

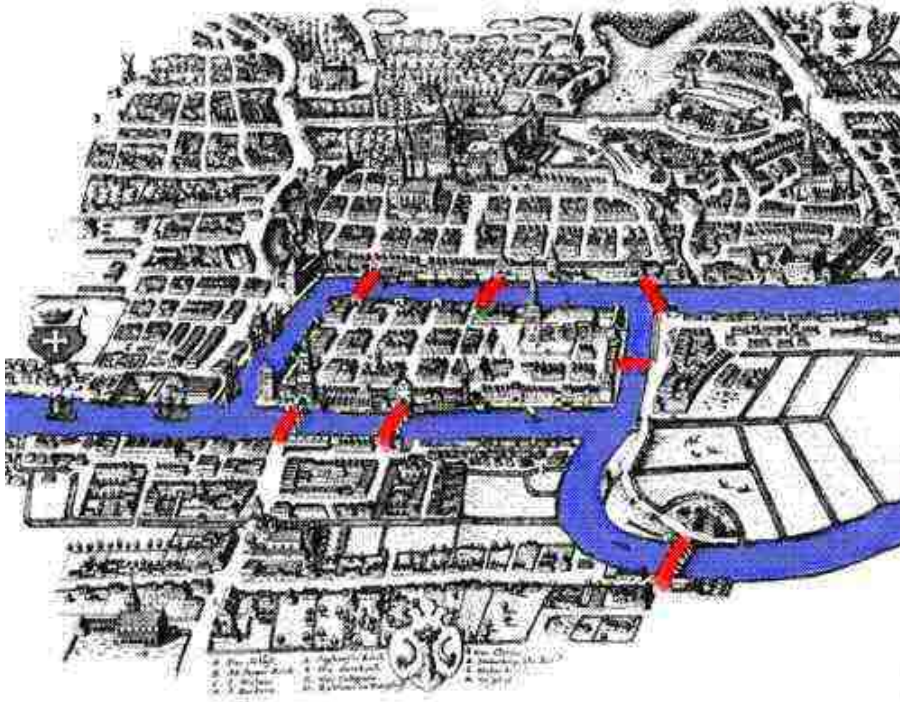
ALGORITMOS EM GRAFOS

GRAFOS EULERIANOS E UNICURSAIS

Prof. Alexei Machado

Grafos Eulerianos

2

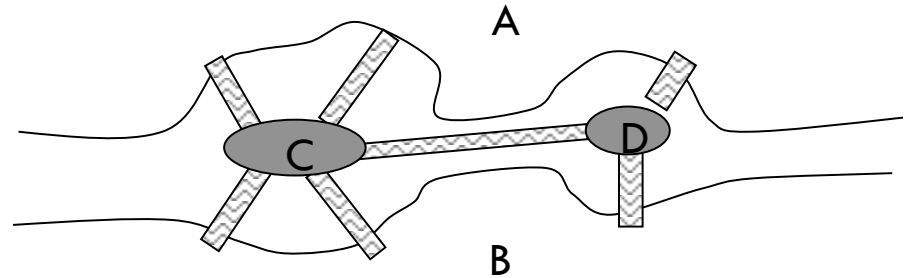


- As pontes de Königsberg.
- É possível sair de um ponto, passar por todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto inicial?

Grafos Eulerianos

3

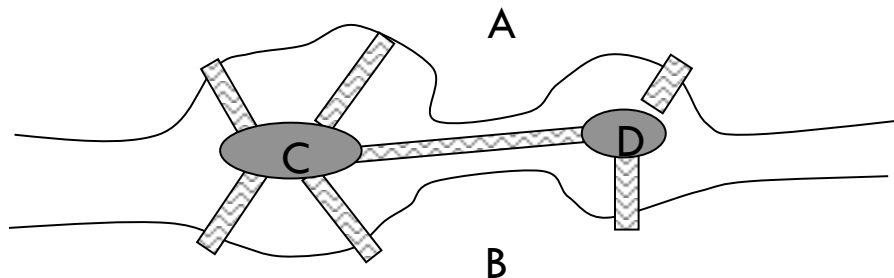
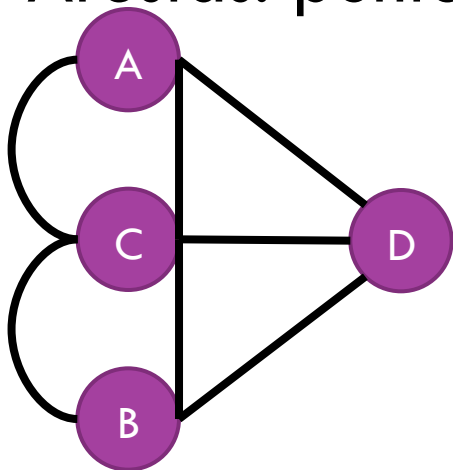
- Vértices: regiões da cidade
- Arestas: pontes



Grafos Eulerianos

4

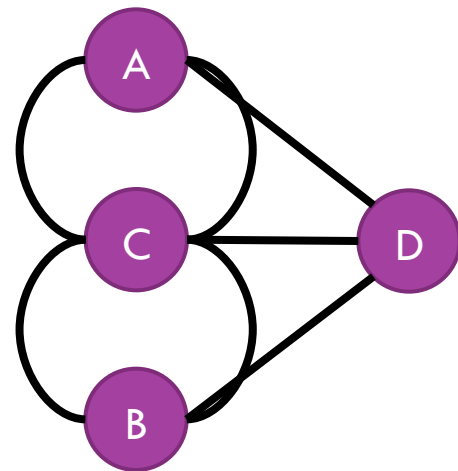
- Vértices: regiões da cidade
- Arestas: pontes



Grafos Eulerianos

5

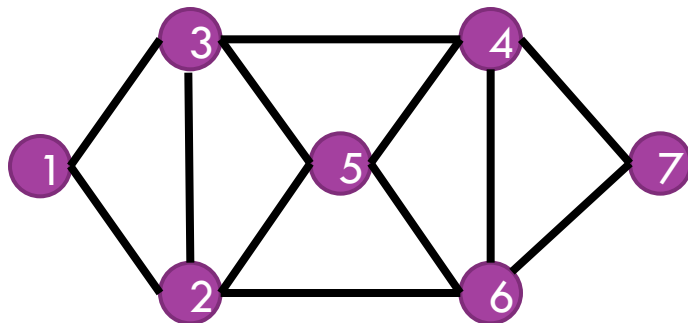
- É possível sair de uma região, passar por todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto inicial?
- Problema: encontrar um **caminho fechado** que passe por todas as arestas uma única vez



Grafos Eulerianos

6

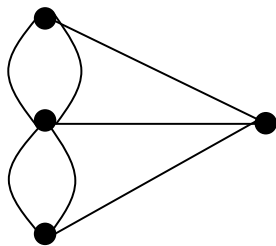
- **Problema do Explorador:** um explorador deseja explorar todas as estradas entre um número de cidades. É possível encontrar um roteiro que passe por cada estrada apenas uma vez e volte a cidade inicial?
- Vértices: cidades
- Arestas: estradas



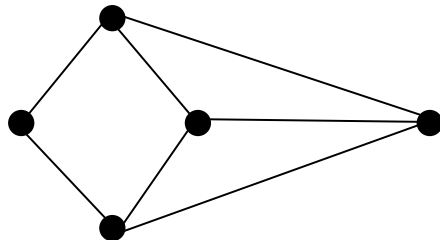
Grafos Eulerianos

7

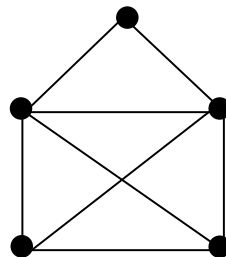
□ **Problema:** encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez



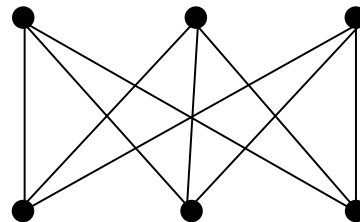
(a)



(b)



(c)



(d)

Grafos Eulerianos

8

- Em grafos conexos, se é possível encontrar um **caminho fechado** que passe por **todas** as arestas uma única vez, dizemos que G é um **grafo euleriano**

Grafos Eulerianos

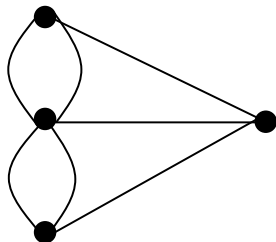
9

- Em grafos conexos, se é possível encontrar um **caminho fechado** que passe por **todas** as arestas uma única vez, dizemos que G é um **grafo euleriano**
- **TEOREMA:** Um grafo conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tiverem grau par

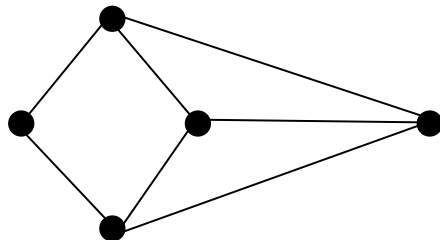
Exercício

10

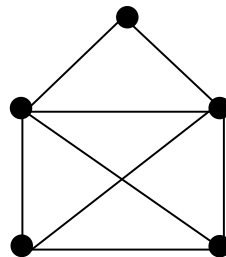
- Encontre um caminho fechado que passe por todos os arcos. Se não for possível, induza um subgrafo para que ele se torne euleriano com o menor número de alterações possível



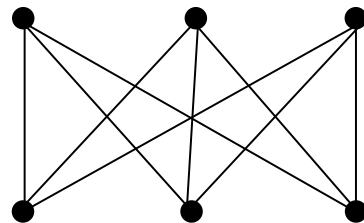
(a)



(b)



(c)



(d)

Algoritmo de Hierholzer (1873)

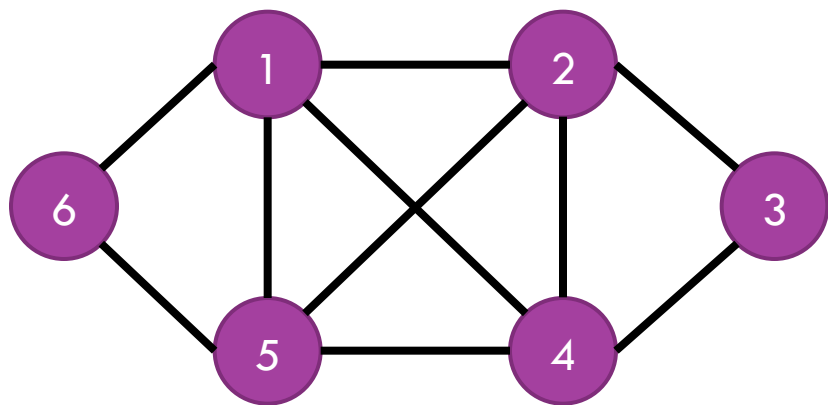
11

- Partindo do princípio que um grafo G é euleriano
 - Escolher um vértice v aleatório de G
 - Atravessar uma aresta aleatória v, w
 - Repetir o processo a partir de w até formar um caminho fechado C
 - Remover as arestas pertencentes a C
 - Se não sobram arestas, encontramos o caminho euleriano

Algoritmo de Hierholzer (1873)

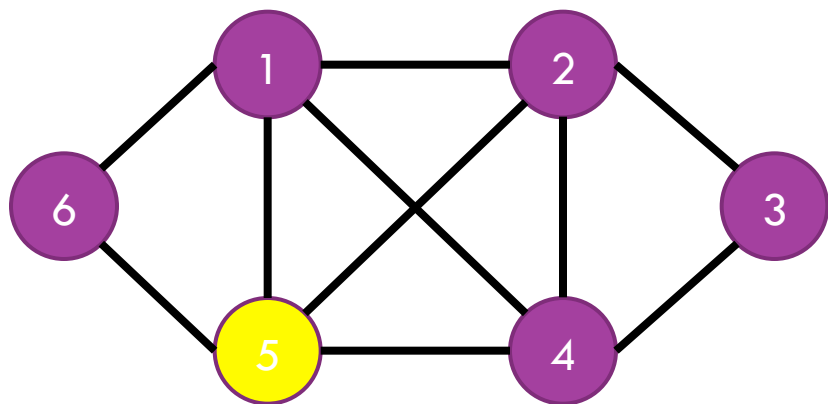
12

- Caso contrário, escolher um vértice v' pertencente a C e com grau > 0 e repetir o processo para achar um novo caminho fechado C'
- Unir C' a C
- Repetir os passos até não sobrarem arestas



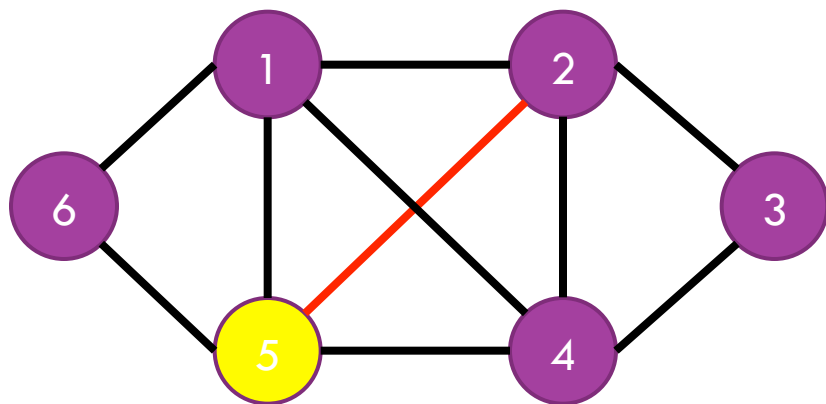
CAMINHO:

C:



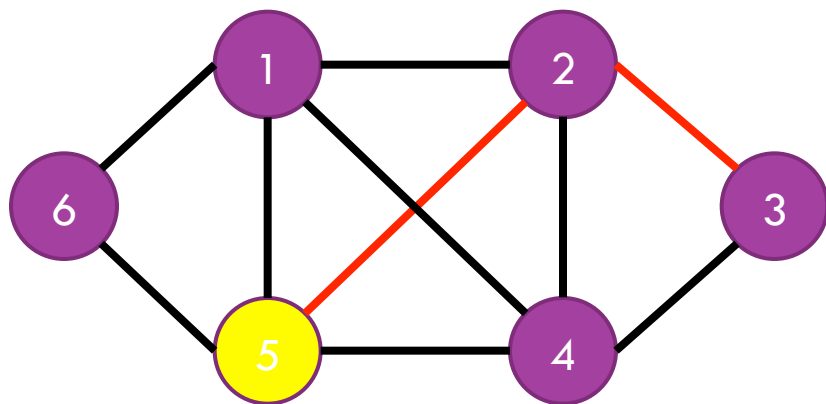
CAMINHO:

C:



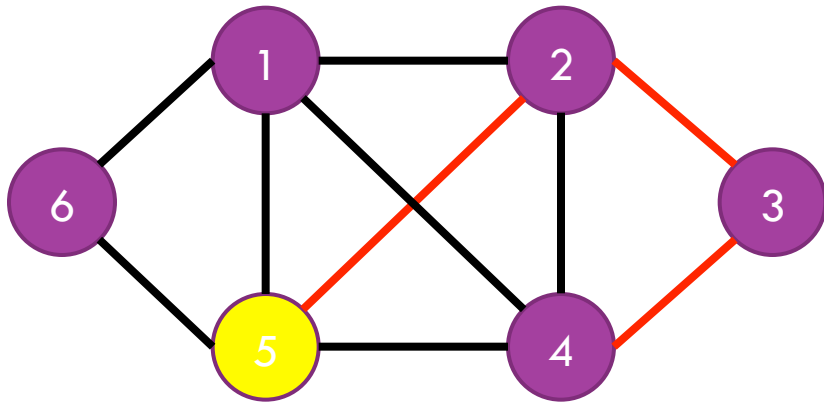
CAMINHO:

C: 5-2



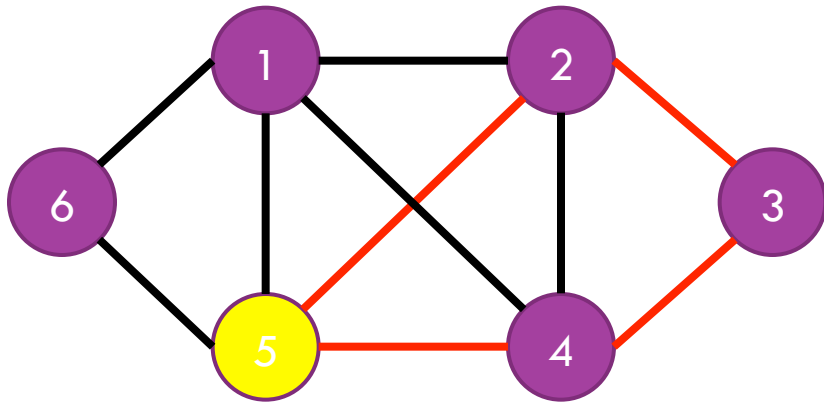
CAMINHO:

C: 5-2-3



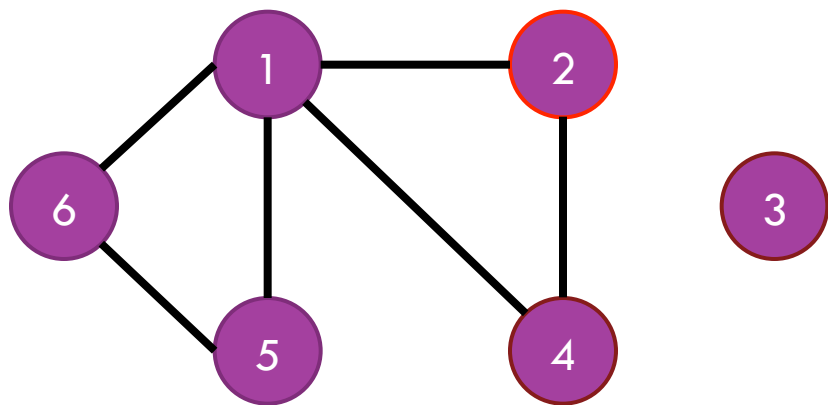
CAMINHO:

C: 5-2-3-4



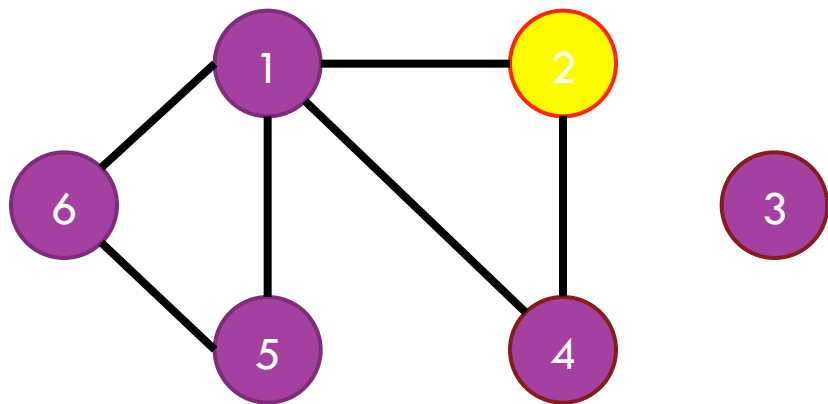
CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5



CAMINHO:

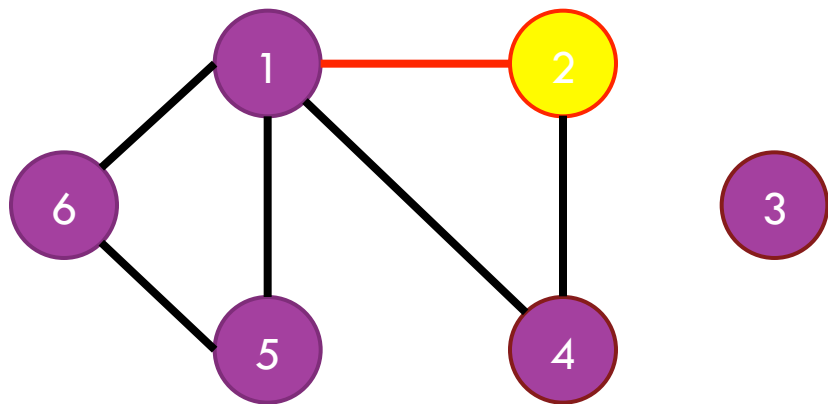
C: 5-2-3-4-5



CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

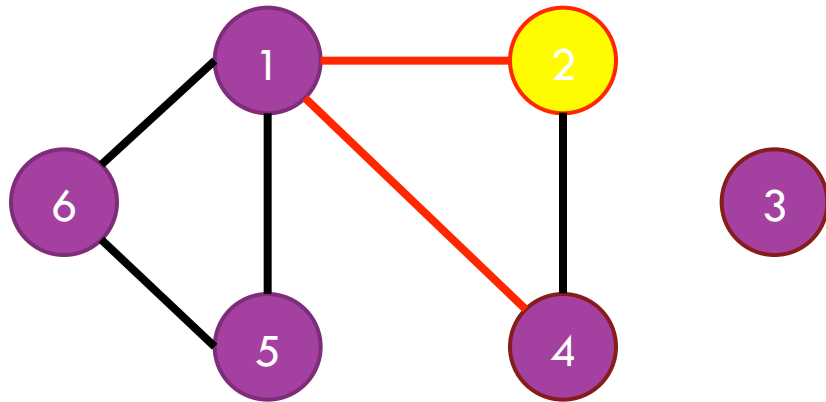
C': 2



CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

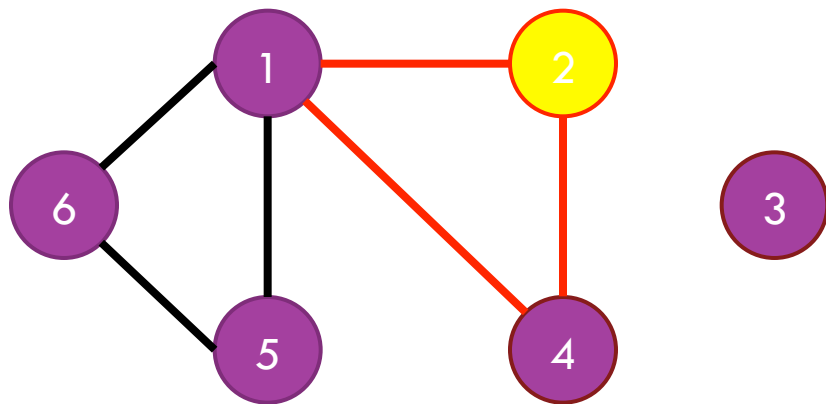
C': 2-1



CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

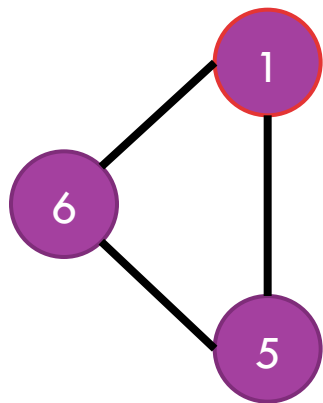
C': 2-1-4



CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

C': 2-1-4-2

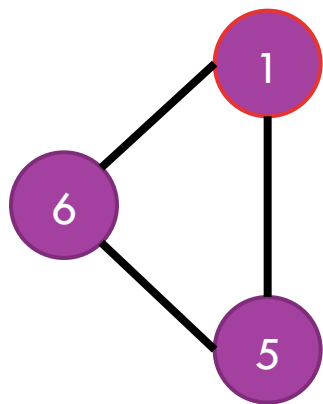


CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

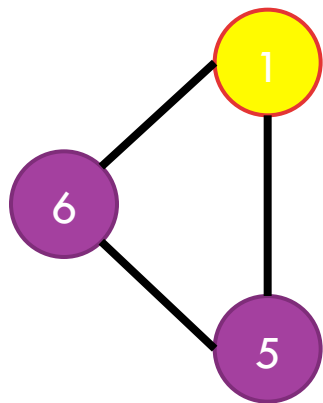


C': 2-1-4-2



CAMINHO:

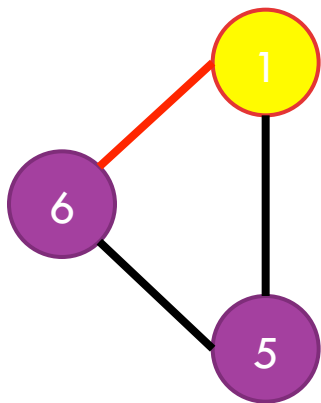
C: 5-2-1-4-2-3-4-5



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

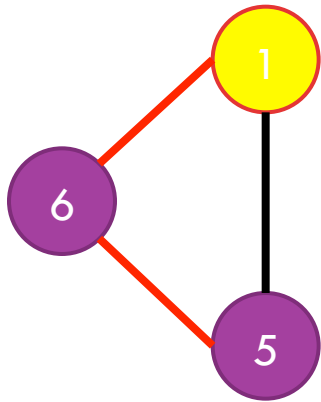
C': 1



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

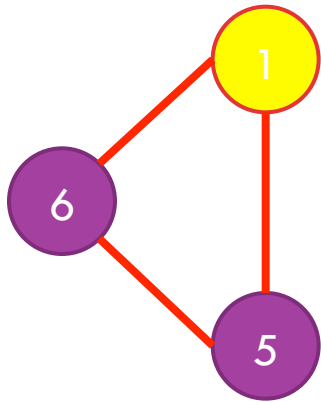
C': 1-6



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

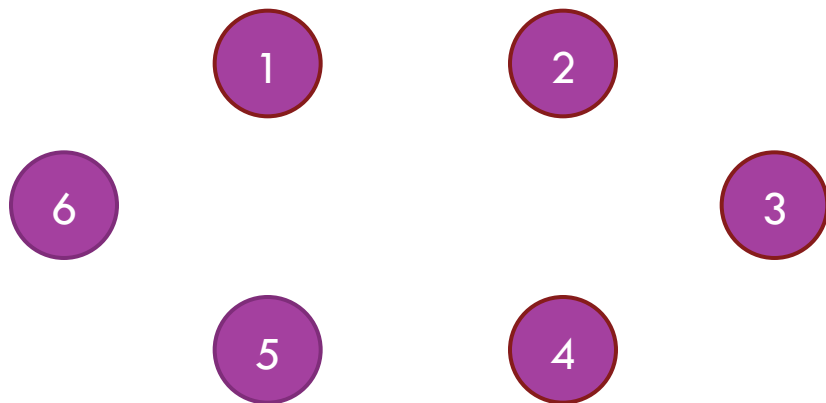
C': 1-6-5



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

C': 1-6-5-1

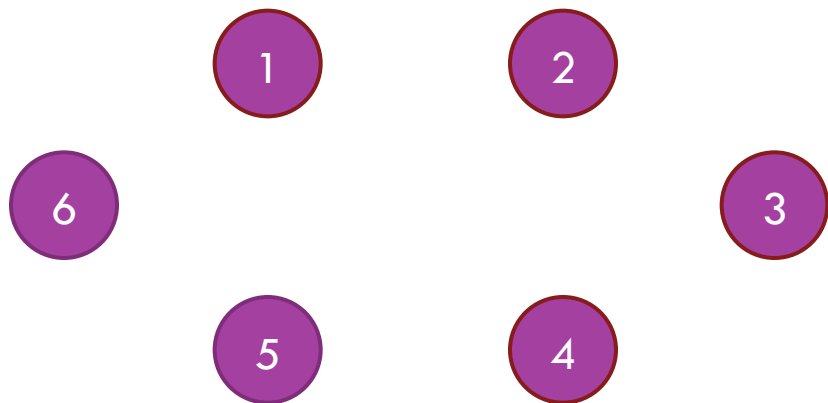


CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5



C': 1-6-5-1

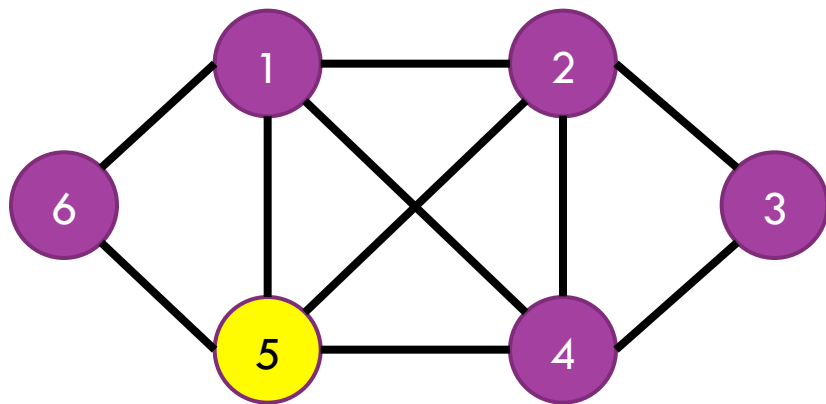


CAMINHO:

C: 5-2-1-6-5-1-4-2-3-4-5



C': 1-6-5-1



CAMINHO:

C: 5-2-1-6-5-1-4-2-3-4-5

Mapa do Departamento de Matemática

33

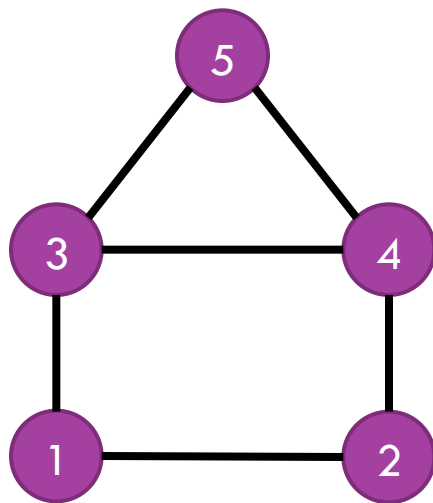
- A figura abaixo ilustra o mapa do Departamento de Matemática de uma importante Universidade. A entrada principal está na parte norte do Departamento. Determine se é possível que uma pessoa possa andar pelo Departamento passando através de cada porta exatamente uma vez e terminando onde começou.

.

Grafos semieulerianos ou unicursais

34

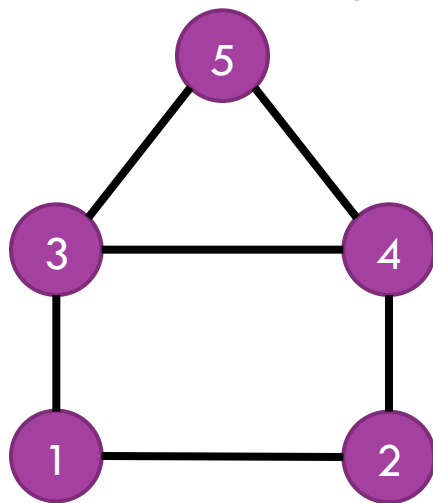
- Um grafo é dito semieuleriano se existe um caminho aberto que passe por todas as arestas



Grafos unicursais

35

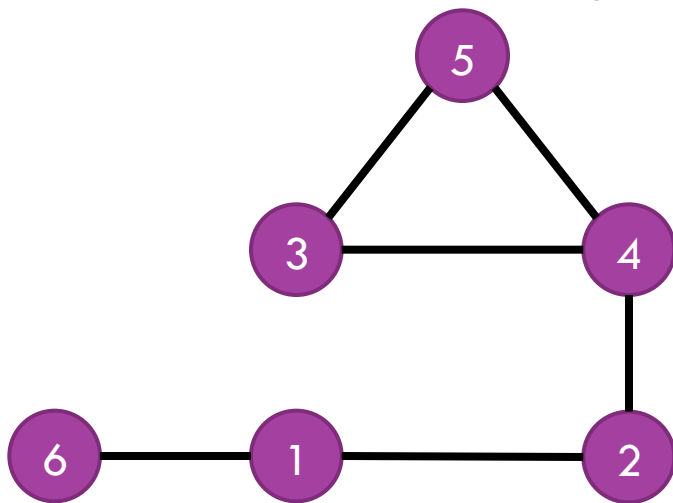
- **TEOREMA:** um grafo é unicursal se e somente se existem exatamente dois vértices com grau ímpar



Grafos unicursais

36

- **TEOREMA:** um grafo é unicursal se e somente se existem exatamente dois vértices com grau ímpar



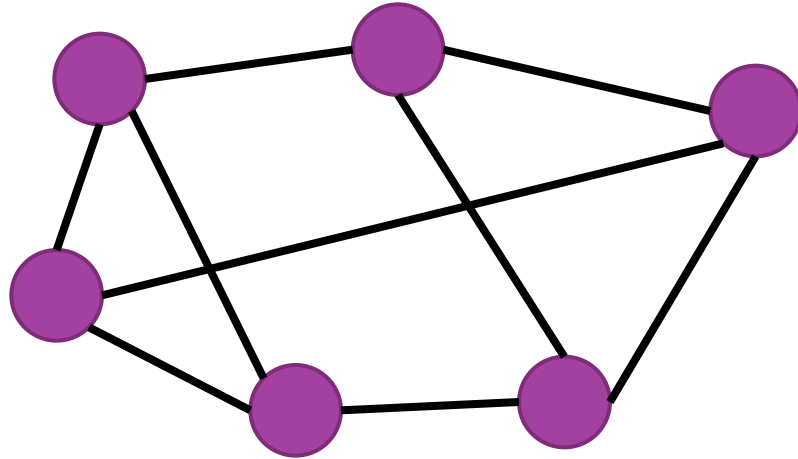
Grafos unicursais

37

- **TEOREMA:** Em um grafo conexo G com exatamente $2K$ vértices de grau ímpar, existem K subgrafos disjuntos de arestas, todos eles unicursais, de maneira que juntos eles contêm todas as arestas de G

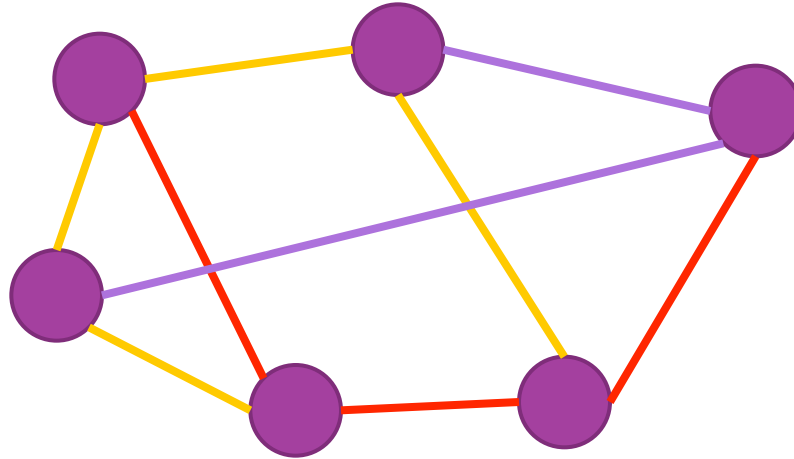
Grafos unicursais

38



Grafos unicursais

39



Grafos, em resumo

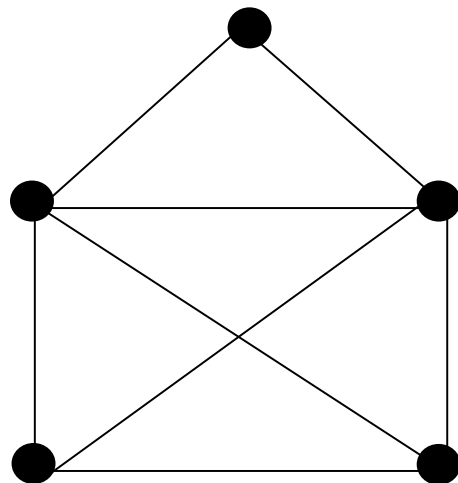
40

- Grafo euleriano: todos os vértices de grau par
- Grafo unicursal: dois vértices de grau ímpar
- Grafo qualquer: $2K$ vértices de grau ímpar
(*k-traçável*)

Grafos unicursais

41

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



Grafos unicursais

42

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?
- É possível fazer a mesma coisa terminando no ponto de partida?

