



HÁSKÓLINN Í REYKJAVÍK  
REYKJAVÍK UNIVERSITY

Vorönn 2017

Strjál stærðfræði II  
T-419-STR2

Skiladæmi: Stór dæmaskil 1 - SVÖR

Nafn : \_\_\_\_\_

Kennitala : \_\_\_\_\_

Dags : \_\_\_\_\_

Hópur : \_\_\_\_\_

Dæmatímakennari : \_\_\_\_\_

**Strjál stærðfræði II - Stór dæmaskil 1****2 bestu af 3 gilda alls 10% af lokaeinkunn í námskeiðinu.****1. (16%) Gefin er eftirfarandi þrepunarskilgreining á mengi S**Grunnþrep:  $(0,6) \in S$  og  $(4,0) \in S$ Þrepunarskref: Ef  $(a,b) \in S$  þá er  $(a+1,b+6) \in S$  og  $(a+4,b+4) \in S$ Notið gerðarþrepun ("**structural induction**") til þess að sanna að um sérhvert stak  $(a,b) \in S$  gildi eftirfarandi:

$$(3a + 2b) \bmod 5 = 2$$

**Vandið framsetningu! Setjið fram þrepunarforsenduna ("**inductive hypothesis**") og vitnið í hana þegar hún er notuð!****Svar:**Hér þarf að sýna fram á það að hvert einasta raðpar sem búið er til með þrepunarskilgreiningunni uppfylli það skilyrði að  $(3a + 2b) \bmod 5 = 2$ .**Grunnþrep:** Sýna að reglan gildi fyrir stök sem búin eru til í grunnþrepi þrepunarskilgreiningarinnar.Í grunnþrepinu er búið til stakið  $(0,6)$ . Það uppfyllir skilyrðið því þá er  $(3a + 2b) \bmod 5 = (3 \cdot 0 + 2 \cdot 6) \bmod 5 = 12 \bmod 5 = 2$ .Í grunnþrepinu er búið til stakið  $(4,0)$ . Það uppfyllir skilyrðið því þá er  $(3a + 2b) \bmod 5 = (3 \cdot 4 + 2 \cdot 0) \bmod 5 = 12 \bmod 5 = 2$ .**Þrepunarskref:** Þrepunarforsendan er að reglan gildi fyrir öll stök sem notuð eru í þrepunarskrefi þrepunarskilgreiningarinnar til að búa til ný stök.

Þá þarf að leiða af því að þau stök, sem búin eru til í þrepunarskrefi þrepunarskilgreiningarinnar, uppfylli skilyrðið einnig.

Þrepunarforsendan er að reglan gildir um stakið  $(a,b)$  sem notað er í þrepunarskrefi þrepunarskilgreiningarinnar, það er að  $(3a + 2b) \bmod 5 = 2$ .Í þrepunarskrefinu er búið er til stakið  $(a+1,b+6)$ . Fyrir það höfum við

$$\begin{aligned} & (3(a+1) + 2(b+6)) \bmod 5 \\ &= (3a + 3 + 2b + 12) \bmod 5 \\ &= ((3a+2b) + 15) \bmod 5 \\ &= (3a + 2b) \bmod 5 \quad \text{því } 15 \bmod 5 = 0 \\ &= 2 \quad \text{samkvæmt þrepunarforsendu} \end{aligned}$$

Í þrepunarskrefinu er einnig búið til stakið  $(a+4, b+4)$ . Fyrir það höfum við

$$\begin{aligned} & (3(a+4) + 2(b+4)) \bmod 5 \\ &= (3a + 12 + 2b + 8) \bmod 5 \\ &= ((3a+2b) + 20) \bmod 5 \\ &= (3a + 2b) \bmod 5 \quad \text{því } 20 \bmod 5 = 0 \\ &= 2 \quad \text{samkvæmt þrepunarforsendu} \end{aligned}$$

Því liggur fyrir að stökin sem búin eru til í þrepunarskrefi þrepunarskilgreiningarinnar uppfylla skilyrðið einnig.

Reglan er því sönnuð með gerðarþrepun (structural induction”).

2. (16%) Í þessu dæmi er fjallað um ferundastrengi (“quaternary strings”), þ.e. strengi með táknum úr menginu  $\{0, 1, 2, 3\}$ . (Dæmi um ferundastreng er 2013201.) Nú er gefið mengið  $S$  sem inniheldur alla **ÓENDANLEGA** ferundastrengi (“infinite quaternary strings”). Er mengið  $S$  teljanlegt (“countable”)?

**Rökstyðjið svarið vandlega! Ef þið teljið að mengið sé teljanlegt, þá á að sýna hvernig hægt er að númera stökin í menginu. Ef ekki, þá á að sanna að mengið sé ekki teljanlegt.**

**Svar:**

Sönnum með óbeinni sönnun (sönnun með mótsögn) að mengið er ekki teljanlegt.

Gerum því ráð fyrir hinu gagnstæða, það er að mengið sé teljanlegt.

Þá er hægt að skrifa lista þar sem allir strengirnir eru númeraðir:

$$\begin{aligned} w_1 &= b_{11} b_{12} b_{13} b_{14} \dots \\ w_2 &= b_{21} b_{22} b_{23} b_{24} \dots \\ w_3 &= b_{31} b_{32} b_{33} b_{34} \dots \\ w_4 &= b_{41} b_{42} b_{43} b_{44} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

og svo framvegis, þar sem hvert  $b_{ij}$  er 0, 1, 2 eða 3.

Nú búum við til streng sem er frábrugðinn öllum strengjunum í þessar upptalningu.

$$\begin{aligned} w &= b_1 b_2 b_3 b_4 \dots \quad \text{þannig að} \\ & \quad b_i = 2 \quad \text{ef } b_{ii} = 0 \\ & \quad b_i = 2 \quad \text{ef } b_{ii} = 1 \\ & \quad b_i = 1 \quad \text{ef } b_{ii} = 2 \\ & \quad b_i = 2 \quad \text{ef } b_{ii} = 3 \end{aligned}$$

Þessi strengur  $w$  er ekki í listanum því hvaða streng  $w_r$  sem við skoðum í listanum þá er biti númer  $r$  frábrugðinn.

Þetta er mótsögn við það að allir strengirnir hafi verið númeraðir. Mengið er því ekki teljanlegt.



3. (10%) Gefið er eftirfarandi mál yfir stafrófið  $\Sigma = \{0,1\}$

$A = \{w \mid w \text{ byrjar á tveim eða fleiri } 0\text{-bitum og síðan kemur oddatölufjöldi } 1\text{-bita og þar á eftir sléttölufjöldi } 0\text{-bita}\}$

Ritið málreglur fyrir samhengisfrjálsa mállýsingu ("productions for a context-free grammar") sem lýsir málinu A. Athugið að núll er slétt tala.

$$S \rightarrow 00A1BC$$

$$A \rightarrow 0A$$

$$A \rightarrow \lambda$$

$$B \rightarrow 11B$$

$$B \rightarrow \lambda$$

$$C \rightarrow 00C$$

$$C \rightarrow \lambda$$

4. (8%) Gefið er eftirfarandi mál ("language") yfir stafrófið  $\Sigma = \{a,b\}$

$A = \{w \mid w \text{ inniheldur hlutstrenginn } \mathbf{abba} \text{ OG } w \text{ endar á } \mathbf{a}\}$

Ritið málreglur fyrir samhengisfrjálsa mállýsingu ("productions for a context-free grammar") sem lýsir málinu A.

$$S \rightarrow Babb a C$$

$$B \rightarrow aB$$

$$B \rightarrow bB$$

$$B \rightarrow \lambda$$

$$S \rightarrow B C a b b a C$$

$$C \rightarrow aC$$

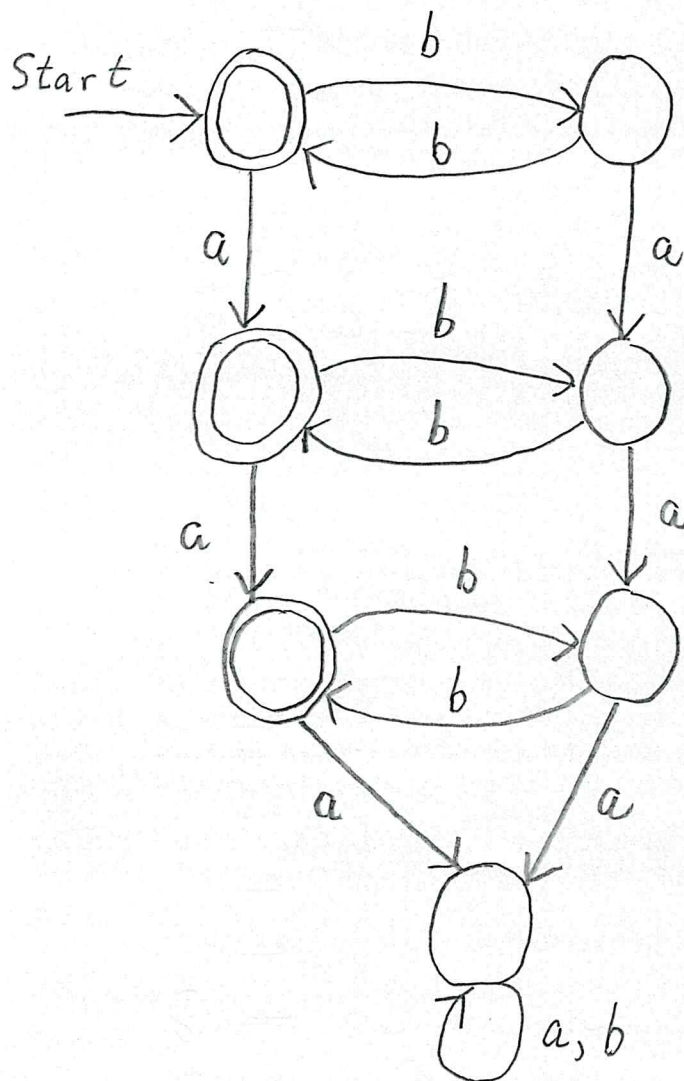
$$C \rightarrow bC$$

$$C \rightarrow a$$

5. (16%) Gefið er eftirfarandi mál ("language") yfir stafrófið  $\Sigma = \{a, b\}$

$$A = \{w \mid w \text{ inniheldur slétttölufjölda af } b \text{ OG } w \text{ inniheldur tvö eða færri } a \}$$

Teiknið stöðurit ("state diagram") fyrir DFA stöðuvél ("Deterministic Finite-state Automaton") sem samþykkir ("recognizes") málið A. Athugið að núll er slétt tala.







7. (10%) Gefið er eftirfarandi mál yfir stafrófið ("vocabulary")  $\Sigma = \{0,1\}$

$$A = \{0^n 1^m \mid n \leq m \leq 3n \text{ og } n \geq 0\}$$

Ritið samhengisfrjálsa mállýsingu ("context-free grammar") sem lýsir málinu A.

$$S \rightarrow 0 S 1$$

$$S \rightarrow 0 S 1 1$$

$$S \rightarrow 0 S 1 1 1$$

$$S \rightarrow \lambda$$