

# ALGORITMOS EM GRAFOS

PARTICIONAMENTO

COBERTURAS

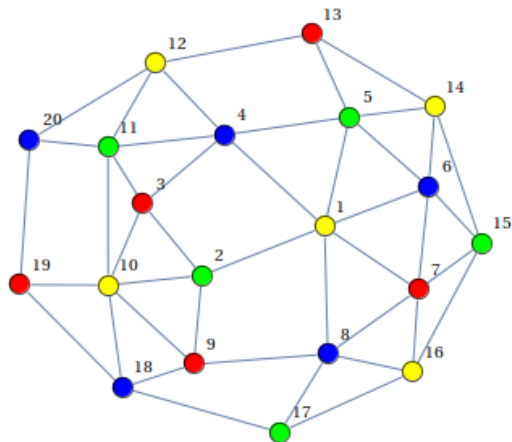
EMPARELHAMENTO

Prof. Alexei Machado

# Conjuntos independentes

2

- Uma coloração de um grafo induz a um ***particionamento*** dos vértices em subconjuntos de vértices chamados de **conjuntos independentes**



# Conjuntos independentes

3

- Conjunto de vértices do grafo no qual nenhum par de vértices do conjunto é adjacente

# Conjuntos independentes

4

- Conjunto de vértices do grafo no qual nenhum par de vértices do conjunto é adjacente
- **Conjunto independente máximo:** conjunto independente  $V_i$  tal que não exista  $V_i'$  sendo

$$|V_i'| > |V_i|$$

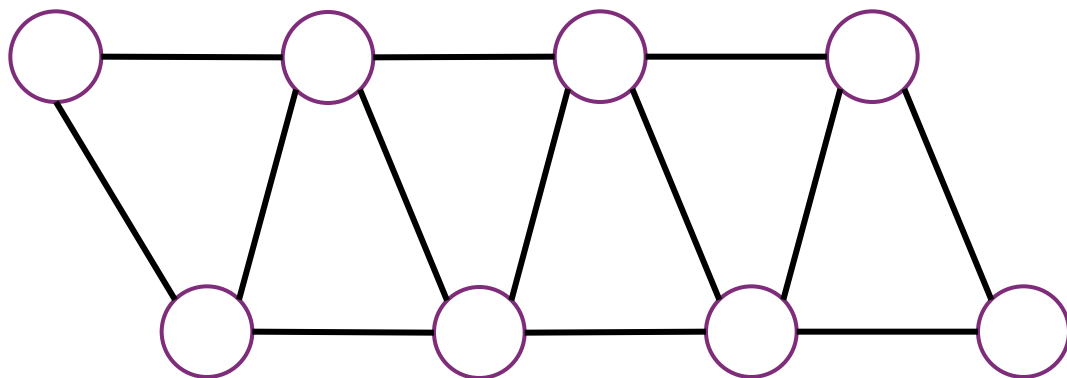
# Conjuntos independentes

5

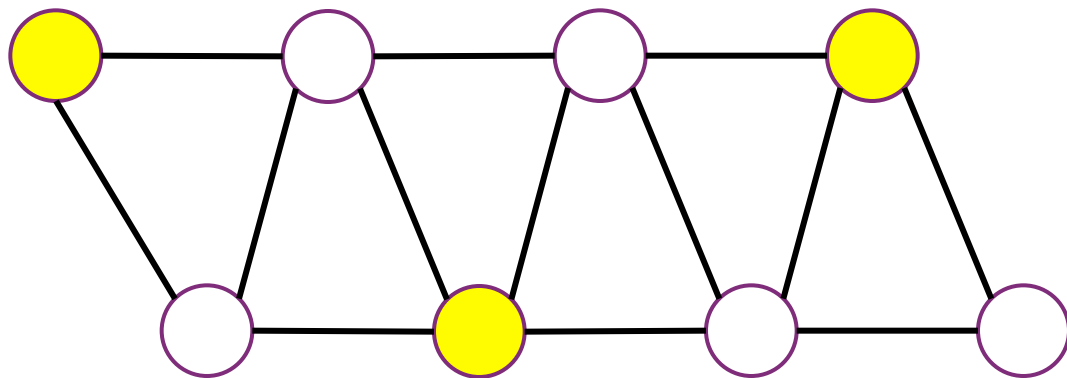
- **Conjunto independente máximo:** conjunto independente  $V_i$  tal que não exista  $V_i'$  sendo

$$|V_i'| > |V_i|$$

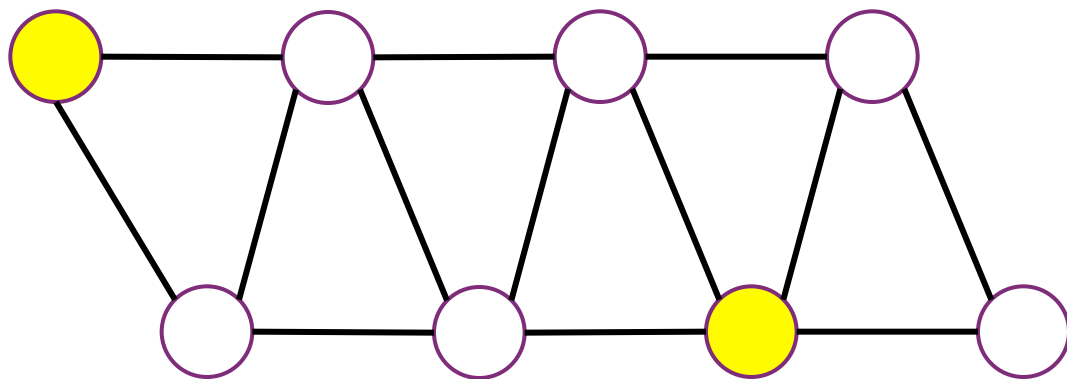
- **Conjunto independente maximal:** conjunto independente  $V_i$  tal que não exista  $V_i'$  que contenha  $V_i$ , ou seja,  $V_i \not\subset V_i'$



□ É máximo? É maximal?



□ É máximo? É maximal?





# Número de independência

9

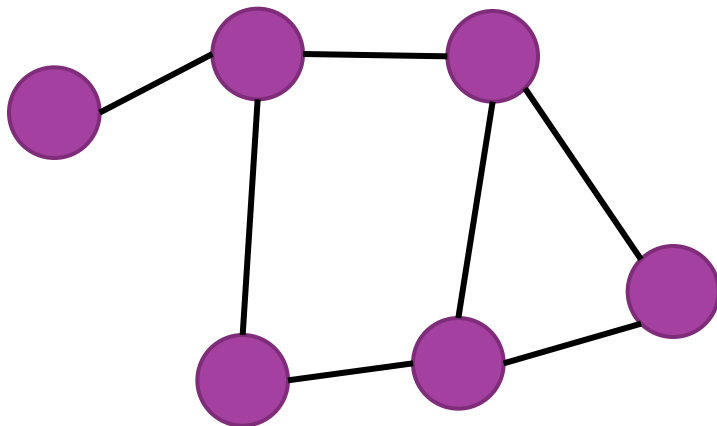
- Número de vértices do conjunto independente máximo do grafo.

$$\beta(G)$$

# Clique

10

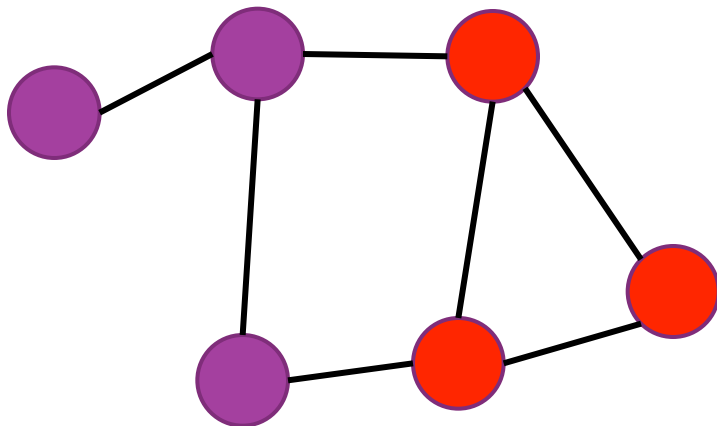
- Seja  $G=(V,E)$ . Um subconjunto  $C \subseteq V$  é uma **clique** de  $G$  se  $C$  é um subgrafo completo de  $G$



# Clique

11

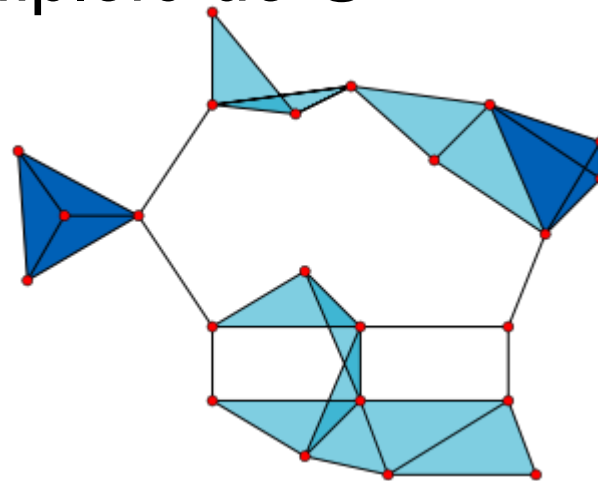
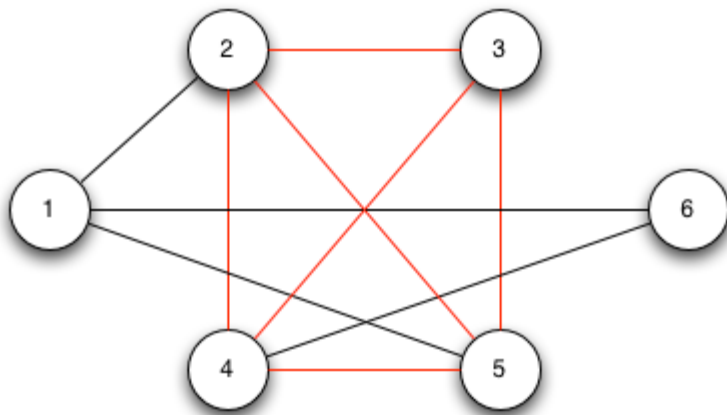
- Seja  $G=(V,E)$ . Um subconjunto  $C \subseteq V$  é uma **clique** de  $G$  se  $C$  é um subgrafo completo de  $G$



# Clique

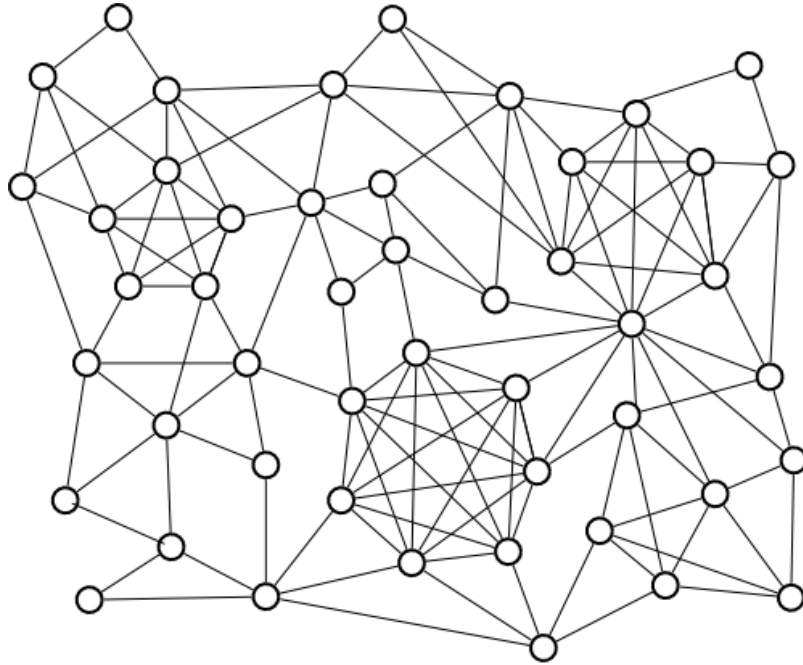
12

- Seja  $G=(V,E)$ . Um subconjunto  $C \subseteq V$  é uma **clique** de  $G$  se  $C$  é um subgrafo completo de  $G$



# Clique

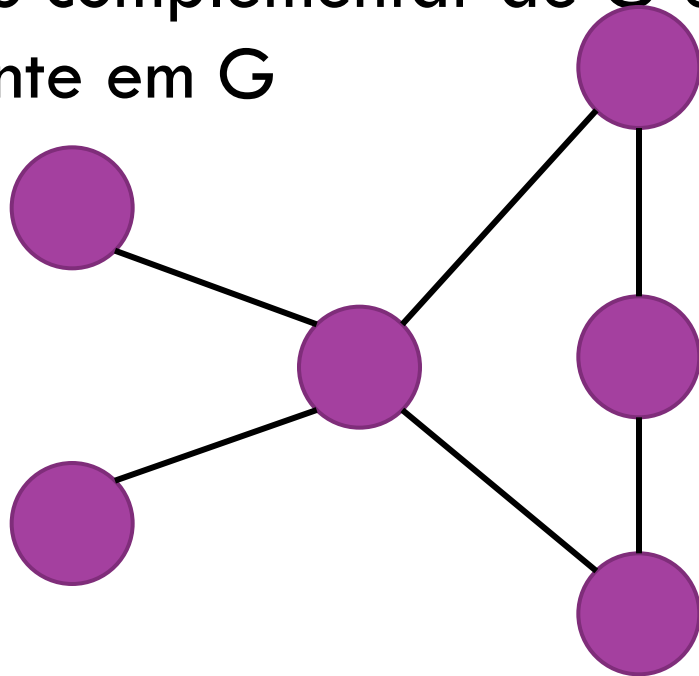
13



# Clique e conjunto independente

14

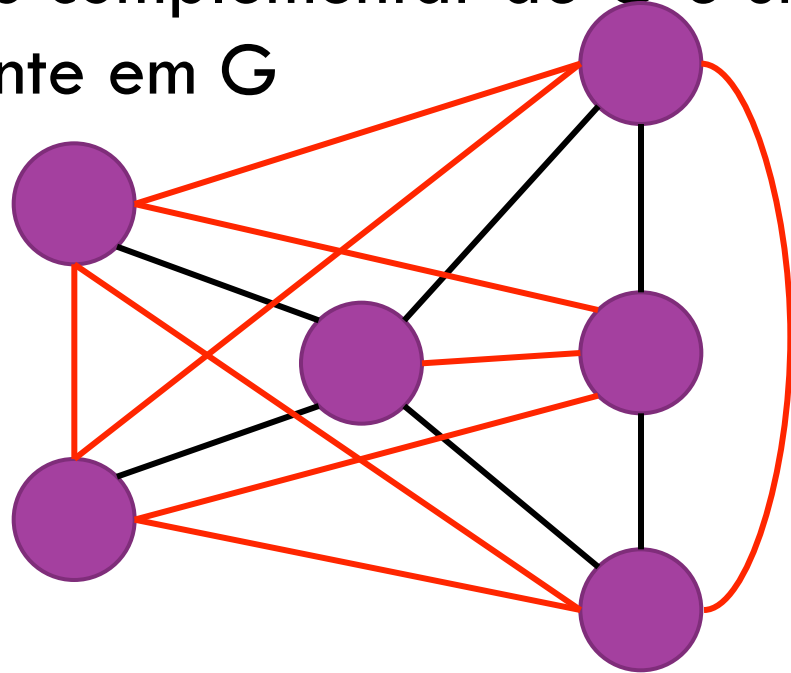
- Uma clique no grafo complementar de  $G$  é um conjunto independente em  $G$



# Clique e conjunto independente

15

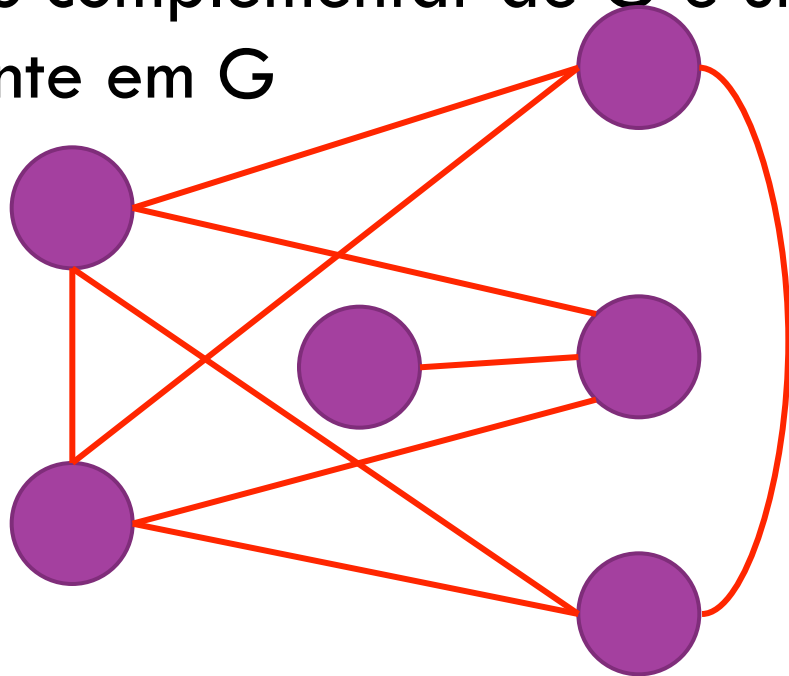
- Uma clique no grafo complementar de  $G$  é um conjunto independente em  $G$



# Clique e conjunto independente

16

- Uma clique no grafo complementar de  $G$  é um conjunto independente em  $G$

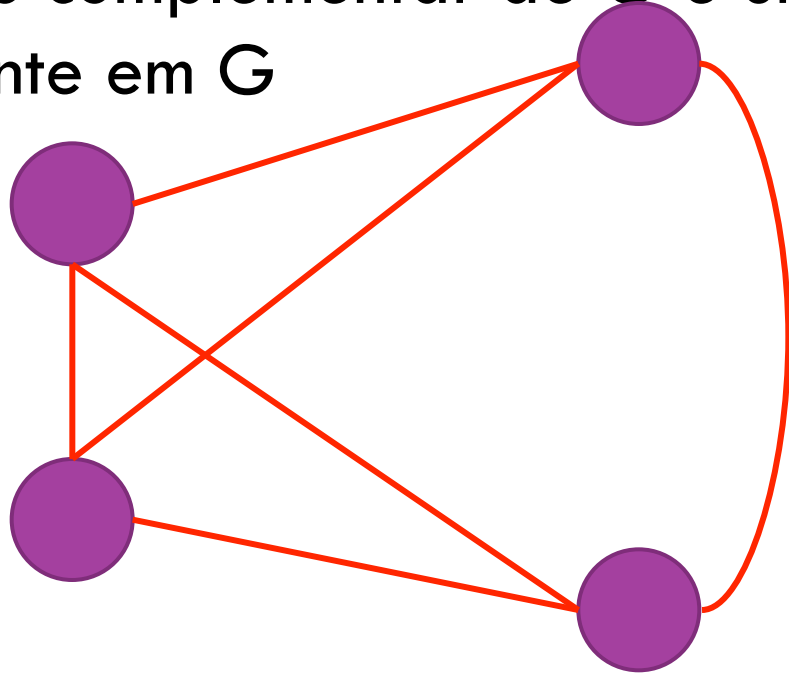




# Clique e conjunto independente

17

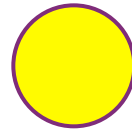
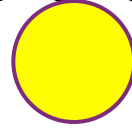
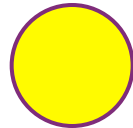
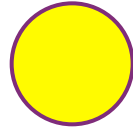
- Uma clique no grafo complementar de  $G$  é um conjunto independente em  $G$



# Clique e conjunto independente

18

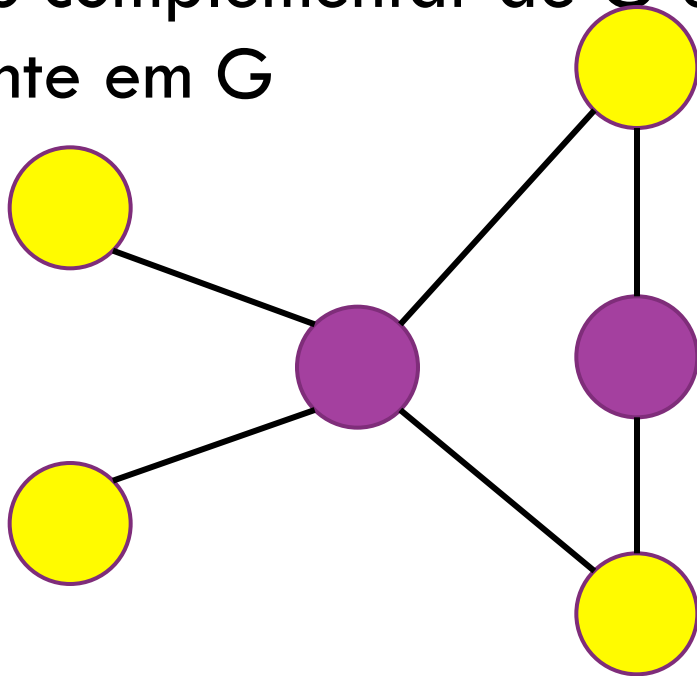
- Uma clique no grafo complementar de  $G$  é um conjunto independente em  $G$



# Clique e conjunto independente

19

- Uma clique no grafo complementar de  $G$  é um conjunto independente em  $G$



# Algoritmos

20

- Encontrar um conjunto independente maximal não é complicado

# Algoritmos

21

- Encontrar um conjunto independente maximal não é complicado. Dado um grafo  $G=(V,E)$

```
Inicialize o conjunto independente I como vazio
Enquanto há vértices em V
  Escolha um vértice  $v \in V$ ;
    Insira v em I;
    Retire de V o vértice v e todos os seus vizinhos.
Fim_enquanto
Retorne I
```

# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

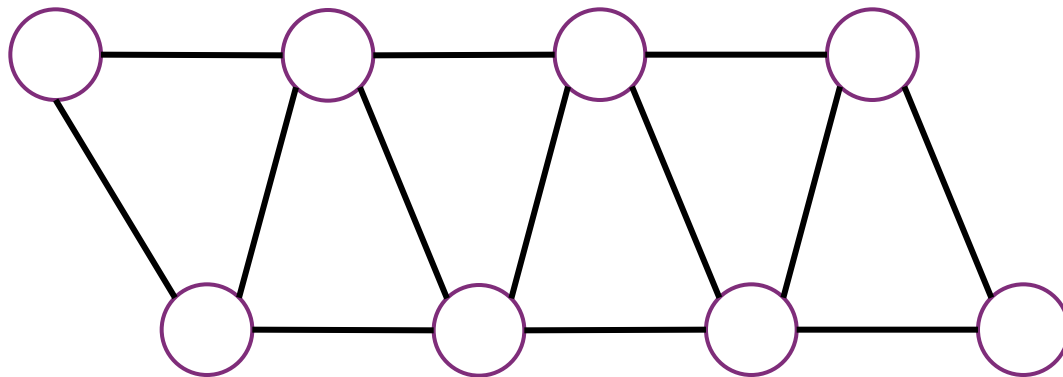
    Escolha um vértice  $v \in V$ ;

    Insira  $v$  em  $I$ ;

    Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

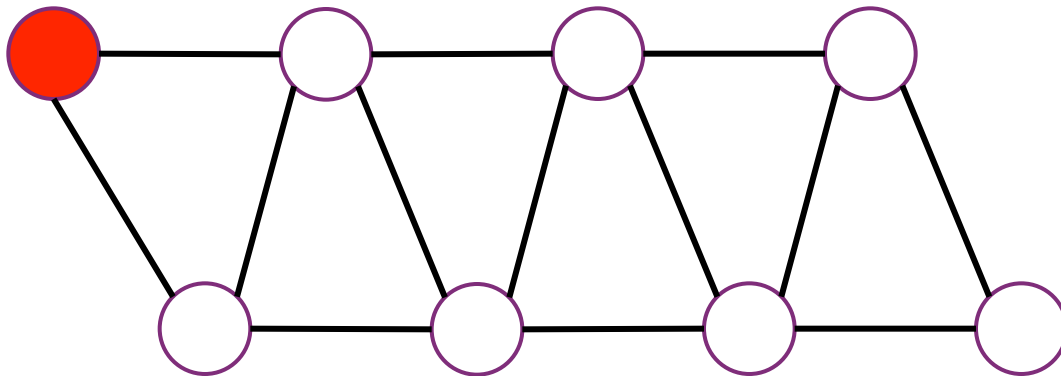
Escolha um vértice  $v \in V$ ;

Insira  $v$  em  $I$ ;

Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

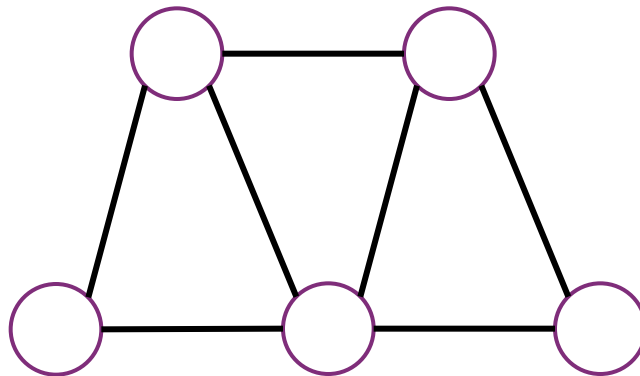
Escolha um vértice  $v \in V$ ;

Insira  $v$  em  $I$ ;

Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$





# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

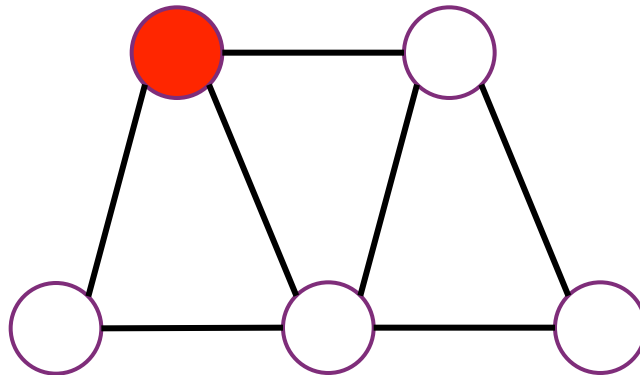
Escolha um vértice  $v \in V$ ;

Insira  $v$  em  $I$ ;

Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

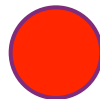
    Escolha um vértice  $v \in V$ ;

    Insira  $v$  em  $I$ ;

    Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

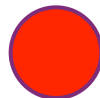
Escolha um vértice  $v \in V$ ;

Insira  $v$  em  $I$ ;

Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

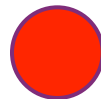
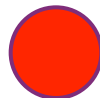
Escolha um vértice  $v \in V$ ;

Insira  $v$  em  $I$ ;

Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

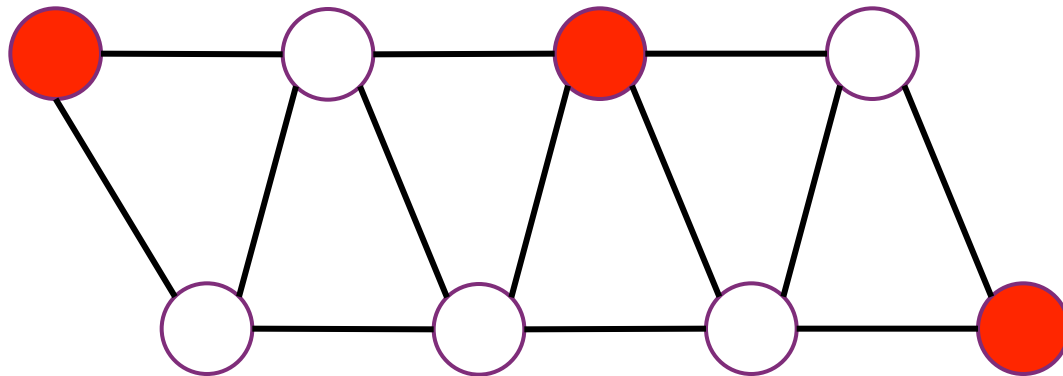
    Escolha um vértice  $v \in V$ ;

    Insira  $v$  em  $I$ ;

    Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

30

- Já para encontrar um conjunto independente máximo... *NP-hard*
- *Heurísticas*

# Algoritmos

Inicialize o conjunto independente  $I$  como vazio

Enquanto há vértices em  $V$

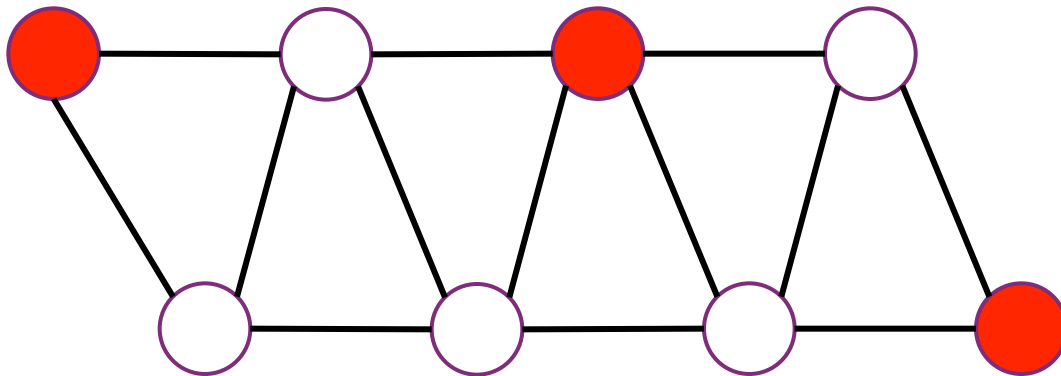
Escolha um vértice  $v \in V$ ;

Insira  $v$  em  $I$ ;

Retire de  $V$  o vértice  $v$  e todos os seus vizinhos.

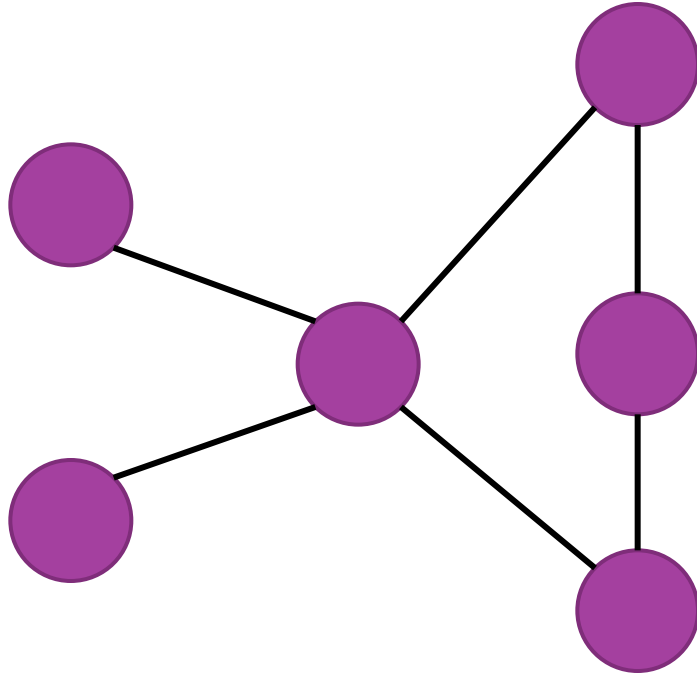
Fim\_enquanto

Retorne  $I$



# Algoritmos

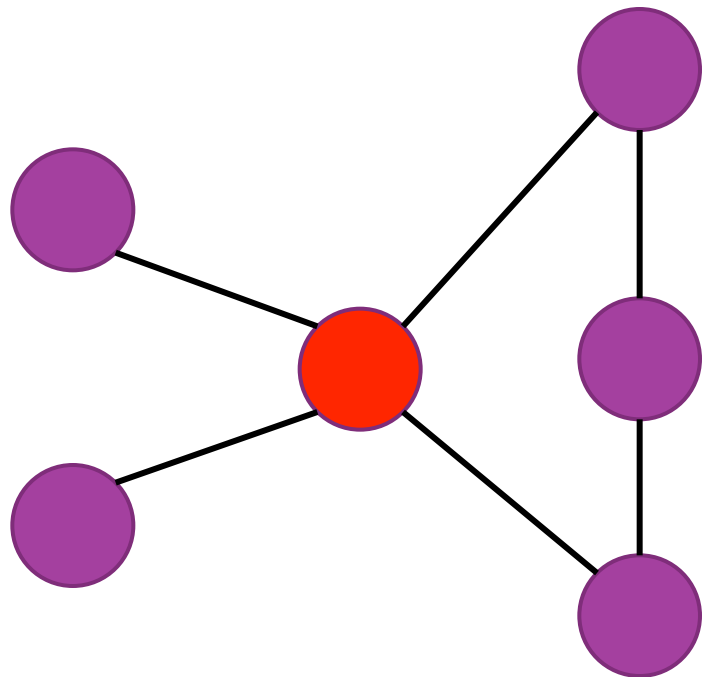
32





# Algoritmos

33



# Algoritmos

34



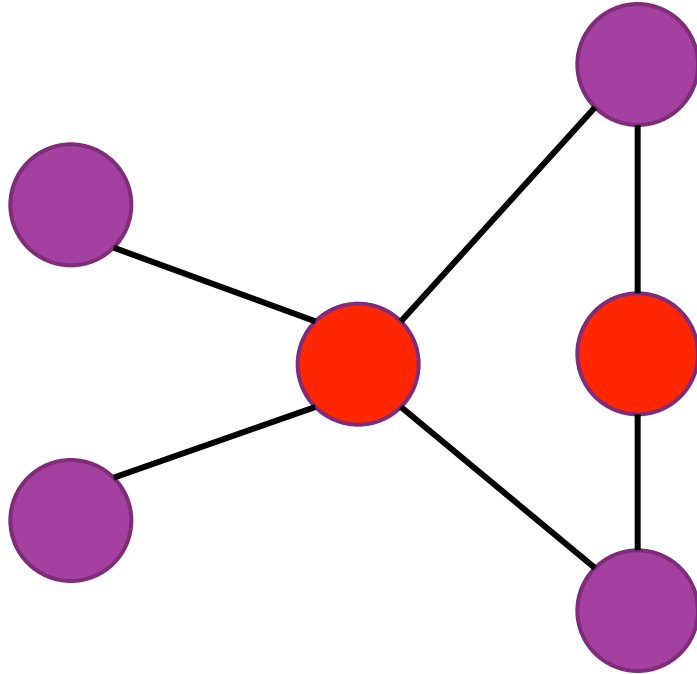
# Algoritmos

35



# Algoritmos

36

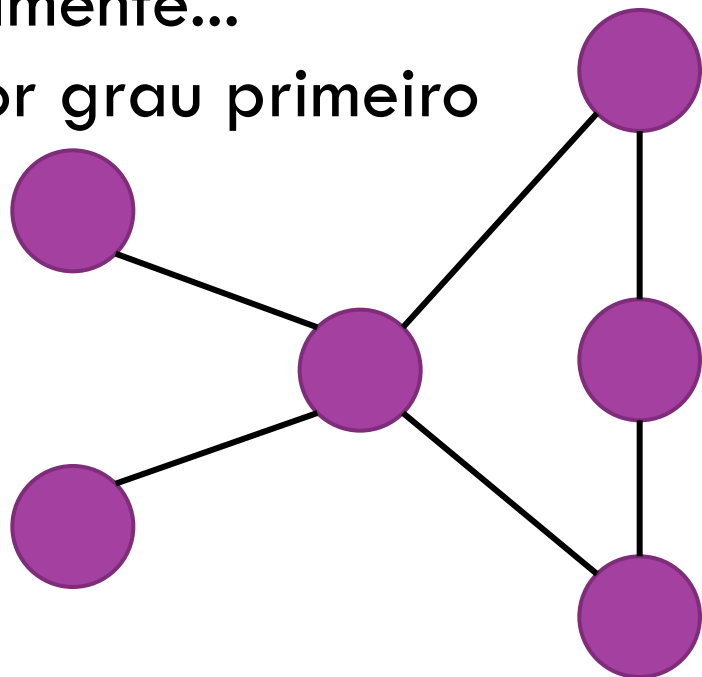


# Algoritmos

37

□ Novamente...

Menor grau primeiro

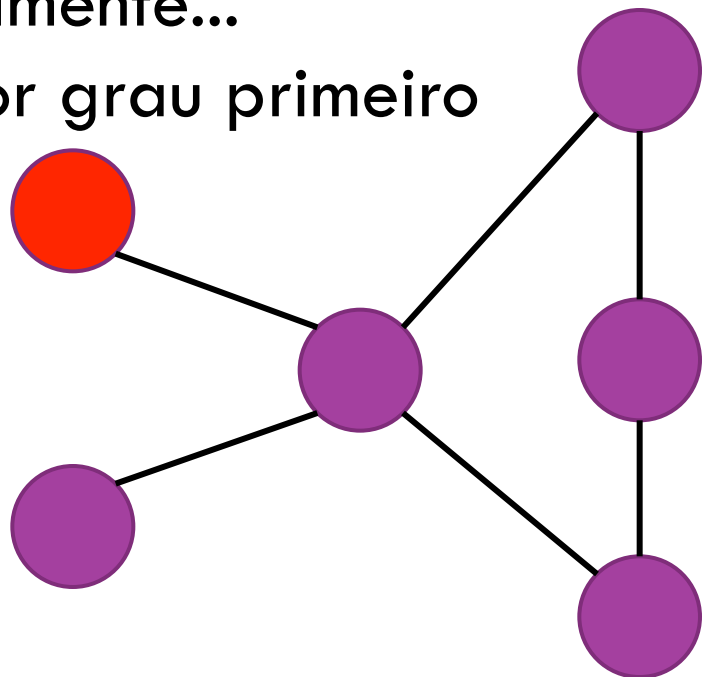


# Algoritmos

38

□ Novamente...

Menor grau primeiro

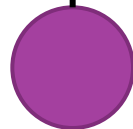
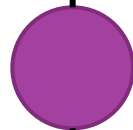
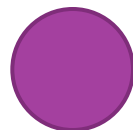
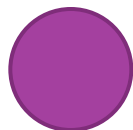


# Algoritmos

39

□ Novamente...

Menor grau primeiro

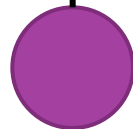
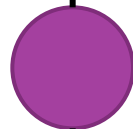
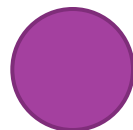
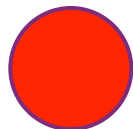
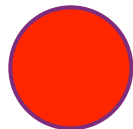


# Algoritmos

40

□ Novamente...

Menor grau primeiro



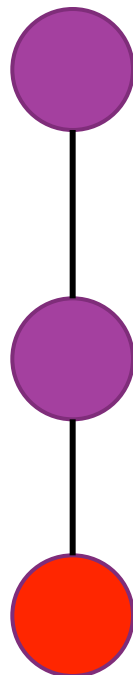
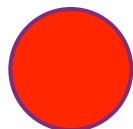
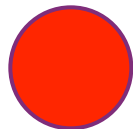


# Algoritmos

41

□ Novamente...

Menor grau primeiro

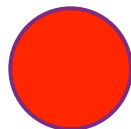
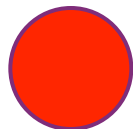
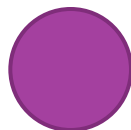


# Algoritmos

42

□ Novamente...

Menor grau primeiro

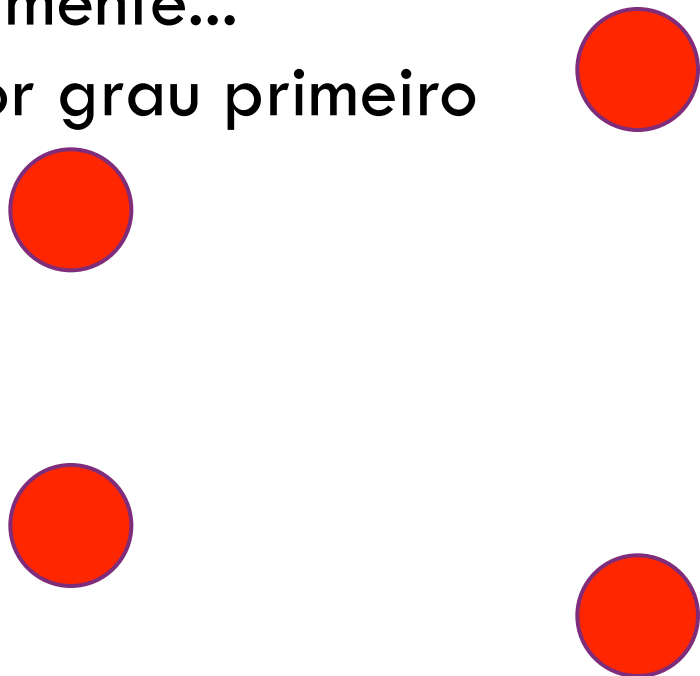


# Algoritmos

43

□ Novamente...

Menor grau primeiro

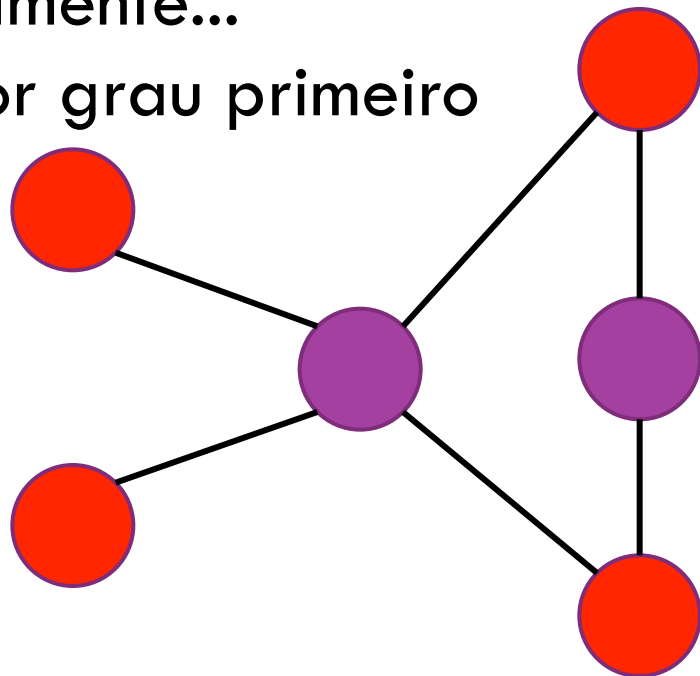


# Algoritmos

44

□ Novamente...

Menor grau primeiro



# Conjuntos dominantes

45

- **Conjunto dominante** é um conjunto de vértices do grafo que “domina” todos os vértices do grafo:

***UM VÉRTICE  $V$  PERTENCE AO CONJUNTO DOMINANTE  
OU É ADJACENTE A UM VÉRTICE QUE PERTENCE.***

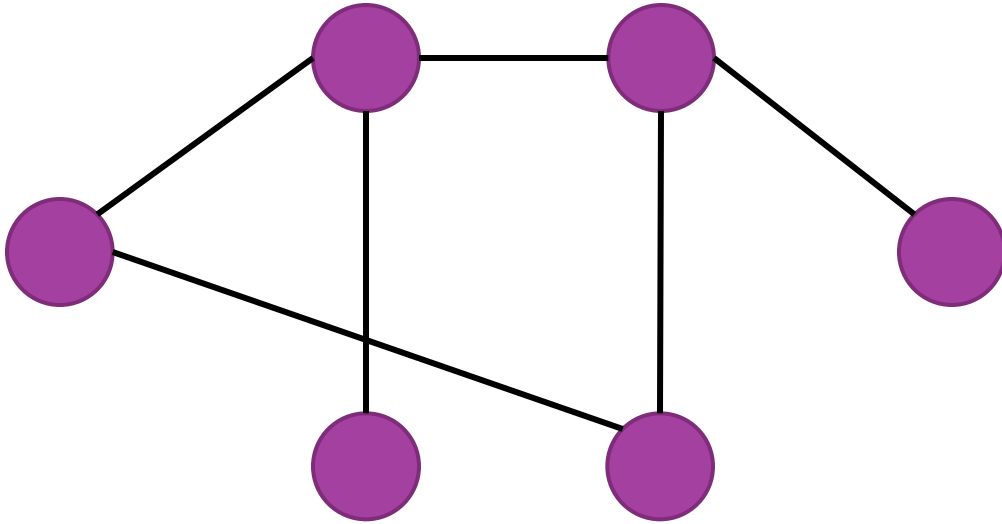
# Conjunto dominante mínimo

46

- Dizemos que um conjunto dominante  $U$  é um conjunto dominante mínimo se não existir outro conjunto dominante  $S$  tal que  $S \subseteq U$
- **Conjunto dominante mínimo** é um conjunto dominante com o menor número de vértices possível.
- Número de estabilidade externa:  $\alpha(G)$

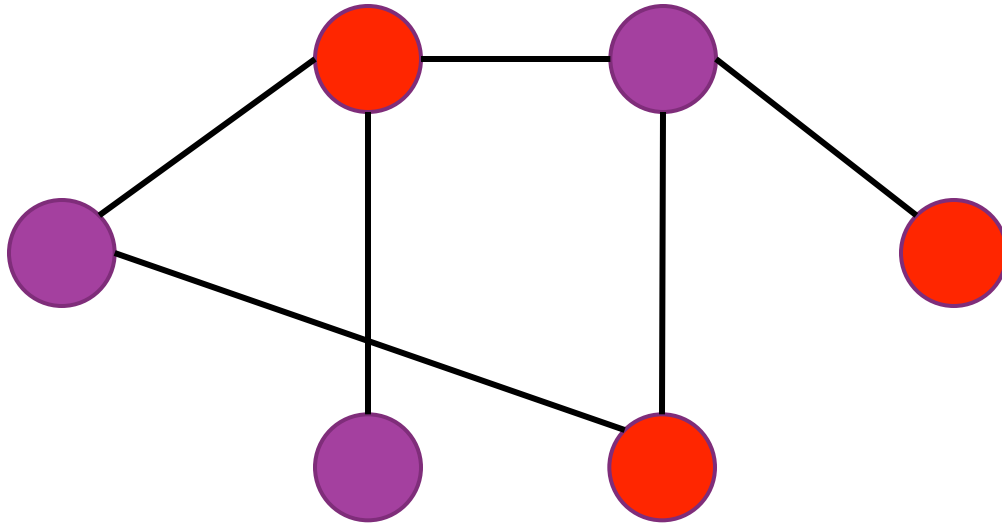
# Conjunto dominante

47



# Conjunto dominante

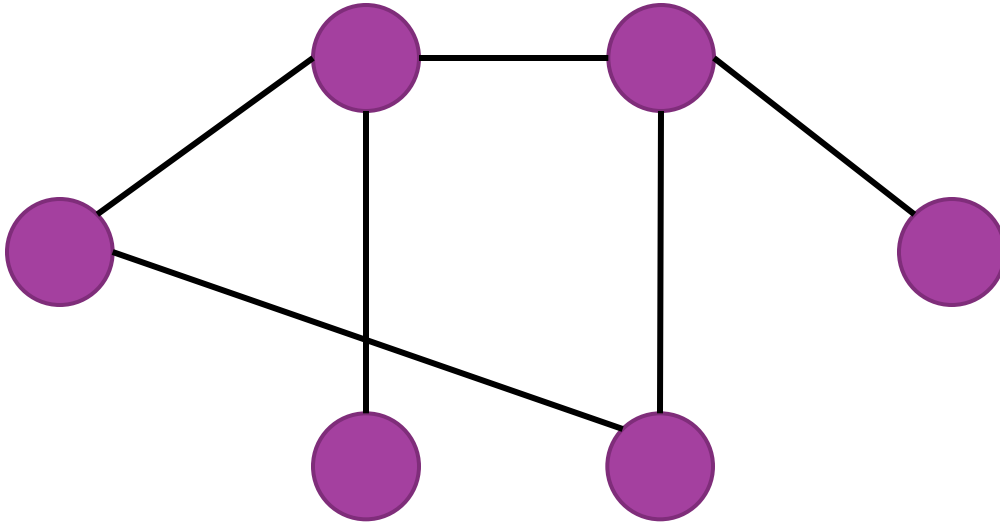
48





# Conjunto dominante

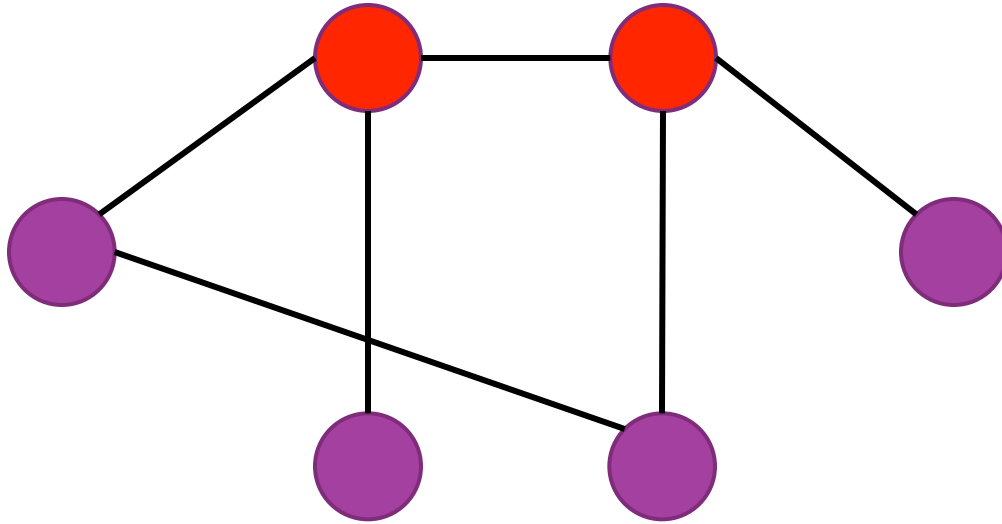
49



# Conjunto dominante

50

- Conjunto dominante mínimo

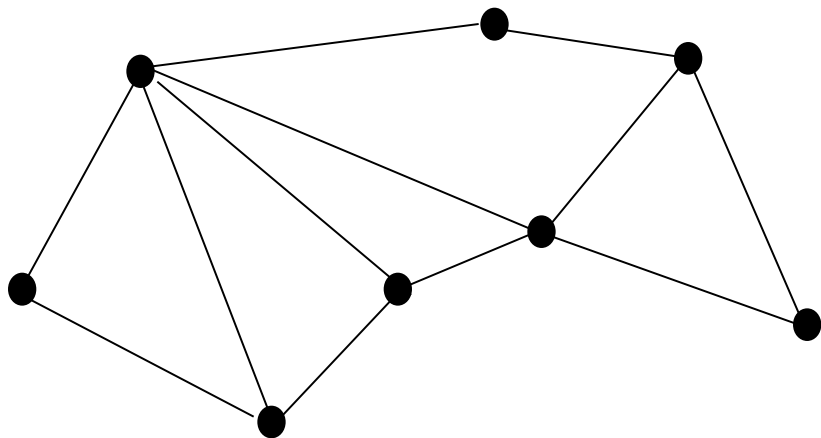


# Cobertura de vértices

51

- Em um grafo  $G$ , um conjunto  $g$  de vértices é chamado de cobertura de vértices se todas as arestas de  $G$  são incidentes a pelo menos um vértice de  $g$ .
- Se este conjunto é o menor com tal propriedade dizemos que  $g$  é uma **cobertura mínima de vértices**

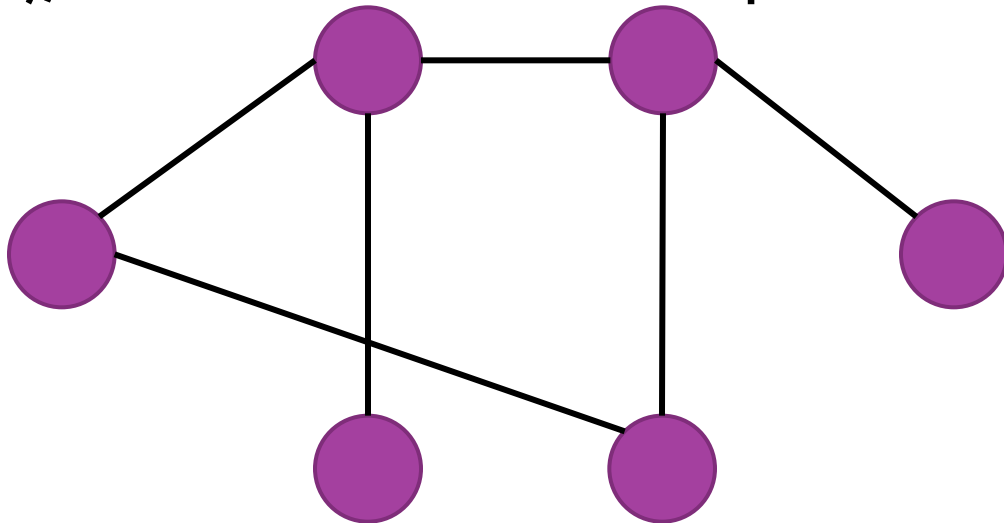
**MENOR CONJUNTO DE VÉRTICES INCIDENTES A  
TODAS AS ARESTAS**



# Coberturas e independência

53

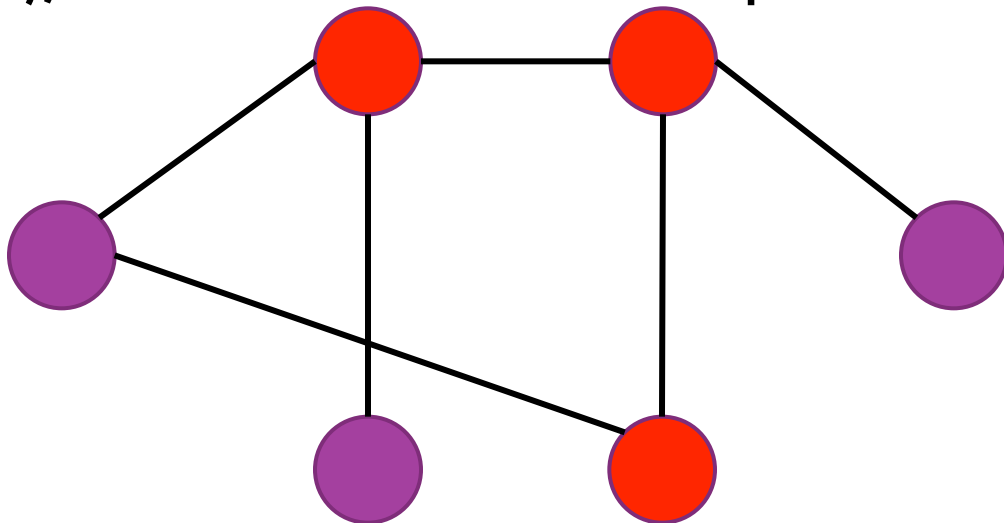
- Se  $C$  é uma cobertura de vértices de um grafo  $G = (V, E)$ , então  $V - C$  é um conjunto independente



# Coberturas e independência

54

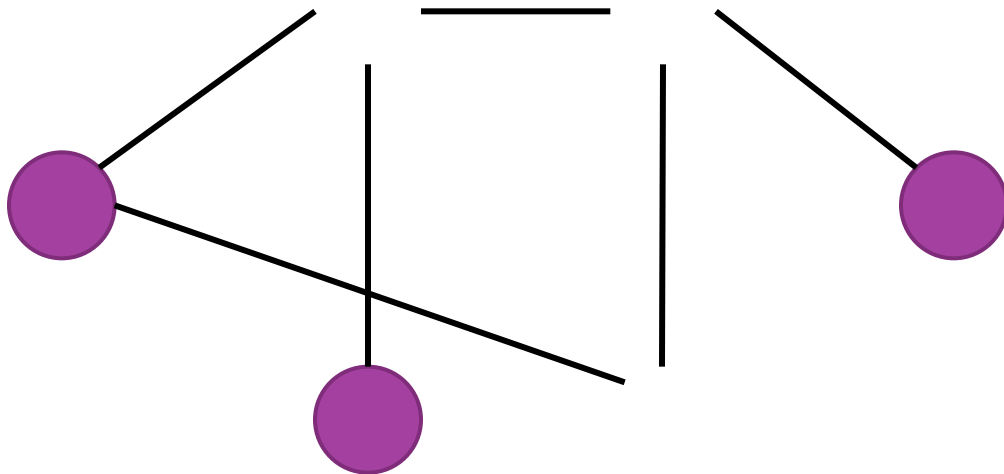
- Se  $C$  é uma cobertura de vértices de um grafo  $G = (V, E)$ , então  $V - C$  é um conjunto independente



# Coberturas e independência

55

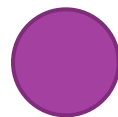
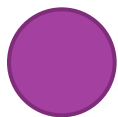
- Se  $C$  é uma cobertura de vértices de um grafo  $G = (V, E)$ , então  $V - C$  é um conjunto independente



# Coberturas e independência

56

- Se  $C$  é uma cobertura de vértices de um grafo  $G = (V, E)$ , então  $V - C$  é um conjunto independente

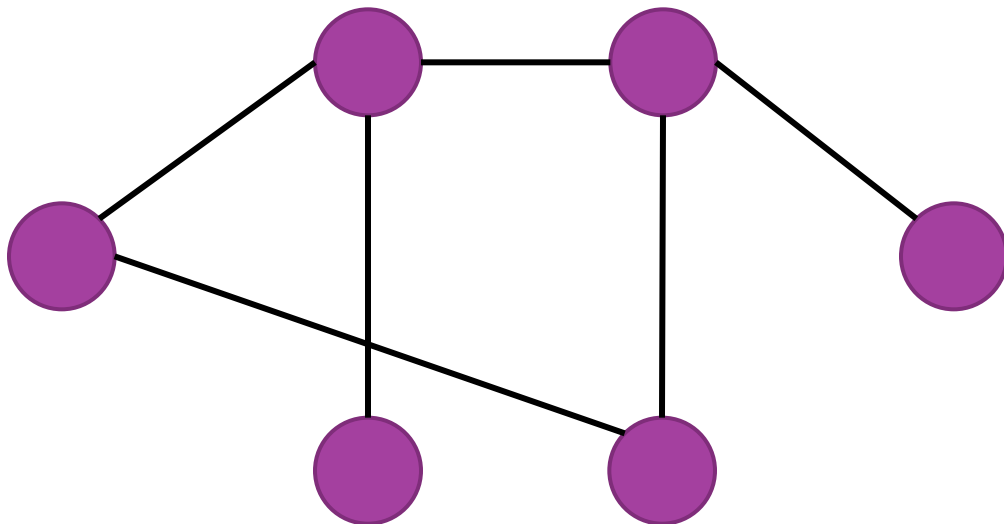




# Coberturas e independência

57

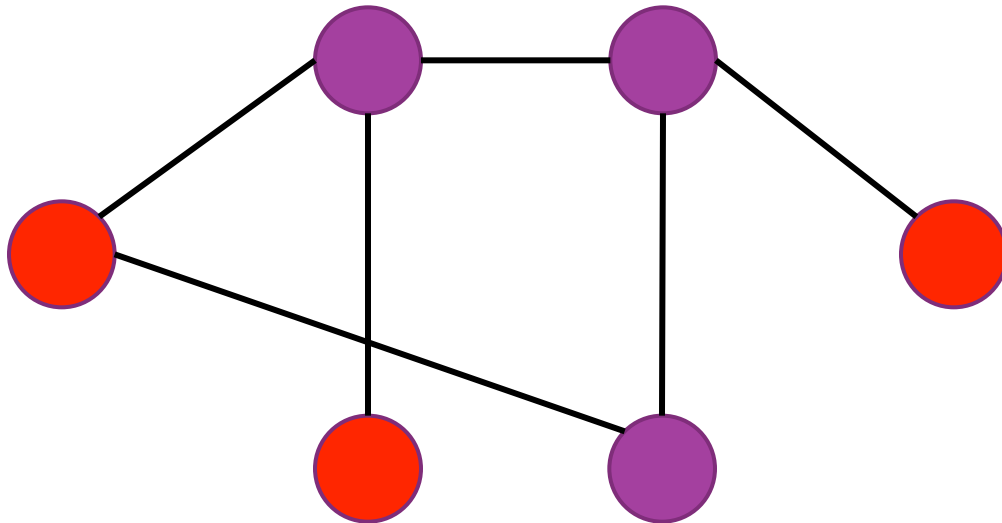
- Logo, se  $S$  é um conjunto independente,  $V - S$  é uma cobertura de vértice



# Coberturas e independência

58

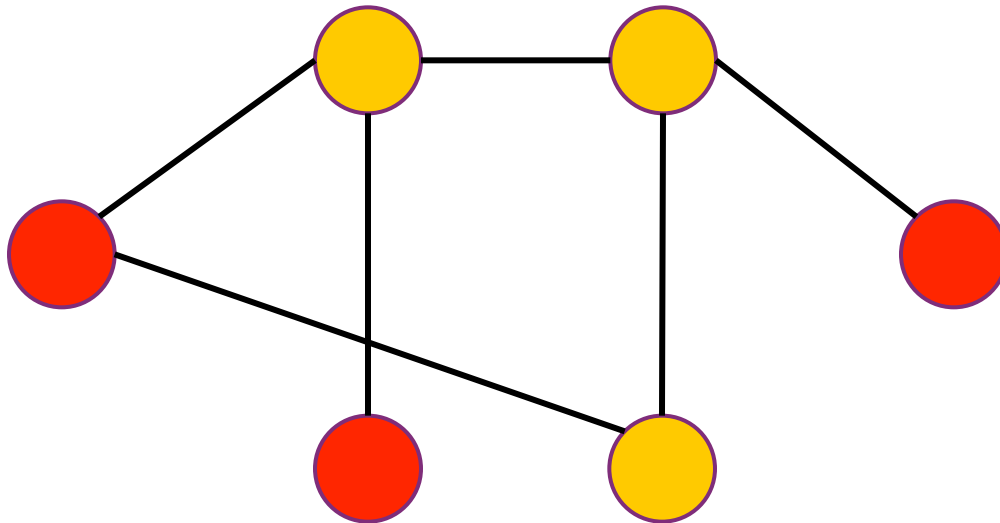
- Logo, se  $S$  é um conjunto independente,  $V - S$  é uma cobertura de vértice



# Coberturas e independência

59

- Logo, se  $S$  é um conjunto independente,  $V - S$  é uma cobertura de vértice



# Coberturas e independência

60

- Se o conjunto  $S$  é máximo,  $V - S$  é mínimo

ENCONTRAR UM CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO  
É O MESMO QUE ENCONTRAR UMA COBERTURA DE  
VÉRTICE MÍNIMA

# Coberturas e independência

61

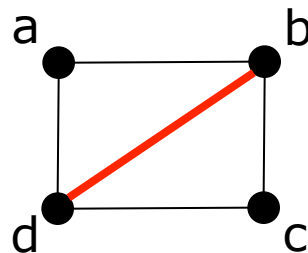
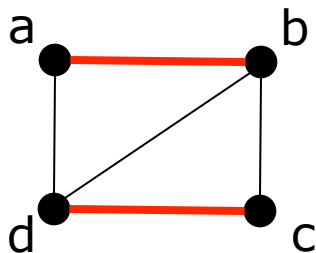
- Como encontrar um conjunto independente é NP-completo, encontrar a cobertura de vértice mínima também é.

ENCONTRAR UMA COBERTURA DE VÉRTICE MÍNIMA É  
UM PROBLEMA NP-COMPLETO

# Emparelhamento (casamento / *matching*)

62

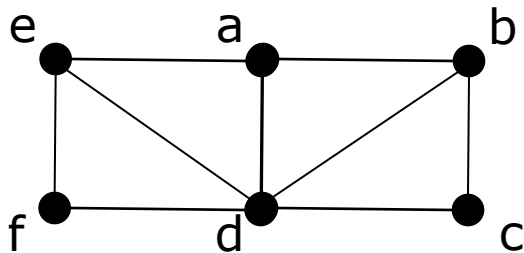
- Um emparelhamento num grafo  $G$  não-dirigido é um conjunto  $M$  de arestas com a seguinte propriedade: todo vértice de  $G$  incide em no máximo um elemento de  $M$ .



# Emparelhamento (casamento / *matching*)

63

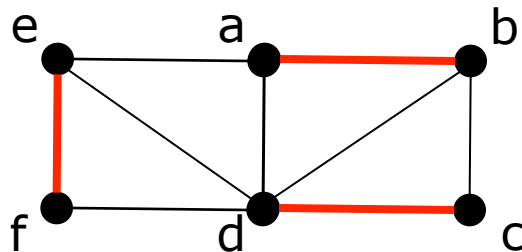
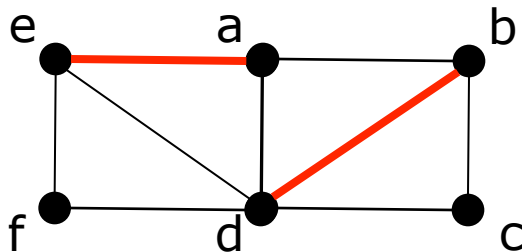
- Em um emparelhamento duas arestas não podem compartilhar o mesmo vértice



# Emparelhamento (casamento / *matching*)

64

- Em um emparelhamento duas arestas não podem compartilhar o mesmo vértice

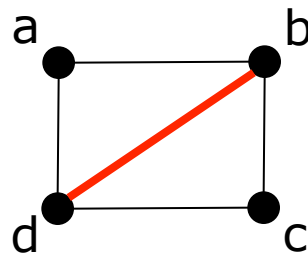
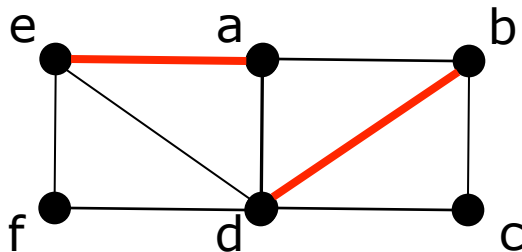




# Emparelhamento

65

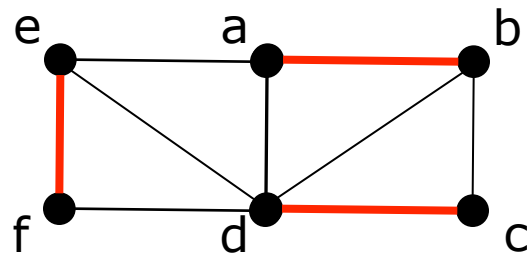
- Quando nenhuma aresta pode ser incluída em  $M$ , dizemos que  $M$  é **maximal**



# Emparelhamento

66

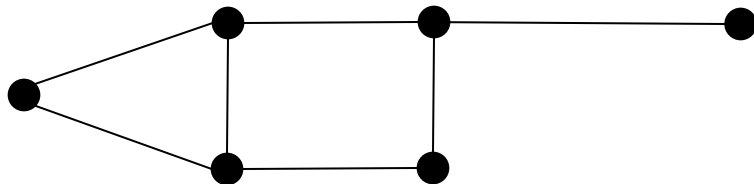
- Um emparelhamento  $M$  é **máximo** se  $|M|$  for máximo em  $G$
- Emparelhamento com maior número de arestas possível em  $G$



# Emparelhamento perfeito

67

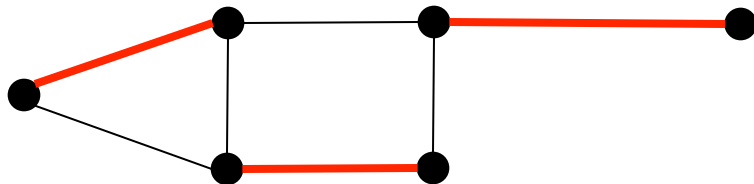
- Um emparelhamento  $M$  é perfeito (completo) se todos os vértices de  $G$  estão em  $M$



# Emparelhamento perfeito

68

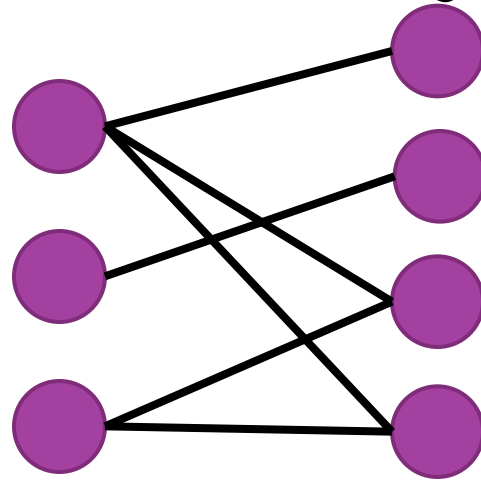
- Um emparelhamento  $M$  é perfeito se todos os vértices de  $G$  estão em  $M$



# Emparelhamento completo em grafos bipartidos

69

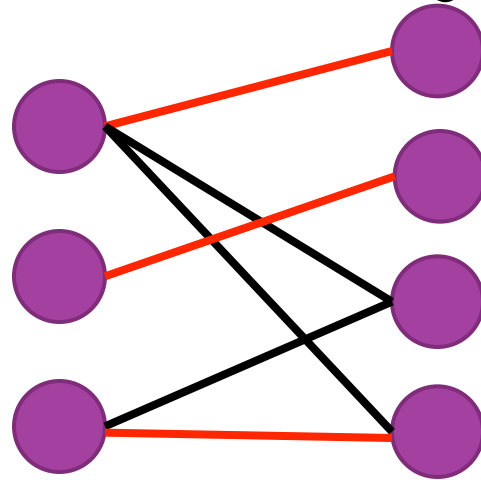
- É um emparelhamento no qual todos os vértices de um dos conjuntos são casados a algum vértice do outro conjunto



# Emparelhamento completo em grafos bipartidos

70

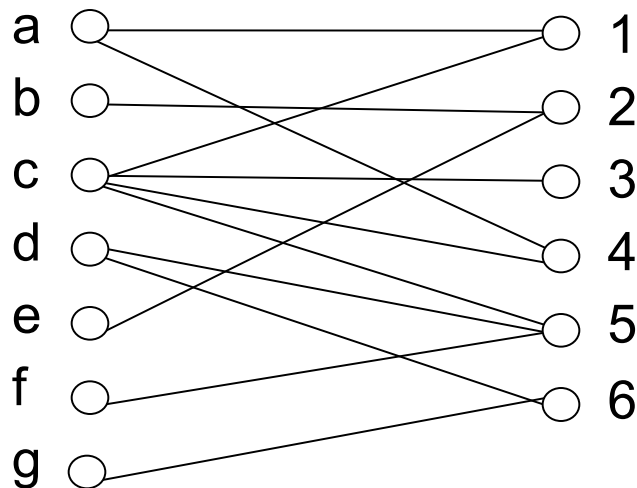
- É um emparelhamento no qual todos os vértices de um dos conjuntos são casados a algum vértice do outro conjunto



# Exercício

71

- Tente encontrar um emparelhamento máximo e um emparelhamento completo para o grafo ao lado



# Teorema de Hall

72

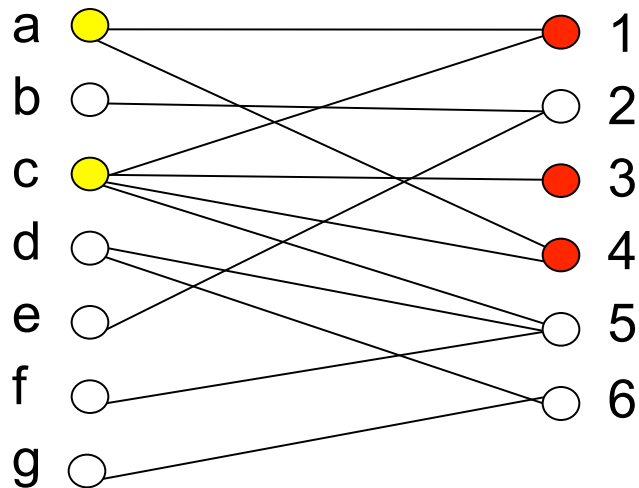
- Seja  $G=(X \cup Y, E)$  um grafo bipartido. Existe um emparelhamento completo de  $X$  para  $Y$  se e somente se  $|\text{adj}(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .



# Teorema de Hall

73

- Seja  $G=(X \cup Y, E)$  um grafo bipartido. Existe um emparelhamento completo de  $X$  para  $Y$  se e somente se  $|adj(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .



# Teorema de Hall

74

- Temos que  $v$  vértices devem ser adjacentes a ao menos  $u$  vértices do outro conjunto, para todo inteiro  $k$  satisfazendo  $1 \leq k \leq m$ , onde  $m$  indica o número total de vértices, e todo subconjunto de  $k$  vértices.

# Cobertura de arestas

75

- Em um grafo  $G$ , um conjunto  $g$  de arestas é chamado de cobertura de aresta se todos os vértices de  $G$  são incidentes a pelo menos uma aresta de  $g$ .
- O próprio grafo  $G$  é uma cobertura de arestas

# Cobertura de arestas

76

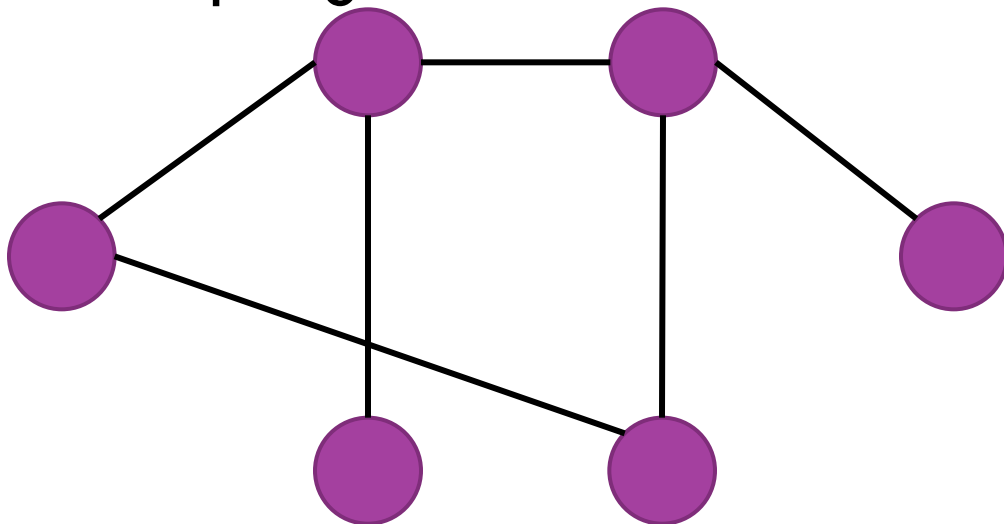
- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que  $g$  é uma *cobertura mínima de aresta*.

**MENOR CONJUNTO DE ARESTAS INCIDENTES A  
TODOS OS VÉRTICES**

# Cobertura de arestas

77

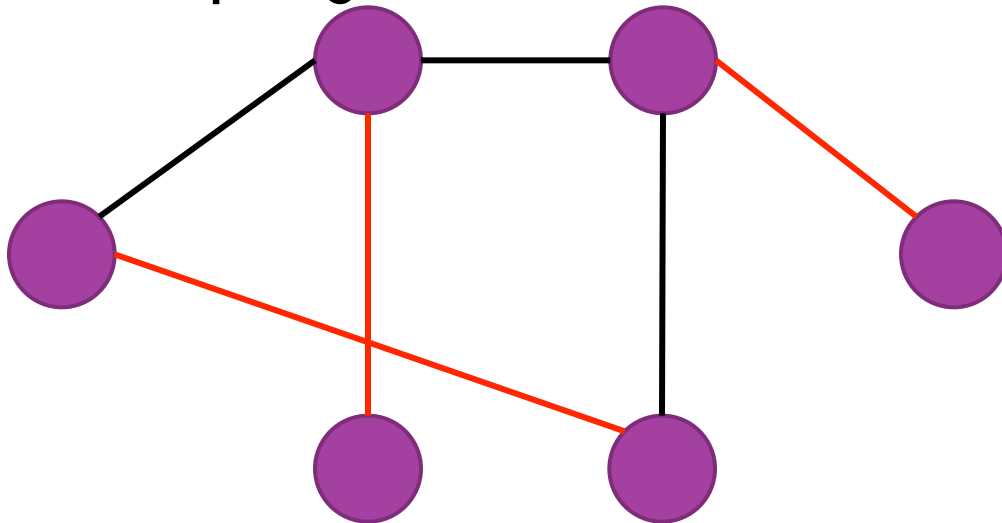
- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que  $g$  é uma **cobertura mínima de aresta**.



# Cobertura de arestas

78

- Se este conjunto é o menor com tal propriedade, dizemos que  $g$  é uma *cobertura mínima de aresta*.



# Emparelhamentos e cobertura de arestas

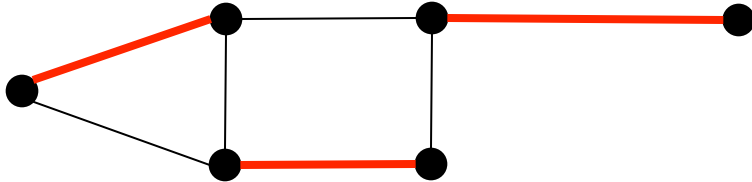
79

- Se temos um emparelhamento perfeito, temos uma cobertura mínima de arestas

# Emparelhamentos e cobertura de arestas

80

- Se temos um emparelhamento perfeito, temos uma cobertura mínima de arestas

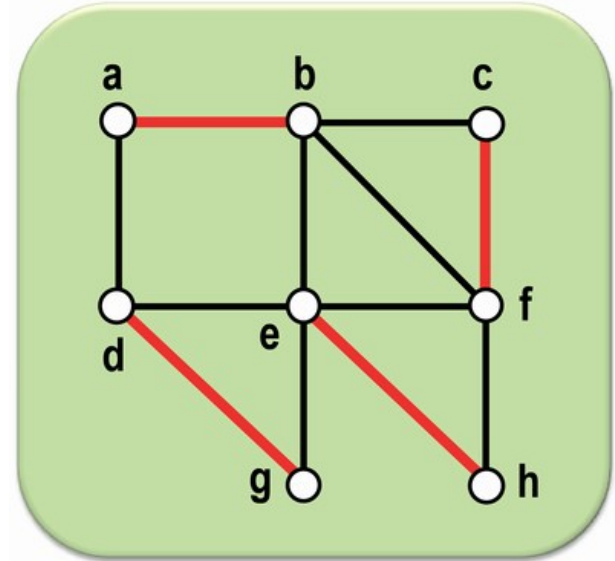




# Emparelhamentos e cobertura de arestas

81

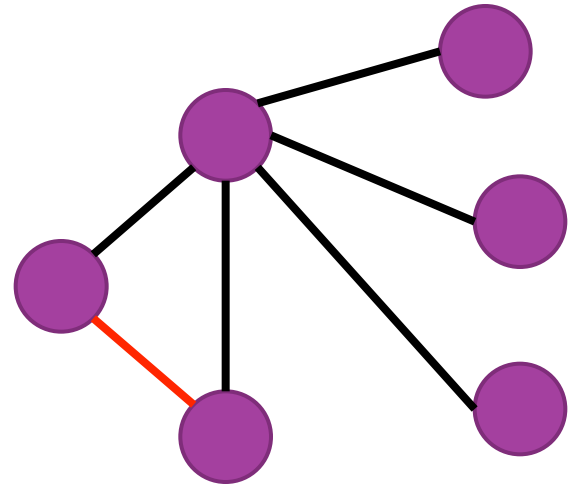
- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



# Emparelhamentos e cobertura de arestas

82

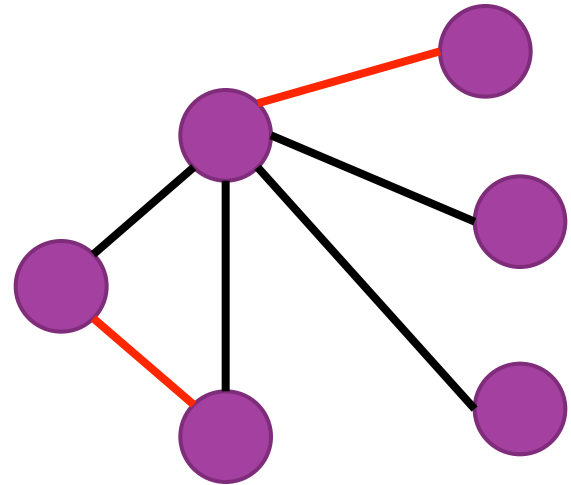
- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



# Emparelhamentos e cobertura de arestas

83

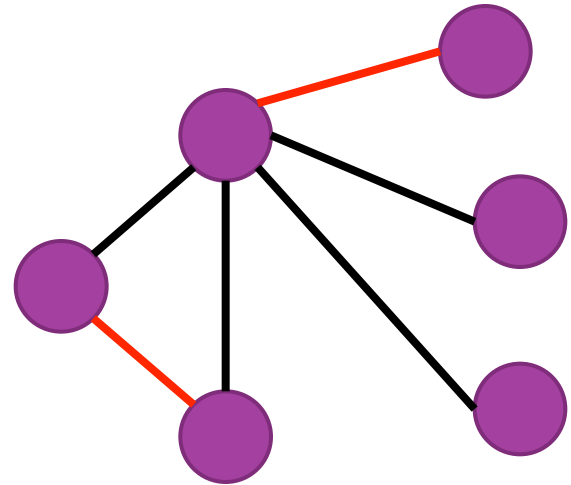
- Mesmo se não temos um emparelhamento perfeito, não é complicado encontrar uma cobertura de arestas a partir de um emparelhamento máximo



# Emparelhamentos e cobertura de arestas

84

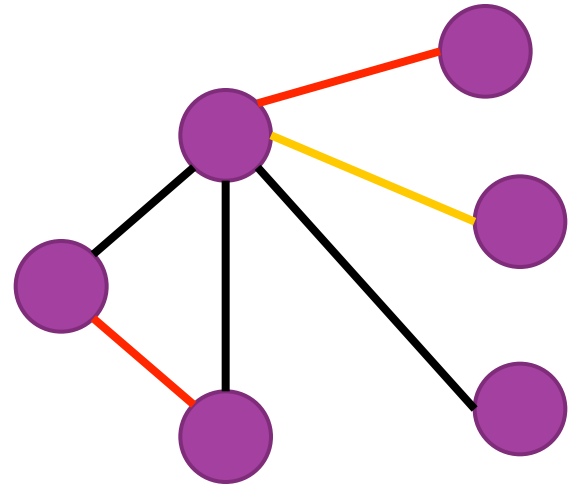
- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



# Emparelhamentos e cobertura de arestas

85

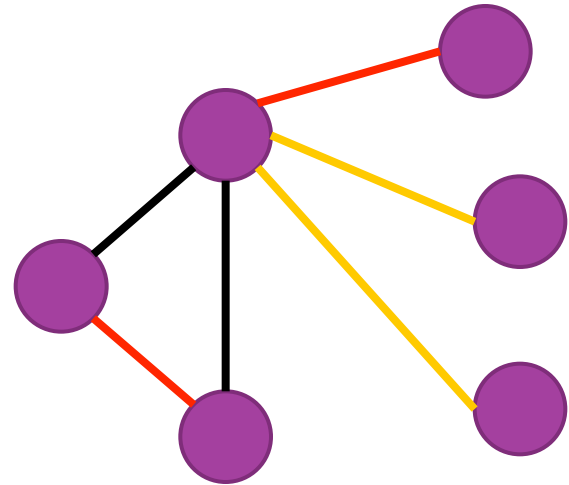
- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



# Emparelhamentos e cobertura de arestas

86

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura



# Emparelhamentos e cobertura de arestas

87

- Algoritmo guloso: enquanto houver vértices não alcançados pela cobertura de arestas, insira uma aresta incidente a eles na cobertura

