CÍRCULO UNITARIO

1. Signo de las Funciones Trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

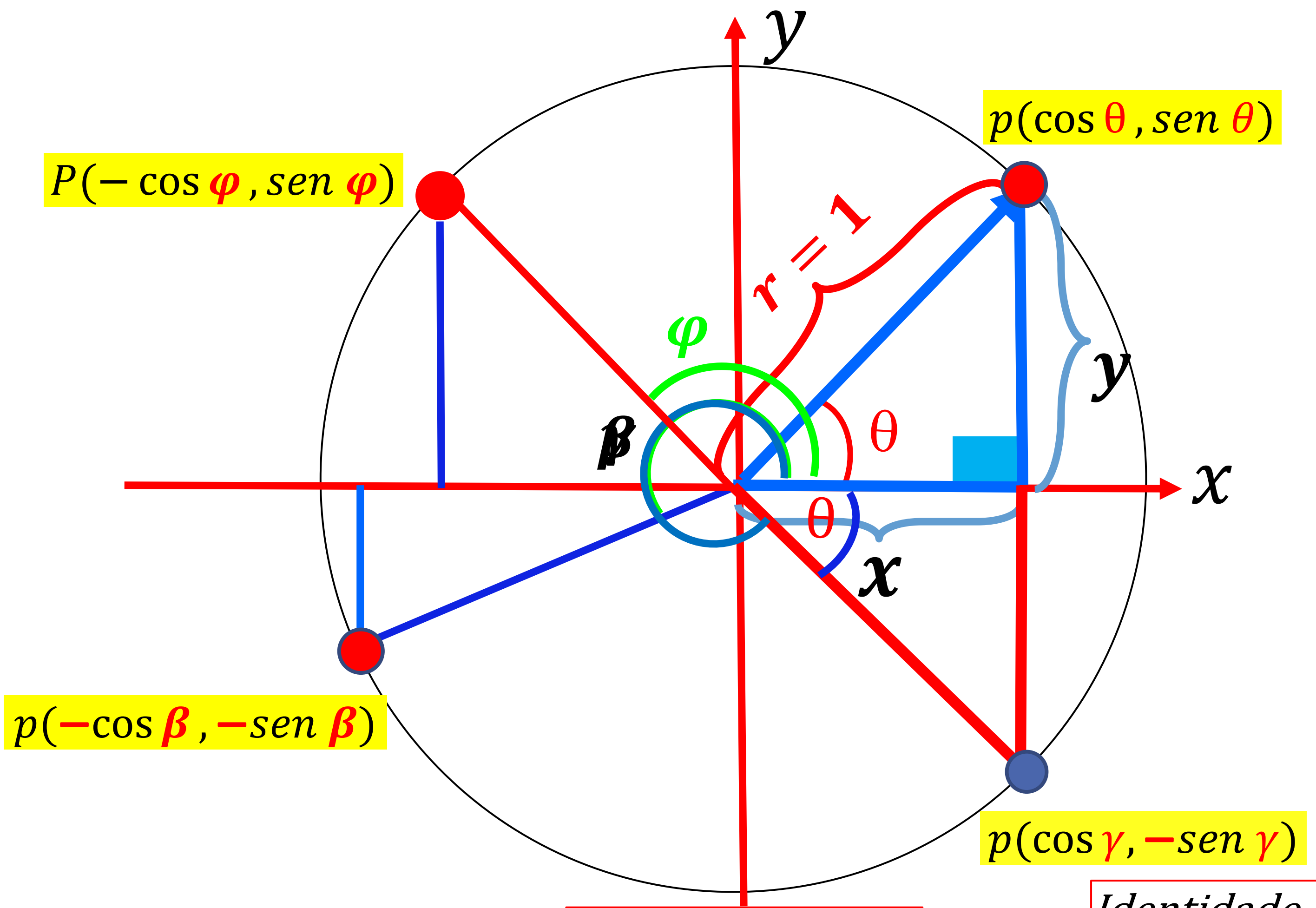


Figura No. 1

De la figura No.1, se sabe que: $\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{y}{r}}$

$Como: r = 1 \quad \Rightarrow \quad sen\,\theta = \frac{y}{1}$

$\therefore \quad sen\,\theta = y \;\; o \;\; \boldsymbol{y = sen\,\theta}$ ___(1)

De igual forma de la fig. No. 1: $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}}$

$Como: r = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{x}{1}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = \cos\theta}$ ___(2)

Para la tangente: $\tan\theta = \frac{y}{x}$

Sust. (1) y (2) $\therefore \; \boldsymbol{\tan\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}}$ ___(3)

Por el teorema de Pitágoras

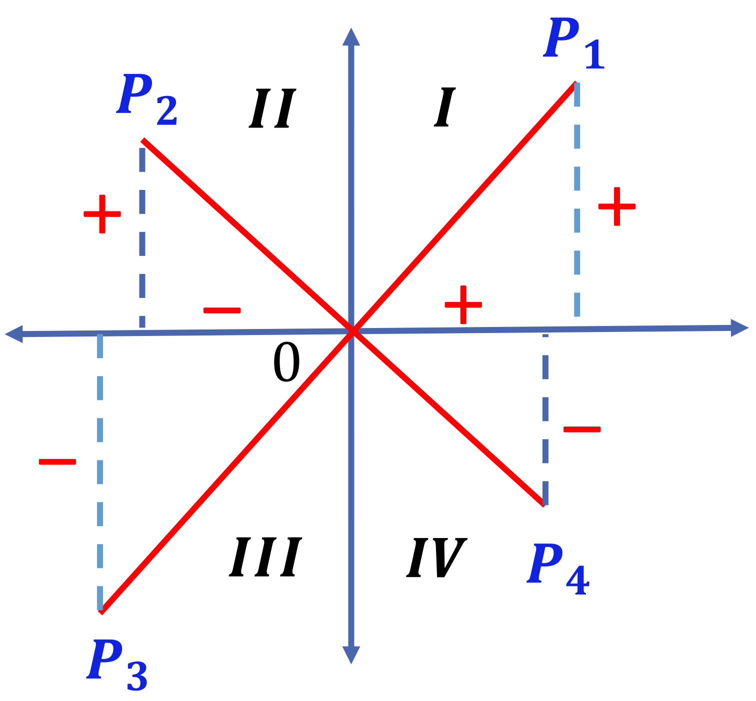
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$\Rightarrow \; cos^2\theta + sen^2\,\theta = r^2, \qquad como\ r = 1$

Identidade Pitagórica $\therefore \; \boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$ ___4

Signos de las funciones trigonométricas en los 4 cuadrantes

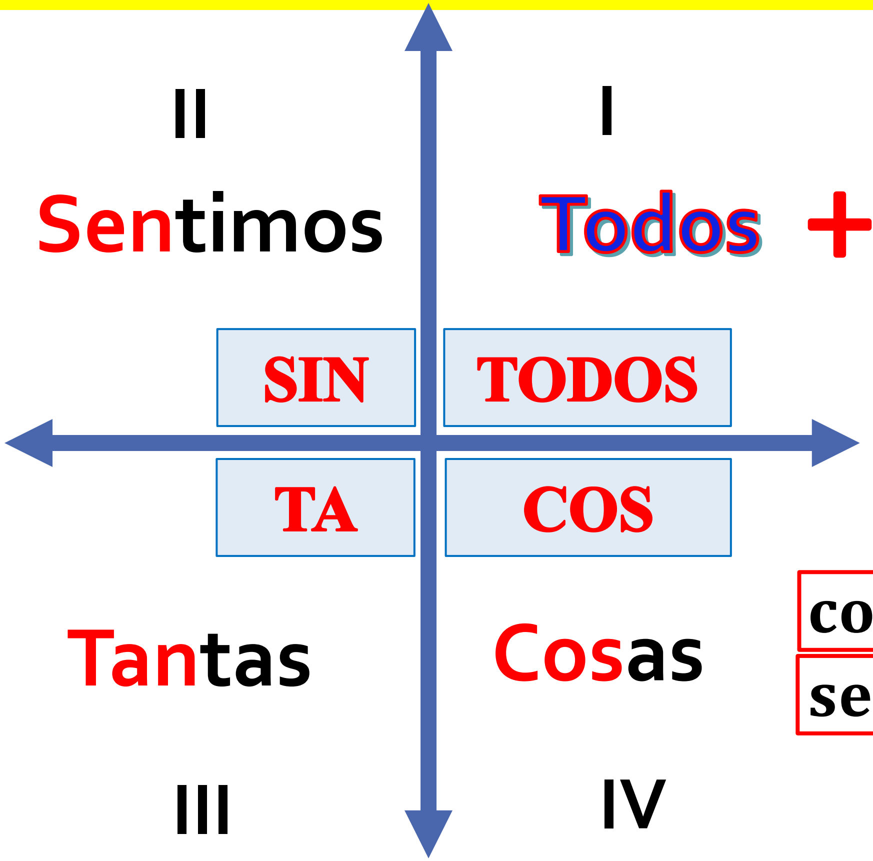
Regla mnemotécnica **para identificar en cuáles cuadrantes las funciones son positivas**



El triángulo rectángulo en su posición normal en sus cuatro cuadrantes

$$\boldsymbol{sen\,\theta = +}$$
$$\boldsymbol{csc\,\theta = +}$$

$$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = +$$
$$\mathbf{cot}\,\boldsymbol{\theta} = +$$

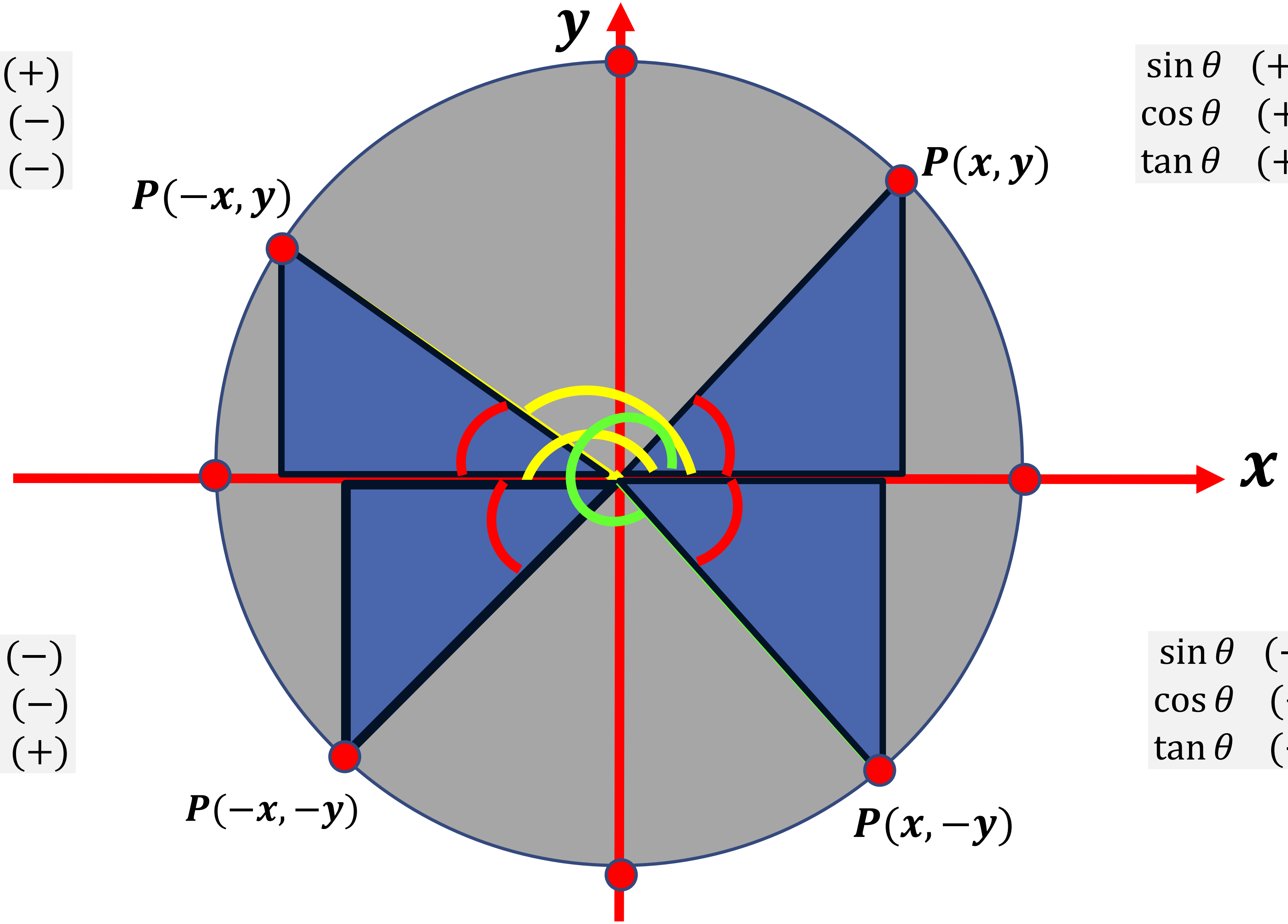


$$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = +$$
$$\mathbf{sec}\,\boldsymbol{\theta} = +$$

SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\sin\theta$	$(+)$
$\cos\theta$	$(-)$
$\tan\theta$	$(-)$

$\sin\theta$	$(+)$
$\cos\theta$	$(+)$
$\tan\theta$	$(+)$

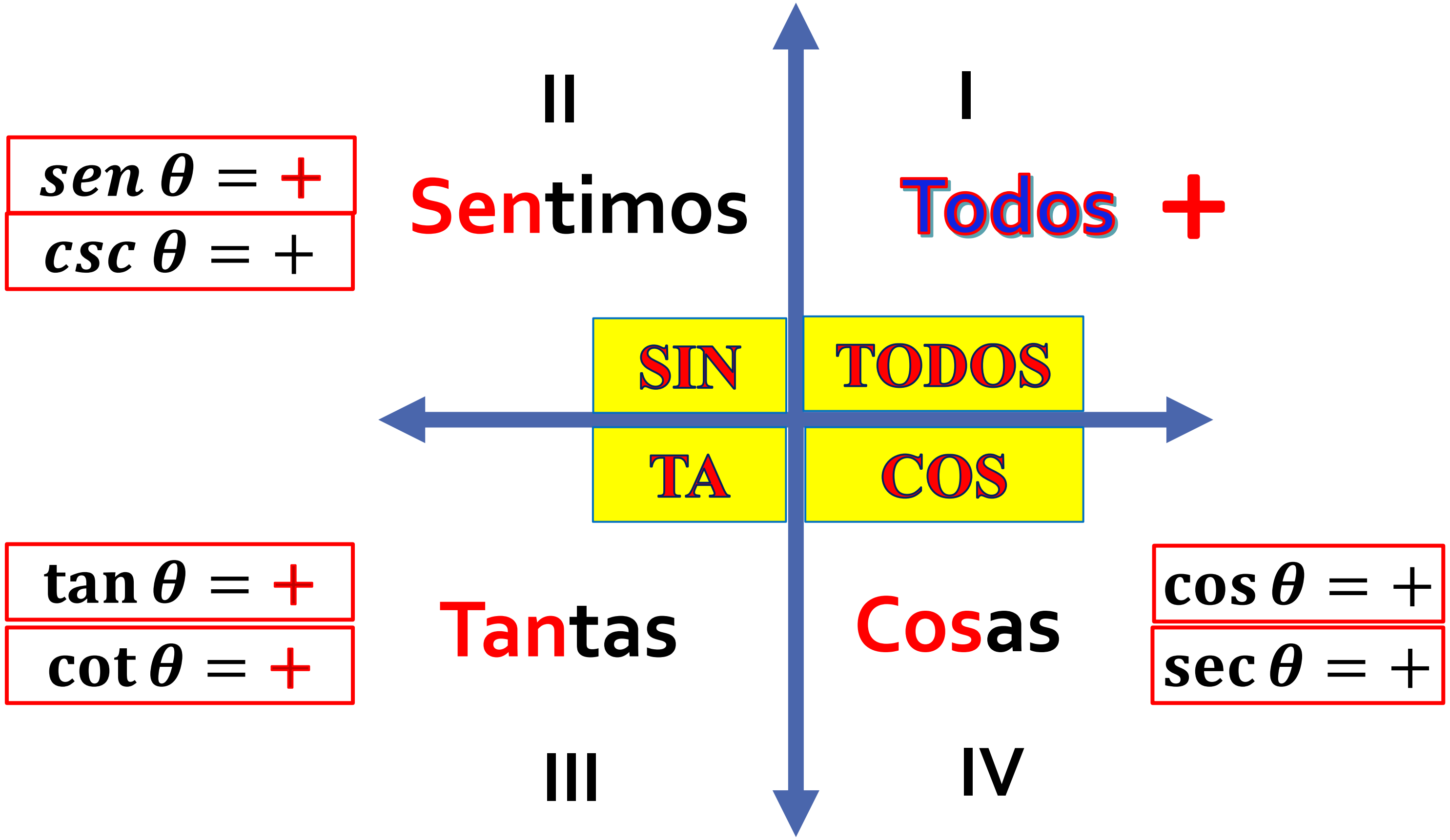


$\sin\theta$	$(-)$
$\cos\theta$	$(-)$
$\tan\theta$	$(+)$

$\sin\theta$	$(-)$
$\cos\theta$	$(+)$
$\tan\theta$	$(-)$

Signos de las funciones trigonométricas en los 4 cuadrantes

Regla mnemotécnica **para identificar en cuáles cuadrantes las funciones son positivas**

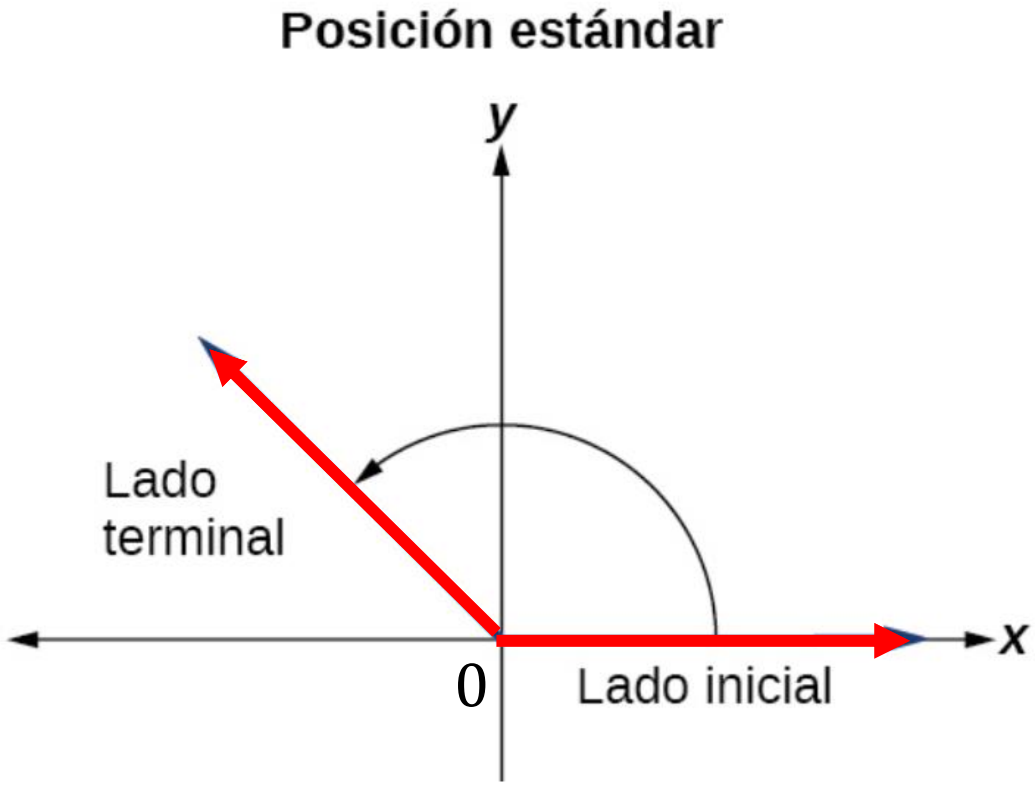


Signos de las funciones trigonométricas en los 4 cuadrantes

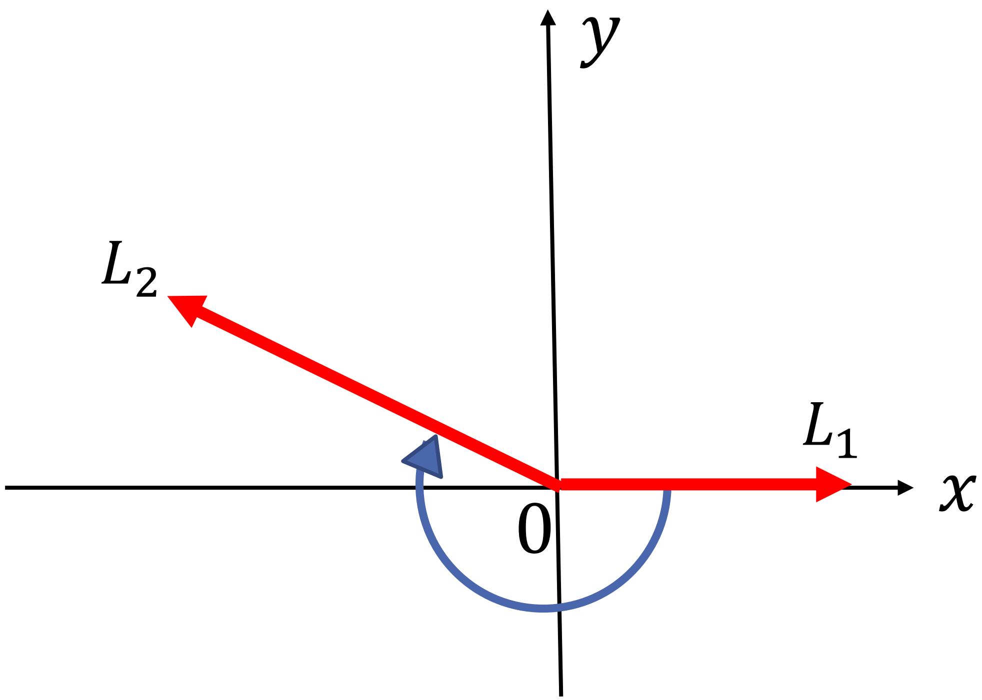
CUADRANTE	$sen\ \theta$	$cos\ \theta$	$tan\ \theta$	$cot\ \theta$	$sec\ \theta$	$csc\ \theta$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL O ESTÁNDAR

En trigonometría un ángulo está en **posición estándar** si en un sistema cartesiano su vértice está situado en el origen 0, y su lado inicial se extiende a lo largo del eje positivo $\boldsymbol{x}$.

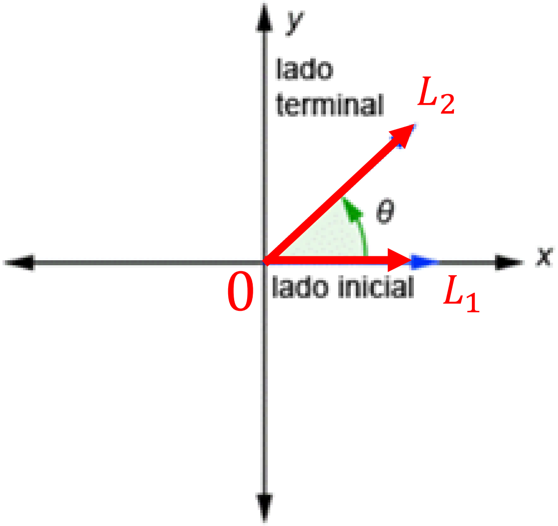


Posición estándar

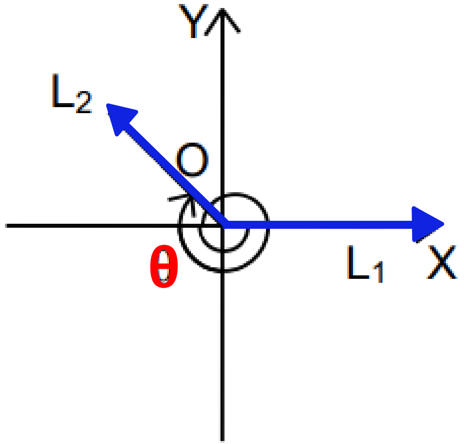


https://openstax.

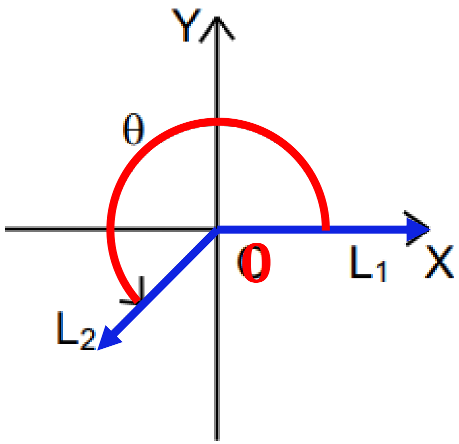
Ejemplos: Ángulos en **posición estándar**.



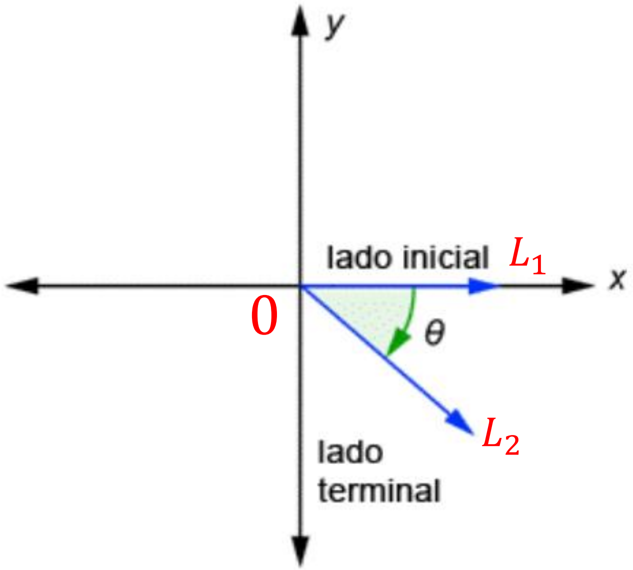
ÁNGULO POSITIVO EN
EL PRIMER CUADRANTE



UN ÁNGULO NEGATIVO
DEL SEGUNDO CUADRANTE



UN ÁNGULO POSITIVO
DEL TERCER CUADRANTE



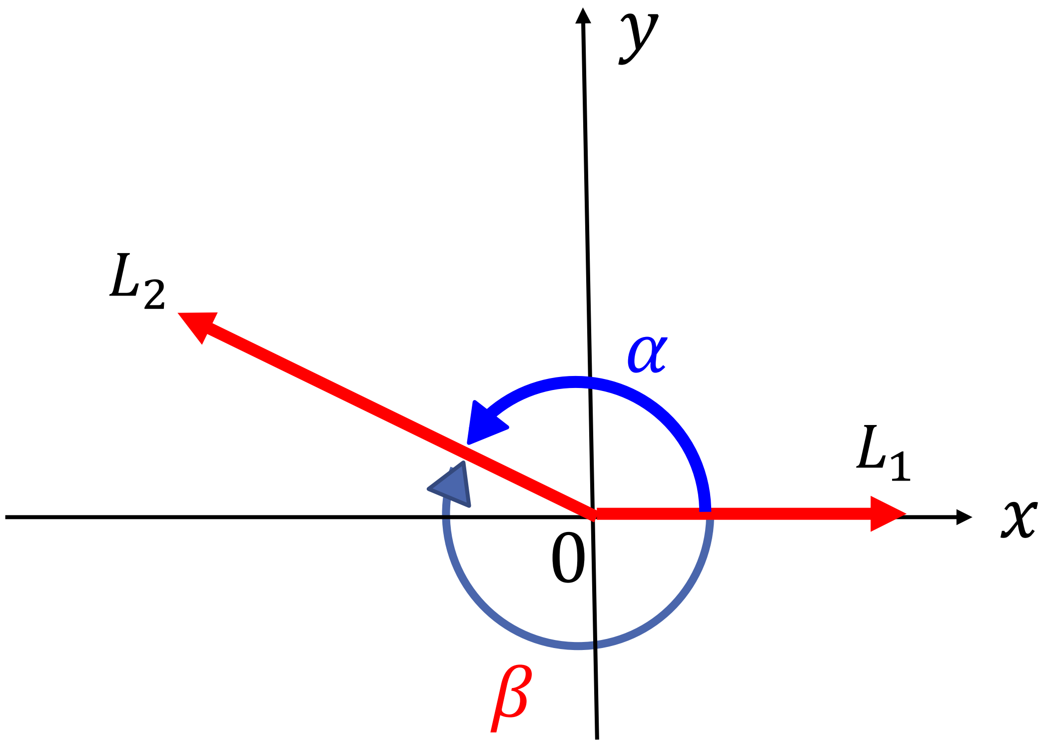
ÁNGULO NEGATIVO EN
EL CUARTO CUADRANTE

Referencia: http://algebrafi.emiweb.es/medias/files/trigonometria-teoria-ejercicios.pdf

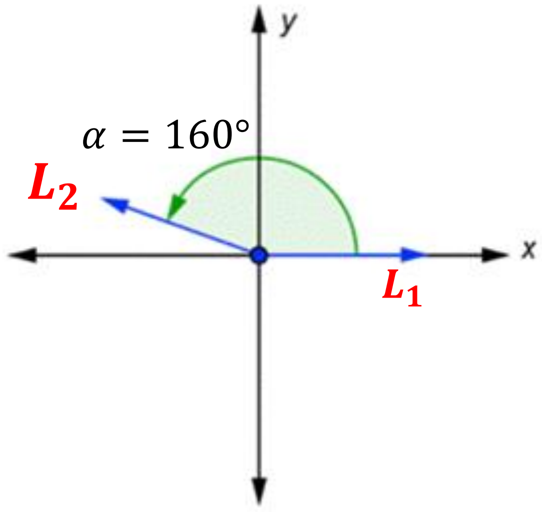
ÁNGULOS COTERMINALES

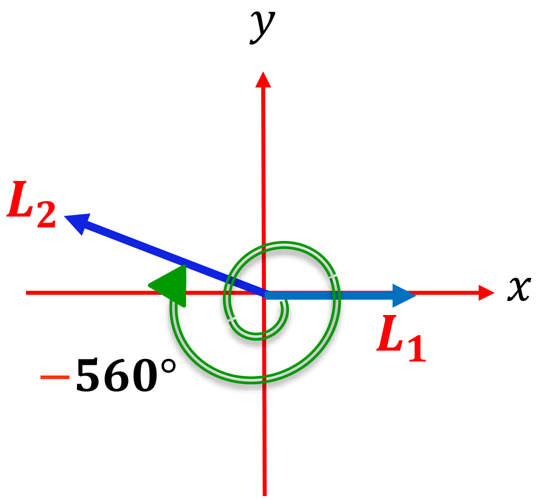
Existen muchos ángulos diferentes que tiene *los mismos lados* inicial $\boldsymbol{L_1}$ y terminal $\boldsymbol{L_2}$**, a estos ángulos se les** llama ***ángulos coterminales***. Si θ es un ángulo cualquiera en posición estándar expresado en radianes y k es un número entero, entonces:

$\boldsymbol{\theta \;\; y \;\; \theta + k(360°)}$ $[\theta \text{ y } \theta + 2k\pi]$ son ángulos coterminales



Ejemplo 1: $160° \ y \ -560°$

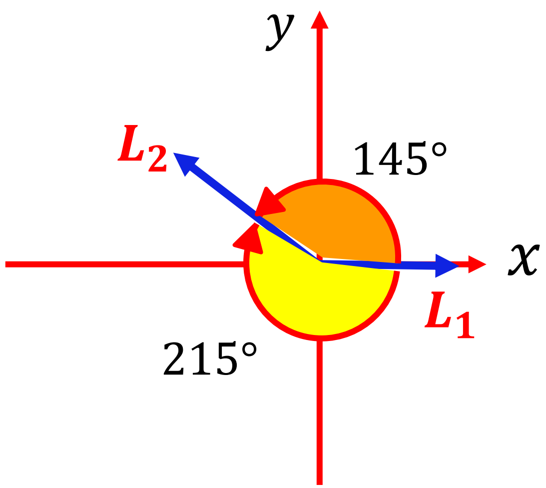




Por tanto: $\theta_1 = 160° \ y \ \theta_2 = -560°$ son ángulos coterminales

Ambos ángulos tiene los mismos lados inicial L_1 y terminal L_2.

Ejemplo 2: $145° \ y \ -215°$



Ambos ángulos tiene los mismos lados inicial L_1 y terminal L_2.

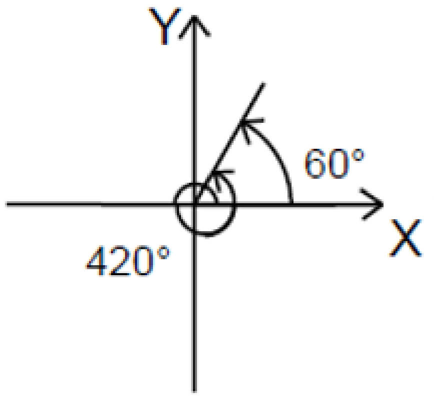
Por tanto: Los ángulos $145° \ y \ 215°$ son coterminales

Ángulos "COTERMINALES"

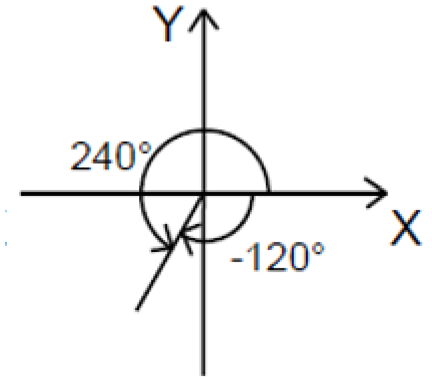
Ejemplo: Dibujar los siguientes ángulos en posición estándar y calcular el ángulo comprendido entre $0°$ y $360°$ coterminal con cada uno.

$a)\ 420°$ b) $-120°$ c) $900°$ d) $-585°$

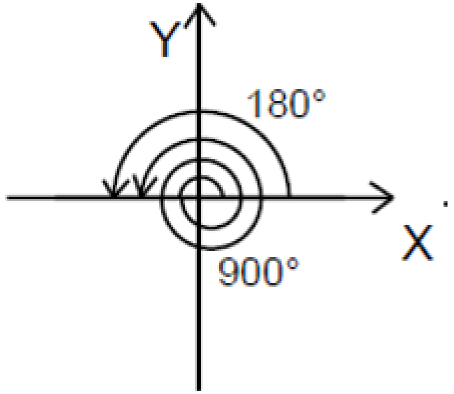
Solución:



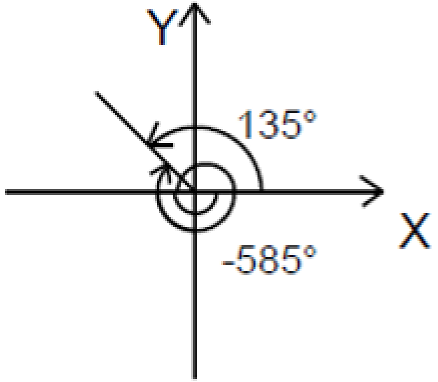
$60°\ \mathit{coterminal\ con}\ 420°$



$240°\ \mathit{coterminal\ con}\ -120°$



$180°\ \mathit{coterminal\ con}\ 900°$



$135°\ \mathit{coterminal\ con}\ -585°$

ÁNGULO DE RFERENCIA

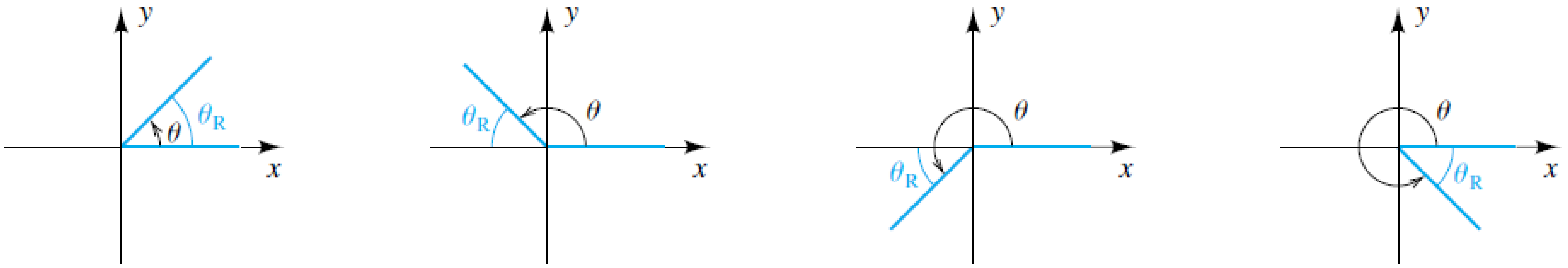
Definición de ángulo de referencia

Sea θ un ángulo no cuadrantal en posición estándar. El **ángulo de referencia** para θ es el ángulo agudo θ_R que el lado terminal de θ forma con el eje x.

La figura 1 ilustra el ángulo de referencia θ_R para un ángulo no cuadrantal θ, con $0° < \theta < 360°$ o $0 < \theta < 2\pi$, en cada uno de los cuatro cuadrantes.

FIGURA 1 Ángulos de referencia

(a) Primer cuadrante **(b)** Segundo cuadrante **(c)** Tercer cuadrante **(d)** Cuarto cuadrante



(a) $\theta_R = \theta$

(b) $\theta_R = 180° - \theta$
$= \pi - \theta$

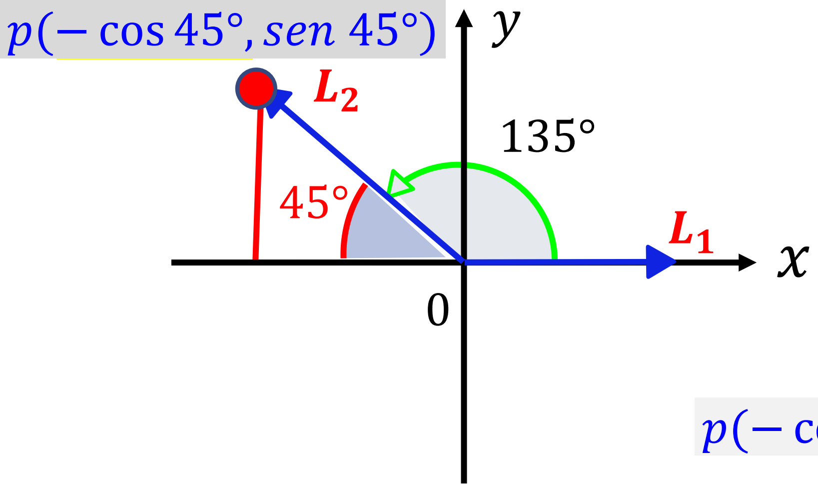
(c) $\theta_R = \theta - 180°$
$= \theta - \pi$

(d) $\theta_R = 360° - \theta$
$= 2\pi - \theta$

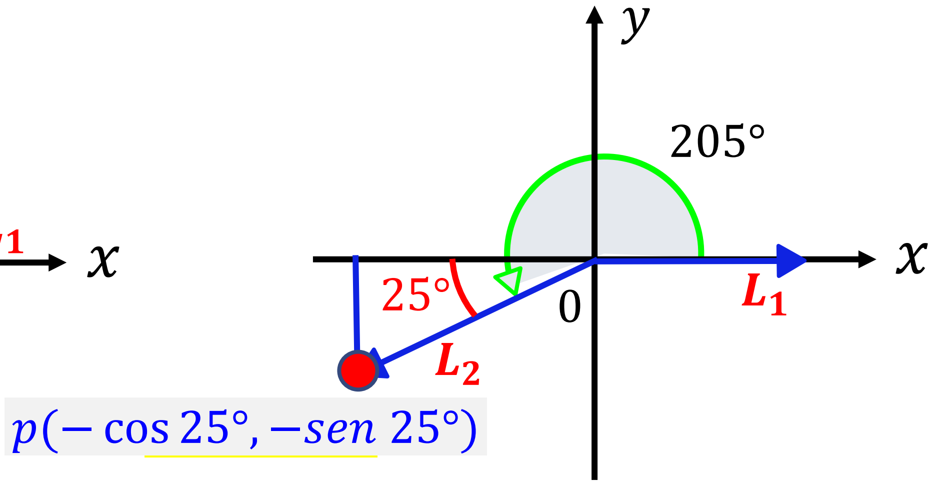
ÁNGULO DE REFERENCIA

Ejemplos:

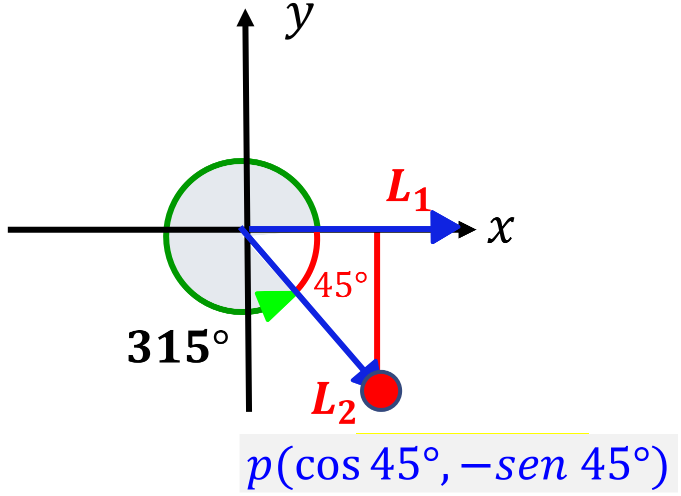
Para $\mathbf{135°}$



Para $\mathbf{205°}$



Para $\mathbf{315°}$



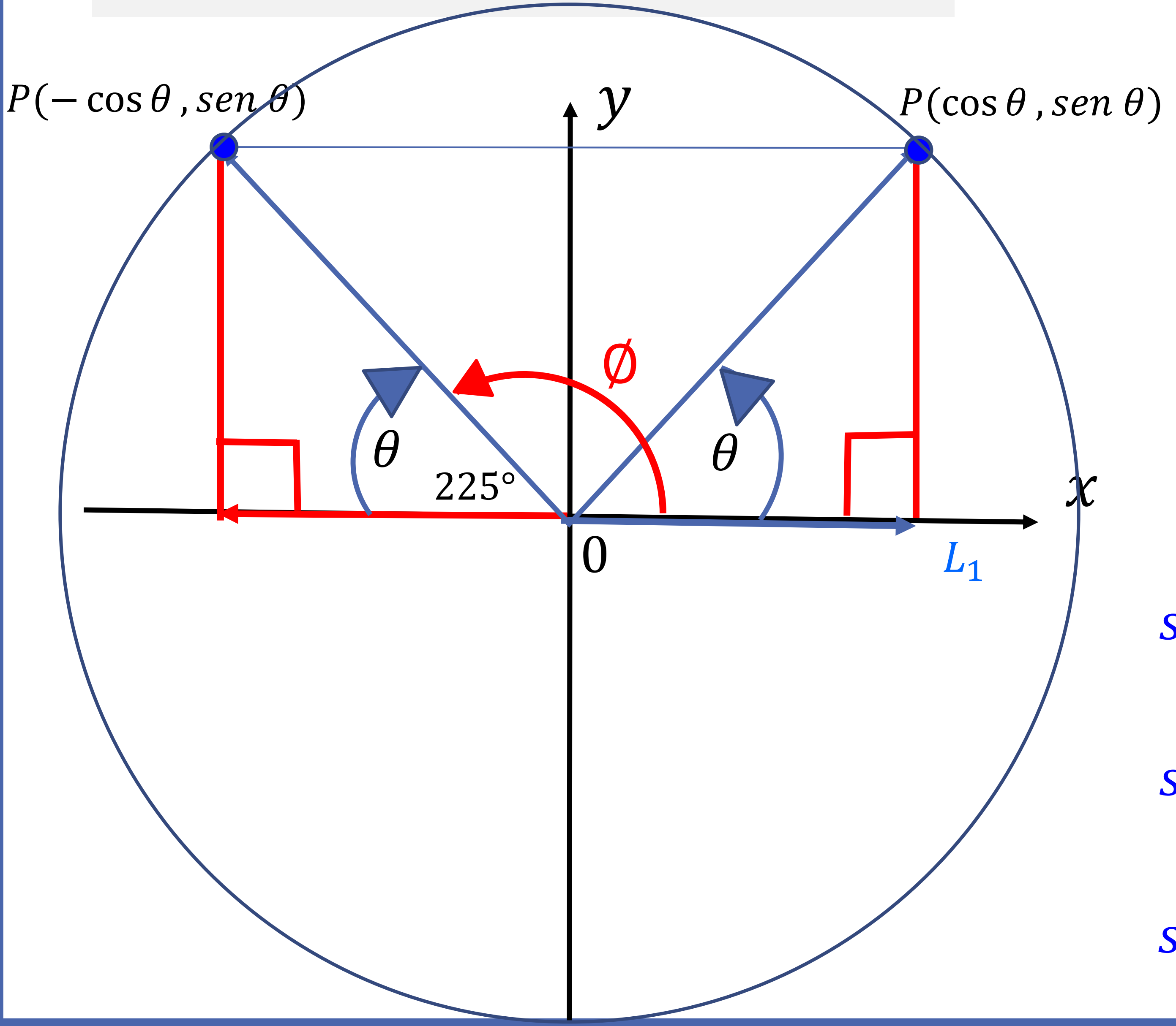
Ángulo de referencia es: $\theta = 45°$
En el segundo cuadrante

Ángulo de referencia es : $\theta = 25°$
En el tercer cuadrante

Ángulo de referencia es: $\theta = 45°$
En el cuarto cuadrante

Referencia: https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-15-19_RESOURCE/U19_L1_T3_text_final_es.html

ÁNGULO DE REFERENCIA



$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$sen\ 150° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ 135° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 120° = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio:

Determine el valor del seno y el coseno de los ángulos.

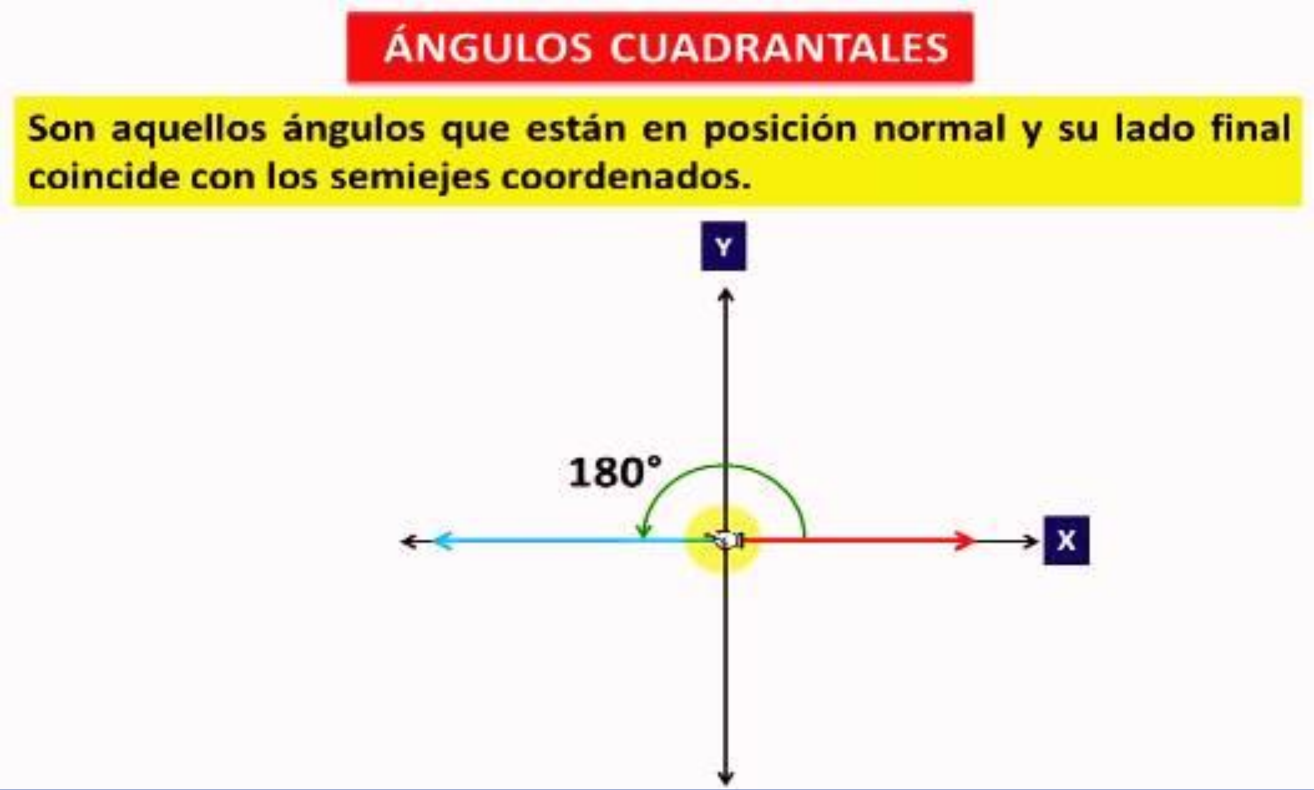
$a)\ 300°$ $\quad b)\ 1845°$ $\quad c)\ -1230°$ $\quad d)\ -240°$ $\quad e)\ -45°$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS CUADRANTALES

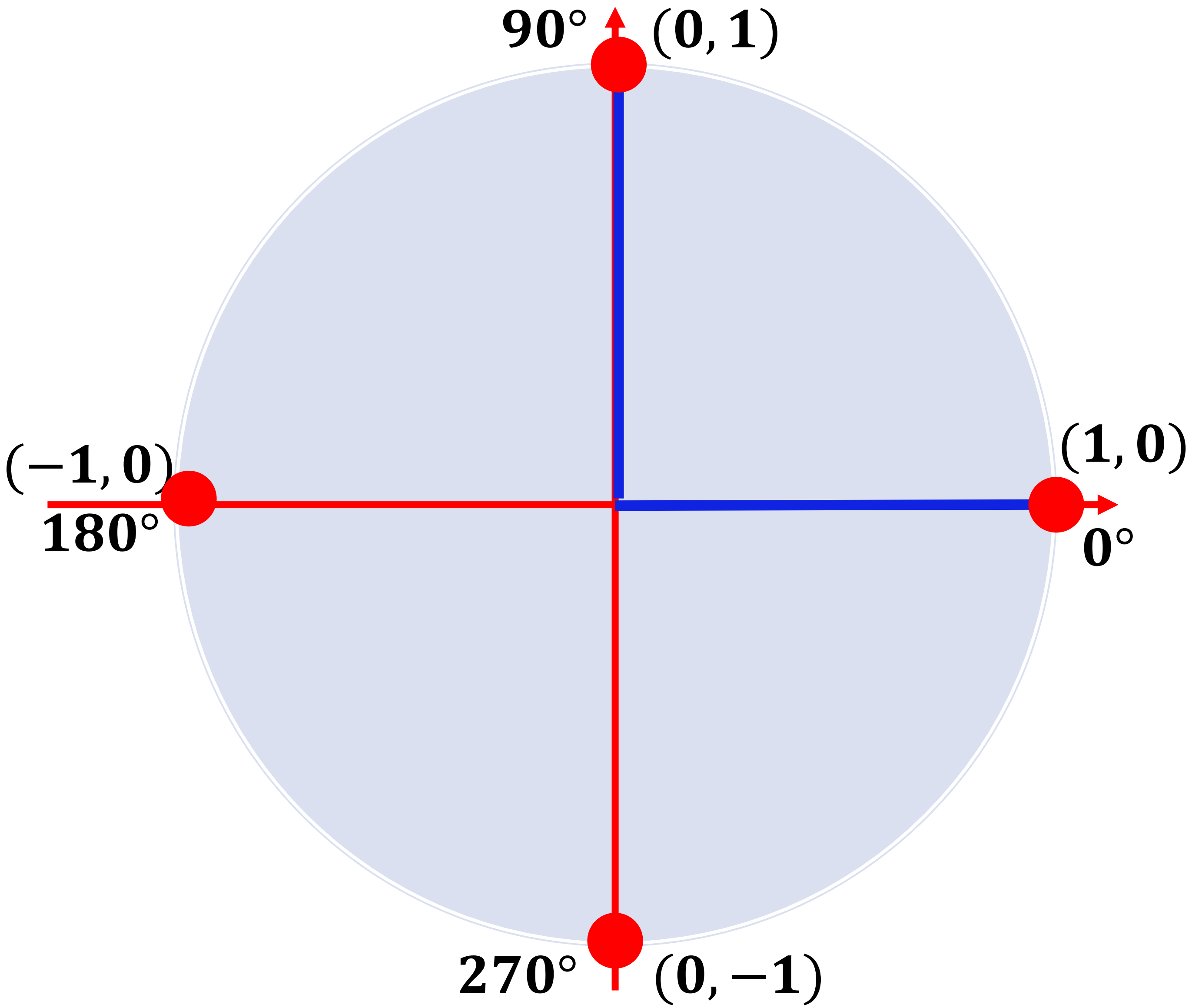
Ángulos Cuadrantales

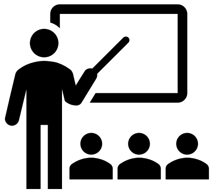
Entenderemos por ángulo cuadrantal a aquel ángulo en posición normal cuyo lado final coincide con cualquier semieje del plano cartesiano.

La medida de este ángulo siempre tendrá la forma "$n \cdot 90°$" ó "$n \cdot \frac{\pi}{2}$"



Ángulo de 90° y sus múltiplos (0°, 180° y 270°)





RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS CUADRANTALES

$\measuredangle$	$0°, 360°$	$90°$	$180°$	$270°$
RAZÓN TRIGONOMÉTRICA	$0;\ \ 2\pi$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sen	0	1	0	-1
$\cos$	1	0	-1	0
$\tan$	0	$No\ Definido$	0	$No\ Definido$
$\cot$	$No\ Definido$	0	$No\ Definido$	0
$\sec$	1	$No\ Definido$	-1	$No\ Definido$
$\csc$	$No\ Definido$	1	$No\ Definido$	-1

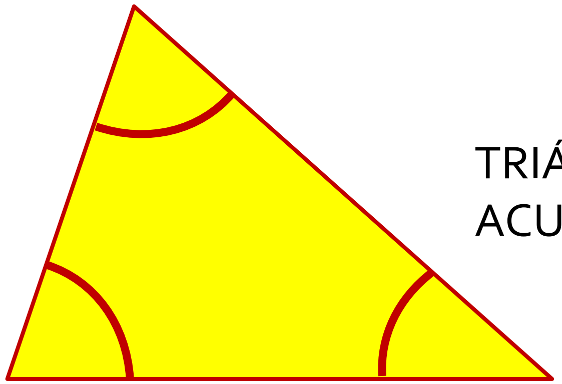
LEY DE SENOS

Y

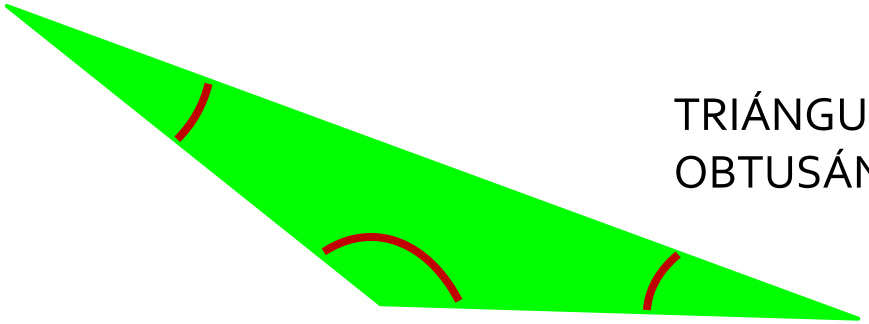
LEY DE COSENOS

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un ***triángulo oblicuángulo*** es aquel que ***no*** contiene ángulo recto. En este tipo de triángulos, los tres ángulos son agudos, o bien, dos de sus ángulos son agudos y el tercero es un ángulo obtuso.



TRIÁNGULO ACUTÁNGULO



TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

Los datos que determinan un triángulo oblicuángulo pueden darse de una de las tres maneras siguientes:

1. Dando sus tres lados
2. Dando dos ángulos y un lado
3. Dando dos lados y un ángulo

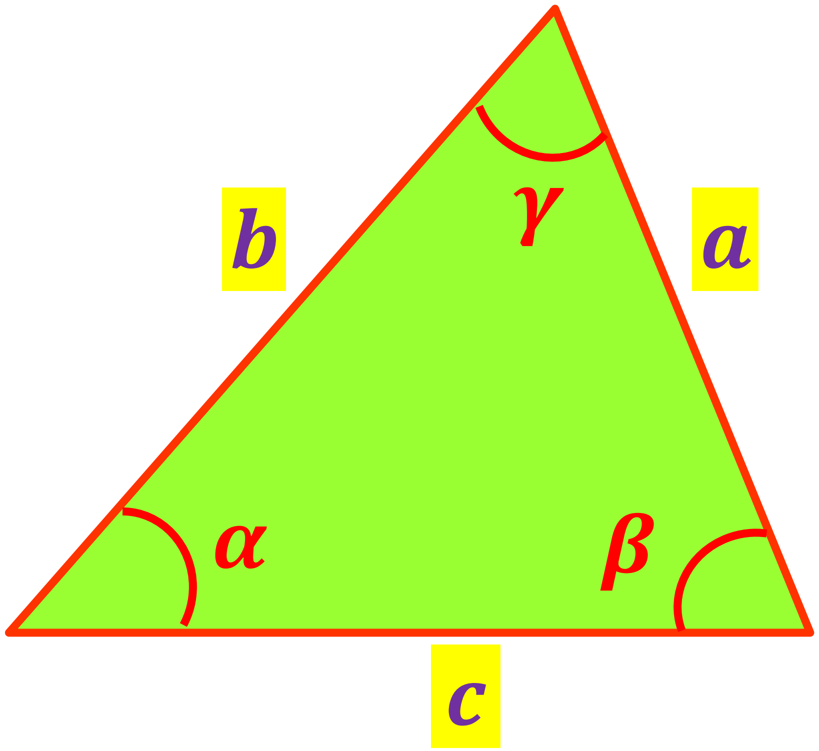
Para resolver este tipo de triángulos se usan, dependiendo de los datos, la ley de los senos y de los cosenos.

LEY DE SENOS

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

O también se puede escribir como:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$



LEY DE COSENOS

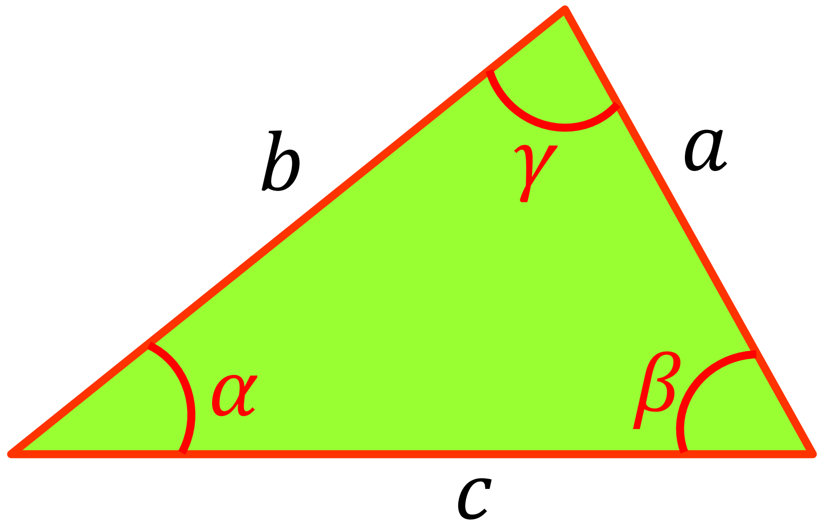
Es conveniente señalar lo siguiente:

- **La ley de los senos:** Es aplicable directamente cuando se conoce, de un triángulo oblicuángulo, *dos_lados y el ángulo opuesto a uno de ellos*, o cuando se conocen *dos ángulos y un lado*.
- **La ley de los coseno:** es aplicable directamente cuando se conoce, de un triángulo oblicuángulo, *dos lados y el ángulo comprendido entre ellos*, o cuando se conocen *los tres lados*.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



EJEMPLOS

Ejemplo 7.1

Para el triángulo ABC dado en la figura, calcular las partes restantes, si:

a) $\alpha = 41°$, $\gamma = 77°$ y $a = 10.5$ m

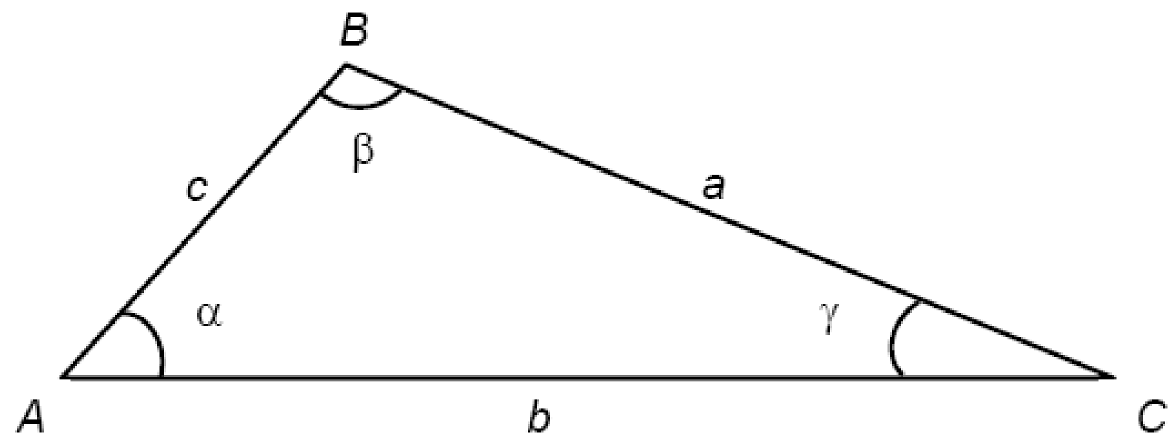
b) $\beta = 20°$, $\gamma = 31°$ y $b = 210$ m

c) $\gamma = 81°$, $c = 11$ m y $b = 12$ m

d) $\alpha = 60°$, $b = 20$ m y $c = 30$ m

e) $\beta = 150°$, $a = 150$ M y $c = 30$ m

f) $a = 10$ m , $b = 15$ m y $c = 12$ m



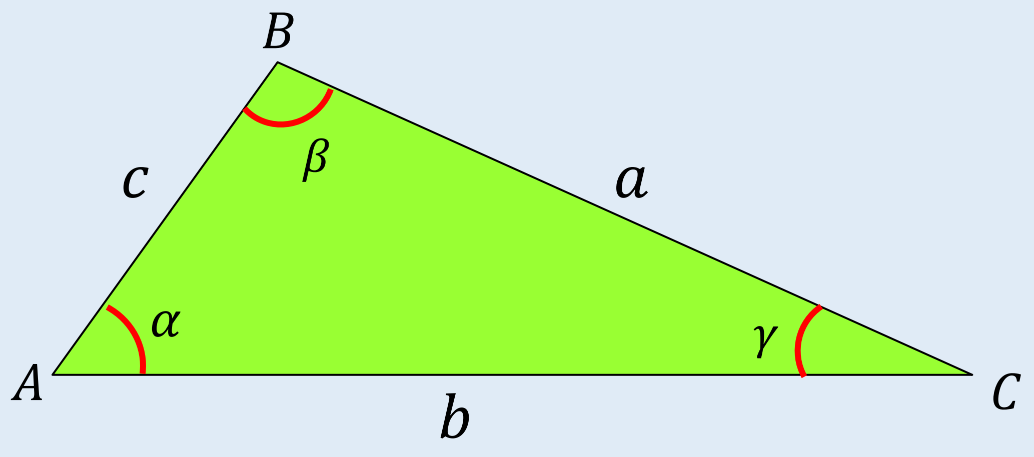
$a)\quad Datos:\quad \alpha = 41°, \gamma = 77°\ y\ a = 10.5\ m$

Solución:

$$Como\ \alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma$$

$$\beta = 180° - 41° - 77°$$

$$\therefore\ \beta = 62°$$



Al aplicar la ley de los senos, se tiene:

$$\frac{b}{sen\ 62°} = \frac{10.5}{sen\ 41°} \Rightarrow b = \frac{10.5\ \ sen\ 62°}{sen\ 41°}$$

$$\therefore\ b = 14.13\ \ m$$

Por otro lado:

$$\frac{c}{sen\ 77°} = \frac{14.13}{sen\ 62°} \Rightarrow c = \frac{14.13\ \ sen\ 77°}{sen\ 62°}$$

$$\therefore\ c = 15.59\ \ m$$

Finalmente:

$a = 10.5\ m$	$\alpha = 41°$
$b = 14.13\ \ m$	$\beta = 62°$
$c = 15.59\ \ m$	$\gamma = 77°$