

Analiza eficienței algoritmilor

SD 2020/2021

Analiza eficienței algoritmilor

Analiza funcțiilor recursive

- Funcții recursive

- Metoda substituției

- Metoda iterației

- Arborele de recursie

- Teorema Master

Clase de eficiență

Clasa	Notatie	Exemplu
logaritmic	$O(\log n)$	căutare binară
liniar	$O(n)$	căutare secvențială
pătratic	$O(n^2)$	sortare prin inserție
cubic	$O(n^3)$	înmulțirea a două matrici $n \times n$
exponențial	$O(2^n)$	prelucrarea submulțimilor unei mulțimi cu n elemente
factorial	$O(n!)$	prelucrarea permutărilor de ordin n

Analiza empirică a eficienței algoritmilor

- ▶ Utilizată atunci când analiza teoretică a eficienței este dificilă.
- ▶ Scop:
 - ▶ formularea unei ipoteze inițiale privind eficiența algoritmului;
 - ▶ verificarea unei afirmații (ipoteze) privind eficiența;
 - ▶ compararea algoritmilor;
 - ▶ analiza eficienței unei implementări.

Analiza empirică a eficienței algoritmilor

- ▶ Se stabilește scopul analizei.
- ▶ Se alege o măsură a eficienței
Exemplu: numărul de execuții ale unor operații, timpul, etc.
- ▶ Se stabilesc caracteristicile setului de date de intrare.
- ▶ Se implementează algoritmul.
- ▶ Se generează datele de intrare.
- ▶ Se execută programul pentru toate datele de intrare; se înregistrează rezultatele.
- ▶ Se analizează rezultatele.

Analiza eficienței algoritmilor

Analiza funcțiilor recursive

- Funcții recursive

- Metoda substituției

- Metoda iterației

- Arborele de recursie

- Teorema Master

Analiza eficienței algoritmilor

Analiza funcțiilor recursive

Funcții recursive

Metoda substituției

Metoda iterației

Arborele de recursie

Teorema Master

- ▶ Funcția $f()$ **apelează direct** funcția $g()$ dacă în definiția lui $f()$ există un apel la $g()$.
- ▶ Funcția $f()$ **apelează indirect** funcția $g()$ dacă $f()$ apelează direct o funcție $h()$, iar $h()$ apelează direct sau indirect funcția $g()$.
- ▶ Funcția $f()$ este definită **recursiv** dacă ea se auto-apelează direct sau indirect.

Definiția unei funcții recursive cuprinde:

- ▶ **Testarea cazului de bază** – condiția de oprire a apelului recursiv.
- ▶ **Apelul recursiv (cazul general)**: o variabilă (întreagă) este transmisă ca parametru funcției însăși, în așa fel ca după un număr de pași să se atingă cazul de bază.

Observație: Există și funcții recursive fără parametri.

Funcții recursive

Exemplul 1. Definiția funcției factorial:

- ▶ Cazul de bază: $0! = 1$;
- ▶ Cazul general: $n! = n \times ((n - 1)!)$, $n > 0$.

Function *factorial*(*n*)

begin

if $n \leq 1$ **then**

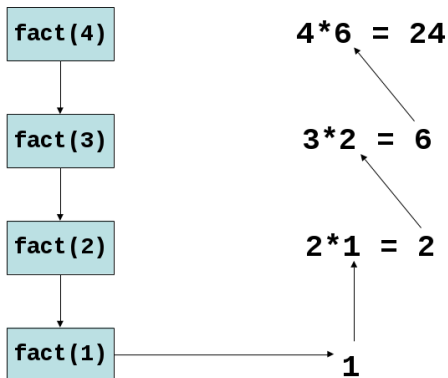
 return 1

else

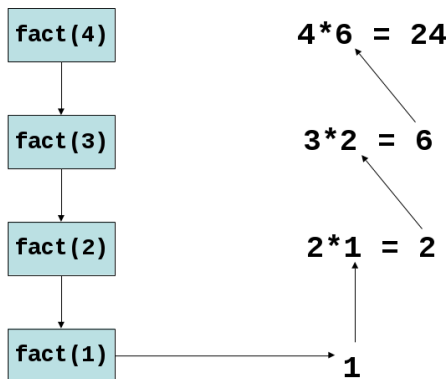
 return ($n * \text{factorial}(n - 1)$)

end

factorial(4) - apel recursiv



factorial(4) - apel recursiv



- ▶ algoritmi recursivi: ușor de implementat;
- ▶ costuri suplimentare: la fiecare apel recursiv se plasează o serie de informații într-o zonă de memorie specifică (stiva programului).

factorial(n) - varianta iterativă

```
Function factorial( $n$ )  
begin  
     $produs \leftarrow 1$   
    while  $n > 1$  do  
         $produs \leftarrow produs * n$   
         $n \leftarrow n - 1$   
    return  $produs$   
end
```

Observație: Valoarea returnată de *factorial*(n) este corectă doar pentru valorile lui n pentru care $n!$ este mai mic sau egal decât cea mai mare constantă întreagă pe care o putem reprezenta !

Exemplul 2. Șirul lui Fibonacci:

- ▶ $f(0) = 0, f(1) = 1,$
- ▶ $f(n) = f(n-1) + f(n-2), n > 1.$

Function $fib(n)$

begin

if $n \leq 1$ **then**

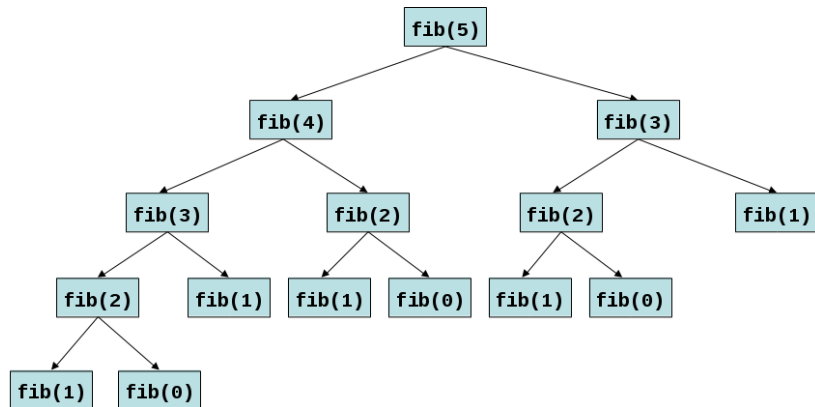
 return n

else

 return $fib(n-1) + fib(n-2)$

end

Fibonacci recursiv: arbore apeluri



$$O(\phi^n)$$

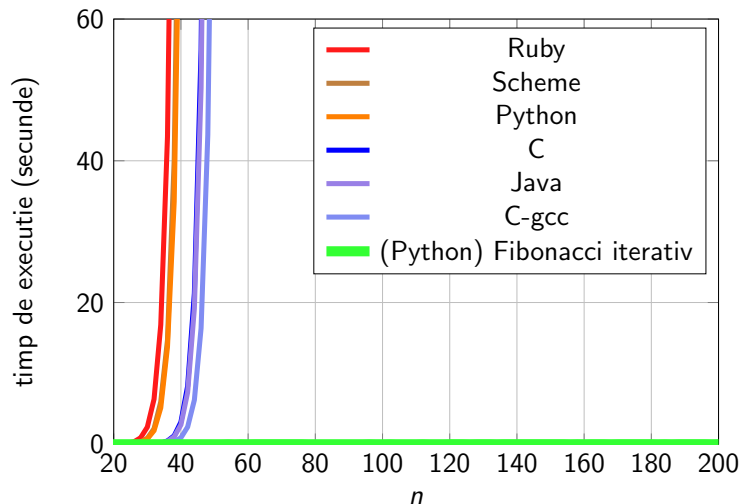
Număr de apeluri

n	fib(n)	apeluri
2	1	3
24	46'368	150'049
42	267'914'296	866'988'873
43	433'494'437	1'402'817'465

Recursie vs. iterație: Fibonacci iterativ

```
Function ifib(n)  
begin  
     $f0 \leftarrow 0$   
     $f1 \leftarrow 1$   
    if  $n \leq 1$  then  
        return  $n$   
    else  
        for  $k \leftarrow 2$  to  $n$  do  
             $temp \leftarrow f1$   
             $f1 \leftarrow f1 + f0$   
             $f0 \leftarrow temp$   
        return  $f1$   
end
```

Comparație Fibonacci recursiv/iterativ



Eficiența algoritmilor recursivi

- ▶ Pentru estimarea timpului de execuție:
 - ▶ se stabilește relația de recurență care exprimă legătura dintre timpul de execuție corespunzător problemei inițiale și timpul de execuție corespunzător problemei reduse;
 - ▶ se rezolvă relația de recurență.
- ▶ Exemplu: pentru calculul factorialului, relația de recurență pentru timpul de execuție este:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 1, & n \geq 1 \end{cases}$$

Rezolvarea recurențelor

1. **Metoda substituției.** Se ghicește o limită și apoi se utilizează inducția matematică pentru a demonstra corectitudinea.
2. **Metoda iterației.** Se iterează recurența și se exprimă ca o sumă de termeni care depind doar de dimensiunea problemei și de condițiile inițiale.
3. **Arborele de recursie.** Convertește recurența într-un arbore (nodurile reprezintă costuri).
4. **Metoda master.** Furnizează limite pentru recurențe de forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Analiza eficienței algoritmilor

Analiza funcțiilor recursive

Funcții recursive

Metoda substituției

Metoda iterației

Arborele de recursie

Teorema Master

1. Metoda substituției

- ▶ Se ghicește soluția.
- ▶ Se utilizează inducția matematică pentru a determina constantele și pentru a demonstra că soluția este corectă.

Metoda substituției - exemplu

Determinarea unei limite superioare pentru relația $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

Metoda substituției - exemplu

Determinarea unei limite superioare pentru relația $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

- ▶ Ghicim soluția: $T(n) = O(n \log n)$.
- ▶ Demonstrăm prin inducție că $T(n) \leq cn \log n$, pentru $c > 0$.

Metoda substituției - exemplu

Determinarea unei limite superioare pentru relația $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

- ▶ Ghicim soluția: $T(n) = O(n \log n)$.
- ▶ Demonstrăm prin inducție că $T(n) \leq cn \log n$, pentru $c > 0$.

Presupunem că limita are loc pentru toate valorile pozitive $m < n$, în particular pentru $m = \lfloor n/2 \rfloor$: $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \log(\lfloor n/2 \rfloor)$.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c \lfloor n/2 \rfloor \log(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\ &\leq cn \log(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &= cn \log n - cn \log 2 + n \\ &= cn \log n - cn + n \\ &\leq cn \log n, \text{ pentru } c \geq 1 \end{aligned}$$

Metoda substituției - exemplu

Determinarea unei limite superioare pentru relația $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

- ▶ Ghicim soluția: $T(n) = O(n \log n)$.
- ▶ Demonstrăm prin inducție că $T(n) \leq cn \log n$, pentru $c > 0$.

Presupunem că limita are loc pentru toate valorile pozitive $m < n$, în particular pentru $m = \lfloor n/2 \rfloor$: $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \log(\lfloor n/2 \rfloor)$.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c \lfloor n/2 \rfloor \log(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\ &\leq cn \log(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &= cn \log n - cn \log 2 + n \\ &= cn \log n - cn + n \\ &\leq cn \log n, \text{ pentru } c \geq 1 \end{aligned}$$

Trebuie să arătăm că soluția este validă și pentru condițiile limită.

$$T(1) = 1 \leq c1 \log 1 = 0$$

Cazuri de bază: $T(2)$ și $T(3)$ ($n_0 = 2$)

$$T(2) = 4 \text{ și } T(3) = 5, \quad T(2) \leq c2 \log 2 \text{ și } T(3) \leq c3 \log 3 \Rightarrow c \geq 2.$$

Metoda substituției - subtilități

- ▶ Scăderea unui termen de ordin inferior (pentru a consolida ipoteza inductivă).

Exemplu: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

- ▶ Ghicim soluția: $T(n) = O(n)$.
- ▶ Demonstrăm prin inducție că $T(n) \leq cn$, pentru $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 \\ &= cn + 1 \end{aligned}$$

- ▶ Demonstrăm prin inducție că $T(n) \leq cn - d$, $d \geq 0$ const.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq (c\lfloor n/2 \rfloor - d) + (c\lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \\ &\leq cn - d, \text{ pentru } d \geq 1 \end{aligned}$$

Trebuie să alegem constanta c suficient de mare pentru a satisface condițiile limită.

Metoda substituției - subtilități

- ▶ Evitarea capcanelor

Exemplu: $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

Demonstrăm “fals” ca $T(n) = O(n)$ ghicind $T(n) \leq cn$ și argumentând:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n), \quad \Leftarrow \text{fals!!} \end{aligned}$$

Eroarea: nu am demonstrat *forma exactă* a ipotezei inductive.

Metoda substituției - subtilități

- Schimbare de variabilă.

Exemplu: $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$

Simplificăm recurența printr-o schimbare de variabilă $m = \log n$.

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

Redenumim $S(m) = T(2^m)$, și avem $S(m) = 2S(m/2) + m$.

$$S(m) = O(m \log m),$$

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \log m) = O(\log n \log \log n).$$

Analiza eficienței algoritmilor

Analiza funcțiilor recursive

Funcții recursive

Metoda substituției

Metoda iterației

Arborele de recursie

Teorema Master

Iterarea unei recurențe

Metoda substituției: implică ghicirea soluției (!)

Iterarea relației de recurență:

▶ directă

- ▶ se pornește de la cazul particular și se construiesc termeni succesivi folosind relația de recurență;
- ▶ se identifică forma termenului general $T(n)$;
- ▶ se verifică prin calcul direct sau inducție matematică.

▶ inversă

- ▶ se pornește de la cazul $T(n)$ și se înlocuiește $T(h(n))$ cu valoarea corespunzătoare, apoi se înlocuiește $T(h(h(n)))$ și așa mai departe, până se ajunge la cazul particular;
- ▶ se efectuează calculele și se obține $T(n)$.

Iterarea unei recurențe - exemplu $n!$

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(n-1) + 1, & n > 1 \end{cases}$$

Iterarea unei recurențe - exemplu $n!$

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(n-1) + 1, & n > 1 \end{cases}$$

Iterare directă

$$T(1) = 0$$

$$T(2) = 1$$

$$T(3) = 2$$

...

$$T(n) = n - 1$$

Iterarea unei recurențe - exemplu $n!$

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ T(n-1) + 1, & n > 1 \end{cases}$$

Iterare directă

$$T(1) = 0$$

$$T(2) = 1$$

$$T(3) = 2$$

...

$$T(n) = n - 1$$

Iterare inversă

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

$$T(n-1) = T(n-2) + 1$$

...

$$T(2) = T(1) + 1$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = n - 1$$

Iterarea unei recurențe - exemplu

$$T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n$$

$$\begin{aligned}T(n) &= n + 3(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 3T(\lfloor \frac{n}{16} \rfloor)) \\&= n + 3\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 9(\lfloor \frac{n}{16} \rfloor + 3T(\lfloor \frac{n}{64} \rfloor)) \\&= n + 3\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 9\lfloor \frac{n}{16} \rfloor + 27T(\lfloor \frac{n}{64} \rfloor)\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}&\leq n \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^i + \Theta(n^{\log_4 3} T(1)) \\&= 4n + \Theta(n^{\log_4 3} T(1)) \\&= O(n)\end{aligned}$$

Observație: utilizarea seriilor geometrice:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \text{ pentru } x \neq 1$$

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \text{ pentru } |x| < 1$$

Analiza eficienței algoritmilor

Analiza funcțiilor recursive

Funcții recursive

Metoda substituției

Metoda iterației

Arborele de recursie

Teorema Master

2. Arborele de recursie

- ▶ **Arborele de recursie:**

- ▶ permite vizualizarea ieterării unei recurențe;
- ▶ fiecare nod reprezintă costul unei subprobleme;
- ▶ se calculează suma costurilor pe nivele și apoi se însumează aceste costuri pentru a determina costul total al recursiei.

- ▶ Arborele de recursie poate fi utilizat pentru a genera o valoare pentru metoda substituției.

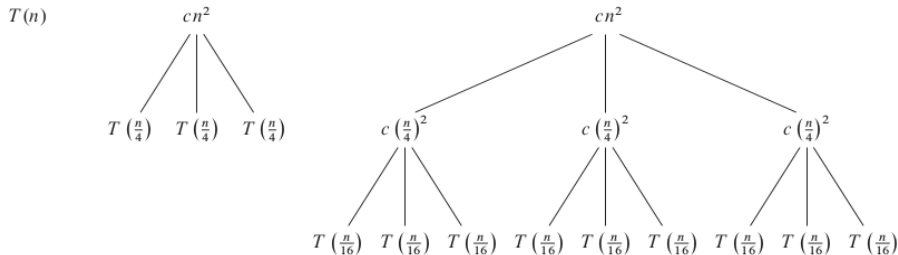
Arborele de recursie - exemplu

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

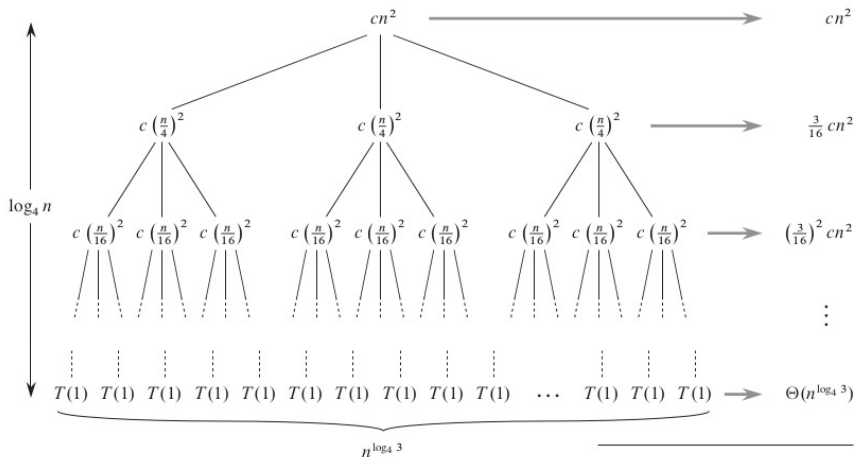
Arborele de recursie - exemplu

$$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

- Creăm arborele de recursie pentru $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$, $c > 0$



Arborele de recursie - exemplu



Arborele de recursie - exemplu

- ▶ Dimensiunea unei subprobleme corespunzătoare unui nod de adâncime i : $n/4^i \Rightarrow$ dimensiunea subproblemei ajunge la $n = 1$ când $n/4^i = 1 \Leftrightarrow i = \log_4 n \Rightarrow$ arborele are $\log_4 n + 1$ nivele.
- ▶ Numărul de noduri de la nivelul i : 3^i .
- ▶ Fiecare nod de pe nivelul i are costul: $c(n/4^i)^2$.
- ▶ Costul total al nodurilor de la nivelul i : $3^i c(n/4^i)^2 = (3/16)^i cn^2$
(Ultimul nivel $\log_4 n$: $n^{\log_4 3} T(1)$.)

Arborele de recursie - exemplu

$$\begin{aligned}T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \dots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\&= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\&< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\&= \frac{1}{1 - (3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\&= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\&= O(n^2)\end{aligned}$$

Arborele de recursie - exemplu

- ▶ Utilizăm metoda substituției pentru a verifica că $T(n) = O(n^2)$ este o limită superioară pentru relația $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$.
- ▶ Arătăm ca $T(n) \leq dn^2$, pentru $d > 0$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \\ &\leq 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\ &\leq 3d(n/4)^2 + c(n^2) \\ &= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2 \\ &\leq dn^2, \text{ pentru } d \geq (16/13)c \end{aligned}$$

Analiza eficienței algoritmilor

Analiza funcțiilor recursive

Funcții recursive

Metoda substituției

Metoda iterației

Arborele de recursie

Teorema Master

3. Teorema Master

- ▶ Furnizează o metodă de rezolvare a recurențelor de forma $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ unde $a \geq 1$ și $b > 1$ sunt constante, iar $f(n)$ este o funcție asimptotic pozitivă.

- ▶ **Teorema Master:**

Fie $a \geq 1$ și $b > 1$ constante, $f(n)$ o funcție și $T(n)$ definită pe numere întregi nenegative prin relația de recurență:

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$. Avem:

1. Dacă $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ pentru $\epsilon > 0$ constant, atunci $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Dacă $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, atunci $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. Dacă $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ pentru $\epsilon > 0$ constant, și dacă $af(n/b) \leq cf(n)$ pentru $c < 1$ și n suficient de mare, atunci $T(n) = \Theta(f(n))$.

Teorema Master - exemple

► $T(n) = 9T(n/3) + n$

$a = 9, b = 3, f(n) = n$ și $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$.

Cum $f(n) = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$, cu $\epsilon = 1$, putem aplica cazul 1 al teoremei master $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$.

► $T(n) = T(2n/3) + 1$

$a = 1, b = 3/2, f(n) = 1$ și $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$.

Cum $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$, putem aplica cazul 2 al teoremei master $\Rightarrow T(n) = \Theta(\log n)$.

Teorema Master - exemple

► $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$

$a = 3, b = 4, f(n) = n \log n$ și $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$

Cum $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \epsilon})$, cu $\epsilon \approx 0.2$, putem aplica cazul 3 al teoremei master dacă are loc condiția:

$af(n/b) = 3(n/4) \log(n/4) \leq (3/4)n \log n = cf(n)$ pentru $c = 3/4$ și n suficient de mare. Rezultă $T(n) = \Theta(n \log n)$.

► Metoda master nu se poate aplica pentru $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

$a = 2, b = 2, f(n) = n \log n$ și $n^{\log_b a} = n$

Cum $f(n) = n \log n$ este asimptotic mai mare decât $n^{\log_b a} = n$, putem aplica cazul 3 (fals!!).

$f(n)$ nu este *polinomial* mai mare.

$f(n)/n^{\log_b a} = (n \log n)/n = \log n$ este asimptotic mai mic decât n^ϵ , pentru orice constantă pozitivă ϵ .