

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт Прикладной Математики и Механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Направление подготовки
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 6
Тема «Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных
уравнений с помощью многошагового метода»
Дисциплина «Численные методы»

Выполнил студент гр. 3630102/90003
Преподаватель:

А.А. Чеботин
К.Н. Козлов

Санкт-Петербург, 2021 г.

1 Формулировка задачи и ее формализация.

Численным методом предиктор-корректор Адамса 3-го порядка решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Исследовать метод на устойчивость задачи.

2 Алгоритм метода

Предиктор-корректор Адамса 3-го порядка относится к многошаговым методам. Предиктор-корректор означает совместное применение явных и неявных методов.

Обозначим через y_i^B приближенное значение решения, которые будет считаться при помощи явной формулы Адамса-Башфорта, а y_i - решение, которое будет считаться при помощи неявного метода Адамса-Моултона.

Поскольку метод многошаговый и требует три предыдущих значения последовательности решения, то нам нужно будет вычислить еще 2 значения (первое (x_0, y_0) уже дано), например методом Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} K_1 = f(x, y) \\ K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f(x_i + h, y_i - hK_1 + 2hK_2) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \end{cases} \quad i = 1, 2$$

А далее применим формулу предиктор-корректорного метода Адамса 3-го порядка:

$$\begin{cases} y_i^B = y_{i-1} + \frac{h}{12}(23f(x_{i-1}, y_{i-1}) - 16f(x_{i-2}, y_{i-2}) + 5f(x_{i-3}, y_{i-3})) \\ y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}(5f(x_i, y_i^B) + 8f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x_{i-2}, y_{i-2})) \end{cases}, \quad i = 3, \dots, N$$

3 Предварительный анализ задачи.

Имеем следующую задачу Коши (10 вариант):

$$(x+1)(y' + y^2) = -y, \quad y(a) = \frac{1}{2 \ln(2)}, \quad [1; 5]$$

Разрешим явно уравнение относительно y' :

$$(x+1)(y' + y^2) = -y \Rightarrow y' + y^2 = -\frac{y}{x+1} \Rightarrow y' = -\frac{y}{x+1} - y^2$$

Таким образом, нам нужно решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+1} - y^2 \\ y(a) = \frac{1}{2 \ln(2)} \end{cases}$$

Аналитическое решение для отрезка $[1; 5]$:

$$y(x) = \frac{1}{(1+x) \ln |1+x|}$$

Выведем формулы для пошагового контроля точности. Обозначим y_i^B - решение, получаемое явной формулой Адамса-Башфорта и y_i^M - решение, получаемое неявной формулой Адамса-Моултона.

Главные части шаговых погрешностей формул Башфорта и Моултона характеризуются величинами $\frac{3}{8} \Delta^3 f_{i-3}$ и $-\frac{1}{24} \Delta^3 f_{i-2}$. Имеем два приближенных представления $y(x_{i+1})$:

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}^B + \frac{3}{8} h \Delta^3 f_{i-3}$$

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}^M - \frac{1}{24} h \Delta^3 f_{i-2}$$

Приравняем правые части:

$$y_{i+1}^B + \frac{3}{8} h \Delta^3 f_{i-3} \approx y_{i+1}^M - \frac{1}{24} h \Delta^3 f_{i-2}$$

$$y_{i+1}^M - y_{i+1}^B \approx \frac{3}{8} h \Delta^3 f_{i-3} + \frac{1}{24} h \Delta^3 f_{i-2} \approx \frac{5}{12} h \Delta^3 f_{i-2}$$

$$h \Delta^3 f_{i-2} \approx \frac{12}{5} (y_{i+1}^M - y_{i+1}^B)$$

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}^M - \frac{1}{24} \cdot \frac{12}{5} (y_{i+1}^M - y_{i+1}^B)$$

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1}^M \approx -\frac{1}{10}(y_{i+1}^M - y_{i+1}^B)$$

Будем применять это для контроля точности: если $\frac{1}{10}|y_{i+1}^M - y_{i+1}^B| < \varepsilon$, то переходим к следующему шагу, иначе нужно уменьшить шаг.

4 Тестовый пример с детальными расчетами.

Задача. Частица массой $m = 2$ кг движется прямолинейно, начальная скорость равна v_0 . На частицу действует ускоряющая сила $F = 20$ Н, а также сила сопротивления, пропорциональная скорости (коэффициент $k = 0.5$). Определить скорость частицы в момент $t = 4$ с.

Дифференциальное уравнение:

$$m \frac{dv}{dt} = F - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F - kv}{m} = \frac{20 - 0.5v}{2}, \quad v(0) = 0$$

Решение. Для начала нам потребуется вычислить значение скорости $v(1), v(2)$ методом Рунге-Кутты. После мы будем иметь три начальных значения и сможем применить метод предиктор-корректор Адамса 3-го порядка.

$$K_1 = f(t_i, v_i)$$

$$K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, v_i + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f(t_i + h, v_i - hK_1 + 2hK_2)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Правая часть дифференциального уравнения зависит только от переменной v . Пусть шаг интегрирования $h = 1$.

$$v_0 = 0$$

$$K_1 = \frac{20 - 0.5 \cdot 0}{2} = 10, \quad K_2 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}10\right)\right)}{2} = 8.75, \\ K_3 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot (0 - 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 8.75)\right)}{2} = 8.125$$

$$v_1 = 0 + \frac{1}{6}(10 + 4 \cdot 8.75 + 8.125) = 8.854 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad t_1 = 1 \text{ с}$$

$$K_1 = \frac{20 - 0.5 \cdot 8.854}{2} = 7.7865, \quad K_2 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot \left(8.854 + \frac{1}{2} \cdot 7.7865\right)\right)}{2} = 6.813, \\ K_3 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot (8.854 - 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 6.813)\right)}{2} = 6.88$$

$$v_2 = 8.854 + \frac{1}{6} (7.7865 + 4 \cdot 6.813 + 6.88) = 15.84 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad t_2 = 2 \text{ с}$$

Имеем:
$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(1) = 8.854 \\ v(2) = 15.84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_i^B = v_{i-1} + \frac{h}{12} (23f(t_{i-1}, v_{i-1}) - 16f(t_{i-2}, v_{i-2}) + 5f(t_{i-3}, v_{i-3})) \\ v_i = v_{i-1} + \frac{h}{12} (5f(t_i, v_i^B) + 8f(t_{i-1}, v_{i-1}) - f(t_{i-2}, v_{i-2})) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_3^B &= 15.84 + \frac{1}{12} \left(23 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 15.84}{2} \right) - 16 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 8.854}{2} \right) + 5 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 0}{2} \right) \right) \\ &= 21.20 \text{ м/с} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= 15.84 + \frac{1}{12} \left(5 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 21.20}{2} \right) + 8 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 15.84}{2} \right) - \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 8.854}{2} \right) \right) \\ &= 21.176 \text{ м/с} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_4^B &= 21.176 + \frac{1}{12} \left(23 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 21.176}{2} \right) - 16 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 15.84}{2} \right) + 5 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 8.854}{2} \right) \right) \\ &= 25.386 \text{ м/с} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_4 &= 21.176 + \frac{1}{12} \left(5 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 25.386}{2} \right) + 8 \cdot \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 21.176}{2} \right) - \left(\frac{20 - 0.5 \cdot 15.84}{2} \right) \right) \\ &= 25.33 \text{ м/с} \end{aligned}$$

Сравним полученное значение с аналитическим решением.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{20 - 0.5v}{2}$$

$$v(t) = -40e^{-0.25t} + 40$$

При $t = 4 \text{ с}$, $v(4) = -40e^{-0.25 \cdot 4} + 40 = 25.285 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Видно, что численное решение соответствует аналитическому с погрешностью 0.045.

5 Подготовка контрольных тестов

Для исследования метода будем проводить следующие тесты.

1. Тест с зависимостью погрешности от шага интегрирования.
2. Тест с зависимостью погрешности от устойчивости задачи. Будем вносить возмущение в начальные условия и числовой коэффициент дифференциального уравнения.

6 Модульная структура программы

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define Y0 1/(2*log(2))

//Точное решение
double DiffEqSol(double x, double a) {
}

//Дифференциальное уравнение
double DiffEq(double x, double y) {
}

//Создание сетки
void grid(double* X, double h, double a, double n)
{
}

//Погрешности, возвращает максимальную ошибку
double max_error(double* X, double* Y, double a, int n)
{
}

void Adams3RungeRule(double a, double b, double eps) {
}

int main() {
}
```

7 Численный анализ решения задачи.

7.1 Влияние шага интегрирования.

Исследуем поведение численного решения в зависимости от шага интегрирования и посмотрим, насколько оно соответствует аналитическому решению задачи.

Возьмем шаг $h = 1, h = 0.5, h = 0.1$

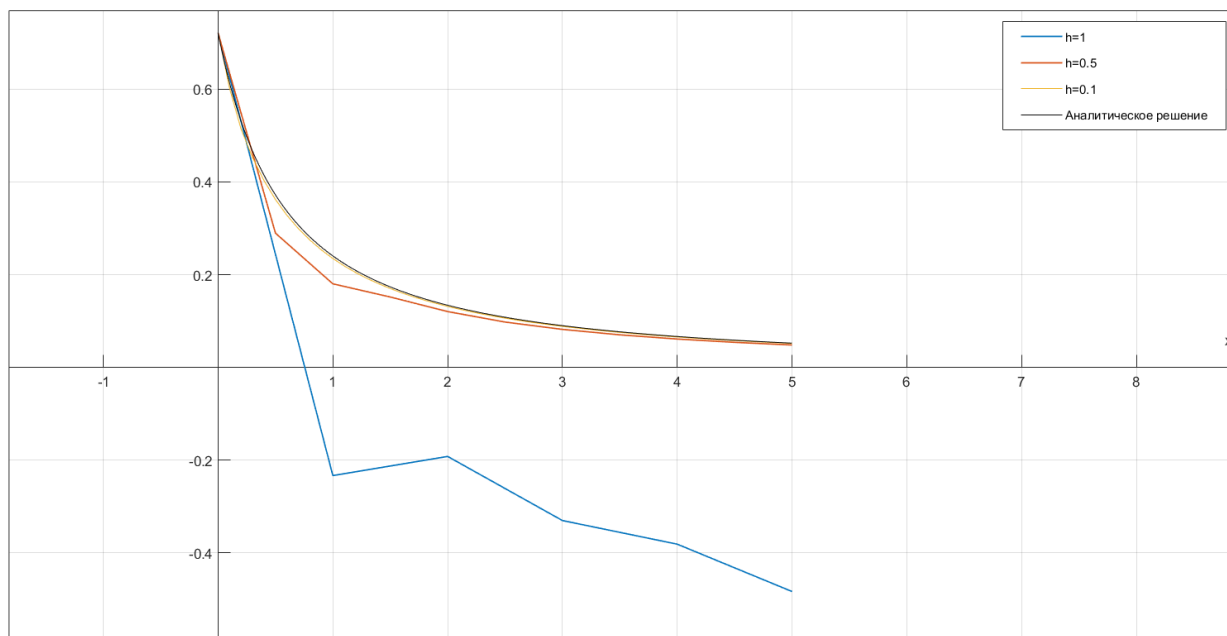


Рис 1. Аналитическое и численные решения задачи Коши.

Из рисунка видно, что чем меньше шаг - тем точнее численное решение сходится к аналитическому.

Построим зависимость максимальной ошибки от шага интегрирования.

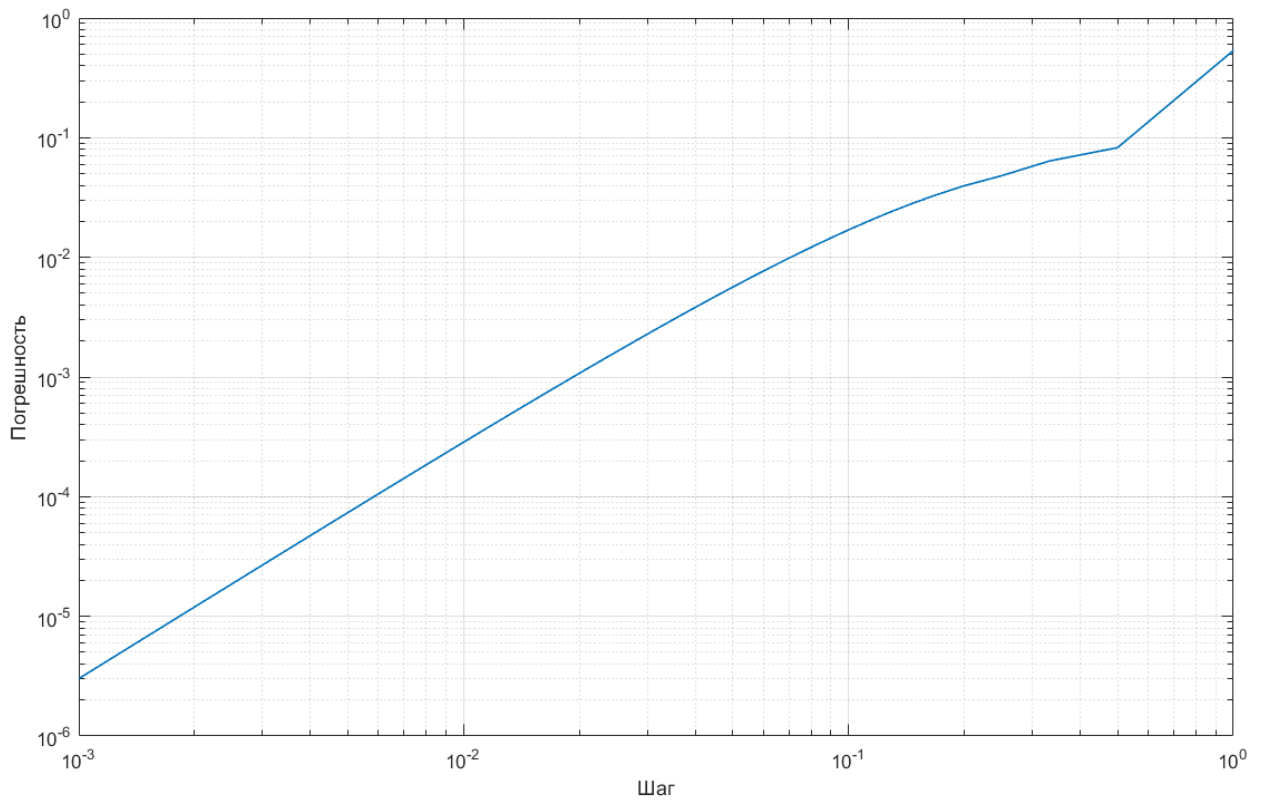


Рис 2. Зависимость погрешности от шага интегрирования.

Сравним данный результат с результатом такого же теста прошлого метода (Рунге-Кутты 3-го порядка).

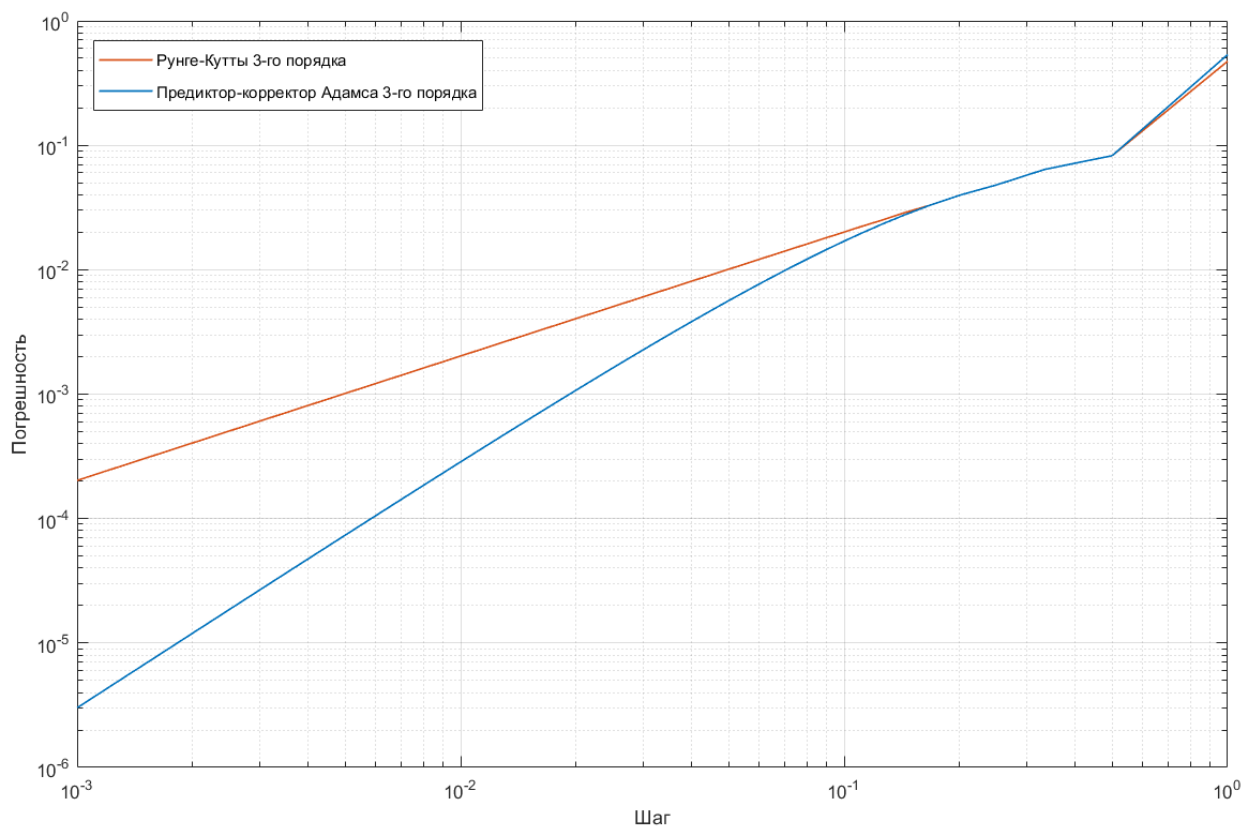


Рис 3. Зависимость погрешности от шага интегрирования (сравнение).

Сразу из графика видно, что предиктор-корректор более точный, чем явный метод Рунге-Кутты такого же порядка. Сравним теперь численно. Норма вектора ошибок для предиктор-корректора Адамса - **1.1074**, для Рунге-Кутты - **1.7583**.

7.2 Устойчивость задачи.

Внесем возмущение 1%, 2%, 3% в начальное условие $y(1) = \frac{1}{2\ln(2)}$ и решим дифференциальное уравнение, зафиксировав $h = 0.1$.

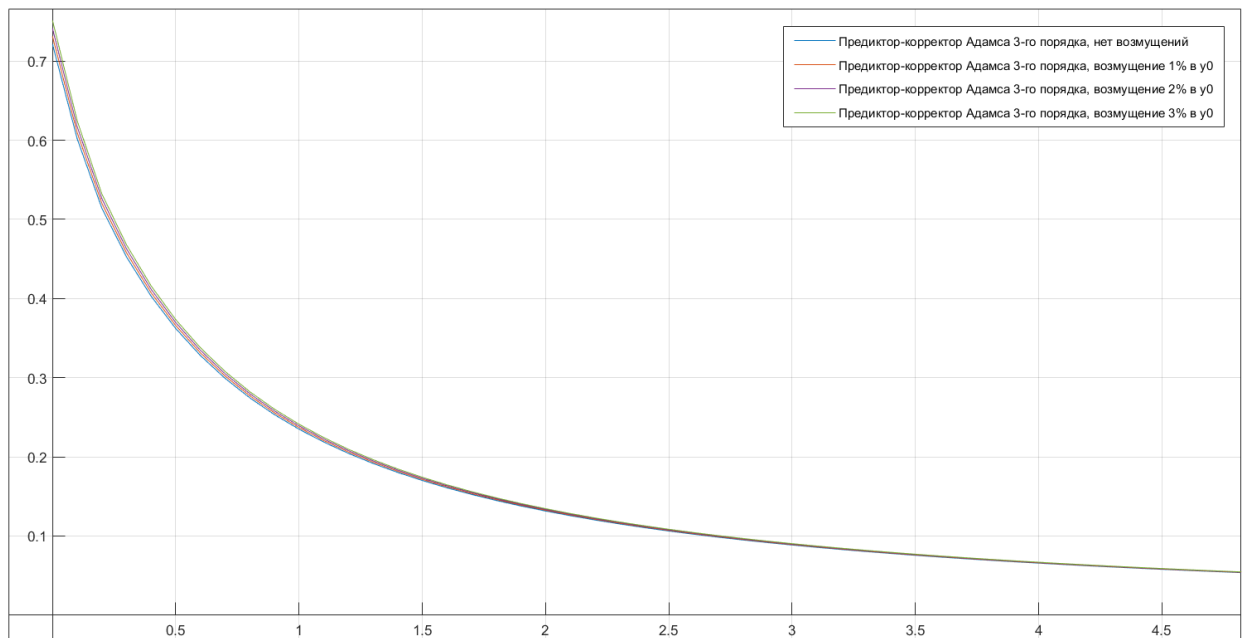


Рис 4.1. Интегральные кривые при возмущении в начальном условии.

Максимальное отклонение: 0.0300.

Сравним с методом Рунге-Кутты 3-го порядка из лабораторной работы 5. При данных возмущениях максимальное отклонение там составило 0.0166.

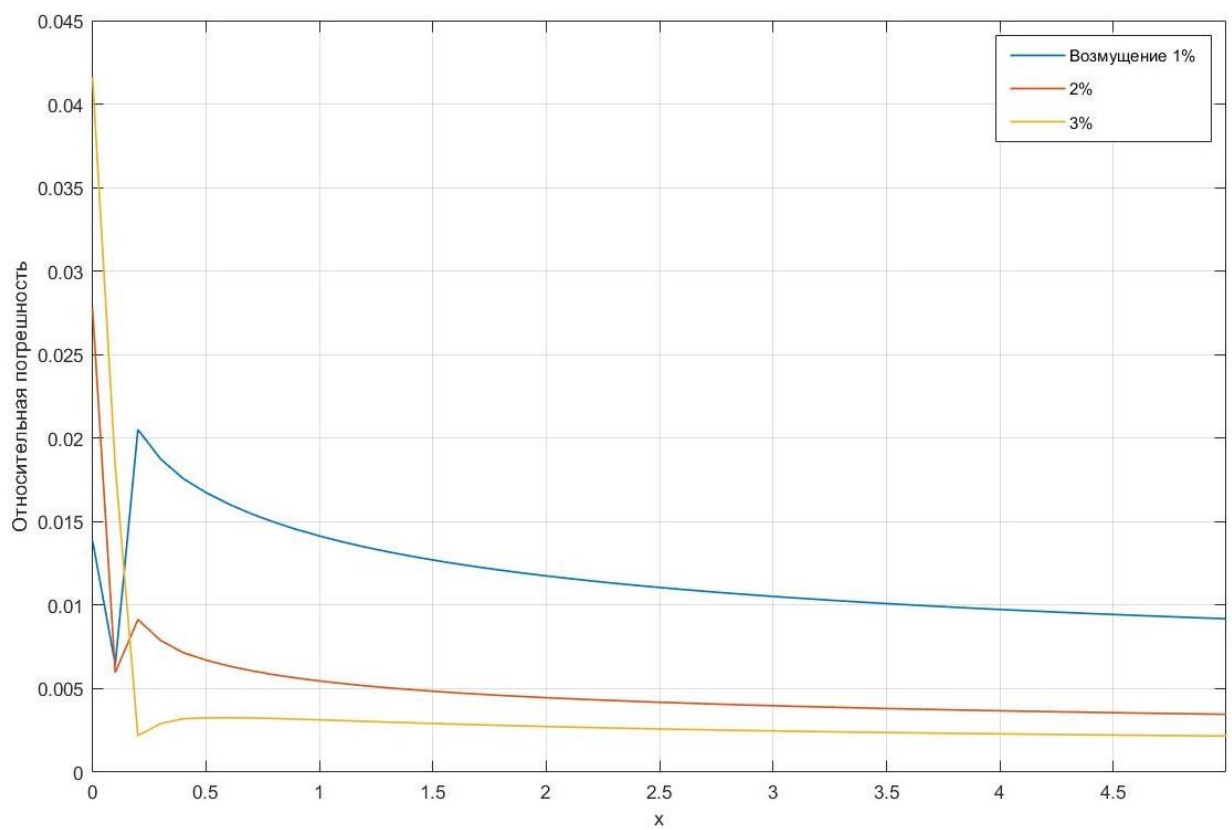


Рис 4.2. Зависимость относительной погрешности от x .

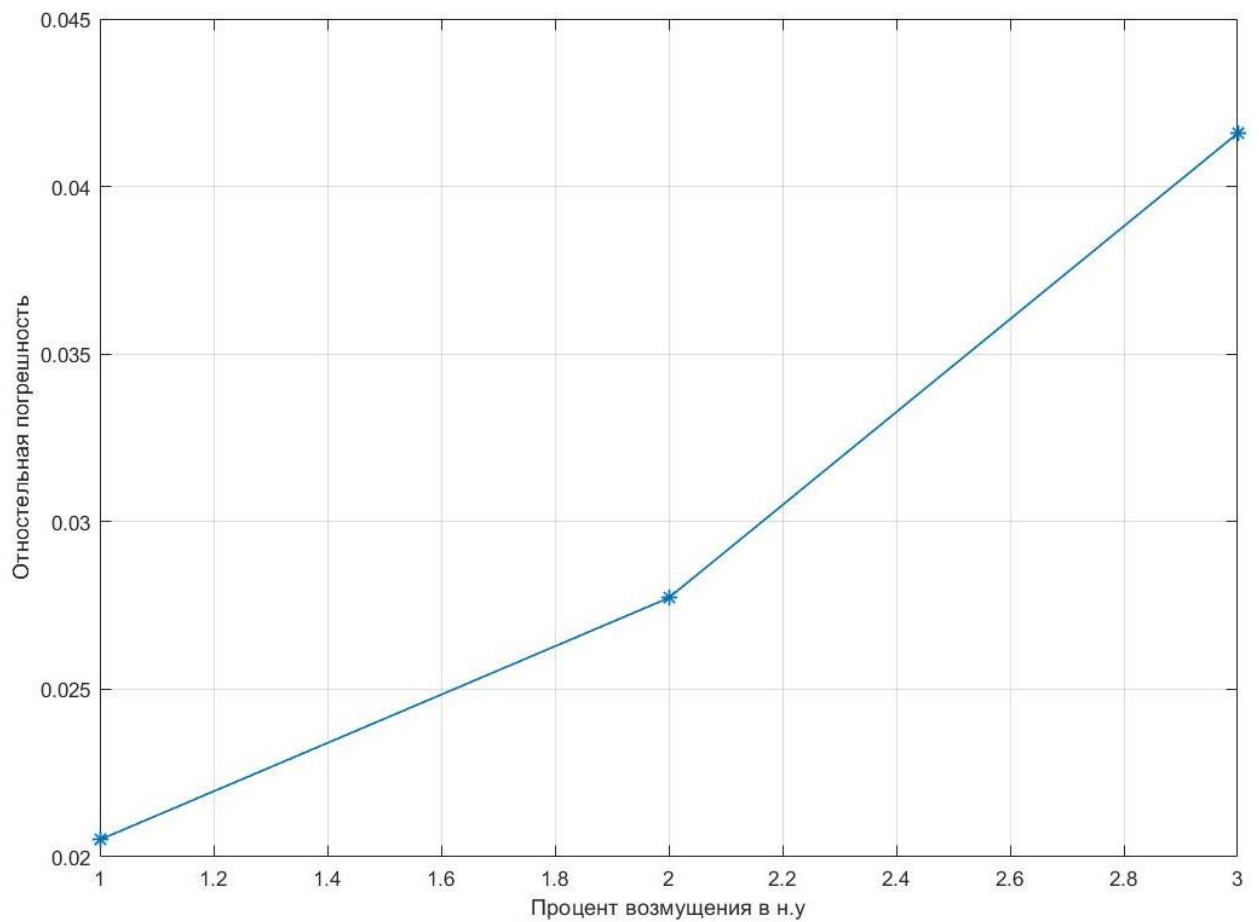


Рис 4.3. Зависимость максимальной погрешности от % возмущения.

Теперь внесем возмущение 1%, 2%, 3% в числовой коэффициент в дифференциальном уравнении

$$y' = -\frac{y}{x + (1 + \Delta)} - y^2$$

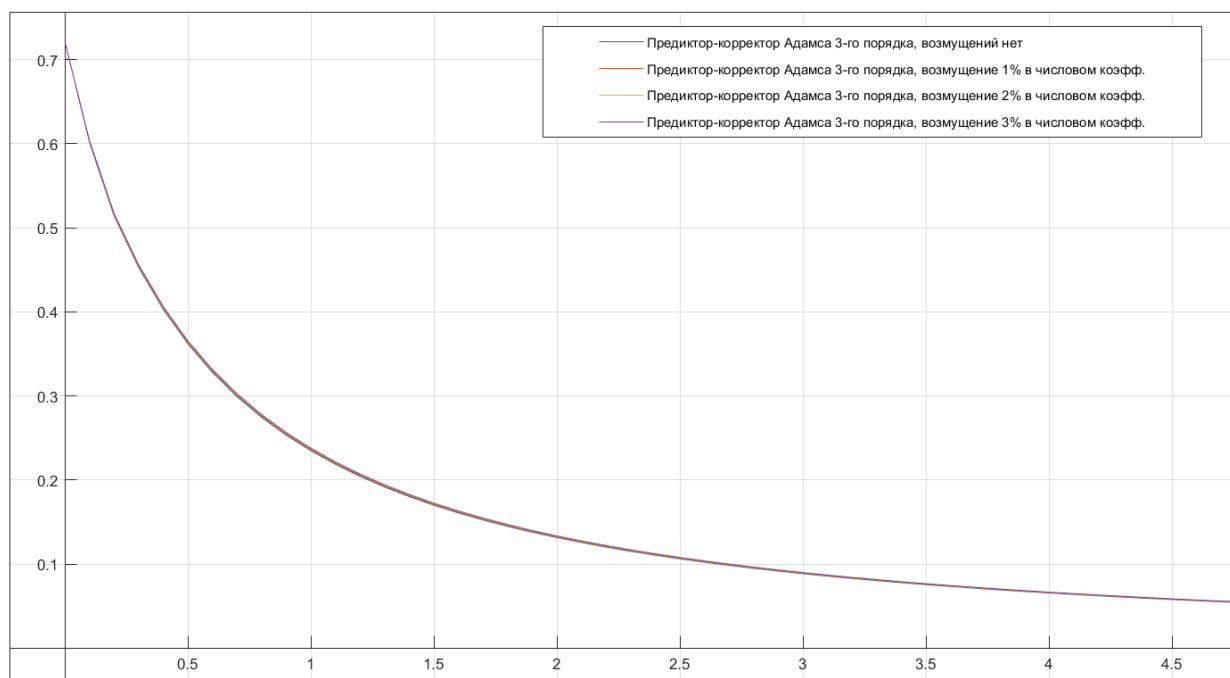


Рис 5.1. Интегральные кривые при возмущении в числовом коэффициенте.

Максимальное отклонение: 0.0012. В прошлом методе Рунге-Кутты 3-го порядка максимальное отклонение составило такую же величину - 0.0012.

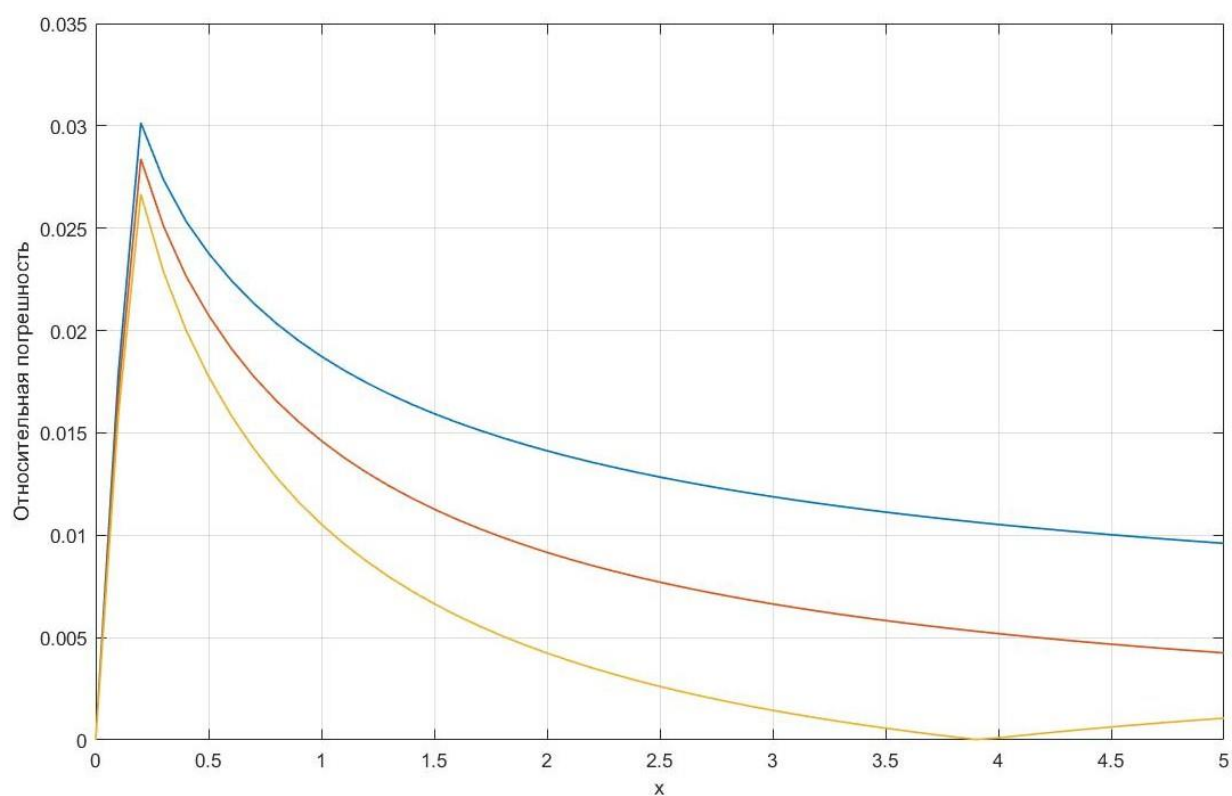


Рис 5.2. Зависимость относительной погрешности от x .

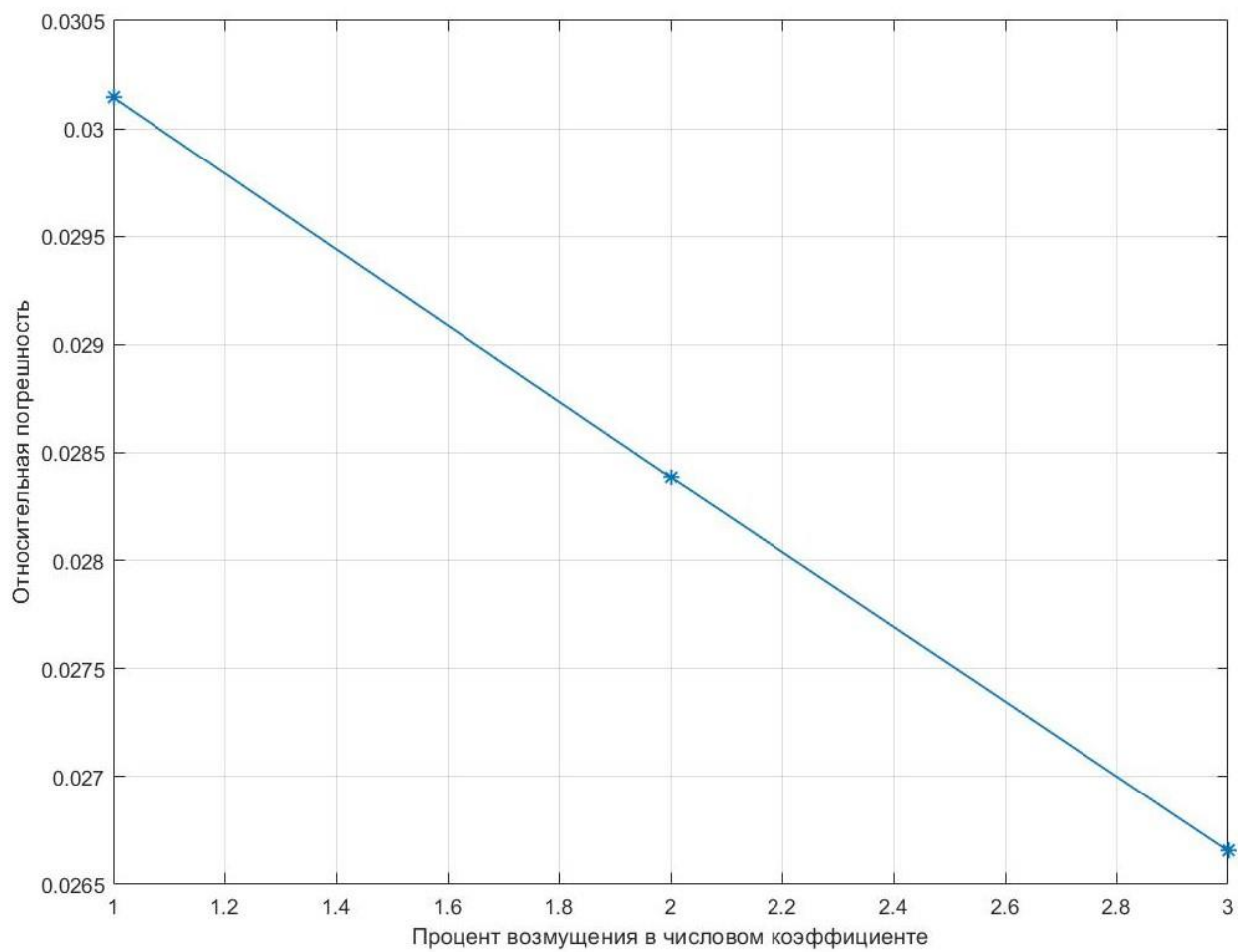


Рис 5.3. Зависимость максимальной погрешности от процента возмущения.

При возмущениях погрешность убывает с ростом возмущения. Введем еще больше возмущений, например, в числовой коэффициент (3-25%) и построим зависимость.

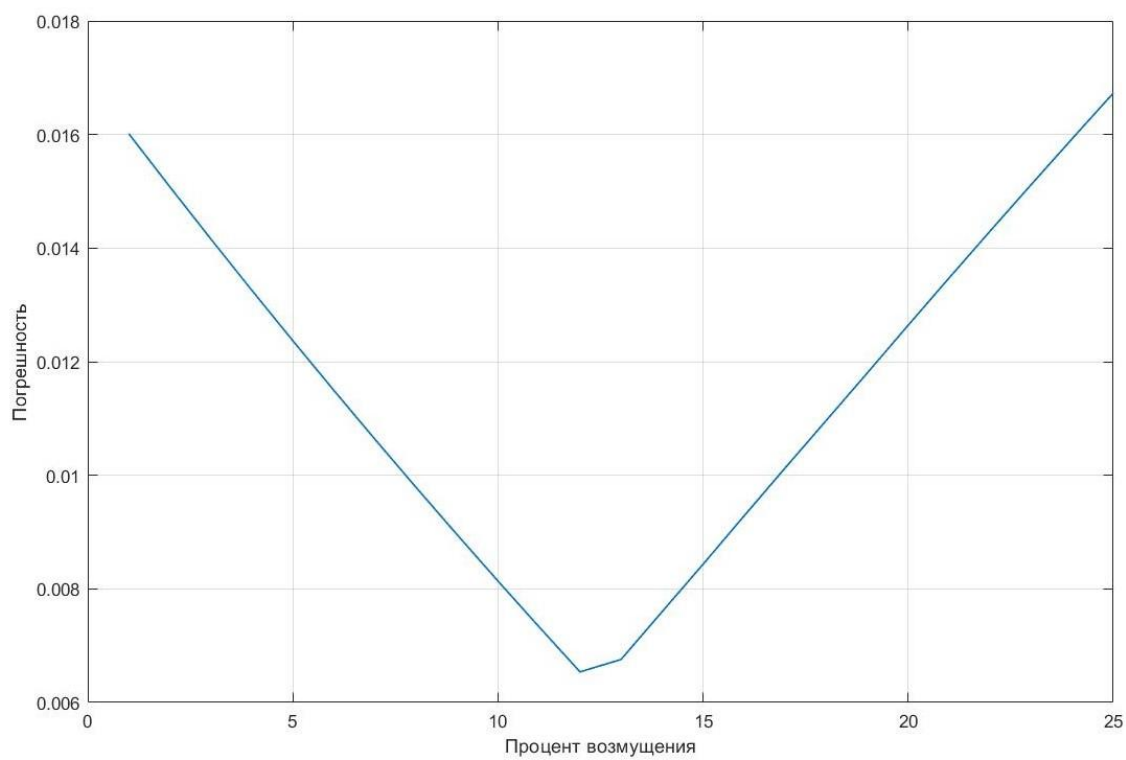


Рис 5.4. Зависимость максимальной погрешности от больших возмущений.

7.3 Зависимость погрешности от заданной точности.

С помощью правила Рунге для достижения заданной точности, построим зависимость. Будем вычислять **фактическую погрешность** как отклонение численного решения от аналитического, а **теоретическую** как погрешность метода:

$$\frac{1}{10} |y_{i+1}^M - y_{i+1}^B|$$

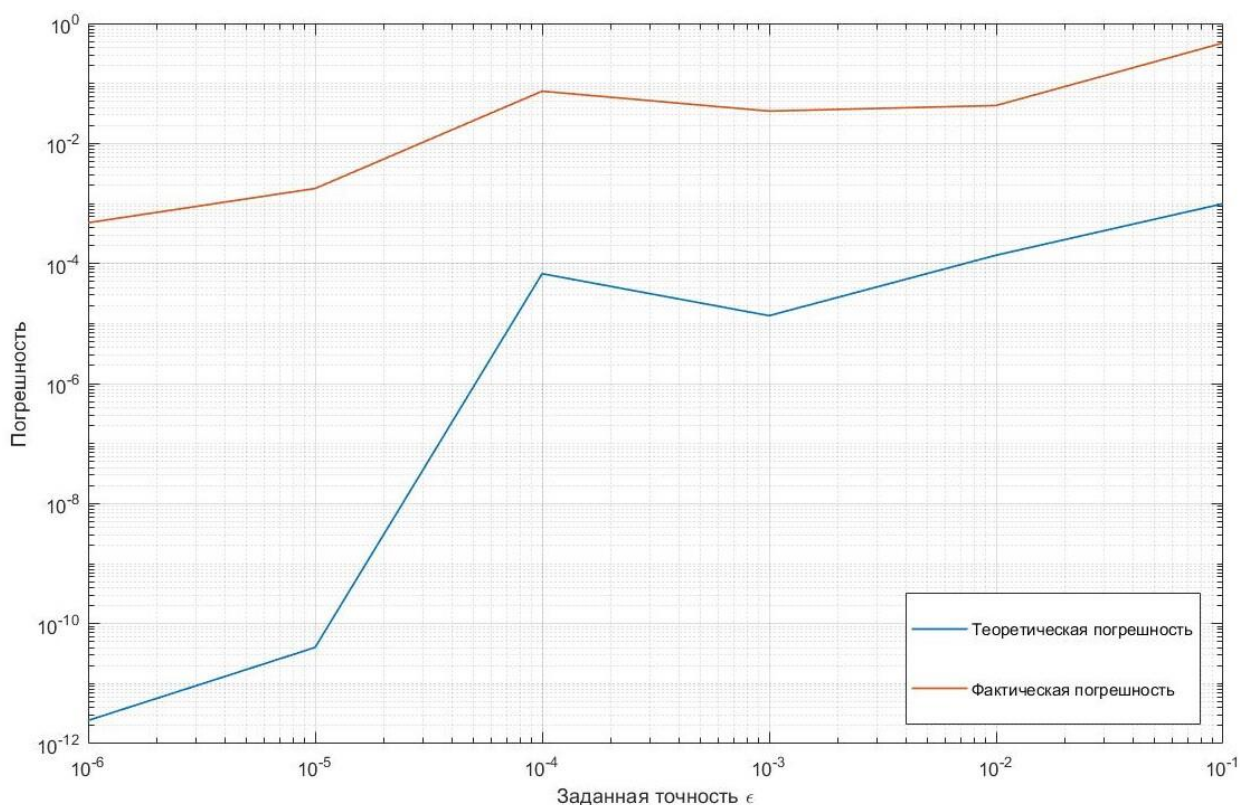


Рис 5.5. Зависимость заданной точности от фактической и теоретической.

Краткие выводы.

Можно сделать вывод, что чем меньше шаг интегрирования - тем меньший вклад в погрешность дают члены более высокого порядка по сравнению с главным членом. При слишком грубых шагах есть вероятность получить прирост погрешности, вследствие чего можно наблюдать не совсем ожидаемый порядок точности.

Была получена зависимость погрешности от шага интегрирования. Полученная зависимость была сравнена с такой же зависимостью из предыдущей работы - метод Рунге-Кутты 3-го порядка. Сравнение показало, что метод предиктор-корректор более точный, чем метод Рунге-Кутты. (Рис 3.)