Максим Сохацький

Формальна філософія

УДК 13
УДК 821.161.2

Формальна філософія

Автор: Максим Сохацький (1980)

Про Автора

Намдак Тонпа (Максим Сохацький), доктор філософії КПІ (2015—2019), буддистський капелан лінії передачі Лонгчен Нінгтік тибетського буддизму (2011—2023).

Провідний інженер-програміст ДП «ІНФОТЕХ» (2019—2023) у підпорядкуванні МВС України. Автор «Депозитів ПриватБанк» та «МІА: Документообіг» побудованих на авторських творах ERP.UNO та N2O.DEV. Намагається створити інститут формальної математики «Групоїд Інфініті».

Постійне посилання твору: https://axiosis.top/journal/
Видавець: Інститут формальної математики «Групоїд Інфініті»
Сайт інституту: https://groupoid.space/institute/

ISBN: 978-617-8027-23-0

Збірка статей які виходили в журналі «Формальна філософія».

Анотація

Зміст

1 Свідомість

Формальна філософія якщо й має чимось займатися, то лише кодуванням різних моделей свідомості (різного ступеня фрічества, чому фрічество взагалі допускається скажу пізніше). Не здаватимуся політкоректним, більшість філософів, які вивчаються в контексті свого предмета, я вважаю душевно хворими людьми (і не бачу нічого в цьому поганого). Якщо ви можете уявити будь-яку модель на MLTT і більш сучасних типових системах, і можете розповісти, як ця модель кодує якийсь феномен, ви вже стаєте личинкою формального міні-філософа. Зазвичай що складніша модель, то більше вписувалося її як твір розглядатимуть інші формальні художники.

Багато хто критично ставиться до сучасних моделей AI, тому що вони надто прості, щоб повірити, що там може зародитись якась автономна свідомість. Щоб дати можливість системі зародитися і здобути якусь свободу, ми повинні надати цій системі якийсь простір, і глибина цього простору повинна перебувати в мові цієї системи. У MLTT таку глибину, яка закриває навіть гьоделівські питання, надає ієрархія всесвітів. Причому вона виникає незалежно від наших примх, типи зобов'язані десь перебувати, тому ми в мові виділяємо контейнер для типів U_n, і кажемо, що цей тип містить усі типи (наочно це демонструє індукція-рекурсія, в інших випадках потрібно вірити тайпчекеру, що всі формейшин рули ядра живуть в U_n. Природно постає питання межі послідовності U_i прагне до U_ω. А далі послідовність недоступних кардиналів $U_\omega : U_{\omega+1}$. Всесвіт Махло є щось на зразок такої згортки цієї послідовності. Така глибина дає певний спокій, що глибшого простору для мови ми не запропонуємо для нашої моделі свідомості, тому що ми просто не знаємо про це нічого. Інше відображення цієї глибини можна знайти в теорії інфініті категорій, теорії інфініті топосів та їх фізичним моделям ізоморфізмів, різних версіям теорії струн. Подих такого простору типів з відкритим дном і контрактибл типом у вершині конуса — це та мандала де знаходяться всі малюнки всіх формальних філософів.

Тепер про інформаційний тракт свідомості на нижніх рівнях, які вже можна помацати у вигляді AI. Якщо припустити, що ландшафт моделей всіх можливих мереж описується різними видами комплексів (симпліціальними, клітинними), а їх інваріанти задаються гомологіями і гомотопічними типами, то така глибина теж цілком сумісна з поточними методами, а гомологічна алгебра вже застосовується в мережевій інженерії. Такий простір вимагає застосування методів топології алгебри і створює нову глибину де може зародитися мислення. Якщо стисло, то тут ідея така, що є якийсь генератор свідомості, який постійно будує сам різні топології мереж, сам їх навчає, і сам веде реєстр цього поля мереж, яке вбудовується в сам простір, як типи вбудовуються у всесвіт.

Третя більша частина, яка зараз відсутня в моделях свідомості, це фізична комутативна математика, виняткові і класичні групи Лі, просто тому, що ми себе виявили в цьому просторі, і очевидно, це якось пов'язано з мисленням. Як і що тут вбудовувати мені незрозуміло, але здається, що тут спливає щось на кшталт чакр або рівнів буття якоїсь мета-істоти, яка задає уречевлення всієї мандали у видимому нам світі, який інкрустований іншими різноманіттями як прикрасами основного простору.

2 Розшарування Хопфа

Візьмемо людський мозок. Нехай кожен нейрон — це вершина симпліціального комплексу (тріангульованого простору), навіть не комплексу, а симпліціального множини (теж що і комплекс, але з інформацією про орієнтацію, тут орієнтація — це категорна дуальність, перевертання n-стрілок), так як різниця потенціалів передається по дендрону від нейрона до нейрона у певному напрямку. Беремо радіоактивні ізотопи (найкраще взяти помічений ЛСД), пропускаємо через енцефалічний бар'єр і будуємо симпліційний комплекс. Чому ми взяли симпліційні множини, а не спрямовані графи, тому що групи нейронів утворюють згустки, в яких енергія зв'язку настільки сильна, що можна говорити про компактність клітин на n-рівнях. Якщо спробувати згенерувати рендомний мозок, з урахуванням статистичних даних, ми отримаємо симпліційний комплекс розмірності 3 (три) загалом. Якщо ж ми візьмемо очікування розмірності за реальними конкретними мізками, ми отримаємо кількість вимірів комплексу рівним приблизно 8 (восьми). Такі многовиди відомі як Калабі Яу, а простір в якому живуть всі фізичні симетрії стандартної моделі міститься в групі E8, яка в гомотопічній інтерпритації розрізається на 4 розрашування Хопфа. Моделювання нейромереж багатовимірними комплексами це маст хев сучасного теоретичного AI, як у симуляції (медичній), так і в прикладному моделюванні. У комп'ютер віжині вже, до речі. Критерій Сохацького: якщо комплекс нейромережі має розмірність менше 8, чекати на самозароджене AI там безглуздо. У процесі навчання ми зможемо спостерігати зміну комплексу у реальному часі та можливе навіть підвищення розмірностей.

Взагалі, теорія симпліціальних множин має багато ізоморфізмів: теорія інфініті категорій (відразу кілька моделей, квазікатегорії, про них піде мова в наступних постах), теорія струн, і т.д. Забезпечення відкритого нескінченного глобулярного (n-розмірного) когерентного (аналог композиції на n-рівнях) простору — чиста геометрія. В геометрію ми виходимо завжди, якщо щось узагальнюємо на нескінченності. Наприклад у теоретичній інформатиці, а саме теорії типів — у нас є два розділи:

теорія типів та їх поліноміальні функтори (звичайні індуктивні типи) з одного боку, і, з іншого боку — гомотопічна теорія типів (де є глобулярні рівності, завдяки викинутому ета-правилу Id типа) та їх вищих індуктивних типів (або CW-комплексів, тому що будь-який CW-комплекс можна виразити через HIT і навпаки).

3 Формалізація буддизму

Зараз я дам вам відчути смак математичної формальної філософії по-справжньому! А то вам може здатися, що це канал з формальної математики, а не формальної філософії. Я ж вважаю, що якщо формальна філософія не спирається на формальну математику, то гріш ціна такій формальній філософії.

```
module buddhism where
import path
```

Сьогодні ми будемо формалізувати поняття недвоїстості в буддизмі, яке пов'язане одразу з багатьма концепціями на рівнях Сутри, Тантри та Дзогчена: поняттям взаємозалежного виникнення та поняттям порожнечі всіх феноменів (Сутра Праджняпараміти). Класичний приклад із розчленовуванням тіла ставить питання, коли тіло перестає бути людиною-істотою, якщо від нього почати відрубувати шматки м'яса (ми буддисти любимо і лілеєм такі уявні образи-експерименти) або іншими словами, щоб відрізнити тіло від не-тіла, нам потрібен двомісний предикат (родина типів), функція, яка може ідентифікувати конректні два еклемпляри тіла. Практично йдеться про ідентифікацію двох об'єктів, тобто про звичайний тип-рівність Мартіна-Льофа.

За фреймворк візьмемо концепти Готтлоба Фреге, згідно з визначенням, концепт - це предикат над об'єктом або, іншими словами, Пі-тип Мартіна-Льофа, індексований тип, сім'я типів, тривіальне розшарування тощо. Де об'єкт x з o належить концепту, якщо сам концепт, параметризований цим об'єктом, населений p(o) : U (де p : concept o).

```
concept (o: U): U
  = o -> U
```

Концепт p повинен надавати приклад чи контрприклад розрізнення, тобто щоб визначити тіло це чи не тіло ще, поки ми його розчленовуємо, нам потрібно як мінімум два шматки: тіло і не тіло як приклади ідентифікації. Таким чином, недвоїстість може бути представлена як рівність між усіма розшаруваннями (предекатами над об'єктами).

```
nondual (o: U) (p: concept o): U
  = (x y: o) -> Path U (p x) (p y)
```

Отже, недвоїстість усуває різницю між прикладами і контрприкладами на примордіальному рівні мандали MLTT, тобто ідентифікує всі концепти. Сама ж ідентифікація класів об'єктів, які належать різним концептам — це умова, що стискає всі об'єкти в точку, або стягуваний простір, вершина конуса мандали MLTT, або, іншими словами, порожнеча всіх феноменів виражена як тип логічної одиниці, який містить лише один елемент.

```
allpaths (o: U): U
  = (x y: o) -> Path o x y
```

Формулювання буддійської теореми недвоїстості, яка поширюється всі типи учнів (тупих, середніх і тямущих), може звучати так: недвоїстість концепту є спосіб ідентифікації його об'єктів. Сформулюємо цю саму теорему в інший бік: спосіб ідентифікації об'єктів задає предикат неподвоїстості концептів. Туди - ((p: concept o) -> nondual o p) -> allpaths o, Сюди - allpaths o -> ((p: concept o) -> nondual o p). І доведемо її! Як видно з сигнатур нам лише треба побудувати функцію транспорту між двома просторами шляхів: (p x) =U (p y) і x =o y. Скористаємося приведенням шляху до стрілки (coerce) та конгруентності (cong) з базової бібліотеки.

```
forward (o:U): ((p: concept o) -> nondual o p) -> allpaths o
  = \(nd: (p: concept o) -> nondual o p) (a b: o) ->
    coerce (Path o a a) (Path o a b) (nd (\(z:o)->Path o a z) a b) (refl o a)

backward (o:U): allpaths o -> ((p: concept o) -> nondual o p)
  = \(all: allpaths o)(p: concept o)(x y: o) -> cong o U p x y (all x y)
```

Як бачите, теоремка про порожнечу всіх феноменів вийшла на кілька рядків, які демонструють: 1) основи формальної філософії та швидке занурення в область математичної філософії; 2) гарний приклад до першого розділу HoTT на простір шляхів та модуль path.

4 Хроматична теорія гомотопій

Поговоримо про хроматичну теорію гомотопій. Я маю на увазі, що ви трохи знайомі з терією категорій і топологією.

Отже, передусім, припустимо, ви вірите в те, що намагатися класифікувати топологічні простори гомотопічним типом не марна витівка. Це практично неможливо, проте ціль ця шляхетна. Щоб полегшити собі завдання, ми будемо розглядати базові простори, які можуть бути створені приєднанням клітин. Вони іноді називаються CW-комплексами чи клітинними комплексами. Коли я говорю ″склеювання клітин я маю на увазі конструювання пушауту для конуса $D^n \leftarrow S^{n-1} \to X$, де X — деякий простір, D^n — n-диск, а S^{n-1} — його межа. Буквально - склеювання диска на його кордоні.

Виявляється, що будь-який гарний простір (компактно згенерований хаусдорфово) може бути побудований таким чином, починаючи з простих точок, хоча вам, можливо, доведеться приєднати нескінченну кількість осередків. Іншими словами, якщо єдиними будівельними блоками, які ми маємо, є осередки, такі як D^n, ми можемо, аж до гомотопії, створювати найкрасивіші топологічні простори (наприклад, усі ті, що з'являються у таких додатках, як диференціальна геометрія).

Отже, щоб зрозуміти, які нові простори ми можемо побудувати з існуючого простору X приєднанням осередків, достатньо знати всі способи, якими сфера може безперервно відображатися сама в собі (бо ми прикріплюємо осередки з використанням сфер відображення). Ви, напевно, вже знаєте, що безліч способів відображення сфери в інший топологічний простір X називається гомотопічними групами X. Тому, якщо ми можемо обчислити гомотопічні групи, ми можемо класифікувати (гарні) простори з точністю до гомотопій. Звичайно, ви також можете знати, що обчислювати гомотопічні групи топологічних просторів дійсно дуже, дуже складно. Зокрема, найпростіше питання, яке ви можете поставити — це які простори можна отримати склейками будь-яких сфер (S^n до S^m для будь-яких n і m). Це буде набір груп із двома індексами n і m, один для розмірності сфери домену та один для розмірності сфери кодомена. Знання цього могло стати непоганим стартом.

Погані новини: ми не знаємо ці групи, і ніколи можливо не дізнаємось. Ми знаємо безліч їх, і ми хороші в обчисленні груп для фіксованих n і m, якщо добре постараємося, але несхоже щоб там був певний очевидний патерн для генерації всіх таких груп. Ну добре, ми можемо принаймні спробувати, і сподіватися, що ми побачимо прикольні штуки дорогою вирішення цього завдання. Коли це все починалося, не було відомо, наскільки це буде складним (сходить до Пуанкаре), тому ми просунулися досить далеко, перш ніж зрозуміли, що справа погана. Зрештою, хроматична гомотопічна теорія є спробою розбити вищеописані гомотопічні групи сфер на будівельні блоки, які легше зрозуміти і з якими легше працювати. Слово "хроматичний"відноситься до складових довжин хвиль, в які "розкладається"біле світло.

Сподіваюся, ви знаєте, що для сфери S^n існує відображення "ступеня p яке обертає сферу S^n навколо себе p разів. Уявімо це відображення як $p : S^n \to S^n$. Це в точності те p, що ви побачите, коли згадаєте, що n-та гомотопічна група сфери S^n — це цілі числа $\mathbb{Z}$. Зауважте, що це відображення генерує ціле сімейство відображень $S^n \to S^n$, задане ітеруванням p . Тобто. $p^k : S^n \to S^n$ для будь-якого k. Таким чином у нас обчислилися деякі гомотопічні групи, але вони не такі вже й цікаві. Одну річ, яку ми можемо зробити — це причепити клітину уздовж цього відображення (або будь-якої його ітерації), щоб отримати новий простір, який я запишу як $V(0)$, або $S^n\ mod\ p$. Зауважте, що пушаут, який визначає причеплену клітину, зробив вихідне відображення p гомотопним нулю (або гомотопічно тривіальним). Зауважте, що $V(0)$ це лише (n+1)-сфера приклеєна до n-сфери, існує включення нижньої сфери S^n в $V(0)$, назвемо це i, і відображення $V(0) \to S^{n+1}$, яке стягує нижню сферу, назвемо це q. Таким чином, якби я мав інше відображення $f : \Sigma V(0) \to V(0)$, де Σ — надбудова (суспензія), тоді я міг би зліва закомпозити це з i, а потім праворуч закомпозити з q ($i \cdot f \cdot q$), щоб отримати нове відображення $S^{n+1} \to S^{n+1}$, яке було б свого роду породженим за допомогою f. Зверніть увагу, що роль, яку відіграє надбудова, полягає у збільшенні розмірності нижньої сфери $V(0)$. Інакше ми мали б відображення з S^nS^{n+1}, і будь-яке таке відображення було б гомотопічно тривіальним (знецінюючи наші дії).

Причина, через яку ми це все робимо, полягає в тому, щоб просто знайти ДЕЯКІ елементи гомотопічних груп сфер. Загалом, нам знадобилося чимало часу, щоб знайти БУДЬ-ЯКІ елементи гомотопічних груп сфер, а тим більше спробувати обчислити ВСІ їх. Таким чином, це була велика справа, коли люди як Адамс і Тода, змогли показати що, ТАК, є відображення $\Sigma V(0) \to V(0)$ (тут упускаються деталі, насправді вам потрібна більше ніж одна надбудова). Більше того, це відображення, назвемо його $A : \Sigma V(0) \to V(0)$, може бути итерировано нескінченне число разів, не стаючи при цьому гомотопічно тривіальним. І щоразу, коли ми ітеруємо, ми збільшуємо розмірність. Отже, у нас є вся родина відображень сфер, що виходять з (ітеруючих) А. Під ітеруванням, я маю на увазі, що у мене є відображення $A : \Sigma V(0) \to V(0)$, тому я можу отримати відображення $\Sigma A : \Sigma\Sigma V(0) \to \Sigma V(0)$, а потім інше відображення $\Sigma\Sigma A : \Sigma\Sigma\Sigma V(0) \to \Sigma\Sigma V(0)$, і так до нескінченності, де розмір доменної сфери буде ставати все більше і більше. Якщо це спрацювало одного разу, то чому б не зробити це знову? Так само, як ми затюніли p раніше, давайте візьмемо коядро відображення А (яке насправді називається корозшаровуванням). Іншими словами, стягуйте все, що потрапляє в А, даючи нам точну послідовність просторів $V(0) \to V(0) \to V(0)/A$.

Давайте перейменуємо $V(0)/A = V(1)$. Тепер вам просто потрібно повірити, що $V(1)$ виходить шляхом приєднання осередків (змішуючи склеювання, які ми зробили для побудови $V(0)$), і тому все ще існують відображення з нижньої сфери і: $S^k \to V(1)$ і фактор групи до верхньої сфери $q : V(1) \to S^k$. Сміт показав, що існує інше відображення $B : \Sigma V(1) \to V(1)$, яке ми можемо ітерувати стільки разів, скільки ми захочемо, і ми отримаємо ІНШЕ велике сімейство відображень між сферами. Отже, у нас є два великі сімейства відображень сфер (всіх можливих вимірів!), Я назву їхню А-родину і В-сімейство. Виявляється, якщо ви знову "затюніте"В, ви отримаєте новий простір, назвемо його $V(2)$, і ви можете повторити цей процес ще раз. І справді, існує карта $C : \Sigma V(2) \to V(2)$, що дає нам інше сімейство, я назву його

C-сімейством гомотопічних груп сфер. Тому тут виникають два природні питання: 1) чи можна повторювати це нескінченно? 2) чи отримаємо ми всі гомотопічні групи сфер?

У певному сенсі перлина хроматичної гомотопічної теорії — це позитивна відповідь на ці два питання (знову ж таки, упускаючи багато деталей). Це насправді є зміст теорем Нільпотентності та Періодичності Девіннаца, Хопкінса та Сміта. У своїй основі ”хроматична”ідея полягає в тому, що ці сімейства, які ми отримали A, B і C, є початком стратифікації гомотопічних груп сфер, і існує нескінченний список цих сімейств. Таким чином, це різновид глобальної структурної теореми для цих розсипаних та заплутаних груп. Ми ще не знаємо їх усіх, але знаємо, як вони організовані. І враховуючи, наскільки вони складні, це справді велика гра!

Ще раз трохи про це все, що є ідеєю простих ідеалів, локалізації та K-теорій Морави. Також тут буде трохи алгебраїчної геометрії. Ви можете пам’ятати, що якщо ви хочете дізнатися про пучку на $Spec(Z)$, достатньо знати про нього в кожному простому числі, тобто кожної ”локалізації”цілих чисел $\mathbb{Z}$. Таким чином, хроматична стратифікація говорить про те, що на відміну від алгебраїчних різноманітності, інформація про які може бути зібрана з цілих простих чисел, інформація про комплекси CW може бути зібрана з цих так званих хроматичних шарів. Насправді, ці хроматичні шари не просто стратифікують гомотопічні групи сфер, вони стратифікують всю категорію кінцевих CW-комплексів. Оскільки схема може бути розбита на її p-локальні частини для кожного простого p, простір може бути розбитий на його хроматичні частини. Це зміст Thick Subcategory Theorem, яка є частиною теореми про Нільпотентність та Періодичність (наслідком). У ній говориться, що, знаходячи цю стратифікацію лише з сфер, ми фактично стратифікували всі кінцеві комплекси клітин. Тут під кінцевим клітинним комплексом, я маю на увазі простір, побудований шляхом виконання кінцевого числа приклеювань осередків (починаючи з порожнечі). Більше того, для тих з вас, хто знає, що це означає, існують теорії когомологій, які говорять про те, на якому СЛО є цей простір. І ці теорії когомологій є так званими K-теоріями Морави $K(n)$ для натуральних n. Тому кінцевий клітинний комплекс має "тип який є натуральним числом, і це число говорить мені, до якого хроматичного шару належить кінцевий клітинний комплекс. Це може бути обчислено, тому що це просто перший n, для якого $K(n)$ когомології вашого простору відмінні від нуля.

$K(0)$ відповідає ступеню відображення p, $K(1)$ відповідає відображенню A, $K(2)$ відповідає відображенню B і т.д. Ці відповідності я не розглядатиму тут детально. Але, в будь-якому випадку, з'являється така, дійсно красива, картина, де ці $K(n)$ говорять нам про те, як розділити категорію кінцевих клітинних комплексів на дрібніші, зручніші шари. Фактично, подібно до того, як ви можете локалізувати схему або пучок для простого p, ви можете локалізувати будь-який простір $K(n)$ для будь-якого n. І якщо ви знаєте його $K(n)$ локалізацію для кожного n, тоді ви можете зібрати цей простір по шматках, і ви будете знати все про цей простір. Це невелика частина того, що люди мають на увазі, коли кажуть, що теорія Морави — це "прості числа"(стабільної) гомотопічної категорії. По суті, вони — "місця в яких ми можемо локалізувати, щоб отримати локальну інформацію, яку ми хочемо зібрати в глобальну інформацію.

Я повинен додати, що в основному все, що я знаю про це, я дізнався з "помаранчевої книги або "Нільпотентність та періодичність у Стабільній теорії гомотопії"Дугласа Равенела. Це справді красива, приголомшлива книга, і я всіляко її рекомендую.

Джонатан Бірдслей

5 Геометрія в модальній HoTT

Подяка за підтримку

Як завжди перед початком звітом по конференції хочу висловити подяку усім, хто підтримує мене на тернистому шляху докторантури. В першу чергу це моя родина та друзі, які надихають мене, а також представники академії які допомогають мені у цьому. Окрім моїх покровителів з КПІ, перш за все — це звичайно усі спікери та учасники конференції "Геометрія в модальнії Гомотопічній теорії типів". Також хотів би подякувати усім моїм клієнтам, які з розумінням ставляться до моєї математичої діяльності та не відволікають мене по дрібницям.

Передісторія

Як ви знаєте конструктивна теорія типів HoTT відкриває дорогу в CW-комплекси та алгебраїчну топологію, однак значний пласт проблем вона не вирішує, наприклад теоерема Брауера про нерухому точку не виводиться у цій теорії, те саме стосується таких речей як етальні відображення, на яких будується фундамент сучасної диференціальної геометрії. Модальна теорія HoTT у пов'язаних топосах зародилася як продукт дослідження Урсом Шрайбером Картанової супергеометрії у застосуванні до сучасної теоретичної фізики та було детально розроблена як розширення HoTT Майком Шульманом (cohesivett). Після дисертації Фелікса Черубіні стало зрозуміло, що HoTT у зв'язаних топосах може вирішити останні проблеми формалізації математики і ця конференція перший івент цього штибу.

Еґберт Райке

Еґберт захистив свій мастер тезис у Андрія Бауера, а дисертацію у Стів Еводі. Але найбільше Еґберт вплинув на мене своїм курсом по HoTT. Усього є декілька курсів: по-перше це сам підручник з HoTT, далі курс Валерія Ісаєва, курс Роберта Харпера (15-819), та один з найбільш просвітлюючих курсів це HoTT курс

Еґберта, про який я писав на каналі Групоїд Інфініті. Його курс найбільше вплинув на мій власний курс HoTT.

Також Еґберт відомий тим, що у співробітництві з Ульріком Бушхольцом формалізував квартерніонні фібрації Хопфа. На цьому воркшопі Еґберт представив зразу три доповіді. Перша було про рефлексивні підсвествіти та модальності, де показав, що транкейшин рівні гомотопічних типів є рефлексивними підвсесвітами, їх універсальні властивості, необхідні умови доступності для підвсесвітів, еквівалентність визначень локальних відображень, локальних просторів, та замкненість підвсесвітів відносно еквівалентностей. Друга доповідь була присвячена відокремленим просторам (простір L-відокремлений, якщо усі його id-типи L-локальні, де L — рефлективний підвсесвіт). Тут розлядалось чи завжди підвсесвіт L-відокремлених типів є рефлексивним підвсесвітом. Третя доповідь була про Модальний спуск та рефлексивні системи факторизації, де були дані визначенння ортогональних систем факторизації (OFS), стабільних OFS, та n-етальні відображення.

Майк Шульман

Переоцінити вклад Майкла Шульмана в розвиток HoTT важко. Фактично він основним автором ncatlab Cafe, співзасновником ncatlab, та головним контрибутором в cohesivett, теорію яка відкрила двері в математику нескінченних околів, та інших модальностей, яка були ним розроблена з подачі Урса Шрайбера. На ції конференції Майк Шульман представив дві доповіді. Перша була присвячена основам теорії звязанних топосів (про яку вперше можно прочитати у Вільяма Лавіра). В першій доповіді були дані основні визначення комонадичної флет-модальності (бемоль) згідно з принципами MLTT (формації, інтро, елімінатори, бета та ета рівності), яка за якою власне і схована корекурсія обчислення нескінченно малих величин, або більше відомих в математиці як епсилон-околи. Це база cogesivett, розробка якої розпочалася в далекому 2011 році. Також було обговорення імплементації бемоль модальності в Agda (flat-бренч на гітхабі). Друга доповідь була присвячена семантиці вищих молальностей, та за допомогою бемоль-модальності була накінець-то конструктивно доведена теорема Брауера про нерухому точку (яка як відомо не доводиться у чистій HoTT), чим було закрито кон'юнктуру Еводі, у залі стояли гучні апплодисменти. Раджу усім послухати цю доповідь, хто скептично ставився до конструктивної математики.

Урс Шрайбер

Урс один з засновників сучасної математичної енциклопедії ncatlab, якою користуються усі сучасні математики, не тільки в області інфініті категорій, HoTT, а також прикладної та теоретичної фізики, яка для Урса є головним мотиватором. Вперше ідея запропонувати cohesive топоси Лавіра для моделювання вищих геометорій та логік виходила саме від Урса, а Майк Шульман виконова усю необхідну роботу по формалізації (cohesivett). Як бачимо колаборація Майка та Урса виходять далеко за межі адмінітративної роботи по управлінню математичної екнциклопедії ncatlab, якою ми з вами зачитуємося до 5-ї години ранку.

Додовання модальностей як системи операторів до HoTT дає змогу дуже елегатно доводити теореми вищої геметрії, диференціальної топології, диференціальної гемометрії, супергеметрії. В доповіді Урса показані засади Картанової геометрії, формальної Картанової геометрії та Картанової Супергеометрії. Головна мотивація для Урса — це побудова формальної М-теорії (спільна робота з Хішамом Саті в Нью-Йоркському Університеті в Абу Дабі). Урс побудував вежу модальностей які хитро вилаштовуються в діагональ спряжень, і чи має ця вежа кінець відкрите питання в новоспеченій модальній HoTT.

Нижній рядок — Empty та Unit, другий рядок модальностей застосовується в диференціальній топології (ретопологізація та топологізація) — шейп модаліті, флет (бемоль) модаліті, та шарп (дієз) модільті, третій рядок застосовується у диференціальній геометрії (Im та Re модальності), та верній рядок — фізика (бозонні та ферміонні модальності), далі вежа насичується та стабілізується (начебто?). Синім кольором зображені мотивні локалізації афінного відрізка.

Як на мене це сама езотерична теорія сучасної формальної математики та теоретичної фізики яка дає безмежне натхнення по формальнізації будь яких теорії (M-теорія, теорія струн, супергеометрія, інші версії гомотопічних теорій). Без сумніву Урса можна назвати батьком модальної гомотопічної теорії типів, а також батьком ncatlab!

Фелікс Черубіні

Фелік Черубіні перший учень Урса Шрайбера який детально розробив у своїй дисертації Im модальності, які застосовуються для моделювання етальних відображень, які у свою чергу дозволяють доводити теореми про нескінченнін околи (диференціальна геометрія). Сама дисертація Фелікса відрила у мене друге дихання та породила нову лінію досліджень. Власне цей воркшоп присвячений геометрій відбувся завдяки зусиллям Фелікса, як головного організатора заходу.

Ульрік Башхольтц

У Ульріка багато регалій, але якби мене попросили його описати одним досягненням, то я би сказав, що Ульрік єдина людина у світі яка змогла формалізувати кватерніонне розшарування Хопфа (мова Lean). Також я замовив у Ульріка code review інтерналізації кубічної теорії у мову Lean), так як Ульрік адепт Lean.

Доповідь Ульріка була присвячена некомутативній теорії когомологій, а саме пучкам (gerbe, як інструмент гокомологій степені 2), крученням (twist), лєнтам (band). І усе це в модальній HoTT. Дивіться його підручник з симетрій Symmetry Book[1].

Пітер Арндт

Пітер Арндт представив абстраткну мотивну теорія гомотопій — яка є одночасно його PhD тезисом. Доповідь почалася зі зве-

[1] https://github.com/UniMath/SymmetryBook

деної теорії когомологій як функтора з оберненої категорії топологічних просторів з точками в абелеву категорію: Top*op -> AbZ. Далі були розглянуті схеми на базою K: K-Alg -> Set. Потім ми розглянули глядкі схеми та мотивні простори з топологією Нісневича/Заріського, мотивні спектри та мотиви HZ-Mod (шестикутник). Потім ми замінили мотивні простори на представимі інфініті декартово замкнені категорії та визначили таким чином цілком абстрактну мотивну теорію гомотопій. Були розглянуть стабільні та нестабільні результати та побудови та наведені достатні приклади. Показана можливість пабудови раціонального оператора Адамса.

Спонтанне інтерв'ю з авторами кубіків

Нагадаю, що кубіками я називаю системи доведення теорем, які побудовані на базі кубічної теорії типів, єдиної теорії типів, у якій можно довести аксіому унівалентності Воєводського. 5 із шести кубічних тайпчекері були написані в CMU цими хлопцями (три версії на мові хаскель: cubicaltt, cubicaltt/hcomptrans, yacctt, одна на Standard ML — RedPRL, та одна на OCaml). Не взяти інтерв'ю в авторів цих пруверів було би великою необачністю. Я зробив презентацію нашої бібліотеки Groupoid Infinity — усі були у захваті.

Андерс Мортберг

Не знажаючи на те, що cubicaltt більше не розроблюється, Андерс жартує, що він ідеальний, тому нема далі що покращувати. Наймінімальніший синтаксис кубічної теорії який поміщається на 12-рядках BNF нотації!

Карло Анджіулі, Джон Стерлінг

Джон Стерлінг пропрацював деякий час в індустрії програмного забепечення, тому його системи відрізняються дорослістю та скkладністю. Карло забезпечує математичну підтримку, але усі вони программісти та математики, важно виділити що головніше!

Еван Кавалло

Еван був представлений мені як спеціаліст з вищих індуктивних типів (CW-комплексів), або HIT-чарівник! Останні публікації стосовно теорії HIT та формалізація тайпчекінга HIT в декартовій кубічній теорії — заслуги Евана.

Стів Еводі

Стіва Еводі можна назвати батьком гомотопічної теорії типів (HoTT), саме на запрошення Стіва Володимир Воєводський почав інтенсивно займатися HoTT, а також завдяки Стіву відбувся проект HoTT. Як хранитель та модератор Стів спостерігав за конференцією та був адвайзором багатьох людей присутніх на конференції.

6 Lean конференція

По-перше хочу подякувати усім, хто мене підтримує, надихає та прощає мені багато чого. Попасти на таку подію — це справжній подарунок та задоволення від усвідомлення, що коло однодумців більше, ніж ти очікував.

Хенк Барендрегт

Назвичайно був вражений теплим сердечним прийомом та щирим і відкритим інтерв'ю Хенка Барендрехта, перша частина якого опублікована в інстаграмі, а друга на ютубі та фейсбуці. Хенк Барендрехт відомий нам інженерам як автор лямбда кубу, цілої системи формальних моделей які поєднують та класифікують усі лямбда числення в залежності від різного набору чотирьох формул $\star : \star, \star : \square, \square : \square, \square : \star$. Фактично, усі типизовані мови програмування, включаючи PTS (CoC, System P_ω, або чиста система), яка є ядром усіх пруверів, потрапляють у лямбда куб. До цього Хенк Барендрехт також повністю формалізував та довів майже усі теореми про нетипизоване лямбда числення яке теж є основою багатьох мов з динамічною типизацією. Його український учень Андрій Полонський, який повернувся в Україну під час Майдану, довів спростування кон'юнктури Хенка Барендрехта, яке лягло в основу сучасних ідей оптимальної бета-редукції, яка була реалізована в роботах Майя Віктора (мова Kind з залежними індуктивними типами, написана на Rust, містить оптимальний евалуатор бета-редукцій та здійснює екстракт в GPU).

Хенк зараз досліджує свідомість за допомогою формальних методів та медитації, він є сертифікованим учителем Віпаш'яни в стилі Махасі, його учителями були Кобун Чіно Роші та Фра Меттавіхарі. Найближчі його ретріти в 2019 році в Греції та Італії. Хенк також пише статті на тему формальної філософії, формалізації буддійських систем та формалізації свідомості. Можливо варто спробувати написати огляд робіт Хенка для нашого каналу Формальної Філософії, якщо кількість підписників, скажімо, подвоїться.

Джеремі Авігад

Перша — Джеремі Авігада по факторизації поліноміальних функторів. В секції питань його запитали чи дійсно дійсні числа закодовані як фактор-типи коіндуктивних послідовностей цифр є найкрасивішою моделлю дійсних чисел і Джеремі відповів, шо так.

```
class qpf (F : Type u → Type u) [functor F] :=
      (P : pfunctor.{u})
      (abs : Π {α}, P.apply α → F α)
      (repr : Π {α}, F α → P.apply α)
      (abs_repr :  {α} (x: F α), abs(reprx)=x)
      (abs_map :   {α β} (f : α → β) (p : P.apply α),
                 abs (f <$> p) = f <$> abs p)
```

Рейд Бартон

Друга — Ріда Бартона по формалізації модель-категорій Квілена та структурі моделі Квілена на топологічному просторі. У цій роботі розглянутий трансфінітний випадок, проведена велика класифікація топологічних просторів (найбільша на моїй пам'яті), достатньо пророблена теорія категорій та фундаментальний групоїд, категорія корозшарувань, факторизація Брауна.

```
class model_category (M : Type u) extends category.{u v} M :=
      (complete : has_limits M)
      (cocomplete : has_colimits M)
      (W C F : morphism_class M)
      (h : is_model_category W C F)

structure is_model_category (W C F : morphism_class M) : Prop :=
          (weq : is_weak_equivalences W)
          (caf : is_wfs C (F   W))
          (acf : is_wfs (C   W) F)

def Meas : Type (u+1) := bundled measurable_space
def Top  : Type (u+1) := bundled topological_space

def Borel : Top   Meas :=
    concrete_functor @measure_theory.borel
                   @measure_theory.measurable_of_continuous
```

```
instance (x : Top)  : topological_space x := x.str
instance (x : Meas) : measurable_space x  := x.str

instance : concrete_category @measurable :=
          @measurable_id, @measurable.comp

instance : concrete_category @continuous :=
          @continuous_id, @continuous.comp
```

Джесі Хан

Третя — доведення незалежності континуум гіпотези від Джесі Хана. Джесі Хана також цікавить транспорт з топоса в класичну топологію.

```
theorem independence_of_CH :
       (¬ ZFC ⊢' continuum_hypothesis)
     ∧ (¬ ZFC ⊢' ∼ continuum_hypothesis) :=
begin
  have := CH_consistent,
  have := neg_CH_consistent, repeat{auto_cases},
  apply @independence_of_exhibit_models L_ZFC ZFC
       ZFC_consistent continuum_hypothesis,
  show Model ZFC,
  exact this_w_1,
  show Model ZFC,
  exact this_w,
  repeat{assumption}
end
```