

ALGORITMOS EM GRAFOS

DIGRAFOS

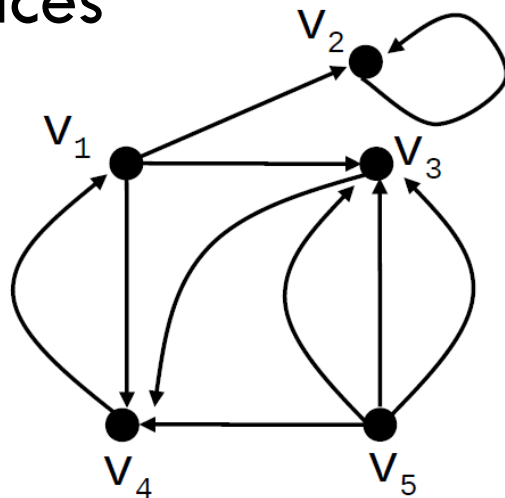
GRAFOS DIRIGIDOS ACÍCLICOS

Prof. Alexei Machado

Digrafos¹

2

- Digrafo ou grafo direcionado: é um grafo no qual as arestas são *pares ordenados* de vértices
- As arestas em um digrafo são comumente chamadas de *arcos*

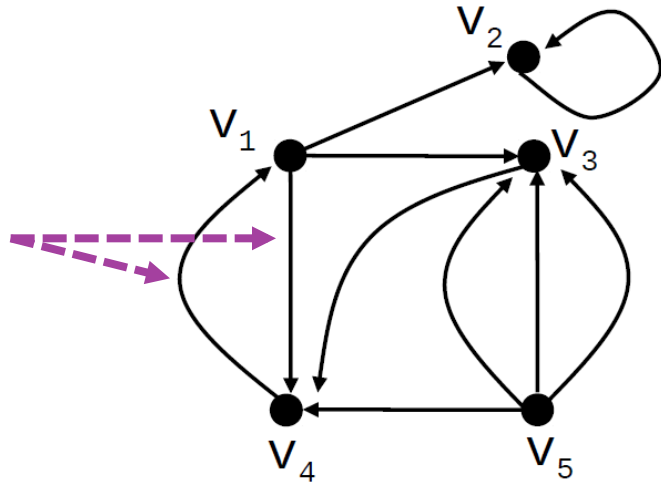


¹ - “A palavra digrafo é uma adaptação do termo *digraph* em inglês, que resultou da contração de *directed* e *graph*. Já dígrafo (com acento) é outra coisa muito diferente!” – Feofiloff, Paulo (2016) em http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/digraphs.html

Digrafos

3

- Vértice inicial e vértice final de um arco
- Dois arcos são *antiparalelos* ou *simétricos* se o vértice inicial de um é o vértice final de outro e vice versa

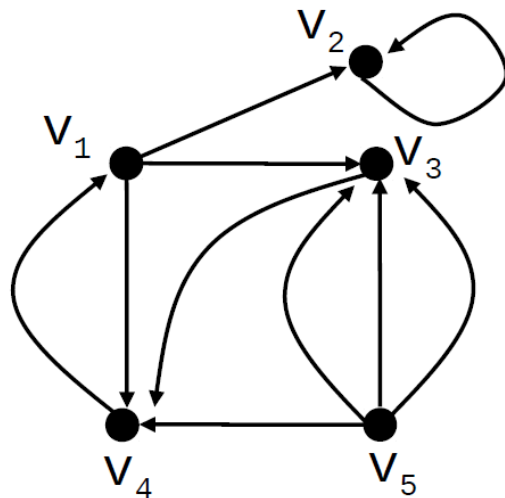


Digrafos

4

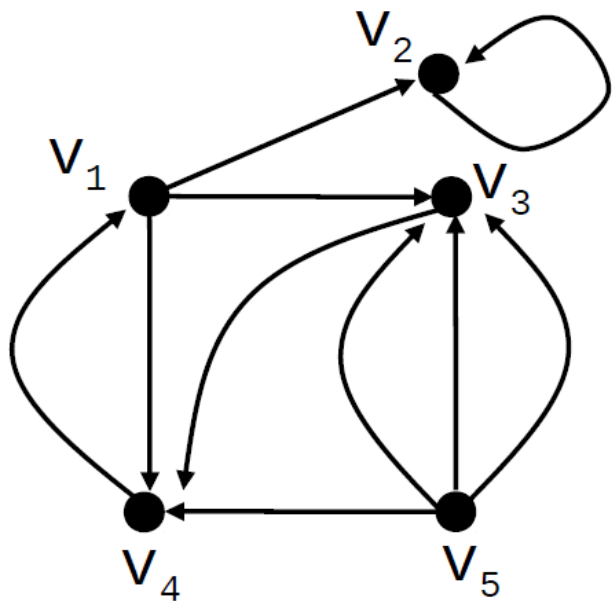
- Grau de entrada de um vértice: $d^-(v)$
- Grau de saída de um vértice: $d^+(v)$

$$\sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i)$$

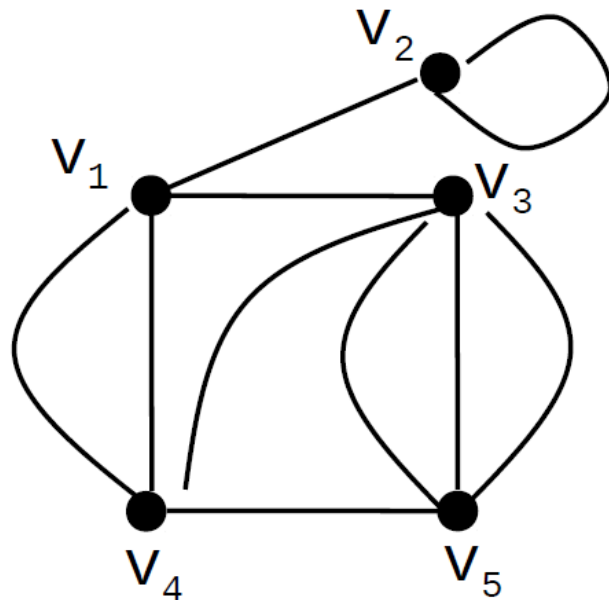


Digrafos e grafos correspondentes

5



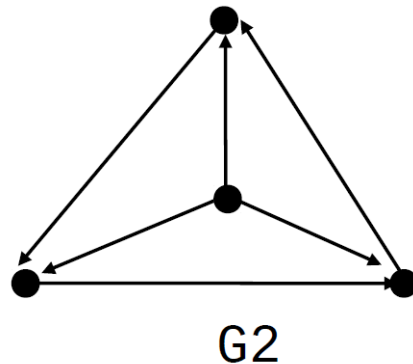
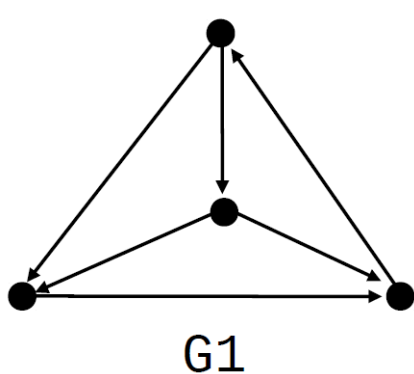
Grafo
Correspondente



Isomorfismo de digrafos

6

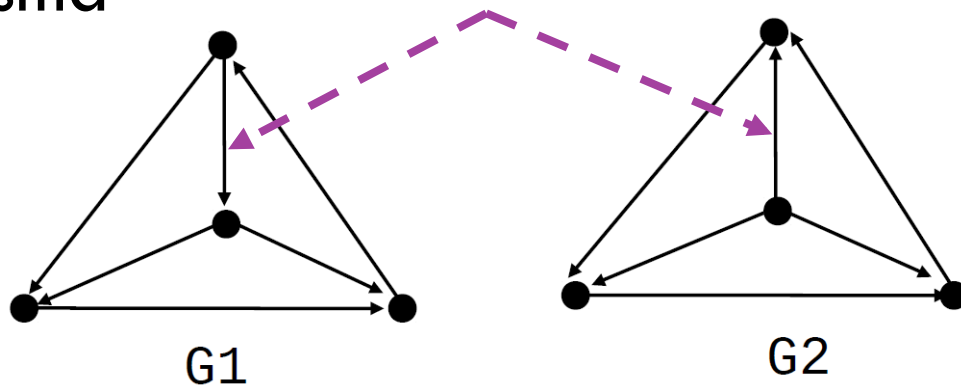
- Isomorfismo de digrafos: a direção das arestas deve ser a mesma



Isomorfismo de digrafos

7

- Isomorfismo de digrafos: a direção das arestas deve ser a mesma

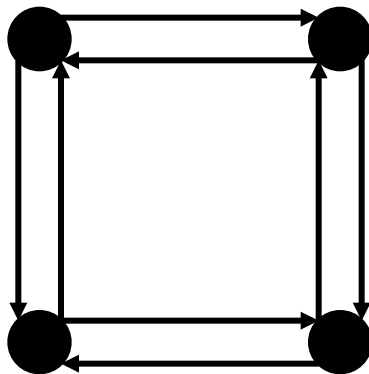


- G_1 e G_2 não são isomorfos

Digrafos simétricos

8

- Um digrafo é simétrico se para toda aresta (v_a, v_b) existe uma aresta (v_b, v_a)

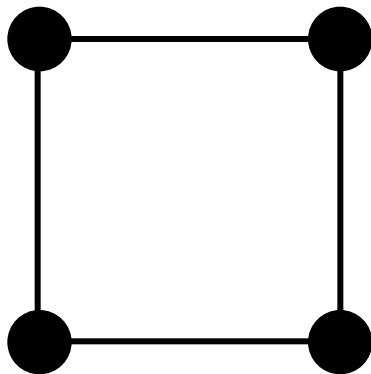


Digrafos simétricos

9

- Um digrafo é simétrico se para toda aresta (v_a, v_b) existe uma aresta (v_b, v_a)

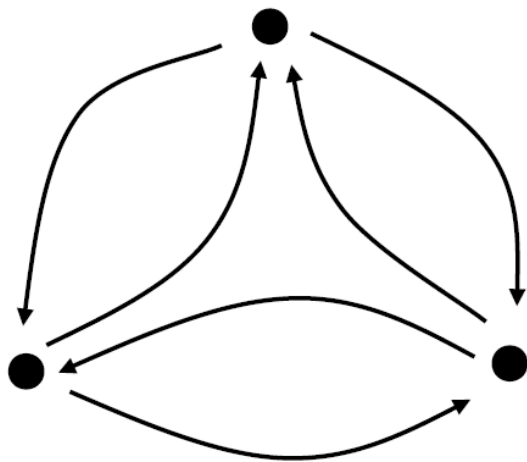
- == grafo!



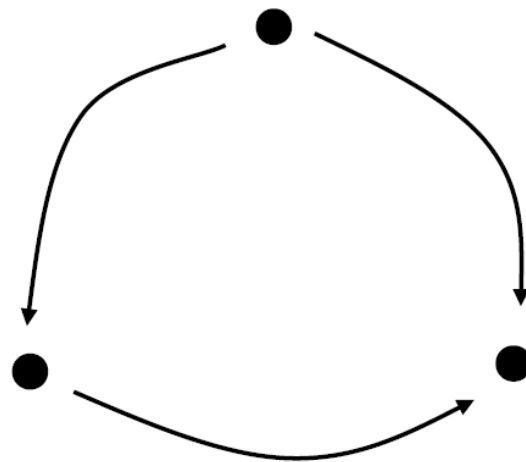
Digrafos completos

10

Simétrico
(grafo)



Assimétrico
(torneio)



Digrafo balanceado

11

- Se, para todo vértice v de um digrafo, temos

$$d^{+}(v) = d^{-}(v)$$

o digrafo é dito balanceado.

Caminhos e circuitos em digrafos

12

- Caminho dirigido: segue a orientação das arestas
 - Semi-caminho: é um caminho no grafo correspondente mas não é no dígrafo
- Caminho simples dirigido e Semi-caminho simples
- Circuito dirigido e Semi-circuito

Conectividade

13

- Digrafo fortemente conexo: existe um caminho dirigido entre quaisquer pares de vértices
- Digrafo fracamente conexo: digrafo não é fortemente conexo, mas seu grafo correspondente é conexo
- Se falarmos que um digrafo é conexo, simplesmente significa que seu grafo correspondente é conexo

Eulerianos

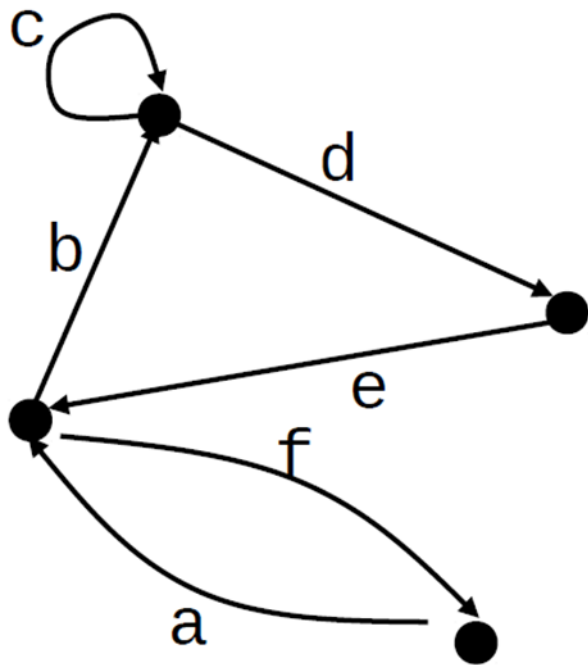
14

- Digrafos Eulerianos: possuem um caminho fechado dirigido que passa por todas as arestas exatamente uma vez
- **TEOREMA:** Um dígrafo é euleriano se, e somente se, ele for fortemente conexo e balanceado

$$d^{+}(v) = d^{-}(v) \quad \forall v \in V$$

Eulerianos

15

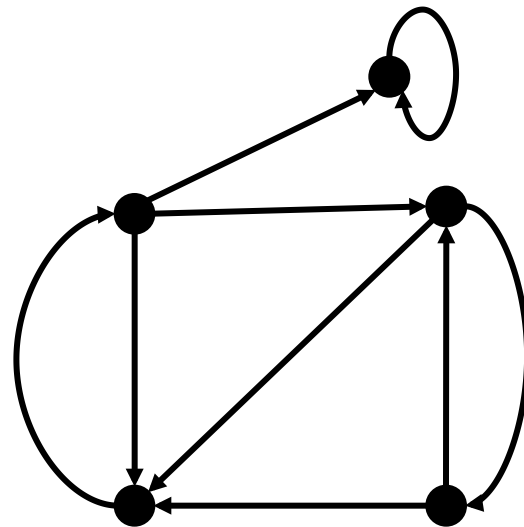


Digrafos e representação

16

□ Matriz de adjacência

| | v1 | v2 | v3 | v4 | v5 |
|----|----|----|----|----|----|
| v1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| v2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| v3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| v4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| v5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |



Digrafos e representação

17

□ Listas de adjacência

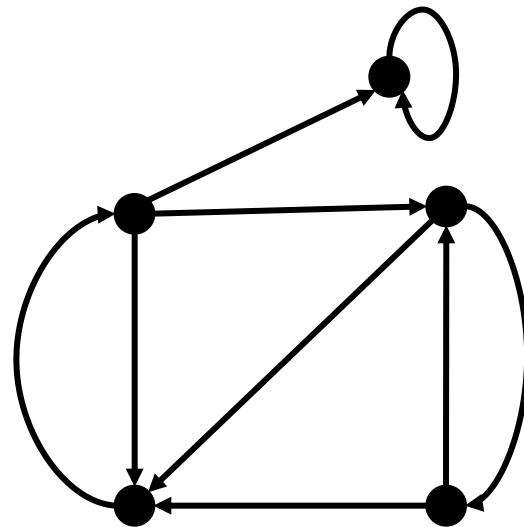
v1 → v2 → v3 → v4

v2 → v2

v3 → v4 → v5

v4 → v1

v5 → v3 → v4



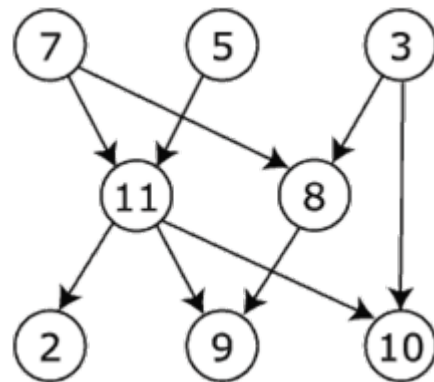
18

Grafos dirigidos acíclicos

Grafos dirigidos acíclicos

19

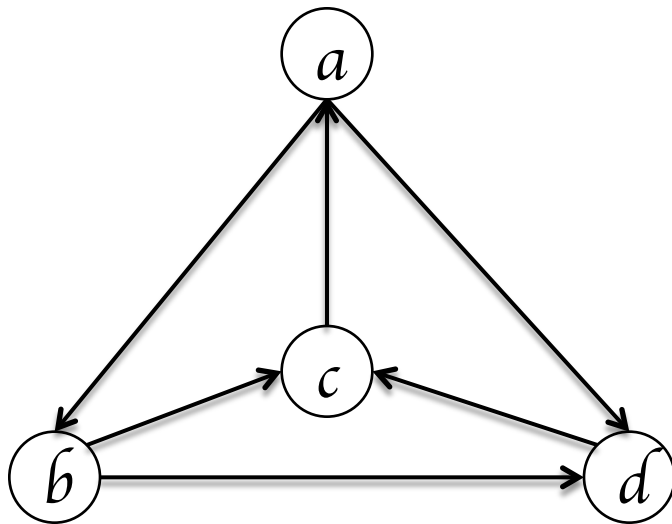
- São digrafos que não possuem ciclos, isto é, para qualquer vértice v **não existe** um circuito iniciando-se e terminando em v
- Conhecidos como DAG (*directed acyclic graph*)



Busca em profundidade e ciclos

20

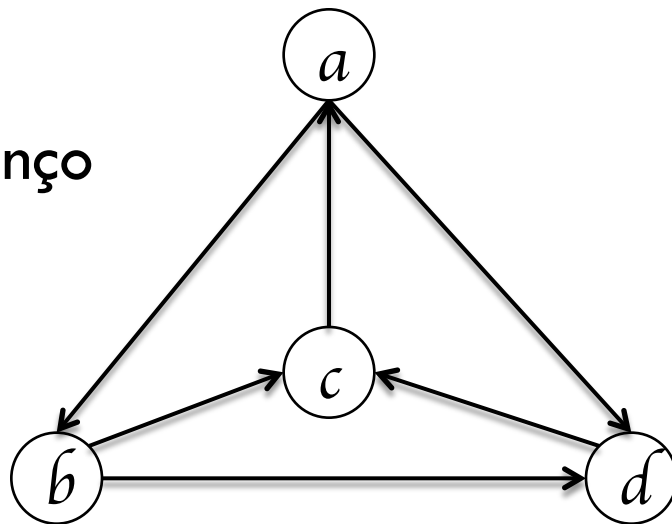
- Como usar a busca em profundidade para descobrir se um digrafo é um DAG?



Busca em profundidade e ciclos

21

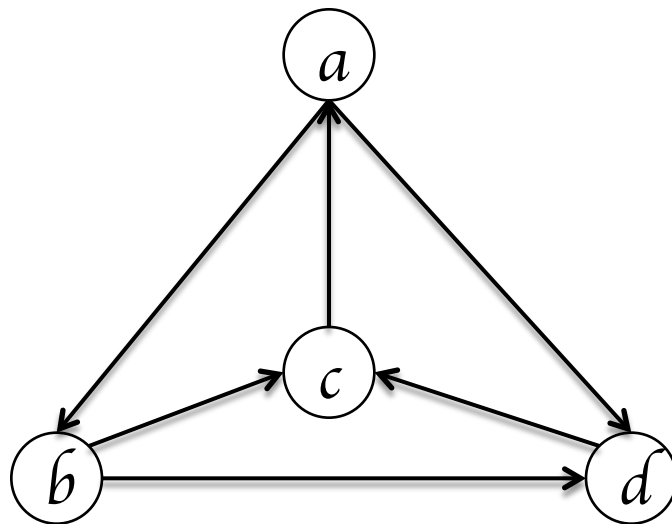
- Classificação de arestas
 - ▣ Arestas de árvore
 - ▣ Arestas de cruzamento ou avanço
 - ▣ Arestas de retorno



Classificação de arestas

22

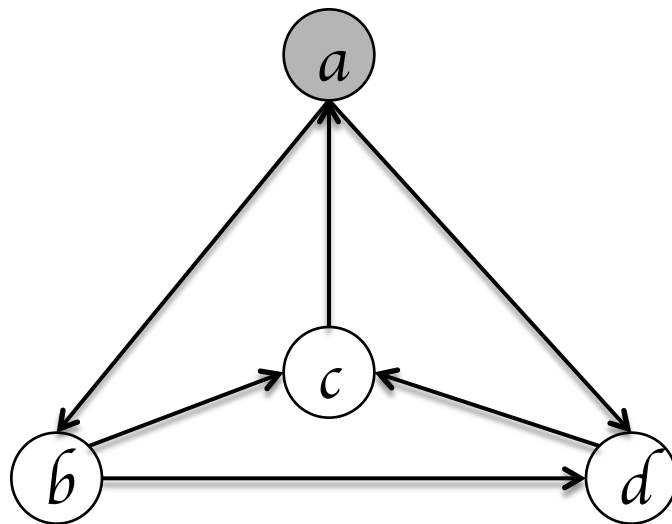
- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados



Classificação de arestas

23

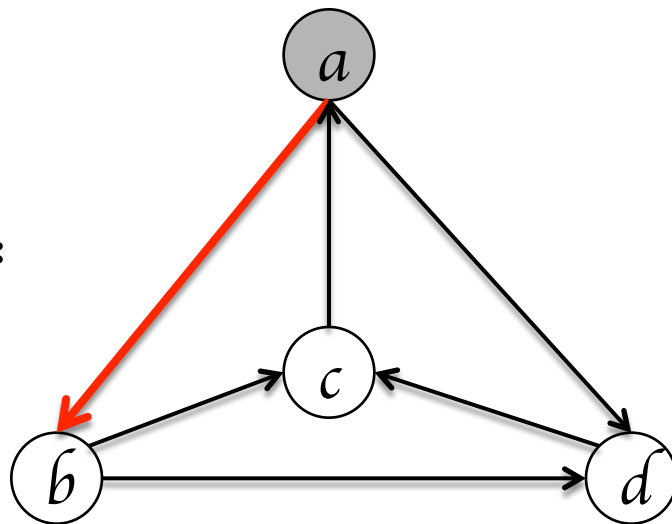
- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados
 - Iniciando a busca em A



Classificação de arestas

24

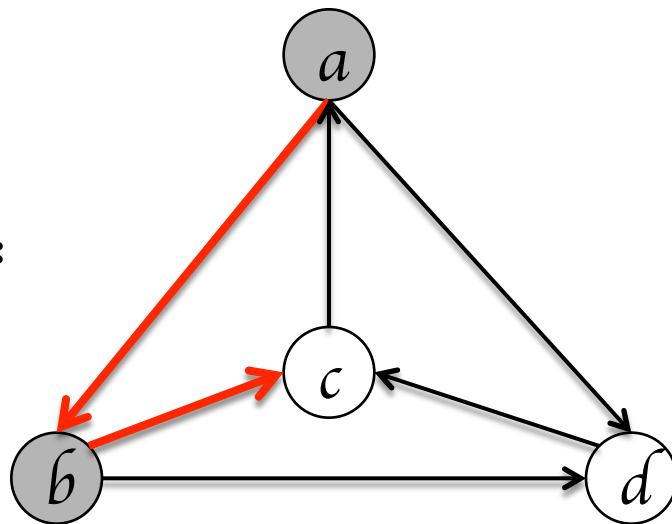
- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados
 - Iniciando a busca em A
 - Chegada em um vértice branco: aresta de árvore



Classificação de arestas

25

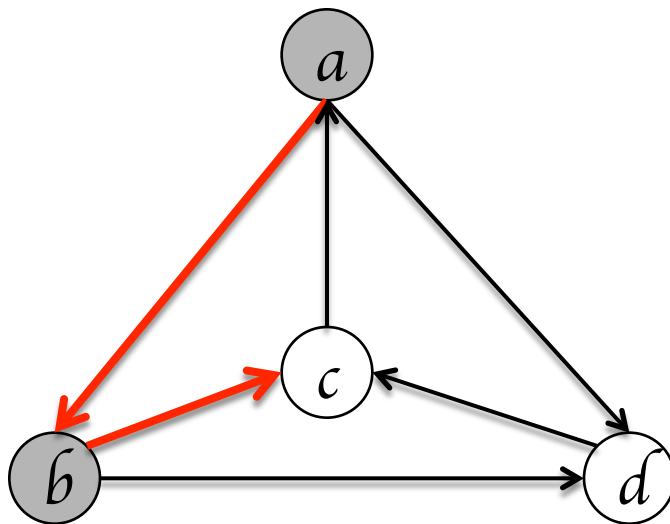
- Arestas de árvore: as que levam a vértices ainda não visitados
 - Iniciando a busca em A
 - Chegada em um vértice branco: aresta de árvore



Classificação de arestas

26

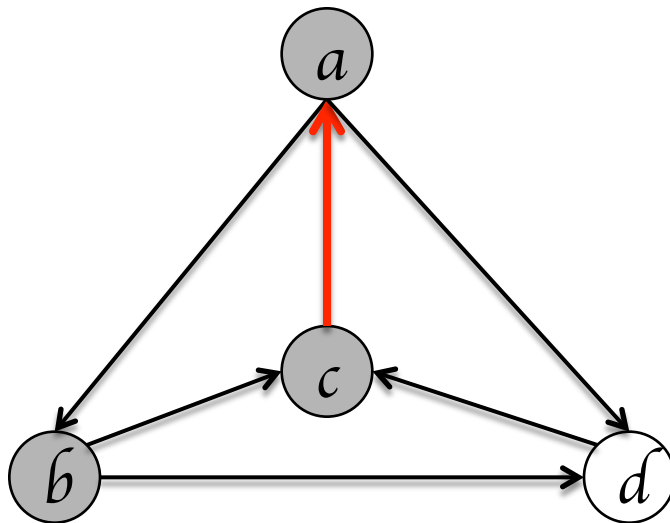
- Arestas de retorno: as que conectam um vértice u a um predecessor seu, v
 - Iniciando a busca em A



Classificação de arestas

27

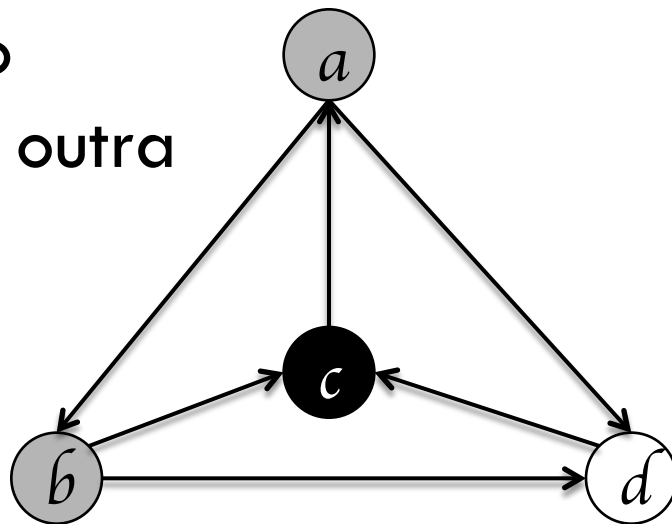
- Arestas de retorno: as que conectam um vértice u a um predecessor seu, v
 - Iniciando a busca em A
 - Chegando em um vértice cinza: aresta de retorno



Classificação de arestas

28

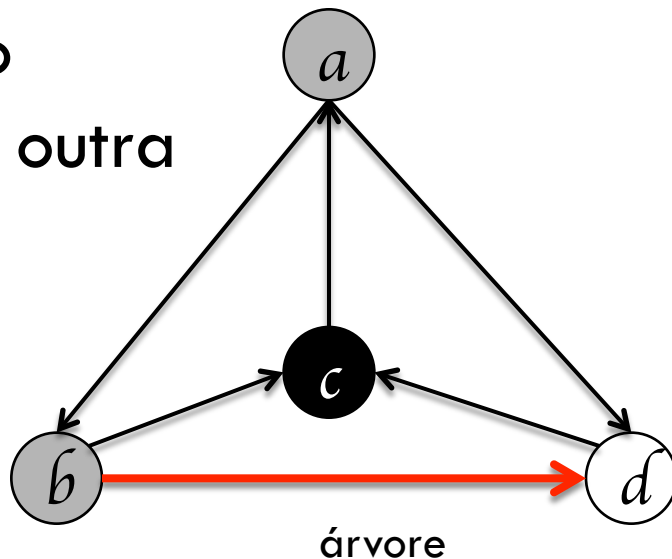
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
 - Iniciando a busca em A



Classificação de arestas

29

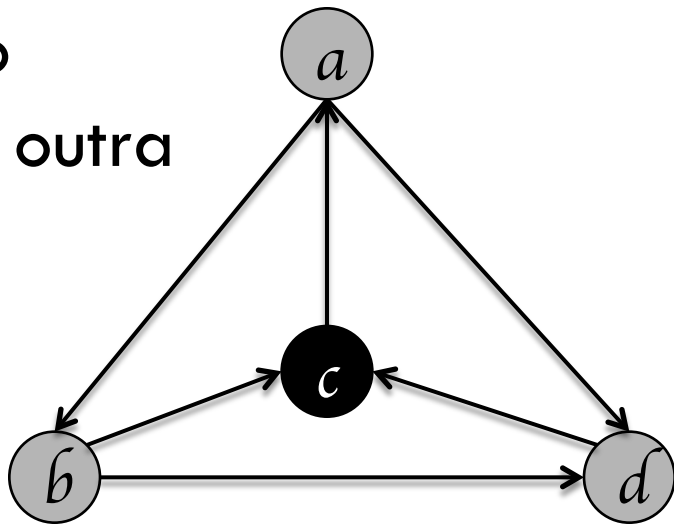
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
 - Iniciando a busca em A



Classificação de arestas

30

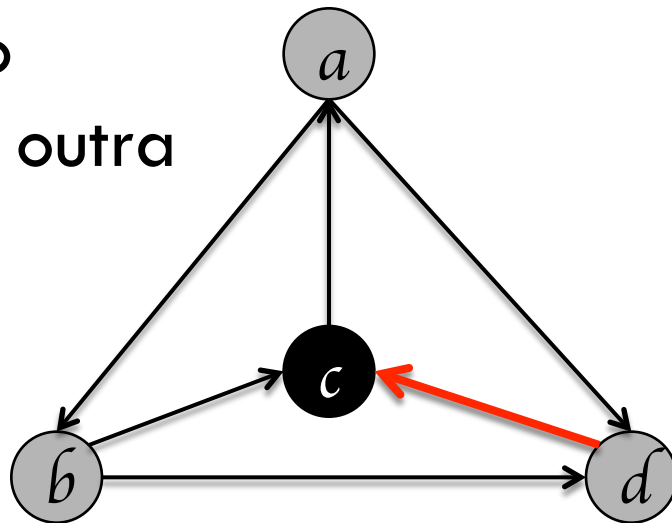
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
 - Iniciando a busca em A



Classificação de arestas

31

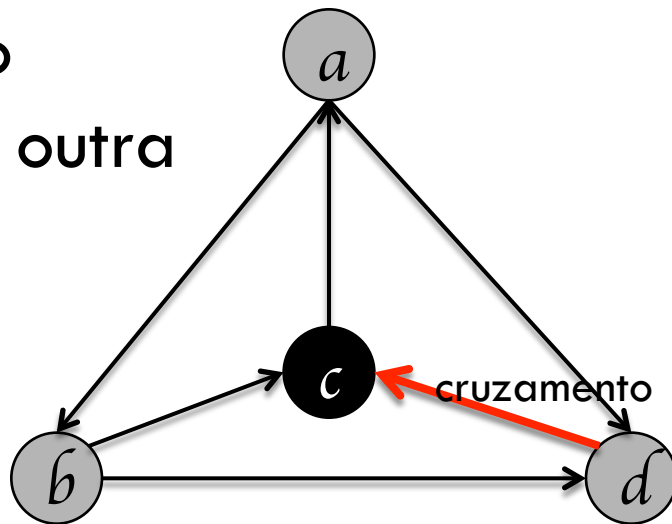
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
- Iniciando a busca em A:
chegando a um vértice preto:
 - **Avanço**, se u vem antes de v
 - **Cruzamento**, caso contrário



Classificação de arestas

32

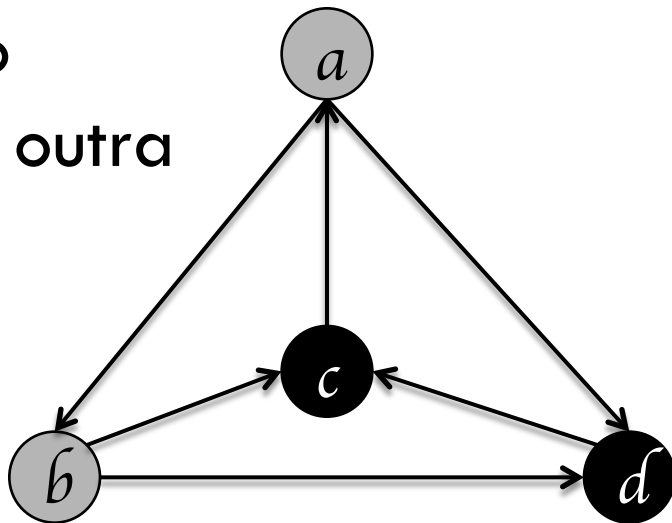
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
- Iniciando a busca em A:
chegando a um vértice preto:
 - **Avanço**, se u vem antes de v
 - **Cruzamento**, caso contrário



Classificação de arestas

33

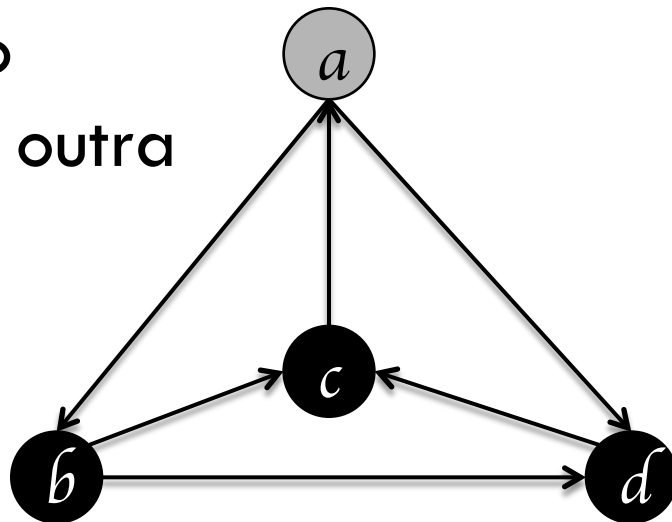
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
- Iniciando a busca em A:
chegando a um vértice preto:
 - **Avanço**, se u vem antes de v
 - **Cruzamento**, caso contrário



Classificação de arestas

34

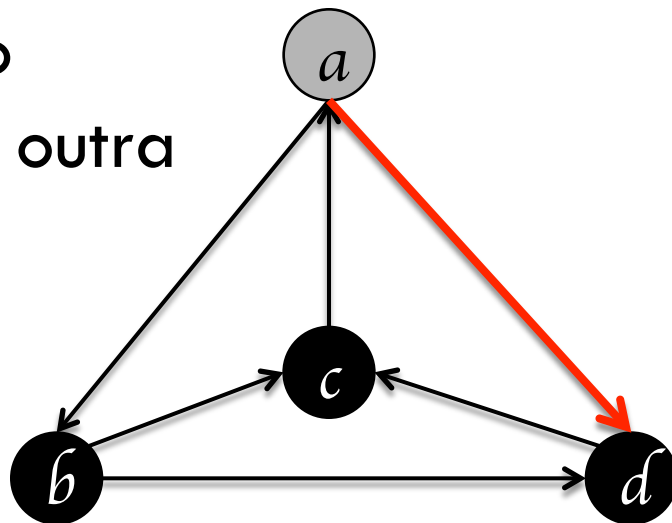
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
- Iniciando a busca em A:
chegando a um vértice preto:
 - **Avanço**, se u vem antes de v
 - **Cruzamento**, caso contrário



Classificação de arestas

35

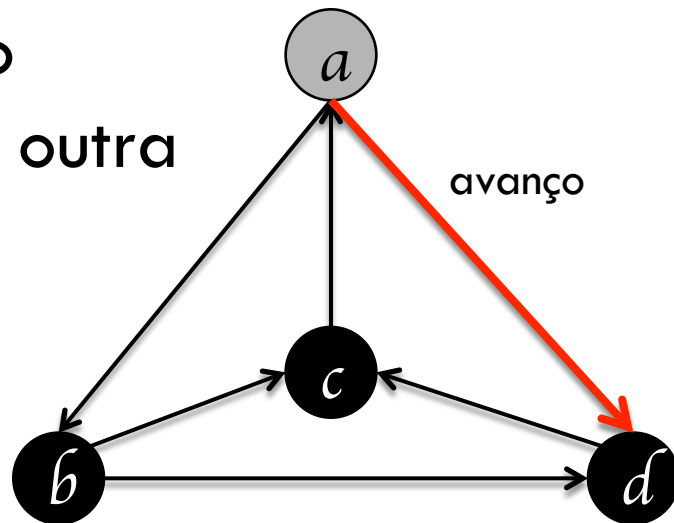
- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
- Iniciando a busca em A:
chegando a um vértice preto:
 - **Avanço**, se u vem antes de v
 - **Cruzamento**, caso contrário



Classificação de arestas

36

- Arestas de cruzamento ou avanço: indicam o avanço em uma árvore existente ou o cruzamento de uma árvore a outra
- Iniciando a busca em A:
chegando a um vértice preto:
 - **Avanço**, se u vem antes de v
 - **Cruzamento**, caso contrário



DAG e arestas de retorno

37

- Um digrafo é DAG se e somente se na busca em profundidade não for encontrada nenhuma aresta de retorno.