Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт Прикладной Математики и Механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 3
Тема «Численное интегрирование с помощью формул Ньютона-Котеса»
Дисциплина «Численные методы»

Выполнил студент гр. 3630102/90003 А.А. Чеботин
Преподаватель: К.Н. Козлов

Санкт-Петербург, 2021 г.

1 Формулировка задачи и ее формализация.

Дана функция $f(x) = x^4 - 3.2x^3 + 2.5x^2 - 7x - 1.5$ (Вариант 10) одной переменной. Требуется вычислить определенный интеграл на промежутке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

с помощью метода средних прямоугольников.

2 Алгоритм и условия применимости метода.

Формула средних прямоугольников имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

Поскольку отрезок $[a, b]$ разбивается на элементарные отрезки, то нужно выбрать точки ξ_i посередине между соседними узлами:

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_i - \frac{h}{2}$$

Квадратурная формула в случае равномерной сетки будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$$

Условие применимости: $f(x) \in C^2([a, b])$.

3 Предварительный анализ задачи.

Учтем ограничение: узлы квадратурной формулы должны быть равноотстоящими, то есть в программе будет создаваться равномерная сетка:

$$x_i = a + h(i-1), \qquad h = \frac{b-a}{n-1}, \qquad i = 0, \dots, n-1$$

Математическая модель:

$$I = \int (x^4 - 3.2x^3 + 2.5x^2 - 7x - 1.5)dx \ = 0.2x^5 - 0.8x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 3.5x^2 - 1.5x$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла по промежутку $[a, b]$, будем получать точное значение интеграла и сравнивать его с вычисленными по формулам средних прямоугольников.

Оценка погрешности (теоретическая) для метода средних прямоугольников:

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)h^2$$

Для нашей функции теоретическая погрешность должна вычисляться как

$$R(f) = \frac{(12\xi^2 - 19.2\xi + 5)}{24}(b-a)h^2$$

Фактическую будем вычислять как отклонение от точного значения интеграла и далее сравним теоретическую и фактическую погрешности.

Для получения зависимости точности от количества вычислений будем пользоваться правилом Рунге:

$$\triangle_{2\mathrm{n}} \approx |\mathrm{I}_{2\mathrm{n}} - I_n] \cdot \left(\frac{1}{2^k - 1}\right)$$

Для метода средних прямоугольников $k = 2$. Таким образом, задавая точность ε, и фиксируя $N = N_0$, будем менять $N_1 = 2N_0$, $N_2 = 4N_0, \dots$, увеличивая количество элементарных отрезков, пока не будет достигнута заданная точность:

$$\frac{|\mathrm{I}_{2\mathrm{n}} - I_n]}{3} < \varepsilon$$

4 Тестовый пример с детальными расчетами.

Вычислим определенный интеграл от нашей функции методом средних прямоугольников, применяя правило Рунге на промежутке [0; 3]:

$$f(x) = x^4 - 3.2x^3 + 2.5x^2 - 7x - 1.5$$

Зафиксируем число $N_0 = 3$. Разобьем отрезок на элементарные:

$$x_i = a + hi, \qquad h = \frac{b-a}{n-1} = \frac{3}{2},$$

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{3}{2}, \qquad x_2 = 3$$

Применим квадратурную формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$$

$$\int_0^3 (x^4 - 3.2x^3 + 2.5x^2 - 7x - 1.5)dx = \frac{3}{2}(6.822 - 6.377 - 15.414) = -22.4535$$

Для $N_1 = 2N_0 = 6$:

$$h = \frac{3}{5}$$

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{3}{5}, \qquad x_2 = \frac{6}{5}, \qquad x_3 = \frac{9}{5}, \qquad x_4 = \frac{12}{5}, \qquad x_5 = 3$$

$$\int_0^3 (x^4 - 3.2x^3 + 2.5x^2 - 7x - 1.5)dx$$
$$= \frac{3}{5}(0.9195 - 3.453 - 7.45 - 12.11 - 15.36 - 12.01) = -29.6781$$

Используем правило Рунге, чтобы оценить погрешность:

$$\frac{|\mathrm{I}_{2\mathrm{n}} - I_n]}{3} = -\frac{7.2246}{3} = -2.4082$$

Таким образом, продолжая дальше увеличивать N, интеграл будет сходиться к своему точному значению.

5 Подготовка контрольных тестов

Для исследования численного интегрирования будем проводить следующие тесты.

1. Тест с зависимостью погрешности от измельчения шага.
2. Сравнение теоретической и фактической погрешностей.
3. Влияние заданной точности на количество вычислений.

6 Модульная структура программы

```
//Функция
double f(double x)
{
}

//Первообразная
double F(double x)
{
}

//Формула Ньютона - Лейбница
double NewtonLeibniz(double a, double b)
{
}

//Вторая производная от функции f
double d2f(double x)
{
}

//Максимум второй производной, которая вычисляется методом
//Золотого сечения для оценки погрешности.
double d2f_max(double a, double b)
{
}

//Формула теоретической погрешности
double methodTheoreticalError(double h, double a, double b)
{
}

//Метод средних прямоугольников по правилу Рунге. На выходе – значение
//Определенного интеграла, а так же ошибки и количество итераций
void MiddleRectangularMethod(double a, double b, double eps)
{
}

int main()
{
}
```

7 Численный анализ решения задачи.

Промежуток исследования: $[0; 10]$.

Таблица 1. Зависимость погрешности от измельчения шага.

Шаг	Фактическая погрешность	Теоретическая погрешность
10^{-4}	0.000151252563228	0.000004220829333
10^{-3}	0.001625249391509	0.000422082933282
10^{-2}	0.027524368077138	0.042208293328160
10^{-1}	1.401805208332007	4.220829332815953
10^{0}	125.370833333334303	422.082933281595217

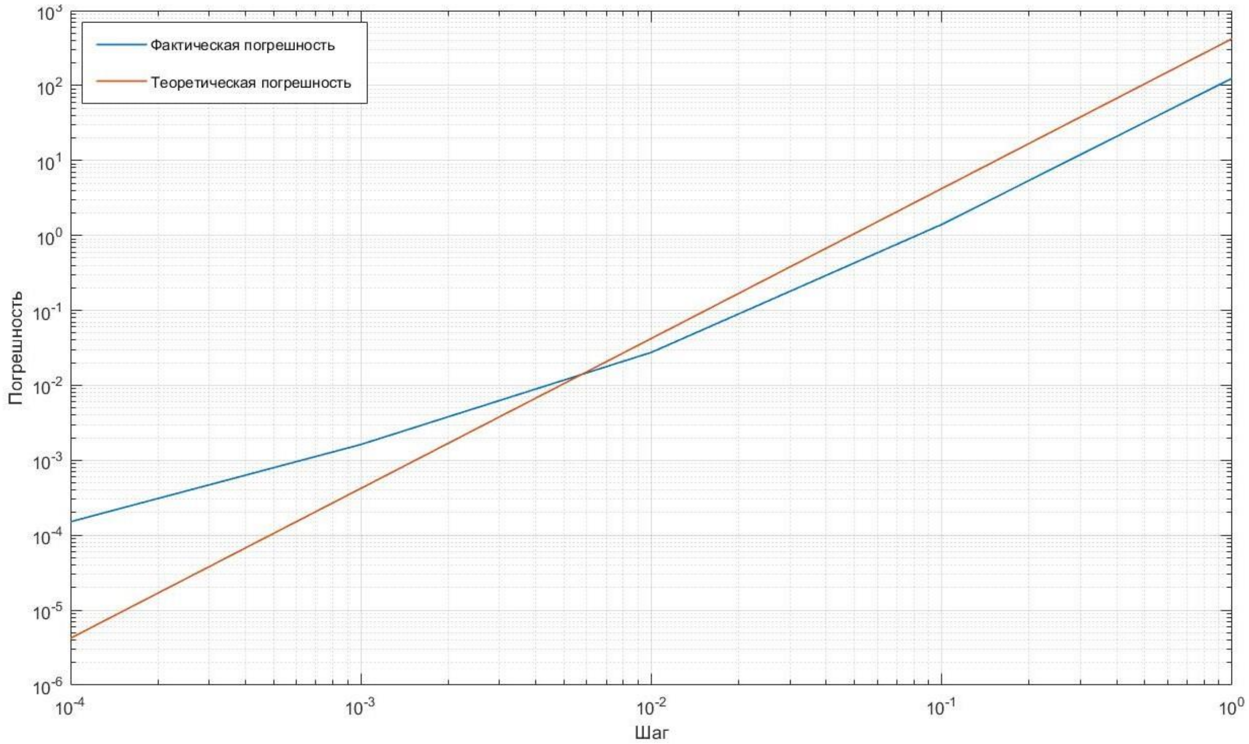

Рис. 1. Зависимость погрешности от измельчения шага.

Видно, что теоретическая и фактическая погрешности имеют в основном один порядок точности, а значит метод работает верно. Теоретическая оценка верна.

Таблица 2. Зависимость точности от количества вычислений.

Заданная точность	Количество вычислений
10^{-1}	640
10^{-2}	1 280
10^{-3}	5 120
10^{-4}	20 480
10^{-5}	40 960
10^{-6}	163 840

10^{-7}	655 360
10^{-8}	1 310 720
10^{-9}	5 242 880
10^{-10}	10 485 760
10^{-11}	335 544 320

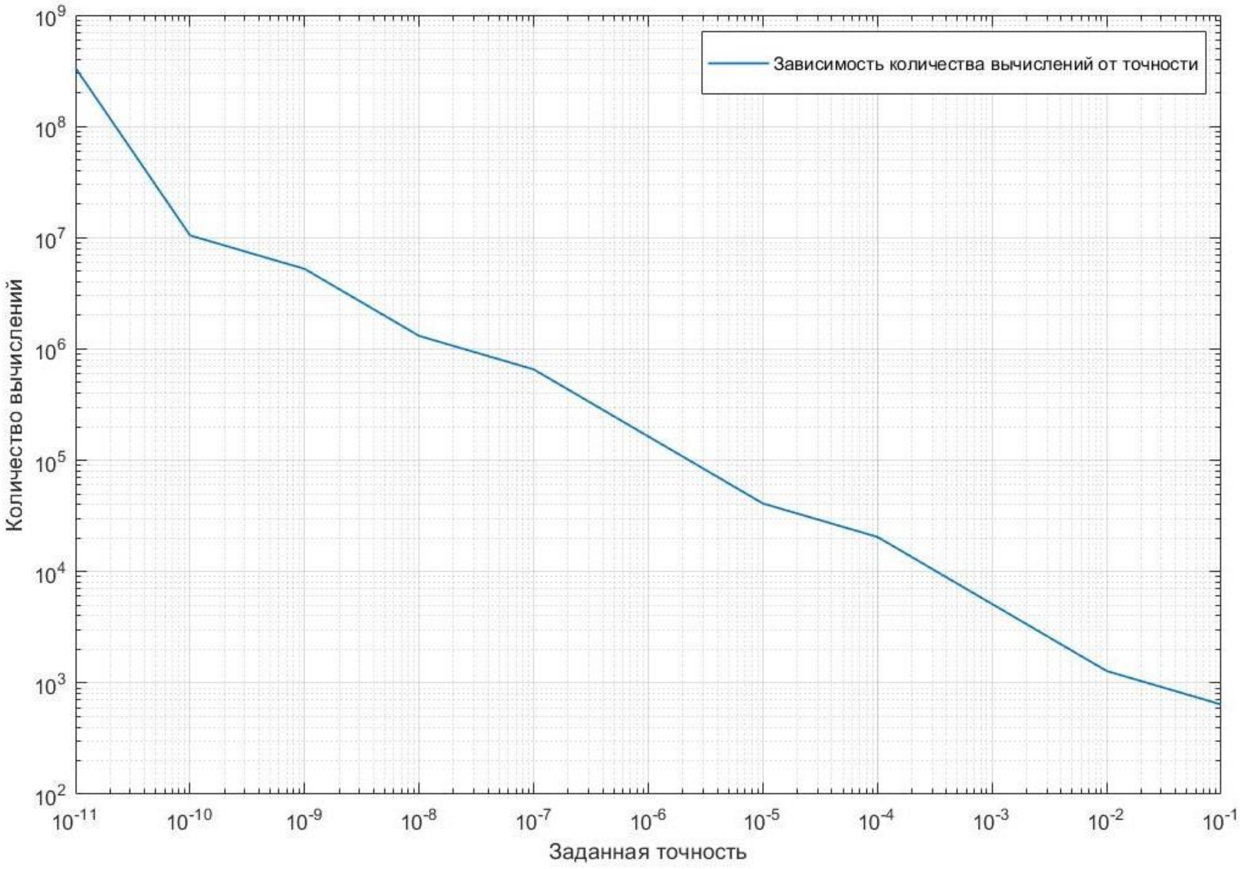

Рис 2. Зависимость количества вычислений от заданной точности

Получаем, что при стремлении точности к нулю, количества итераций стремится к бесконечности. Таким образом, чем больше количество элементарных отрезков, на которые разбит основной промежуток, тем выше будет точность вычисленного интеграла.

Краткие выводы.

С помощью данного метода можно точно вычислить определенный интеграл. Метод средних прямоугольников достаточно прост в реализации, количество итераций может сильно возрастать при высокой точности.