

## Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

MIEI - UMinho

Trabalho 1 (data de entrega: 13 outubro)

O método do caminho crítico, designado na literatura anglo-saxónica por *critical path method*, constitui uma ferramenta muito importante em gestão de projectos. O método do caminho crítico é aplicado a projectos que podem ser decompostos num conjunto de actividades, que se considera terem durações determinísticas, entre as quais existem relações de precedência.

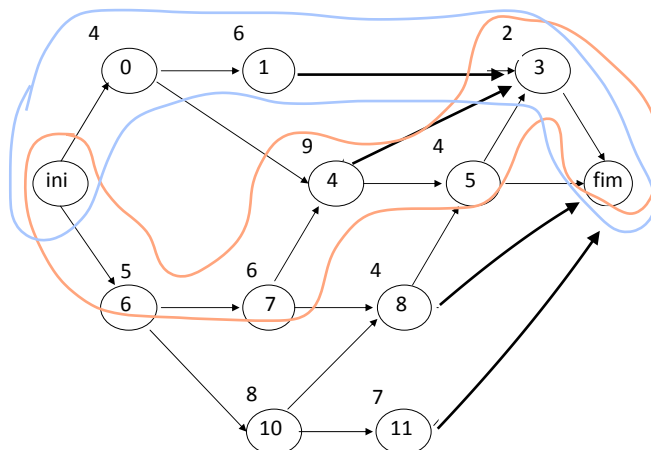
Todas as actividades têm de ser realizadas. As restrições de precedência traduzem o facto de o instante em que se pode dar início a uma dada actividade ter de ser posterior aos instantes em que terminam as actividades que lhe são precedentes.

Considere um projecto com as actividades e as relações de precedência a seguir indicadas:

Actividade	Duração	Precedências
0	4	–
1	6	0
2	7	1,4
3	2	2,5
4	9	0,7
5	4	4,8
6	5	–
7	6	6
8	4	7,10
9	2	8,11
10	8	6
11	7	10

No método do caminho crítico, a rede que representa o projecto pode ser representada de duas formas alternativas: uma, em que as actividades do projecto são representadas por arcos do grafo, e a outra, em que são representadas por nós. Neste trabalho, vamos considerar a segunda representação. O grafo associado a este projecto é:

Caminho Crítico:  
I67453f  
Caminho mais curto:  
I013f




O caminho crítico corresponde ao caminho mais longo entre o vértice que define o início do projecto e o vértice que define o fim do projecto. Como as precedências têm de ser respeitadas, é o caminho mais longo que determina a duração mínima necessária para completar a execução de todo o projecto. No problema em análise, o caminho crítico corresponde às actividades 6, 7, 4, 2 e 3, com uma duração de 29 unidades de tempo.

As actividades pertencentes ao caminho mais longo (que pode não ser único) são críticas, porque qualquer atraso verificado numa delas dá origem inevitavelmente a um atraso no tempo de execução do projecto. Assim, estas actividades são as que devem ser seguidas e controladas mais de perto.

*Neste trabalho, cada grupo deverá considerar um problema em que alguma actividades são eliminadas do projecto, da forma indicada no fim do texto do enunciado, na secção Determinação da lista de actividades, sendo portanto as redes diferentes consoante os grupos.*

## **PARTE I**

O problema de caminho mais longo entre um vértice  $s$  e um vértice  $t$  de um grafo acíclico (sem ciclos) pode ser formulado como um problema de programação linear utilizando variáveis de decisão  $x_{ij}$  associadas a cada arco do grafo. Estas variáveis tomam o valor 1, se o arco fizer parte do caminho mais longo, e o valor 0, caso contrário. O problema pode ser entendido como um modelo em que se injecta na rede, a partir do vértice  $s$ , uma unidade de fluxo que segue pelo caminho mais longo até atingir o vértice  $t$ .

- 
1. Apresente a rede que representa o projecto, depois de eliminar as actividades indicadas na secção "Determinação da lista de actividades", no final do texto.
  2. Apresente um modelo para o problema de caminho mais longo na rede que define o projecto usando as variáveis de decisão acima referidas. Identifique claramente o significado das restrições e da função objectivo do problema. Teça comentários sobre o desenvolvimento do modelo e a sua validação (ver informação no Anexo).
  3. Apresente o ficheiro de input (*cut-and-paste*).
  4. Apresente o output produzido pelo programa (*cut-and-paste*).
  5. Apresente a rede do projecto com indicação do caminho crítico.

## **PARTE II**

Existe outro modelo de programação matemática para este problema em que cada variável de decisão  $t_i, \forall i$ , representa o tempo de início da actividade  $i$  e em que o objectivo é minimizar o tempo de execução total do projecto obedecendo a todas as precedências.

1. Apresente um modelo de programação linear para este problema. Identifique claramente o significado das restrições e da função objectivo do problema. Teça comentários sobre o desenvolvimento do modelo e a sua validação (ver informação no Anexo).

2. Apresente o ficheiro de input (*cut-and-paste*).
3. Apresente o output do produzido pelo programa (*cut-and-paste*).
4. Apresente o plano de execução do projecto (diagrama de Gantt).
5. Escolha uma actividade pertencente ao caminho crítico. Diga em que instante de tempo é que essa tarefa deve ser iniciada.
6. Escolha uma actividade não pertencente ao caminho crítico.
  - Por inspecção da rede do projecto, determine a partir de que instante de tempo é que essa tarefa pode ser iniciada. Justifique sucintamente.
  - Por inspecção da rede do projecto, determine o último instante de tempo em se pode dar início à tarefa sem haver atraso na execução do projecto. Justifique sucintamente.

### PARTE III

Embora haja uma duração definida para cada actividade, é muitas vezes possível, aumentando os recursos nela aplicados, reduzir a sua duração. Isto pode ser feito com custos suplementares.

Vamos associar a cada actividade três parâmetros adicionais: o primeiro é o valor do custo normal, expresso em unidades monetárias [U.M.], o segundo é o valor do custo suplementar de reduzir a duração da actividade de uma unidade de tempo [U.T.], expresso em [U.M./U.T.], e o terceiro é o valor da máxima redução de tempo que é permitida para a actividade, expresso em [U.T.].

Esses valores estão apresentados na seguinte Tabela (considere apenas aqueles que dizem respeito às actividades da lista do grupo):

Actividade	Custo Normal	Custo suplementar de redução	Máxima redução
0	400	100	1
1	1000	300	2
2	1400	500	4
3	300	100	1
4	2000	400	3
5	1000	800	1
6	800	90	2
7	900	—	0
8	600	100	1
9	300	—	0
10	1600	500	1
11	1400	300	2

Vamos assumir que as reduções de custo são lineares com o tempo. A título ilustrativo, para a Actividade 1, cuja duração normal é de 6 U.T. e custo normal é 1000 U.M., reduzir a duração da actividade de 1 U.T., passando a 5 U.T., tem um custo suplementar de 300 U.M., ou seja, a Actividade 1

passa a ter um custo total de 1300 U.M.. A redução máxima que se pode obter é de 2 U.T., ou seja, é possível, com um custo suplementar de 600 U.M., realizar esta actividade no tempo mínimo de 4 U.T., com um custo total de 1600 U.M..

Suponha que se pretende que o tempo de execução do projecto encontrado na Parte I seja reduzido em 3 U.T.. O objectivo do problema é decidir como devem ser reduzidas as durações das actividades, de modo a realizar o projecto na nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo.

1. Apresente um modelo de programação linear para este problema. Identifique claramente o significado das restrições e da função objectivo do problema. Teça comentários sobre o desenvolvimento do modelo e a sua validação (ver informação no Anexo).
2. Apresente o ficheiro de input (*cut-and-paste*).
3. Apresente o output produzido pelo programa (*cut-and-paste*).
4. Identifique as actividades cujas durações são reduzidas e os respectivos custos; apresente um diagrama de Gantt representando as actividades com as novas durações; mostre que o custo da solução óptima está correcto.

#### PARTE IV

A duração do projecto e o seu custo são, por vezes, balanceados para se atingir um compromisso. Tomando a duração do projecto como parâmetro, resolva o modelo o número de vezes que for necessário para obter o gráfico que representa esse compromisso.

1. Apresente um gráfico em que, no eixo das abscissas, se representam as diferentes durações possíveis para o projecto e, no eixo das ordenadas, se representam os custos totais de execução do projecto.

#### PARTE V

Vamos considerar uma variante do problema tratado na Parte III, em que era possível, aumentando os recursos aplicados numa actividade, e com custos suplementares, reduzir a sua duração, mas num caso em que o custo da redução é não-linear.

Um modelo com funções não-lineares pode ser aproximado por um modelo em que cada uma dessas funções é aproximada por uma função contínua linear por partes. Neste trabalho, para aproximar a função não-linear, vamos usar um função linear com 2 partes.

Na variante em análise, cada actividade tem cinco parâmetros adicionais: o primeiro é o valor do custo normal, expresso em unidades monetárias [U.M.], o segundo é o valor de  $c_1$ , o custo suplementar de reduzir a duração da actividade de uma unidade de tempo [U.T.], expresso em [U.M./U.T.], o terceiro é o valor da máxima redução de tempo a um custo  $c_1$ , o quarto é o valor de  $c_2$ , o custo suplementar de reduzir a duração da actividade de uma unidade de tempo [U.T.] após ter aplicado a

máxima redução a um custo  $c_1$ , expresso em [U.M./U.T.], e o quinto é o valor da máxima redução de tempo a um custo  $c_2$ .

Esses valores estão apresentados na seguinte Tabela (considere apenas aqueles que dizem respeito às actividades da lista do grupo):

Actividade	Custo Normal	$c_1$	Máx. red. a custo $c_1$	$c_2$	Máx. red. a custo $c_2$
0	400	100	0,5	200	0,5
1	1000	300	1	600	1
2	1400	500	1	1000	3
3	300	100	0,5	200	0,5
4	2000	400	1	800	2
5	1000	800	0,5	1600	0,5
6	800	90	1	180	1
7	900	–	0	–	0
8	600	100	0,5	200	0,5
9	300	–	0	–	0
10	1600	500	0,5	1000	0,5
11	1400	300	1	600	1

É de salientar que o custo de redução é menor na primeira parte, pelo que a função de redução do custo é convexa.

A título ilustrativo, para a Actividade 2, cuja duração normal é de 7 U.T. e cujo custo normal é 1400 U.M., reduzir a duração da actividade de 1 U.T., passando a 6 U.T., tem um custo suplementar de 500 U.M., ou seja, a Actividade 2 passa a ter um custo total de 1900 U.M.. A redução máxima que se pode obter a este custo é de 1 U.T.. Depois disso, é possível reduzir a duração da actividade, mas com um custo suplementar de 1000 U.M./U.T.. A título ilustrativo, a realização desta actividade no tempo mínimo de 3 U.T. tem um custo de 4900 U.M. (=1400+500+3\*1000).

Suponha que se pretende que o tempo de execução do projecto encontrado na Parte I do Trabalho 1 seja reduzido em 4 U.T.. O objectivo do problema é decidir como devem ser reduzidas as durações das actividades, de modo a realizar o projecto na nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo.

1. Explique com detalhe e justifique as alterações a efectuar ao modelo da Parte III. Teça comentários sobre o desenvolvimento do modelo e a sua validação (ver informação no Anexo).
2. Apresente o ficheiro de input (*cut-and-paste*).
3. Apresente o output produzido pelo programa (*cut-and-paste*).
4. Identifique as actividades cujas durações são reduzidas e os respectivos custos; apresente um diagrama de Gantt representando as actividades com as novas durações; mostre que o custo da solução óptima está correcto.

### **Determinação da lista de actividades**

Seja  $ABCDE$  o número de inscrição do aluno do grupo com maior número de inscrição. Remova da lista de actividades as actividades  $D$  e  $E$ , passando as precedências a ser estabelecidas da seguinte forma:

- os sucessores da actividade  $D$  passam a ter como novas precedências os antecessores da actividade  $D$ ; e
- o mesmo para  $E$ .

A título ilustrativo, se a actividade 4 for removida, a actividade 2 passa a ter como novas precedências as actividades 0 e 7 (em vez da actividade 4), o mesmo acontecendo com a actividade 5.

## **ANEXO**

### **Objectivo**

Os trabalhos práticos experimentais visam desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos, de criar modelos para os descrever, de obter soluções para esses modelos utilizando programas computacionais adequados, de validar os modelos obtidos, de interpretar as soluções obtidas, e de elaborar recomendações para o sistema em análise.

### **Classificação dos trabalhos**

O aspecto que é mais valorizado é a correção e a apresentação dos modelos. A apresentação dos modelos deve incluir a identificação das variáveis de decisão e dos parâmetros (dados) e a explicitação da função objectivo e das restrições, mas deverá ser acompanhada de explicações detalhadas e de justificações. Por exemplo, a escolha das variáveis de decisão deve ser justificada, mostrando como é que elas representam as decisões a tomar no sistema real. As restrições (ou os grupos de restrições) devem ser também justificadas com detalhe, mostrando como é que traduzem as regras de funcionamento do sistema e como é que representam as decisões admissíveis. Deve também ser mostrado que a função objectivo traduz uma medida de eficiência do sistema. A dimensão (por exemplo, artigos/mês, horas, etc.) em que estão expressos os vários elementos do modelo (variáveis de decisão, parâmetros, função objectivo, restrições) deve ser claramente indicada.

Outros aspectos que são também valorizados são os relacionados com a metodologia da Investigação Operacional. Por exemplo, o trabalho de validação do modelo, que deve necessariamente incluir uma verificação de que a solução obtida pelo solver é uma decisão admissível, e a tradução da solução do solver numa decisão adequada ao sistema real.

### **Formato do Relatório**

O relatório de cada trabalho experimental deve traduzir a experiência de modelação e resolução dos casos propostos e conter as peças requeridas no enunciado do trabalho.

Poderá incluir a discussão de dificuldades surgidas durante a realização do trabalho.

O relatório deve ser feito em folhas formato A4, ter uma folha de capa com a identificação dos alunos do grupo, do trabalho e da data, devendo o conjunto ser agrafado no canto superior esquerdo.

Não é desejável que o aluno perca muito tempo com a qualidade de "apresentação gráfica", que não é valorizada. O relatório pode incluir texto editado com processador de texto e impresso, texto manuscrito legível, desenhos feitos em computador e desenhos feitos manualmente. É aceitável haver páginas que combinem elementos de todos estes tipos. No caso de haver páginas que tenham uma matriz comum (template), o original com a matriz pode ser fotocopiado, e depois manuscrito.

### **Grupos de Trabalho**

Os trabalhos experimentais devem ser realizados em grupos de 3 ou 4 alunos, excepcionalmente 5. A inscrição nos grupos é feita pelos alunos no BlackBoard > Grupos.

## **Entrega dos Relatórios dos Trabalhos**

A entrega dos relatórios dos trabalhos deverá ser feita:

- alunos de MIEI: no cacifo de correio de Valério de Carvalho (DPS, Braga, 1º piso; após subir as escadas, virar à direita para um corredor estreito, e novamente à direita).
- alunos de MIEGSI: na Secretaria do Departamento de Produção e Sistemas (DPS, Guimarães).

Estudantes com estatuto de trabalhador-estudante que não possam deslocar-se à UMinho poderão fazer o envio para [vc@dps.uminho.pt](mailto:vc@dps.uminho.pt)

## **Outras Informações**

Os trabalhos em que haja uma conduta académica imprópria serão anulados, de acordo com o definido no Art. 108.º do Regulamento Académico da Universidade do Minho (RAUM), e proceder-se-á conforme está definido nesse artigo. A classificação final dos alunos envolvidos nessas situações será "não admitido", pelo que deverão voltar a frequentar a disciplina no ano seguinte.

## **Dispensa de realização de Trabalhos Práticos Experimentais**

### **1. Alunos com estatuto de aluno ordinário**

A classificação obtida nos trabalhos num ano lectivo anterior não dispensa um aluno reprovado da realização dos trabalhos no ano lectivo corrente.

### **2. Alunos com estatuto de trabalhador-estudante**

Segundo está determinado no Artigo 33.º - Regime de frequência - do Regulamento Académico da Universidade do Minho (RAUM):

4. O trabalhador estudante que obtenha aproveitamento na componente de natureza experimental ou componente de trabalho prático num dado ano letivo e sem aproveitamento na respetiva UC fica dispensado de efetuar essa componente no ano letivo seguinte.

Assim, no corrente ano, essa dispensa não é válida para os alunos trabalhadores estudantes que realizaram os trabalhos há dois ou mais anos.

A verificação do estatuto do aluno é feita à data de emissão das classificações, no final do semestre.