Les Différences Finies dans le Domaine Temporel

Projet 2025

1 Introduction

La méthode de différences finies dans le domaine temporel (*Finite-Difference Time-Domain*, FDTD) est une méthode numérique de résolution des équations de Maxwell. Elle fait partie de l'ensemble des méthodes appelées *full-wave*, c-à-d ne faisant aucune approximation sur les équations de Maxwell (mis à part bien entendu les approximations de discrétisation numérique). L'objectif de ce projet est de développer votre propre code FDTD à deux dimensions pour visualiser et mieux comprendre les phénomènes étudiés au cours.

2 Principe de la FDTD

Pour comprendre l'algorithme FDTD, nous partons du cas 1D dans le vide : les champs électrique et magnétique ne possèdent qu'une dépendance selon une seule coordonnée, soit x, et selon le temps t. Autrement dit, le rayonnement simulé dans cette hypothèse est invariant dans tout plan yz : il s'agit d'ondes planes. De même, chaque source est également invariante selon yz : il s'agit de sources planaires.

Partons des équations de Maxwell en rotationnel dans le vide :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \end{cases} \tag{1}$$

Si nous cherchons les solutions pour lesquelles le champ électrique est polarisé selon z : $\vec{E} = E_z(x,t)\vec{1}_z$ et

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\,\vec{1}_y \tag{2}$$

D'après la première équation de (1), le champ magnétique est donc polarisé selon y : $\vec{B} = B_y(x,t)\,\vec{1}_y$ et

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial x}\,\vec{1}_z \tag{3}$$

Le système (1) s'écrit alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \, \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \, + \, \mu_0 \, J_z \end{cases} \tag{4}$$

La méthode FDTD résoud numériquement le système (4) en approximant les dérivées partielles par des différences finies.

Rappelons que la dérivée de la fonction $f(x)$ au point x_0 peut être approximée par la différence finie centrée

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \frac{\delta}{2}) - f(x_0 - \frac{\delta}{2})}{\delta} \tag{5}$$

avec une précision $\mathcal{O}(\delta^2)$.

2.1 L'algorithme de Yee

L'algorithme de Yee consiste à remplacer les dérivées partielles dans (4) par leur approximation (5) puis à évaluer le système itérativement au cours du temps, en scindant chaque itération en deux sous-itérations : l'une pour le calcul du champ électrique, l'autre pour le calcul du champ magnétique.

Discrétisons l'axe x par pas de largeur Δx, l'axe temporel par pas de durée Δt. Soit la notation discrète

$$E_z^q[m] \; = \; E_z(m\Delta x, q\Delta t) \tag{6}$$

où $m \in [1, M]$ et $q \in [1, Q]$. La simulation se déroulera donc sur un domaine de largeur $M\Delta x$ et sur une durée $Q\Delta t$.

La première demi-itération temporelle consiste à calculer la seconde équation de (4) en $m\Delta x$ ($m \in [2, M-1]$) à l'instant $(q + 1/2)\Delta t$:

$$\left.\frac{\partial B_y}{\partial x}\right|_{m\Delta x,(q+1/2)\Delta t} = \varepsilon_0 \mu_0 \; \left.\frac{\partial E_z}{\partial t}\right|_{m\Delta x,(q+1/2)\Delta t} + \; \mu_0 \; J_z|_{m\Delta x,(q+1/2)\Delta t} \tag{7}$$

En appliquant (5) et la notation (6) :

$$\frac{B_y^{q+1/2}[m+1/2] - B_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta x} \; = \; \varepsilon_0 \mu_0 \, \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta t} + \mu_0 J_z^{q+1/2}[m] \tag{8}$$

ou encore

$$E_z^{q+1}[m] \; = \; E_z^q[m] + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\Delta t}{\Delta x} (B_y^{q+1/2}[m+1/2] - B_y^{q+1/2}[m-1/2]) - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} J_z^{q+1/2}[m] \tag{9}$$

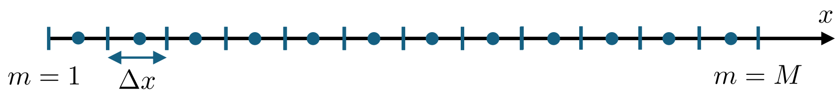

FIGURE 1 – Grilles de discrétisation de la méthode de Yee 1D. Les barres représentent la grille de discrétisation de E_z. Les disques celle de B_y.

Autrement dit, il est possible de calculer la valeur du champ électrique en tout point m à l'itération $q+1$ connaissant uniquement les valeurs des champs et des sources dans le passé (à l'itération précédente q et la demi-itération précédente $q+1/2$). Dans cette équation, J_z est la source de courant produisant les champs et est supposée connue.

La seconde demi-itération temporelle consiste à calculer la première équation de (4) en $(m+1/2)\Delta x$ ($m \in [1, M-1]$), à l'instant $q\Delta t$:

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} = \left.\frac{\partial B_y}{\partial t}\right|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} \tag{10}$$

En appliquant (5) :

$$\frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta x} = \frac{B_y^{q+1/2}[m+1/2] - B_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta t} \tag{11}$$

ou encore

$$B_y^{q+1/2}[m+1/2] = B_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m]\right) \tag{12}$$

Autrement dit, il est possible de calculer la valeur du champ magnétique en tout point $m+1/2$ à l'itération $q+1/2$ connaissant les valeurs des champs dans le passé (à l'itération précédente $q-1/2$ et la demi-itération précédente q).

Partant de conditions initiales nulles pour les champs, l'algorithme de Yee consiste à calculer itérativement (9) et (12). Il est important de remarquer dans ces équations que les champs électrique et magnétique sont calculés en des points différents : les points $m\Delta x$ pour le champ électrique et les points $(m+1/2)\Delta x$ pour le champ magnétique. Il existe donc dans la méthode de Yee deux grilles de discrétisation enchâssées comme représenté à la Figure 1.

2.2 Stabilité

L'algorithme de Yee est stable si les pas de discrétisation Δx et Δt sont suffisamment petits. La règle de bonne pratique impose $\Delta x < \lambda/6$ où λ est la longueur d'onde. Nous conseillons pour les simulations de choisir au maximum

$$\Delta x = \frac{\lambda}{20} \tag{13}$$

De même, une règle de bonne pratique consiste à choisir

$$\Delta t \;=\; \frac{\Delta x}{2c} \tag{14}$$

où $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ est la vitesse de la lumière. Autrement dit, une onde dans le vide met deux pas temporels pour se déplacer de Δx.

Il existe encore un autre problème de stabilité numérique lié aux ordres de grandeurs des champ électrique et magnétique dans les problèmes de rayonnement. Nous savons d'après les équations (4.26) ou (6.11) du syllabus que le champ magnétique rayonné est plusieurs ordres de grandeurs inférieur au champ électrique associé et les itérations de la méthode de Yee peuvent diverger à cause de cette différence. L'astuce consiste à ne pas calculer B_y mais $\tilde{B}_y = cB_y$. Les équations (9) et (12) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
E_z^{q+1}[m] \;&=\; E_z^q[m] + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\Delta t}{c\Delta x}(\tilde{B}_y^{q+1/2}[m+1/2] - \tilde{B}_y^{q+1/2}[m-1/2]) - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0}J_z^{q+1/2}[m] \\
\tilde{B}_y^{q+1/2}[m+1/2] \;&=\; \tilde{B}_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m]\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Avec (14) :

$$\begin{aligned}
E_z^{q+1}[m] \;&=\; E_z^q[m] + \frac{1}{2}(\tilde{B}_y^{q+1/2}[m+1/2] - \tilde{B}_y^{q+1/2}[m-1/2]) - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0}J_z^{q+1/2}[m] \\
\tilde{B}_y^{q+1/2}[m+1/2] \;&=\; \tilde{B}_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{1}{2}\left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m]\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

Remarquez la simplicité de ces équations...

2.3 Conditions limites

La première équation de (16) ne peut être appliquée aux limites du domaine en $m = 1$ et $m = M$. Imposer un champ électrique nul en ces points n'est pas une solution satisfaisante (pourquoi ?). Il faut imposer des conditions limites telles que les ondes puissent s'échapper du domaine de calcul sans réflexion parasites aux frontières. Si on suppose que les régions proches des extrémités sont constituées d'espace libre (ce qui est le cas jusqu'à présent, mais nous généraliserons plus loin la méthode de Yee aux diélectriques), nous savons qu'une onde met deux pas temporels pour se déplacer d'un pas spatial. Si seules des ondes qui s'échappent existent en $m = 1$ et $m = M$, on doit donc imposer les conditions limites

$$\begin{aligned}
E_z^q[1] \;&=\; E_z^{q-2}[2] \\
E_z^q[M] \;&=\; E_z^{q-2}[M-1]
\end{aligned} \tag{17}$$

3 Projet

Le projet se scinde en deux parties : (i) l'implémentation et la généralisation de la méthode de Yee ; (ii) l'utilisation des codes pour visualiser et ainsi mieux comprendre les phénomènes vus au cours.

3.1 Implémentation de la méthode de Yee

3.1.1 Etape 1 : 1D en espace libre

— Pour vous familiariser avec la méthode, implémentez l'algorithme 1D en espace libre (16) pour une source sinusoidale puis pour une source gaussienne.
— Dans le cas harmonique, calculez l'amplitude d'oscillation du champ électrique en tout point de la grille de discrétisation (c-à-d l'amplitude du phaseur associé).
— Remplacer les conditions limites (17) par des conditions limites nulles aux frontières. Expliquer.

3.1.2 Etape 2 : 1D avec diélectriques

— Partant des équations de Maxwell, généralisez (16) au cas où le milieu présente une permittivité relative $\varepsilon_r(x)$.
— Partant des équations de Maxwell, généralisez (16) au cas des diélectriques avec pertes : le milieu présente une permittivité relative $\varepsilon_r(x)$ et une conductivité $\sigma(x)$. Pour modéliser le terme de pertes lors de la discrétisation, vous devrez supposer que le champ électrique est constant entre deux demi-itérations.

3.1.3 Etape 3 : 2D en espace libre

Vous allez maintenant généraliser au cas 2D : la propagation s'effectue dans le plan xy, les ondes et les sources sont invariantes selon l'axe z (ondes et sources cylindriques). On suppose que le champ électrique est à nouveau polarisé selon z. Il y aura alors trois inconnues : E_z, B_x et B_y comme le montrent les équations de Maxwell. Il vous faudra donc utiliser trois grilles de discrétisation spatiale.

Appliquer en 2D des conditions limites qui permettent aux ondes de s'échapper sans réflexions parasites est possible, mais est nettement plus complexe que dans le cas 1D. Nous préférons ne pas passer du temps sur cette partie purement algorithmique pour nous concentrer sur l'électromagnétisme. Vous appliquerez des conditions limites nulles aux frontières. Lors des simulations, il faudra alors choisir un domaine de calcul suffisamment grand pour que les réflexions parasites n'aient pas le temps de revenir dans la zone utile de la simulation.

— Partant des équations de Maxwell, développez la méthode de Yee au cas 2D en espace libre, pour une source sinusoidale.
— Calculez en chaque point de la grille l'amplitude d'oscillation du champ électrique. Expliquez comment elle varie avec la distance à la source.
— Calculez en chaque point de la grille l'amplitude de la tension et la puissance qui seraient reçues par une antenne de hauteur équivalente et résistance connues.

3.1.4 Etape 4 : 2D avec obstacles diélectriques et parfaitement conducteurs

— Implémentez dans le domaine de calcul des obstacles parfaitement conducteurs.
— Partant des équations de Maxwell, généralisez au cas des diélectriques avec pertes : le milieu présente une permittivité relative $\varepsilon_r(x, y)$ et une conductivité $\sigma(x, y)$.

3.2 Simulations

La philosophie générale de la seconde partie du projet est la suivante : choisir librement un ensemble de simulations qui permettent de visualiser les phénomènes vus au cours.

— Proposez au minimum une simulation par chapitre pour les chapitres 7, 8 et 9. Chaque simulation doit permettre d'illustrer un concept du cours, même très simple. Pour chaque simulation, comparer avec le plus d'approfondissement possible les résultats de vos simulations avec la théorie. Aller au-delà de ce minimum est encouragé et sera pris en compte dans l'évaluation.
— Proposez au moins une simulation plus complexe qui illustre des phénomènes non vus dans le syllabus. Expliquer avec le plus d'approfondissement possible les résultats de votre simulation.

N'hésitez pas à dépasser ces demandes minimales. Soyez créatifs et ambitieux !

4 Rapport

La rapport final doit contenir :

— Les développements des divers modèles FDTD : de Maxwell au code informatique.
— Les codes complets commentés.
— Les analyses des simulations choisies .

La (les) simulation(s) plus complexe(s) ne doit(vent) pas faire partie du rapport, mais sera(ont) présentée(s) à l'examen oral.