



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIAS E LINGUAGENS/IM



TERMO DE CONSENTIMENTO Nº 106 / 2024 - DeptTL/IM (12.28.01.00.00.90)

Nº do Protocolo: 23083.071544/2024-64

Nova Iguaçu-RJ, 19 de dezembro de 2024.

Termo de autorização para disponibilização de Monografia em meio digital pela UFRRJ

1 - Identificação do autor

Nome completo: Axl Silva de Andrade

Matrícula: 20200041726

2 - Identificação da Monografia

Título: Séries de Fourier e as Notas Musicais
18/12/2024

Data da Defesa:

Nome completo do orientador: Mauro Benayon Menezes

(X) **AUTORIZAMOS** a Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ a publicar em ambiente digital institucional, sem ressarcimento dos direitos autorais, o texto integral da obra citada acima, em formato PDF para fins de leitura e/ou impressão pela Internet.

() **NÃO** autorizamos a Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ a publicar em ambiente digital institucional o texto integral da obra citada acima.

(Assinado digitalmente em 19/12/2024 22:20)

MAURO BENAYON MENEZES
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTL/IM (12.28.01.00.00.90)
Matrícula: 2081469

(Assinado digitalmente em 19/12/2024 22:50)

AXL SILVA DE ANDRADE
DISCENTE
Matrícula: 20200041726

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrj.br/public/documentos/index.jsp>
informando seu número: **106**, ano: **2024**, tipo: **TERMO DE CONSENTIMENTO**, data de emissão:
19/12/2024 e o código de verificação: **1319bd17f6**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIAS E LINGUAGENS/IM



ATA Nº 6531 / 2024 - DeptTL/IM (12.28.01.00.00.90)

Nº do Protocolo: 23083.071542/2024-75

Nova Iguaçu-RJ, 19 de dezembro de 2024.

Séries de Fourier e as Notas Musicais

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática do Instituto Multidisciplinar da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro Campus Nova Iguaçu, como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciado em Matemática**. Este exemplar corresponde à redação final, devidamente corrigida, da monografia intitulada **Séries de Fourier e as Notas Musicais**, defendida por **Axl Silva de Andrade** - matrícula 20200041726 e aprovada pela Banca Examinadora em 18 de dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mauro Benayon Menezes - Orientador
Prof(a). Dr(a). Paula Takatsuka
Prof. Dr. José Airton Chaves Cavalcante Junior

(Assinado digitalmente em 20/12/2024 09:18)
JOSE AIRTON CHAVES CAVALCANTE JUNIOR
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
CEAD (12.28.01.36)
Matrícula: 1657948

(Assinado digitalmente em 19/12/2024 22:12)
MAURO BENAYON MENEZES
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTL/IM (12.28.01.00.00.90)
Matrícula: 2081469

(Assinado digitalmente em 19/12/2024 23:51)
PAULA TAKATSUKA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTL/IM (12.28.01.00.00.90)
Matrícula: 1616094

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrrj.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **6531**, ano: **2024**, tipo: **ATA**, data de emissão: **19/12/2024** e o código de verificação: **88c87e9e10**



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIAS E LINGUAGENS

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Séries de Fourier e as Notas Musicais

AXL SILVA DE ANDRADE

NOVA IGUAÇU-RJ
Dezembro de 2024

Séries de Fourier e as Notas Musicais

Monografia apresentada à Coordenação do curso de Matemática do Departamento de Tecnologias e Linguagens do Instituto Multidisciplinar da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, *Campus Nova Iguaçu*, como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Este exemplar corresponde à redação final da monografia intitulada *Séries de Fourier e as Notas Musicais*, defendida por **Axl Silva de Andrade**, matrícula 20200041726 e aprovada pela Banca Examinadora.

Nova Iguaçu, 18 de Dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Mauro Benayon Menezes
Orientador

Prof. Dr. José Airton Chaves Cavalcante Junior

Profa. Dra. Paula Takatsuka

Não adentre a boa noite apenas com ternura,
A velhice queima e clama ao cair do dia,
Fúria, fúria contra a luz que já não fulgura.
Embora os sábios, no fim da vida, saibam que é a treva que perdura,
Pois suas palavras não mais capturam a centelha tardia.
Não adentre a boa noite apenas com ternura,
Fúria, fúria contra a luz que já não fulgura.

Dylan Thomas

Dedicatória

Esta monografia é o fruto de incontáveis anos dedicados ao estudo, de um esforço incansável e de uma dedicação inabalável. Ela não teria visto a luz do dia sem o apoio incondicional e o constante incentivo de duas pessoas extraordinárias: meu pai, Renato César Vieira de Andrade, e minha mãe, Marcela Maria da Silva de Andrade. É com imensa gratidão e um coração cheio de amor que dedico este trabalho a eles. Eles foram mais do que apenas meus pais; foram meus pilares, meus exemplos, meus amigos mais leais. Eles me ensinaram a valorizar a educação, a perseguir meus sonhos e a enfrentar todos os desafios que a vida nos apresenta. Em todos os momentos, nos altos e baixos, eles estiveram ao meu lado, fornecendo um apoio inabalável. Eles me deram tudo o que eu precisava para chegar até este ponto, e sua influência na minha vida é incalculável. São minha fonte inesgotável de inspiração e motivação.

Esta monografia é, também, uma homenagem a esses dois seres incríveis, que compartilharam comigo essa jornada de conquistas e que sempre acreditaram em mim, mesmo nos momentos mais desafiadores. Sou eternamente grato pelo apoio que me proporcionaram ao longo desta jornada. Agradeço a eles por nunca terem me deixado desistir, independentemente das inúmeras dificuldades que enfrentamos, desde a minha primeira prova no Colégio Naval, passando pelas tentativas frustradas em outras provas, até a aprovação na AFA e na EFOMM e, por fim, a defesa desta monografia. Cada passo foi possível graças ao amor e apoio deles.

A vocês dois, meus pilares, minha motivação e minha inspiração, dedico esta monografia e esta realização. Obrigado por terem sido minha força constante e por continuarem a ser minha razão para superar desafios. Vocês são a base sólida sobre a qual construí meu sucesso, e sou eternamente grato por tudo o que fizeram por mim.

Agradecimentos

Gostaria de dedicar este espaço para expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que desempenharam um papel fundamental na concretização desta monografia e no meu percurso acadêmico.

Primeiramente, quero expressar minha eterna gratidão aos meus pais, cujo amor, apoio incondicional e sacrifícios ao longo dos anos foram os pilares que sustentaram minha jornada acadêmica. Se não fosse pela sua dedicação e crença em mim, esta conquista não seria possível. Suas palavras de incentivo sempre foram a minha fonte de força, e sou imensamente grato por tudo o que fizeram.

Ao meu orientador, Mauro Benayon, expresso minha sincera apreciação. Sua orientação perspicaz, vasto conhecimento e disponibilidade para discutir ideias foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por aceitar o desafio de me orientar e por compartilhar sua experiência e sabedoria, que enriqueceram este estudo.

Ao meu professor e orientador da monitoria, José Airton, expresso minha sincera gratidão. Sua orientação perspicaz, vasto conhecimento e disponibilidade para discutir ideias foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por aceitar o desafio de me orientar e por compartilhar sua experiência e sabedoria, que enriqueceram este estudo.

Aos meus amigos, que estiveram ao meu lado ao longo desses anos, agradeço pela amizade, pelo apoio mútuo e pela compreensão nos momentos de desafio. Cada risada compartilhada e cada conversa tiveram um papel vital em tornar essa jornada acadêmica mais leve e gratificante.

Quero também expressar minha gratidão aos contribuintes brasileiros, pois são seus impostos que sustentam a estrutura educacional que possibilitou esta realização. Espero que este estudo contribua de alguma forma para a sociedade e justifique o investimento feito na educação.

Por último, agradeço a todos que, de alguma forma, fizeram parte desta trajetória, inspirando-me e apoiando-me ao longo do caminho. Cada pessoa que cruzou meu caminho teve um impacto significativo em minha jornada acadêmica, e sou grato por todas as experiências e aprendizados adquiridos.

Muito obrigado a todos por tornarem esta jornada possível e por fazerem parte deste momento especial em minha vida.

Resumo

Este trabalho busca entender como as Séries de Fourier possibilita escrever funções periódicas como soma de séries de senos e cossenos, e também como pode-se usar isso para representar a senoide fundamental de qualquer nota musical como uma função matemática através de uma implementação no Geogebra.

Palavras-chave: Análise, Séries, Fourier, Música, Python, Geogebra.

Abstract

This work seeks to understand how Fourier Series makes it possible to write periodic functions as the sum of series of sines and cosines, and also how this can be used to represent the fundamental sinusoid of any musical note as a mathematical function through an implementation in Geogebra.

Key-words: Analysis, Series, Fourier, Music, Python, Geogebra.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	IX
INTRODUÇÃO	1
1 SÉRIES DE FOURIER	4
1.1 Coeficientes de Fourier	5
1.2 Classes das funções consideradas	13
1.3 Convergência das Séries de Fourier	25
1.3.1 Convergência pontual das séries de Fourier	32
2 AS NOTAS MUSICAIS ATRAVÉS DE FUNÇÕES SENOIDAS	46
2.1 Implementação no Geogebra	48
2.1.1 Dó	53
2.1.2 Ré	54
2.1.3 Mi	54
2.1.4 Fá	55
2.1.5 Sol	55
2.1.6 Lá	56
2.1.7 Si	56
2.2 Implementação no Python	57
2.2.1 Estrutura do Código	57
2.2.2 Principais Funções Utilizadas	58
2.2.3 Geração e Exportação do Áudio	58
2.2.4 Análise e Resultados	58
3 CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
REFERÊNCIAS	61

LISTA DE FIGURAS

1	Onda de 440 Hz (Lá) gerada pelo programa Audacity	2
2	Gráfico da função $\sin(x)$	2
2.1	Função no campo "Entrada:" do Geogebra	49
2.2	Janela dos controles deslizantes	49
2.3	Edição do controle deslizante no Geogebra	50
2.4	Opção de criar botão no Geogebra	51
2.5	Janela de configuração do botão	51
2.6	Opção criar botão no Geogebra	52
2.7	Janela de configuração do botão	52
2.8	Interface final Geogebra	53
2.9	Representação da função senoidal de Dó no Geogebra	54
2.10	Representação da função senoidal de Ré no Geogebra	54
2.11	Representação da função senoidal de Mi no Geogebra	55
2.12	Representação da função senoidal de Fá no Geogebra	55
2.13	Representação da função senoidal de Sol no Geogebra	56
2.14	Representação da função senoidal de Lá no Geogebra	56
2.15	Representação da função senoidal de Si no Geogebra	57

INTRODUÇÃO

A música é uma das formas mais antigas e universais de expressão artística, uma combinação magistral de sons e ritmos que evoca emoções, histórias e culturas. Desde os primórdios da humanidade, a música tem sido uma companheira constante, evoluindo em complexidade e diversidade à medida que a sociedade avança. No entanto, a aparente simplicidade das melodias e harmonias que tanto nos encantam é o resultado de fenômenos acústicos complexos e intrincados.

Por anos e anos, temos utilizado a música como forma de nos expressar. Através dela, somos capazes de transmitir sentimentos, emoções, motivos e razões — basicamente, expressar o que quisermos. Isso nos leva à seguinte pergunta: como construir uma música? Geralmente, a construção de uma música começa pela escolha de uma progressão de acordes, que servirá de base para uma melodia. Mas o que é uma melodia? *Melodia* é uma sequência de notas que se cria cantarolando ou tocando-as em um instrumento, o que nos leva a outra, e talvez à pergunta mais importante desta dissertação: o que é uma nota musical?

Uma *nota musical* é um som fundamental na música, caracterizado como uma onda mecânica composta por frequência, amplitude e duração. As notas podem ser obtidas quando um objeto vibrante, como a corda de uma guitarra, vibra em uma taxa regular. Esses sons específicos que chamamos de notas musicais são ondas periódicas, o que será importante em nossa análise posterior.

Este trabalho se debruça sobre uma das ferramentas que nos possibilita analisar funções periódicas: as *Séries de Fourier*. Esta teoria, desenvolvida por Jean-Baptiste Joseph Fourier no início do século XIX, é um método matemático que estuda o comportamento das funções periódicas e possibilita decompor uma função complexa em suas partes constituintes mais sim-

ples, utilizando senos e cossenos. Em essência, é um meio de desmembrar uma função complexa em “ingredientes” fundamentais que compõem essa função.

A motivação para a criação desta monografia surgiu da busca por uma ferramenta que permitisse escrever uma onda sonora em termos matemáticos. Para entender a escolha da ferramenta, que neste caso são as Séries de Fourier, precisamos observar a onda de uma nota musical. Abaixo, temos a Figura 1, que exibe a onda de 440 Hz (Lá), gerada pelo programa *Audacity*.

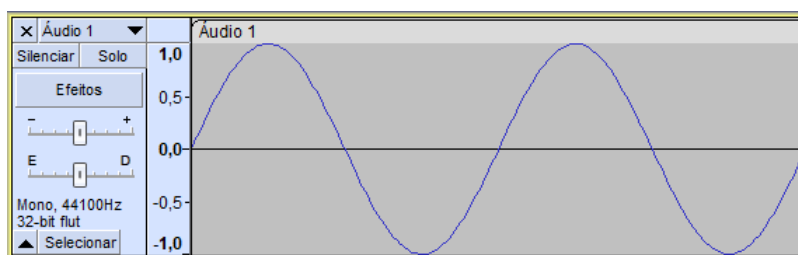


Figura 1: Onda de 440 Hz (Lá) gerada pelo programa Audacity

Se interpretarmos essa onda como uma função, imaginando o eixo das abscissas e das ordenadas, podemos considerá-la como um gráfico que se repete periodicamente. Isso pode ser comparado ao gráfico da função trigonométrica seno, visto na Figura 2.

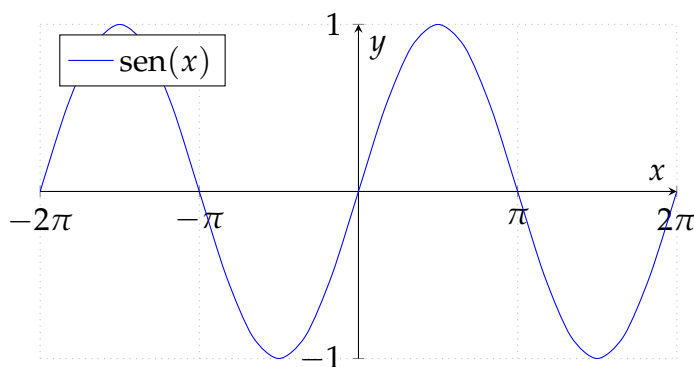


Figura 2: Gráfico da função $\text{sen}(x)$

Claramente, vemos uma semelhança entre a onda da frequência fundamental de Lá e uma função trigonométrica. Ambas são periódicas e se repetem ao longo de um eixo.

A Série de Fourier é uma técnica matemática que permite representar funções periódicas como uma combinação de ondas senoidais de diferentes frequências, amplitudes e fases. Em outras palavras, imagine que você tem uma função com um gráfico que se repete periodicamente ao longo do

eixo das abscissas, como o gráfico da função seno, apresentado na Figura 2. As Séries de Fourier nos permite decompor essa função em várias "peças" básicas, chamadas "componentes senoidais". Essas peças básicas são ondas suaves e repetitivas, que podem ter diferentes amplitudes, frequências e fases.

As aplicações dessa ferramenta matemática são vastas, abrangendo áreas como Engenharia Elétrica, Acústica, Óptica, Processamento de Sinais e Imagens e Compressão de Dados. Por exemplo, na Engenharia Elétrica, a Transformada de Fourier é essencial para a análise de circuitos e sistemas de comunicação [3]. Na Acústica, auxilia na compreensão e manipulação de sons, permitindo a análise de frequências e harmônicos presentes em diferentes fontes sonoras [7]. No Processamento de Imagens, essas técnicas são utilizadas para melhorar a qualidade de imagens e vídeos, bem como na compressão de dados, otimizando o armazenamento e a transmissão de informações visuais [5].

As Séries de Fourier nos ajuda a entender como essas componentes senoidais se somam para formar a função original. É como se desmontássemos um quebra-cabeça complexo em várias peças simples e, em seguida, juntássemos novamente para reconstruir a imagem completa, através da soma da série.

Através da lente matemática das Séries de Fourier, este estudo busca estimular a criatividade e a inovação no universo matemático e educacional, mostrando como a matemática está presente em algo tão comum em nosso cotidiano: a música.

Ao longo desta monografia, exploraremos os princípios matemáticos das Séries de Fourier, seus teoremas e demonstrações, e, por fim, veremos como podemos representar qualquer nota musical como uma componente básica da série de Fourier, isto é, como funções senoidais.

Para acompanhar e absorver plenamente esses conteúdos, espera-se que os leitores tenham uma boa base de Análise na Reta, para compreender a abordagem técnica apresentada. Um interesse prévio em música pode facilitar a compreensão das conexões entre frequências e notas, mas não é necessário possuir conhecimento musical avançado, já que o texto será estruturado para ser acessível a todos os interessados na relação entre matemática e música.

CAPÍTULO 1

SÉRIES DE FOURIER

A Série de Fourier é uma técnica matemática que permite representar funções periódicas como uma combinação de ondas senoidais de diferentes frequências, amplitudes e fases.

Em outras palavras, imagine que você tem uma função com um gráfico que se repete periodicamente ao longo do eixo das abscissas, como por exemplo o gráfico da função seno, como visto na Figura 2. As Séries de Fourier dizem que podemos decompor essa função em várias "peças" básicas, como blocos de construção, as quais são chamadas de "componentes senoidais". Elas são como ondas suaves e repetitivas, que podem ser de diferentes tamanhos (amplitudes), velocidades de repetição (frequências) e deslocamentos (fases).

As Séries de Fourier nos ajuda a entender como essas componentes senoidais se somam para formar a função original. É como se estivéssemos desmontando um quebra-cabeça complexo em várias peças simples e, em seguida, juntando-as novamente para reconstruir a imagem completa, através da soma das séries. Elas são formas de representar uma função periódica como sendo uma série infinita de somas de senos ou cossenos, e possuem a seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Uma boa forma de compreender isso é imaginar que temos uma música ou um som complexo. Os sons que ouvimos ao nosso redor podem ser bastante complicados e cheios de detalhes. A Série de Fourier é uma ferramenta matemática que nos ajuda a entender e descrever esses sons complicados de maneira mais simples.

Pense na série de Fourier como um "tradutor" matemático que transforma um som complicado em uma combinação de sons mais simples e conhecidos, como notas musicais puras. É como se estivéssemos decompondo o som complexo em várias partes mais fáceis de entender. Então, quando aplicamos a série de Fourier a uma função, ela a decompõe em várias funções diferentes. Essas funções, quando somadas juntas corretamente, reconstroem a função de forma muito próxima ou idêntica. Mas afinal, por que isso é útil? Bom, ao usar as séries de Fourier, podemos analisar e entender diferentes funções. Isso é útil em várias áreas, como engenharia de áudio, processamento de sinais e até mesmo em ciências como a física, onde o comportamento ondulatório é muito importante.

De forma resumida, a série de Fourier é uma ferramenta matemática poderosa que nos permite simplificar funções complexas em funções mais fáceis de entender, tornando a análise e a manipulação de funções mais acessíveis e eficientes.

A convergência de uma série de Fourier refere-se à capacidade da mesma se aproximar da função original à medida que mais termos são adicionados à soma infinita. Em outras palavras, quanto mais termos da série de Fourier forem utilizados, mais precisa será a representação da forma de onda original. Para muitas formas de onda, a série de Fourier converge e pode representar a forma de onda com alta precisão, usando apenas alguns termos. No entanto, existem formas de onda mais complexas ou com características peculiares em que a série de Fourier pode não convergir ou até mesmo divergir.

Neste capítulo, a partir da seguinte seção, apresentaremos as condições suficientes para que uma função periódica admita uma série de Fourier associada, e que garantam que esta mesma convirja pontualmente.

1.1 Coeficientes de Fourier

Se uma função $f(x)$ pode ser expressa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.1)$$

é intuitivo que os coeficientes a_n e b_n , chamados de *coeficientes de Fourier* da função f , estejam ligados à função f . Para descobrirmos quais são esses coeficientes, vamos precisar supor que a identidade (1.1) se verifique, e que a série nessa identidade convirja uniformemente. Além disso, vamos

precisar fazer uso dos seguintes resultados, que podem ser encontrados em [6].

Proposição 1.1.1 Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.

Proposição 1.1.2 Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

Como consequência da proposição (1.1.1), a função f deve ser contínua e periódica de período $2L$, já que as funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e $\sin \frac{n\pi x}{L}$ são contínuas e periódicas de período $2L$. Assim, utilizando a proposição (1.1.2) podemos integrar (1.1) e obter

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right). \quad (1.2)$$

Daí, como

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^L = \sin \frac{n\pi L}{L} - \sin \frac{n\pi(-L)}{L} = 0 - 0 = 0$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{L}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L = -\cos \frac{n\pi L}{L} + \cos \frac{n\pi(-L)}{L} \\ &= -\cos(n\pi) + \cos(n\pi) = 0. \end{aligned}$$

Temos, da eq. 1.2, que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 x \Big|_{-L}^L = \frac{1}{2} a_0 2L = La_0,$$

e logo

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (1.3)$$

Para obtermos os demais coeficientes, necessitamos primeiramente provar a seguinte proposição:

Proposição 1.1.3

i) $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0$, se $n, m \geq 1$;

ii) $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases}$;

iii) $\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1. \end{cases}$

■ **Demonstração.** i) Vamos mostrar que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1. \quad (1.4)$$

Caso 1) $n = m$:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \left(\frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Agora, fazendo

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = u,$$

temos que

$$du = \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

e, logo,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} \int_{\sin(-n\pi)}^{\sin(n\pi)} u du.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{L}{n\pi} \int_{\sin(-n\pi)}^{\sin(n\pi)} u du \\ &= \frac{L}{n\pi} \frac{u^2}{2} \Big|_{\sin(-n\pi)}^{\sin(n\pi)} \\ &= \frac{L}{n\pi} \left(\frac{\cancel{\sin^2(n\pi)}^0}{2} - \frac{\cancel{\sin^2(-n\pi)}^0}{2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Caso 2) $n \neq m \Rightarrow \frac{n}{m} \neq 1 \left(\frac{n}{m} > 0 \right) \Rightarrow \frac{n^2}{m^2} \neq 1 \Rightarrow 1 - \frac{n^2}{m^2} \neq 0$:

Sendo

$$I = \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx,$$

façamos

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = u \text{ e } \sin \frac{m\pi x}{L} dx = dv,$$

o que nos dá que

$$v = \frac{-L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \text{ e } du = -\frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

e, dessa forma, podemos escrever I como sendo

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \int_{-L}^L u \, dv \\ &= u \cdot v \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L v \, du \\ &= \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\frac{-L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \left(\frac{-L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \left(-\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n\pi}{L} dx \\ &= \frac{-L}{m\pi} \left(\cos(n\pi) \cos(m\pi) - \cos(-n\pi) \cos(-m\pi) \right) - \frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{-L}{m\pi} \left(\cancel{\cos(n\pi) \cos(m\pi)} - \cancel{\cos(n\pi) \cos(m\pi)} \right) - \frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx, \end{aligned}$$

e logo

$$I = -\frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx.$$

Agora, fazendo

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = u \text{ e } \cos \frac{m\pi x}{L} dx = dv,$$

temos que

$$v = \frac{L}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{L} \text{ e } du = \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

e, logo

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\
 &= -\frac{n}{m} \int_{-L}^L u \, dv \\
 &= -\frac{n}{m} \left(u \cdot v \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L v \, du \right) \\
 &= -\frac{n}{m} \left[\left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\frac{L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \left(\frac{L}{m\pi} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n\pi}{L} dx \right] \\
 &= -\frac{n}{m} \left[\frac{L}{m\pi} \left(\operatorname{sen}(n\pi) \cos(m\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi) \cos(-m\pi) \right) - \frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right) dx \right] \\
 &= \frac{n^2}{m^2} \int_{-L}^L \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{n^2}{m^2} I,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$I = \frac{n^2}{m^2} I,$$

o que nos dá que

$$\left(1 - \frac{n^2}{m^2} \right) I = 0$$

e, portanto

$$I = 0,$$

visto que $1 - \frac{n^2}{m^2} \neq 0$.

ii) Vamos agora mostrar que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, \, n, m \geq 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Caso 1) $n = m$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fazendo $t = \frac{n\pi x}{L}$, temos que $x = \frac{tL}{n\pi}$ o que nos dá que $dx = \frac{L}{n\pi} dt$ e

logo

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-n\pi}^{n\pi} (\cos^2 t) \left(\frac{L}{n\pi} \right) dt \\
 &= \frac{L}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} (\cos^2 t) dt \\
 &= \frac{L}{n\pi} \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) \Big|_{-n\pi}^{n\pi} \\
 &= \frac{L}{n\pi} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\cancel{\operatorname{sen} 2n\pi}^0}{4} - \frac{-n\pi}{2} - \frac{\cancel{\operatorname{sen}(-2n\pi)}^0}{4} \right) \\
 &= \frac{L}{n\pi} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} \right) = L.
 \end{aligned}$$

Caso 2) $n \neq m \Rightarrow \frac{n}{m} \neq 1 (\frac{n}{m} > 0) \Rightarrow \frac{n^2}{m^2} \neq 1 \Rightarrow 1 - \frac{n^2}{m^2} \neq 0$:

Sendo

$$I = \int_{-L}^L \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx,$$

façamos

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = u \quad \text{e} \quad \cos \frac{m\pi x}{L} dx = dv,$$

e, dessa forma, temos

$$v = \frac{L}{m\pi} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \quad \text{e} \quad du = \frac{n\pi}{L} \left(-\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx,$$

o que nos dá que

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-L}^L \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \int_{-L}^L u \, dv \\
 &= u \cdot v \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L v \, du \\
 &= \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{L}{m\pi} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \cancel{\frac{L}{m\pi}} \left(\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right) \left(-\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \cancel{\frac{n\pi}{L}} dx \\
 &= \frac{L}{m\pi} \left(\cos(n\pi) \cancel{\operatorname{sen}(m\pi)}^0 - \cos(-n\pi) \cancel{\operatorname{sen}(-m\pi)}^0 \right) + \frac{n}{m} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx
 \end{aligned}$$

e, logo

$$I = \frac{n}{m} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx.$$

Agora, fazendo

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = u \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = dv,$$

temos que

$$v = -\frac{L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \quad \text{e} \quad du = \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

o que nos dá que

$$\begin{aligned} I &= \frac{n}{m} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{n}{m} \int_{-L}^L u \, dv \\ &= \frac{n}{m} \left(u \cdot v \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L v \, du \right) \\ &= \frac{n}{m} \left[\left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{L}{m\pi} \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{L}{m\pi} \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n\pi}{L} dx \right] \\ &= \frac{n}{m} \left[\frac{L}{m\pi} \left(\overset{0}{-\operatorname{sen}(n\pi) \cos(m\pi)} + \overset{0}{\operatorname{sen}(-n\pi) \cos(-m\pi)} \right) + \frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{n^2}{m^2} \int_{-L}^L \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{n^2}{m^2} I \end{aligned}$$

e, logo

$$I = \frac{n^2}{m^2} I,$$

o que nos dá que

$$\left(1 - \frac{n^2}{m^2} \right) I = 0$$

e assim

$$I = 0,$$

visto que $1 - \frac{n^2}{m^2} \neq 0$.

iii)

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Caso 1) $n = m$

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \int_{-L}^L \left(1 - \cos^2 \frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \int_{-L}^L 1 dx - \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= x \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 2L - L = L.
 \end{aligned}$$

Caso 2) $n \neq m \Rightarrow 1 - \frac{n^2}{m^2} \neq 0$:

Sendo

$$I = \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx,$$

façamos

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = u \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = dv$$

e daí

$$v = -\frac{L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \quad \text{e} \quad du = \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

o que nos dá que

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \\
 &= \int_{-L}^L u dv \\
 &= u.v \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L v du \\
 &= \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{L}{m\pi} \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{L}{m\pi} \left(-\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n\pi}{L} dx \\
 &= \frac{L}{m\pi} \left(\overset{0}{-\operatorname{sen}(n\pi) \cos(m\pi)} + \overset{0}{\operatorname{sen}(-n\pi) \cos(-m\pi)} \right) + \frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \frac{n}{m} \int_{-L}^L \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Pelo caso 2) de 1.5, temos que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

e logo

$$I = 0.$$

■

Agora, multiplicando 1.1 por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integrando de $-L$ até L , obtemos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L.$$

De maneira análoga

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L.$$

E a partir disso obtemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

1.2 Classes das funções consideradas

Nesta subseção estudaremos quais as classes de funções iremos considerar.

É importante deixarmos claro que os símbolos $f(x+0)$ e $f(x-0)$ geralmente são usados na teoria das funções para representar, respectivamente, os limites à direita e à esquerda de x , isto é:

- $f(x+0) := \lim_{t \rightarrow x^+} f(t);$
- $f(x-0) := \lim_{t \rightarrow x^-} f(t).$

Definição 1.2.1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será dita *seccionalmente contínua* se, em cada intervalo limitado, a mesma possuir somente um número finito de descontinuidades de primeira espécie, isto é, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_i, a_{i+1}) para $i = 1, \dots, n-1$ e existem os limites

$$f(a_i + 0) = \lim_{t \rightarrow a_i^+} f(t) \quad \text{e} \quad f(a_{i+1} - 0) = \lim_{t \rightarrow a_{i+1}^-} f(t).$$

Definição 1.2.2 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será dita *seccionalmente diferenciável* se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua. Observemos que a função derivada f' pode não estar definida em todos os pontos, uma vez que $f'(x)$ não existe nos pontos x onde f é descontínua e pode também não existir em pontos onde f é contínua.

O objetivo principal deste capítulo é provar o *Teorema de Fourier*, que nos garante que, sob certas hipóteses, a série de Fourier de uma função f converge pontualmente para $f(x)$, se f for contínua em x ; e converge para a média aritmética entre os limites à esquerda e à direita de x , caso f não seja contínua em x .

Teorema 1.2.1 — Fourier. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

O teorema 1.2.1 é uma consequência do *teste de Dini*, que será demonstrado posteriormente.

Será importante deixar claro que, para os seguintes teoremas, a integral que usamos nesse trabalho é a integral de Riemman já estudada nos cursos de Cálculo e Análise.

Considere funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um intervalo limitado $[a, b]$. Isso nos leva a considerar dois casos:

- i) A função f é limitada. Neste caso ela é integrável se o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores, isto é, se a integral superior for igual à integral inferior.
- ii) A função f não é limitada. Neste caso, a função f é integrável (a então chamada *integral imprópria*) se o intervalo $[a, b]$ puder ser decomposto em um número finito de intervalos I_1, \dots, I_n , com $I_k = [a_k, b_k]$, tais que, para todos $\delta > 0$ e $\delta' > 0$, a função f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$ e os seguintes limites existem

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x) dx,$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Neste caso, a integral imprópria de f é

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx.$$

A função será *absolutamente integrável* se o valor absoluto $|f|$ for integrável no sentido (i) ou (ii) acima.

Vamos definir agora o que é uma função de classe \mathcal{L}^1 .

Definição 1.2.3 A função f será de classe \mathcal{L}^1 se, e somente se, f e $|f|$ forem integráveis.

Sabemos que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e integrável, então f é também absolutamente integrável (ver [6]) e, logo, de classe \mathcal{L}^1 . Vamos mostrar através dos próximos resultados que se uma função f satisfaz as hipóteses do Teorema de Fourier, isto é, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$, então ela é de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Na verdade, para concluirmos o que desejamos neste momento, não precisaremos usar a diferenciabilidade seccional, basta usarmos a continuidade seccional. A diferenciabilidade seccional será usada para mostrarmos que a função f satisfaz o Teste de Dini.

Proposição 1.2.1 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em (a, b) e existem $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ e $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, então f é limitada e integrável em $[a, b]$ e, logo, de classe \mathcal{L}^1 em $[a, b]$.

■ **Demonstração.** Se $\alpha = f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, então, para $\epsilon = 1$, existe $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ tal que, se $x \in (a, a+\delta)$, então $f(x) \in (\alpha-1, \alpha+1)$. Daí,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - \alpha + \alpha| \\ &\leq |f(x) - \alpha| + |\alpha| \\ &< 1 + |\alpha|, \end{aligned}$$

para todo $x \in (a, a+\delta)$.

Se $\beta = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, então, para $\epsilon = 1$, existe $0 < \delta' < \frac{b-a}{2}$ tal que, se $x \in (b-\delta', b)$, então $f(x) \in (\beta-1, \beta+1)$. Daí,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - \beta + \beta| \\ &\leq |f(x) - \beta| + |\beta| \\ &< 1 + |\beta|, \end{aligned}$$

para todo $x \in (b-\delta', b)$.

Observemos agora que, da maneira como δ e δ' foram tomados, temos que $[a + \delta, b - \delta']$ é um subintervalo de (a, b) . Daí, como f é contínua em (a, b) , temos que f é contínua em $[a + \delta, b - \delta']$ e, logo, também limitada neste intervalo, pois $[a + \delta, b - \delta']$ é compacto. Sendo assim, existe $M > 0$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in [a + \delta, b - \delta']$. Portando, se

$$K = \max\{|f(a)|, |f(b)|, M, 1 + |\alpha|, 1 + |\beta|\},$$

é fácil ver que $f(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$ e, logo, f é limitada em $[a, b]$.

Agora, observemos que o conjunto dos pontos de descontinuidade da f está contido no conjunto $\{a, b\}$ que, por sua vez, possui medida nula, pois é finito. Sendo assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f em $[a, b]$ possui medida nula e, como f é limitada em $[a, b]$, temos que f é integrável em $[a, b]$. ■

Corolário 1.2.1 Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua, então f é limitada e integrável em qualquer intervalo limitado $[a, b]$ e, logo, de classe \mathcal{L}^1 em $[a, b]$.

■ **Demonstração.** Como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua, temos que f possui somente um número finito de pontos de descontinuidade de primeira espécie em $[a, b]$. Digamos que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sejam os tais pontos de descontinuidade em $[a, b]$. Pela proposição anterior, temos que f é limitada e integrável nos subintervalos $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, \dots , $[a_{n-1}, a_n]$ e $[a_n, b]$. Daí, como temos uma quantidade finita de subintervalos, temos que f é limitada e integrável em $[a, b]$ e vale que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx + \int_{a_n}^b f(x)dx.$$

■

Corolário 1.2.2 Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e periódica de período $2L$, então f é limitada e integrável em $[-L, L]$ e, logo, de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$.

Vamos ver agora que se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função de classe \mathcal{L}^1 , então os coeficientes de Fourier de f estarão bem definidos. Começaremos com algumas proposições preliminares.

Proposição 1.2.2 Seja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a + \delta, b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo

$x \in (a, b]$, então a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é convergente se, e somente se, existe $K > 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^b f(x)dx \leq K,$$

para todo $\delta \in (0, b - a)$.

Demonstração. Supondo que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b]$, temos que a função $\varphi(\delta) = \int_{a+\delta}^b f(x)dx$, para $\delta \in (0, b - a)$, é monótona não crescente. Daí, existe o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta)$$

se, e somente se, $\varphi(\delta)$ é limitada superiormente, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$\varphi(\delta) \leq K,$$

para todo $\delta \in (0, b - a)$. Agora observe que a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é convergente exatamente quando existe o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta)$$

e que

$$\varphi(\delta) \leq K,$$

para todo $\delta \in (0, b - a)$, equivale a

$$\int_{a+\delta}^b f(x)dx \leq K,$$

para todo $\delta \in (0, b - a)$. ■

Proposição 1.2.3 Seja $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a, b - \delta']$. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$, então a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é convergente se, e somente se, existe $K > 0$ tal que

$$\int_a^{b-\delta'} f(x)dx \leq K,$$

para todo $\delta' \in (0, b - a)$.

Demonstração. Análoga à anterior. ■

Corolário 1.2.3 Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta, \delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a + \delta, b - \delta']$. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então a integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é convergente se, e somente se, existe $K > 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta'} f(x)dx \leq K,$$

para todo $\delta, \delta' \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$.

Demonstração. Basta aplicarmos as duas proposições anteriores às restrições de f aos intervalos $\left(a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$. ■

Proposição 1.2.4 Seja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a + \delta, b]$. Se existe uma função $g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a integral imprópria de g , $\int_a^b g(x)dx$, é convergente e existe $k > 0$ tal que $0 \leq f(x) \leq kg(x)$ para todo $x \in (a, b]$, então a integral imprópria de f , $\int_a^b f(x)dx$, é também convergente.

Demonstração. A integral imprópria $\int_a^b g(x)dx$ ser convergente equivale a dizer que o limite abaixo existe

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b g(x)dx.$$

Este limite, por sua vez, coincidirá com $\sup_{\delta > 0} \int_{a+\delta}^b g(x)dx$, pois a função $\psi(\delta) = \int_{a+\delta}^b g(x)dx$, para $\delta \in (0, b-a)$, é monótona não crescente. Portanto,

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b g(x)dx = \sup_{\delta > 0} \int_{a+\delta}^b g(x)dx.$$

De

$$0 \leq f(x) \leq kg(x)$$

para todo $x \in (a, b]$, podemos deduzir que

$$0 \leq \int_{a+\delta}^b f(x)dx \leq k \int_{a+\delta}^b g(x)dx,$$

para todo $\delta \in (0, b - a)$, o que nos dá que

$$\begin{aligned} \sup_{\delta > 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx &\leq \sup_{\delta > 0} k \int_{a+\delta}^b g(x) dx \\ &= k \sup_{\delta > 0} \int_{a+\delta}^b g(x) dx \\ &= k \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\int_{a+\delta}^b f(x) dx \leq k \int_a^b g(x) dx,$$

para todo $\delta \in (0, b - a)$ e, logo, pela Proposição 1.2.2, temos que a integral imprópria $\int_a^b f(x) dx$ é convergente. ■

Proposição 1.2.5 Seja $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a, b - \delta']$. Se existe uma função $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a integral imprópria de g , $\int_a^b g(x) dx$, é convergente e existe $k > 0$ tal que $0 \leq f(x) \leq kg(x)$ para todo $x \in [a, b)$, então a integral imprópria de f , $\int_a^b f(x) dx$, é também convergente.

Demonstração. Análoga à anterior. ■

Corolário 1.2.4 Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para quaisquer $\delta, \delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a + \delta, b - \delta']$. Se existe uma função $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a integral imprópria de g , $\int_a^b g(x) dx$, é convergente e existe $k > 0$ tal que $0 \leq f(x) \leq kg(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então a integral imprópria de f , $\int_a^b f(x) dx$, é também convergente.

Demonstração. Basta aplicarmos as duas proposições anteriores às restrições de f aos intervalos $\left(a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$. ■

Lema 1.2.1 Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Se $f_+ : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_- : X \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

para todo $x \in X$, então:

i) Para todo $x \in X$, tem-se que

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \quad \text{e} \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|;$$

ii) Para todo $x \in X$, tem-se que

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \quad \text{e} \quad f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x));$$

iii) Para todo $x \in X$, tem-se que

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad \text{e} \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

As funções f_+ e f_- definidas acima são chamadas, respectivamente, de parte positiva e parte negativa de f .

Demonstração. Por definição, temos que

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

para todo $x \in X$.

i) Dado $x \in X$, temos que, ou $f(x) \geq 0$ ou $f(x) < 0$.

Se $f(x) \geq 0$ (e, portanto $-f(x) \leq 0$), então

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = f(x) \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} = 0,$$

assim como $|f(x)| = f(x)$. Neste caso,

$$0 \leq f(x) = f_+(x) = f(x) = |f(x)|,$$

o que nos dá que

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|;$$

e, além disso,

$$0 = f_-(x) = 0 \leq f(x) = |f(x)|,$$

o que nos dá que

$$0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|;$$

Se $f(x) < 0$ (e, portanto $-f(x) > 0$), então

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = 0 \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -f(x),$$

assim como $|f(x)| = -f(x)$. Neste caso,

$$0 = f_+(x) = 0 < -f(x) = |f(x)|,$$

o que nos dá que

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|;$$

e, além disso,

$$0 < -f(x) = f_-(x) = -f(x) = |f(x)|,$$

o que nos dá que

$$0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|.$$

ii) Dado $x \in X$, temos que, ou $f(x) \geq 0$ ou $f(x) < 0$.

Se $f(x) \geq 0$ (e, portanto $-f(x) \leq 0$), então

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = f(x) \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} = 0,$$

assim como $|f(x)| = f(x)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) \\ &= \frac{1}{2}2f(x) = f(x) = f_+(x); \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) &= \frac{1}{2}(f(x) - f(x)) \\ &= \frac{1}{2}0 = 0 = f_-(x). \end{aligned}$$

Se $f(x) < 0$ (e, portanto $-f(x) > 0$), então

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = 0 \quad \text{e} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -f(x),$$

assim como $|f(x)| = -f(x)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) &= \frac{1}{2}(-f(x) + f(x)) \\ &= \frac{1}{2}0 = 0 = f_+(x); \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) &= \frac{1}{2}(-f(x) - f(x)) \\ &= \frac{1}{2}(-2f(x)) = -f(x) = f_-(x).\end{aligned}$$

iii) Dado $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned}f_+(x) - f_-(x) &= \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) - \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \\ &= \frac{1}{2}\cancel{|f(x)|} + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\cancel{|f(x)|} + \frac{1}{2}f(x) = f(x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f_+(x) + f_-(x) &= \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) + \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \\ &= \frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}\cancel{f(x)} + \frac{1}{2}|f(x)| - \frac{1}{2}\cancel{f(x)} = |f(x)|.\end{aligned}$$

■

Proposição 1.2.6 Seja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a + \delta, b]$. Se a integral imprópria $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)dx$ é também convergente.

Demonstração. Seja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a + \delta, b]$. Neste caso, temos que a função $|f|$ também é limitada e integrável em $[a + \delta, b]$ para todo $\delta > 0$. Sendo assim, como $f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$ e $f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$ para todo $x \in (a, b]$, temos que f_+ e f_- também são limitadas e integráveis em $[a + \delta, b]$ para todo $\delta > 0$. Daí, como $f_+(x) \leq |f(x)|$ e $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in (a, b]$ e a integral imprópria $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente, temos que, pela Proposição 1.2.4, as integrais impróprias de f_+ e f_- , $\int_a^b f_+(x)dx$ e $\int_a^b f_-(x)dx$, são também convergentes. Sendo assim, como $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ para todo $x \in (a, b]$, temos que a integral imprópria de f , $\int_a^b f(x)dx$, é também convergente, pois vale que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$. ■

Proposição 1.2.7 Seja $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para todo $\delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a, b - \delta']$. Se a integral imprópria $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)dx$ é também convergente.

Demonstração. Análoga à anterior. ■

Proposição 1.2.8 Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada tal que para quaisquer $\delta, \delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a + \delta, b - \delta']$. Se a integral imprópria $\int_a^b |f(x)|dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)dx$ é também convergente.

Demonstração. Basta aplicarmos as duas proposições anteriores às restrições de f aos intervalos $\left(a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$. ■

Proposição 1.2.9 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe \mathcal{L}^1 e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for limitada e integrável, então fg também será de classe \mathcal{L}^1 .

Demonstração. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{L}^1 e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e integrável.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então f e $|f|$ são limitadas e integráveis, pois f é de classe \mathcal{L}^1 . Daí, como $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e integrável, temos que $|g|$ também é limitada e integrável e, logo, fg e $|fg|$ também são limitadas e integráveis, isto é, fg também é de classe \mathcal{L}^1 .

Suponhamos agora que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada e, consequentemente, $|f|$ também é ilimitada. Sendo assim, como f é de classe \mathcal{L}^1 , existem $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tais que para quaisquer $\delta, \delta' > 0$ a função f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, a_{k+1} - \delta']$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$, e logo $|f|$ também, e os limites abaixo existem

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \int_{a_k + \delta}^{a_{k+1} - \delta'} f(x)dx,$$

para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$. Como $|f|$ é ilimitada, mas, por outro lado, para quaisquer $\delta, \delta' > 0$ a função $|f|$ é limitada em $[a_k + \delta, a_{k+1} - \delta']$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$, temos que $|f|$ só pode ser ilimitada em vizinhanças dos pontos $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. Daí, como $|f|$ é integrável, devem existir os limites

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)|dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta' \rightarrow 0}} \int_{a_k + \delta}^{a_{k+1} - \delta'} |f(x)|dx,$$

para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$. Além disso, como para quaisquer $\delta, \delta' > 0$ as funções f e $|f|$ são limitadas e integráveis em $[a_k + \delta, a_{k+1} - \delta']$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$, e g e $|g|$ são limitadas e integráveis em $[a, b]$, temos que fg e $|fg|$ são também limitadas e integráveis em $[a_k + \delta, a_{k+1} - \delta']$ para

quaisquer $\delta, \delta' > 0$ e para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$. Adicionalmente, digamos que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Daí,

$$|f(x)g(x)| \leq M|f(x)|,$$

para todo $x \in [a, b]$, e, como cada integral imprópria

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)| dx$$

é convergente, a Proposição 1.2.4 nos garante que cada integral imprópria

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)g(x)| dx$$

é também convergente e, conseqüentemente, pela Proposição 1.2.6, cada integral imprópria

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)g(x) dx$$

é também convergente. Daí, as funções fg e $|fg|$ são integráveis em $[a, b]$, visto que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)g(x) dx$$

e

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)g(x)| dx.$$

Portanto, fg é de classe \mathcal{L}^1 em $[a, b]$. ■

Corolário 1.2.5 Se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe \mathcal{L}^1 , então os coeficientes de Fourier da função f estão bem definidos.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$ e $\sin \frac{n\pi x}{L}$ são contínuas em $[-L, L]$ e, logo, limitadas e integráveis em $[-L, L]$. Daí, como f é de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, a proposição anterior nos garante que $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ e $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ são de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, isto é, as integrais

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

e

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

existem (são números reais). Sendo assim, estão bem definidos os coeficientes de Fourier da função f , pois

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \forall n \geq 0;$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \forall n \geq 1.$$

■

1.3 Convergência das Séries de Fourier

Agora começaremos a construir a teoria que nos permitirá concluir a convergência pontual da série de Fourier.

Teorema 1.3.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{L}^1 . Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \epsilon$$

e

$$\psi(a) = \psi(b) = 0.$$

■ **Demonstração.** (i) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável. Por f ser integrável, temos que, dado um $\epsilon > 0$, existe uma partição

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$$

onde

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^k m_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2} \quad (1.7)$$

onde $m_i = \inf \{ f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$. Agora vamos definir a função $\chi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\chi(x) = m_i, \text{ se } x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (1.8)$$

Então o somatório em 1.7 é a integral de $\chi(x)$ em $[a, b]$, e 1.7 pode ser escrito como

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \chi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)] dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.9)$$

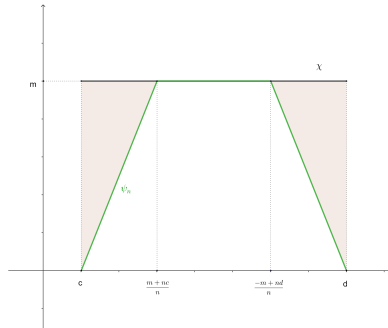
Observemos que, como $m_i \leq f(x)$ para todo $x_{i-1} \leq x < x_i$ e $\chi(x) = m_i$ para todo $x_{i-1} \leq x < x_i$, temos que $\chi(x) \leq f(x)$ para todo $x_{i-1} \leq x < x_i$ e, logo, $f(x) - \chi(x) \geq 0$ para todo $x_{i-1} \leq x < x_i$, o que nos dá que

$$\int_a^b |f(x) - \chi(x)| dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)] dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora fixemos um intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$. Para facilitar a notação, vamos chamar x_{i-1} de c , x_i de d e m_i de m . Consideremos agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma função ψ_n definida no intervalo $[c, d]$ tal que

$$\psi_n(x) = \begin{cases} n(x - c), & \text{se } c \leq x \leq \frac{m + nc}{n} \\ m, & \text{se } \frac{m + nc}{n} \leq x \leq \frac{-m + nd}{n} \\ -n(x - d), & \text{se } \frac{-m + nd}{n} \leq x \leq d \end{cases}$$

Observemos que o gráfico de ψ_n forma com o intervalo $[c, d]$ um trapézio de altura m , cujos lados possuem inclinação n e $-n$.



Daí, a integral $\int_c^d |\chi(x) - \psi_n(x)| dx$ é igual à soma das áreas dos triângulos hachurados e, logo,

$$\begin{aligned} \int_c^d |\chi(x) - \psi_n(x)| dx &= \frac{\left(\frac{m + nc}{n} - c\right) m}{2} + \frac{\left(d - \frac{-m + nd}{n}\right) m}{2} \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{m + nc - nc}{n} + \frac{nd + m - nd}{n}\right) \\ &= \frac{m}{2} \left(2 \frac{m}{n}\right) = \frac{m^2}{n}. \end{aligned}$$

Como $\psi_n(c) = \psi_n(d) = 0$, podemos estender a função ψ_n continuamente em todo intervalo $[a, b]$, onde em cada intervalo da partição

$[x_{i-1}, x_i]$ ela tenha o comportamento descrito acima. Daí, se $M > 0$ é tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx &= \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2}{n} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{M^2}{n} = k \frac{M^2}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, como k e M são constantes, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $k \frac{M^2}{n} < \frac{\epsilon}{2}$, o que nos dará que

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx &\leq \int_a^b |f(x) - \chi(x)| dx + \int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Além disso, $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$.

- (ii) Suponhamos que f não seja limitada, porém seja integrável e absolutamente integrável no sentido das integrais impróprias. Por conveniência, vamos supor que f é ilimitada apenas nas vizinhanças de a e b . Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (1.10)$$

que, por sua vez equivale a

$$\left| \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (1.11)$$

o que nos dá que

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.12)$$

Como f é limitada e integrável em $[a + \delta, b - \delta]$, existe uma função contínua $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.13)$$

Vamos considerar a função $\tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta \\ 0 & \text{para } a \leq x \leq a + \delta \text{ ou } b - \delta \leq x \leq b \end{cases}$$

Observemos que $\tilde{\psi}$ é uma extensão contínua da função ψ no intervalo $[a, b]$ e que, desta forma, temos que

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx = \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx$$

e logo, por 1.12 e 1.13, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \tilde{\psi}(x)| dx &= \underbrace{\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx}_{< \frac{\epsilon}{2}} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.3.1 i) Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{L}^1 , existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0,$$

isto é, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, tem-se

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \epsilon.$$

ii) Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função periódica de período $2L$, de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Então existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódicas de período $2L$, com $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

■ **Demonstração.** i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a função $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

obtida pelo teorema anterior satisfazendo

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{1}{n}.$$

Isto nos dá uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0,$$

como queríamos.

- ii) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Pelo item anterior, existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$, tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx = 0.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$, podemos estender continuamente ψ_n em \mathbb{R} , e de forma que ela seja também periódica de período $2L$, da seguinte maneira:

$$\psi_n(x) = \psi_n(x - 2kL)$$

se $x \in [(2k - 1)L, (2k + 1)L]$ e $k \in \mathbb{Z}$.

■

Teorema 1.3.2 (Lema de Riemann-Lebesgue)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{L}^1 , então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0.$$

Demonstração. 1ª parte) Suponhamos primeiramente que f seja limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. Neste caso, como f é integrável e limitada então, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\} \text{ de } [a, b] \text{ tal que}$$

$$S(f; P) - s(f; P) < \frac{\epsilon}{2}$$

onde

$$S(f; P) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ com } M_j = \sup\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$$

e

$$s(f; P) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ com } m_j = \inf\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\}.$$

Observe que

$$\sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) = S(f; P) - s(f; P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j) \operatorname{sen}(tx) dx \\ &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \operatorname{sen}(tx) dx - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j) \operatorname{sen}(tx) dx \\ &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(x_j)) \operatorname{sen}(tx) dx. \end{aligned}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| &= \left| \left[\frac{-\cos tx}{t} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} \right| = \left| \frac{\cos(tx_{j-1}) - \cos(tx_j)}{t} \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \left(|\cos(tx_{j-1})| + |\cos(tx_j)| \right) \leq \frac{2}{t}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j, \text{ para } x_{j-1} \leq x \leq x_j.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| &\leq \sum_{j=1}^n \overbrace{|f(x_j)|}^{\leq M} \overbrace{\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right|}^{\leq \frac{2}{t}} + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \overbrace{|f(x) - f(x_j)|}^{\leq M_j - m_j} \overbrace{|\operatorname{sen}(tx)|}^{\leq 1} dx \\ &\leq \frac{M2n}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2nM}{t} + \underbrace{\sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \frac{2nM}{t} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Senso assim, tomando $t_0 > 0$ tal que $\frac{2nM}{t_0} < \frac{\epsilon}{2}$, temos que se $t > t_0$, então $\frac{2nM}{t} < \frac{2nM}{t_0} < \frac{\epsilon}{2}$ e logo

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0.$$

A prova de que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0$$

é análoga.

2ª parte) Suponhamos agora que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe \mathcal{L}^1 qualquer. Pelo Teorema 1.3.1 da aproximação por funções contínuas, dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}$$

e ainda $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Agora, como toda função contínua num compacto é limitada e, logo, integrável no sentido do 1º caso, sabemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0$. Com isso, existe $t_0 > 0$ tal que, se $t > t_0$, então

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, se $t > t_0$, então

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| &= \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| \underbrace{|\operatorname{sen}(tx)|}_{\leq 1} dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \underbrace{\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon. \\ \therefore \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx &= 0. \end{aligned}$$

A demonstração do outro limite é análoga. ■

1.3.1 Convergência pontual das séries de Fourier

Temos por hipótese que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $2L$ e de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Vamos mostrar sob estas hipóteses que, fixado um ponto x , a série de Fourier de f converge para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Para isso, começaremos encontrando estimativas para o valor

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

onde

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

isto é, $s_n(x)$ é a reduzida da série de Fourier de f no ponto x .

Primeiramente, vamos mostrar que vale a identidade

$$s_n(x) = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(x-y)}{L} \right] f(y) dy. \quad (1.14)$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(x-y)}{L} \right] f(y) dy = \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) dy + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos \frac{k\pi(x-y)}{L} dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) dy \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left(\cos \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi y}{L} + \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{k\pi y}{L} \right) dy = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\left(\cos \frac{k\pi x}{L} \right) \underbrace{\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos \frac{k\pi y}{L} dy \right)}_{=a_k} + \left(\sin \frac{k\pi x}{L} \right) \underbrace{\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin \frac{k\pi y}{L} dy \right)}_{=b_k} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) = s_n(x), \end{aligned}$$

e a identidade está provada.

Agora consideremos uma função auxiliar, chamada de *Núcleo de Dirichlet*, definida da seguinte maneira:

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right).$$

Esta função será útil no cálculo das estimativas desejadas.

Proposição 1.3.1 Propriedades do Núcleo de Dirichlet.

- i) $D_n(x)$ é uma função par;
- ii) $D_n(x)$ é uma função contínua;
- iii) $D_n(x)$ é uma função periódica de período $2L$;
- iv) $D_n(0) = \frac{1}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right)$;
- v) $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$;
- vi) Para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots (\Leftrightarrow x \notin \{2tL; t \in \mathbb{Z}\})$, temos

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}}.$$

Demonstração. i)

$$D_n(-x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(-\frac{k\pi x}{L} \right) \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right] = D_n(x).$$

ii) $D_n(x)$ é contínua pois é uma soma (finita) de funções contínuas.

iii)

$$\begin{aligned} D_n(x+2L) &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(x+2L)}{L} \right] = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} + 2k\pi \right) \right] = \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right] = D_n(x). \end{aligned}$$

iv)

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 0 \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right).$$

v)

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{1}{2L} 2L + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \frac{L}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = \\ &= 1 + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \frac{L}{k\pi} \left[\cancel{\operatorname{sen} k\pi}^0 - \cancel{\operatorname{sen}(-k\pi)}^0 \right] = 1. \end{aligned}$$

vi) Seja

$$S_n(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos k\theta.$$

Observamos primeiramente que

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right).$$

De fato:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} &= 1 + \sum_{k=1}^n (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \\ &= \left(1 + \sum_{k=1}^n \cos k\theta \right) + i \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} k\theta \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\operatorname{Re} \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos k\theta = S_n(\theta).$$

Além disso, como

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C} - \{1\},$$

temos que

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= \operatorname{Re} \left(1 + \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k \right) = \operatorname{Re} (1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \cdots + (e^{i\theta})^n) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \right) \end{aligned}$$

se $e^{i\theta} \neq 1$, isto é, se $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. Daí, para $\theta \notin \{2t\pi; t \in \mathbb{Z}\}$, temos

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right).$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} &= \frac{[\cos(\frac{-\theta}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{-\theta}{2})] - [\cos(n + \frac{1}{2})\theta + i \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta]}{[\cos(\frac{-\theta}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{-\theta}{2})] - [\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}]} = \\ &= \frac{\cos \frac{\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta - i \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{-2i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})\theta + i(\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \\
&= \left[\frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} + i \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \right].
\end{aligned}$$

Portanto, se $\theta \neq 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ então

$$S_n(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{\frac{-i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right) = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}},$$

o que nos dá que

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos k\theta = S_n(\theta) = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}},$$

para $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Daí, se $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$, então $\frac{\pi x}{L} \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, e logo

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) = \\
&= \frac{1}{L} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) = \frac{1}{L} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{\pi x}{2L} + \sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{L}}{2 \sin \frac{\pi x}{2L}} \right) \\
&= \frac{1}{2L} \left(\frac{-\sin \frac{\pi x}{2L} + \sin \frac{\pi x}{2L} + \sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{2L}} \right) = \frac{1}{2L} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{2L}}
\end{aligned}$$

■

Voltemos agora a olhar para a identidade 1.14.

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(x-y)}{L} \right] f(y) dy \\
&= \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy \stackrel{t=x-y}{=} \int_{x+L}^{x-L} D_n(t) f(x-t) (-dt) = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt = \\
&= \int_{-L+x}^L D_n(t) f(x-t) dt + \int_L^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que

$$\int_L^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt = \int_{-L}^{-L+x} D_n(t) f(x-t) dt.$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} \int_L^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt &\stackrel{s=t-2L}{=} \int_{-L}^{-L+x} D_n(s+2L) f(x-s-2L) ds = \\ &= \int_{-L}^{-L+x} D_n(s) f(x-s) ds, \end{aligned}$$

pois D_n e f são periódicas de período $2L$. Daí, trocando a variável s da última integral por t , obtemos

$$\int_L^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt = \int_{-L}^{-L+x} D_n(t) f(x-t) dt,$$

o que nos dá que

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_{-L+x}^L D_n(t) f(x-t) dt + \int_L^{L+x} D_n(t) f(x-t) dt = \\ &= \int_{-L+x}^L D_n(t) f(x-t) dt + \int_{-L}^{-L+x} D_n(t) f(x-t) dt = \\ &= \int_{-L}^L D_n(t) f(x-t) dt. \end{aligned}$$

Agora observemos que, como $D_n(t)$ é uma função par, temos que

$$\int_{-L}^0 D_n(t) f(x-t) dt \stackrel{s=-t}{=} \int_L^0 D_n(-s) f(x+s) (-ds) = \int_0^L D_n(s) f(x+s) ds.$$

Daí, trocando a variável s da última integral por t , obtemos

$$\int_{-L}^0 D_n(t) f(x-t) dt = \int_0^L D_n(t) f(x+t) dt,$$

o que nos dá que

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_{-L}^L D_n(t) f(x+t) dt = \int_{-L}^0 D_n(t) f(x-t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt = \\ &= \int_0^L D_n(t) f(x+t) dt + \int_0^L D_n(t) f(x-t) dt = \\ &= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

pode ser escrito como

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Observemos agora que $\int_0^L D_n(t)dt = \frac{1}{2}$.

Vejamos: Já sabemos que

$$\int_{-L}^L D_n(t)dt = 1.$$

Daí,

$$1 = \int_{-L}^0 D_n(t)dt + \int_0^L D_n(t)dt.$$

Contudo,

$$\int_{-L}^0 D_n(t)dt \stackrel{t=-s}{=} \int_L^0 D_n(-s)(-ds) = \int_0^L D_n(s)ds = \int_0^L D_n(t)dt.$$

Sendo assim,

$$1 = \int_{-L}^0 D_n(t)dt + \int_0^L D_n(t)dt = 2 \int_0^L D_n(t)dt,$$

o que nos dá que

$$\int_0^L D_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - [f(x+0) + f(x-0)] \cdot \int_0^L D_n(t)dt = \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)] - D_n(t)[f(x+0) + f(x-0)]dt \\ &= \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]\}dt. \end{aligned}$$

Definimos agora a função

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)],$$

o que nos permite escrever

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt.$$

Agora vamos enunciar e provar um teorema, chamado *Teste de Dini*, que nos dará uma condição suficiente para garantir a convergência pontual da série de Fourier.

Teorema 1.3.3 — Teste de Dini. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Fixado $x \in [-L, L]$, suponha que $f(x+0)$ e $f(x-0)$ existam e que exista $\eta > 0$ tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty$$

onde

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)].$$

Então, $e_n(x) \rightarrow 0$, isto é,

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

ou seja, a série de Fourier da função f , aplicada no ponto x , converge para a média aritmética entre os limites laterais de f em x .

■ **Demonstração.** Vamos decompor

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) g(x, t) dt$$

em duas partes, usando um $\delta > 0$ pequeno:

$$e_n(x) = \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L D_n(t) g(x, t) dt.$$

Lembremos agora que, para $t \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$, podemos escrever

$$D_n(t) = \frac{1}{2L} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{L}\right]}{\sin \frac{\pi t}{2L}}$$

e logo, podemos escrever

$$e_n(x) = \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} dt.$$

Observemos primeiramente que, para $0 < t \leq L$, tem-se

$$|t D_n(t)| \leq \frac{t}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}}.$$

Vejamos: Dado $0 < t \leq L$, tem-se

$$D_n(t) = \frac{1}{2L} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{L}\right]}{\sin\frac{\pi t}{2L}} \Rightarrow tD_n(t) = \frac{t \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{L}\right]}{2L \sin\frac{\pi t}{2L}}.$$

Além disso,

$$0 < t \leq L \Rightarrow 0 \cdot \frac{\pi}{2L} < t \cdot \frac{\pi}{2L} \leq L \cdot \frac{\pi}{2L} \Rightarrow 0 < \frac{\pi t}{2L} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi t}{2L} > 0.$$

Daí,

$$|tD_n(t)| = \frac{|t| \overbrace{\left| \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{L}\right] \right|}^{\leq 1}}{|2L| \left| \sin\frac{\pi t}{2L} \right|} \leq \frac{t}{2L \sin\frac{\pi t}{2L}},$$

para $0 < t \leq L$.

Agora, vamos mostrar que

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}, \forall t \in [0, L].$$

Vejamos: Para $t = 0$, a desigualdade é óbvia. Resta mostrar que ela continua válida para $0 < t \leq L$. Para isso, provaremos primeiramente que a função

$$t \in (0, L] \mapsto \frac{t}{2L \sin\frac{\pi t}{2L}} \in \mathbb{R}$$

é crescente.

Como $\sin\frac{\pi t}{2L} > 0$, para todo $t \in (0, L]$, a função γ acima é derivável e, logo, ela será crescente se sua derivada for positiva em todo ponto do intervalo $(0, L]$.

$$\gamma'(t) = \frac{2L \sin\frac{\pi t}{2L} - t 2L \frac{\pi}{2L} \cos\frac{\pi t}{2L}}{4L^2 \sin^2\frac{\pi t}{2L}}, \forall t \in (0, L].$$

Assim,

$$\gamma'(t) > 0, \forall t \in (0, L] \Leftrightarrow 2L \sin\frac{\pi t}{2L} - \pi t \cos\frac{\pi t}{2L} > 0, \forall t \in (0, L]$$

$$\Leftrightarrow 2L \sin\frac{\pi t}{2L} > \pi t \cos\frac{\pi t}{2L}, \forall t \in (0, L]. \quad (**)$$

Para $t = L$ a inequação acima é satisfeita, pois neste caso $\frac{\pi t}{2L} = \frac{\pi L}{2L} =$

$\frac{\pi}{2}$ e logo $\sin \frac{\pi t}{2L} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos \frac{\pi t}{2L} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, o que nos dá que

$$2L \sin \frac{\pi t}{2L} = 2L > 0 = \pi t \cos \frac{\pi t}{2L} = \pi t \cos \frac{\pi}{2}.$$

Resta agora mostrar que a inequação $(**)$ é também satisfeita para $t \in (0, L)$.

$$2L \sin \frac{\pi t}{2L} > \pi t \cos \frac{\pi t}{2L}, \forall t \in (0, L) \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\pi t}{2L}}{\cos \frac{\pi t}{2L}} > \frac{\pi t}{2L}, \forall t \in (0, L)$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi t}{2L} > \frac{\pi t}{2L}, t \in (0, L),$$

o que é verdade, pois $\tan x > x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Portanto, $\gamma : (0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente, o que nos dá que

$$\gamma(t) \leq \gamma(L), \forall t \in (0, L],$$

isto é,

$$\frac{t}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} \leq \frac{L}{2L \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}, \forall t \in (0, L].$$

Daí, como

$$|tD_n(t)| \leq \frac{t}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}}, \forall t \in (0, L],$$

obtemos

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2}, \forall t \in (0, L].$$

Lembremos que, por hipótese, $\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty$. Sendo assim, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $0 < \delta < \min\{L, \eta\}$ tal que

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \epsilon.$$

Daí, para este $\delta > 0$ tomado, temos que

$$\left| \int_0^\delta tD_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \int_0^\delta \overbrace{|tD_n(t)|}^{\leq \frac{1}{2}} \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

Lembremos também que

$$e_n(x) = \int_0^\delta tD_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \sin \frac{\pi t}{2L}} dt.$$

Vamos verificar agora que, para cada $x \in [-L, L]$ fixado, a função

$$t \in [\delta, L] \rightarrow h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}}$$

é integrável. Vejamos:

A função $g(x, t)$ na variável t (x está fixo) é dada por

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]$$

e, como f é de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, temos que g também é de classe \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, isto é, $g(x, t)$ é integrável em relação a t , no intervalo $[\delta, L]$. Além disso, o denominador $(2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L})$ é uma função contínua e que assume somente valores positivos em $[\delta, L]$; mais especificamente, dado que $t \in [\delta, L]$, temos que $0 < \frac{\pi \delta}{2L} \leq \frac{\pi t}{2L} \leq \frac{\pi}{2}$, e, logo,

$$2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L} \geq 2L \operatorname{sen} \frac{\pi \delta}{2L} > 0,$$

para todo $t \in [\delta, L]$.

Daí,

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}}$$

é integrável em $[\delta, L]$. Sendo assim, pelo Lema 1.3.2 (de Riemann-Lebesgue), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^L \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \cdot \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] dt = 0,$$

o que nos dá que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então

$$\left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, se $n \geq n_0$, então

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &= \left| \int_0^{\delta} t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \int_0^{\delta} t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $e_n(x) \rightarrow 0$, isto é,

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

■

Lema 1.3.1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente diferenciável. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, a condição do teste de Dini,

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty,$$

é satisfeita para algum $\eta > 0$.

■ **Demonstração.** Seja $x \in \mathbb{R}$.

Caso 1) f é diferenciável em x .

Como f é seccionalmente diferenciável, temos que f' é descontínua apenas num conjunto finito de pontos do intervalo $[x-L, x+L]$. Sendo assim, podemos afirmar que f' é contínua numa vizinhança do ponto x , isto é, existe $\delta > 0$ tal que f' é contínua no intervalo $[x-\delta, x+\delta]$. Daí, como $[x-\delta, x+\delta]$ é compacto, temos que f' é limitada em $[x-\delta, x+\delta]$, isto é, $\exists K > 0; |f'(t)| \leq K, \forall t \in [x-\delta, x+\delta]$. Logo, como consequência do Teorema do Valor Médio de Lagrange, tem-se

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|, \forall t, s \in [x-\delta, x+\delta].$$

Além disso, como f é derivável em x , temos que f é contínua em x , o que nos dá que

$$f(x+0) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x)$$

e

$$f(x-0) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f(x).$$

Daí,

$$\begin{aligned} g(x,t) &= [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)] \\ &= [f(x+t) - f(x)] + [f(x-t) - f(x)] \end{aligned}$$

e, logo, se $t \in [0, \delta]$, então $x-t, x, x+t \in [x-\delta, x+\delta]$, o que nos dá que

$$|g(x,t)| \leq \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\leq K|t|} + \underbrace{|f(x-t) - f(x)|}_{\leq K|t|} \leq 2K|t|.$$

Portanto

$$\int_0^\delta \overbrace{\left| \frac{g(x, t)}{t} \right|}^{\leq 2K} dt \leq \int_0^\delta 2K dt = 2K \int_0^\delta dt = 2K\delta < \infty,$$

e logo a condição de Dini é satisfeita para $\eta = \delta > 0$.

Caso 2) f não é derivável em x .

Como f é seccionalmente diferenciável, temos que existem os limites

$$f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) \quad \text{e} \quad f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x-h)$$

e

$$f'(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(x+h) \quad \text{e} \quad f'(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(x-h).$$

Além disso, como f e f' são descontínuas apenas num conjunto finito de pontos do intervalo $[x-L, x+L]$, temos que existe uma vizinhança $(x-\delta, x+\delta)$ do ponto x onde f é contínua nesta vizinhança exceto, possivelmente, em x ; e f' é contínua nesta vizinhança, exceto em x .

Sendo assim, se $0 < h < \delta$, então $x+h \in (x-\delta, x+\delta)$ e f' é contínua em $x+h$, o que nos dá, em particular, que f é derivável em $x+h$, e logo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h+t) - f(x+h)}{t} = f'(x+h).$$

Como esta identidade é válida para todo h suficientemente pequeno e positivo, fazendo $h \rightarrow 0^+$ em tal identidade, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'(x+0). \quad (*_1)$$

Analogamente, se $0 < h < \delta$, então $x-h \in (x-\delta, x+\delta)$ e f' é contínua em $x-h$, o que nos dá, em particular, que f é derivável em $x-h$, e logo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h-t) - f(x-h)}{-t} = f'(x-h)$$

o que equivale a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h-t) - f(x-h)}{t} = -f'(x-h).$$

Como esta identidade é válida para todo h suficientemente pequeno e

positivo, fazendo $h \rightarrow 0^+$ em tal identidade, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} = -f'(x-0). \quad (*_2)$$

A existência dos limites $(*_1)$ e $(*_2)$ nos garantem que as razões

$$\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$$

e

$$\frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

são limitadas para $t > 0$ suficientemente pequeno, isto é, existem $\eta > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| \leq K$$

e

$$\left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| \leq K$$

para todo $0 < t \leq \eta$. Daí

$$\left| \frac{g(x,t)}{t} \right| \leq \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| + \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| \leq 2K$$

para todo $0 < t \leq \eta$. Portanto,

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt \leq \int_0^\eta 2K dt = 2K\eta < \infty$$

e, logo, a condição de Dini é satisfeita para $\eta > 0$. ■

Vamos demonstrar agora o tão esperado Teorema de Fourier.

Teorema 1.3.4 — Fourier. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Como diferenciabilidade seccional implica, por definição, em continuidade seccional, temos que, pelo Corolário 1.2.2, f é de classe \mathcal{L}^1

em $[-L, L]$. Sendo assim, pelo Corolário 1.2.5, os coeficientes da série de Fourier da função f estão bem definidos. Dado $x \in \mathbb{R}$, podemos tomar um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x' = x - 2mL \in [-L, L]$. Como f é seccionalmente contínua, temos que existem os limites laterais $f(x' + 0)$ e $f(x' - 0)$. Além disso, como f é seccionalmente diferenciável, pelo lema anterior, temos que a condição do teste de Dini,

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x', t)}{t} \right| dt < \infty,$$

é satisfeita para algum $\eta > 0$. Sendo assim, pelo Teste de Dini, temos que

$$s_n(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x'}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x'}{L} \right) \rightarrow \frac{f(x' + 0) + f(x' - 0)}{2}. \quad (1.15)$$

Agora observe que, como f é periódica de período $2L$, então

$$f(x' + 0) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x' + h) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x - 2mL + h) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x + h) = f(x + 0)$$

e

$$f(x' - 0) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x' - h) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x - 2mL - h) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x - h) = f(x - 0).$$

Além disso,

$$\cos \frac{k\pi x'}{L} = \cos \frac{k\pi(x - 2mL)}{L} = \cos \left(\frac{k\pi x}{L} - 2km\pi \right) = \cos \frac{k\pi x}{L}$$

e

$$\sin \frac{k\pi x'}{L} = \sin \frac{k\pi(x - 2mL)}{L} = \sin \left(\frac{k\pi x}{L} - 2km\pi \right) = \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Portanto, a convergência 1.15 se transforma na convergência

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \rightarrow \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}.$$

Conclusão: A série de Fourier da função f converge, em cada ponto x , para a média aritmética entre os limites laterais de f em x . ■

CAPÍTULO 2

AS NOTAS MUSICAIS ATRAVÉS DE FUNÇÕES SENOIDAS

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar as notas musicais como um tipo específico de função periódica e expor um tutorial de como se programa a plataforma GeoGebra para tocar estas notas musicais. Adicionalmente, apresentaremos a construção de uma música no Python, que traduz os comandos, através da matemática, para gerar o som desejado.

É necessário dizer que a motivação para descrevermos as notas musicais matematicamente como um tipo de função periódica específica, como apresentaremos mais adiante, veio através da palestra intitulada "Matemática, Som e Música" [1], apresentada pelo professor Paulo César Carvalho, realizada no Estágio dos Professores Premiados na OBMEP-2008.

Antes de darmos uma forma de descrevermos matematicamente as notas musicais, vamos definir o que consideraremos como funções senoidais.

Definição 2.0.1 Chamaremos de *funções senoidais* as funções $y = f(x)$ definidas por

$$f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$$

ou

$$f(x) = A \cdot \text{cos}(Bx + C) + D,$$

onde A, B, C e D são constantes reais e que, neste contexto, possuem os seguintes significados:

- A é a *amplitude*, que define a altura máxima da onda a partir da

linha de equilíbrio (valor médio). Quanto maior o valor de A , maior a variação entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo da onda;

- B é o *fator de frequência angular*, que está relacionado ao período da função. Neste caso, o período T da função é dado por $T = \frac{2\pi}{B}$.
- C é a *fase* ou *deslocamento horizontal*, que indica como a função está deslocada ao longo do eixo x . Um $C > 0$ desloca a função para a esquerda, enquanto um $C < 0$ a desloca para a direita.
- D é o *deslocamento vertical*, que define o valor médio da função. Ele "levanta" ou "abaixa" toda a curva em relação ao eixo x .

Quando tratamos de uma função periódica em função do tempo, o período é o tempo que um elemento de uma corda, por exemplo, leva para realizar uma oscilação completa. No caso das ondas de uma nota musical, ele representa o intervalo de tempo para que a forma de onda se repita.

Se T é o período fundamental de uma função periódica, definimos a *frequência fundamental* desta função por $K = \frac{1}{T}$. A frequência de uma onda expressa o número de oscilações por unidade de tempo e é geralmente medida em hertz (Hz). Ela indica quantas vezes a onda se repete em um segundo.

Observemos que, dada uma função senoidal

$$f(x) = A \operatorname{sen}(Bx + C) + D,$$

seu período fundamental é dado por $T = \frac{2\pi}{B}$ e, logo, sua frequência fundamental é dada por $K = \frac{1}{T} = \frac{B}{2\pi}$, o que nos dá que $B = 2\pi K$. Sendo assim, $f(x)$ pode ser escrita, explicitando sua frequência fundamental, da seguinte maneira:

$$f(x) = A \operatorname{sen}(2\pi Kx + C) + D.$$

Neste texto, representaremos as notas musicais por senoidais, em função do tempo t , da seguinte maneira:

$$f(t) = A \cdot \operatorname{sen}(2\pi Kt), \quad (2.1)$$

onde A é a amplitude (volume) e K é a frequência fundamental da nota que queremos representar. A frequência fundamental de cada uma das sete notas musicais (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si) pode ser obtida através de aplicativos que atuam como afinadores digitais. Neste trabalho, foi utili-

zando o aplicativo "Afinador Cifra Club", disponível na AppStore (<https://apps.apple.com/pt/app/afinador-cifra-club/id480625281>) e na Google Play Store (<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.studiosol.afinadorlite&hl=pt-BR&pli=1>). Com este aplicativo, encontramos as seguintes frequências fundamentais:

1. **Dó**: frequência $K = 261,63\text{Hz}$;
2. **Ré**: frequência $K = 293,66\text{Hz}$;
3. **Mi**: frequência $K = 329,63\text{Hz}$;
4. **Fá**: frequência $K = 349,23\text{Hz}$;
5. **Sol**: frequência $K = 391,99\text{Hz}$;
6. **Lá**: frequência $K = 440,00\text{Hz}$;
7. **Sí**: frequência $K = 493,88\text{Hz}$.

Uma vez obtidas as frequências fundamentais das notas musicais, podemos criar as funções senoidais que as representam usando (2.1). Na próxima seção, apresentaremos um tutorial de como criar um comando no Geogebra para que o mesmo toque as notas musicais dadas pelas senoidais.

2.1 Implementação no Geogebra

Para implementar as funções no Geogebra, usando a versão clássica, disponível no link <https://www.geogebra.org/classic>, é necessário seguir os seguintes passos:

1. **Criar a função no Geogebra**

No campo "Entrada" digite a função

$$f(t) = A \text{sen}(2\pi Kt).$$

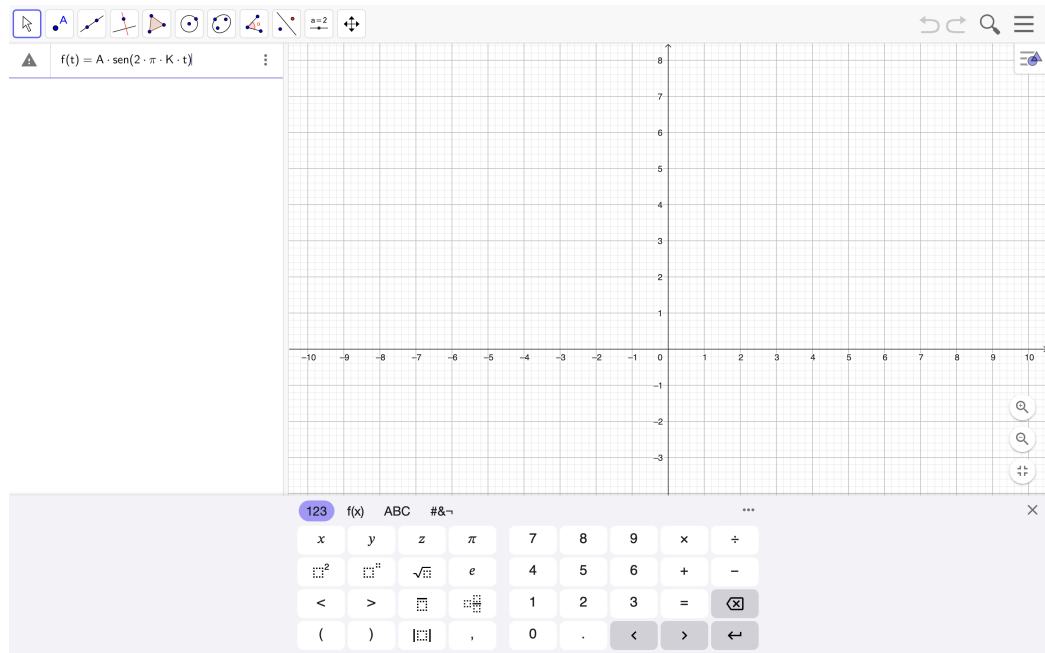


Figura 2.1: Função no campo "Entrada:" do Geogebra

Nessa função, A representa a amplitude K representa a frequência que desejamos.

2. Adicionar os controles deslizantes

Após adicionar a função dessa forma, o Geogebra criará automaticamente os controles deslizantes para as constantes A (amplitude) e K (frequência). Neste momento, cabe editar o controle deslizante da constante K para, por exemplo, variar entre 260 e 500, para que transcorra entre todas as frequências das notas.

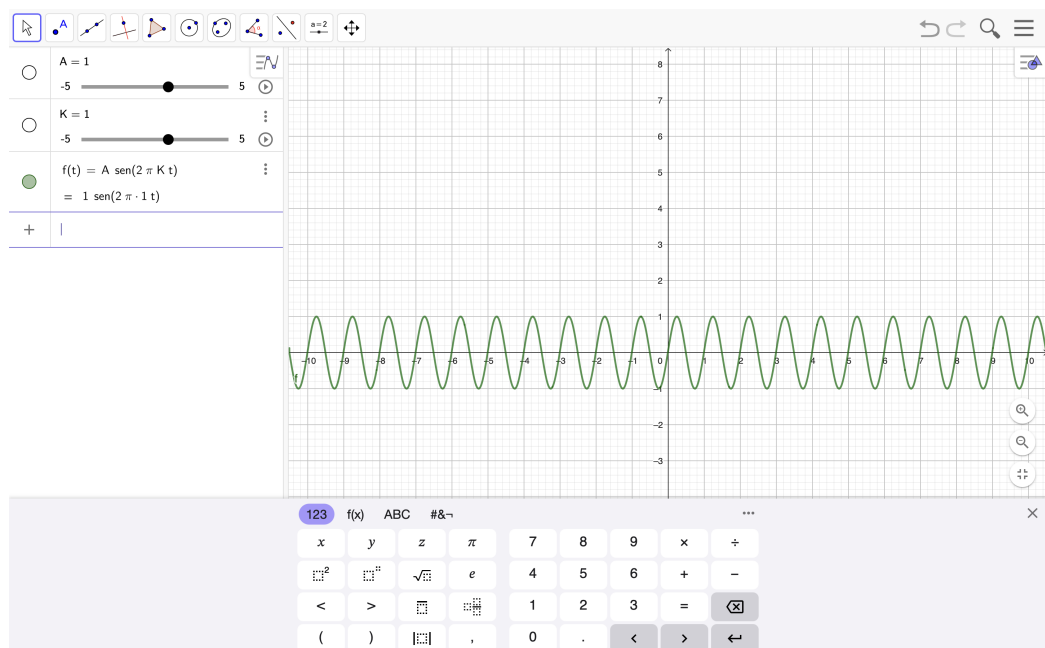


Figura 2.2: Janela dos controles deslizantes

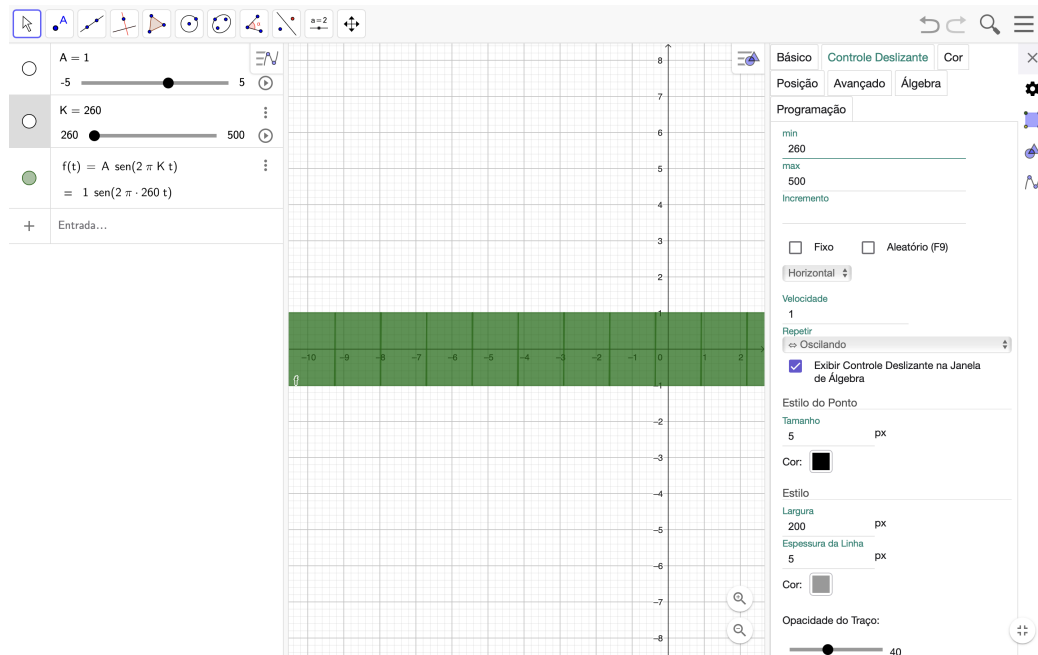


Figura 2.3: Edição do controle deslizante no Geogebra

Para editar o intervalo do controle deslizante, clique com o botão direito na constante e, em seguida, clique em "Configurações" na janela que aparecerá. Na janela "Configurações" que abrirá, clique na aba "Controle Deslizante". Em seguida, digite "260" no campo "min" e "500" no campo "max".

3. Criar botão para tocar a função

Para tocar a função, precisaremos de um botão que execute um código de comando. Começaremos criando um botão da seguinte forma:

Na barra superior, criaremos um botão.

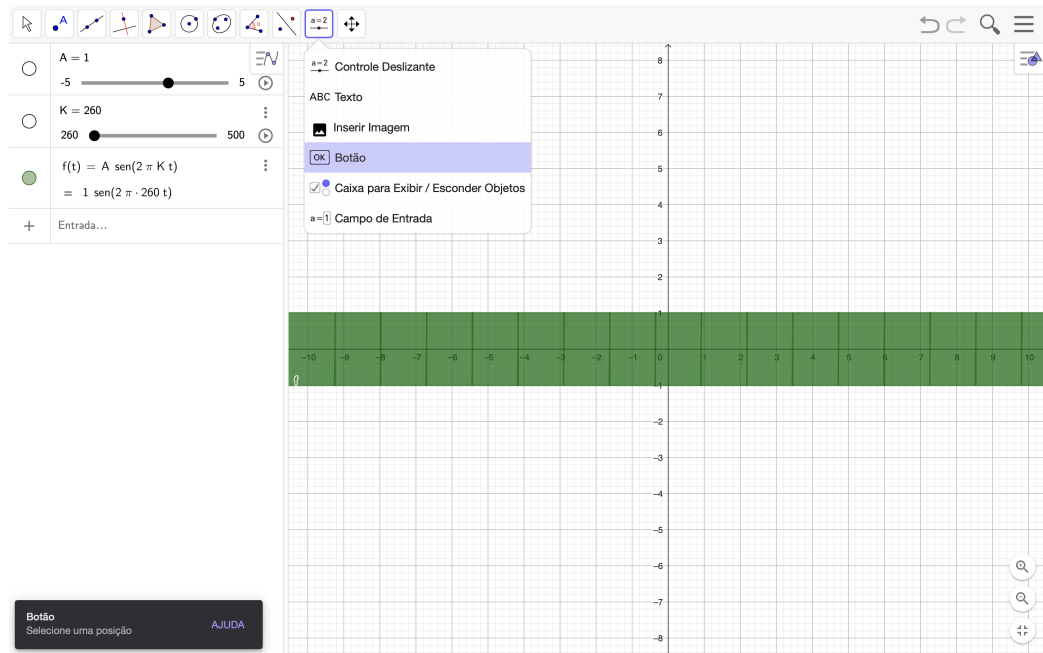


Figura 2.4: Opção de criar botão no Geogebra

Após isso, aparecerá a seguinte janela:

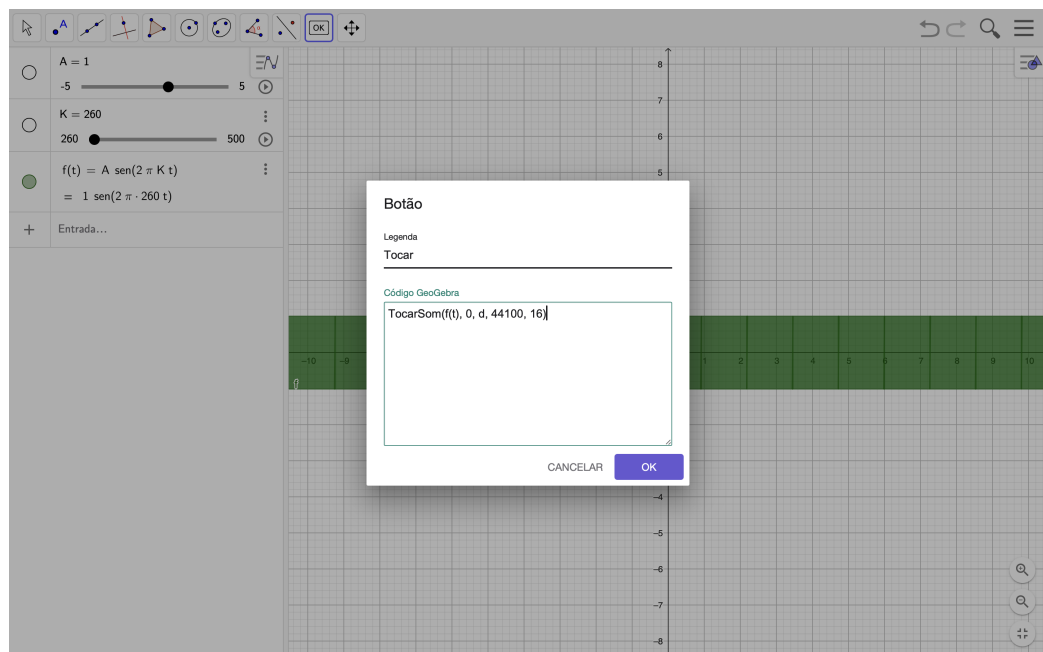


Figura 2.5: Janela de configuração do botão

Na parte código, coloque o seguinte código:

```
TocarSom(f(t), 0, d, 44100, 16)
```

onde d é a duração que você deseja que o som seja tocado, 44100 é a taxa de amostragem do sinal e 16 a qualidade.

4. Criando um botão para tocar uma nota específica

Vamos criar um botão, da mesma forma que antes, para tocar a nota Dó, por exemplo.

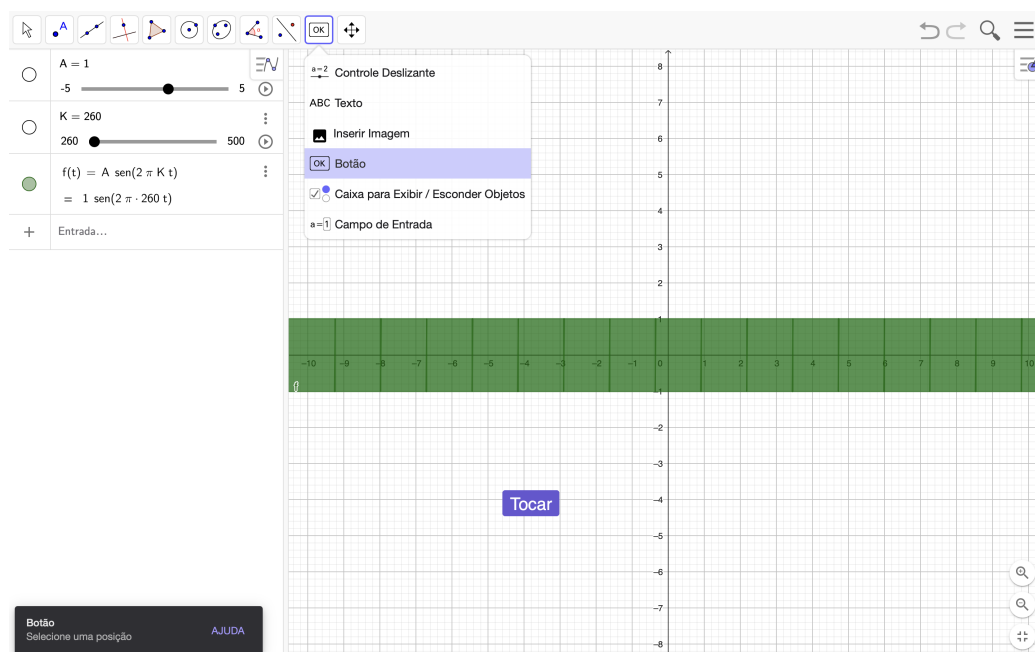


Figura 2.6: Opção criar botão no Geogebra

Após isso, aparecerá a seguinte janela:

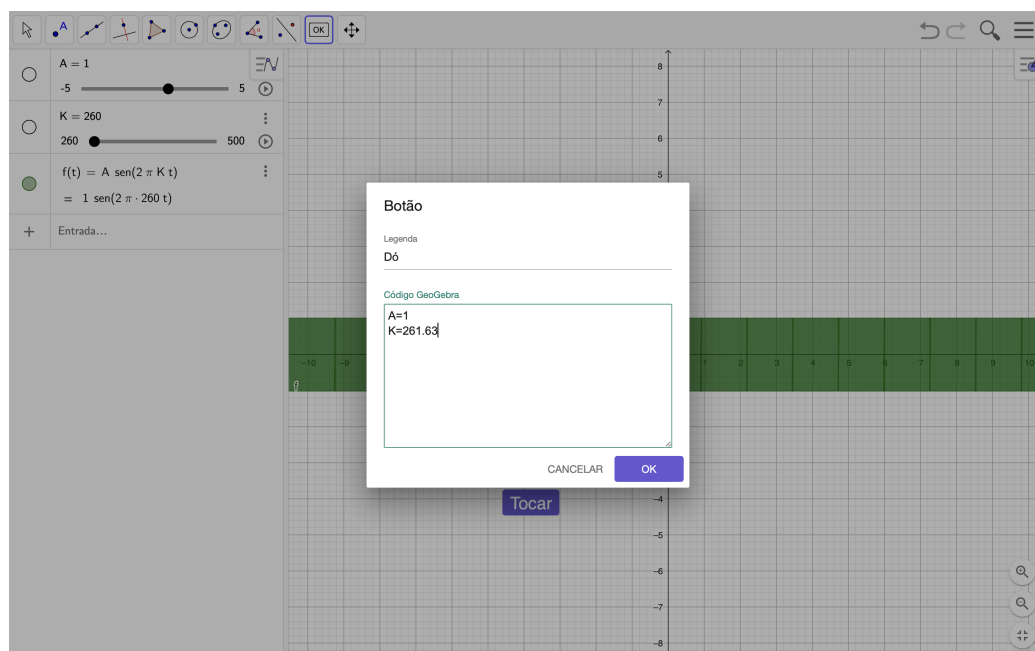


Figura 2.7: Janela de configuração do botão

No campo "Legenda" digitamos "Dó" e na janela "Código Geogebra" colocaremos o seguinte código:

```
A = 1
K = 261.63
```

onde A é a amplitude da nota (volume) e K a frequência. Ao final, temos uma interface assim:

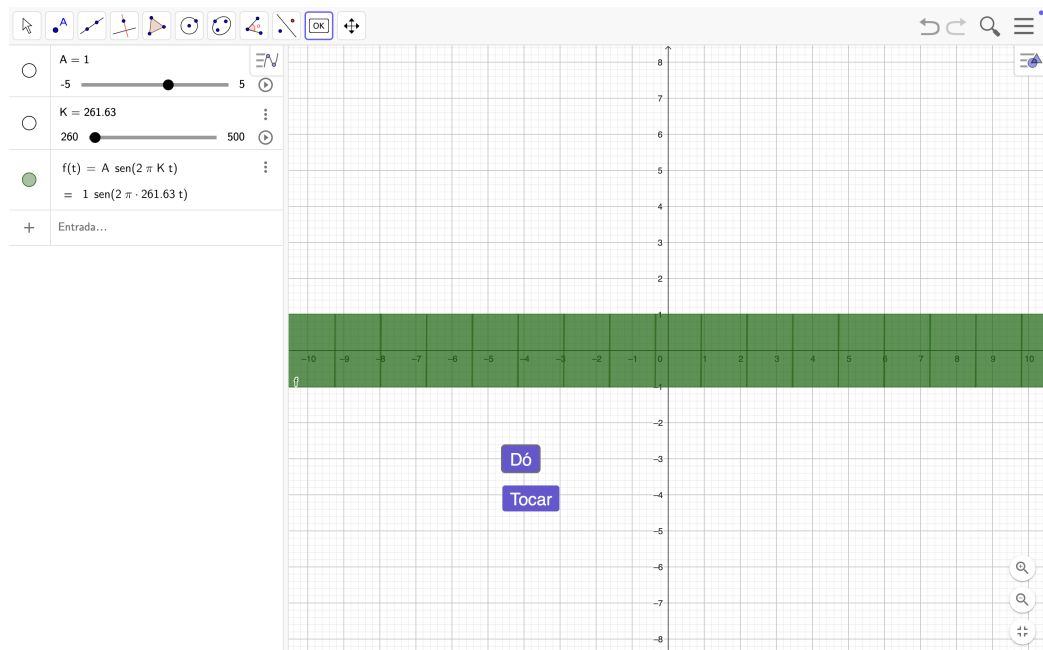


Figura 2.8: Interface final Geogebra

Para adicionar mais notas, o processo é análogo.

Para esse trabalho, foi criado um programa no [geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/pwvzydjn) com todas estas ferramentas já implementadas. O programa está disponível no seguinte endereço: <https://www.geogebra.org/m/pwvzydjn>.

Dessa forma, temos as seguintes representações:

2.1.1 Dó

Para representarmos a nota Dó, utilizamos a seguinte função senoidal

$$f(t) = 1 \sin(2\pi \cdot 261,63t).$$

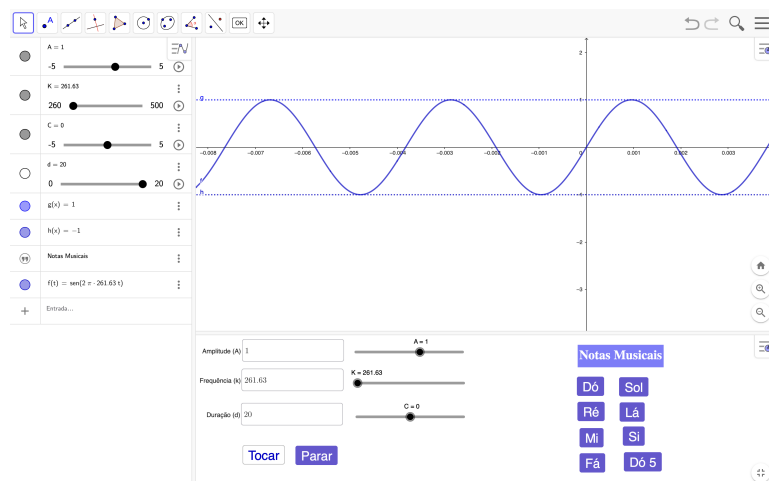


Figura 2.9: Representação da função senoidal de Dó no Geogebra

2.1.2 Ré

Para representarmos a nota Ré, utilizamos a seguinte função senoidal

$$f(t) = 1 \sin(2\pi \cdot 293,66t).$$

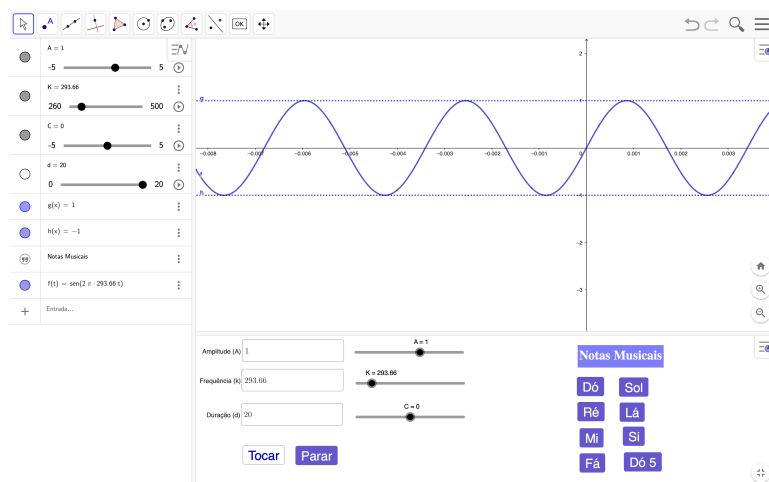


Figura 2.10: Representação da função senoidal de Ré no Geogebra

2.1.3 Mi

Para representarmos a nota Mi, utilizamos a seguinte função senoidal

$$f(t) = 1 \sin(2\pi \cdot 329,63t).$$

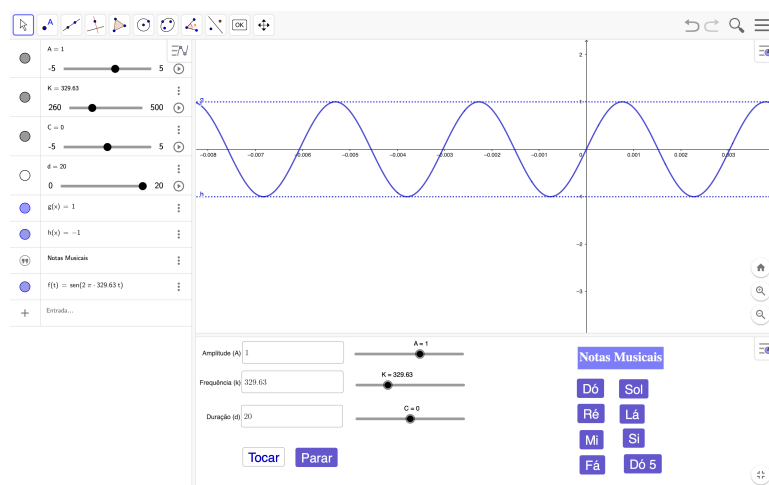


Figura 2.11: Representação da função senoidal de Mi no Geogebra

2.1.4 Fá

Para representarmos a nota Fá, utilizamos a seguinte função senoidal

$$f(t) = 1 \operatorname{sen}(2\pi \cdot 349,23t).$$

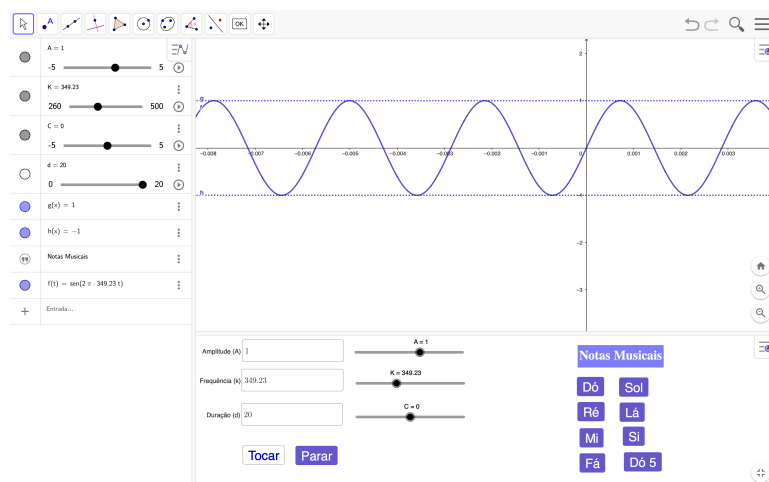


Figura 2.12: Representação da função senoidal de Fá no Geogebra

2.1.5 Sol

Para representarmos a nota Sol, utilizamos a seguinte função senoidal

$$f(t) = 1 \operatorname{sen}(2\pi \cdot 391,99t).$$

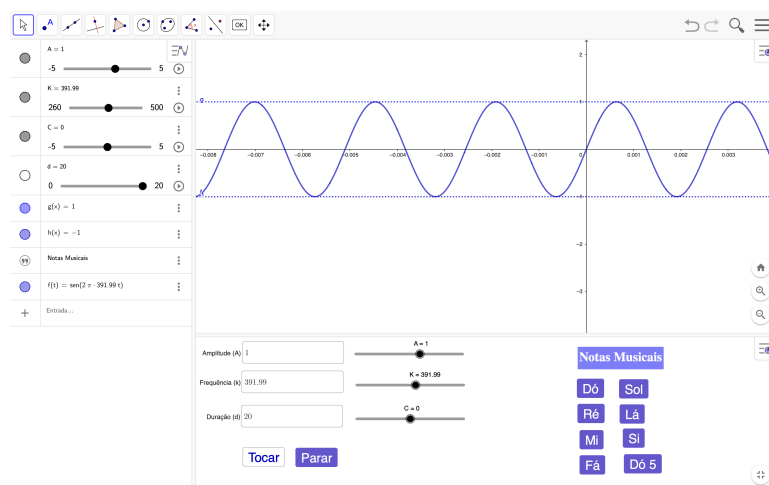


Figura 2.13: Representação da função senoidal de Sol no Geogebra

2.1.6 Lá

Para representarmos a nota Lá, utilizamos a seguinte função senoidal

$$f(t) = 1 \text{ sen}(2\pi \cdot 440t).$$

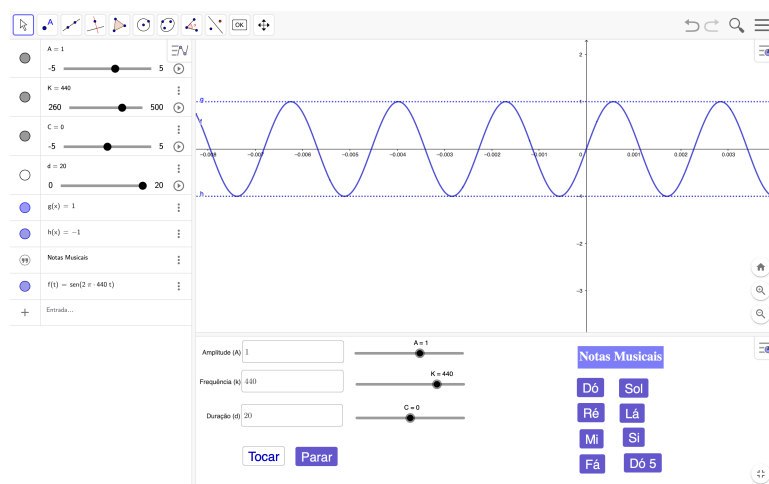


Figura 2.14: Representação da função senoidal de Lá no Geogebra

2.1.7 Si

Para representarmos a nota Lá, utilizamos a seguinte função senoidal

$$f(t) = 1 \text{ sen}(2\pi \cdot 493,88t).$$

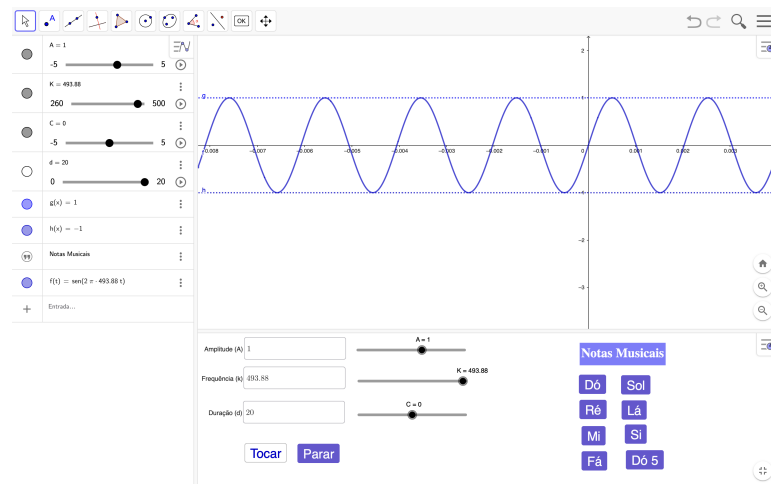


Figura 2.15: Representação da função senoidal de Si no Geogebra

2.2 Implementação no Python

Para a geração de música por meio de ondas senoidais, foi desenvolvida uma implementação que sintetiza a melodia de “Brilha Brilha Estrelinha”. O código utiliza conceitos de síntese sonora, como séries de Fourier para composição harmônica, sobretons e o envelope ADSR (Ataque, Decaimento, Sustentação e Liberação), visando emular a sonoridade de um instrumento musical. A seguir, são descritos os principais elementos e funções utilizadas na implementação.

O código está disponível no repositório GitHub: <https://github.com/axlandrade/MusicaPython>. Neste repositório, acessando a pasta "data", pode-se encontrar o arquivo da música (brilha_brilha.wav) criada para baixar e ouvir.

2.2.1 Estrutura do Código

A implementação é dividida em dois arquivos principais: `brilha_brilha.py` e `funcoes.py`.

- **Arquivo `brilha_brilha.py`:** Este arquivo define a estrutura da música, organizando as notas e suas respectivas durações para ambas as mãos (melodia e acompanhamento). As notas foram definidas como uma lista (`right_hand_notes` e `left_hand_notes`), e suas durações foram configuradas nas listas `right_hand_duration` e `left_hand_duration`. Além disso, parâmetros como fatores de harmônicos e de ADSR são configurados para dar a qualidade sonora desejada.
- **Arquivo `funcoes.py`:** Este arquivo contém as funções responsáveis

por gerar as ondas sonoras, aplicar sobretons e configurar o envelope ADSR para cada nota.

2.2.2 Principais Funções Utilizadas

- `get_piano_notes`: Essa função mapeia as notas musicais (ex., “C4”, “A4”) para suas frequências correspondentes em hertz, com base no padrão de afinação $A_4 = 440$ Hz.
- `get_sine_wave`: Cria a onda senoidal correspondente à frequência e duração especificadas, representando o som básico da nota.
- `apply_overtones`: Adiciona sobretons (harmônicos) à onda senoidal fundamental, usando uma composição de séries de Fourier. Neste caso, cada sobretom é uma frequência harmônica da fundamental e é adicionado de acordo com a amplitude especificada, o que cria uma onda complexa e aproxima o som ao timbre de um instrumento musical.
- `get_adsr_weights`: Gera o envelope ADSR da onda, aplicando um peso em quatro estágios de amplitude da onda (ataque, decaimento, sustentação e liberação) para simular a dinâmica da nota, semelhante ao que ocorre em instrumentos reais. Este envelope ajuda a modular a intensidade da nota ao longo do tempo.
- `apply_pedal`: Simula o uso do pedal de sustain de um piano, estendendo a duração de determinadas notas em cada compasso. Esse efeito é criado ajustando a duração das notas em relação ao valor do compasso (`bar_value`).
- `get_song_data`: Esta é a função central que combina todas as funções anteriores. Ela utiliza `apply_overtones` e `get_adsr_weights` para gerar as ondas senoidais completas para cada nota e compilar a sequência de notas conforme suas durações, criando a melodia final.

2.2.3 Geração e Exportação do Áudio

Após a síntese de cada nota com suas características específicas de sobretons e envelope ADSR, as ondas sonoras são combinadas para formar a música completa. A soma das ondas de cada mão é normalizada e exportada em um arquivo `.wav`, possibilitando a reprodução da melodia.

2.2.4 Análise e Resultados

A partir dessa implementação, foi possível observar que a composição de ondas senoidais enriquecidas com sobretons, por meio de séries de Fourier, e moduladas pelo envelope ADSR fornece uma sonoridade próxima

a instrumentos musicais. O método permitiu reproduzir a melodia de “Brilha Brilha Estrelinha” com acompanhamento, destacando a flexibilidade da síntese sonora na criação de músicas digitais.

CAPÍTULO 3

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, exploramos as séries de Fourier como uma ferramenta matemática essencial para a composição de fenômenos sonoros. Por meio de um programa desenvolvido no Geogebra, criamos notas musicais puras, representadas por ondas senoidais, que exemplificam a aplicação da matemática na criação de sons harmoniosos e distintos. Essa composição de frequências simples revelou como a matemática é capaz de construir, de maneira organizada e precisa, elementos complexos, como os sons que percebemos.

Ao investigar o potencial das séries de Fourier, observamos que a combinação de ondas senoidais de frequências específicas permite recriar notas musicais, demonstrando de forma prática e visual como conceitos matemáticos podem ser aplicados para modelar aspectos do mundo físico. Esse processo nos mostrou que a matemática, longe de ser uma abstração distante, é uma linguagem capaz de descrever a natureza com precisão e beleza, oferecendo uma maneira de entender e reproduzir fenômenos que vivenciamos diariamente.

A experiência de compor sons puros a partir de funções matemáticas reafirma a presença da matemática em áreas como a música e a acústica, onde as ondas sonoras podem ser representadas e analisadas com rigor. Esse trabalho evidencia que a matemática não apenas descreve, mas também cria. Através das séries de Fourier, conseguimos construir sons organizados, demonstrando que a matemática é um elo entre o abstrato e o real, entre a teoria e a aplicação prática. Concluimos, assim, que a análise de Fourier, ao permitir a composição de notas musicais puras, é uma prova tangível de como a matemática está profundamente entrelaçada com o mundo que nos cerca, transformando conceitos numéricos em experiências sensoriais.

REFERÊNCIAS

- [1] Paulo Cézar Carvalho. *Matemática, som e música*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, RJ, jun. de 2009. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PewAXETCeIA>.
- [2] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 5ª edição. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2018. ISBN: 8524401206; 9788524401206.
- [3] Cláudio A. Fleury. *Análise de Fourier para Sinais e SLITC's*. 2013. Disponível em: <https://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/18690/material/PUCGO-SL-2013-1%20Slides4%20-%20An%C3%A1lise%20de%20Fourier.pdf> (acesso em 19/12/2024).
- [4] David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker. *Fundamentos de Física. Gravitação, Ondas e Termodinâmica - Volume 2*. LTC, 2016. ISBN: 8521630360; 9788521630364.
- [5] Henrique Ajuz Holzmann. *Técnicas de Processamento de Sinais e Telecomunicações*. 2021. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/433205/1/Ebook-Tecnicas-de-Processamento-de-Sinais.pdf> (acesso em 19/12/2024).
- [6] Elon Lages Lima. *Análise Real volume 1, Funções de uma Variável*. 5ª edição. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2020. ISBN: 9788524403620; 8524403624.
- [7] Claudia Schwartzbach e Tásia Hickmann. *A Transformada de Fourier e o Processamento Eletrônico dos Sinais*. 2015. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20474/2/MD_DAMAT_II_2015_01.pdf (acesso em 19/12/2024).