

稀疏信号欠 Nyquist 采样与重构研究现状分析*

陈 鹏, 孟 晨, 王 成

(军械工程学院 导弹工程系, 石家庄 050003)

摘要: 传统的信号采样理论要求采样频率需高于 Nyquist 频率(信号最高频率)的两倍, 给射频及超宽带领域的信号采样、存储和传输造成巨大压力。近年来针对可以进行稀疏表示的信号, 欠 Nyquist 采样技术取得了很大的发展, 大大降低了精确重构原始信号所需的采样率。综述性地归纳了目前可以进行欠 Nyquist 采样的信号模型, 将出现的各种欠 Nyquist 采样总结为一个基本模型, 并针对频域稀疏和时域稀疏信号分别对采样模型及原理进行了阐述, 分析了采样信号的子空间探测和重建方法, 讨论了稀疏信号欠 Nyquist 采样与重构的实现与应用现状, 并对研究前景进行了展望。

关键词: 欠 Nyquist 采样; 联合子空间; 稀疏信号模型; 有限新息率; 压缩感知; 信号重构

中图分类号: TN911.72 文献标志码: A 文章编号: 1001-3695(2015)02-0336-07

doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2015.02.004

Recent advances on sub-Nyquist sampling and reconstruction of sparse signals

CHEN Peng, MENG Chen, WANG Cheng

(Dept. of Missile Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China)

Abstract: Traditional signal sampling theories require a sampling rate than two times of Nyquist rate (the highest frequency of signals), greatly restrict the sampling, storage and transition of RF and super wideband signals. Recent years sub-Nyquist sampling achieved significant development on signal able to be represented sparsely, greatly reducing the sampling rate required for perfectly recovery of the original signals. This paper generalized the signal models which satisfied the condition for sub-Nyquist sampling and summarized the several sub-Nyquist sampling frame into a basic model, respectively described the special model and principle aiming at frequency and time sparse signal. Then the paper analyzed the signal subspace detection and reconstruction methods and discussed the realization and implementation. At last it prospected the research potentiality.

Key words: sub-Nyquist sampling; union of subspace; sparse signal model; finite rate of innovation; compressed sensing; sign reconstruction

0 引言

数字信号处理技术在过去十年间飞速发展, 传统电路中越来越多的功能都可以通过软件算法实现。信号采样技术作为模拟世界通往数字世界的大门, 对电子技术水平的提高起着决定性的作用^[1]。欠 Nyquist 采样技术是近年来国内外研究的热点, 在测试仪器、状态监测、雷达以及数字通信领域具有广泛的需求。目前研究此技术主要是基于以下几点原因:

a) 根据 Nyquist 采样定理, 要求采集的信号 $f(t)$ 为带限信号, 采样频率 f_s 至少高于信号最高频率 f_{\max} 的两倍, 即 $f_s \geq 2f_{\max}$ 。对于非带限信号, ADC 采样率要求过高, 直接采样成本都极其高昂^[2]。周期非均匀采样电路复杂结构和时钟同步都使得采样的稳定性降低^[3]。

b) 即使随着半导体技术的发展能生产出采样率更高的 ADC, 并且成本降低, 带宽和能效量化比特数 (ENOB) 也是一对不可调和的矛盾, 导致高精度的信号采集成为难题。对于大动态

混合信号需面临采样过程中对 ADC 采样率和 ENOB 的折中^[4]。

c) 下变频技术可以使射频信号的采样无须高采样率的 ADC 就能完成很好的重构, 但是对于通信、频谱监测中遇到的载频未知的多带信号或频率组成未知的谐波信号, 这种方法已经无能为力^[5]。

d) 传统 Nyquist 采样条件下对 ADC 采样率很高的射频微波信号、超宽带窄脉冲信号等, 都可以在一定的空间中稀疏表示为时域稀疏或者频域稀疏信号。即使对于频域和时域都不稀疏的调频连续波信号, 通过匹配滤波器也可以进行脉冲压缩, 形成时域稀疏信号, 信号的稀疏表示使得压缩采样技术得以应用^[6]。

而欠 Nyquist 采样技术能够采用成熟廉价的设备, 通过较低的采样率实现高带宽信号、复杂信号的采样, 同时保持信号很高的重构精度, 弥补了传统采样技术的不足, 因此对欠 Nyquist 采样技术的研究具有重要的学术和应用价值。

稀疏信号欠 Nyquist 采样技术和传统采样技术最大的不同

收稿日期: 2014-04-21; 修回日期: 2014-05-29 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61372039)

作者简介: 陈鹏(1987-), 男, 河南开封人, 博士研究生, 主要研究方向为信号采集、自动测试技术、压缩感知 (beimingke@163.com); 孟晨(1963-), 男, 博导, 博士, 主要研究方向为状态监测与故障诊断、自动测试技术、人工智能、信号分析与处理技术; 王成(1980-), 男, 讲师, 博士, 主要研究方向为状态监测与故障诊断、测试信号处理、压缩感知。

是在采样之前将信号变换到稀疏域,使用能够对信号进行稀疏表示的采样核函数完成采样和重构。稀疏信号欠Nyquist采样需要根据不同信号模型研究不同的采样方法,从而设计出相应的采样设备和重构算法。目前的采样方法主要有针对载频未知的多带信号的调制宽带转换器(modulated wideband converter, MWC)采样^[7-9]、针对时域稀疏信号的有限新息率(finite rate of innovation, FRI)采样和Gabor框架采样^[10-12]、针对谐波信号的随机解调器(random demodulator, RD)^[13]等。这些采样方法的整体思路是信号 $f(t)$ 通过调制和滤波在联合子空间(union of subspaces, UoS)进行压缩,使用低速率的ADC测量信号 $y[n]$,最终通过子空间探测和凸优化、匹配追踪、零化滤波、MUSIC、ESPRIT等估计算法对信号进行重构^[14-17]。信号的采样流程如图1所示,分为信号采样和信号重构两个部分。

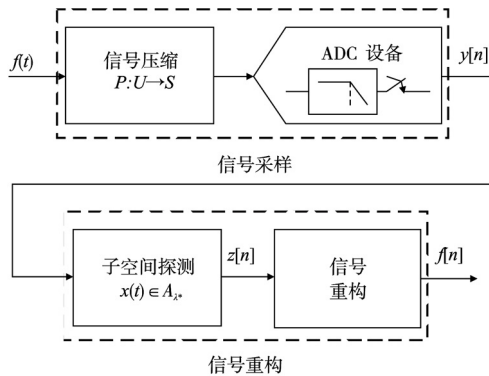


图1 欠Nyquist采样流程

1 信号模型

1.1 信号空间

在过去的二十年间,针对不同信号空间的采样理论的研究使得可采集的信号范围大大拓展,并且信号重构的准确性和可靠性大大提高^[18,19]。平移不变空间(shift-invariant, SI)是欠Nyquist采样中应用最通用的信号空间,由一系列平移不变的基函数 $\varphi_\xi(t)$ 张成,即 $S = \text{span}\{\varphi_\xi(t) | 1 \leq \xi \leq m\}$, N 可为有限或无限。SI空间中的任何信号都可表示为

$$f(t) = \sum_{\xi=1}^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_\xi[n] \varphi_\xi(t - nT) \quad (1)$$

采集的离散序列为 $\{d_\xi(n) | 1 \leq \xi \leq m, n \in \mathbb{Z}\}$ 。在欠Nyquist采样中,时间点 nT 上的信号可由SI空间中 m 个基函数完整表达,采样过程可视为将信号通过一个 m 阶滤波器组后均匀采样,此时采样系统的整体采样率为 m/T ^[20]。如果信号可以用 $k \leq m$ 个函数表示,那么就认为信号是稀疏的,信号的整体采样率可以降低到 k/T ,这也是实现欠Nyquist采样的最基本条件。

当前应用中的很多信号在SI空间采样中表达参数不确定且需要很高的自由度,使用传统的单子空间采样大大限制了采样率的进一步降低,而用UoS表达信号并在其上采样可以弥补单子空间的不足^[21-23]。若hilbert空间 $H = L_2(\mathbb{R})$ 上的模拟信号 $f(t)$ 处于联合子空间,则

$$f(t) \in U \triangleq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad (2)$$

其中: Λ 为 H 中子空间 A_λ 的指标集。由于在实际采样的过程中 λ^* 未知,所以要求采样使用的基函数在 H 空间完备,对于稀疏信号欠Nyquist采样,这组基是冗余的。完成采样后,首先

要探测出 λ^* ,然后再根据采集的离散序列和基函数对信号进行表达,从而完成信号 $f(t)$ 的重构。

1.2 典型的欠Nyquist采样信号模型

1.2.1 频域稀疏信号

频域稀疏信号的欠Nyquist采样主要集中在多带信号模型,其在傅里叶空间中可由有限个窄带信号表达,广泛应用于通信、电子对抗等领域。每个载频对应的频带为一个子空间,多带信号组成一个联合子空间。多带信号可由图2进行直观表示。

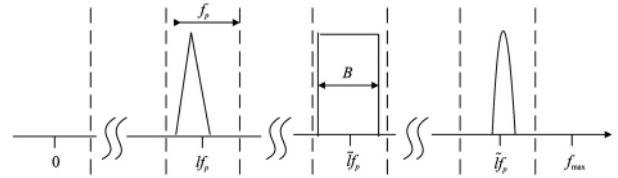


图2 多带信号示例图

由于载频 f_i 在 $[0, f_{\max}]$ 上连续,信号在频域联合子空间有无穷多个。为了用有限个子空间表示信号,将整个频带如图2进行均匀切分成有限个通带子空间 $V_l (l \in L)$,信号模型可利用 V_l 构成的联合子空间进行表达^[7]。若信号各个子带的最大带宽为 B ,切分的最小带宽要满足 $f_p \geq B$,整个频带切分的个数 $L_0 = \left\lceil \frac{f_{\max} + B}{f_p} \right\rceil - 1$ ^[24]。包含 k 个子带信号子空间 A_λ ,可以用 V_l 的直和表示,即 $A_\lambda = \bigoplus V_l$ 。这里联合子空间的维度有限,而子空间 A_λ 由于信号波形未知,其本身的维度是无限的。

频域稀疏信号的一个特例是 $B \rightarrow 0$ 时 $f(t)$ 为谐波信号,由有限个正弦波叠加而成^[13],信号模型可表示为

$$f(t) = \sum_{\omega \in \Omega} a_\omega e^{-2\pi i \omega t} \quad t \in [0, 1] \quad (3)$$

其中: $\Omega \subset \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm W/2\}$,表示信号的频率空间。由于每个子空间的波形是确定的正弦信号,其子空间的维度有限。这类信号在实际应用中有广泛应用,如声信号、缓变chirp信号、平滑信号及分段平滑信号等^[25-27]。

1.2.2 时域稀疏信号

时域稀疏信号在雷达、通信、GPS导航等领域有很重要的应用,此类信号基本模型如式(4)所示。

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^S a_s[n] p_s(t - t_s - n\tau) \quad (4)$$

其中: $a_s[n]$ 为调制幅度, $p_s(t - t_s - n\tau)$ 为时域支撑较窄的波形。信号特征如图3所示。

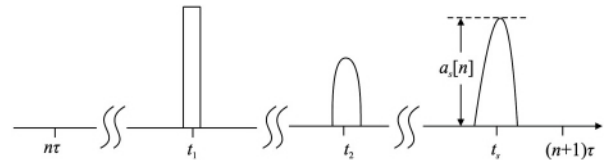


图3 时域稀疏信号示例图

根据式(4)参数的设置,目前研究主要归纳为三种类型的信号。

a) S 为有限正整数, $p(t)$ 已知, $\tau = 0$, $f(t)$ 仅由幅度和延迟 $\{a_s, t_s\}_{1 \leq s \leq S}$ 这 $2S$ 个参数确定,此类信号称之为有限新息率(finite rate of innovation, FRI)信号^[28,29]。信号自由度为 $2S$,能以最低 $2S$ 的采样率进行采样和重构。为了简化采样方法,多数文献在 $\tau \neq 0$ 的条件下或对信号进行周期延拓后进行研

究^[30-32] 因为 τ 是否为零对子空间的维度和联合子空间的维度都没有影响。由于波形已知, 子空间 A_s 的维度有限, 而连续时域 $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$ 内 t_s 的位置组合有无限多种可能, 使得联合子空间 U 的维度 $|A|$ 为无限。由于 $t_s \leq \tau$, 此种模型又称为有限延迟 FRI 模型。

b) $S \rightarrow \infty$ $p(t)$ 已知, 此种模型称为无限新息序列。文献[29-31]中将无限新息序列分成一系列有限延迟 FRI 模型, 采用前一种类型的采样方法获取信号, 但在切分好的有限延迟 FRI 子空间中, 其采样率要上升到 $6S$ 以上^[31]。而在实际采样中, S 为有限正整数, $a_s[n] \neq a_s[n+\tau]$, $\tau \neq 0$ 条件下的 $f(t)$ 的模型特例应用最为广泛^[32, 33], 其子空间维度和联合子空间维度 $|A|$ 都为无限。 $f(t)$ 在采样后利用修正矩阵滤波器对信号完成重构, 采样率可以降低至 $2S/\tau$ 。

c) S 为有限正整数, $p(t)$ 未知, 时域内 $p(t)$ 个数有限, 最大宽度范围可估。此类信号研究最少, 目前只有文献[12]探索了基于 Gabor 框架的采样方法。此类信号在频域的刻画与多带信号几乎相同, 不同的是其稀疏域在时域而不是频域, 信号模型关于联合子空间的分析参照多带信号。

2 采样模型

2.1 基本采样模型

针对不同的信号模型, 不同的文献提出了各种欠 Nyquist 采样模型, 如 MWC^[8]、RD^[13]、基于 FRI 的信号多通道采样结构^[10]、Gabor 框架采样结构^[12]等, 归结起来可用图 4 所示的模型进行描述。

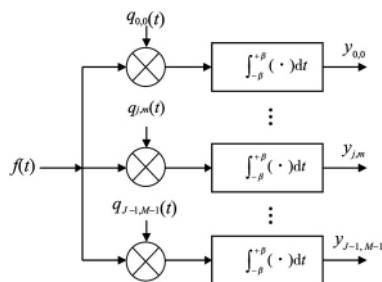


图4 欠Nyquist信号采样模型

图 4 中 $f(t)$ 分多个通道进行采样, 采样时间长度为 $t \in [-\beta, \beta]$, 每一个通道上采集的信号可以通过式(5)表示。

$$y_{j,m} = \int_{-\beta}^{\beta} f(t) q_{j,m}(t) dt \quad (5)$$

其中: $q_{j,m}(t) = w_j(t) s_m(t)$, 满足 $0 \leq j \leq J-1$, $0 \leq m \leq M-1$; $w_j(t)$ 为调制波形, $s_m(t)$ 为采样空间函数; $s_m(t) = \sum_{n=-N_0}^{N_0} c_{m,n} \times \overline{g(t-nT_s)}$ 表示 $g(t)$ 的共轭, 采样点数为 $N=2N_0+1$ 。采样过程中 $f(t)$ 与 $w_j(t)$ 相乘可实现信号稀疏表示。

2.2 频域稀疏信号采样

频域稀疏信号采样模型主要有 MWC 和 RD, 分别应用于多带信号和谐波信号的采集。

MWC 采样模型的主体思想是将图 2 中的频率切片合入基带, 低通滤波后进行基带采样, 采集到的序列为不同幅度调制的基带信号的叠加。由于不同通路幅度调制系数按频带排列成的向量具有很好的相干性, 保证了信号 $f(t)$ 在载频未知的情况下可用远低于 Nyquist 采样率 f_{Nyq} 的采样率完成信号采样和重构。

采样时, MWC 将信号 $f(t)$ 分入多个通道, 使用周期为 T_p 的波形 $w_j(t)$ 进行调制, 完成信号频域稀疏表示, 再使用低通滤波器 $s_m(t)$ 取出基带信号进行低通滤波和逐点采样。 $w_j(t)$ 可以用傅里叶级数 $w_j(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{jl} e^{2\pi i f_{jl} t}$ 表示, 通过时域相乘实现频谱搬移, 获得基带内稀疏叠加的测量信号。令 z_n 为 $x(t) \times e^{2\pi i f_{jl} t}$ 在频域的表示, 采样 $N=2N_0+1$ 次得到测量值为 $Y_{J \times N}$, MWC 采样系统可以表示为

$$Y = DZ \quad (6)$$

其中: $D_{J \times L} = \{d_{jl}\}_{J \times L}$, $C_{N \times N} = I$, $N=L$, $Z_{L \times N} = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$ 。由于多带信号在频域稀疏, x_n 为稀疏向量。若 $f(t)$ 子带个数为 K_0 , 且频率支撑域未知, 则 x_n 的稀疏度 $K \leq 2K_0$ 。文献[24]证明了使用 MWC 在采样率 $f_s \geq 2K_0 B$ 的条件下信号能精确重构。文献[7]指出如果信号频率支撑域已知, 则在采样率 $f_s \geq K_0 B$ 条件下采样信号可精确重构。为使采集的信号频域支撑能够覆盖原始信号的整个频带, 即 $L f_p \geq f_{\max}$, 需要保证在支撑域内 $d_{jl} \neq 0$ 。文献[8]通过位移寄存器产生的随机序列实现了 $w_j(t)$ 硬件电路, 在实际采样中具有很好的采样效果。为了提高 MWC 的鲁棒性, 文献[34]对比了调制函数 $w_j(t)$ 为 Maximal、Gold、Hadamard、Kasami 以及高斯伪随机序列等多种序列, 证明 $w_j(t)$ 选择 Maximal、Gold 序列可以用更少的采样通道更好地恢复出平均功率很低的信号。选择合适的调制序列本质在于提高 D 列向量的相干性, 保证式(6)满足信号恢复所需核函数的正交性。

RD 采样的主体思想与 MWC 类似, 但是将频域平移变换改为频域伸缩变换后进行采样, 利用随即序列发生器调制采样矩阵, 提高测量矩阵的相干性, 最终实现欠 Nyquist 采样与重构。其采样模型只有一路通道, $y(t) = w_j(t)$ 为非周期伪随机信号, $s(t) = s_m(t)$ 为理想的低通滤波器。RD 将信号 $f(t)$ 和一个翻转速率为 W/s 的随机 ± 1 信号序列相乘, 再以恒定的采样率 $R < W$ 进行采样, 得到长度为 R 的向量 y 。令 z 为 $t \in [n/W, (n+1)/W]$ 内 $f(t)$ 的均值在每个频点的幅度, 则采样模型的数学表示如下:

$$y = \Phi Fz \quad (7)$$

MWC 和 RD 这两种采样模型都在实际中得到了实现^[35-36], 对比这两种采样方法, 都是通过频域变换完成信号的稀疏表示和采样, 但它们有各自的适用范围, MWC 适合多带信号采样而 RD 更适合谐波信号采样。文献[24]从需要的硬件精度、软件复杂度以及失配模型鲁棒性方面对 MWC 和 RD 进行了综合分析, RD 方法在采集 RF 信号时调制信号的时域精度要求更严格, 重构过程中运算量更大, 而且对模型失配的敏感度更高。

2.3 时域稀疏信号采样

FRI 采样中 S 有限的信号模型欠 Nyquist 采样的基本思想是先获得傅里叶系数

$$F[k] = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) e^{-2\pi i k t / \tau} dt = \frac{1}{\tau} P(2\pi k / \tau) \sum_{l=1}^L a_l e^{-2\pi i k l t / \tau} \quad (8)$$

再从复指数序列的叠加中利用谱估计恢复出 a_s 和 t_s 信息^[37-38]。时域稀疏的 FRI 信号利用很少量的傅里叶系数即可获得信号的全部信息, 使得需要采样的点大幅减少, 从而大幅

降低所需的采样率。

经典的单通道的 FRI 采样模型中 $w(t) = w_j(t) = 1$, 通过采样核函数滤波器 $s(t) = s_m(t)$ 获取维度为 $L \geq 2S$ 的向量 y , 其与傅里叶系数向量 z 的关系为

$$\text{DFT}\{y\} = Sz \quad (9)$$

其中: S 是 $L \times L$ 的对角滤波器矩阵, 对角线上第 k 个元素为 $s(t)$ 的频率响应的复共轭 $S^*(2\pi k/\tau)$ 。采样核函数的选择是 FRI 采样的关键, 可保证所有的 $F[k]$ 通过 S 后不丢失信息。文献[28]最早提出了使用高斯采样核函数采样的方法, 但快速发散或收敛的指数项对采样点调制时系统的稳定性较差。文献[29]提出使用样条函数作为采样核函数, 可用信号时域样本来代替傅里叶系数, 但是当 S 尺寸很大时系统稳定性也开始变坏。sinc 函数克服了稳定性的缺点, 但由于支撑域无限且衰减较慢, 不适合有限延迟信号采样^[39]。为了选择更好的采样核函数, 文献[31]提出了一种通用的条件, 即 $\omega = 2\pi k/\tau$, $k \in K$ 条件下 $S(\omega) \neq 0$ 。sinc 函数叠加类核函数 (sum of sines, SoS) 严格满足此标准, 能够保证时域紧支撑, 而且当 SoS 加 Hamming 窗效果更好。另一种符合条件式 (10) 的核函数为指数再生核函数^[40], 不仅与自身对偶函数的内积为冲击函数, 而且可以轻松地通过微分电路实现^[29]。

FRI 多通道采样模型可以提供更多的自由度, 实现更低的采样率, 实现有限或者无限自由度信号的采集。最早文献[4]在文献[29]的基础上进行改进, 将采样模型从单通道拓展为多通道, 在每个通道上降低了采样率, 但是它的整体采样率与文献[29]提出的方法相当。文献[42]在信号核函数滤波之前, 增加了信号调制, 令 $w_j(t) = e^{2\pi i k t / T_s}$, 体现出多通道的优势, 真正再次降低了采样率。此种方法的优点是直接利用振荡器、乘法器和积分器即可实现, 但这也恰恰是它的弱点, 因为需要用很多的振荡器, 对系统同步产生较高要求。将此模型进行拓展, 文献[41]又提出了混合傅里叶系数采样模型 $w_j(t)$ 改进为 $w_j(t) = \sum_{k \in K} w_{qk} e^{2\pi i k t / T_s}$, $q = 1, 2, \dots, Q$ 。可将每个傅里叶系数的信息分布于多个通道, 当其中一个通道不可用或者不同通道的振荡器振荡频率不同时, 采样和信号恢复不受影响。使用 $w_j(t)$ 预先调制信号后, 相当于在采样前对 y 先进行傅里叶变换, 若选择 sinc 采样核函数, 式(9)在多通道情况下为

$$y = Dz \quad (10)$$

无限新息序列信号模型仍然可以使用 $w_j(t) = 1$ 的模型直接采样, 采样通道为 M 路, 使用带宽为 $2\pi M/\tau$ 的核函数进行滤波和采样, 采样率为 $1/\tau$ 。和 MWC 采样类似, 多路信号可以合并在一个滤波器中滤波后进行采样, 但采样率要提高 M 倍。滤波器的作用是在进行低速采样前对脉冲信号进行平滑, 保证每个周期都能够采集到延时信息。

针对时域稀疏信号波形未知的情况, 文献[12]提出了 Gabor 框架下信号采样的方法。Gabor 框架下信号采样的主体思想是采集 Gabor 系数, 将脉冲的位移信息利用非零值的位置提取出来, 利用加窗短时傅里叶变换将波形信息降低到低频单独表示, 最终通过重构合成信号。在此采样模型中, 可令 $w_j(t) = \sum_{l=-L_0}^{L_0} d_{jl} e^{2\pi i b l t} s_m(t) = \sum_{n=-N_0}^{N_0} c_{mn} \overline{g(t-na)}$, 完成有限时长信号。定义算子 $T_x f(t) := f(t-x)$, $M_\omega f(t) := e^{2\pi i \omega t} f(t)$, 第 jm 个通道的采样值可表示为

$$y_{jm} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} f(t) q_{jm} dt = \sum_{l=-L_0}^{L_0} d_{jl} \sum_{n=-N_0}^{N_0} c_{mn} \langle f, T_{bl} M_{an} g \rangle \quad (11)$$

令 $z_{kl} = \langle f, T_{bl} M_{an} g \rangle$, 式(11)可用矩阵方程 $Y = DX^T$ 表示, 其中 $X = CZ$ 。Gabor 采样框架的主体思想是对时域信号进行时频分析, 采样的过程就是获得加窗的短时傅里叶变换系数 z_k 的过程。结合式 (10) 可知, C 决定了信号的时域瞬时信息, D 决定了信号的频域瞬时信息。 D 为 $w_j(t)$ 傅里叶级数的系数, 为了使 $f(t)$ 短时傅里叶变换过程中频域信息不丢失, 令 $u(t)$ 表示 $w_j(t)$ 在系统内滤波后的特性, 需要保证频率响应 $\hat{u}(\omega)$ 满足 $\omega = bl$, $|l| \leq L_0$ 的条件下 $\hat{u}(\omega) = 1$ 。

窗函数 $g(t)$ 的选择决定了短时傅里叶变换对脉冲波形的重构精度, 要保证 Gabor 采样时频网格不出现欠抽样, 否则会造成信息模糊。其基本条件为冗余 Gabor 框架冗余度 $\mu = ab \leq 1$ 。文献[43-44]结合窗函数的波形和冗余度, 对其支撑特性进行了分析; 文献[45-46]提出了 $\mu \geq 0.5$ 条件下的样条窗函数并证明了其优良的特性。目前的基于 Gabor 框架的欠 Nyquist 采样窗函数的选择仍基于这些讨论, 随着 Gabor 理论的进一步发展, 窗函数的选择将会有更好的解决方案。

3 采样信号重构

根据上面介绍的各种欠 Nyquist 采样模型, 其采样输出 y 和 $f(t)$ 变换到稀疏空间的信息 z 在形式上都可表达为 $y = Az$ 。信号重构的第一种情况是, 从 MWC、RD 和 2.2 节中第三类频域稀疏采样中获得稀疏向量 z , z 的非零值位置直接对应的是稀疏域子空间的支撑位置信息, 非零值本身对应的是某时刻信号稀疏域的幅度信息, 再通过 z 的空间逆变换可恢复出 $f(t)$ 。第二种情况是, 从 FRI 采样中获得傅里叶系数 z , z 本身不一定稀疏, 但可从中估计出稀疏域子空间的支撑位置信息 t_l 和某时刻信号稀疏域子空间的幅度信息 a_l , 通过式 (4) 加权求和恢复出 $f(t)$ 。因此信号重构可以分两步完成, 第一步是探测出子空间位置和幅度信息, 第二步是根据探测出的子空间信息重构出原始信号 $f(t)$ 。

3.1 子空间探测

对于第一种情况, 求解 z 的过程即为子空间探测^[15], 其本身是一个从欠定方程中求解稀疏向量的问题, 可以利用 CS 理论很好地解决^[47-52]。CS 的几个关键要素中, y 为观测向量, A 为观测矩阵, z 为待测稀疏向量。为了保证稀疏信号的精确重构, 要求由 $q_{jm}(t)$ 产生的观测矩阵 A 满足约束等距条件 (restricted isometry property, RIP)^[47]。实际应用中, 信号调制选择的伪随机序列和构造的各种采样核函数充分满足这个条件^[34]。根据 CS 理论, 求解 z 等价于

$$\min \|z\|_0, y = Az \quad (12)$$

这是一个 NP 难题, 为了保证精确重构, CS 理论指出 A 满足 RIP 时可将式 (11) 中的 l_0 范数优化问题转换为 l_1 范数优化。 k 阶稀疏向量 z 的重构已经有很多现成的算法, 如经典的凸优化算法, 更加节约运算量的 OMP、ROMP 算法, 以及高重构精度的 CoSaMP、SP、IHT 算法等^[48]。由于向量 z 的支撑集 $\Lambda = \{l | z[n] \neq 0\}$ 在连续的整个时间轴 n 上是恒定的, 因此 $k = |\Lambda|$ 。

多通道信号重构实际上是一个多测量向量(multiple measurement vector, MMV)信号重构问题^[7],即对 $Y = Az$ 方程的求解。MMV 重构设计到联合稀疏信号模型,目前关于联合稀疏信号求解在上面提到的重构算法中都有对应的版本,并且具有很好的相位传递特性^[49]。

对于第二种情况,有限延迟 FRI 信号未知的 $\{a_l, t_l\}_{l=1}^L$ 可以通过谱估计等方法从 z 中获得。当 z 的维度较低时,零化滤波^[50]具有很好的效果。如果采样点数较多时,矩阵束(matrix-pencil)^[51]方法和 Tufts and Kumaresan 方法^[52]则具有更好的鲁棒性。无限新息序列子空间探测可以通过 DOA 估计或谱估计的方法完成,从而获得 $\{a_l, t_l\}_{l=1}^L$ 信息,具体的算法如 ESPRIT、MUSIC 等在实际应用中都具有很好的效果^[53, 54]。

3.2 子空间信号恢复

对于 MWC 采样,获得 z 之后首先进行差值运算,然后进行滤波和频谱搬移即可恢复出原始信号。对于 RD 采样可以利用 $f = F^{-1}z$ 直接求出原始信号。FRI 信号利用 $\{a_l, t_l\}_{l=1}^L$ 对已知波形 $p(t)$ 加权求和即可。Gabor 框架欠 Nyquist 采样目前研究的比较少,文献[12]给出了基本的重构方法,见定理 1。

定理 1 $f(t)$ 为有限时间信号,时域支撑区间为 $[-\beta/2, \beta/2]$, ε_Ω ($\varepsilon_\Omega < 1$) 倍功率衰减带限为 $[-\Omega/2, \Omega/2]$, $\gamma \in S_0$ 为 Gabor 框架 $G(g, a, b)$ 的对偶原子。对于每一个 $\varepsilon_B > 0$, 都存在 $L_0 < \infty$, 使得

$$\|f - \sum_{n=-N_0}^{N_0} \sum_{l=-L_0}^{L_0} z_n M_{nl} T_{an} \gamma\|_2 \leq \tilde{C}_0(\varepsilon_\Omega + \varepsilon_B) \|f\|_2 \quad (13)$$

其中: $\tilde{C}_0 = C_{a,b}^2 \| \gamma \|_{S_0} \| g \|_{S_0}$, \tilde{C}_0 中 $C_{a,b}$ 满足 $C_{a,b} = (1 + 1/a)^{1/2} (1 + 1/b)^{1/2}$ 。定理中对偶原子 γ 只有在紧支撑的条件下才能用于恢复多脉冲信号。实际上,对于 FRI 信号当求出 z 之后,也可以用定理 1 直接求解,文献[12]在定理 1 的基础上给出了推论,提出了应用此方法核函数 $g(t)$ 需要满足的若干条件。

4 实现与应用

文献[8, 15]中对 MWC 采样方法进行了实现,设计了四通道前端采样电路,可以用 280 MHz 的采样率采集奈奎斯特频率为 2 GHz 的信号,采样系统信噪比为 35 dB。文献[55, 56]探索了其认知无线电等领域的应用,谱估计和频谱监测将成为最主要的应用之一。RD 采样目前公布出来的电路样板最高采样范围仍不超过 1 MHz,其采样带宽受到调制序列翻转频率的影响,过高的反转频率引入噪声造成模型失配。文献[57]探索了约束随机解调器(constrained random demodulator, CRD),理论上可以提高采样带宽,但是在实际应用中暂未有新的电路样板出现。

FRI 采样研究时间较长,应用范围已经涉及雷达回波采样、GPS 定位及超声波成像等领域^[33, 39, 58]。文献[59]设计了 4 通道的脉冲接收机,可以用 1 MHz 的整体采样率采集 30 MHz 的中频信号,但是在雷达系统中 FRI 欠 Nyquist 采样的数学模型还需进一步完善,多普勒频率等很多信息的提取还不能满足实际应用。GPS 定位、超声波成像等目前都没有专用硬件系统实现,仍然停留在理论和实验阶段,同时其 RMSE、重构成功率等都有待进一步提高,基于 Gabor 框架的欠 Nyquist 采样方法仍然仅限于理论分析。

5 研究展望

欠 Nyquist 采样技术经过几年的发展,可以采集的信号模型种类有了很大的拓展,采样模型的设计和信号重构方法日臻完善,新的理论层出不穷,但是总结起来还有很大的研究空间。依据目前的发展状况,以下几项内容未来有必要深入研究:

a) 可采集的信号模型的完善和类型的拓展。目前可以进行欠 Nyquist 采样的信号类型如本文所述主要为频域稀疏的多带信号、谐波信号以及时域稀疏的脉冲信号,已经涉及到射频采样的大部分常用信号类型,但是应用中还存在诸多限制:(a) 多带信号要求频带个数和通带最大宽度已知,载频固定,频带个数和通带宽度未知的信号有待研究,跳频信号的研究有待发展;(b) 谐波信号主要是多连续波信号的叠加,还应拓展到基于联合子空间的分段谐波信号等类型;(c) FRI 信号多局限于有固定周期的有限信号;(d) 超宽带调频连续波信号频带最宽已经提升到 240 GHz^[60],其模拟信号在相位空间稀疏,相位空间稀疏采样将是重要研究方向。

b) 采样系统的完善和功能的融合。目前的采样系统基本模型可用图 4 进行归纳,覆盖功能完全,但是还有很多方面有待完善:(a) 随机调制序列的翻转频率及重复周期和输入信号的带宽有密切关系,同时翻转频率过高时由硬件系统引入的噪声会造成模型失配,调制序列的数学模型和性质需要完善;(b) 采样核函数的选择对信号的滤波特性有重要关系,目前的核函数种类很多,但是便于硬件实现的核函数仍有待探索;(c) Gabor 采样框架具有很强的通用性,理论上可以覆盖已有的各种模型,但是在未来各种采样模型和 Gabor 采样模型更加具体的分析以及模型间的融合会是一个研究热点。

(c) 重构方法需要进一步完善。重构算法的核心是子空间探测,目前的方法主要归纳为 CS 重构和谱估计。在未来的研究中:(a) 如果各种采样模型和 Gabor 采样模型得到有效的融合,各种重构算法将是 Gabor 采样模型下算法的拓展;(b) 联合稀疏模型的 CS 重构应用范围仍比较窄,需要进一步研究;(c) 稀疏信号的合成模型(sparse synthetic model)研究非常成熟,而分析模型(cospase analysis model)仍有很大的研究空间。分析模型的应用可以将重构中子空间探测和信号恢复的两个步骤合二为一,极有可能是简化重构、提高实时性的重要方法^[61]。

欠 Nyquist 采样的基本条件是信号可以在某个空间进行稀疏表示,采样系统再将信号变换到稀疏表示的空间,分离出子空间的位置信息和子空间内信号具体的波形信息,最后完成信号的重构。在未来的研究中,更多的欠 Nyquist 采样方法将会涌现,采样信号的范围将会进一步拓宽,而且朝着更加精确、简便的方向发展。

参考文献:

- [1] UNSER M. Sampling—50 years after Shannon[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(4): 569-587.
- [2] LE Bin, RONDEAU T W, REED J H, et al. Analog-to-digital converters[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2005, 22(6): 69-77.
- [3] WALDEN R H. Analog-to-digital converters and associated IC technologies[C]//Proc of Compound Semiconductor Integrated Circuits Symposium, 2008: 1-2.
- [4] ELDAR Y, MICHAELI T. Beyond bandlimited sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2009, 26(3): 48-68.

- [5] MISHALI M, ELDAR Y C. Sub-Nyquist sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(6): 98-124.
- [6] MISHALI M, ELDAR Y C. A minimum squared-error framework for generalized sampling [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2006, 54(6): 2155-2167.
- [7] MISHALI M, ELDAR Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 375-391.
- [8] MISHALI M, ELDAR Y C, DOUNAEVSKY O, *et al.* Xampling: analog to digital at sub-Nyquist rates [J]. *IET Circuits, Devices & Systems* 2011, 5(1): 8-20.
- [9] MISHALI M, ELRON A, ELDAR Y C. Sub-Nyquist processing with the modulated wideband converter [C]//Proc of IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing. 2010: 3626-3629.
- [10] MICHAELI T, ELDAR Y C. Xampling at the rate of innovation[J]. *IEEE Trans on Signal Processing* 2012, 60(3): 1121-1133.
- [11] URIGIEN J A, ELDAR Y C, DRAGOTTI P L, *et al.* Sampling at the rate of innovation: theory and applications [M]// *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012: 148-209.
- [12] ELDAR Y C, MATUSIA K E. Sub-Nyquist sampling of short pulses: WIPO Patent 2012049591 [P]. 2012-04-20.
- [13] TROPP J A, LASKA J N, DUARTE M F, *et al.* Beyond Nyquist: efficient sampling of sparse bandlimited signals[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2010, 56(1): 520-544.
- [14] WIMALAJEewa T, ELDAR Y C, VARSHNEY P K. Subspace detection from structured union of subspaces via linear sampling [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, Xiv preprint arXiv: 1304.6281, 2013.
- [15] MISHALI M, ELDAR Y C, ELRON A J. Xampling: signal acquisition and processing in union of subspaces[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4719-4734.
- [16] PELEG T, GRIBONVAL R, DAVIES M E. Compressed sensing and best approximation from unions of subspaces: beyond dictionaries [C]//Proc of the 21st European Signal Processing Conference. 2013: 1-5.
- [17] ELDAR Y C, MISHALI M. Block sparsity and sampling over a union of subspaces [C]//Proc of the 16th International Conference on Digital Signal Processing. 2009: 1-8.
- [18] DAUBECHIES I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1990, 36(5): 961-1005.
- [19] ELDAR Y C. Compressed sensing of analog signals in shift-invariant spaces[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2009, 57(8): 2986-2997.
- [20] ELDAR Y C. Uncertainty relations for shift-invariant analog signals [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2009, 55(12): 5742-5757.
- [21] LU Y M, DO M N. A theory for sampling signals from a union of subspaces [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2334-2345.
- [22] BLUMENSATH T, DAVIES M E. Sampling theorems for signals from the union of finite-dimensional linear subspaces[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2009, 55(4): 1872-1882.
- [23] ELDAR Y C, MISHALI M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2009, 55(11): 5302-5316.
- [24] MISHALI M, ELDAR Y C. Blind multiband signal reconstruction: compressed sensing for analog signals [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2009, 57(3): 993-1009.
- [25] HERMAN M, STROHMER T. Compressed sensing radar [C]//Proc of IEEE Radar Conference. 2008: 1-6.
- [26] BERENT J, DRAGOTTI P L. Perfect reconstruction schemes for sampling piecewise sinusoidal signals [C]//Proc of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2006: III.
- [27] DONOHO D L, VETTERLI M, DEVORE R A, *et al.* Data compression and harmonic analysis[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1998, 44(6): 2435-2476.
- [28] VETTERLI M, MARZILIANO P, BLU T. Sampling signals with finite rate of innovation [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2002, 50(6): 1417-1428.
- [29] DRAGOTTI P L, VETTERLI M, BLU T. Sampling moments and reconstructing signals of finite rate of innovation: Shannon meets Strang-Fix [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2007, 55(5): 1741-1757.
- [30] MARAVIC I, VETTERLI M. Sampling and reconstruction of signals with finite rate of innovation in the presence of noise [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2005, 53(8): 2788-2805.
- [31] TUR R, ELDAR Y C, FRIEDMAN Z. Innovation rate sampling of pulse streams with application to ultrasound imaging [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1827-1842.
- [32] NOVAK P, NAVARIK J, PECHOUSEK J, *et al.* Development of fast pulse processing algorithm for nuclear detectors and its utilization in LabVIEW-based Mössbauer spectrometer [J]. *Journal of Instrumentation*, 2014, 9(1): T01001.
- [33] BAJWA W U, GEDALYAHU K, ELDAR Y C. Identification of Parametric underspread linear systems and super-resolution radar [J]. *IEEE Trans on Signal Processing* 2011, 59(6): 2548-2561.
- [34] MISHALI M, ELDAR Y C. Expected RIP: conditioning of the modulated wideband converter [C]//Proc of IEEE Information Theory Workshop 2009: 343-347.
- [35] MISHALI M, ELDAR Y C. Wideband spectrum sensing at sub-Nyquist rates [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(4): 102-135.
- [36] YU Zhui-zhuan, HOYOS S, SADLER B M. Mixed-signal parallel compressed sensing and reception for cognitive radio [C]//Proc of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2008: 3861-3864.
- [37] STOICA P, MOSES R L. Introduction to spectral analysis [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [38] BLU T, DRAGOTTI P L, VETTERLI M, *et al.* Sparse sampling of signal innovations [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 31-40.
- [39] DESLAURIERS-GAUTHIER S, MARZILIANO P. Sampling signals with a finite rate of innovation on the sphere [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2013, 61(17-20): 4552-4561.
- [40] URIGIEN J A, DRAGOTTI P L, BLU T. On the exponential reproducing kernels for sampling signals with finite rate of innovation [C]//Proc of the 9th Sampling Theory and Application Conference. 2011.
- [41] AKHONDI-ASL H, DRAGOTTI P L, BABOULAZ L. Multichannel

- sampling of signals with finite rate of innovation [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2010, 17(8): 762-765.
- [42] GEDALYAHU K, TUR R, ELDAR Y C. Multichannel sampling of pulse streams at the rate of innovation [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1491-1504.
- [43] DAUBECHIES I, GROSSMANN A, MEYER Y. Painless nonorthogonal expansions [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1986, 27(5): 1271.
- [44] CHRISTENSEN O. Pairs of dual Gabor frame generators with compact support and desired frequency localization [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2006, 20(3): 403-410.
- [45] LAUGESEN R S. Gabor dual spline windows [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 27(2): 180-194.
- [46] CHRISTENSEN O, KIM H O, KIM R Y. Gabor windows supported on $[-1, 1]$ and compactly supported dual windows [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2010, 28(1): 89-103.
- [47] CANDÉS E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. *Comptes Rendus Mathématique*, 2008, 346(9): 589-592.
- [48] BLUMENSATH T, DAVIES M E, RILLING G. Greedy algorithms for compressed sensing [M]// *Compressed Sensing: Theory and Application*. Cambridge: Cambridge University, 2012: 348-393.
- [49] BLANCHARD J D, CERMAK M, HANLE D, *et al.* Greedy algorithms for joint sparse recovery [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1694-1704.
- [50] GEDALYAHU K, ELDAR Y C. Time-delay estimation from low-rate samples: A union of subspaces approach [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2010, 58(6): 3017-3031.
- [51] HUA Y, SARKAR T K. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise [J]. *IEEE Trans on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1990, 38(5): 814-824.
- [52] TUFTS D W, KUMARESAN R. Estimation of frequencies of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1982, 70(9): 975-989.
- [53] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. *IEEE Trans on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984-995.
- [54] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. *IEEE Trans on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276-280.
- [55] COHEN D, ELDAR Y C. Sub-Nyquist sampling for power spectrum sensing in cognitive radios: a unified approach [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2013, 61(15): 1-10.
- [56] 田鹏武. 基于压缩感知的大动态混合信号采集技术研究 [D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2012.
- [57] HARMS H, BAJWA W, CALDERBANK R. A constrained random demodulator for sub-Nyquist sampling [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2013, 61(3): 707-723.
- [58] LI Xiao, RUEETSCHI A, ELDAR Y C, *et al.* GPS signal acquisition via compressive multichannel sampling [J]. *Physical Communication*, 2012(7): 173-184.
- [59] BARANSKY E, ITZHAK G, SHMUEL I, *et al.* A sub-Nyquist radar prototype: hardware and algorithms [J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(2): 809-822.
- [60] JAESCHKE T, BREDENDIEK C, POHL N. A 240 GHz ultra-wide-band FMCW radar system with on-chip antennas for high resolution radar imaging [C]// *Proc of IEEE International Conference on Microwave Symposium Digest*. 2013: 1-4.
- [61] CANDES E J, ELDAR Y C, NEEDLELL D, *et al.* Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 31(1): 59-73.
- (上接第 325 页)
- [23] 霍峥, 孟小峰, 黄毅. PrivateCheckIn: 一种移动社交网络中的轨迹隐私保护方法 [J]. *计算机学报*, 2013, 36(4): 716-726.
- [24] HASHEM T, KULIK L, ZHANG Rui. Countering overlapping rectangle privacy attack for moving kNN queries [J]. *Information Systems*, 2013, 38(3): 430-453.
- [25] HU Wen-ling, WANG Yong-li, ZHANG Gong-xuan. A privacy protection method for continuous query based on location services [J]. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2013, 18(5): 449-454.
- [26] GÖTZ M, NATH S, GEHRKE J. MaskIt: privately releasing user context streams for personalized mobile applications [C]// *Proc of ACM International Conference on Management of Data*. New York: ACM Press, 2012: 289-300.
- [27] DEWRI R, THURIMELLA R. Exploiting service similarity for privacy in location-based search queries [J]. *IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems*, 2014, 25(2): 374-383.
- [28] DWORK C. Differential privacy [C]// *Proc of the 33rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming*. Berlin: Springer, 2006: 1-12.
- [29] ANDRÉS M E, BORDENABE N E, CHATZIKOKOLAKIS K, *et al.* Geo-indistinguishability: differential privacy for location-based systems [C]// *Proc of the 20th ACM Conference on Computer and Communications Security*. New York: ACM Press, 2013: 901-914.
- [30] CHATZIKOKOLAKIS K, PALAMIDESI C, STRONATI M. A predictive differentially-private mechanism for location privacy [C]// *Proc of the 14th International Symposium on Privacy Enhancing Technologies*. Berlin: Springer, 2014: 21-41.
- [31] BORDENABE N E, CHATZIKOKOLAKIS K, PALAMIDESI C. Optimal geo-indistinguishable mechanisms for location privacy [C]// *Proc of the 21st ACM Conference on Computer and Communications Security*. New York: ACM Press, 2014.
- [32] PAPADOPOULOS S, BAKIRAS S, PAPADIAS D. Nearest neighbor search with strong location privacy [J]. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 2010, 3(1): 619-629.
- [33] MOURATIDIS K, YIU M L. Shortest path computation with no information leakage [J]. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 2012, 5(8): 692-703.
- [34] PAULET R, KOASAR M G, YI Xun, *et al.* Privacy-preserving and content-protecting location based queries [C]// *Proc of the 28th International Conference on Data Engineering*. 2012: 44-53.
- [35] YI Xun, KAOSAR M G, PAULET R, *et al.* Single-database private information retrieval from fully homomorphic encryption [J]. *IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering*, 2013, 25(5): 1125-1134.
- [36] ILARRI S, MENA E, ILLARRAMENDI A. Location-dependent query processing: where we are and where we are heading [J]. *ACM Computing Surveys*, 2010, 42(3): 12-90.
- [37] LI Guo-liang, FENG Jian-hua, XU Jing. DESKS: direction-aware spatial keyword search [C]// *Proc of the 29th International Conference on Data Engineering*. 2012: 474-485.