



HÁSKÓLINN Í REYKJAVÍK
REYKJAVIK UNIVERSITY

Vorönn 2017

Strjál stærðfræði II
T-419-STR2

Skiladæmi: Stór dæmaskil 1

Nafn : Axel Þór Steingrímsson

Kennitala : 2009943029

Dags : 05/02/17

Hópur : Fjarnám

Dæmatímakennari:

1. (16%) Gefin er eftirfarandi þrepunarskilgreining á mengi S

Grunnþrep: $(0,6) \in S$ og $(4,0) \in S$

Þrepunarskref: Ef $(a,b) \in S$ þá er $(a+1,b+6) \in S$ og $(a+4,b+4) \in S$

Notið gerðarþrepun ("structural induction") til þess að sanna að um sérhvert stak $(a,b) \in S$ gildi eftirfarandi: $(3a + 2b) \bmod 5 = 2$

Induction Hypothesis: Ef $(a,b) \in S$, þá er $(3a + 2b) \bmod 5 = 2$

Let $(a,b) \in S$

Then $(3a + 2b) \bmod 5 = 2$ # By induction hypothesis

Then Ef $(a,b) \in S$ þá er $(a+1,b+6) \in S$ og $(a+4,b+4) \in S$

Therefore $(3(a + 1) + 2(b + 6)) \bmod 5 = 2$ and $(3(a + 4) + 2(b + 4)) \bmod 5 = 2$

Therefore for $(a,b) \in S$, $(3a + 2b) \bmod 5 = 2$

2. (16%) Í þessu dæmi er fjallað um ferundastrengi ("quaternary strings"), þ.e. strengi með táknum úr menginu $\{0,1,2,3\}$. (Dæmi um ferundastreng er 2013201.) Nú er gefið mengið S sem inniheldur alla ÓENDANLEGA ferundastrengi ("infinite quaternary strings"). Er mengið S teljanlegt ("countable")?

Rökstyðjið svarið vandlega! Ef þið teljið að mengið sé teljanlegt, þá á að sýna hvernig hægt er að númera stökin í menginu. Ef ekki, þá á að sanna að mengið sé ekki teljanlegt.

The set of quaternary strings are countable, which can be demonstrated if we create a 1 to 1 relationship between each in the set S , where S is the set of all quaternary strings, and the set of natural numbers. For ease of demonstration we can create this relationship based on how natural numbers are stored in binary:

$0 \rightarrow 00,$

$1 \rightarrow 01$

$2 \rightarrow 10$

$3 \rightarrow 11$

$4 \rightarrow 100$

And so on.

As we know that the infinite set of natural numbers is in fact countable, we can conclude that the infinite set of quaternary strings is also countable.

3. (10%) Gefið er eftirfarandi mál yfir stafrófið

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$A = \{w \mid w \text{ byrjar á tveim eða fleiri 0-bitum og síðan kemur oddatölufjöldi 1-bitu og þar á eftir slétttölufjöldi 0-bitu}\}$

Ritið málreglur fyrir samhengisfrjálsa mállýsingu ("productions for a context-free grammar") sem lýsir málinu A. Athugið að núll er slétt tala.

$$G = \{V, T, S, P\}$$

$$V = \{0, 1, S, A, B\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

S = Starting state S

P = Productions:

$$S \rightarrow 00A1B$$

$$A \rightarrow 0A$$

$$A \rightarrow A11$$

$$A \rightarrow \lambda$$

$$B \rightarrow 00B$$

$$B \rightarrow \lambda$$

4. (8%) Gefið er eftirfarandi mál ("language") yfir stafrófið

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$A = \{w \mid w \text{ inniheldur hlutstrenginn abba OG } w \text{ endar á } a\}$

Ritið málreglur fyrir samhengisfrjálsa mállýsingu ("productions for a context-free grammar") sem lýsir málinu A.

$$G = \{V, T, S, P\}$$

$$V = \{a, b, S, A\}$$

$$T = \{a, b\}$$

S = Starting state S

P = Productions:

$$S \rightarrow Aabba$$

$$S \rightarrow AabbaAa$$

$$A \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow bA$$

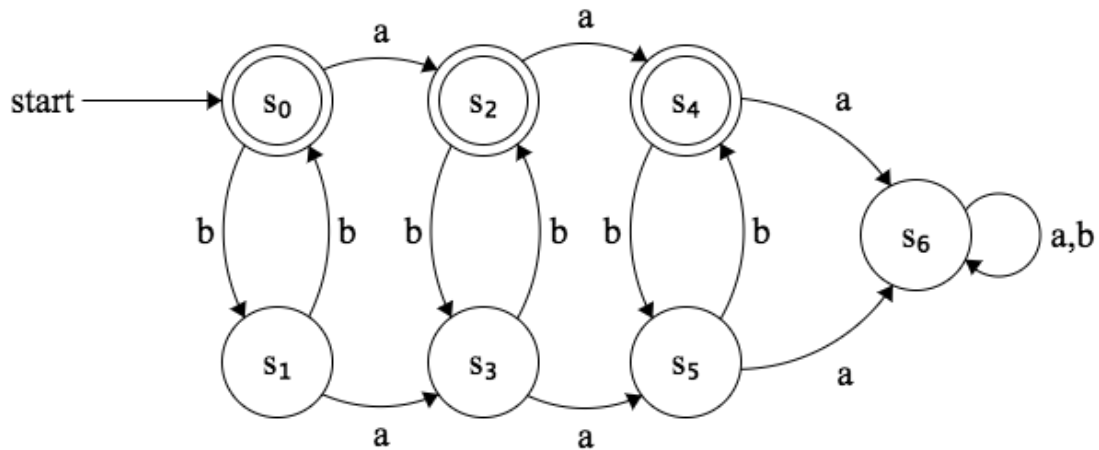
$$A \rightarrow \lambda$$

5. (16%) Gefið er eftirfarandi mál ("language") yfir stafrófið

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$A = \{w \mid w \text{ inniheldur slétttölufjölda af } b \text{ OG } w \text{ inniheldur tvö eða færri } a\}$$

Teiknið stöðurit ("state diagram") fyrir DFA stöðuvél ("Deterministic Finite-state Automaton") sem samþykkir ("recognizes") málið A. Athugið að núll er slétt tala.

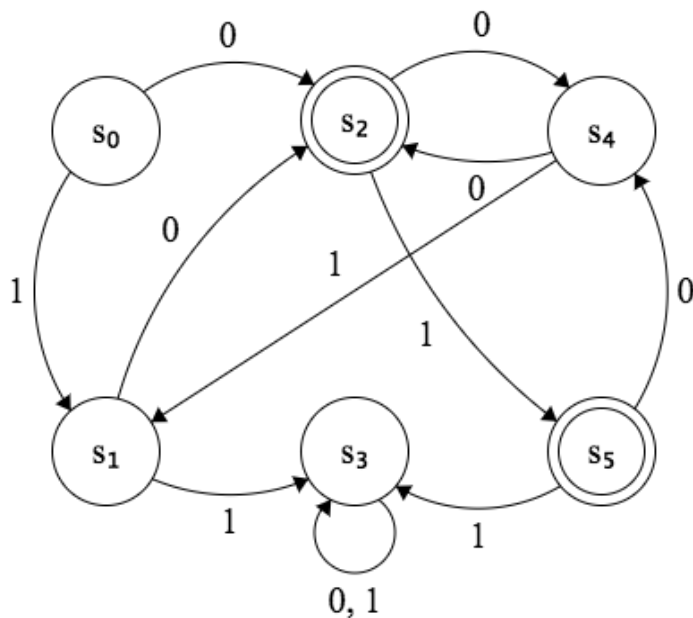


6. Gefið er eftirfarandi mál ("language") yfir stafrófið

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$A = \{w \mid w \text{ inniheldur EKKI tvo eða fleiri samliggjandi 1-bitu OG } w \text{ inniheldur oddatölufjölda 0-bitu}\}$$

a) (16%) Teiknið stöðurit ("state diagram") fyrir DFA stöðuvél ("Deterministic Finite-state Automaton") sem samþykkir ("recognizes") málið A.



b) (8%) Ritið málreglur fyrir samhengisfrjálsa mállýsingu ("productions for a context-free grammar") sem lýsir málinu A. Látið skýringar fylgja með svarinu!

$G = \{V, T, S, P\}$
 $V = \{0, 1, S, A\}$
 $T = \{0, 1\}$
 $S = \text{Starting state } S$
 $P = \text{Productions:}$
 $S \rightarrow A0A$
 $A \rightarrow \lambda$
 $A \rightarrow 1$
 $A \rightarrow 00A$
 $A \rightarrow 10A$
 $A \rightarrow 010A$

7. (10%) Gefið er eftirfarandi mál yfir stafrófið ("vocabulary")

$\Sigma = \{0, 1\}$
 $A = \{0^n 1^m \mid n \leq m \leq 3n \text{ og } n \geq 0\}$

Ritið samhengisfrjálsa mállýsingu ("context-free grammar") sem lýsir málinu A.

$G = \{V, T, S, P\}$
 $V = \{0, 1, S, A, B\}$
 $T = \{0, 1\}$
 $S = \text{Starting state } S$
 $P = \text{Productions:}$
 $S \rightarrow 0S111$
 $S \rightarrow A$
 $A \rightarrow 0A11$
 $A \rightarrow B$
 $B \rightarrow 0B1$
 $B \rightarrow \lambda$