

Lista de Exercícios No. 2 – Soluções

1. Dada a função $f(x)=\cos \omega x$, definida no intervalo $0 \leq x < 2$:

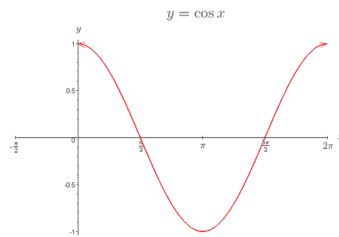
a) Gere um vetor contendo a amostragem da função nos pontos $x=0$ e $x=1$

$$f(x)=[1 \ -1]$$

b) Calcule a DFT sobre o vetor

$$F(u)=[0, \ 1]$$

c) Baseado nos coeficientes encontrados, desenhe os componentes da série e a função reconstituída.



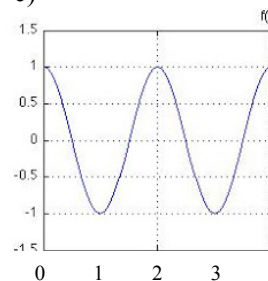
$$f(x)=[1, \ -1]$$

2. Faça o mesmo procedimento do item anterior para a função $f(x)=\cos 2\omega x$, definida no intervalo $0 \leq x < 4$ e amostrada nos pontos $x=0, 1, 2$ e 3 . Compare os resultados obtidos.

a) $f(x)=[1, \ -1, \ 1, \ -1]$

b) $F(u)=[0, \ 0, \ 1, \ 0]$

c)



3. Dados os espectros de Fourier abaixo, determine a imagem correspondente.

A	3.0	$-0.5 + 0.69i$	$-0.5 + 0.16i$	$-0.5 - 0.16i$	$-0.5 - 0.69i$
---	-----	----------------	----------------	----------------	----------------

B	1.5	$-0.25 - 0.25i$	0	$-0.25 + 0.25i$
---	-----	-----------------	---	-----------------

$$f_A(u)=[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$$

$$f_B(u)=[1 \ 2 \ 2 \ 1]$$

4. Dadas as imagens abaixo, calcule a DFT correspondente. Calcule a IDFT sobre o resultado e compare com a imagem original.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F_A(u) = (1/5) * [1 \ -2.62 - 0.73i \ -0.38 - 3.08i \ -0.38 + 3.08i \ -2.62 + 0.73i]$$

$$F_B(u) = (1/8) * [13 \ 1.71 - 0.54i \ -2 + 3i \ 0.29 - 6.54i \ -5 \ 0.29 + 6.54i \ -2 - 3i \ 1.71 + 0.54i]$$

As inversas sobre o resultado serão os vetores A e B.

5. Dadas as imagens abaixo, calcule a DFT correspondente. Compare as imagens e comente os resultados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_A(u) = (1/5) * [1 \ 0.31 - 0.95i \ -0.81 - 0.59i \ -0.81 + 0.59i \ 0.31 + 0.95i]$$

$$F_B(u) = (1/5) * [1 \ -0.81 - 0.59i \ 0.31 + 0.95i \ 0.31 - 0.95i \ -0.81 + 0.59i]$$

Houve uma rotação entre as frequências de módulo 1 e 2. Também vale a propriedade da translação.

6. Dadas as imagens abaixo, considerando pontos externos como possuindo valor 0:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Calcule **A * B**

$$[3 \ 8 \ 5 \ 10 \ 14 \ 10 \ 5 \ 8 \ 3]$$

- b) Calcule **B * A**

$$[3 \ 8 \ 5 \ 10 \ 14 \ 10 \ 5 \ 8 \ 3]$$

- c) Calcule **C * D**

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 19 & 26 & 7 \\ 5 & 26 & 33 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

d) Calcule $\mathbf{D} * \mathbf{C}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 19 & 26 & 7 \\ 5 & 26 & 33 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

e) Calcule a DFT para as imagens **A** e **B**. Calcule a DFT inversa sobre o resultado.

$$\begin{aligned} F_A(u) &= (1/5)[6 \quad 0.31+0.22i \quad -0.81-2.49i \quad -0.81+2.49i \quad 0.31-0.22i] \\ F_B(u) &= (1/5)[11 \quad 2.12+1.54i \quad -0.12-0.36i \quad -0.12+0.36i \quad 2.12-1.54i] \end{aligned}$$

As inversas sobre o resultado serão os vetores A e B

f) Aplique filtros passa-baixa nas imagens **A** e **B** com frequência de corte $|u| < 2$.

Espectros de Fourier filtrados:

$$\begin{aligned} G_A(u) &= (1/5)[6 \quad 0.31+0.22i \quad 0 \quad 0 \quad 0.31-0.22i] \\ G_B(u) &= (1/5)[11 \quad 2.12+1.54i \quad 0 \quad 0 \quad 2.12-1.54i] \end{aligned}$$

funções resultantes (IDFT sobre G):

$$\begin{aligned} g_A(x) &= [1.32 \quad 1.15 \quad 1.05 \quad 1.15 \quad 1.32] \\ g_B(x) &= [3.05 \quad 1.88 \quad 1.15 \quad 1.88 \quad 3.05] \end{aligned}$$

Imagens resultantes:

$$\begin{aligned} a &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \\ b &= [3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3] \end{aligned}$$

g) Aplique filtros passa-alta nas imagens **A** e **B** com frequência de corte $|u| > 1$.

Espectros de Fourier filtrados:

$$\begin{aligned} G_A(u) &= (1/5)[6 \quad 0 \quad -0.81-2.49i \quad -0.81+2.49i \quad 0] \\ G_B(u) &= (1/5)[11 \quad 0 \quad -0.12-0.36i \quad -0.12+0.36i \quad 0] \end{aligned}$$

funções resultantes (IDFT sobre G):

$$\begin{aligned} g_A(x) &= [0.88 \quad 2.05 \quad 0.15 \quad 2.05 \quad 0.88] \\ g_B(x) &= [2.15 \quad 2.32 \quad 2.05 \quad 2.32 \quad 2.15] \end{aligned}$$

Imagens resultantes:

$$\begin{aligned} a &= [1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 1] \\ b &= [2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2] \end{aligned}$$

7. Para cada imagem abaixo, considerando pontos externos como **indefinidos**:

A	3	5	2	1	1
	1	4	6	2	1
	1	1	5	6	2
	1	1	1	1	1
	1	2	2	2	1

B	5	1	2	1	8
	6	6	5	6	1
	2	1	8	7	7
	6	1	2	8	8
	7	8	2	1	1

C	1	1	9	1	1
	1	1	9	8	7
	9	9	9	2	1
	1	1	2	8	8
	1	2	2	8	9

a. Determine o histograma de frequências

A:
 1 2 3 4 5 6
 13 6 1 1 2 2

B:
 1 2 5 6 7 8
 7 4 2 4 3 5

C:
 1 2 7 8 9
 10 4 1 4 6

b. Aplique um filtro de suavização 3x3 pela média

A:
 [[3 2 2],
 [4 3 2],
 [3 3 2]]

B:
 [[4 4 4],
 [4 5 4],
 [5 6 5]]

C:
 [[5 5 4],
 [5 5 5],
 [5 6 5]]

c. Aplique um filtro de suavização 3x3 pela mediana

A:

```
[[3, 1, 1],  
 [ 4, 2, 2],  
 [ 2, 2, 2]]
```

B:

```
[[5, 5, 2],  
 [ 5, 6, 2],  
 [ 6, 7, 7]]
```

C:

```
[[9, 2, 2],  
 [ 8, 8, 2],  
 [7, 8, 8]]
```

d. Altere o contraste da imagem através da equalização do histograma. As novas intensidades devem variar entre 0 e 255.

A:

Trocar: 1 2 3 4 5 6

Por: 133 194 204 214 235 255

B:

Trocar: 1 2 5 6 7 8

Por: 71 112 133 173 204 255

C:

Trocar: 1 2 7 8 9

Por: 102 143 153 194 255

e) Realce as bordas da imagem, através de filtros de Sobel.

A:

```
[[ 20  24  6],  
 [ 10  22 14],  
 [ 28  18 16]]
```

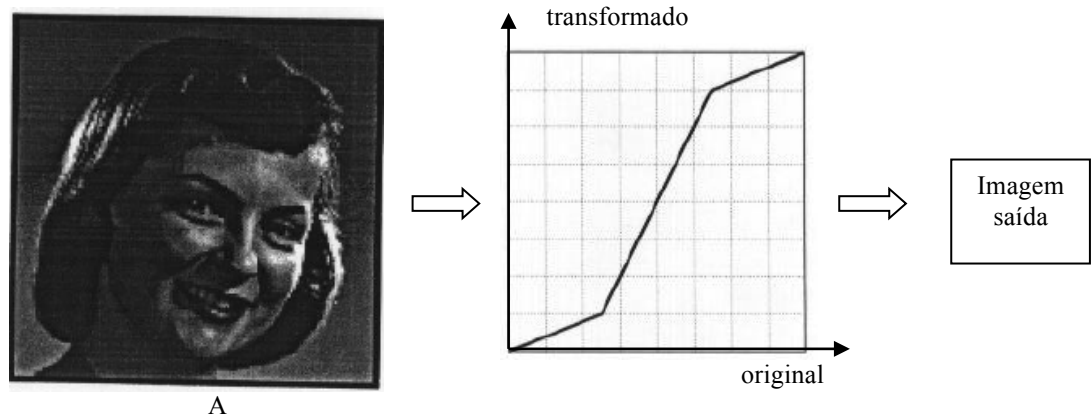
B:

```
[[ 4  20  20],  
 [ 24  28  24],  
 [ 20  8  34]]
```

C:

```
[[ 48  16  32],  
 [ 16  14  28],  
 [ 22  18  24]]
```

8. O gráfico abaixo representa a função de transformação de histograma aplicada à imagem A.



- a) Caracterize a imagem de saída quanto ao seu tamanho e conteúdo.

O tamanho será o mesmo, mas haverá mudanças de intensidade dos pixels: Os mais escuros ficam ainda mais escuros; os mais claros ainda mais claros; e os médios têm seu contraste aumentado.

- b) Para que são usadas as funções de transformação de histograma?

Para alterar a distribuição de probabilidades dos tons de cinza, alterando principalmente o contraste da imagem.

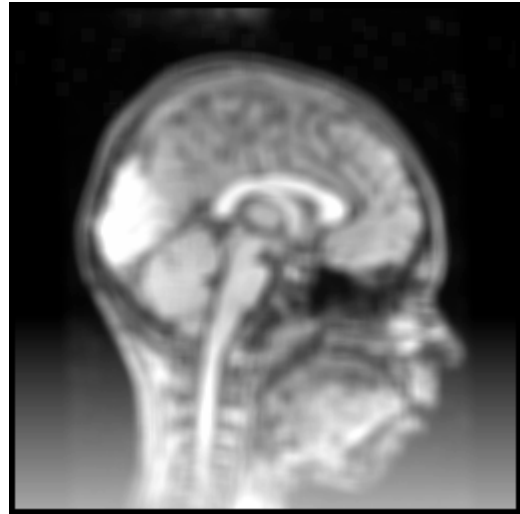
- c) É possível aplicar uma transformação de histograma na qual 2 pixels de tons de cinza diferentes da imagem de entrada passem a ter o mesmo valor após a transformação? Justifique.

Sim, qualquer uma que tenha um segmento de derivada 0 na sua curva, como por exemplo o fatiamento e a binarização.

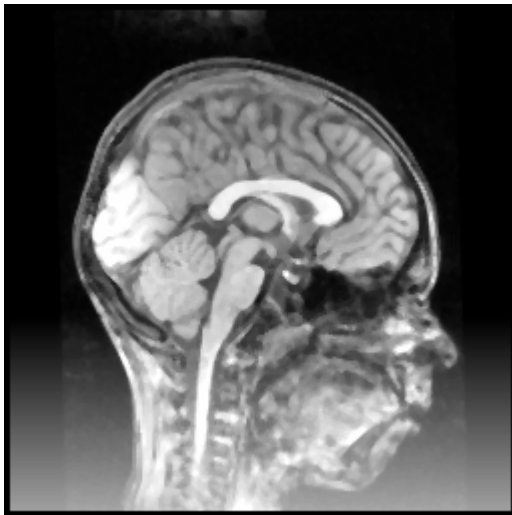
9. Considere a imagem original A e as imagens B, C e D obtidas a partir de A:



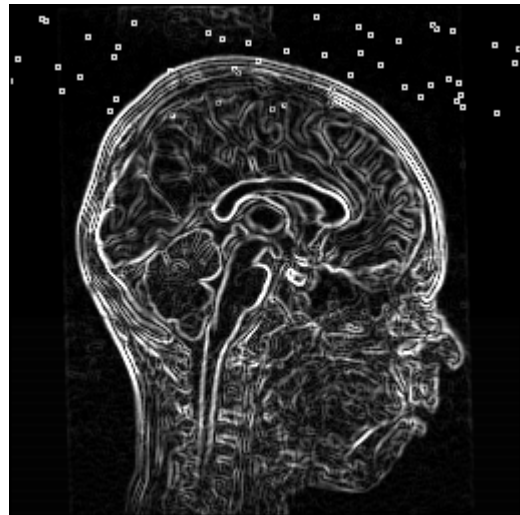
A



B



C



D

a) Indique os elementos de baixa frequência presentes na imagem original A.

Regiões com tonalidade homogênea ou suave variação, como o artefato do fundo da imagem na parte inferior.

b) Indique os elementos de alta frequência presentes na imagem original A.

As bordas e o ruído do tipo “sal” na parte superior na imagem.

c) Descreva o processo aplicado a A para se obter B. Justifique a resposta.

Foi passado um filtro da média (passa-baixa no domínio do espaço) pois a imagem teve seus elementos de alta frequência suavizados.

- d) Descreva o processo aplicado a A para se obter C. Justifique a resposta.

Foi passado um filtro da mediana pois a imagem teve o ruído de alta frequência suavizado mas com as bordas preservadas.

- e) Descreva o processo aplicado a A para se obter D. Justifique a resposta.

Foi passado um filtro de detecção de bordas com o de Sobel (passa-alta no domínio do espaço) pois a imagem teve seus elementos de alta frequência realçados e os de baixa frequência suavizados.