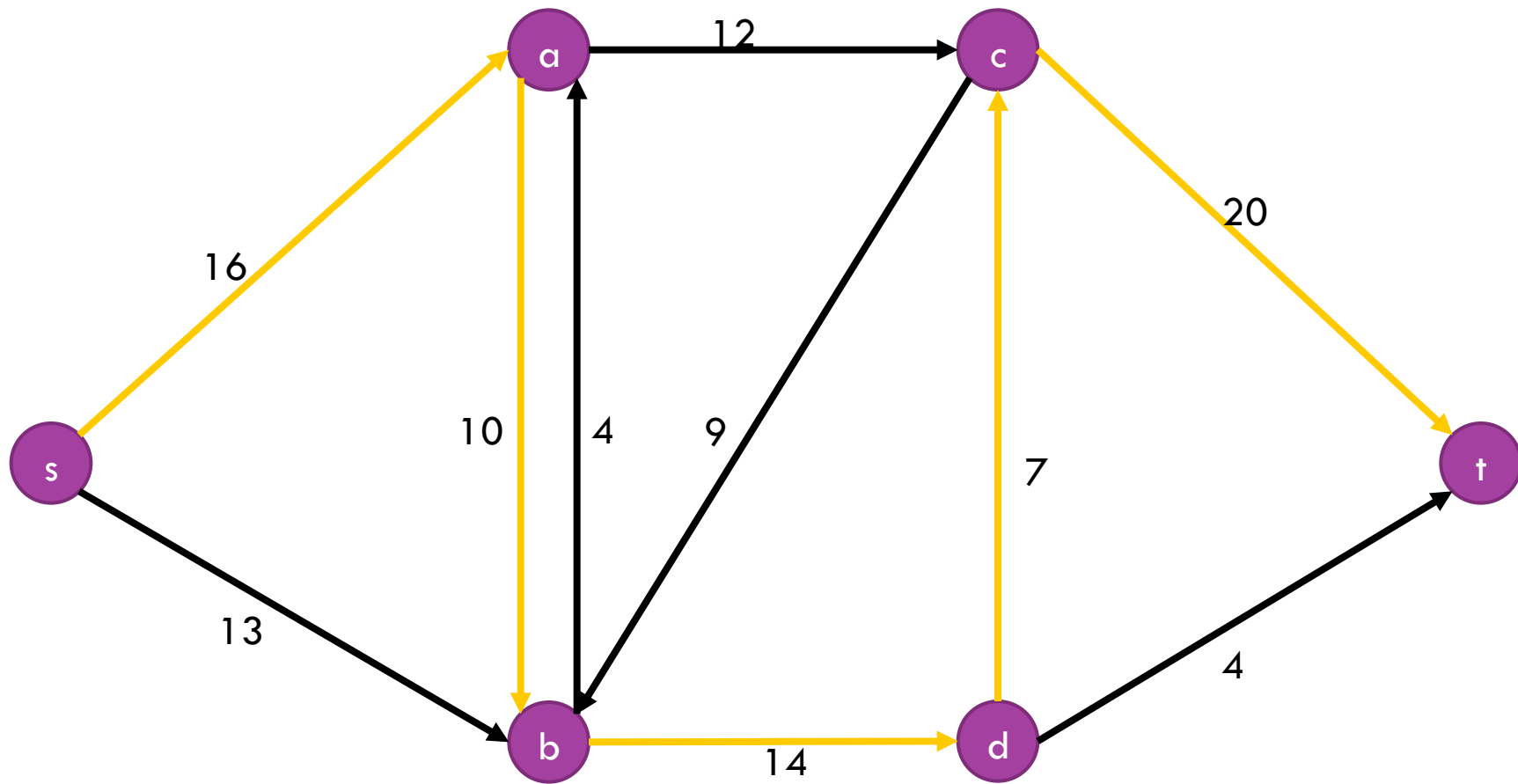
47

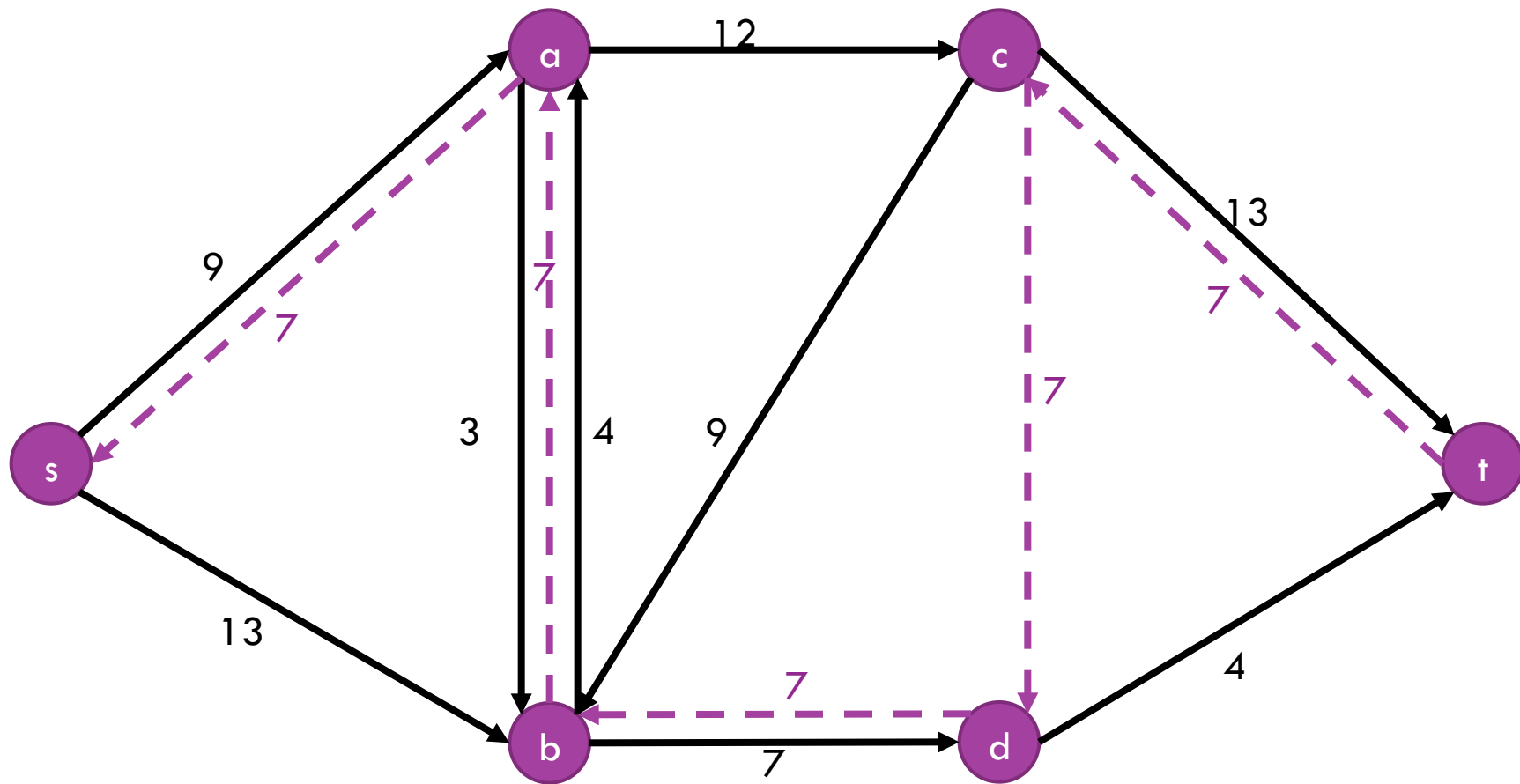
- Encontre o fluxo máximo na rede abaixo:

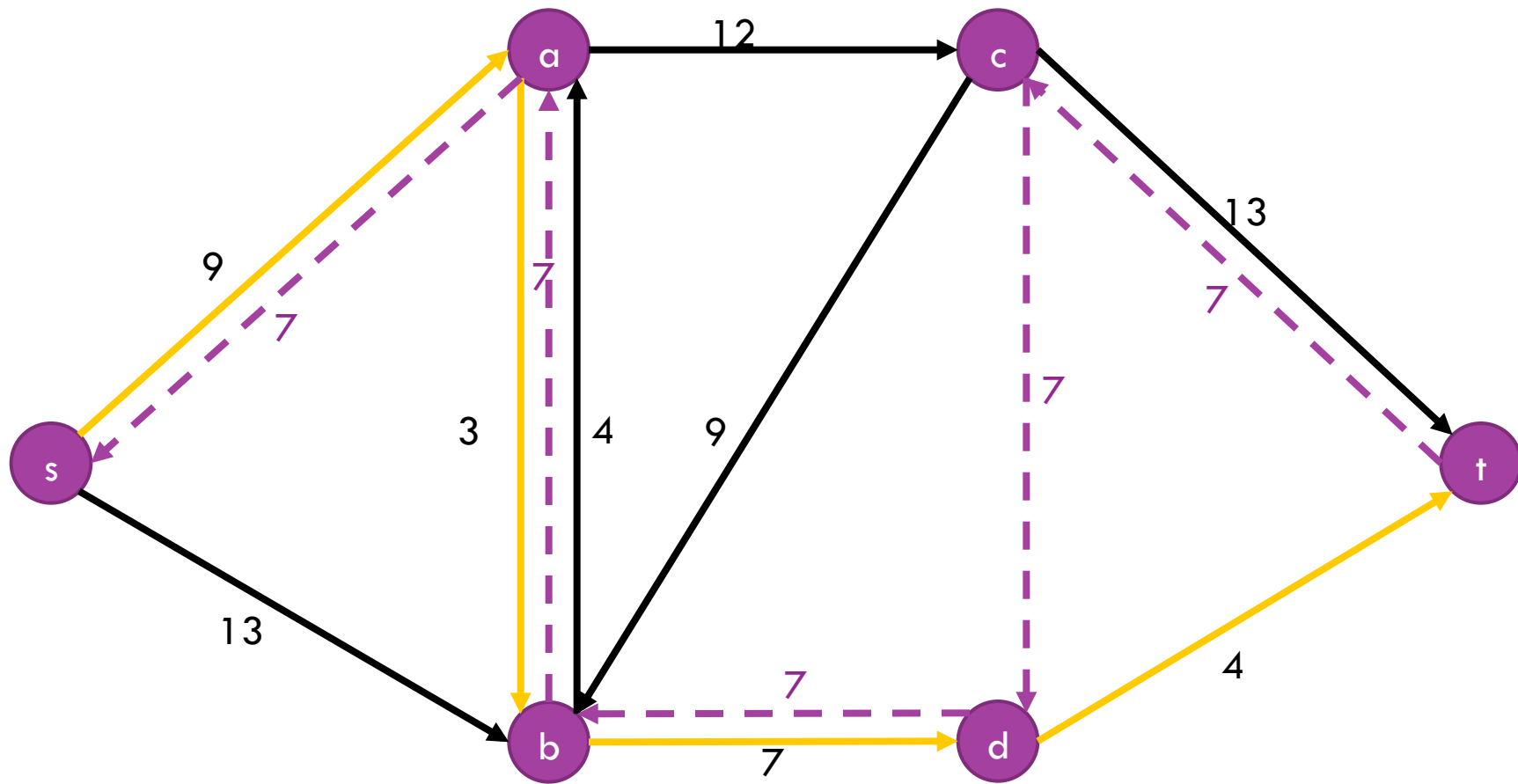


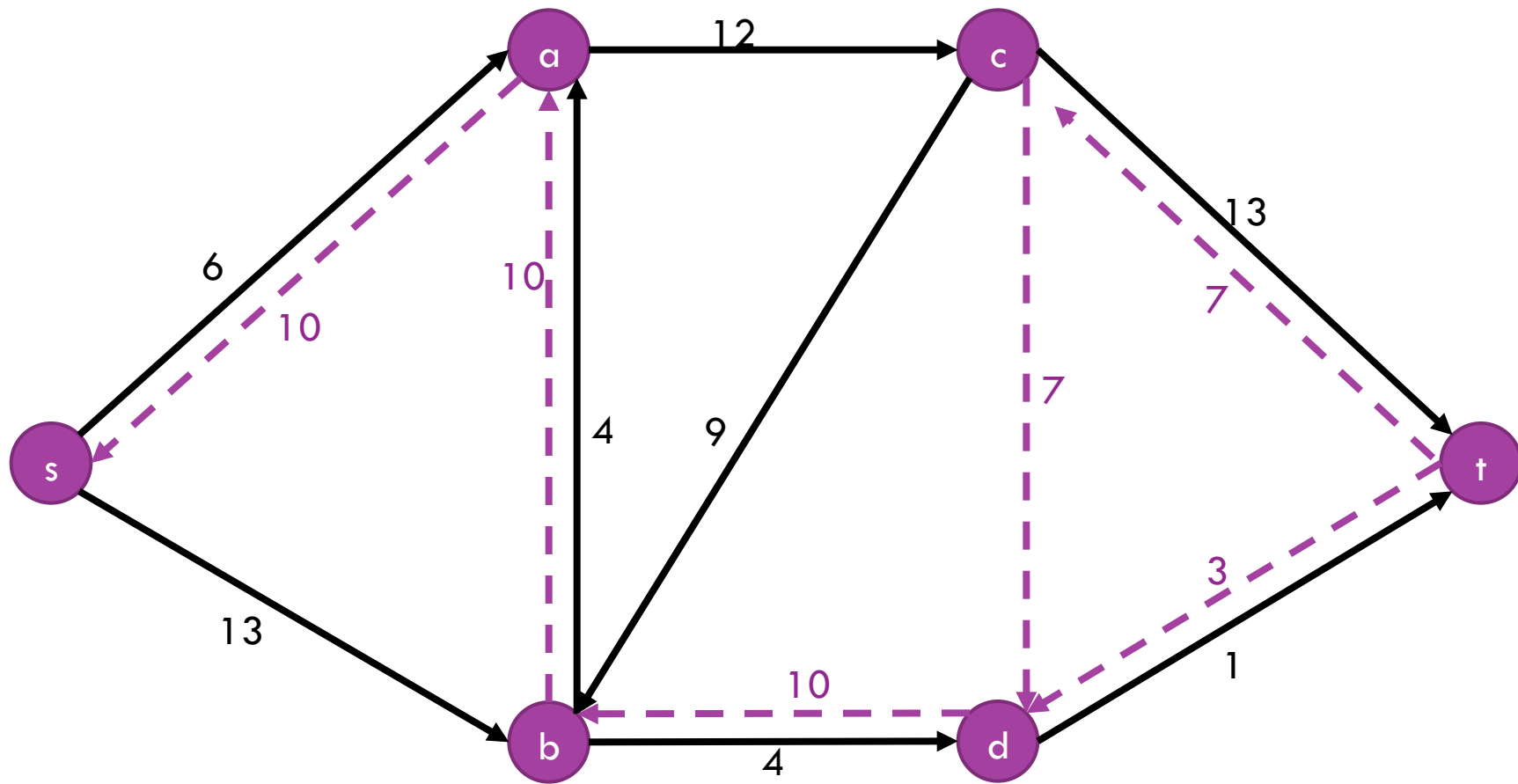


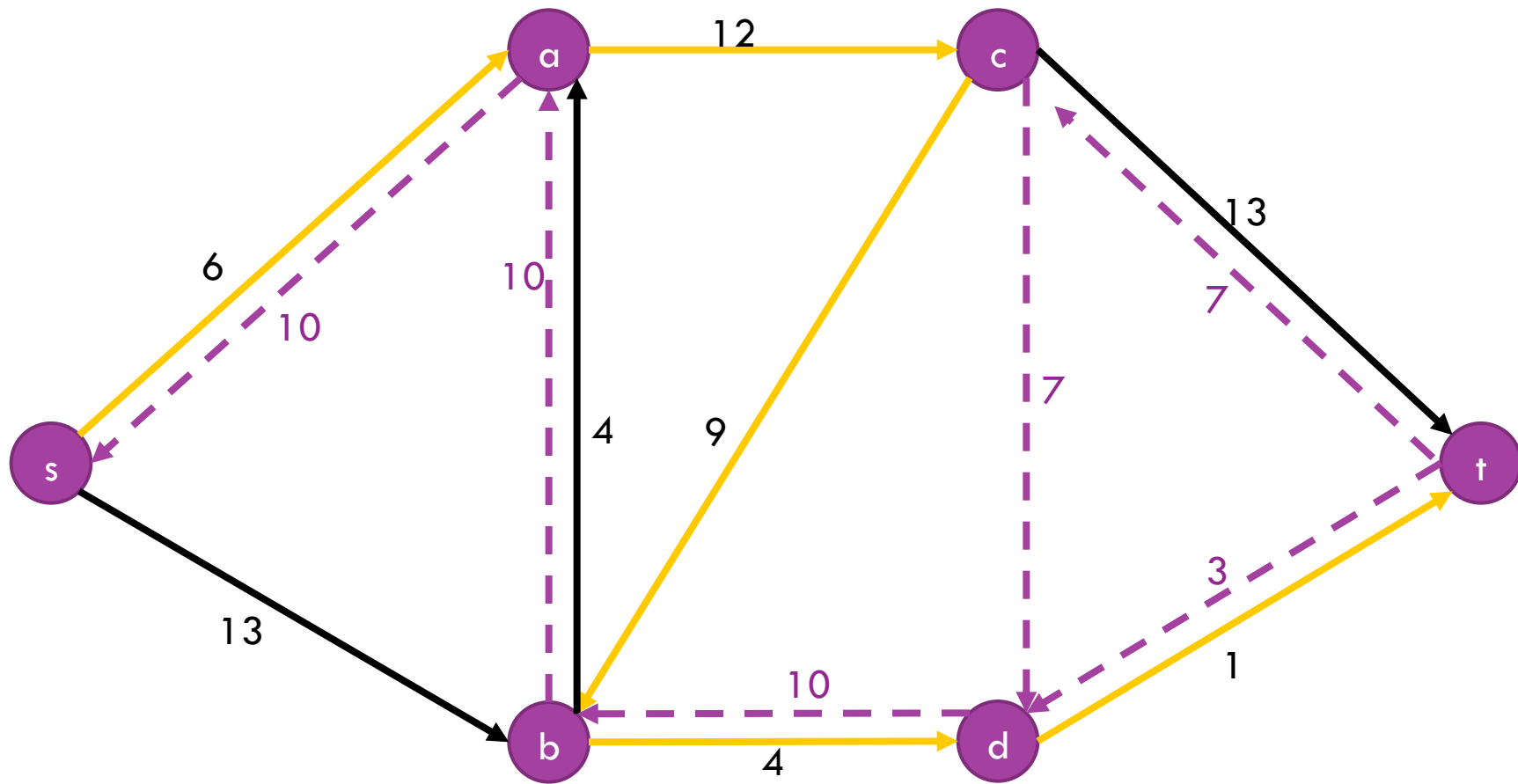


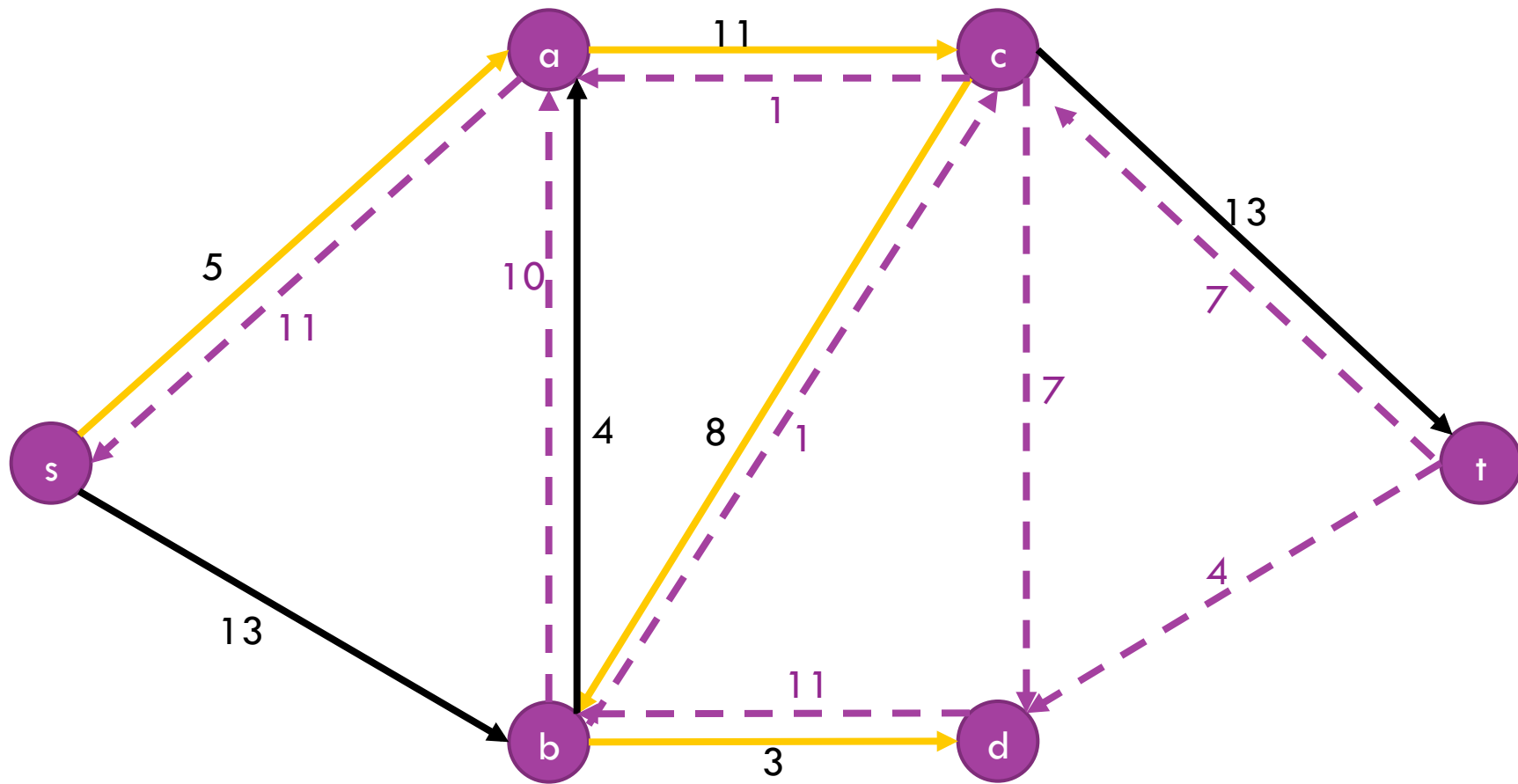


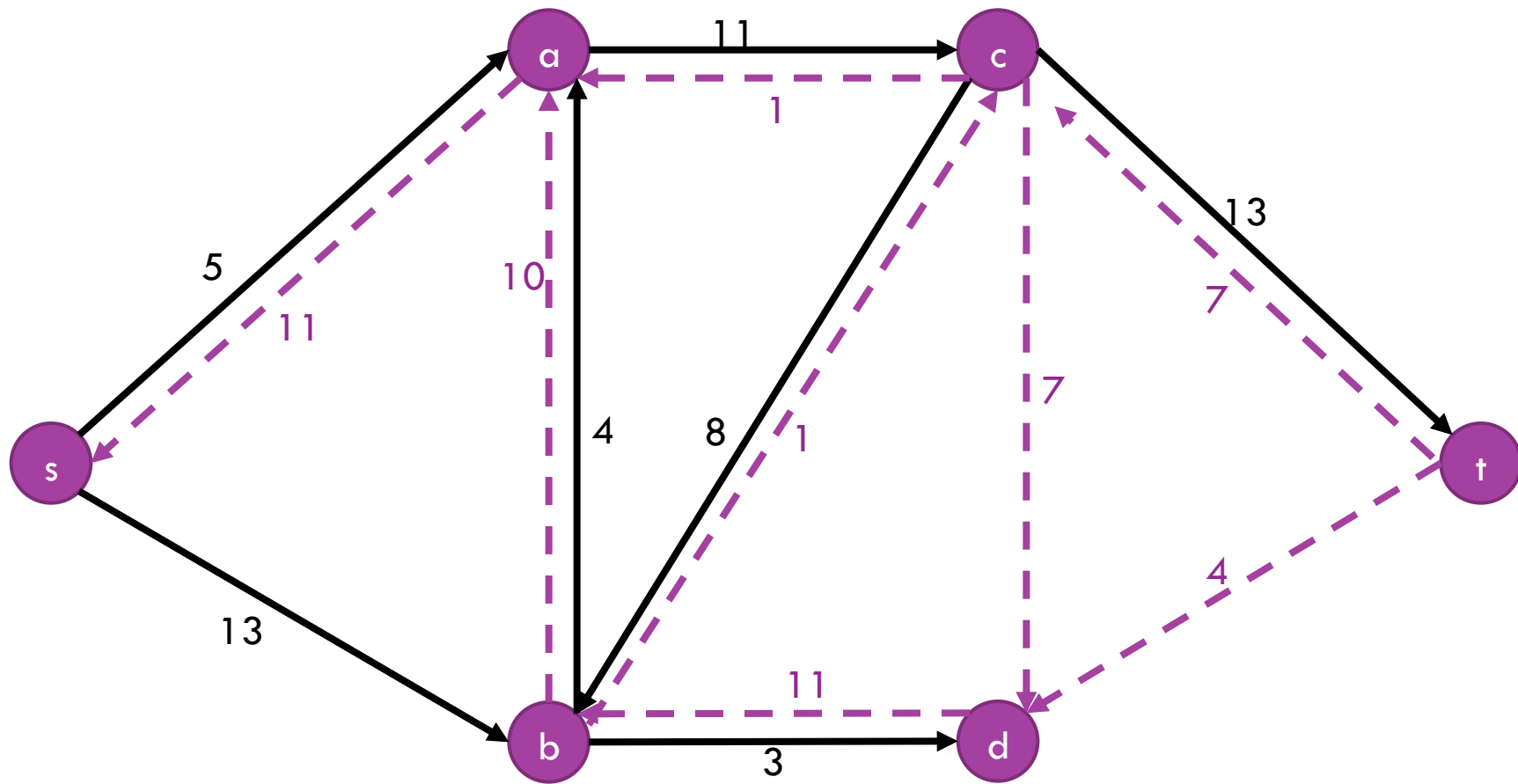


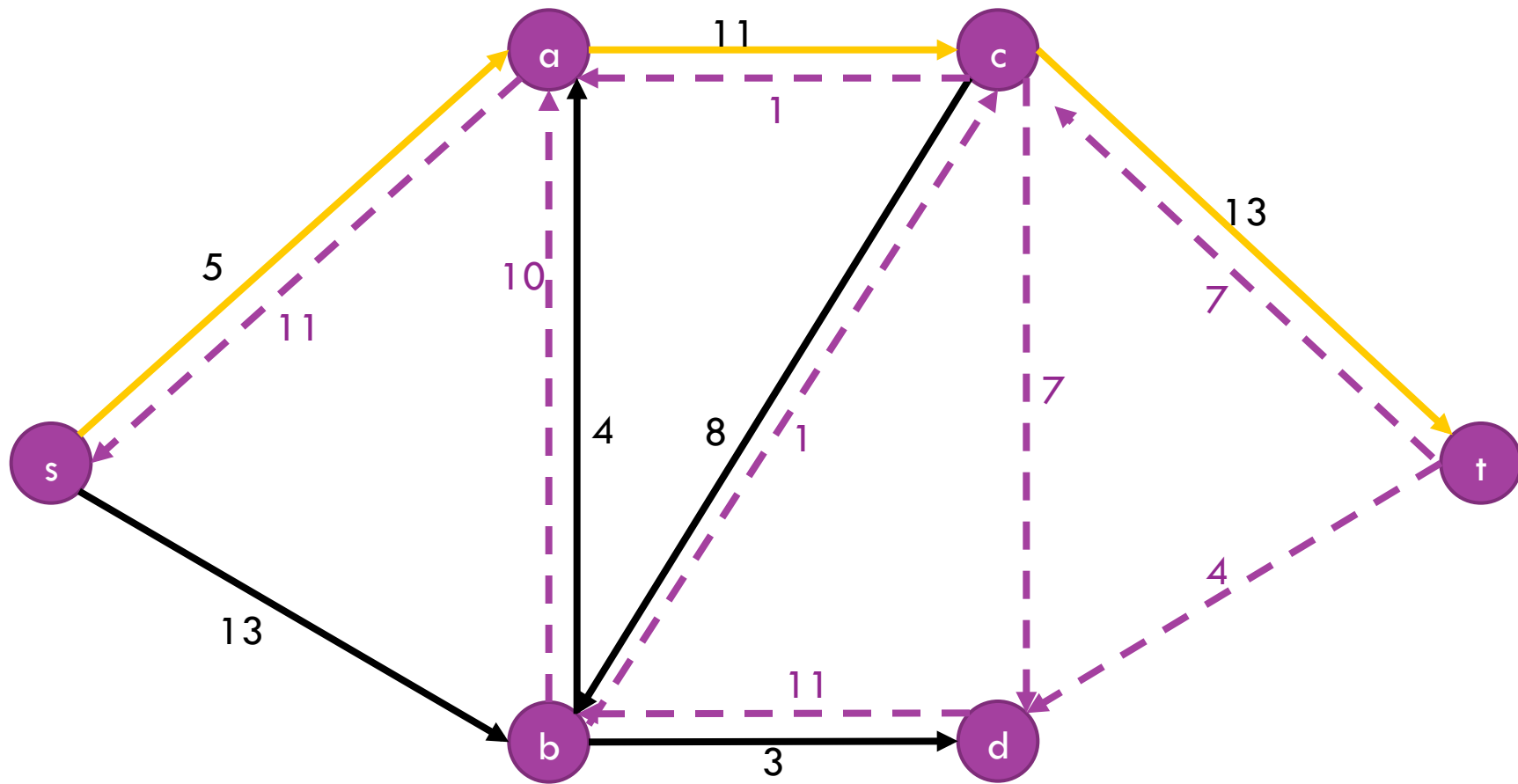




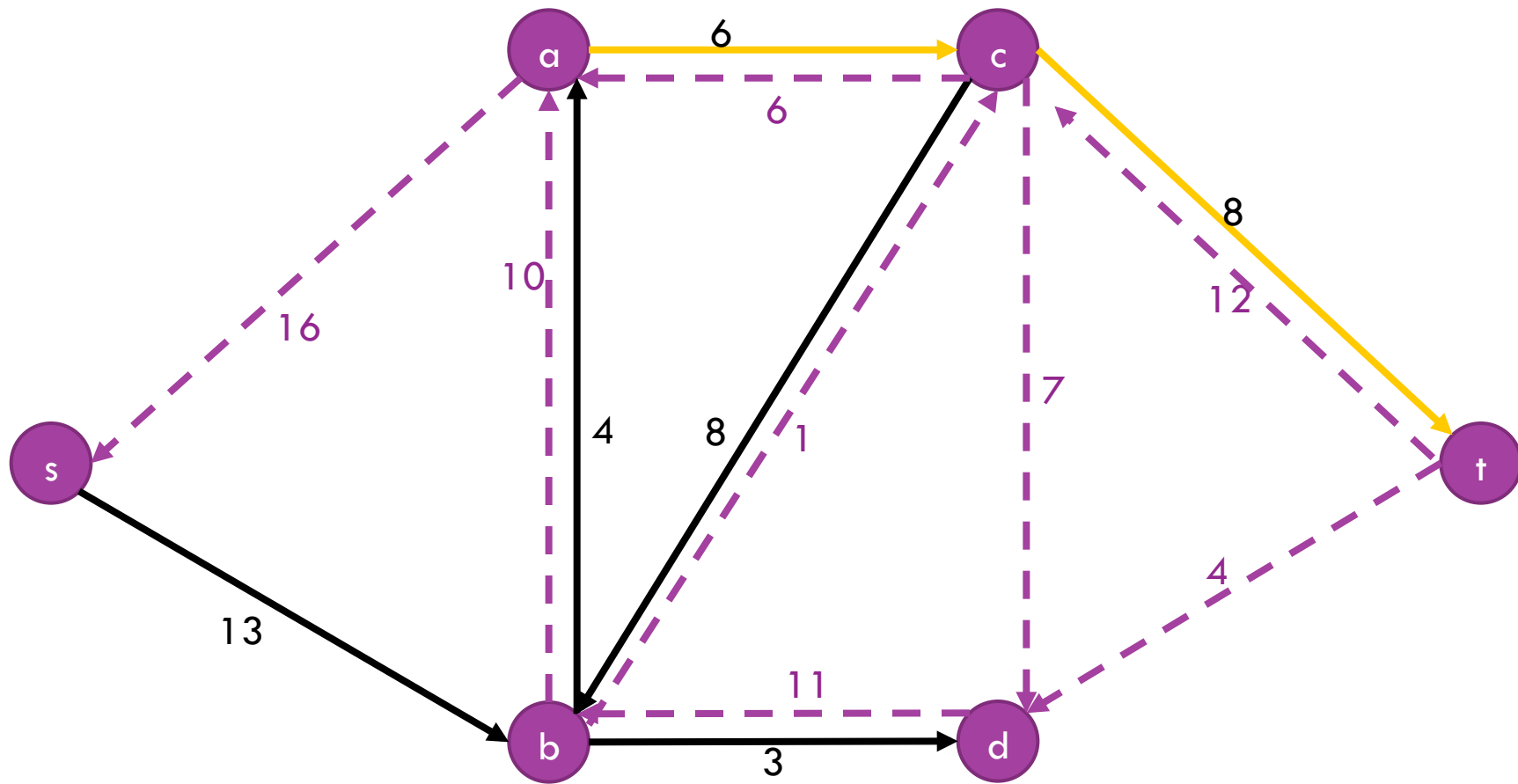


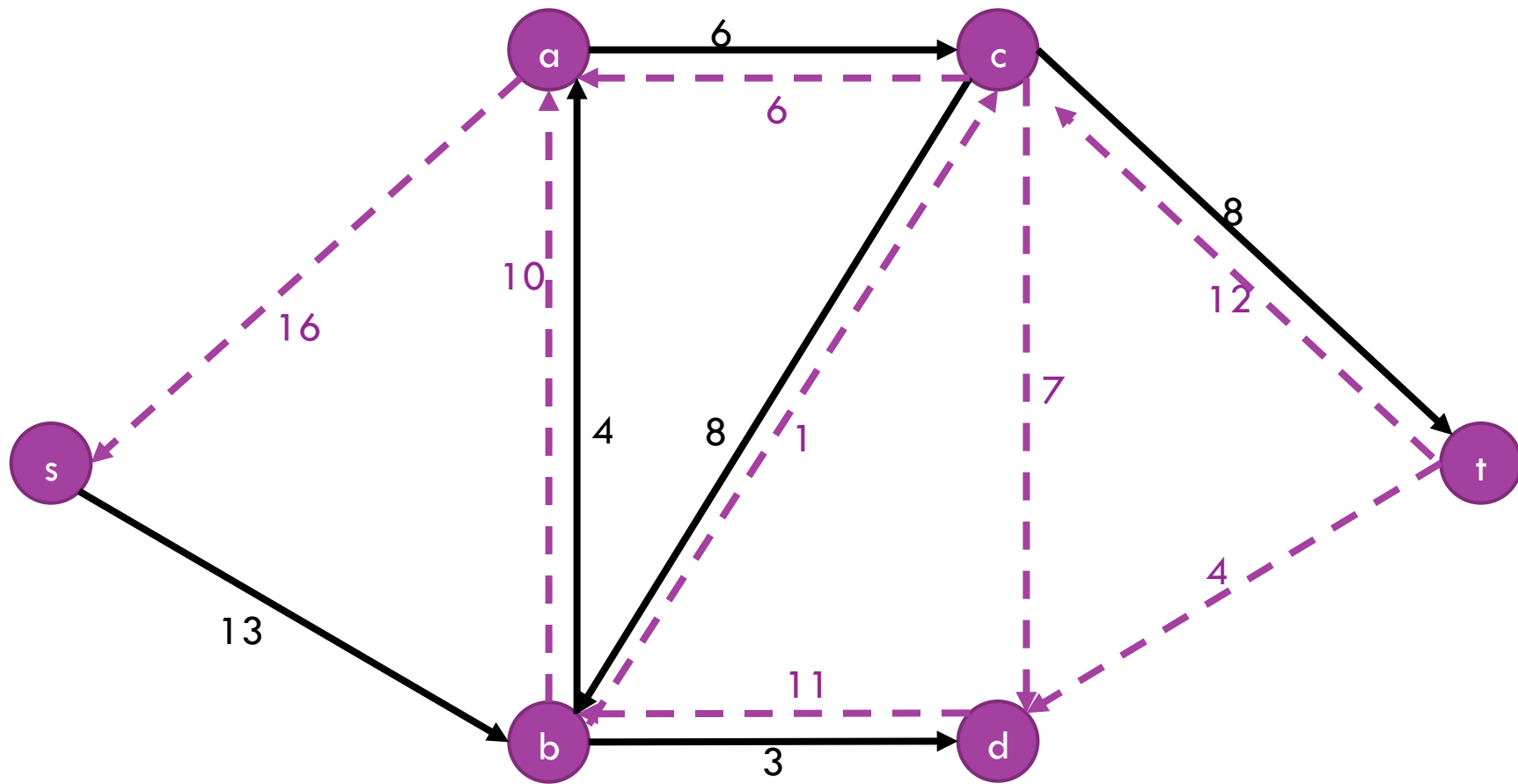


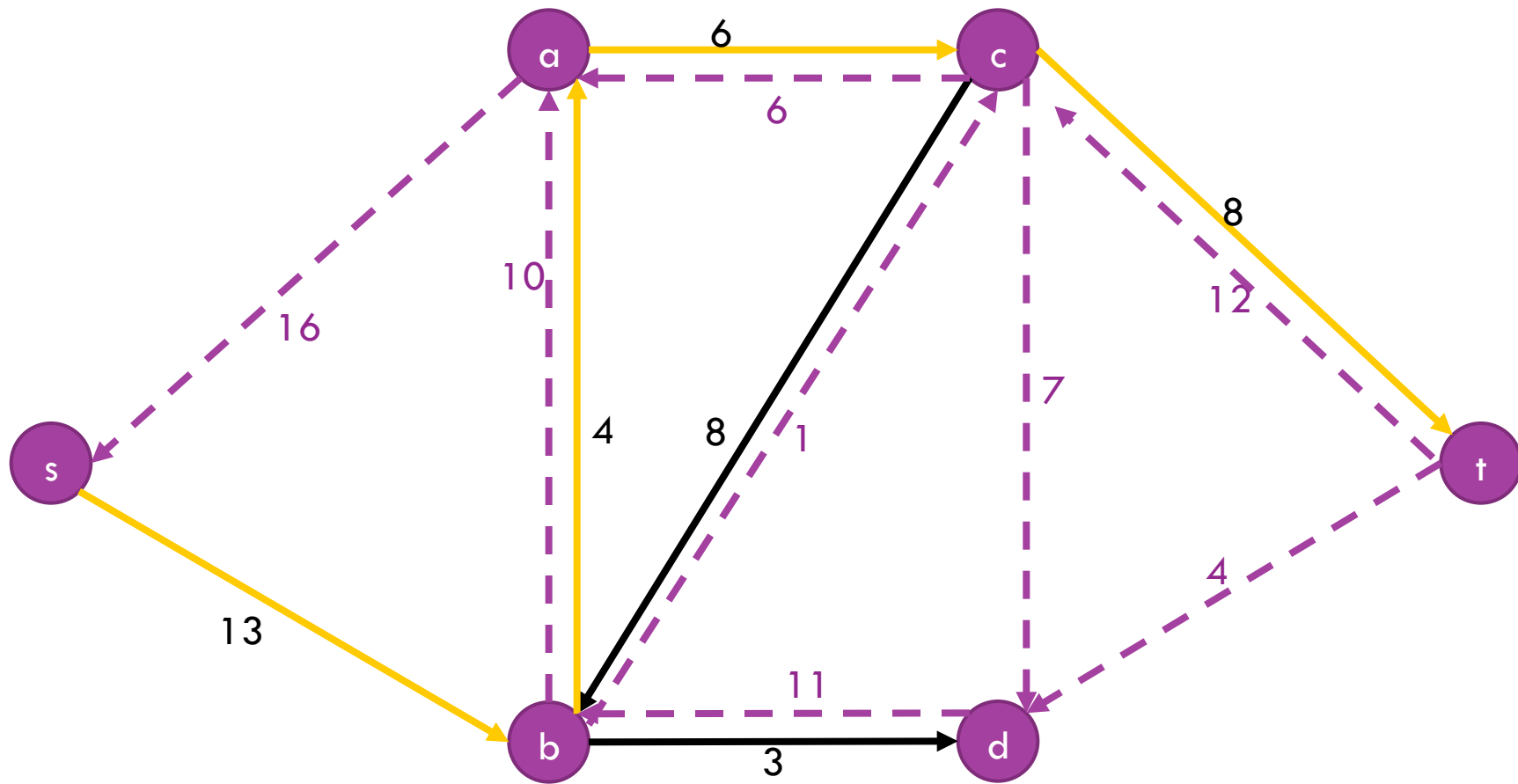


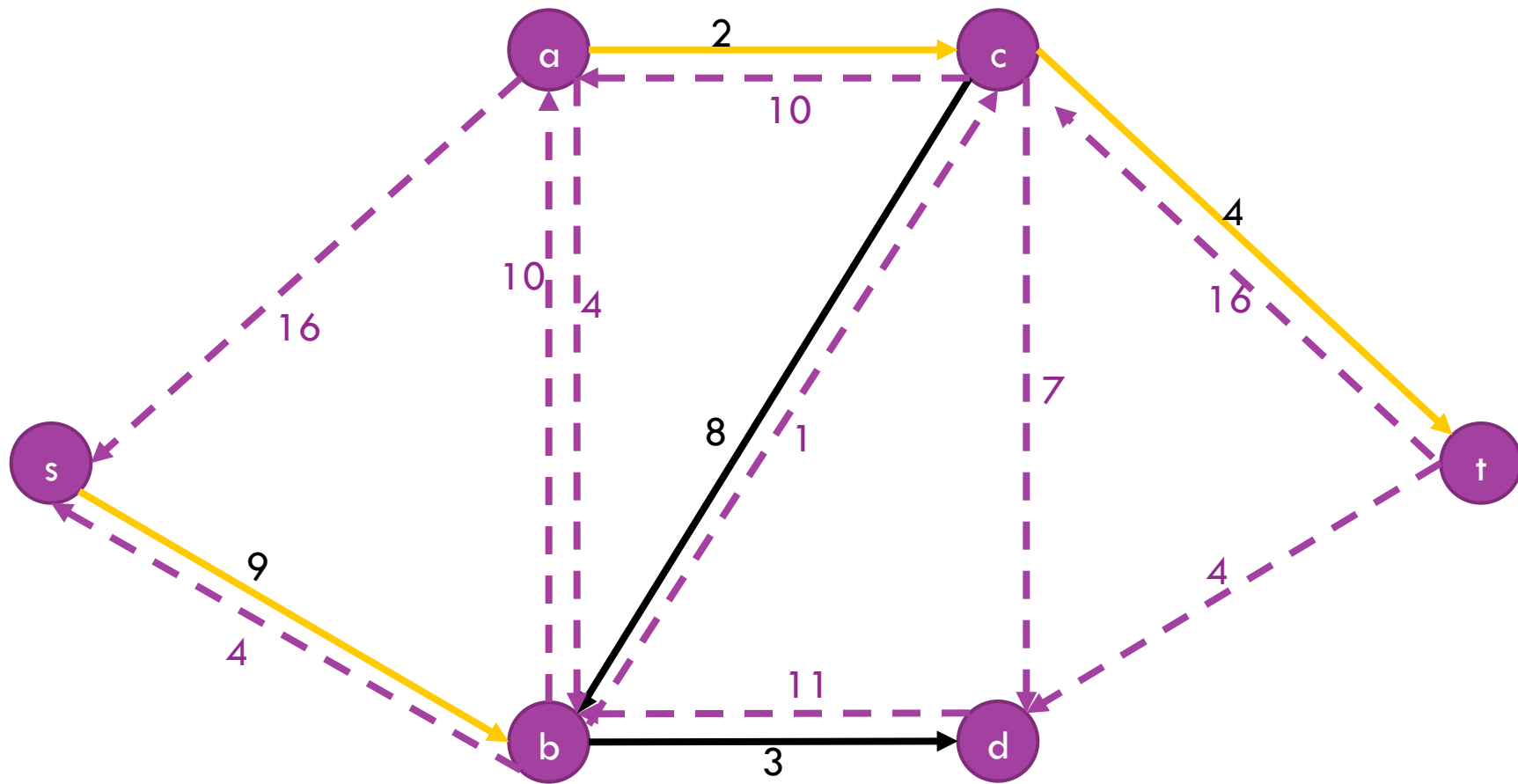


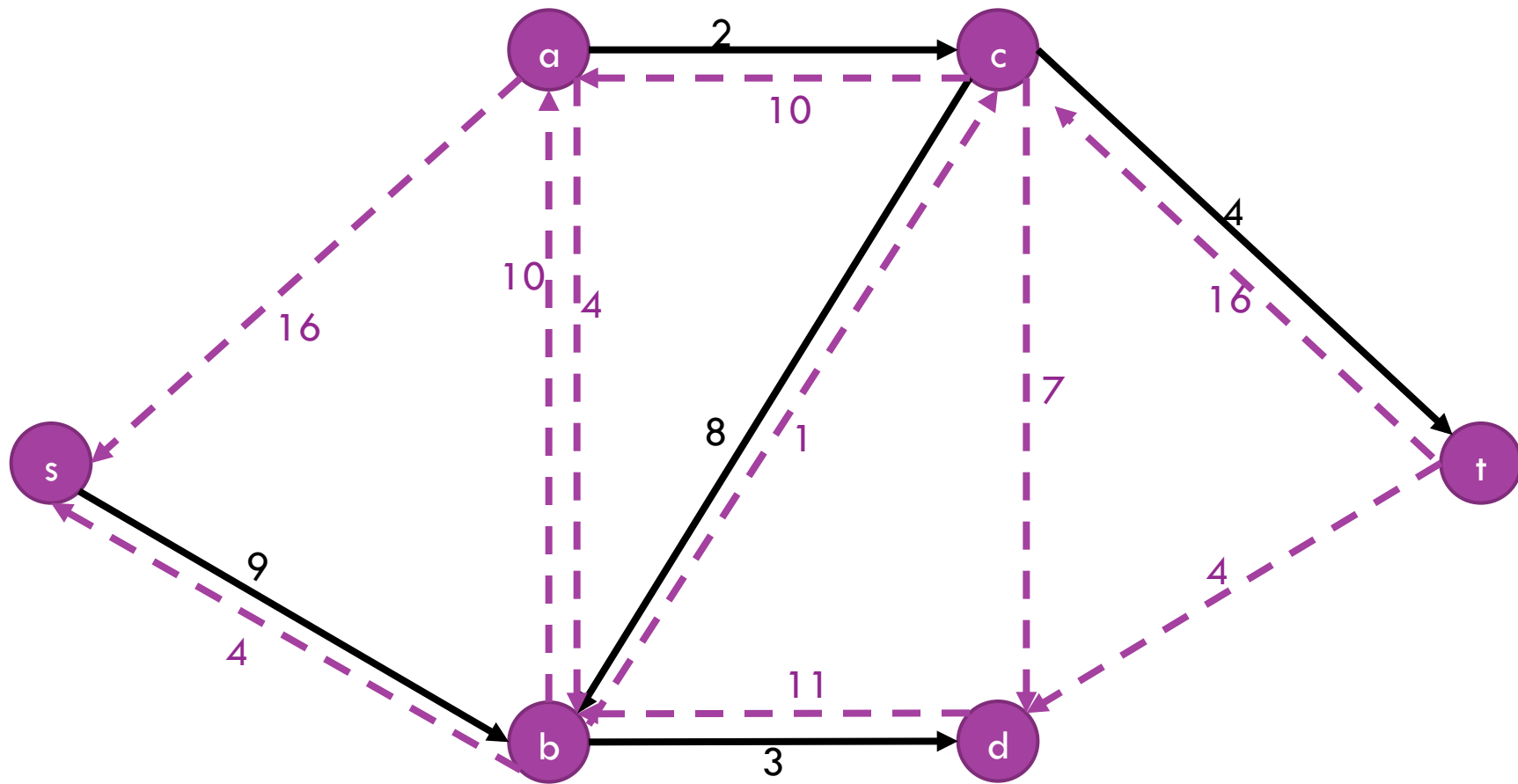


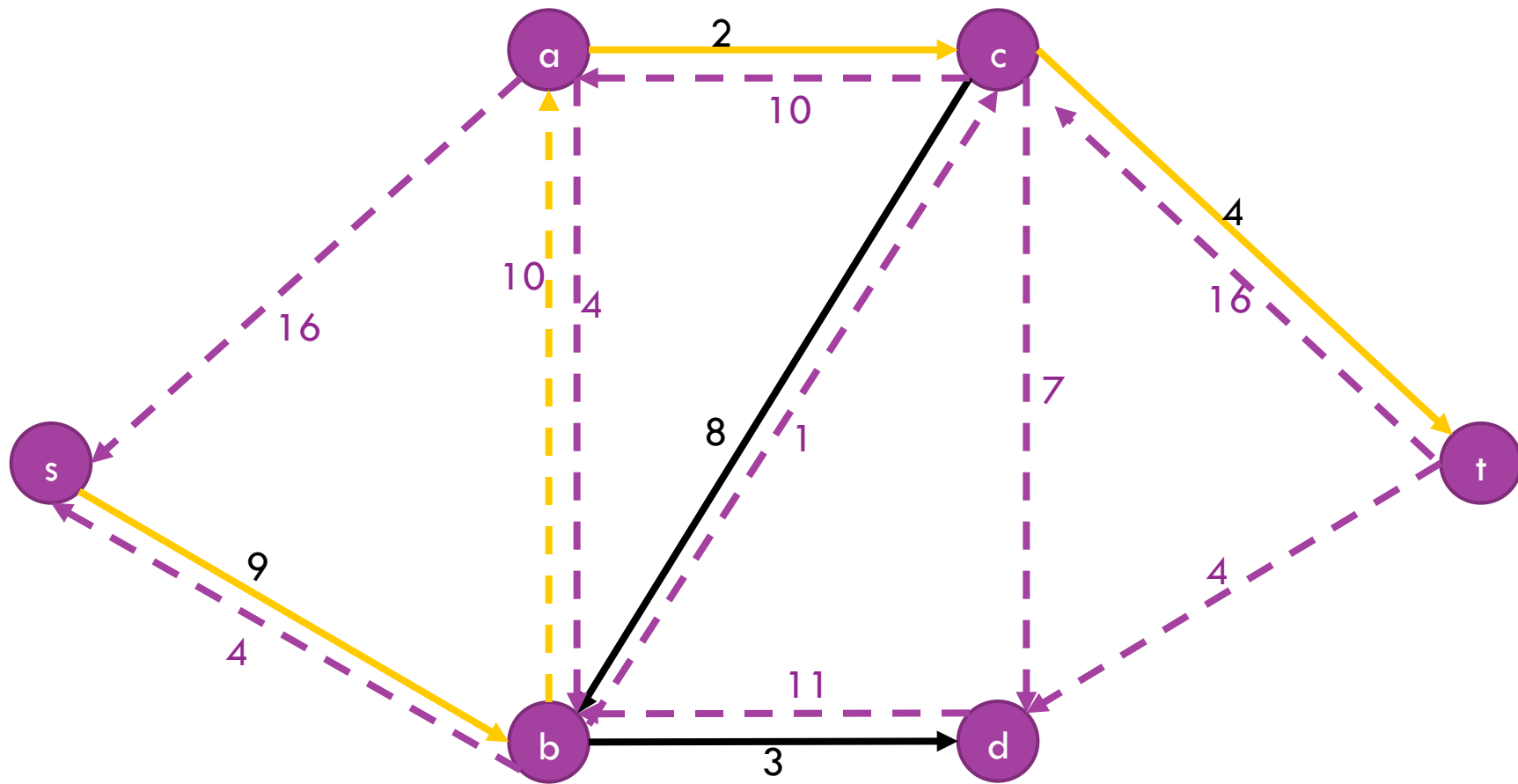


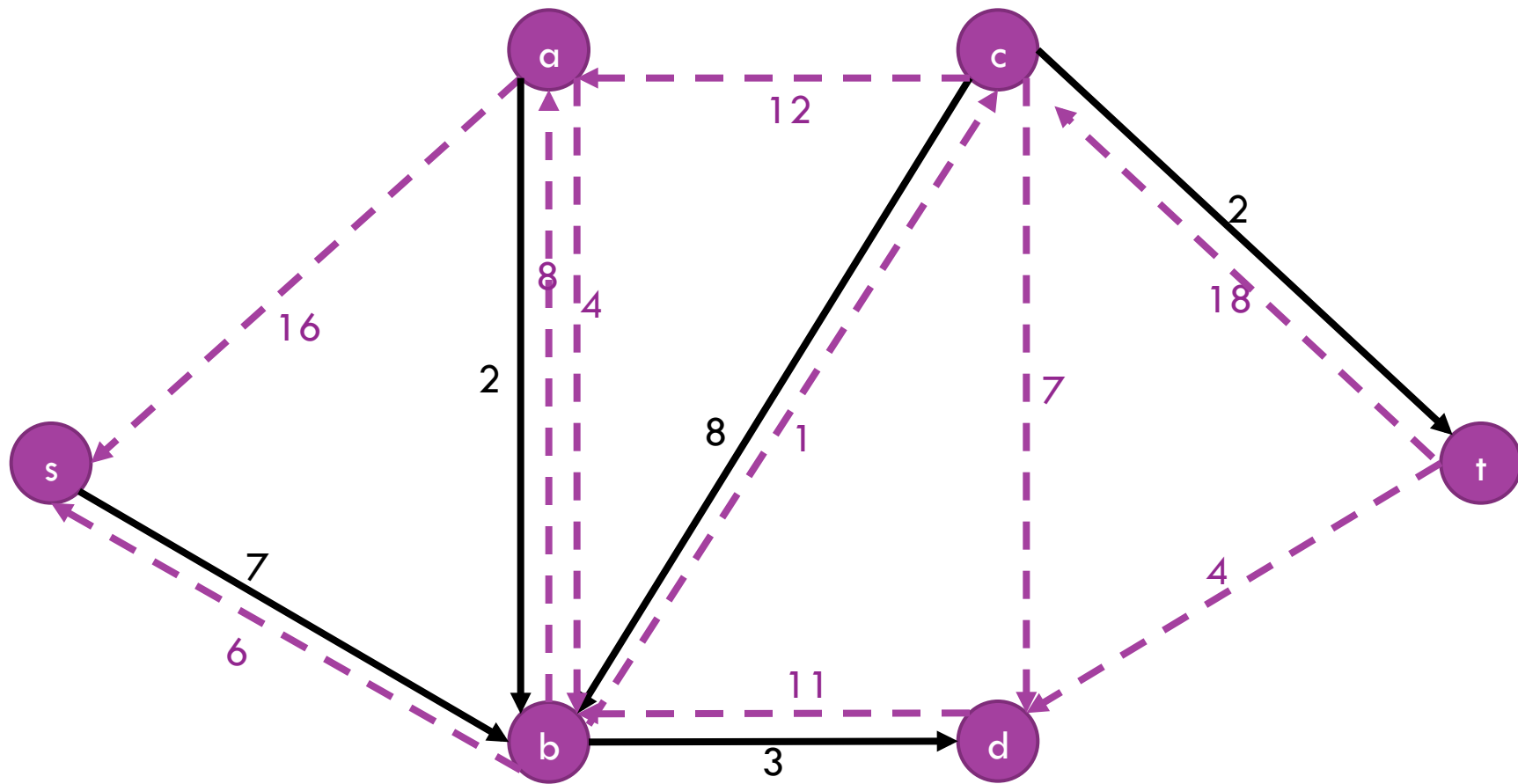


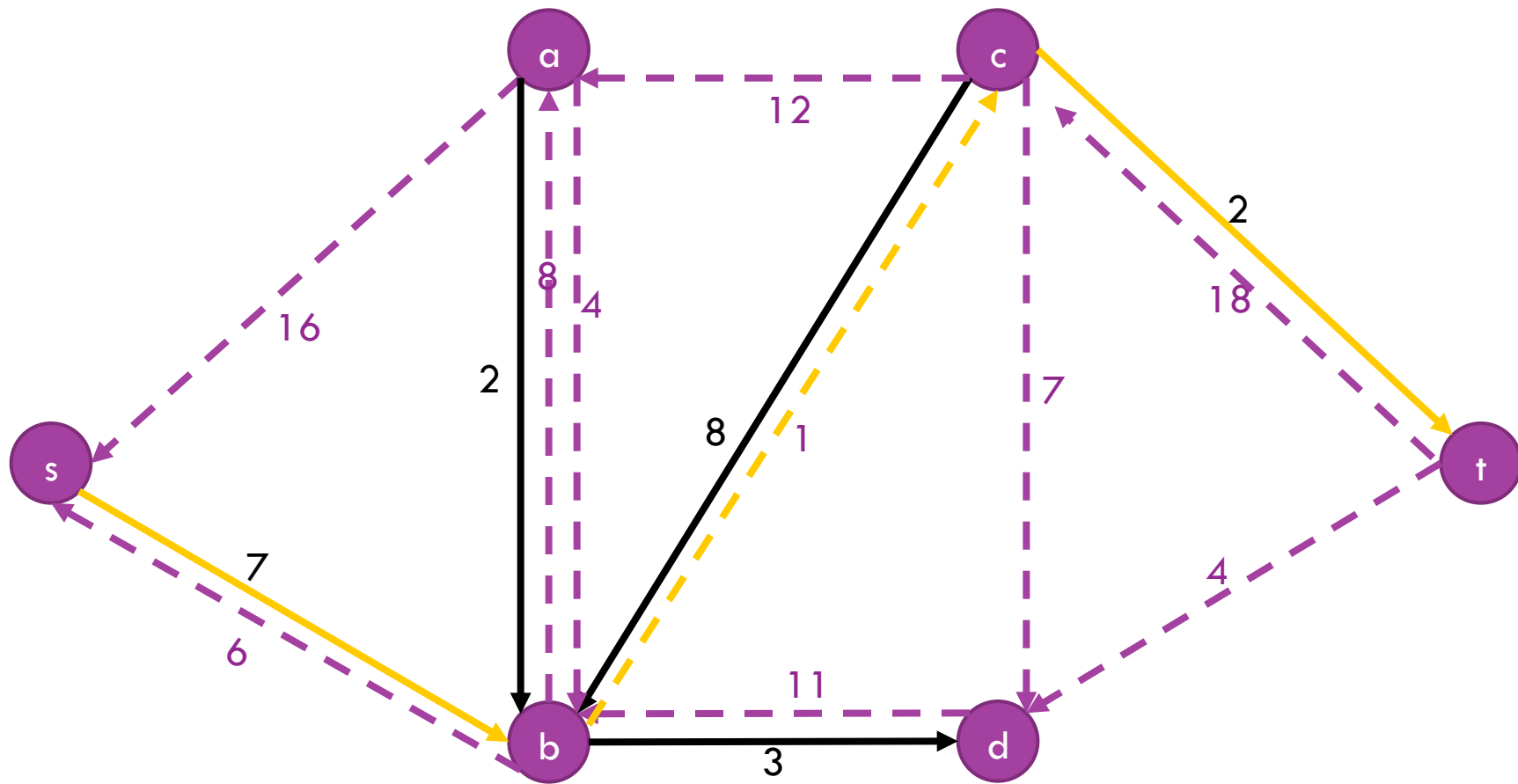




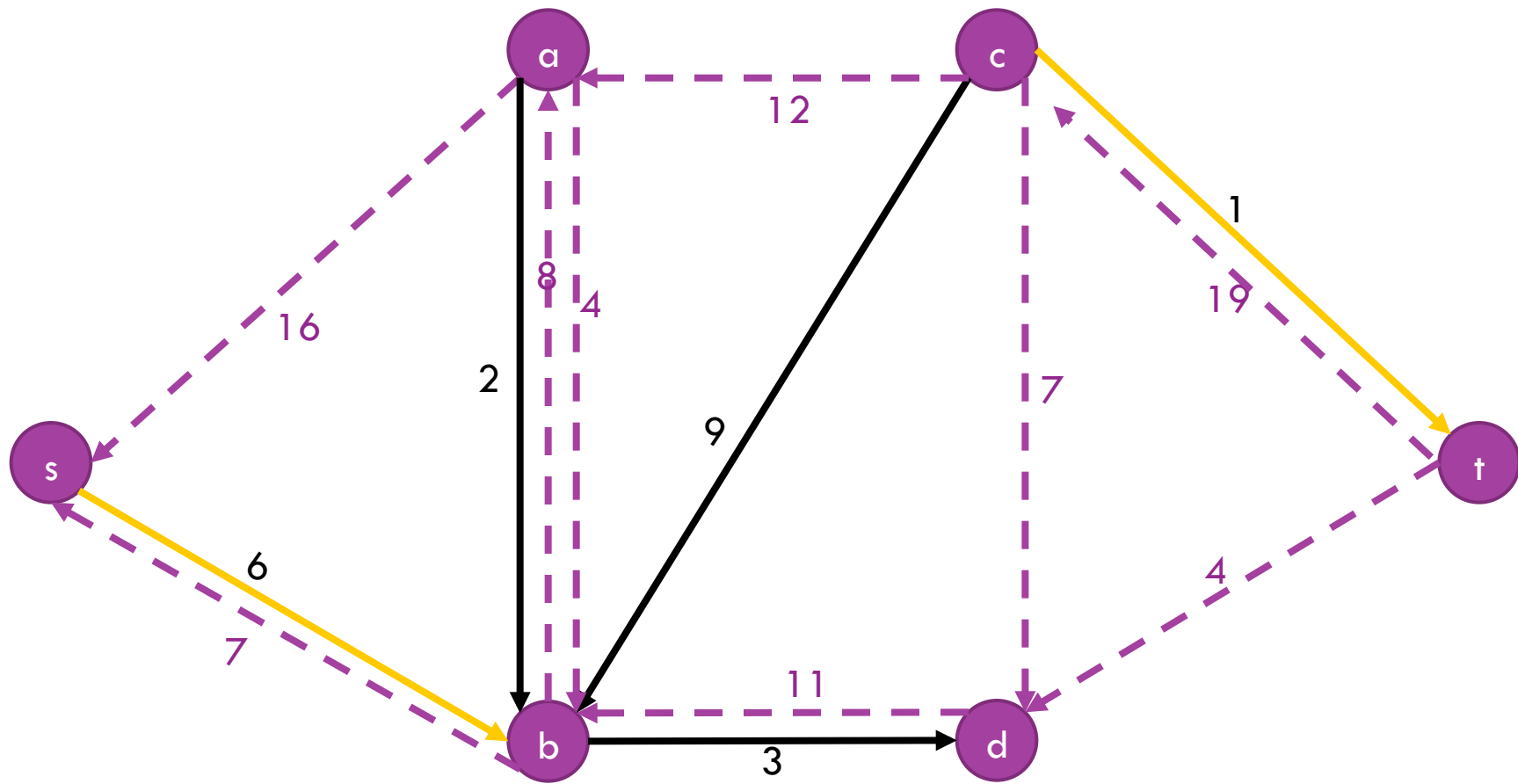


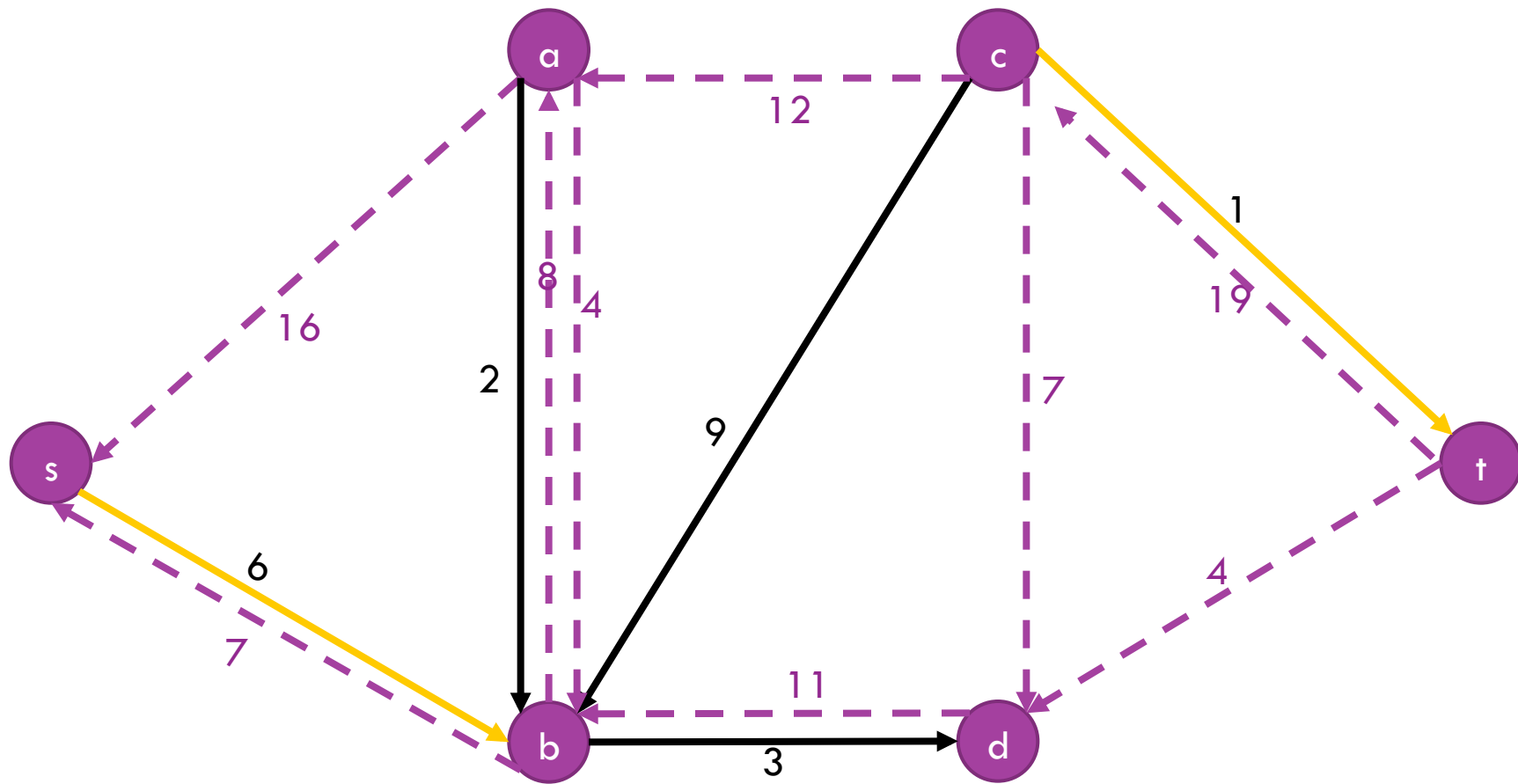


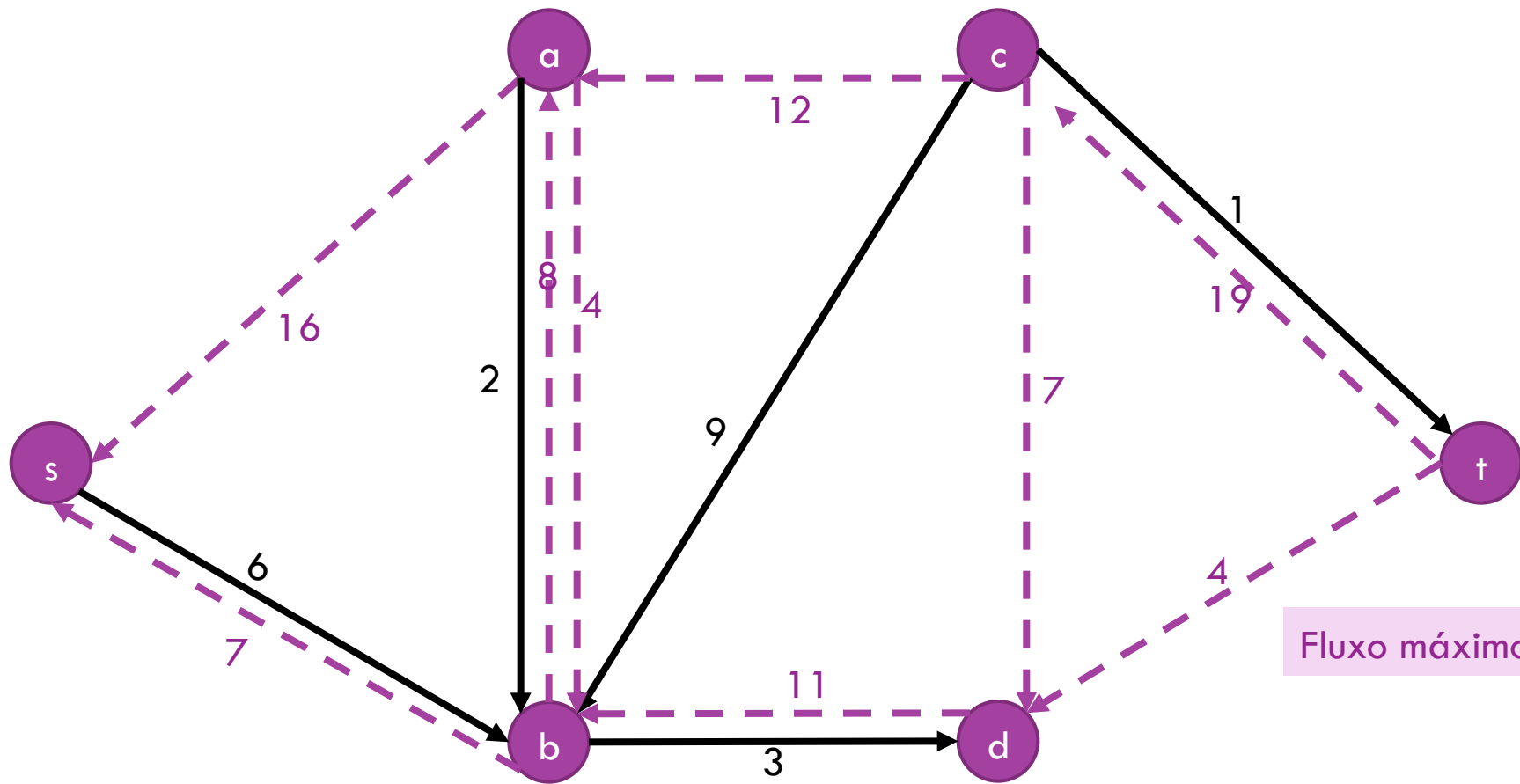












Flujo máximo: 23