DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico

Inferencia Bayesiana con Aplicaciones en Ciencias Cognitivas
Primer Cuatrimestre de 2016

Integrante	LU	Correo electrónico
Axel Straminsky	769/11	axelstraminsky@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Índice

1. Introducción

El objetivo de este Trabajo Práctico es simular las tiradas de 3 monedas, de las cuales 1 está cargada (aunque se ignora cómo), y en base a un modelo ha construir y los datos de las tiradas que se realizaron, inferir cuál de las 3 monedas es la cargada, y qué tan cargada esta. A continuación el enunciado:

Observamos 10 tiradas de 3 monedas distintas, de las que sabemos que hay dos monedas comunes y una cargada, aunque ignoramos cargada cómo. Los números de caras obtenidos para las distintas monedas en las 10 tiradas son 3, 4 y 10.

2. Problema 1: Modelo y Representación Gráfica

Escriba un modelo que capture el problema enunciado. Realice una representación gráfica del modelo propuesto, utilizando la convención para identificar nodos latentes, observados y deterministicos.

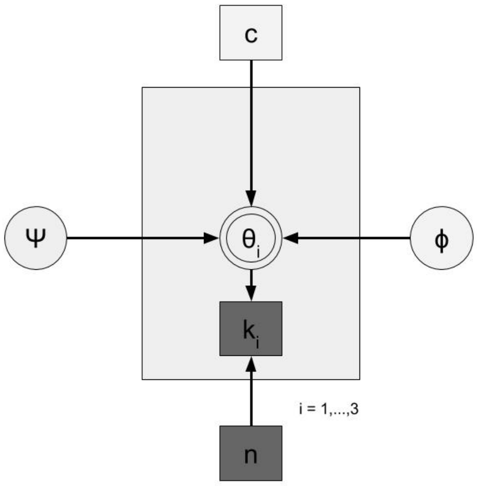


Figura 1: `modelo 1`

$$\Psi \sim Beta(1000, 1000)$$

$$\Phi \sim Beta(1, 1)$$

$$\Theta_i = \begin{cases} \Phi & \text{si } c = i \\ \Psi & \text{si } c \neq i \end{cases}$$

$$C \sim Categorical(1/3, 1/3, 1/3)$$

$$K_i \sim Binomial(n, \theta_i)$$

Donde Φ representa el prior de la moneda cargada (Uniforme(0,1) ya que no se sabe cómo esta cargada) y Ψ el prior para las monedas no cargadas, el cual elegí representarlo como una Beta(1000, 1000), para que la función esté lo más concentrada posible alrededor de 1/2, como se puede observar en la Figura 2. Por último, Θ_i es igual a Φ o Ψ según el resultado de la categórica C, que decide cuál de las 3 monedas es la cargada, y K_i es la binomial que representa la cantidad de caras obtenidas por cada moneda luego de 10 tiradas.

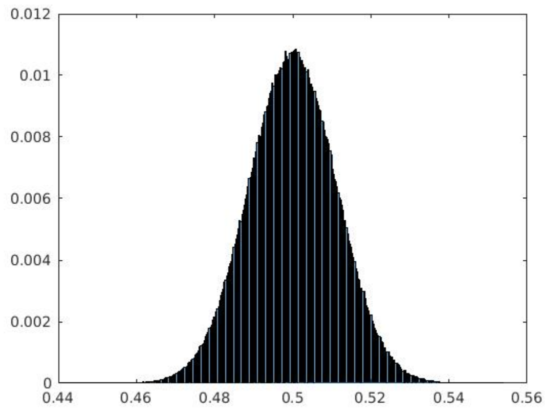


Figura 2: Beta(1000,1000)

El modelo en JAGS es el siguiente:

```
model{
   #m = cantidad de monedas

   for (i in 1:m) {
    p[i] = 1/3
   }
   #Priors
   c ~ dcat(p[])
   phi ~ dbeta(1,1) #cargada, pero no se como
   psi ~ dbeta(1000,1000) #no cargada, quiero que este lo mas concentrado posible en 1/2

   for (i in 1:m) {
    theta[i] <- equals(c[1], i)*phi + (1 - equals(c[1], i))*psi
    k[i] ~ dbin(theta[i], n)
   }
}
```

3. Problema 2: Implementación e Inferencia

Implemente el modelo en su sistema de inferencia predilecto, y obtenga muestras de la posterior para las variables relevantes. Explicite cuáles fueron los parámetros elegidos para el algoritmo de muestreo.

- ***Realice histogramas de las distintas variables, utilizando un mismo gráfico cuando sea posible/razonable.***
- ***Reporte la media y el desvío estándar para todas las variables inferidas.***
- ***Compute la probabilidad a posteriori de que cada una de las monedas sea la moneda cargada.***

Para implementar este modelo utilicé *MatJAGS* junto con Matlab R2016a. Las variables relevantes a muestrear son C (qué moneda es la cargada) y los distintos Θ (la probabilidad de salir cara de cada moneda). Los parámetros para el algoritmo de muestreo son:

- *nchains = 2* (cantidad de cadenas)
- *nburnin = 100* (burn-in examples)
- *nsamples = 5000* (cant. de samples)
- *thin = 2* (cada cuánto sampleo)

Los histogramas para cada una de las variables de interes son los siguientes:

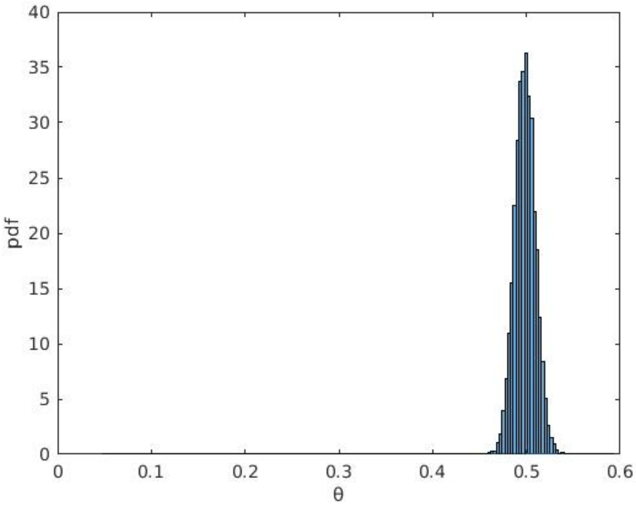


Figura 3: theta 1

Con media = 0.4975 y std = 0.0190

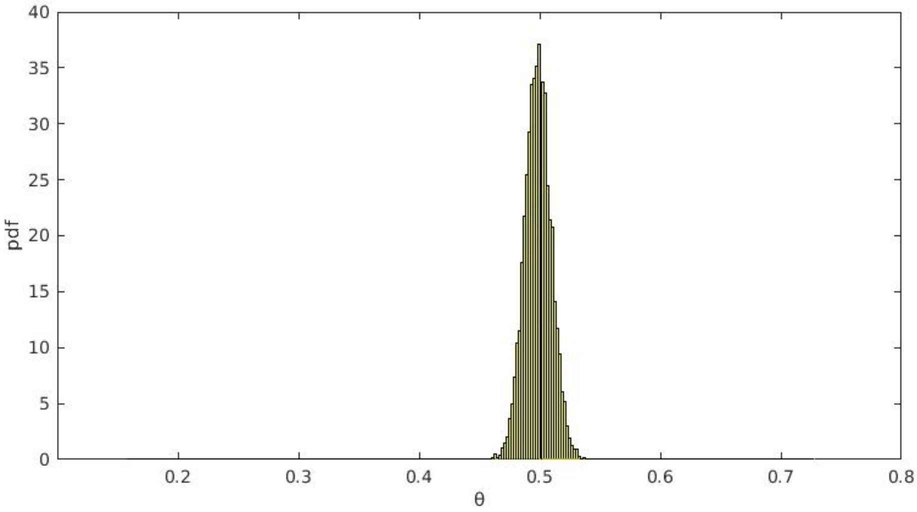


Figura 4: theta 2

Con media = 0.4981 y std = 0.0152

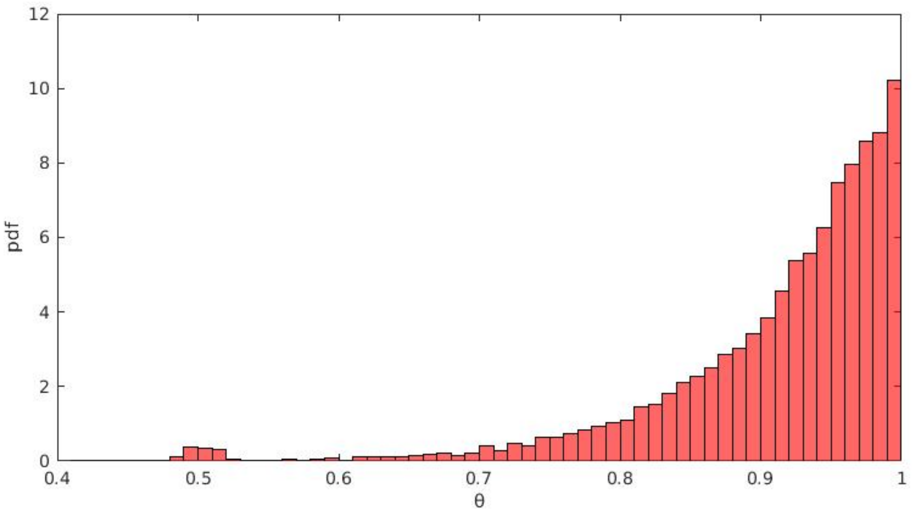


Figura 5: theta 3

Con media = 0.9131 y std = 0.0866

Las diferencias y similitudes entre las posterior de los Θ de cada moneda se pueden apreciar mejor en el siguiente gráfico conjunto:

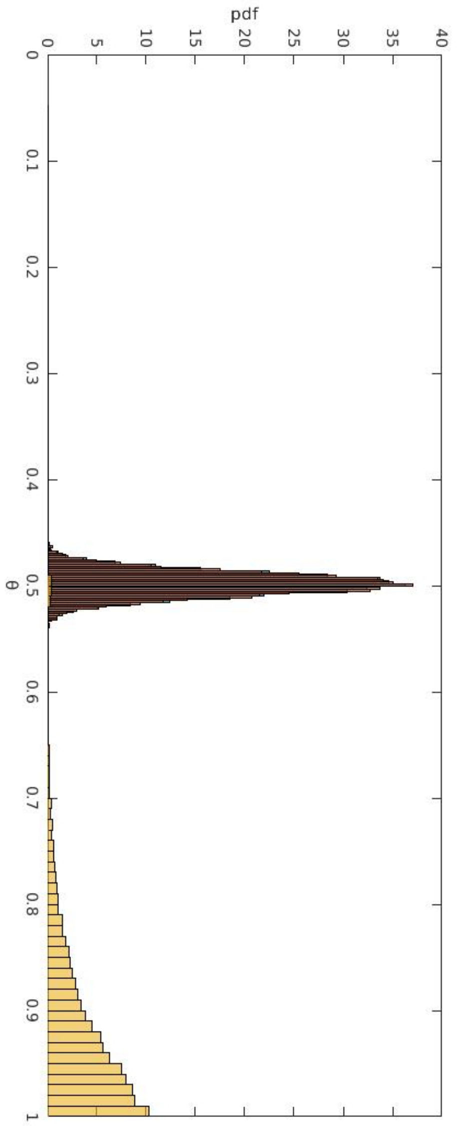


Figura 6: theta 1, 2, y 3

Se puede ver que Θ_1 y Θ_2 están prácticamente solapados con media alrededor de 0,5, mientras que Θ_3, como resultó ser la moneda cargada, tiene una distribución con mucho peso en valores cercanos al 1, similar a una $Beta(1000, 1)$.

En cuanto a la variable categórica C, podemos observar su resultado en el siguiente gráfico:

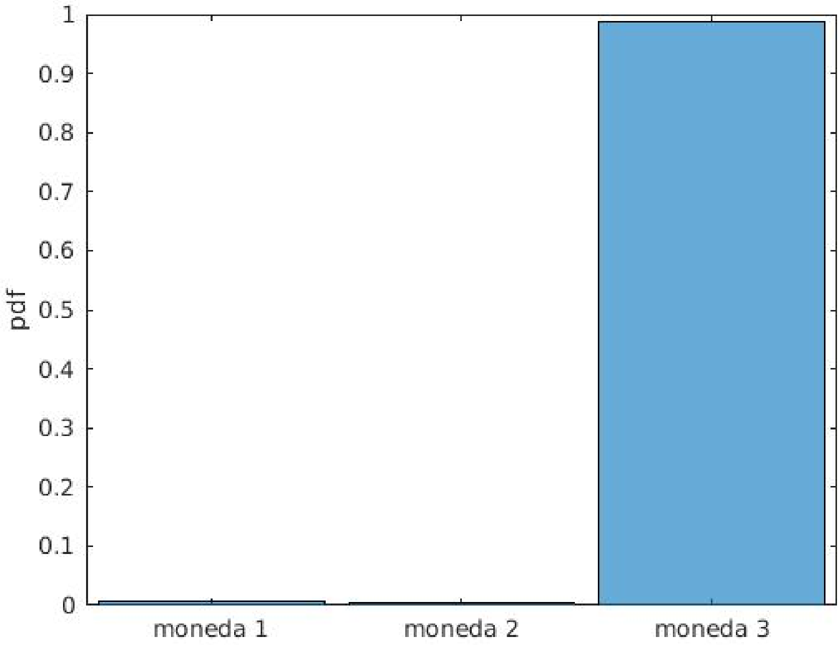


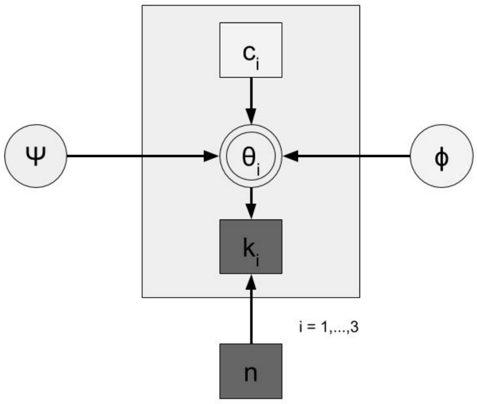
Figura 7: categórica

De donde se puede ver claramente que la probabilidad de que la tercera moneda sea la cargada es prácticamente 1, mientras que la probabilidad de que las monedas 1 y 2 sean las cargadas es muy cercana a 0.

4. Problema 3: Modificaciones al Modelo

Discuta cómo modificaría el modelo si en lugar de saber que hay una moneda cargada, nos dicen que cada moneda puede estar cargada o no con probabilidad 1/2 independientemente de las otras monedas. Provea el modelo y su representación gráfica para este caso.

La modificación que hay que realizarle al modelo es sencilla: la variable categórica C se reemplaza por 3 variables bernoulli C_1, C_2 y C_3 con parámetro 1/2 (una para cada Θ), las cuales deciden para cada moneda si ésta va a estar cargada o no. La representación gráfica de este modelo se puede ver en la siguiente Figura:



$$\Psi \sim Beta(1000, 1000)$$

$$\Phi \sim Beta(1, 1)$$

$$\Theta_i = \begin{cases} \Phi & \text{si } c = i \\ \Psi & \text{si } c \neq i \end{cases}$$

$$C \sim Bernoulli(1/2)$$

$$K_i \sim Binomial(n, \theta_i)$$

Figura 8: `modelo 2`

El modelo en JAGS es el siguiente:

```
model{
   #m = cantidad de monedas

   #Priors
   for (i in 1:m) {
       c[i] ~ dbern(0.5)
   }

   phi ~ dbeta(1,1) #cargada, pero no se como
   psi ~ dbeta(1000,1000) #no cargada, quiero que este lo mas concentrado posible en 1/2

   for (i in 1:m) {
    theta[i] <- equals(c[i], 1)*phi + equals(c[i], 0)*psi
    k[i] ~ dbin(theta[i], n)
   }
}
```

En este caso el histograma para las posterior de las variables Θ es:

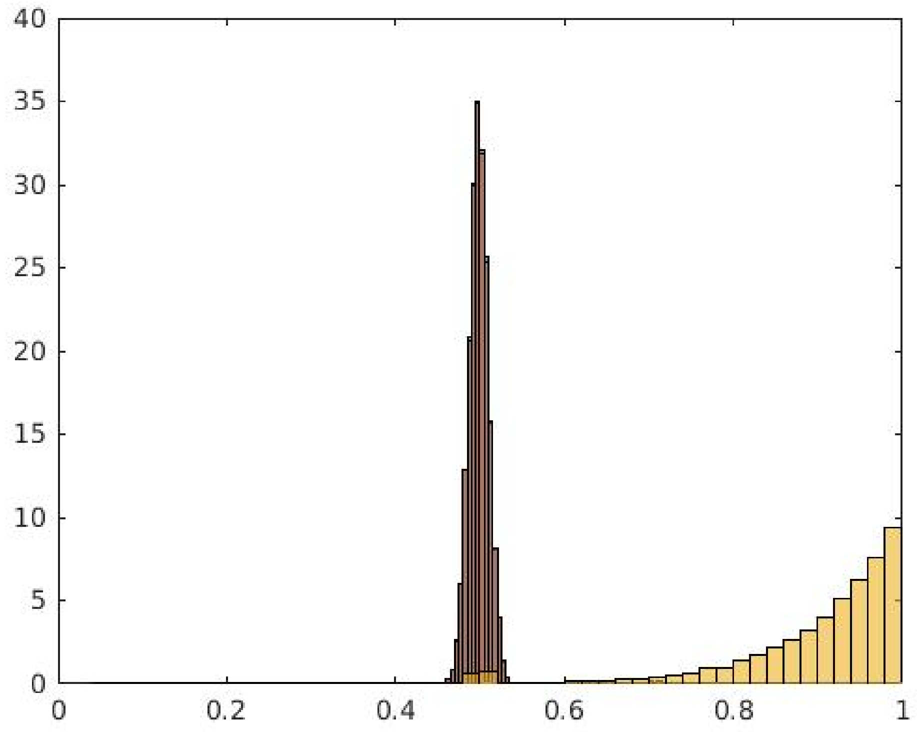


Figura 9: theta 1, 2, y 3

Con las siguientes medias y desvíos estándar:

$\Theta_1 = 0{,}4980, 0{,}0298$ (incremento del 1 % y 1.57 % en media y std con respecto al modelo anterior)
$\Theta_2 = 0{,}5002, 0{,}0321$ (incremento del 1 % y 2.11 % en media y std con respecto al modelo anterior)
$\Theta_3 = 0{,}8986, 0{,}1091$ (decremento del 1 % en media e incremento del 1.26 % en std con respecto al modelo anterior)

Y los diagramas para las posterior de las categóricas C_i son los siguientes, en los cuales se puede observar que la moneda 3 es la cargada.

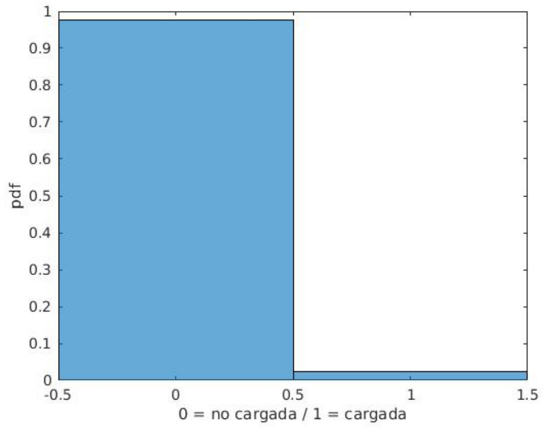


Figura 10: c1

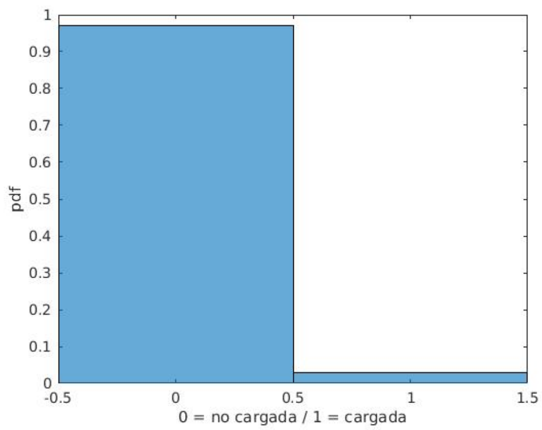


Figura 11: c2

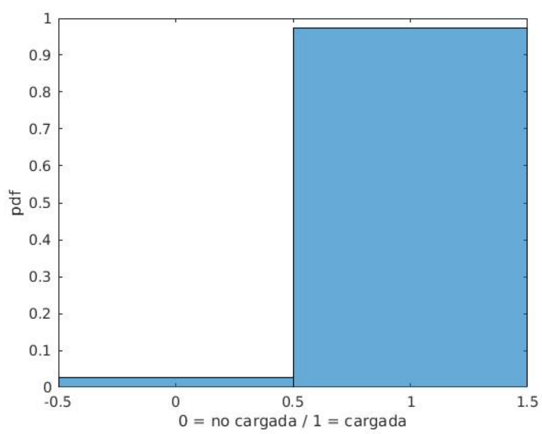


Figura 12: c3

5. Problema 4: Predicciones

Escriba la expresión para la probabilidad de obtener cara en la próxima tirada para cada una de las monedas. ¿Qué distintas fuentes de incertidumbre puede identificar en ella?

La expresión para la probabilidad de obtener cara en la próxima tirada es la posterior predictive de la moneda, la cual tiene la siguiente forma:

$$\int P(cara|D,c) = \int P(cara,\Theta_i|D,c)\; d\Theta_i = \int P(cara|\Theta_i,D,c)\; P(\Theta_i|D,c)\; d\Theta_i = \int P(cara|\Theta_i)\; P(\Theta_i|D,c)\; d\Theta_i = \int P(cara|\Theta_i)\; [P(\Phi|D)I(c=i) + P(\Psi|D)I(c \neq i)]\; d\Theta_i = \int P(cara|\Theta_i)\; [P(\Phi)I(c=i) \;+\; P(\Psi)I(c \neq i)]\; d\Theta_i$$

Una fuente de incertidumbre es el valor real de la categórica C, que determina cual de las 2 distribuciones voy a terminar usando para calcular la posterior predictive.

6. Apéndice: Código matlab

El código a continuación es todo el código utilizado en el tp:

```
%% TP

clear;
modelo = 2; %1 = primer model, 2 = modelo modificado

modelo_txt = '';

if modelo == 1
    modelo_txt = 'model.txt';
else
    modelo_txt = 'model2.txt';
end

%% Data (Observed Variables)
k = [3, 4, 10];
n = 10;
m = 3; %cantidad de monedas

%% Sampling
% MCMC Parameters
nchains = 2; % How Many Chains?
nburnin = 1e2; % How Many Burn-in Samples?
nsamples = 5e3;  %How Many Recorded Samples?
nthin = 2; % How Often is a Sample Recorded?
doparallel = 0; % Parallel Option

% Assign Matlab Variables to the Observed Nodes
datastruct = struct('k', k, 'n', n, 'm', m);

%Initialize Unobserved Variables
for i=1:nchains
    if modelo == 1
        S.c = 1/3;
    else
        S.c = round(rand(1,m));
    end

    init0(i) = S;
end


% Use JAGS to Sample
tic
fprintf( 'Running JAGS ...\n' );
[samples, stats] = matjags( ...
datastruct, ...
fullfile(pwd, modelo_txt), ...
init0, ...
'doparallel' , doparallel, ...
'nchains', nchains,...
'nburnin', nburnin,...
```

```
'nsamples', nsamples, ...
'thin', nthin, ...
'monitorparams', {'c', 'theta'}, ...
'savejagsoutput' , 1 , ...
'verbosity' , 1 , ...
'cleanup' , 0 , ...
'workingdir' , 'tmpjags' );
toc

%Grafico los resultados

theta1 = samples.theta(:,:,1);
theta2 = samples.theta(:,:,2);
theta3 = samples.theta(:,:,3);
theta1 = theta1(:);
theta2 = theta2(:);
theta3 = theta3(:);

if modelo == 1
    c = samples.c();
    c = c(:);

    %a = ordinal(c, {'moneda 1', 'moneda 2', 'moneda 3'});
    %histogram(a, 'Normalization', 'pdf');

    %histogram(theta1, 'Normalization', 'pdf');
    %hold on
    %histogram(theta2, 'Normalization', 'pdf');
    %hold on
    %histogram(theta3, 'Normalization', 'pdf');
else
    c1 = samples.c(:,:,1);
    c2 = samples.c(:,:,2);
    c3 = samples.c(:,:,3);
    c1 = c1(:);
    c2 = c2(:);
    c3 = c3(:);


    %histogram(theta1, 'Normalization', 'pdf');
    %hold on
    %histogram(theta2, 'Normalization', 'pdf');
    %hold on
    %histogram(theta3, 'Normalization', 'pdf');
    %histogram(c1, 'Normalization', 'pdf');
    %histogram(c2, 'Normalization', 'pdf');
    %histogram(c3, 'Normalization', 'pdf');
end
```