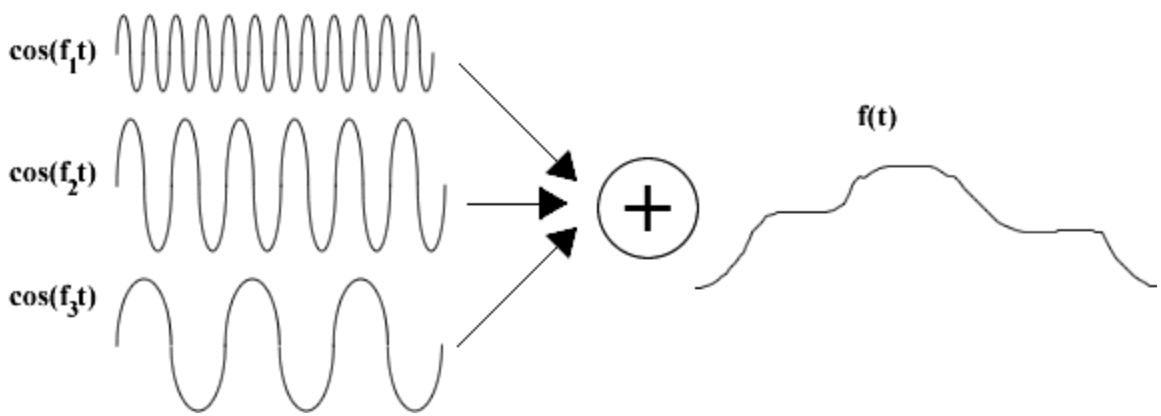
Transformada de Fourier

Séries de Fourier

Princípio: qualquer sinal periódico complexo pode ser expresso como uma soma infinita de ondas senoidais puras.



Frequências

Baixa freqüência
(região homogênea)

Alta freqüência
(textura, bordas)

Séries de Fourier

Quando escrita como função do tempo, a onda possui as seguintes características:

$$f(t) = a\ sin(2\pi ut) = a\ sin(\frac{2\pi}{T}t) = a\ sin(\omega t)$$

onde:

- a é a amplitude
- u é a freqüência
- T é o período
- ω é a freqüência angular

A onda possui também uma fase, que é o deslocamento do seu início, no tempo. Uma onda seno com fase π/2 é uma onda cosseno.

Séries de Fourier

Qualquer onda pode, então, ser descrita como uma soma de funções seno e cosseno com freqüências múltiplas de uma freqüência fundamental f_0 (harmônicos).

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nf_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(nf_0 t)$$

a_0 é o deslocamento vertical da onda, resultante da parcela onde n=0. Os coeficientes a_n e b_n são chamados coeficientes de Fourier.

Estes coeficientes são determinados através da Transformada de Fourier.

Transformada de Fourier

Transforma imagens do domínio espacial (coordenadas da imagem) para o domínio da freqüência (informação sobre variações lentas ou rápidas nos NC em uma imagem)

Para um sinal 1D, temos:

a) Transformada de Fourier

$$\Im\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp[-j2\pi ux]dx$$

b) Transformada Inversa de Fourier

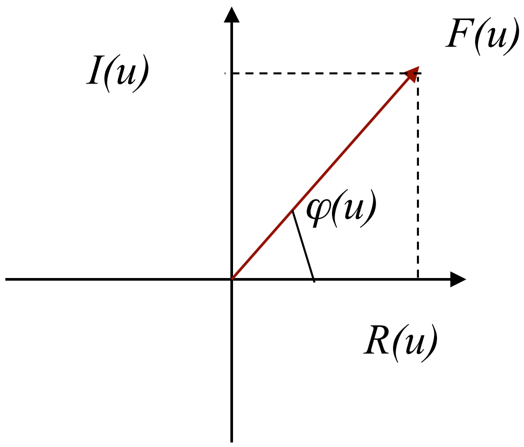
$$\Im^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp[j2\pi ux]du$$

onde $j=(-1)^{1/2}$, $exp(jx) = cos\ x+j\ sen\ x$,$exp(-jx)=cos\ x - j\ sen\ x$

Transformada de Fourier

Por estar expressa no domínio complexo, a Transformada de Fourier possui componente real e imaginário:

$$F(u)=R(u)+i\,I(u),$$



onde

- $\varphi(u)=\tan^{-1}[I(u)/R(u)]$ *é o ângulo de fase,*
- $|F(u)|=(R(u)^2+I(u)^2)^{1/2}$,
- $P(u)=|F(u)|^2$ *é o espectro de potencia.*

Para um sinal 2D (imagem), temos:

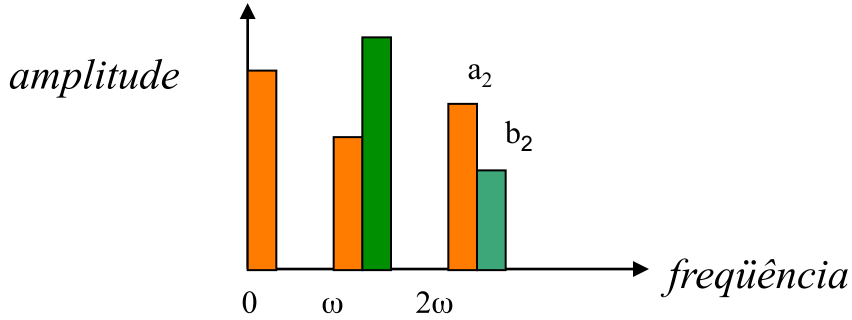
a) Transformada de Fourier

$$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]\,dx\,dy$$

b) Transformada Inversa de Fourier

$$\Im^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)]\,du\,dv$$

Espectro de Fourier



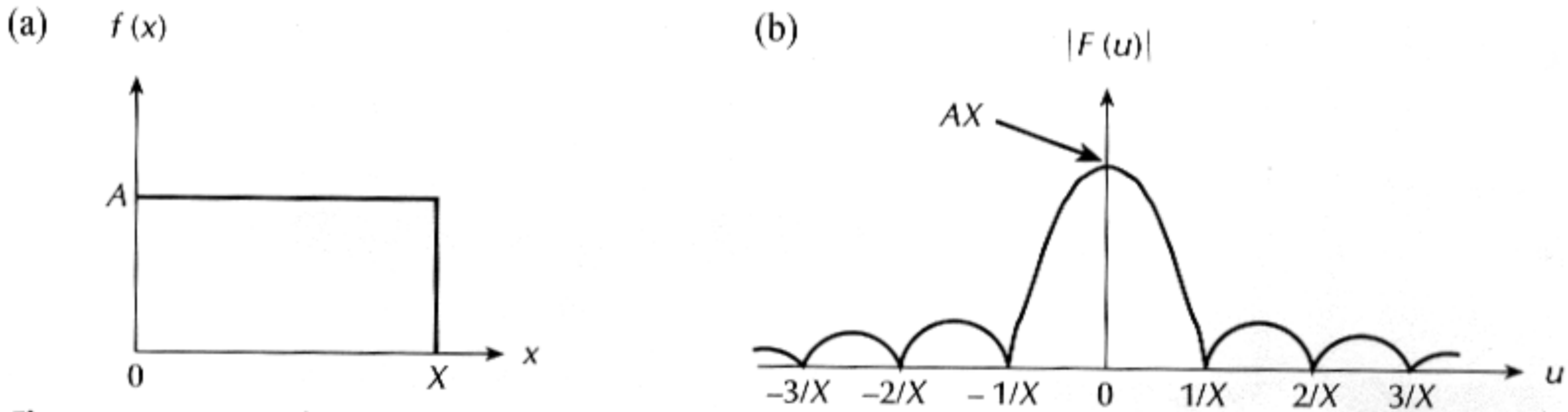
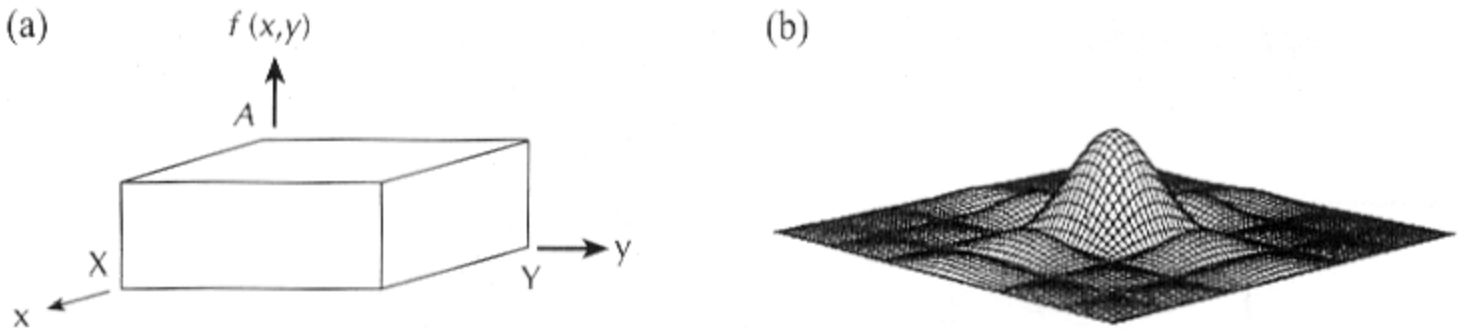


Figura 3.1 *— Uma função simples e seu espectro de Fourier.*



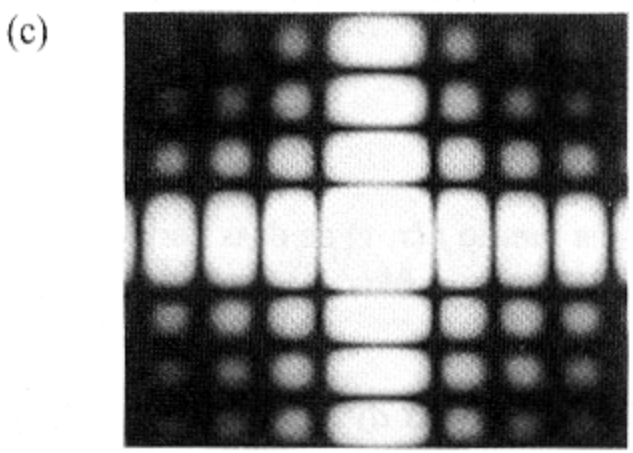
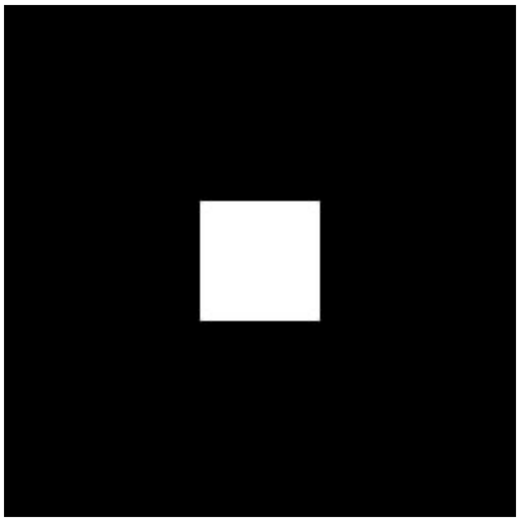
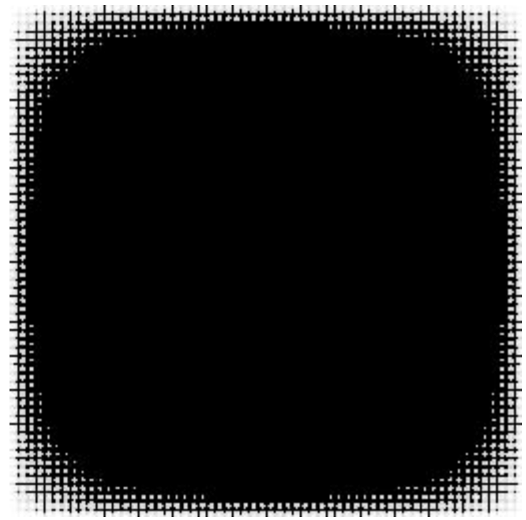


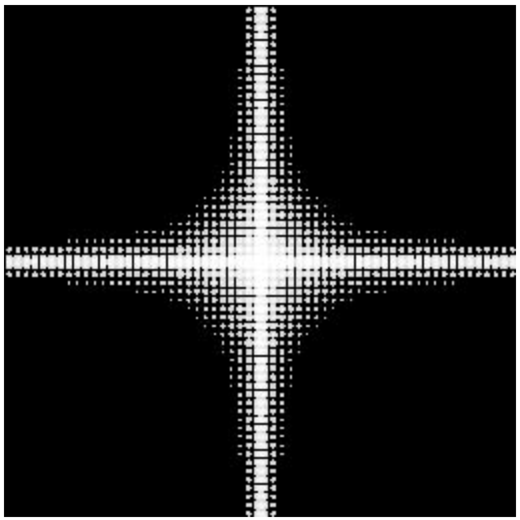
Figura 3.2 *— (a) Uma função 2-D; (b) seu espectro de Fourier; e (c) o espectro mostrado como uma função da intensidade.*



original



TF



TF deslocada
para o centro

Ex. espectros de Fourier

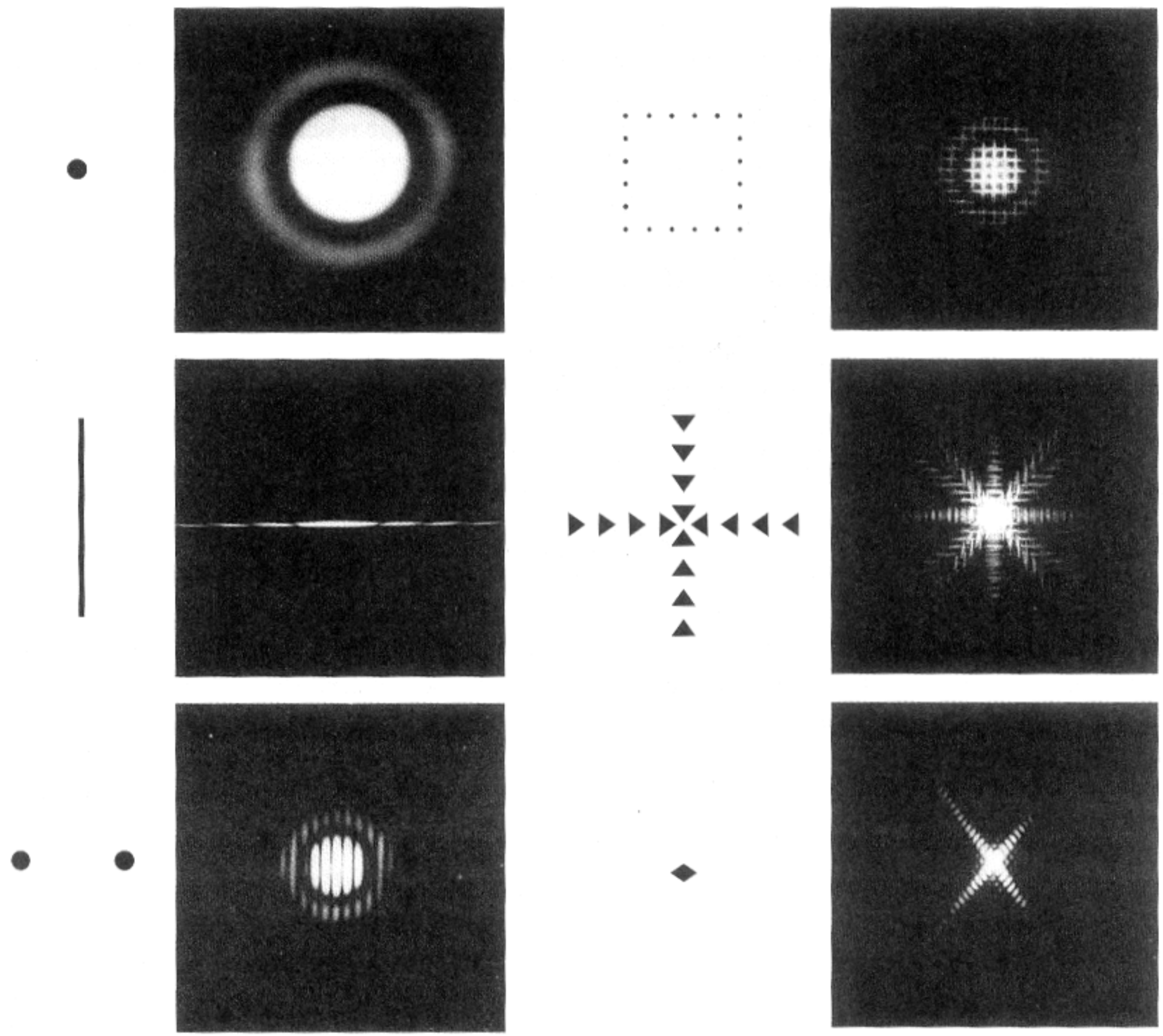
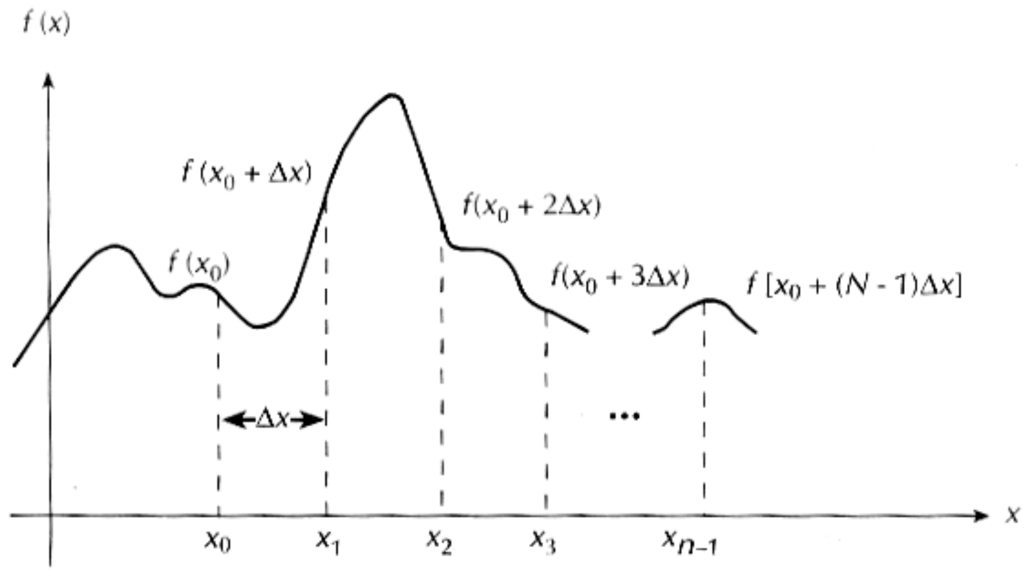


Figura 3.3 — *Algumas funções bidimensionais e seus espectros de Fourier.*

Transformada Discreta de Fourier

Seja f(x) uma função contínua como segue:



Podemos discretizar esta função escrevendo-a da forma
$f(x) = f(x_0 + x\,\Delta x)$, com $x = 0...N-1$, ou seja, ela corresponde à função contínua f(x) amostrada por N valores igualmente espaçados de Δx.

A DFT (Transformada Discreta de Fourier) será então:

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N] \ ,$$

E a DFT^{-1} será dada por:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\exp[j2\pi ux/N]$$

No caso 2D (imagem), teremos:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp[j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

onde M,N são as dimensões da imagem.

Ex. construa a DFT da função abaixo.

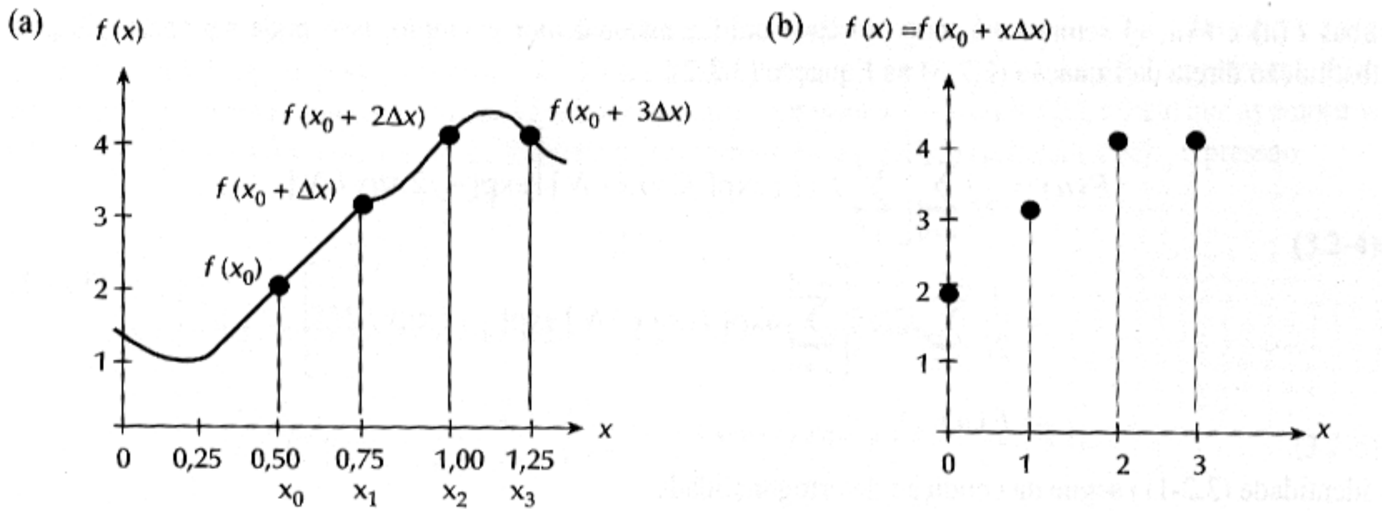


***Figura 3.5** — Uma função simples e amostras no domínio de x. Em (a) x é uma variável contínua; em (b) x é discreta.*

N =

Δx =

F(0) =

F(1) =

F(2) =

F(3) =

Calcular também o espectro |F(u)| de DFT e plotar o gráfico.

Propriedades da Transformada de Fourier

a) translação

Se $\Im\{ f(t)\} = F(u)$, *então:*

$$\Im\{ f(t-a) \} = exp(-i2\pi au)\ F(u)$$

b) rotação

A rotação de uma função implica na rotação do espectro, do mesmo ângulo.

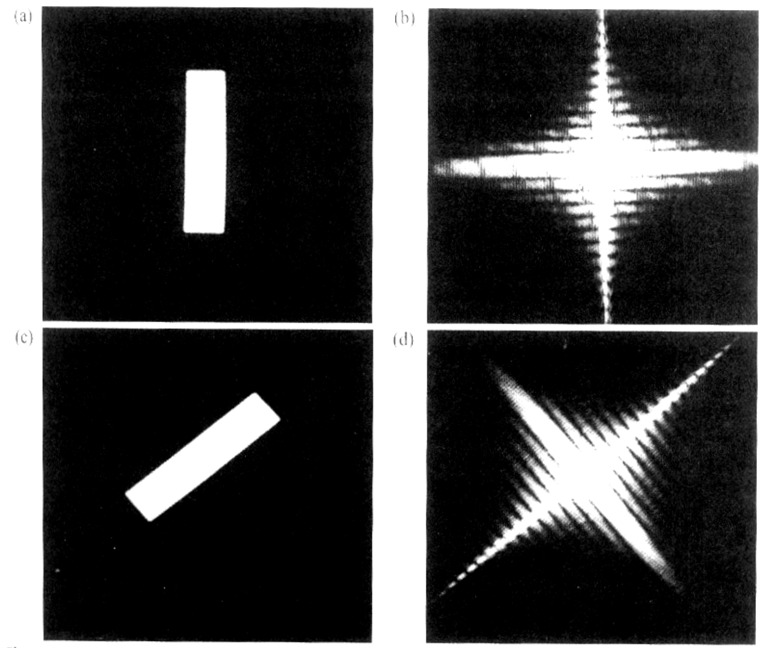


Figura 3.10 — *Propriedades rotacionais da transformada de Fourier: (a) uma imagem simples; (b) espectro; (c) imagem rotacionada; (d) espectro resultante.*

Propriedades da Transformada de Fourier

c) periodicidade

$$F(u) = F(u+N)$$

d) simetria conjugada

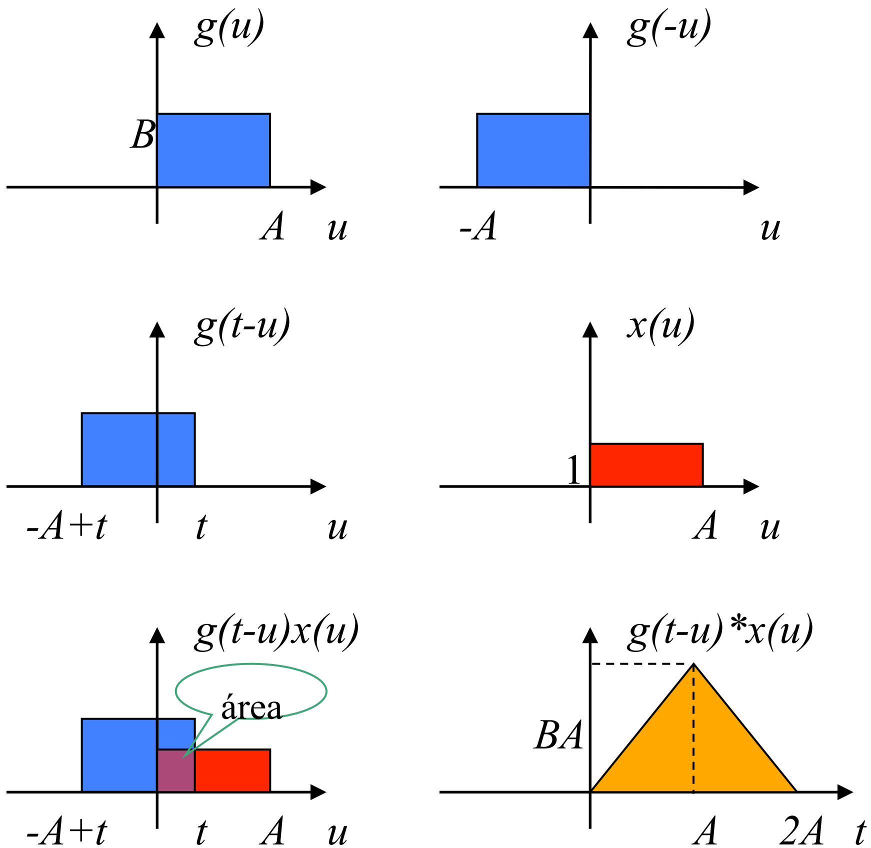
$$F(u) = F^*(-u)$$

u	0	1	2	3/-3	4/-2	5/-1
a	a_0	a_1	a_2	a_3	$a_4 = a_2$	$a_5 = a_1$
b	0	b_1	b_2	b_3	$b_4 = -b_2$	$b_5 = -b_1$

Propriedades da Transformada de Fourier

e) convolução

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)x(u)du$$



Propriedades da Transformada de Fourier: Convolução discreta

$$h(x) = f(x) * g(x) = \sum_i f(i)g(x-i)$$

Se *f(x)* tem *N* elementos e *g(x)* tem *M* elementos, então *h(x)* terá *N+M-1* elementos.

Teorema da Convolução:

$\Im\{ f(t) * g(t) \} = F(u)\, G(u)$

$\Im^{-1}\{ F(u)\, G(u) \} = f(t) * g(t)$

Propriedades da Transformada de Fourier : Convolução

Condições de borda:

- estender o valor
- acrescentar zeros
- perder colunas e linhas
- “wrap around”

Exemplos de aplicação:

- remoção de ruídos
- suavização
- realce de bordas