



HÁSKÓLINN Í REYKJAVÍK
REYKJAVÍK UNIVERSITY

Strjál stærðfræði II T- 419 – STR2

Lokapróf

Kennari: Halldór Halldórsson

Dagsetning: 04.04.2011

Tími: 14-17.00

**Hjálpargögn: Formúlublað (fylgir)
Reiknivél**

Nafn: _____

Kt.: _____

1. (10%) Gefið er eftirfarandi jöfnuhneppi:
- $$\begin{array}{rrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

Leysið jöfnuhneppið með því að setja upp aukna fylkið (“augmented matrix”) og beita **Gauss-Jordan eyðingu** (“Gauss-Jordan elimination”) á það. Sýnið útreikninga og látið allar línuaðgerðir koma skilmerkilega fram. Sýnið prófun á svarinu!

2. Gefnir eru eftirfarandi punktar í \mathbb{R}^3 :

$P_1 (3, 1, -2)$ og $P_2 (5, 4, -3)$.

- a) (5%) Ritið stikajöfnu beinnar línu (“parametric equations of the line”) sem inniheldur punktana P_1 og P_2 .

- b) (6%) Ritið á forminu $Ax + By + Cz = D$ jöfnu plans (“equation of the plane”) sem inniheldur punktana P_1 og P_2 og er hornrétt á plan með jöfnuna

$$5x + y - 2z = 7.$$

3. (7%) Í þessu dæmi er fjallað um varpanir í \mathbb{R}^2 .

Ákvarðið EITT vörpunarfylki sem framkvæmir eftirfarandi vörpun:

Fyrst 30° snúning rangsælis um upphafspunkt.

Síðan speglun (“reflection”) um x -ás.

Notið síðan vörpunarfylkið til að reikna hvert punkturinn $(2, -4)$ varpast.

4. (7%) Í þessu dæmi er fjallað um varpanir í \mathbb{R}^2 .
Ákvarðið EITT vörpunarfylki sem framkvæmir speglun um línuna $y = 3 - x$.
Notið einsleit hnit (“homogeneous coordinates”).
Notið síðan fylkið til að reikna hvert punkturinn $(2, -4)$ varpast.
Sýnið útreikninga ásamt skýringum.

5. (5%) Gefið er eftirfarandi mál yfir stafrófið $\Sigma = \{0,1\}$
 $A = \{w \mid (w \text{ inniheldur að minnsta kosti tvo } 1\text{-bita) og } (w \text{ inniheldur hlutstrenginn } 010) \}$

Ritið reglulega segð (“regular expression”) sem lýsir málinu A.

6. (5%) Gefið er eftirfarandi mál yfir stafrófið $\Sigma = \{0,1\}$
 $A = \{w \mid \text{lengd } w \text{ er oddatala og táknið í miðjunni er } 1\text{-biti} \}$

Ritið samhengisfrjálsa mállýsingu (“context-free grammar”) sem lýsir málinu A.

7. Gefið er eftirfarandi mál yfir stafrófið $\Sigma = \{a, b\}$

$A = \{w \mid w \text{ inniheldur oddatölufjölda af } \mathbf{b} \text{ EÐA nákvæmlega tvö } \mathbf{a}\}$
(Athugið að átt er við “inclusive or”)

a) (9%) Teiknið stöðurit (“state diagram”) fyrir DFA (“Deterministic Finite-state Automaton”) sem samþykkir (“recognizes”) málið A.

b) (4%) Teiknið stöðurit (“state diagram”) fyrir NFA (“Non-deterministic Finite-state Automaton”) sem samþykkir (“recognizes”) málið A^* þar sem aðgerðin $*$ táknar Kleene lokun (“Kleene closure”) fyrir mengið A.

8. (10%) Gefin er eftirfarandi þrepunarskilgreining á mengi S

Grunnþrep: $(3,4) \in S$

Þrepunarskref: Ef $(a,b) \in S$ þá er $(a+6,b+1) \in S$ og $(a+5,b+9) \in S$

Notið þrepun (“**structural induction**”) til þess að sanna að um sérhvert stak $(a,b) \in S$ gildi eftirfarandi:

$(a+b)$ er deilanleg með 7.

Vandið framsetningu!

Setjið fram þrepunarforsendu og sýnið hvar hún er notuð.

9.

- a) (4%) Setjið fram þrepunarskilgreiningu (“recursive definition”) á menginu $T = \{(a,b) \mid a \text{ er heil oddatala og } b \text{ er heil tala sem er margfeldi af } 3.\}$

- b) (8%) Er mengið T teljanlegt (“countable”)? **Rökstyðjið svarið!** Ef T er teljanlegt þarf að sýna hvernig stökin í menginu eru númeruð. Ef T er ekki teljanlegt þarf að sanna að ekki sé hægt að númera stökin í menginu?

[illegible]

EINUNGIS FYRIR ÞÁ SEM TAKA NETAFRÆÐI.

11. a) (3%) Teiknið netið C_6 ? Er C_6 tvíhlutanet (“bipartite graph”)? Rökstyðjið svarið.

b) (3%) Fyrir hvaða gildi á n er til Hamilton vegur (“Hamilton path”) í netinu $K_{n,20}$?

c) (4%) Finnið fjölda leggja (“edges”) í netinu Q_{10} . Rökstyðjið svarið!

EINUNGIS FYRIR ÞÁ SEM TAKA LÍKINDAREIKNING.

10. Líkur þess að móðurborð bili á ábyrgðartíma eru 15%. Skóli kaupir 10 slík móðurborð.

a) (4%) Reiknið líkur þess að nákvæmlega 2 móðurborð séu gölluð. Sýnið útreikninga.

b) (4%) Reiknið líkur þess að fleiri en 2 móðurborð séu gölluð. Sýnið útreikninga.

EINUNGIS FYRIR ÞÁ SEM TAKA LÍKINDAREIKNING.

- 11.** (4%) Finnið fjölda mismunandi umraðana á stöfunum í orðinu SAMANSAFN. Reiknið út úr svarinu og sýnið útreikninga.

- 12.** Bílnúmer skulu hafa 6 stafi. Fyrst koma 4 bókstafir og síðan 2 tölustafir. Gerum ráð fyrir 30 bókstöfum í stafrófinu og að öll slík bílnúmer séu leyfileg (t.d. BXEF23, TTTT70 og KCTK00).

- a) (3%) Hve mörg mismunandi bílnúmer eru til? Setjið upp svarið og reiknið út úr því.

- b) (5%) Sé bílnúmer valið af handahófi finnið þá líkur þess að röð bókstafanna í bílnúmerinu brjóti ekki í bága við stafrófsröð, þ.e. að alltaf þegar einn bókstafur er á undan öðrum bókstaf í bílnúmerinu þá sé hann ekki á eftir honum í stafrófinu. Athugið að sami bókstafur má koma fyrir oftari en einu sinni í bílnúmerinu. Setjið upp svarið og reiknið út úr því.