Métodos Numéricos

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

23 de Octubre de 2015

Clase de hoy

- Interpolación por polinomios
  - Polinomio interpolador de Lagrange
  - Interpolación fragmentaria
    - Splines
- Presentación TP3

Repaso

Interpolación

Dados puntos (x_i, y_i) en $\mathbb{R}^2$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
Quiero una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \ldots$

Interpolación polinómica

$f \in \mathbb{R}[X]$, es decir: $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$

Repaso

Interpolación

Dados puntos (x_i, y_i) en $\mathbb{R}^2$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
Quiero una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \ldots$

Interpolación polinómica

$f \in \mathbb{R}[X]$, es decir: $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$

Repaso

Interpolación

Dados puntos (x_i, y_i) en $\mathbb{R}^2$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
Quiero una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \ldots$

Interpolación polinómica

$f \in \mathbb{R}[X]$, es decir: $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$

Repaso

Polinomio Interpolador de Lagrange

Propiedad

Dados $n+1$ puntos (x_i, y_i) en $\mathbb{R}^2$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
Existe un único polinomio P de grado menor o igual a n tal que
$P(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \ldots, n$

Polinomio de Lagrange

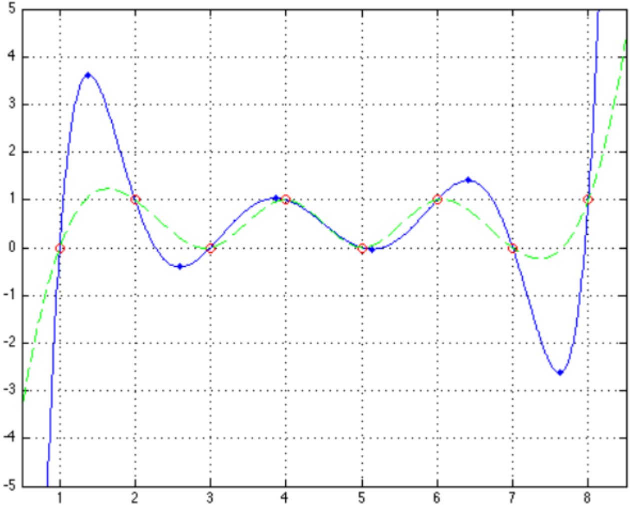
$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad k = 0, \ldots, n$$

Vale que el grado de L_k es a lo sumo n y además $L_k(x_j) = 1$ si $j = k$, y 0 si $j \neq k$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Ver que verifica que el grado es menor o igual a n y que $P(x_i) = y_i$

Polinomio de Lagrange versus splines



Splines

El polinomio interpolador es demasiado sensible a errores y tiende a oscilar mucho al aumentar la cantidad de puntos.

Interpolación fragmentaria

- Lineal: "uno los puntos con rectas".
- Cuadrática: ajusto una función cuadrática entre pares de puntos consecutivos.
- Cúbica: ajusto una función cúbica entre puntos consecutivos.

Splines

- Interpolación fragmentaria usando trazadores cúbicos o splines.
- Función partida compuesta por polinomios de grado a lo sumo 3.
- Verifica continuidad y dos veces derivable.

Splines

El polinomio interpolador es demasiado sensible a errores y tiende a oscilar mucho al aumentar la cantidad de puntos.

Interpolación fragmentaria

- Lineal: "uno los puntos con rectas".
- Cuadrática: ajusto una función cuadrática entre pares de puntos consecutivos.
- Cúbica: ajusto una función cúbica entre puntos consecutivos.

Splines

- Interpolación fragmentaria usando trazadores cúbicos o splines.
- Función partida compuesta por polinomios de grado a lo sumo 3.
- Verifica continuidad y dos veces derivable.

Splines

El polinomio interpolador es demasiado sensible a errores y tiende a oscilar mucho al aumentar la cantidad de puntos.

Interpolación fragmentaria

- Lineal: “uno los puntos con rectas”.
- Cuadrática: ajusto una función cuadrática entre pares de puntos consecutivos.
- Cúbica: ajusto una función cúbica entre puntos consecutivos.

Splines

- Interpolación fragmentaria usando trazadores cúbicos o splines.
- Función partida compuesta por polinomios de grado a lo sumo 3.
- Verifica continuidad y dos veces derivable.

Dados $n+1$ puntos a interpolar, se construyen n splines S_i con $0 \leq i \leq n-1$ tales que verifiquen:

- $S_i(x_i) = y_i \wedge S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad 0 \leq i \leq n-1$
- $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i) \qquad 0 \leq i \leq n-2$
- $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i) \qquad 0 \leq i \leq n-2$

Todo esto determina $2n + 2 * (n-1) = 4n - 2$ restricciones para obterner n splines. Cada spline está formado por 4 incógnitas:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Se necesitan $4n$ restricciones linealmente independientes para obtener una solución única para las $4n$ incógnitas. Se agregan entonces dos condiciones de borde para asegurar unicidad.

Puede optarse (entre otras) por cualquiera de las dos siguientes:

- Spline natural, derivada segunda nula en los bordes: $S_0''(x_0) = 0 \wedge S_{n-1}''(x_n) = 0$
- Spline sujeto a la función interpoladora f: derivada primera igual a la de f en los bordes. $S_0'(x_0) = f'(x_0) \wedge S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

Aplicación

Hacer cámara lenta en un video. Sí, ahora viene el ejemplo.

Aplicación

Hacer cámara lenta en un video. Sí, ahora viene el ejemplo.

Aplicación

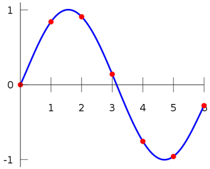
Hacer cámara lenta en un video. Sí, ahora viene el ejemplo.

- Todo muy lindo pero

Aplicación

Hacer cámara lenta en un video. Sí, ahora viene el ejemplo.

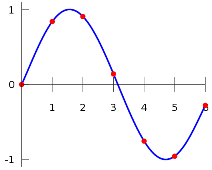
- Todo muy lindo pero ¿cómo paso de esto

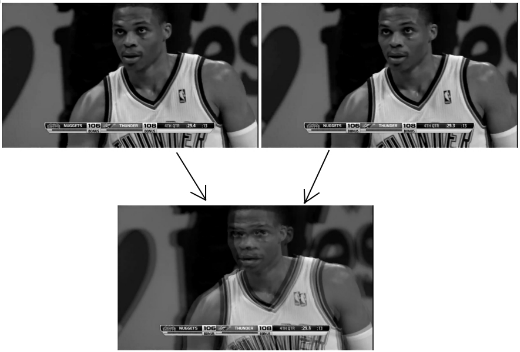


Aplicación

Hacer cámara lenta en un video. Sí, ahora viene el ejemplo.

- Todo muy lindo pero ¿cómo paso de esto a esto?



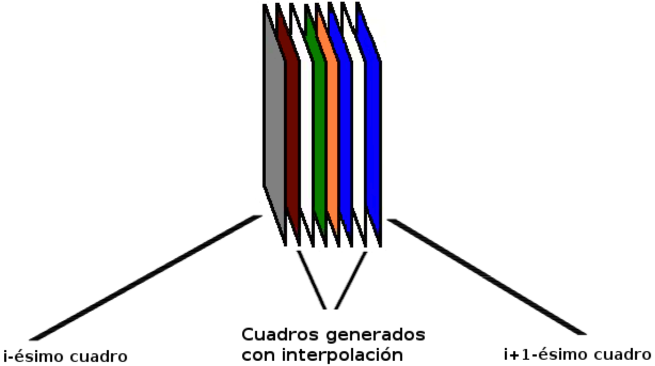


Interpolando imágenes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(1,1,i) & f(1,2,i) & \dots & f(1,n,i) \\ f(2,1,i) & f(2,2,i) & \dots & f(2,n,i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,1,i) & f(m,2,i) & \dots & f(m,n,i) \end{pmatrix}}_{i\text{-ésimo cuadro}} \underbrace{\begin{pmatrix} f(1,1,i+1) & f(1,2,i+1) & \dots & f(1,n,i+1) \\ f(2,1,i+1) & f(2,2,i+1) & \dots & f(2,n,i+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,1,i+1) & f(m,2,i+1) & \dots & f(m,n,i+1) \end{pmatrix}}_{i+1\text{-ésimo cuadro}}$$

Interpolando imágenes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(1,1,i) & f(1,2,i) & \dots & f(1,n,i) \\ f(2,1,i) & f(2,2,i) & \dots & f(2,n,i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,1,i) & f(m,2,i) & \dots & f(m,n,i) \end{pmatrix}}_{i\text{-ésimo cuadro}} \underbrace{\begin{pmatrix} f(1,1,i+1) & f(1,2,i+1) & \dots & f(1,n,i+1) \\ f(2,1,i+1) & f(2,2,i+1) & \dots & f(2,n,i+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,1,i+1) & f(m,2,i+1) & \dots & f(m,n,i+1) \end{pmatrix}}_{i+1\text{-ésimo cuadro}}$$



Métodos de interpolación en el TP

- Utilizar una copia del cuadro más cercano
- Hacer interpolación lineal entre los cuadros posición a posición
- Calcular splines cúbicos posición a posición y obtener el valor intermedio según el spline

Métodos de interpolación en el TP

- Utilizar una copia del cuadro más cercano
- Hacer interpolación lineal entre los cuadros posición a posición
- Calcular splines cúbicos posición a posición y obtener el valor intermedio según el spline

Métodos de interpolación en el TP

- Utilizar una copia del cuadro más cercano
- Hacer interpolación lineal entre los cuadros posición a posición
- Calcular splines cúbicos posición a posición y obtener el valor intermedio según el spline

Métodos de interpolación en el TP

- Utilizar una copia del cuadro más cercano
- Hacer interpolación lineal entre los cuadros posición a posición
- Calcular splines cúbicos posición a posición y obtener el valor intermedio según el spline

Sobre Métricas y Experimentación

Una vez que generamos la secuencia, ¿cómo sabemos si dio bien?

El PSNR se define como:

$$\mathtt{PSNR} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\mathtt{MAX}_u^2}{\mathtt{ECM}}\right)$$

donde $\mathtt{MAX}_u$ define el rango máximo de la imagen (para nuestro caso sería 255) y $\mathtt{ECM}$ es el *error cuadrático medio*, definido como:

$$\frac{1}{N}\sum_{i,j}(u_{ij}^0 - u_{ij})^2$$

donde N es la cantidad de píxeles de la imagen, u^0 es la imagen *ideal* y u es la imagen que construímos.

Esta métrica necesita de una imagen ideal entonces podemos utilizar un video, quitar algunos cuadros, generarlos con las técnicas y considerar como frames ideales a aquellos originales.

Sobre Métricas y Experimentación

Una vez que generamos la secuencia, ¿cómo sabemos si dio bien?

El PSNR se define como:

$$\mathtt{PSNR} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\mathtt{MAX}_u^2}{\mathtt{ECM}}\right)$$

donde $\mathtt{MAX}_u$ define el rango máximo de la imagen (para nuestro caso sería 255) y $\mathtt{ECM}$ es el *error cuadrático medio*, definido como:

$$\frac{1}{N}\sum_{i,j}(u_{ij}^0 - u_{ij})^2$$

donde N es la cantidad de píxeles de la imagen, u^0 es la imagen *ideal* y u es la imagen que construímos.

Esta métrica necesita de una imagen ideal entonces podemos utilizar un video, quitar algunos cuadros, generarlos con las técnicas y considerar como frames ideales a aquellos originales.

Sobre Métricas y Experimentación

Una vez que generamos la secuencia, ¿cómo sabemos si dio bien?

El PSNR se define como:

$$\mathtt{PSNR} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\mathtt{MAX}_u^2}{\mathtt{ECM}} \right)$$

donde $\mathtt{MAX}_u$ define el rango máximo de la imagen (para nuestro caso sería 255) y $\mathtt{ECM}$ es el *error cuadrático medio*, definido como:

$$\frac{1}{N} \sum_{i,j} (u_{ij}^0 - u_{ij})^2$$

donde N es la cantidad de píxeles de la imagen, u^0 es la imagen *ideal* y u es la imagen que construímos.

Esta métrica necesita de una imagen ideal entonces podemos utilizar un video, quitar algunos cuadros, generarlos con las técnicas y considerar como frames ideales a aquellos originales.

Observaciones

- Pensar cómo aplicar los métodos en el contexto propuesto (i.e., en los métodos que vimos: ¿qué vecino?, ¿cómo interpolo?, ¿cuántos cuadros uso para interpolar?)
- ¿Influirá en el resultado si hay movimientos de cámara bruscos? ¿Y cambios de cámara?
- Plantear, describir y realizar de forma adecuada todos los experimentos que consideren pertinentes
- Tiene que ser posible replicar experimentos
- Apéndice donde justifiquen cómo evaluaron la correctitud de toda la implementación
- Analizar artifacts ¿¿artifacts??

Observaciones

- Pensar cómo aplicar los métodos en el contexto propuesto (i.e., en los métodos que vimos: ¿qué vecino?, ¿cómo interpolo?, ¿cuántos cuadros uso para interpolar?)
- ¿Influirá en el resultado si hay movimientos de cámara bruscos? ¿Y cambios de cámara?
- Plantear, describir y realizar de forma adecuada todos los experimentos que consideren pertinentes
- Tiene que ser posible replicar experimentos
- Apéndice donde justifiquen cómo evaluaron la correctitud de toda la implementación
- Analizar artifacts ¿¿artifacts??

Observaciones

- Artifacts: Errores visuales resultantes de la aplicación de un método o técnica.
- Los televisores de LCD, para generar movimientos más fluídos, generan cuadros interpolando los que reciben de la señal. Sin embargo, esto puede producir algunos problemas:

Observaciones

- Artifacts: Errores visuales resultantes de la aplicación de un método o técnica.
- Los televisores de LCD, para generar movimientos más fluídos, generan cuadros interpolando los que reciben de la señal. Sin embargo, esto puede producir algunos problemas:

FIN