

Максим Сохацький

## Формальна філософія

Свідомість  
Розшарування Хопфа  
Формалізація буддизму  
Хроматична теорія гомотопій  
Геометрія в модальній HoTT  
Lean конференція  
Категорії Квілена  
Модальна гомотопічна теорія  
Метафілософія  
Прикладна математика  
Формальна система  
Мова простору  
Бібліотека Групоїд Інфініті  
Топовий програміст  
Формальна Йогачара

УДК 13  
УДК 821.161.2

## Формальна філософія

Автор: Максим Сохацький (1980)

### Про Автора

Намдак Тонпа (Максим Сохацький), доктор філософії КПІ (2015—2019), буддистський капелан лінії передачі Лонгчен Нінгтік тибетського буддизму (2011—2023).

Провідний інженер-програміст ДП «ІНФОТЕХ» (2019—2023) у підпорядкуванні МВС України. Автор «Депозитів Приват-Банк» та «МІА: Документообіг» побудованих на авторських творах ERP.UNO та N2O.DEV. Намагається легалізувати інститут формальної математики «Групоїд Інфініті».

Постійне посилання твору: <https://axiosis.top/journal/>  
Видавець: Інститут формальної математики «Групоїд Інфініті»  
Сайт інституту: <https://groupoid.space/institute/>

ISBN: 978-617-8027-23-0

Збірка статей які виходили в журналі «Формальна філософія».

© 2023 Максим Сохацький

## Анотація

# Зміст

1	Свідомість	5
2	Розшарування Хопфа	7
3	Формалізація буддизму	9
4	Хроматична теорія гомотопій	11
5	Геометрія в модальній HoTT	16
6	Lean конференція	22
7	Модельні категорії Квілена	25
8	Модальна гомотопічна теорія	29
9	Метафілософія	31
10	Прикладна математика	34

# 1 Свідомість

Формальна філософія якщо й має чимось займатися, то лише кодуванням різних моделей свідомості (різного ступеня фрічства, чому фрічство взагалі допускається скажу пізніше). Не здаватимуся політкоректним, більшість філософів, які вивчаються в контексті свого предмета, я вважаю душевно хворими людьми (і не бачу нічого в цьому поганого). Якщо ви можете уявити будь-яку модель на MLTT і більш сучасних типових системах, і можете розповісти, як ця модель кодує якийсь феномен, ви вже стаєте личинкою формального міні-філософа. Зазвичай що складніша модель, то більше вписувалося її як твір розглядатимуть інші формальні художники.

Багато хто критично ставиться до сучасних моделей AI, тому що вони надто прості, щоб повірити, що там може зародитись якась автономна свідомість. Щоб дати можливість системі зародитися і здобути якусь свободу, ми повинні надати цій системі якийсь простір, і глибина цього простору повинна перебувати в мові цієї системи. У MLTT таку глибину, яка закриває навіть гьоделівські питання, надає ієрархія всесвітів. Причому вона виникає незалежно від наших примх, типи зобов'язані десь перебувати, тому ми в мові виділяємо контейнер для типів  $U_n$ , і кажемо, що цей тип містить усі типи (наочно це демонструє індукція-рекурсія, в інших випадках потрібно вірити тайпчекеру, що всі формейшин рули ядра живуть в  $U_n$ . Природно постає питання межі послідовності  $U_i$  прагне до  $U_\omega$ . А далі послідовність недовступних кардиналів  $U_\omega : U_{\omega+1}$ . Всесвіт Махло є щось на зразок такої згортки цієї послідовності. Така глибина дає певний спокій, що глибшого простору для мови ми не запропонуємо для нашої моделі свідомості, тому що ми просто не знаємо про це нічого. Інше відображення цієї глибини можна знайти в теорії інфініті категорій, теорії інфініті топосів та їх фізичним моделям ізоморфізмів, різних версіям теорії струн. Подих такого простору типів з відкритим дном і контрактибл типом у вершині конуса — це та мандала де знаходяться всі малюнки всіх формальних філософів.

Тепер про інформаційний тракт свідомості на нижніх рівнях,

які вже можна помацати у вигляді AI. Якщо припустити, що ландшафт моделей всіх можливих мереж описується різними видами комплексів (симплиціальними, клітинними), а їх інваріанти задаються гомологіями і гомотопічними типами, то така глибина теж цілком сумісна з поточними методами, а гомологічна алгебра вже застосовується в мережевій інженерії. Такий простір вимагає застосування методів топології алгебри і створює нову глибину де може зародитися мислення. Якщо стисло, то тут ідея така, що є якийсь генератор свідомості, який постійно будує сам різні топології мереж, сам їх навчає, і сам веде реєстр цього поля мереж, яке вбудовується в сам простір, як типи вбудовуються у всесвіт.

Третя більша частина, яка зараз відсутня в моделях свідомості, це фізична комутативна математика, виняткові і класичні групи Лі, просто тому, що ми себе виявили в цьому просторі, і очевидно, це якимось пов'язано з мисленням. Як і що тут вбудувати мені незрозуміло, але здається, що тут спливає щось на кшталт чакр або рівнів буття якоїсь мета-істоти, яка задає уречевлення всієї мандали у видимому нам світі, який інкрустований іншими різноманіттями як прикрасами основного простору.

## 2 Розшарування Хопфа

Візьмемо людський мозок. Нехай кожен нейрон — це вершина симпліціального комплексу (триангульованого простору), навіть не комплексу, а симпліціального множини (теж що і комплекс, але з інформацією про орієнтацію, тут орієнтація — це категорна дуальність, перевертання  $n$ -стрілок), так як різниця потенціалів передається по дендрону від нейрона до нейрона у певному напрямку. Беремо радіоактивні ізотопи (найкраще взяти помічений ЛСД), пропускаємо через енцефалічний бар'єр і будуємо симпліційний комплекс. Чому ми взяли симпліційні множини, а не спрямовані графи, тому що групи нейронів утворюють згустки, в яких енергія зв'язку настільки сильна, що можна говорити про компактність клітин на  $n$ -рівнях. Якщо спробувати згенерувати рендомний мозок, з урахуванням статистичних даних, ми отримаємо симпліційний комплекс розмірності 3 (три) загалом. Якщо ж ми візьмемо очікування розмірності за реальними конкретними мізками, ми отримаємо кількість вимірів комплексу рівним приблизно 8 (восьми). Такі многовиди відомі як Калабі Яу, а простір в якому живуть всі фізичні симетрії стандартної моделі міститься в групі  $E_8$ , яка в гомотопічній інтерпретації розрізається на 4 розрашування Хопфа. Моделювання нейромереж багатовимірними комплексами це маст хев сучасного теоретичного AI, як у симуляції (медичній), так і в прикладному моделюванні. У комп'ютер віжині вже, до речі. Критерій Сохаського: якщо комплекс нейромережі має розмірність менше 8, чекати на самозароджене AI там безглуздо. У процесі навчання ми зможемо спостерігати зміну комплексу у реальному часі та можливе навіть підвищення розмірностей.

Взагалі, теорія симпліціальних множин має багато ізоморфізмів: теорія інфініті категорій (відразу кілька моделей, квазі-категорії, про них піде мова в наступних постах), теорія струн, і т.д. Забезпечення відкритого нескінченного глобулярного ( $n$ -розмірного) когерентного (аналог композиції на  $n$ -рівнях) простору — чиста геометрія. В геометрію ми виходимо завжди, якщо щось узагальнюємо на нескінченності. Наприклад у теоретичній інформатиці, а саме теорії типів — у нас є два розділи:

теорія типів та їх поліноміальні функтори (звичайні індуктивні типи) з одного боку, і, з іншого боку — гомотопічна теорія типів (де є глобулярні рівності, завдяки викинутому ета-правилу  $\text{Id}$  типу) та їх вищих індуктивних типів (або CW-комплексів, тому що будь-який CW-комплекс можна виразити через HIT і навпаки).



### 3 Формалізація буддизму

Зараз я дам вам відчути смак математичної формальної філософії по-справжньому! А то вам може здатися, що це канал з формальної математики, а не формальної філософії. Я ж вважаю, що якщо формальна філософія не спирається на формальну математику, то гріш ціна такій формальній філософії.

```
module buddhism where
import path
```

Сьогодні ми будемо формалізувати поняття недвоїстості в буддизмі, яке пов'язане одразу з багатьма концепціями на рівнях Сутри, Тантри та Дзогчена: поняттям взаємозалежного виникнення та поняттям порожнечі всіх феноменів (Сутра Праджняпараміти). Класичний приклад із розчленовуванням тіла ставить питання, коли тіло перестає бути людиною-істотою, якщо від нього почати відрубувати шматки м'яса (ми буддисти любимо і лілеєм такі уявні образи-експерименти) або іншими словами, щоб відрізнити тіло від не-тіла, нам потрібен двомісний предикат (родина типів), функція, яка може ідентифікувати конкретні два еклемпляри тіла. Практично йдеться про ідентифікацію двох об'єктів, тобто про звичайний тип-рівність Мартіна-Льофа.

За фреймворк візьмемо концепти Готтлоба Фреге, згідно з визначенням, концепт - це предикат над об'єктом або, іншими словами, Пі-тип Мартіна-Льофа, індексований тип, сім'я типів, тривіальне розшарування тощо. Де об'єкт  $x$  з  $o$  належить концепту, якщо сам концепт, параметризований цим об'єктом, населений  $p(o) : U$  (де  $p : \text{concept } o$ ).

```
concept (o : U) : U
= o -> U
```

Концепт  $p$  повинен надавати приклад чи контрприклад розрізнення, тобто щоб визначити тіло це чи не тіло ще, поки ми його розчленовуємо, нам потрібно як мінімум два шматки: тіло і не тіло як приклади ідентифікації. Таким чином, недвоїстість може бути представлена як рівність між усіма розшаруваннями (предекатами над об'єктами).

nondual (o: U) (p: concept o): U  
 = (x y: o) -> Path U (p x) (p y)

Отже, недвоїстість усуває різницю між прикладами і контр-прикладом на примордіальному рівні мандали MLTT, тобто ідентифікує всі концепти. Сама ж ідентифікація класів об'єктів, які належать різним концептам — це умова, що стискає всі об'єкти в точку, або стягуваний простір, вершина конуса мандали MLTT, або, іншими словами, порожнеча всіх феноменів виражена як тип логічної одиниці, який містить лише один елемент.

allpaths (o: U): U  
 = (x y: o) -> Path o x y

Формулювання буддійської теореми недвоїстості, яка поширюється всі типи учнів (тупих, середніх і тямущих), може звучати так: недвоїстість концепту є спосіб ідентифікації його об'єктів. Сформулюємо цю саму теорему в інший бік: спосіб ідентифікації об'єктів задає предикат неподвоїстості концептів. Туди - ((p: concept o) -> nondual o p) -> allpaths o, Сюди - allpaths o -> ((p: concept o) -> nondual o p). І доведемо її! Як видно з сигнатур нам лише треба побудувати функцію транспорту між двома просторами шляхів: (p x) =U (p y) і x =o y. Скористаємося приведенням шляху до стрілки (coerce) та конгруентності (cong) з базової бібліотеки.

forward (o:U): ((p: concept o) -> nondual o p) -> allpaths o  
 = \ (nd: (p: concept o) -> nondual o p) (a b: o) ->  
 coerce (Path o a a) (Path o a b) (nd (\(z:o)->Path o a z) a b) (refl o a)

backward (o:U): allpaths o -> ((p: concept o) -> nondual o p)  
 = \ (all: allpaths o) (p: concept o) (x y: o) -> cong o U p x y (all x y)

Як бачите, теоремка про порожнечу всіх феноменів вийшла на кілька рядків, які демонструють: 1) основи формальної філософії та швидке занурення в область математичної філософії; 2) гарний приклад до першого розділу HoTT на простір шляхів та модуль path.

## 4 Хроматична теорія гомотопій

Поговоримо про хроматичну теорію гомотопій. Я маю на увазі, що ви трохи знайомі з терією категорій і топологією.

Отже, передусім, припустимо, ви вірите в те, що намагатися класифікувати топологічні простори гомотопічним типом не марна витівка. Це практично неможливо, проте ціль ця шляхетна. Щоб полегшити собі завдання, ми будемо розглядати базові простори, які можуть бути створені приєднанням клітин. Вони іноді називаються CW-комплексами чи клітинними комплексами. Коли я говорю "склеювання клітин я маю на увазі конструювання пушауту для конуса  $D^n \leftarrow S^{n-1} \rightarrow X$ , де  $X$  — деякий простір,  $D^n$  —  $n$ -диск, а  $S^{n-1}$  — його межа. Буквально - склеювання диска на його кордоні.

Виявляється, що будь-який гарний простір (компактно згенерований хаусдорфово) може бути побудований таким чином, починаючи з простих точок, хоча вам, можливо, доведеться приєднати нескінченну кількість осередків. Іншими словами, якщо єдиними будівельними блоками, які ми маємо, є осередки, такі як  $D^n$ , ми можемо, аж до гомотопії, створювати найкрасивіші топологічні простори (наприклад, усі ті, що з'являються у таких додатках, як диференціальна геометрія).

Отже, щоб зрозуміти, які нові простори ми можемо побудувати з існуючого простору  $X$  приєднанням осередків, достатньо знати всі способи, якими сфера може безперервно відображатися сама в собі (бо ми прикріплюємо осередки з використанням сфер відображення). Ви, напевно, вже знаєте, що безліч способів відображення сфери в інший топологічний простір  $X$  називається гомотопічними групами  $X$ . Тому, якщо ми можемо обчислити гомотопічні групи, ми можемо класифікувати (гарні) простори з точністю до гомотопій. Звичайно, ви також можете знати, що обчислювати гомотопічні групи топологічних просторів дійсно дуже, дуже складно. Зокрема, найпростіше питання, яке ви можете поставити — це які простори можна отримати склейками будь-яких сфер ( $S^n$  до  $S^m$  для будь-яких  $n$  і  $m$ ). Це буде набір груп із двома індексами  $n$  і  $m$ , один для розмірності сфери домену та один для розмірності сфери кодомена. Знання

цього могло стати непоганим стартом.

Погані новини: ми не знаємо ці групи, і ніколи можливо не дізнаємось. Ми знаємо безліч їх, і ми хороші в обчисленні груп для фіксованих  $n$  і  $m$ , якщо добре постараємось, але несхоже щоб там був певний очевидний патерн для генерації всіх таких груп. Ну добре, ми можемо принаймні спробувати, і сподіватися, що ми побачимо прикольні штуки дорогою вирішення цього завдання. Коли це все починалося, не було відомо, наскільки це буде складним (сходить до Пуанкаре), тому ми просунулися досить далеко, перш ніж зрозуміли, що справа погана. Зрештою, хроматична гомотопічна теорія є спробою розбити вищеописані гомотопічні групи сфер на будівельні блоки, які легше зрозуміти і з якими легше працювати. Слово "хроматичний" відноситься до складових довжин хвиль, в які "розкладається" біле світло.

Сподіваюся, ви знаєте, що для сфери  $S^n$  існує відображення "ступеня" яке обертає сферу  $S^n$  навколо себе  $p$  разів. Уявімо це відображення як  $p : S^n \rightarrow S^n$ . Це в точності те  $p$ , що ви побачите, коли згадаєте, що  $n$ -та гомотопічна група сфери  $S^n$  — це цілі числа  $\mathbb{Z}$ . Зауважте, що це відображення генерує ціле сімейство відображень  $S^n \rightarrow S^n$ , задане ітеруванням  $p$ . Тобто.  $p^k : S^n \rightarrow S^n$  для будь-якого  $k$ . Таким чином у нас обчислилися деякі гомотопічні групи, але вони не такі вже й цікаві. Одну річ, яку ми можемо зробити — це причепити клітину уздовж цього відображення (або будь-якої його ітерації), щоб отримати новий простір, який я запишу як  $V(0)$ , або  $S^n \bmod p$ . Зауважте, що пашаут, який визначає причеплену клітину, зробив вихідне відображення  $p$  гомотопним нулю (або гомотопічно тривіальним). Зауважте, що  $V(0)$  це лише  $(n+1)$ -сфера приклеєна до  $n$ -сфери, існує включення нижньої сфери  $S^n$  в  $V(0)$ , назвемо це  $i$ , і відображення  $V(0) \rightarrow S^{n+1}$ , яке стягує нижню сферу, назвемо це  $q$ . Таким чином, якби я мав інше відображення  $f : \Sigma V(0) \rightarrow V(0)$ , де  $\Sigma$  — надбудова (суспензія), тоді я міг би зліва закомпозити це з  $i$ , а потім праворуч закомпозити з  $q$  ( $i \cdot f \cdot q$ ), щоб отримати нове відображення  $S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ , яке було б свого роду породженим за допомогою  $f$ . Зверніть увагу, що роль, яку відіграє надбудова, полягає у збільшенні розмірності нижньої сфери  $V(0)$ . Інакше

ми мали б відображення з  $S^n S^{n+1}$ , і будь-яке таке відображення було б гомотопічно тривіальним (знецінюючи наші дії).

Причина, через яку ми це все робимо, полягає в тому, щоб просто знайти ДЕЯКІ елементи гомотопічних груп сфер. Загалом, нам знадобилося чимало часу, щоб знайти БУДЬ-ЯКІ елементи гомотопічних груп сфер, а тим більше спробувати обчислити ВСІ їх. Таким чином, це була велика справа, коли люди як Адамс і Тода, змогли показати що, ТАК, є відображення  $\Sigma V(0) \rightarrow V(0)$  (тут упускаються деталі, насправді вам потрібна більше ніж одна надбудова). Більше того, це відображення, назвемо його  $A : \Sigma V(0) \rightarrow V(0)$ , може бути ітерировано нескінченне число разів, не стаючи при цьому гомотопічно тривіальним. І щоразу, коли ми ітеруємо, ми збільшуємо розмірність. Отже, у нас є вся родина відображень сфер, що входять з (ітеруючих)  $A$ . Під ітеруванням, я маю на увазі, що у мене є відображення  $A : \Sigma V(0) \rightarrow V(0)$ , тому я можу отримати відображення  $\Sigma A : \Sigma \Sigma V(0) \rightarrow \Sigma V(0)$ , а потім інше відображення  $\Sigma \Sigma A : \Sigma \Sigma \Sigma V(0) \rightarrow \Sigma \Sigma V(0)$ , і так до нескінченності, де розмір доменної сфери буде ставати все більше і більше. Якщо це спрацювало одного разу, то чому б не зробити це знову? Так само, як ми затюніли р раніше, давайте візьмемо коядро відображення  $A$  (яке насправді називається корозшаровуванням). Іншими словами, стягуйте все, що потрапляє в  $A$ , даючи нам точну послідовність просторів  $V(0) \rightarrow V(0) \rightarrow V(0)/A$ .

Давайте перейменуємо  $V(0)/A = V(1)$ . Тепер вам просто потрібно повірити, що  $V(1)$  виходить шляхом приєднання осередків (змішуючи склеювання, які ми зробили для побудови  $V(0)$ ), і тому все ще існують відображення з нижньої сфери і:  $S^k \rightarrow V(1)$  і фактор групи до верхньої сфери  $q : V(1) \rightarrow S^k$ . Сміт показав, що існує інше відображення  $B : \Sigma V(1) \rightarrow V(1)$ , яке ми можемо ітерувати стільки разів, скільки ми захочемо, і ми отримаємо ІНШЕ велике сімейство відображень між сферами. Отже, у нас є два великі сімейства відображень сфер (всіх можливих вимірів!), Я назву їхню  $A$ -родину і  $B$ -сімейство. Виявляється, якщо ви знову "затюніте"  $B$ , ви отримаєте новий простір, назвемо його  $V(2)$ , і ви можете повторити цей процес ще раз. І справді, існує карта  $C : \Sigma V(2) \rightarrow V(2)$ , що дає нам інше сімейство, я назву його

C-сімейством гомотопічних груп сфер. Тому тут виникають два природні питання: 1) чи можна повторювати це нескінченно? 2) чи отримаємо ми всі гомотопічні групи сфер?

У певному сенсі перлина хроматичної гомотопічної теорії — це позитивна відповідь на ці два питання (знову ж таки, упускаючи багато деталей). Це насправді є зміст теорем Нільпотентності та Періодичності Девіннаца, Хопкінса та Сміта. У своїй основі "хроматична" ідея полягає в тому, що ці сімейства, які ми отримали  $A$ ,  $B$  і  $C$ , є початком стратифікації гомотопічних груп сфер, і існує нескінченний список цих сімейств. Таким чином, це різновид глобальної структурної теореми для цих розсипаних та заплутаних груп. Ми ще не знаємо їх усіх, але знаємо, як вони організовані. І враховуючи, наскільки вони складні, це справді велика гра!

Ще раз трохи про це все, що є ідеєю простих ідеалів, локалізації та  $K$ -теорій Морави. Також тут буде трохи алгебраїчної геометрії. Ви можете пам'ятати, що якщо ви хочете дізнатися про пучку на  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , достатньо знати про нього в кожному простому числі, тобто кожної "локалізації" цілих чисел  $\mathbb{Z}$ . Таким чином, хроматична стратифікація говорить про те, що на відміну від алгебраїчних різноманітностей, інформація про які може бути зібрана з цілих простих чисел, інформація про комплекси  $CW$  може бути зібрана з цих так званих хроматичних шарів. Насправді, ці хроматичні шари не просто стратифікують гомотопічні групи сфер, вони стратифікують всю категорію кінцевих  $CW$ -комплексів. Оскільки схема може бути розбита на її  $p$ -локальні частини для кожного простого  $p$ , простір може бути розбитий на його хроматичні частини. Це зміст Thick Subcategory Theorem, яка є частиною теореми про Нільпотентність та Періодичність (наслідком). У ній говориться, що, знаходячи цю стратифікацію лише з сфер, ми фактично стратифікували всі кінцеві комплекси клітин. Тут під кінцевим клітинним комплексом, я маю на увазі простір, побудований шляхом виконання кінцевого числа приклеювань осередків (починаючи з порожнечі). Більше того, для тих з вас, хто знає, що це означає, існують теорії когомологій, які говорять про те, на якому СЛО є цей простір. І ці теорії когомологій є так званими  $K$ -теоріями Мо-

рави  $K(n)$  для натуральних  $n$ . Тому кінцевий клітинний комплекс має "тип який є натуральним числом, і це число говорить мені, до якого хроматичного шару належить кінцевий клітинний комплекс. Це може бути обчислено, тому що це просто перший  $n$ , для якого  $K(n)$  когомології вашого простору відмінні від нуля.

$K(0)$  відповідає ступеню відображення  $p$ ,  $K(1)$  відповідає відображенню  $A$ ,  $K(2)$  відповідає відображенню  $B$  і т.д. Ці відповідності я не розглядатиму тут детально. Але, в будь-якому випадку, з'являється така, дійсно красива, картина, де ці  $K(n)$  говорять нам про те, як розділити категорію кінцевих клітинних комплексів на дрібніші, зручніші шари. Фактично, подібно до того, як ви можете локалізувати схему або пучок для простого  $p$ , ви можете локалізувати будь-який простір  $K(n)$  для будь-якого  $n$ . І якщо ви знаєте його  $K(n)$  локалізацію для кожного  $n$ , тоді ви можете зібрати цей простір по шматках, і ви будете знати все про цей простір. Це невелика частина того, що люди мають на увазі, коли кажуть, що теорія Морави — це "прості числа"(стабільної) гомотопічної категорії. По суті, вони — "місця в яких ми можемо локалізувати, щоб отримати локальну інформацію, яку ми хочемо зібрати в глобальну інформацію.

Я повинен додати, що в основному все, що я знаю про це, я дізнався з "помаранчевої книги або "Нільпотентність та періодичність у Стабільній теорії гомотопії"Дугласа Равенела. Це справді красива, приголомшлива книга, і я всіляко її рекомендую.

Джонатан Бірдслей

## 5 Геометрія в модальній HoTT

### Подяка за підтримку

Як завжди перед початком звітом по конференції хочу висловити подяку усім, хто підтримує мене на тернистому шляху докторантури. В першу чергу це моя родина та друзі, які надихають мене, а також представники академії які допомагають мені у цьому. Окрім моїх покровителів з КПІ, перш за все — це звичайно усі спікери та учасники конференції “Геометрія в модальній Гомотопічній теорії типів”. Також хотів би подякувати усім моїм клієнтам, які з розумінням ставляться до моєї математичої діяльності та не відволікають мене по дрібницям.

### Передісторія

Як ви знаєте конструктивна теорія типів HoTT відкриває дорогу в CW-комплекси та алгебраїчну топологію, однак значний пласт проблем вона не вирішує, наприклад теорема Брауера про нерухому точку не виводиться у цій теорії, те саме стосується таких речей як еталні відображення, на яких будується фундамент сучасної диференціальної геометрії. Модальна теорія HoTT у пов'язаних топосах зародилася як продукт дослідження Урсом Шрайбером Картанової супергеометрії у застосуванні до сучасної теоретичної фізики та було детально розроблена як розширення HoTT Майком Шульманом (cohesivett). Після дисертації Фелікса Черубіні стало зрозуміло, що HoTT у зв'язаних топосах може вирішити останні проблеми формалізації математики і ця конференція перший івент цього стибу.

### Еґберт Райке

Еґберт захистив свій мастер тезис у Андрія Бауера, а дисертацію у Стів Еводі. Але найбільше Еґберт вплинув на мене своїм курсом по HoTT. Усього є декілька курсів: по-перше це сам підручник з HoTT, далі курс Валерія Ісаєва, курс Роберта Харпера (15-819), та один з найбільш просвітлюючих курсів це HoTT курс



Егберта, про який я писав на каналі Групоїд Інфініті. Його курс найбільше вплинув на мій власний курс HoTT.

Також Егберт відомий тим, що у співробітництві з Ульріком Бушхольцом формалізував квартерніонні фібрації Хопфа. На цьому воркшопі Егберт представив зразу три доповіді. Перша було про рефлексивні підсвєствіти та модальності, де показав, що транкейшин рівні гомотопічних типів є рефлексивними підсвєствітами, їх універсальні властивості, необхідні умови доступності для підсвєствітів, еквівалентність визначень локальних відображень, локальних просторів, та замкненість підсвєствітів відносно еквівалентностей. Друга доповідь була присвячена відокремленим просторам (простір  $L$ -відокремлений, якщо усі його  $\text{id}$ -типи  $L$ -локальні, де  $L$  — рефлексивний підсвєствіт). Тут розглядалось чи завжди підсвєствіт  $L$ -відокремлених типів є рефлексивним підсвєствітом. Третя доповідь була про Модальний спуск та рефлексивні системи факторизації, де були дані визначення ортогональних систем факторизації (OFS), стабільних OFS, та  $n$ -етальні відображення.

## Майк Шульман

Переоцінити вклад Майкла Шульмана в розвиток HoTT важко. Фактично він основним автором `ncatlab Cafe`, співзасновником `ncatlab`, та головним контрибутором в `cohesivett`, теорію яка відкрила двері в математику нескінченних околів, та інших модальностей, яка були ним розроблена з подачі Урса Шрайбера. На цій конференції Майк Шульман представив дві доповіді. Перша була присвячена основам теорії звязаних топосів (про яку вперше можна прочитати у Вільяма Лавіра). В першій доповіді були дані основні визначення комонадичної флет-модальності (бемоль) згідно з принципами MLTT (формації, інтро, елімінатори, бета та ета рівності), яка за якою власне і схована ко-рекурсія обчислення нескінченно малих величин, або більше відомих в математиці як епсилон-околи. Це база `cogesivett`, розробка якої розпочалася в далекому 2011 році. Також було обговорення імплементації бемоль модальності в `Agda (flat-brench на гітхабі)`. Друга доповідь була присвячена семантиці

вищих модалностей, та за допомогою бемоль-модалності була накінець-то конструктивно доведена теорема Брауера про нерухому точку (яка як відомо не доводиться у чистій HoTT), чим було закрито кон'юнктуру Еводі, у залі стояли гучні аплодисменти. Раджу усім послухати цю доповідь, хто скептично ставився до конструктивної математики.

## Урс Шрайбер

Урс один з засновників сучасної математичної енциклопедії `ncatlab`, якою користуються усі сучасні математики, не тільки в області інфініті категорій, HoTT, а також прикладної та теоретичної фізики, яка для Урса є головним мотиватором. Вперше ідея запропонувати `cohesive` топоси Лавіра для моделювання вищих геометрій та логік виходила саме від Урса, а Майк Шульман виконала усю необхідну роботу по формалізації (`cohesivett`). Як бачимо колаборація Майка та Урса виходять далеко за межі адміністративної роботи по управлінню математичної енциклопедії `ncatlab`, якою ми з вами зачитуємося до 5-ї години ранку.

Додовання модалностей як системи операторів до HoTT дає змогу дуже елегантно доводити теореми вищої геометрії, диференціальної топології, диференціальної геометрії, супергеометрії. В доповіді Урса показані засади Картанової геометрії, формальної Картанової геометрії та Картанової Супергеометрії. Головна мотивація для Урса — це побудова формальної M-теорії (спільна робота з Хішамом Саті в Нью-Йоркському Університеті в Абу Дабі). Урс побудував вежу модалностей які хитро вилаштовуються в діагональ спряжень, і чи має ця вежа кінець відкрите питання в новоспеченій модалній HoTT.

Нижній рядок — `Empty` та `Unit`, другий рядок модалностей застосовується в диференціальній топології (ретопологізація та топологізація) — шейп модаліті, флет (бемоль) модаліті, та шарп (дієз) моділіті, третій рядок застосовується у диференціальній геометрії (`Im` та `Re` модалності), та верній рядок — фізика (бозонні та ферміонні модалності), далі вежа насичується та стабілізується (начебто?). Синім кольором зображені мотивні

локалізації афінного відрізка.

Як на мене це сама езотерична теорія сучасної формальної математики та теоретичної фізики яка дає безмежне натхнення по формалізації будь яких теорій (M-теорія, теорія струн, супергеометрія, інші версії гомотопічних теорій). Без сумніву Урса можна назвати батьком модальної гомотопічної теорії типів, а також батьком ncatlab!

## Фелікс Черубіні

Фелікс Черубіні перший учень Урса Шрайбера який детально розробив у своїй дисертації Im модальності, які застосовуються для моделювання етальних відображень, які у свою чергу дозволяють доводити теореми про нескінченні околиці (диференціальна геометрія). Сама дисертація Фелікса відкрила у мене друге дихання та породила нову лінію досліджень. Власне цей воркшоп присвячений геометрії відбувся завдяки зусиллям Фелікса, як головного організатора заходу.

## Ульрік Башхольтц

У Ульріка багато регалій, але якби мене попросили його описати одним досягненням, то я би сказав, що Ульрік єдина людина у світі яка змогла формалізувати кватерніонне розшарування Хопфа (мова Lean). Також я замовив у Ульріка code review інтерпретації кубічної теорії у мову Lean), так як Ульрік адепт Lean.

Доповідь Ульріка була присвячена некомутативній теорії когомологій, а саме пучкам (gerbe, як інструмент гокомологій степені 2), крученням (twist), лєнтам (band). І усе це в модальній HoTT. Дивіться його підручник з симетрій Symmetry Book<sup>1</sup>.

## Пітер Арндт

Пітер Арндт представив абстрактну мотивну теорія гомотопій — яка є одночасно його PhD тезисом. Доповідь почалася зі зве-

---

<sup>1</sup><https://github.com/UniMath/SymmetryBook>

деної теорії когомологій як функтора з оберненої категорії топологічних просторів з точками в абелеву категорію:  $\text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{AbZ}$ . Далі були розглянуті схеми на базю  $K$ :  $K\text{-Alg} \rightarrow \text{Set}$ . Потім ми розглянули глядкі схеми та мотивні простори з топологією Нісневича/Заріського, мотивні спектри та мотиви  $\text{HZ-Mod}$  (ше-стикутник). Потім ми замінили мотивні простори на представимі інфініті декартово замкнені категорії та визначили таким чином цілком абстрактну мотивну теорію гомотопій. Були розглянуті стабільні та нестабільні результати та побудови та наведені достатні приклади. Показана можливість пабудови раціонального оператора Адамса.

## Спонтанне інтерв'ю з авторами кубіків

Нагадаю, що кубіками я називаю системи доведення теорем, які побудовані на базі кубічної теорії типів, єдиної теорії типів, у якій можна довести аксіому унівалентності Воєводського. 5 із шести кубічних тайпчекері були написані в CMU цими хлопцями (три версії на мові хаскель: `cubicaltt`, `cubicaltt/hcomptrans`, `uacstt`, одна на Standard ML — `RedPRL`, та одна на OCaml). Не взяти інтерв'ю в авторів цих пруверів було би великою необачністю. Я зробив презентацію нашої бібліотеки `Groupoid Infinity` — усі були у захваті.

## Андерс Мортберг

Не знаючи на те, що `cubicaltt` більше не розроблюється, Андерс жартує, що він ідеальний, тому нема далі що покращувати. Наймінімальніший синтаксис кубічної теорії який поміщається на 12-рядках BNF нотації!

## Карло Анджіулі, Джон Стерлінг

Джон Стерлінг пропрацював деякий час в індустрії програмного забезпечення, тому його системи відрізняються дорослістю та складністю. Карло забезпечує математичну підтримку, але

усі вони програмісти та математики, важно виділити що головніше!

## Еван Кавалло

Еван був представлений мені як спеціаліст з вищих індуктивних типів (CW-комплексів), або HIT-чарівник! Останні публікації стосовно теорії HIT та формалізація тайпчекінга HIT в декартовій кубічній теорії — заслуги Евана.

## Стів Еводі

Стіва Еводі можна назвати батьком гомотопічної теорії типів (HoTT), саме на запрошення Стіва Володимир Воеводський почав інтенсивно займатися HoTT, а також завдяки Стіву відбувся проект HoTT. Як хранитель та модератор Стів спостерігав за конференцією та був адвайзором багатьох людей присутніх на конференції.

## 6 Lean конференція

По-перше хочу подякувати усім, хто мене підтримує, надихає та прощає мені багато чого. Попасти на таку подію — це справжній подарунок та задоволення від усвідомлення, що коло однодумців більше, ніж ти очікував.

### Хенк Барендрегт

Назвичайно був вражений теплим сердечним прийомом та щирим і відкритим інтерв'ю Хенка Барендрехта, перша частина якого опублікована в інстаграмі, а друга на ютубі та фейсбуці. Хенк Барендрехт відомий нам інженерам як автор лямбда кубу, цілої системи формальних моделей які поєднують та класифікують усі лямбда числення в залежності від різного набору чотирьох формул  $\star : \star, \star : \square, \square : \square, \square : \star$ . Фактично, усі типизовані мови програмування, включаючи PTS (CoC, System P<sub>ω</sub>, або чи-ста система), яка є ядром усіх прунерів, потрапляють у лямбда куб. До цього Хенк Барендрехт також повністю формалізував та довів майже усі теореми про нетипизоване лямбда числення яке теж є основою багатьох мов з динамічною типизацією. Його український учень Андрій Полонський, який повернувся в Україну під час Майдану, довів спростування кон'юнктури Хенка Барендрехта, яке лягло в основу сучасних ідей оптимальної бета-редукції, яка була реалізована в роботах Майя Віктора (мова Kind з залежними індуктивними типами, написана на Rust, містить оптимальний евалуатор бета-редукцій та здійснює екстракт в GPU).

Хенк зараз досліджує свідомість за допомогою формальних методів та медитації, він є сертифікованим учителем Віпаш'яни в стилі Махасі, його учителями були Кобун Чіно Роші та Фра Меттавіхарі. Найближчі його ретріти в 2019 році в Греції та Італії. Хенк також пише статті на тему формальної філософії, формалізації буддійських систем та формалізації свідомості. Можливо варто спробувати написати огляд робіт Хенка для нашого каналу Формальної Філософії, якщо кількість підписників, скажімо, подвоїться.

## Джеремі Авігад

Перша — Джеремі Авігада по факторизації поліноміальних функторів. В секції питань його запитали чи дійсно дійсні числа закодовані як фактор-типи коіндуктивних послідовностей цифр є найкрасивішою моделлю дійсних чисел і Джеремі відповів, що так.

```
class qpf (F : Type u → Type u) [functor F] :=
  (P : pfunctor.{u})
  (abs : Π {α}, P.apply α → F α)
  (repr : Π {α}, F α → P.apply α)
  (abs_repr : {α} (x : F α), abs(repr x)=x)
  (abs_map : {α β} (f : α → β) (p : P.apply α),
    abs (f <$> p) = f <$> abs p)
```

## Рейд Бартон

Друга — Ріда Бартон по формалізації модель-категорій Квілена та структурі моделі Квілена на топологічному просторі. У цій роботі розглянутий трансфінітний випадок, проведена велика класифікація топологічних просторів (найбільша на моїй пам'яті), достатньо пророблена теорія категорій та фундаментальний групоїд, категорія корозшарувань, факторизація Брауна.

```
class model_category (M : Type u) extends category.{u v} M :=
  (complete : has_limits M)
  (cocomplete : has_colimits M)
  (W C F : morphism_class M)
  (h : is_model_category W C F)
```

```
structure is_model_category (W C F : morphism_class M) : Prop :=
  (weq : is_weak_equivalences W)
  (caf : is_wfs C (F W))
  (acf : is_wfs (C W) F)
```

```
def Meas : Type (u+1) := bundled measurable_space
def Top : Type (u+1) := bundled topological_space
```

```
def Borel : Top → Meas :=
  concrete_functor @measure_theory.borel
    @measure_theory.measurable_of_continuous
```

```

instance (x : Top) : topological_space x := x.str
instance (x : Meas) : measurable_space x := x.str

instance : concrete_category @measurable :=
  @measurable_id, @measurable.comp

instance : concrete_category @continuous :=
  @continuous_id, @continuous.comp

```

## Джесі Хан

Третя — доведення незалежності континуум гіпотези від Джесі Хана. Джесі Хана також цікавить транспорт з топоса в класичну топологію.

```

theorem independence_of_CH :
  (¬ ZFC ⊢ continuum_hypothesis)
  ∧ (¬ ZFC ⊢ ~ continuum_hypothesis) :=
begin
  have := CH_consistent,
  have := neg_CH_consistent, repeat{auto_cases},
  apply @independence_of_exhibit_models L_ZFC ZFC
    ZFC_consistent continuum_hypothesis,
  show Model ZFC,
  exact this_w_1,
  show Model ZFC,
  exact this_w,
  repeat{assumption}
end

```



## 7 Модельні категорії Квілена

PhD Деніела Квілена була присвячена диференціальним рівнянням, але відразу після цього він перевівся в MIT і почав працювати в алгебраїчній топології, під впливом Дена Кана. Через три роки він видає Шпрінгерівські лекції з математики "Гомотопічна алгебра яка назавжди трансформувала алгебраїчну топологію від вивчення топологічних просторів з точністю до гомотопій до загального інструменту, що застосовується в інших галузях математики.

Модельні категорії вперше були успішно застосовані Воєводським на підтвердження кон'юнктури Мілнора (для 2) і потім мотивної кон'юнктури Блоха-Като (для  $n$ ). Для доказу для 2 була побудована зручна гомотопічна стабільна категорія узагальнених схем. Інфініті категорії Джояля, досить добре досліджені Лур'є, є прямим узагальненням модельних категорій.

До часу, коли Квіллен написав "Гомотопічну алгебру вже було деяке уявлення про те, як має виглядати теорія гомотопій. Починаємо ми з категорії  $C$  та колекції морфізмів  $W$  — слабкими еквівалентностями. Завдання вправи інвертувати  $W$  морфізму щоб отримати гомотопічну категорію. Хотілося б мати спосіб, щоб можна було конструувати похідні функтори. Для топологічного простору  $X$ , його апроксимації  $LX$  і слабкої еквівалентності  $LX \rightarrow X$  це означає, що ми повинні замінити  $X$  на  $LX$ . Це аналогічно до заміни модуля або ланцюгового комплексу на проективну резольвенту. Подвійним чином, для симпліційної множини  $K$ , Кан комплексу  $RK$ , і слабкої еквівалентності  $K \rightarrow RK$  ми повинні замінити  $K$  на  $RK$ . У цьому випадку це аналогічно до заміни ланцюгового комплексу ін'єктивною резольвентою.

```
modelStructure (C: category): U
= (fibrations: fib C)
* (cofibrations: cofib C)
* (weakEquivalences: weak C)
* unit
```

Таким чином Квілену потрібно було окрім поняття слабкої еквівалентності ще й поняття розшарованого ( $RK$ ) та корозшарованого ( $LX$ ) об'єктів. Ключовий інстайт з топології тут на-

ступний, в неабелевих ситуаціях об'єкти не надають достатньої структури поняття точної послідовності. Тому стало зрозуміло, що для відновлення структури необхідно ще два класи морфізмів: розшарування та корозшарування на додаток до слабких еквівалентностей, яким ми повинні інвертувати для розбудови гомотопічної категорії. Природно ці три колекції морфізмів повинні задовольняти набору умов, званих аксіомами модельних категорій: 1) наявність малих лімітів і колимітів, 2) правило 3-для-2, 3) правило ректрактів, 4) правило підйому, 5) правило факторизації.

Цікавою властивістю модельних категорій є те, що дуальні до них категорії перевертають розшарування та корозшарування, таким чином реалізуючи дуальність Екманна-Хілтона. Розшарування та корозшарування пов'язані, тому взаємовизначені. Корозшарування є морфізми, що мають властивість лівого гомотопічного підйому по відношенню до ациклічних розшарування і розшарування є морфізми, що мають властивість правого гомотопічного підйому по відношенню до ациклічних кофібрацій.

Основним застосуванням модельних категорій у роботі Квілена було присвячено категоріям топологічних просторів. Для топологічних просторів існує дві модельні категорії: Квілена (1967) та Строма (1972). Перша як розшарований використовує розшарування Серра, а як корозшарування морфізму які мають лівий гомотопічний підйом по відношенню до ациклічних розшарування Серра, еквівалентно це ретракти відповідних CW-комплексів, а як слабка еквівалентність виступає слабка гомотопічна. Друга модель Строма як розшарування використовуються розшарування Гуревича, як корозшарування стандартні корозшарування, і як слабка еквівалентність — сильна гомотопічна еквівалентність.

```
quillen67
: modelStructure Top
= ( serreFibrations ,
    retractsCW ,
    weakHomotopyEquivalence )
```

```

strom1972
: modelStructure Top
= ( hurewiczFibrations ,
    cofibrations ,
    strongHomotopyEquivalence )

```

Найпростіші модельні категорії можна побудувати для категорії множин, де кількість ізоморфних моделей зростає до дев'яти. Наведемо деякі конфігурації модельних категорій для категорії множин:

```

set0: modelStructure Set = (all,all,bijections)
set1: modelStructure Set = (bijections,all,all)
set2: modelStructure Set = (all,bijections,all)
set3: modelStructure Set = (surjections,injections,all)
set4: modelStructure Set = (injections,surjections,all)

```

У контексті модельних категорій визначаються сполучення Квілена, лівий і правий функтори Квілена, Квілен еквівалентно-сті, лівий і правий похідні функтори, розширення Ріді (оскільки в загальному випадку ліміти та коліміти не існують у гомотопічних категоріях визначених на модельних категоріях, то модельні категорії Наприклад є категорії  $\mathcal{C}$ , і Ріді категорії  $\mathcal{J}$  то  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  має всю необхідну структуру для існування гомотопічних (ко-)лімітів.

Для переходу від модельних категорій до інфініті категорій [або  $(\infty,1)$ -категорій] необхідно перейти до категорій де морфізми утворюють не множини, а симпліційні множини. Потім можна переходити до локалізації.

```

simplicial
: modelStructure sSet
= ( kanComplexes ,
    monos ,
    simplicialBijections )

```

Але для нас, для програмістів найцікавішими є модельні категорії симпліціальних множин та модельні категорії кубічних множин, саме в цьому сеттингу написано ССНМ пейпер 2016 року, де показано модельну структуру категорії кубічних множин.

```

cubical
: modelStructure cSet
= ( kanComplexes ,
    monos ,
    geometricRealisation )

```

де  $cSet = [\square^{op}, Set]$ , а  $\square$  — категорія збагачена структурою алгебри де Моргана.

## 8 Модальна гомотопічна теорія

Тут представлена рецензія на книгу Девіда Корфілда "Модальна Гомотопічна Теорія Типів. Перспектива нової логіки для філософії".

Модальна гомотопічна теорія типів — це сучасне поєднання модальної теорії типів (для вираження або класичних модальних логік висловлювань  $K$ ,  $S4$ ,  $S5$  і т.д. або сучасних (ко)монадичних інтерпретаторів які реалізують відповідні модальності) з та у застосуванні до гомотопічної теорії типів. Це поєднання мотивовано багатьма дослідженнями та відкритими проблемами одна з яких це неможливість реалізації доведення Брауера про нерухому точку у чистій HoTT. До цього модальності в теоретичній інформатиці моделювалося за допомогою семантик Кріпке, тому перехід до категорної моделі монад або роботи в 2-теорії типів, дав змогу формалізації інфінітіземальних околів та понять многовидів у алгебраїчній геометрії.

Крім метатеоретичної частини у зв'язаних топосах та геометричних морфізмах між ними, сформульованої Вільямом Ловером, автор показує також основи залежної теорії типів, та її застосування до філософії та формальної природньої людської мови. На мою думку потужна логічна основа та формальна модель NLP — це запорука успішної системи обробки природньої мови гомосапієнсів побудованої на стохастичних моделях.

Найприємніше в книзі є те, що значна її частина приділяється історії виникнення модальної HoTT як результату пошуку формальної моделі для калібрувальної інваріантності (теоретична фізика) Урсом Шрайбером. Відповідь на цей запит спочатку була представлена Майклом Шульманом як *cohesivett*, а пізніше, на Конференції по диференціальній геометрії в модальній HoTT влаштованій Феліксом Велленом, на якій мені довелося побувати, і саме конструктивне доведення теореми Брауера про нерухому точку в модальній HoTT. Детальний звіт про конференцію.

Модальності важливі не тільки для застосувань у формалізації часу в природній мові, та геометричного поняття коіндуктивного околу, або дійсних чисел, модальності також фор-

малізують поняття процесу, як фізичного так і інформатико-теоретичного. Позаяк числення процесів цілком поглинається модальною теорією типів у зв'язаних топосах, модальна HoTT у свою чергу не тільки забезпечує формалізацію теоретичної фізики, але і відкриває двері у формальну філософію різних модальностей, або інтерпретацій.

Зараз  $\lambda$ -модальність уже вбудована в Агду, та існують уже прототипи мультимодальних тайпчекерів. Раджу цю книжку усім математикам, усім програмістам, та усім філософам у якості підручника з формальної філософії.

## 9 Метафілософія

Коротко про сучасні філософії. Якщо визначити філософію предикативно, це наука вивчає певний набір питань, типу: як жити добре, чи реальний всесвіт та інші питання гносеологічних категорій, свобода волі, етика, математика, музика, поезія, література, - усе це взагалі-то питання чи мовні набори, що цікавлять сучасних філософів.

У цій нотатці ми спробуємо побудувати формальну систему і на її прикладі показати інтерпретацію трьох ліній передачі сучасної філософії: європейської чи континентальної філософії — школи, яка задала початок глобальній інтерпретації світу та реконструкції мов, у тому числі й математики; східної філософії як приклад особливої школи, на прикладі якої ми будуватимемо модель; та аналітичної чи англосаксонської філософії, що формалізується сучасною математикою.

### Європейська філософія

На наш погляд, головне питання європейської філософії - це Good Life. Як жити, як жити добре самому, у соціумі, які цілі можуть стояти перед індивідом та видом, баланс етики та етика балансу. Європейська філософія народила геометрію, психоаналіз, навчила людей не боятися свободи, трансформувати агресію, бути більш зрілою істотою, і під вінець свого розвитку поставила питання про мову та мовну гру, як основний інструмент рефлексуючої свідомості.

Мова перестала мати ґрунт, вона стала просто візерунками, семантика яких втрачена, філософія стала формою літературного мистецтва.

Представники континентальної філософії: Арістотель, Платон, Кант, Декарт, Ніцше, Фрейд, Юнг, Юм, Хайдеггер, Адорно, Хабермас, Делез.

## Тибетська філософія

У східній філософії центральним питанням є визволення себе і інших, в першу чергу від різних форм страждання. Ця філософія має чітку систему, яка нерозривно пов'язана з тілесними та розумовими практиками, і вижила протягом тисячоліть у законсервованому гірському плато. Тут також порушуються питання етики та свободи волі, але основний наголос робиться на інтелектуальних та неконцептуальних вправах, що ведуть до безпосереднього переживання простору.

Деякі формулювання східної філософії, такі як недвоїстість всіх феноменів піддаються формалізації в гомотопічній теорії типів (використовуючи методи аналітичної філософії), що спонукало до подальших досліджень у галузі формалізації езотеричних теорій.

Представники східної (тибетської) філософії: Атіша, Нагарджуна, Бхававівєка, Камалашила, Шантаракшита, Арьядева, Буддхапаліта, Чандракірті, Цонкапа, Міпам, Лонгченпа.

## Аналітична філософія

Аналітична філософія народжена в математиці, рання аналітична філософія починається напевно з Лейбніца, Ньютона та Ейлера. Пізня аналітична філософія починається з Фреге і далі за списком: Рассел, Уайтхед, Дедекінд, Пеано, Гільберт, Фон-Нейман, Каррі, Акерманн, Карнап, Сколем, Пост, Гедель, Черч, Берньє, Тюрінг, Кліні, Россер, Мак-Лейн, Ловір, Гротендік, Скотт, Джозьяль, Терньє, Мартін-Льоф, Мілнер, Жирар, Плоткін, Рейнольдс, Бакус, Барр, Барендрехт, Лер'є, Силі, Кокан, Х'юет, Ламбек, Воєводський, Еводі, Шульман, Шрайбер.

Якщо описати двома словами головне питання аналітичної філософії — це мова простору. Побудова мови, яка дасть формальний фундамент не лише математики та роздумів, а й самої філософії.



## Мова простору (абстрактний нонсенс)

Формальні підстави мови роздумів, математики (усієї) та фізики (всесвіту). Оскільки математика вміщає всі теорії, то мова математики є дуже обмеженою у порівнянні з математичними теоріями та моделями, хоча оперує всіма, зокрема найабстрактнішими математиками. Всі інші моделі нижчих рівнів записуються на цій мові програмування.

## Мовні фреймворки (теорії)

Мовні фреймворки для менш формальних (з парадоксами) та нечітких (стохастичних) систем. Мовні фреймворки це теорії та тактики доведення, або системні декомпозиції які допомагають аналізувати об'єкти формально та обчислювально.

## Конкретні математичні моделі

Прикладна філософія Використання мовних фреймворків для опису конкретних феноменів. Конкретні феномени тут представляються як конкретні моделі певних теорій, побудованих на своїх мовних фреймворках.

## Обчислювальні моделі (прикладна математика)

Останній онтологічний рівень сучасної формальної філософії — це конкретні обчислення на конкретних моделях, які є практичними дослідженнями.

## 10 Прикладна математика

Цю статтю я вирішив написати аби пролити світло на предметноорієнтованість математичних дисциплін через призму власного досвіду. Мені не пощастило (як я про це думав колись) у тому, що я опинився в світі, де математика уже існувала задовго до мене, проте значною мірою доля щастя була в тім, що комп'ютери змінювали математику на моїх очах.

При виборі фалькутету ПМ я керувався елітарним критерієм максимального конкурсу на місце, однак (як зрозумів згодом) стратегія немає такого значення, як має воля до всезбагнення. Саме вона мені дозволила пережити перші розчарування в моєму освітньому шляху і я почав усвідомлено мімікрувати під систему освіти та предмети західного аналітичного духу філософії, як і належить математикам.

### Інститут формальної математики

Зараз, коли у мене є своя лабораторія, яка стабільно приносить плоди, як у вигляді публікацій так і у вигляді артефактів, я поіншому уявляю кафедральну структуру факультету:

- КФ-033: Кафедра формальної філософії
- КМ-111: Кафедра чистої математики
- КМ-113: Кафедра прикладної математики
- КА-121: Кафедра мовного забезпечення
- КВ-123: Кафедра теоретичної інформатики

### КФ-033 Формальна філософія (магістр)

Перш за все, всі основи математики (УДК 510) я би формальним чином засунув на спеціальну новостворену кафедру формальної аналітичної математичної філософії, яка би читала курси по математичній логіці та філософії для всіх інших кафедр та факультетів як базовий провайдер. Саме так це зроблено в CMU.

Місце аналітичної філософії розкривається в курсі історії філософії.

- Теорія категорій (екзамен) КФ-033-01
- Формальні логіки (екзамен) КФ-033-02
- Категоріальна логіка (екзамен) КФ-033-03
- Лямбда-числення (екзамен) КФ-033-04
- Модальні логіки (екзамен) КФ-033-05
- Теорія типів Мартіна-Льофа (екзамен) КФ-033-06
- Формалізація штучних мов КФ-0133-07
- Формалізація людських мов КФ-033-08

Ці курси є основою для усіх кафедр інституту прикладної математики. Для інших спеціальностей друго наувого-освітнього рівня потрібно набрати мінімум три повноцінних курси (36 кредитів), які читаються на кафедрі філософії (КФ-033).

#### КФ-033 Формальна філософія (доктор)

- Мультимодальна гомотопічна теорія типів КФ-033-09
- Гіперграфові моделі фізики КФ-033-10

#### КМ-111 Чиста математика (магістр)

Кафедра чистої математики, яка на мій погляд обов'язково потрібна на факультеті прикладної математики, аби прикладна математика володіла усіма математичними інструментами які потрібно вміти використовувати для поліедральних та нелінійних оптимізацій. Цей провайдер повинен постачати курси, які могли би конкурувати з російськими школами алгебраїчної топології та геометрії та курсами університету Карнегі-Мелона.

- Алгебра (екзамен) КМ-111-01
- Геометрія (екзамен) КМ-111-02
- Теорія гомотопій (екзамен) КМ-111-03
- Теорія чисел КМ-111-04

- Теорія схем Гротендіка КМ-111-05
- $p$ -адичний аналіз КМ-111-06
- Теорія Ходжа. Мотивне інтегрування (екзамен) КМ-111-07
- Алгебраїчна топологія (екзамен) КМ-111-08
- Диференціальна геометрія (екзамен) КМ-111-09
- Гомотопічна теорія типів КМ-111-10
- Теорія топосів КМ-111-11
- Модельні категорії Квілена КМ-111-12

Ці курси потрібні в основному для спеціалістів за спеціальностями 111 (чиста математика) та 113 (прикладна математика).

#### КМ-111 Чиста математика (доктор)

Деякі спеціальні теми для створення мотиваційної конкуренції з НАН України:

- Сімпліціальна гомотопічна теорія КМ-111-13
- Локальна гомотопічна теорія (екзамен) КМ-111-14
- $K$ -теорія КМ-111-15
- Теорія інфініті-категорій КМ-111-16

#### КМ-113 Прикладна математика (магістр)

На початкових курсах своєї подорожі я керувався головним чином спадком радянської школи, тому як доступу до Інтернету, а тим більше до Шпрінгер видань не було, я зміг скласти на той час достатньо повну бібліотеку усього класифікатора УДК 51, яку мені вдалося відновити тільки відносно недавно. В умовах тотального розчарування в радянській педагогічній школі я вимушений був сфокусуватися значним чином на програмуванні, а не на математиці. Вже тоді мені стало зрозуміло, що запорука якісного середовища математика полягає в якісній основі. Хоча прикладна математика традиційно не фокусується на засобах програмування та операційних системах, це направлення

мене цікавило з самого першого дня першого курсу університету і допомогло пережити складні частини наукової зневіри.

Курси другого освітнього рівня, які читаються на кафедрі прикладної математики є обов'язковими для спеціальностей 111 (чиста математика) та 113 (прикладна математика).

- Дискретна математика (екзамен) КМ-113-01
- Математична статистика (екзамен) КМ-113-02
- Формальні логіки (екзамен) КМ-113-03
- Комплексний аналіз КМ-113-04
- Чисельні методи (екзамен) КМ-113-05
- Математичний аналіз (екзамен) КМ-113-06
- Функціональний аналіз (екзамен) КМ-113-07
- Звичайні диференціальні рівняння (екзамен) КМ-113-08
- Диф. рівняння в частинних похідних (екзамен) КМ-113-09
- Рівняння математичної фізики КМ-113-10

Рестроспективний погляд на мою дисоціативну освіту в минулому дозволяє зараз мені реінтегрувати цей досвід і виділити найсуттєвіші його частини. В дусі аналітичної філософії корені логіки, теорії типів та лямбда числення як основи для математики та програмування слід шукати в роботах Расела, Уайтхеда, Пеано, Черча, Карі. Пізніше варто збагнути основні технічні питання математики: робота з універсальними властивостями (теоремами), поняття нескінченності та принципи її декомпозиції (індексація натуральними числами), різні аксіоматичні геометрії, поняття дійсного числа, граничного переходу, класичного аналізу нескінченно-малих Ейлера та Лейбніца. Звичайні диференціальні рівняння відкривають багато схованок у вигляді тензорного числення та лінійної алгебри, а рівняння в частинних похідних відкривають ворота у функціональний аналіз, гармонічний аналіз, алгебри Лі та покажуть трохи нелінійної фізики. Окрім рівнянь теоретичної фізики уся база прикладної математики зводиться до диференціальних рівнянь, а усі інші аспекти математики, як аналіз чи тензорне числення уже випливають як необхідний апарат. З академічної точки зору традиційно виклад матеріалу ведеться з математичних теорій, які не містять

залежностей і далі усладнюючи алгебраїчні структури переходять то теорій верхнього рівня. Важливо завжди бачити повну картину та намагатись утримати головну мотивацію математики — обчислення.

### КМ-113 Прикладна математика (доктор)

Прикладна математика зараз сприймається як все, що я можу порахувати на комп'ютері, а особливо задачі які опимально обчислюють на границі сучасної точності за початковими та граничними умовами. За цей час спектр математичних моделей для мене розширився та доповнився новими дисциплінами. Наступні 10 років я провів більше займаючись формальною математикою та філософією і лише мріяв вернутися в часи базової вищої освіти повністю переглянувши усі математичні засоби та їх взаємодію. Для виконання своєї дисертаційної роботи мені довелося взяти такі додаткові курси на кафедрі чистої математики:

- Алгебраїчна топологія (екзамен) КМ-111-08
- Диференціальна геометрія (екзамен) КМ-111-09
- Гомотопічна теорія типів КМ-111-10
- Теорія топосів КМ-111-11

Як би я не хотів вирватися з лап прикладної математики в межі чистої та формальної математики чи формальної філософії думки завжди повертаються у прикладну математику. Прикладна математика в моєму розумінні це чиста математика сформульована формальними методами з метою точної (в таких випадках як логіка, чи символні обчислення) чи наближеної калькуляції. Наближене обчислення у свою чергу передбачає додатковий апарат у вигляді теорем та теорій, який доводить збереження властивостей та корекність моделі при наближених обчисленнях. Таким чином чистий математик, який вирішив застосувати певну математичну теорію та порахувати в рамках її обчислювальної моделі певний клас формул, вже перетворюється на прикладного математика.

Хоча найабстрактніша чиста математика не оперує конкретними моделями, а лише їх сигнатурами і метамоделями сигнатур (та вище), у ній теж є обчислення — це точні обчислення логіки (доведення теорем), в даному випадку гомотопічної теорії типів, особливого виду логіки який підходять як основна мова для усієї математики. Цей предмет (який вивчає основну мову математики) як і усі логіки можна віднести до прикладної математики (логічні числення), а також і до теоретичної інформатики (яка необхідна для побудови математичної мови-інструменту). Також можна класифікувати цей предмет як формальну філософію, тому що для прикладного формального філософа ця мова є єдиним необхідним інструментом, на відміну від інших прикладних математиків, які зазвичай використовують додатково потужні прикладні теорії (алгтоп та дифгеом) або їх частини.

Оскільки (математичний) твір написаний на (формальній) мові потребує форми, з давня математики використовували літературний жанр у її якості. Це певного роду напів-формальна напів-людська мова, базис якої зводиться до кванторів: "для всіх  $x$ , таких що ..." та "існує таке  $x$ , що ...". Математика як одна з філософських дисциплін (серед яких також музика, образотворче мистецтво, література, етика) це певна форма поезії яка працює виключно з простором на абсолютному рівні. Без проміжків, без узагальнень і апроксимацій нелінійних динамічних систем, лише абсолютна фібраційна тотальна логіка простору. Такі (математичні) вірші з давніх давен цінувалися (філософами) високо, а їх створення супроводжується не тільки майже езотеричною традицією але і інтегровано в те, що ми зараз називаємо науковим методом пізнання реальності (з метою отримання максимального задоволення максимальний проміжок часу). Велике мистецтво в таких творах показати сутність сприйняття та дати авторський коментар (відповідної глибини), хоча самі теореми теж є самостійним об'єктом творчості.

З появою формальної верифікованої математики (1968) літературна форма математики розширилися та доповнилася тим, що вивчає теоретична інформатика — програмним продуктом, який можна скачати та поставити, у якому є своє обчислю-

вальне середовище, своя мова програмування, своя базова бібліотека та приклади програм (теореми). Але на відміну іншої філософської дисципліни, ігрової індустрії, культура верифікованої математики не набула таких масштабів стандартизації як ISO стандарти з урегулювання складних інформаційних систем включно з Інтернетом. Можна сказати, що сучасні чисті математики обмежують себе чисто філософськими інструментами — системами доведення теорем (Agda, Lean) і тішуться з того; у той час, як прикладі математики зосереджені або в математичних спеціалізованих пакетах Mathematica, Maple, Matlab, GAP або з підручних засобів на Github будують MVP моделі та оформляють це у вигляді Jupyter блокноту. Культура блокнотів достатньо непогане поєднання літературного жанру з образотворчим мистецтвом візуалізації даних (як це маніфестується у системі Processing). І чисті і прикладні сучасні математики використовують TeX як де-факто стандарт при класичній літературній публікації (творів мистецтва), а самі програмні продукти або MVP моделі є лише артефактами такої публікації. Лише ті твори (праці) знаходять певну стандартизацію, коли доходять до офіційних пакетів для публічних пакетних менеджерів певних мов програмування (як Owlbarn). Певну культуру в сенсі цифрової публікації здобули формальні операційні системи та формальні мови програмування, вийшовши з теоретичної інформатики, однак культура прикладної математики досі не дозволяє говорити про замкнене середовище (наприклад Mirage юнікернел) у якому міститься достатня кількість мовних засобів для створення мов та систем (Menhir), для символічних обчислень (Axiom), для логік та систем доведення теорем (Coq), для програмування (OCaml), для тензорного числення (SPIRAL, Futhark), для паралельних та узгоджених систем (Multicore, LING), для імітаційного моделювання (Simulink) для публікації літературних математичних творів (TeX), для блокнотів (Jupyter). Екосистеми теоретичної інформатики французької та британської шкіл (OCaml, Haskell) які мають здатність вистояти перед викликами уніфікованого середовища прикладного математика.



- Видавнича система для верстки та графіків, яка нагадує TeX
- Лінійна алгебра на BLAS та LAPACK
- Тензорні обчислення на GPU/AVX
- Система вводу-виводу PCIe на NVMe 2.0
- CAS система для символьної математики
- Віконний менеджер та система рендерінгу на GPU
- Симулятор нейромереж у форматі ONNX
- Інтерфейс прикладного програмування

## KB-123 Теоретична інформатика (магістр)

Якщо коротко описати мій шлях після здобуття ступеня магістра то я би це визначив як 10 років укорінення та здобуття впевненості в професії програміста. За цей час вдалося зрозуміти вимоги до властивостей середовищ виконання на виробництві. Теоретична інформатика (комп'ютерна інженерія або комп'ютерні науки) дозволила мені глибше зазирнути у різні школи моделювання обчислень, що дало змогу спробувати виконати декілька вправ у написанні середовищ виконання. Паралельно гроші на життя приносила робота пов'язана з розвитком більше прикладних бібліотек.

Курси другого науково-освітнього рівня, що читаються на кафедрі теоретичної інформатики є обов'язковими для спеціальностей 113 (прикладна математика), 121 (мовне забезпечення), 123 (теоретична інформатика).

- Лямбда-числення (екзамен) KB-123-01
- Теорія графів (екзамен) KB-123-02
- Теорія мов програмування (курсова, екзамен) KB-123-03
- Теорія операційних системи (курсова, екзамен) KB-123-04
- Теорія масового обслугов. (курсова, екзамен) KB-123-05
- Теорія розподілених систем KB-123-06
- Системи реального часу та телеметрія (PTC) KB-123-07
- Інформаційно-пошукові системи (ІПС) (екзамен) KB-123-08
- Моделювання складних систем (МСС) KB-123-09
- Комп'ютерні сховища даних KB-123-10

- Комп'ютерні обчислення KB-123-11
- Комп'ютерна графіка KB-123-12
- Комп'ютерні мережі KB-123-13
- Веб-програмування (екзамен) KB-123-14
- Функціональне програмування (екзамен) KB-123-15

Фундаментальні поняття комп'ютерних наук, такі як обчислювальність, алгоритмічна розв'язність, тотальність, консистентність, категоріальна алгебраїчність, розширилися за цей час в моєму розумінні математичною лінгвістикою. Визріла впевненість в необхідності зафіксувати особливий набір мовних засобів, в рамках наступного 10-річного дослідження в області теоретичної інформатики, що дозволили би побудувати фундамент для моделей які вивчає прикладна математика. Зараз для мене теоретична інформатика і є математичною лінгвістикою, завдання якої конструювати формальні мови з необхідними властивостями для математичних обслатеі. Цей продукт знайшов форму монографії та включає наступні мовні артефакти:

- Інтерпретатор віртуальної машини
- Компілятор класу System  $F_{\omega}$
- Гомотопічна система
- Система процесів та черг віртуальної машини без надлишкового копіювання

Хоча вступ до цієї роботи вимагає повного занурення в основи роботи процесора та пошуку таких сніпетів які ефективно навантажуватимуть конвеєри фізичного процесору. Технологія побудови інтерпретаторів які разом з виконуваними програмами повністю поміщаються у L1 кеш процесора може бути такою ж ефективною як повністю наперед скомпільований оптимізований код.

Що стосується початкової мови для програмування, то я рекомендую в програму для 10-11 класів ввести LISP у формі Racket, а також глибоко зануритися в роботи авторів цього мовного середовища. Їх книжка "Як проектувати програ-

ми"може повністю замінити більш класичну SICP книжку чи "On LISP"Пола Грема.