

Преобразование логических выражений.
Тождественная истинность/ложность

№	Закон	Представление в алгебре логики
1	Переместительный (коммутативный)	$A \vee B = B \vee A; A \wedge B = B \wedge A$
2	Сочетательный (ассоциативный)	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C);$ $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
3	Распределительный (дистрибутивный)	$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C;$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
4	Законы де Моргана	$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B; \neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
5	Закон двойного отрицания (инволюции)	$\neg (\neg A) = A$
6	Операции с переменной и ее инверсией	$A \wedge \neg A = 0; A \vee \neg A = 1$
7	Свойства операций конъюнкции и дизъюнкции	$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1; A \wedge 0 = 0;$ $A \wedge 1 = A; 0 \rightarrow A = 1$
8	Законы идемпотентности	$A \vee A = A; A \wedge A = A$
9	Законы поглощения	$A \vee (A \wedge B) = A; A \wedge (A \vee B) = A$

1. Для какого наибольшего целого числа A формула
 $((x \leq 11) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y < A) \rightarrow (y \leq 12))$
тождественно истинна?
2. Для какого наибольшего целого числа A формула
 $((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 15)) \wedge ((x \leq 3) \rightarrow (x \cdot x < A))$
тождественно истинна?
3. Для какого наибольшего целого числа A формула
 $((y \cdot y < A) \rightarrow (y < 16)) \wedge ((x \leq 13) \rightarrow (x \cdot x < A))$
тождественно истинна?

Ответ: 169, 255, 256

4. Сколько существует целых значений A , при которых формула

$$\neg ((x > 10) \vee (x \cdot x < A)) \vee \neg ((y \cdot y \geq A) \vee (y \leq 10))$$

тождественно ложна?

5. Сколько существует целых значений A , при которых формула

$$\neg (((x \geq 7) \vee (x \cdot x < A)) \wedge ((y \cdot y > A) \vee (y \leq 7)))$$

тождественно ложна?

6. Сколько существует целых значений A , при которых формула

$$\neg ((x \geq A) \vee (x \cdot x < 100)) \vee ((y \cdot y \leq 10) \wedge (y > A))$$

тождественно ложна?

Ответ: 21, 27, 8

7. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$$

истинно при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

8. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$$

истинно при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества A .

9. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$$

истинно при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A .

Ответ: 18, 640, 12

10. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in \{1, 2, 3, 4\}) \vee \neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$$

истинно при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное количество элементов множества A .

11. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in \{1, 12\}) \wedge \neg(x \in \{12, 13, 14, 15, 16\}))$$

истинно при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное количество элементов множества A .

12. Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow \neg((x \in \{1, 2, 4, 8\}) \vee (x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$$

истинно при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное количество элементов множества A .

Ответ: 4, 6, 7

13. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [25, 50]$ и $Q = [32, 47]$. Отрезок A таков, что формула

$$(\neg (x \in A) \rightarrow \neg (x \in P)) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна. Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

14. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [25, 37]$ и $Q = [32, 47]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg (x \in P)) \rightarrow (\neg (x \in P) \wedge (x \in Q))$$

тождественно истинна. Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

15. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [25, 37]$ и $Q = [32, 50]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg (x \in Q)) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно истинна. Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

Ответ: 15, 22, 25

16. Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула $(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 14)$

тождественно истинна?

17. Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула $(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 15)) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, 18) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 15))$

тождественно истинна?

18. Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула $\text{ДЕЛ}(x, 18) \rightarrow (\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 12))$

тождественно истинна?

Ответ: 42, 90, 36

19. Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(x, 18) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 54) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A))$$

тождественно истинна?

20. Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \neg \text{ДЕЛ}(x, 6)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 3)$$

тождественно истинна?

21. Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 21)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, 14)$$

тождественно истинна?

Ответ: 54, 3, 21

22. Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& 56 \neq 0) \rightarrow ((X \& 48 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно?

23. Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& 35 \neq 0) \rightarrow ((X \& 31 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно?

24. Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& 76 \neq 0) \rightarrow ((X \& 10 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно?

Ответ: 8, 32, 68

25. Определите наибольшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 44 = 0) \rightarrow (X \& 76 \neq 0))$$

тождественно истинно?

26. Определите наибольшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 29 = 0) \rightarrow (X \& 86 \neq 0))$$

тождественно истинно?

27. Определите наибольшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& A \neq 0) \rightarrow ((X \& 14 = 0) \rightarrow (X \& 75 \neq 0))$$

тождественно истинно?

Ответ: 108, 95, 79