ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Φυσική και Τεχνολογία των laser

6^o εξάμηνο, ΣΕΜΦΕ

Ασκήσεις

Αθήνα, 2012

1 Άσκηση 1

Υπολογίστε τη συχνότητα(Hz), τον κυματαριθμό(cm^{-1}) και την ενέργεια ενός φωτονίου μήκους κύματος $\lambda = 1\mu m$ στο κενό.

Λύση:

Στο κενό έχουμε

$$\lambda\nu = c \tag{1}$$

και επομένως

$$\nu = \frac{\lambda}{c} = 3 \times 10^{14} Hz \tag{2}$$

άρα

$$E = h\nu = 1.99 \times 10^{-19} J \tag{3}$$

Λόγω του ότι $1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$ προκύπτει ότι $E = 1.24eV$, δηλαδή ίση με την κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου που έχει επιταχυνθεί από μία διαφορά δυναμικού $1.24eV$. Το αντίστροφο μήκος κύματος (κυματαριθμός) είναι $\widetilde{u} = \nu/c$ και χρησιμοποιείται συχνά με την έννοια της συχνότητας και εκφυλίζεται σε cm^{-1}, δηλαδή

$$\widetilde{N} = \frac{\nu}{c} = 10^4 cm^{-1} \tag{4}$$

Σημείωση: Ο τύπος μετατροπής ενέργειας eV και μήκους κύματος λ (μm) είναι

$$E(eV) = \frac{1.24}{\lambda(\mu m)} \tag{5}$$

Ο κυματαριθμός είναι λοιπόν

$$\widetilde{N} = \nu/c = \frac{E}{hc} \tag{6}$$

$1cm^{-1} \sim 1.24 \times 10^{-4} eV$
$1eV \sim 8065.5 cm^{-1}$

2 Άσκηση 2

Υπολογίστε σε κυματαριθμούς την ενέργεια $\Delta E = kT$, όπου k η σταθερά Boltzmann και T η απόλυτη θερμοκρασία $(300K)$.

Λύση:

Η θερμική ενέργεια των 300K δίνεται από τον τύπο

$$kT = 4.14 \times 10^{-21} J \tag{7}$$

Η σχέση κυματαριθμού-ενέργειας είναι

$$\widetilde{u} = \frac{\nu}{c} = \frac{E}{hc} = \frac{kT}{hc} = 208.5cm^{-1} \tag{8}$$

3 Άσκηση 3 (1.3 από λυσάρι)

Αν τα επίπεδα 1 και 2 ενός κβαντικού συστήματος είναι διαχωρισμένα από ενέργεια $E_2 - E_1$ τέτοια που η αντίστοιχη συχνότητα μετάπτωσης εμπίπτει στο μέσο της ορατής περιοχής, υπολογίστε το λόγο των πληθυσμών των δύο επιπέδων σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία δωματίου.

Λύση:

Σε περίπτωση θερμικής ισορροπίας, οι πληθυσμοί επιπέδων περιγράφονται από τη στατιστική Boltzmann. Παίρνοντας $\lambda = 0.55\mu m$, σαν το μέσο της ορατής περιοχής, αντιστοιχεί σε συχνότητα $18.181cm^{-1}$. Η εξίσωση της στατιστικής Boltzmann είναι:

$$\frac{N_2^e}{N_1^e} = exp[-\frac{E_2 - E_1}{kT}] = 1.1 \times 10^{-38} \tag{9}$$

όπου $kT = 208cm^{-1}$, $E_2 - E_1 = 18.181cm^{-1}$

Σημείωση:

- Όταν βλέπουμε άσκηση με θερμική ισορροπία, σκεφτόμαστε αμέσως τη στατιστική Boltzmann

$$exp[-\frac{E_2 - E_1}{kT}] = \frac{N_2}{N_1} \tag{10}$$

- Στην περιοχή του ορατού παίρνουμε όποιο λ μας βολεύει $(0.5 - 1\mu m)$.

4 Άσκηση 4 (1.4 από λυσάρι)

Σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας ($T = 300K$), ο λόγος των πληθυσμών των επιπέδων N_2/N_1 για κάποιο ιδιαίτερο ζεύγος επιπέδων δίνεται από το $1/e$. Υπολογίστε τη συχνότητα για αυτή τη μετάπτωση. Σε ποια περιοχή Η.Μ. φάσματος εμπίπτει αυτή η συχνότητα;

Λύση:

Από την εξίσωση της στατιστικής Boltzmann στην περίπτωση που $N_2/N_1 = 1/e$ έχουμε,

$$E_2 - E_1 = kT \tag{11}$$

η οποία για θερμοκρασία δωματίου δίνει:

$$E_1 - E_2 = 208cm^{-1} \tag{12}$$

Αυτός ο ενεργειακός διαχωρισμός αντιστοιχεί σε $\lambda = 49\mu m$ (υπέρυθρο, όχι μεσαίο υπέρυθρο).

5 Άσκηση 5

Προσδιορίστε το λόγο των πληθυσμών, σε θερμική ισορροπία δύο επιπέδων που απέχουν κατά ενέργεια ΔE ίση με:

1. $10^{-4}eV$ τιμή που ισοδυναμεί με την απόσταση δύο περιστροφικών επιπέδων πολλών μορίων
2. $5 \times 10^{-2}eV$ τιμή που ισοδυναμεί με τα μοριακά δονητικά επίπεδα
3. $3eV$ τιμή που αντιστοιχεί στην τάξη μεγέθους της ηλεκτρονικής διέγερσης ατόμων

Θεωρήστε ότι τα δύο επίπεδα έχουν τον ίδιο εκφυλισμό και ότι η θερμοκρασία είναι 100K, 300K (δωματίου) και 1000K.

Λύση:

Ο λόγος των πληθυσμών δύο επιπέδων σε θερμική ισορροπία που απέχουν κατά $\Delta E = E_2 - E_1 > 0$ δίνεται από την:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} exp[-\frac{\Delta E}{kT}] \tag{13}$$

N_1, N_2	οι πληθυσμοί
g_1, g_2	οι εκφυλισμοί των δύο επιπέδων

Από την παραπάνω εξίσωση και ξέροντας πως $g_1 = g_2$ έχουμε:

$\Delta E(eV)$	$T = 100K$	$T = 300K$	$T = 1000K$	Σχόλια
10^{-4}	0.9885	0.9962	0.9988	Ίδιοι πληθυσμοί, εύκολη αντιστροφή
5×10^{-2}	9×10^{-3}	1.45×10^{-1}	5.6×10^{-1}	Μερικοί πληθυσμοί στο 2 επίπεδο, αρκετή προσπάθεια για αντιστροφή. Πρέπει να ξεφύγει από θερμική ισορροπία και να πάει σε υψηλές θερμοκρασίες
3	5×10^{-184}	8×10^{-49}	8×10^{-16}	Πολύ δύσκολη η αντιστροφή πληθυσμών. Αμελητέοι πληθυσμοί στο 2 επίπεδο.

6 Άσκηση 6 (1.6 από λυσάρι)

Η δέσμη ενός laser ρουβιδίου ($\lambda = 0.694\mu m$), στέλνεται προς τη σελήνη αφού περάσει από τηλεσκόπιο διαμέτρου $1m$. Υπολογίστε τη διάμετρο D_m της δέσμης στη σελήνη υποθέτοντας πως η δέσμη έχει τέλεια χωρική συμφωνία (η απόσταση μεταξύ γης-σελήνης είναι περίπου $384.000km$).

Λύση:

Το μέγεθος της δέσμης στη σελήνη ορίζεται από την απόσταση δέσμης θ_d. Σύμφωνα με την παρακάτω σχέση και θέτοντας $\beta = 1$, βρίσκουμε:

$$\theta_d = \frac{\beta\lambda}{D} = 0.694 \times 10^{-6} rad \tag{14}$$

όπου D είναι η διάμετρος του τηλεσκοπίου. Έτσι η διάμετρος της δέσμης στη σελήνη δίνεται από:

$$D_m = 2Ltan\theta_d = 2L\theta_d = 532m \tag{15}$$

όπου L η απόσταση γης-σελήνης.
Σημείωση: Η διάμετρος του τελευταίου οπτικού στοιχείου που περνάει η δέσμη laser λέγεται διάμετρος πηγής.

7 Άσκηση 7

Δέσμη laser ισχύος $P_l = 10W$ εστιάζει σε φωτεινή κηλίδα διαμέτρου $d = 1mm$, πάνω σε μία απόλυτα απορροφητική επιφάνεια-στόχο. Υπολογίστε την πίεση ακτινοβολίας P_t πάνω στο στόχο.

Λύση:

Η ένταση της δέσμης είναι ίση με

$$I = 4P_l/\pi d_2 = 1.27 \times 10^{13} W m^{-2} \tag{16}$$

όπου $\pi d^2/4$ το εμβαδό της εστιασμένης δέσμης. Επομένως η πίεση της ακτινοβολίας πάνω στο στόχο είναι:

$$P_t = \frac{I}{c} = 4.2 \times 10^4 Pa = 0.42 bar \tag{17}$$

η οποία είναι συγκρίσιμη με την ατμοσφαιρική.

8 Άσκηση 8 (Χρόνος και μήκος συμφωνίας ασύμφωνης μονοχρωματικής ακτινοβολίας)

Χρησιμοποιούμε ένα φίλτρο συμβολής με ζώνη διέλευσης $10nm$ στα $500nm$ για να πετύχουμε μονοχρωματικό φως από πηγή λευκού φωτός. Υπολογίστε το χρόνο και το μήκος συμφωνίας του μονοχρωματικού φωτός.

Λύση:

Αν ο χρόνος συμφωνίας ΗΜ κύματος είναι τ_0 τότε το εύρος ζώνης αντίστοιχα είναι $\Delta\nu_0 \simeq 1/\tau_0$. Επομένως αντίστροφα αν το εύρος ζώνης είναι $\Delta\nu_0$ ο αντίστοιχος χρόνος συμφωνίας είναι $\tau_0 = 1/\Delta\nu_0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $c = \lambda\nu$ έχουμε:

$$|\Delta\nu| = \frac{c}{\lambda^2}|\Delta\lambda| \tag{18}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda} = 83fs \tag{19}$$

Το μήκος συμφωνίας είναι:

$$\lambda_c = c\tau_0 = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 2.5 \times 10^{-5}m \tag{20}$$

9 Άσκηση 9

Laser με οπτικό αντηχείο αποτελείται από δύο κάτοπτρα με ακτίνα καμπυλότητας $R = R_1 = R_2 = 200mm$. Λόγω κατασκευαστικών σφαλμάτων οι πραγματικές ακτίνες καμπυλότητας είναι $R_1 = R + \Delta R$ και $R_2 = R - \Delta R$, όπου $\Delta R = 3mm$. Τα laser λειτουργεί σωστά όταν τα κάτοπτρα τοποθετηθούν σε μικρότερη ή μεγαλύτερη απόσταση από την ομοεστιακή θέση. Εξηγήστε αυτή την πειραματική διαπίστωση και προσδιορίστε ακριβώς την απόσταση για την οποία το laser αρχίζει να λειτουργεί.

Λύση:

Για $L = R = 200mm$ οι παράμετροι σταθερότητας του αντηχείου είναι:

$$g_1 = 1 - \frac{R}{R + \Delta R} > 0 \tag{21}$$

$$g_2 = 1 - \frac{R}{R - \Delta R} < 0 \tag{22}$$

άρα για $g_1 g_2 < 0$, το οπτικό αντηχείο είναι ασταθές. Θα πρέπει λοιπόν:

$$g_1 g_2 > 0 \Rightarrow (1 - \frac{R}{R + \Delta R})(1 - \frac{R}{R - \Delta R}) > 0 \Rightarrow L^2 - 2RL + (R + \Delta R)(R - \Delta R) > 0 \tag{23}$$

Η παραπάνω ανίσωση ικανοποιείται για

$L > R + \Delta R$ $L < R - \Delta R$
Επομένως θα πρέπει τα κάτοπτρα να μετακινηθούν κατά $3mm$ προς τα μέσα ή προς τα έξω από την ομοεστιακή σχέση.

10 Θέμα 1 (Ρυμοί αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής)

Για ένα σύστημα σε θερμική ισορροπία υπολογίστε τη θερμοκρασία στην οποία εξισώνονται οι ρυθμοί αυθόρμητης και εξαναγκασμένης εκπομπής για το μήκος κύματος $500nm$. Επίσης να βρεθεί το μήκος κύματος στο οποίο οι ρυθμοί εξισώνονται σε $T = 4000K$.

Λύση:

Ο λόγος του ρυθμού αυθόρμητης εκπομπής A προς το ρυθμό εξαναγκασμένης εκπομπής W, δίνεται από:

$$R = \frac{A}{W} = \frac{A}{B\rho_{\nu 0}} \tag{24}$$

όπου $\rho_{\nu 0}$ η πυκνότητα της ενέργειας. Ο A/B δίνεται από την εξίσωση του Einstein:

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h N_0^3 n^3}{c^3} \tag{25}$$

Η πυκνότητα της ενέργειας δίνεται από τη εξίσωση του Planck:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{exp(h\nu/kT) - 1} \tag{26}$$

Έτσι έχουμε:

$$R = exp[\frac{N_0}{kT} - 1] = exp[\frac{hc}{kT\lambda}] - 1 \tag{27}$$

Επομένως η θερμοκρασία για την οποία έχουμε $R = 1$ είναι και μήκος κύματος $\lambda = 500nm$:

$$T = \frac{hc}{k\lambda ln2} = 41562K \tag{28}$$

Το μήκος κύματος στο οποίο οι ρυθμοί εξισώνονται σε $T = 4000K$, είναι:

$$\lambda = \frac{hc}{kTln2} = 5.2\mu m \tag{29}$$