ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого»

Интитут Прикладной Математики и Механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №7

Решение краевой задачи для ОДУ 2-го порядка

Вариант 10

Студент:

Чеботин А.А.
группа: 3630102/90003

Преподаватель:

Козлов К.Н

Санкт-Петербург, 2021 г.

Содержание

Лабораторная работа 7

7.1. Формулировка задачи и ее формализация.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$(x^3 + 6x)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 7xy = x^4, \quad y(a) = 0, y(b) = 1$$

Отрезок исследования: $[0; 1]$. Требуется решить данную задачу методом стрельбы, пребразовав исходную задачу к задаче Коши, чтобы найти ее решение методом Адамса 2-го порядка.

7.2. Алгоритм метода и условия применимости

Метод пристрелки (или метод стрельбы) позволяет свести решение краевой задачи к многократному решению задачи Коши. Решение задачи будет зависеть от пристрелочного параметра (или "угла стрельбы") γ_k.
Условия применимости: переменные коэффициенты $p(x) = x^3 + 6x, \ q(x) = -4(x^2 + 3), \ r(x) = 7x, \ f(x) = x^4$ являются непрерывными на отрезке $[0; 1]$.

Алгоритм метода: У нас имеется исходная задача $y''(x) = f(x, y, y'), \ y(a) = y_a, x \in [a, b]$.

1. Выбирается любое начальное значение в качестве первой производной $y'(a) = \gamma_1$;
2. Решаем задачу Коши методом Адамса: $y''(x) = f(x, y, y'), \ y'(a) = \gamma_1, \ y(a) = y_a$;
3. Получаем решение в массив $y_1(x)$;
4. Задаем другое значение в качестве первой производной в точке a: $y'(a) = \gamma_2, \ \ (\gamma_1 \neq \gamma_2)$;
5. Решаем задачу Коши методом Адамса: $y''(x) = f(x, y, y'), \ y'(a) = \gamma_2, \ y(a) = y_a$;
6. Получаем решение в массив $y_2(x)$;
7. Методом секущих находим пристрелочный параметр γ_k;
8. Получаем нужное нам решение, решая задачу Коши $y''(x) = f(x, y, y'), \ y'(a) = \gamma_k, \ y(a) = y_a$;

Следующая формула определяет метод Адамса 2-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

Поскольку метод Адамса - многошаговый, то нужно вычислить еще 1 начальное значение, например, методом Рунге-Кутты 2-го порядка:

$$K_1 = hf(x_i, y_i, y_i')$$

$$q_1 = hy_i'$$

$$K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{q_1}{2}, y_i' + \frac{K_1}{2})$$

$$q_2 = h(y_i' + \frac{K_1}{2})$$

$$y_{i+1}' = y_i' + K_2$$

$$y_{i+1} = y_i + q_2$$

Алгоритм метода секущих:
В ходе выбора γ_1 и γ_2 мы получаем 2 решения задачи Коши с начальными условиями $y(a) = y_a,\ y'(a) = \gamma_1$ и $y(a) = y_a,\ y'(a) = \gamma_2$. Обозначая полученные решения как $y_1(x)$ и $y_2(x)$, мы можем применить формулу метода секущих для выбора γ_3:

$$\gamma_3 = \gamma_2 - (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot \frac{y_{2,n} - y(b)}{y_{2,n} - y_{1,n}},$$

где n - число разбиений отрезка $[a, b]$, $y(b)$ - известное точное решение в точке правого конца промежутка.

Замечание. В программе на C производная $y'(x)$ заменена на новую переменную $z(x)$.

7.3. Предварительный анализ задачи

Разрешим исходное ОДУ 2-го порядка относительно старшей производной:

$$(x^3 + 6x)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 7xy = x^4, \quad y(a) = 0, y(b) = 1$$

$$(x^3 + 6x)y'' = 4(x^2 + 3)y' - 7xy + x^4$$

$$y'' = \frac{4(x^2 + 3)y' - 7xy + x^4}{x^3 + 6x}$$

Сделаем замену $z(x) = y'(x)$:

$$y''(x,y,z) = \frac{4(x^2+3)z - 7xy + x^4}{x^3+6x}$$

Разрешили относительно старшей производной.
Для исследования задачи на устойчивость, будем вносить в числовой коэффициент и граничные условия возмущение δ:

$$y''(x,y,z) = \frac{4(x^2+(3+\delta))z - 7xy + x^4}{x^3+6x}, \;\; y(a) = 0+\delta, \; y(b) = 1+\delta$$

Для нахождения фактической погрешности, будем вычислять отклонение полученного решения методом стрельбы от точного решения исходной задачи:

$$y(x) = x^3$$

Для получения решения с заданной точностью ϵ, можно воспользоваться оценкой по правилу Рунге:

$$\frac{|y_{i,h} - y_{i,\frac{h}{2}}|}{2^p - 1},$$

где в числителе вычисляется разность полученных решений с шагом h и $\frac{h}{2}$ в одинаковых точках x. Формула будет давать теоретическую погрешность решения. В нашем случае порядок точности метода $p = 2$.

7.4. Тестовый пример с детальными расчетами

Дано:

$$y''(x,y,z) = \frac{4(x^2+3)y' - 7xy + x^4}{x^3+6x}, \; x \in [0.1, 1]$$

$$y(a) = 0, \; y(b) = 1$$

Решим методом стрельбы. Построим следующую сетку:

$$h = \frac{1-0.1}{2} = 0.45, \; x_0 = 0.1, \; x_1 = 0.55, \; x_2 = 1$$

Согласно описанному алгоритму, возьмем любое начальное значение для $y'(0) = \gamma_1$. Пусть $\gamma_1 = 1$. Собственно, решаем задачу Коши с начальными условиями $y'(0) = \gamma_1 = 1, \; y(0) = 0$. Для начала, перед тем как применять метод Адамса, вычислим методом Рунге-Кутты недостающее начальное значение:

$$K_1 = h \cdot \frac{4(x_i^2+3)y_i' - 7x_iy_i + x_i^4}{x_i^3+6x_i}$$

$$q_1 = h \cdot y_i'$$

$$K_2 = h \cdot \frac{4\left(\left(x_i+\frac{h}{2}\right)^2+3\right)\left(y_i'+\frac{K_1}{2}\right)-7\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\left(y_i+\frac{q_1}{2}\right)+\left(x_i+\frac{h}{2}\right)^4}{\left(x_i+\frac{h}{2}\right)^3+6\left(x_i+\frac{h}{2}\right)}$$

$$q_2 = h \cdot \left(y_i' + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$y_{i+1}' = y_i' + K_2$$

$$y_{i+1} = y_i + q_2$$

Начнем вычисления:

$$K_1 = 0.45 \cdot \frac{4(0.1^2+3)\cdot 1 - 7\cdot 0.1\cdot 0 + 0.1^4}{0.1^3+6\cdot 0.1} = 9.015$$

$$q_1 = 0.45 \cdot 1 = 0.45$$

$$K_2 = 0.45 \cdot \frac{4\left(\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^2+3\right)\left(1+\frac{9.015}{2}\right)-7\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)\left(0+\frac{0.45}{2}\right)+\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^4}{\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^3+6\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)} =$$

$$= 15.401$$

$$q_2 = 0.45 \cdot \left(1 + \frac{9.015}{2}\right) = 2.478$$

$$y_1' = 1 + 15.401 = 16.401$$

$$y_1 = 0 + 2.478 = 2.478$$

Теперь у нас есть $y_0 = 0$ и $y_1 = 2.478$. Используя это в качестве начальных значений, применим метод Адамса:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{4(x_1^2+3)y_1' - 7x_1y_1 + x_1^4}{x_1^3+6x_1} - \frac{4(x_0^2+3)y_0' - 7x_0y_0 + x_0^4}{x_0^3+6x_0}\right) =$$

$$= 2.478 + \frac{0.45}{2} \cdot (3 \cdot \frac{4(0.55^2+3)\cdot 16.401 - 7\cdot 0.55\cdot 2.478 + 0.55^4}{0.55^3+6\cdot 0.55} -$$

$$- \frac{4(0.1^2+3)\cdot 1 - 7\cdot 0.1\cdot 0 + 0.1^4}{0.1^3+6\cdot 0.1}) = 38.319$$

Согласно алгоритму метода, выберем следующее γ_2. Пусть $\gamma_2 = 1$. Теперь решаем задачу Коши с начальными условиями $y'(0) = \gamma_2 = 0,\ y(0) = 0$. Делаем то же самое:

$$K_1 = 0.45 \cdot \frac{4(0.1^2+3)\cdot 0 - 7\cdot 0.1\cdot 0 + 0.1^4}{0.1^3 + 6\cdot 0.1} = 0.0000748$$

$$q_1 = 0.45 \cdot 0 = 0$$

$$K_2 = 0.45 \cdot \frac{4\left(\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^2+3\right)\left(0+\frac{0.0000748}{2}\right) - 7\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)\left(0+\frac{0}{2}\right) + \left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^4}{\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^3 + 6\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)} =$$

$$= 0.00263$$

$$q_2 = 0.45 \cdot \left(0 + \frac{0.0000748}{2}\right) = 0.00001683$$

$$y_1' = 0 + 0.00001683 = 0.00001683$$

$$y_1 = 0 + 0.00263 = 0.00263$$

Применяем формулу метода Адамса 2-го порядка, используя $y_0 = 0$, $y_1 = 0.00263$ в качестве стартовых значений:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\cdot\left(3\cdot\frac{4(x_1^2+3)y_1' - 7x_1y_1 + x_1^4}{x_1^3+6x_1} - \frac{4(x_0^2+3)y_0' - 7x_0y_0 + x_0^4}{x_0^3+6x_0}\right) =$$

$$= 0.00263 + \frac{0.45}{2}\cdot(3\cdot\frac{4(0.55^2+3)\cdot 0.00001683 - 7\cdot 0.55\cdot 0.00263 + 0.55^4}{0.55^3 + 6\cdot 0.55} -$$

$$\frac{4(0.1^2+3)\cdot 0 - 7\cdot 0.1\cdot 0 + 0.1^4}{0.1^3+6\cdot 0.1}) = 0.0184$$

И так, мы получили следующие два решения задачи Коши:

$$\gamma_1 = 1,\ y_0 = 0,\ y_1 = 2.478,\ y_2 = 38.319$$

$$\gamma_2 = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 = 0.00263,\ y_2 = 0.0184$$

Решим уравнение методом секущих, найдя γ_3:

$$\gamma_3 = \gamma_2 - (\gamma_2 - \gamma_1)\cdot\frac{y_{2,n} - y(b)}{y_{2,n} - y_{1,n}},$$

$$\gamma_3 = 0 - (0-1) \cdot \frac{0.0184 - 1}{0.0184 - 38.319} = 0.0256$$

Снова решаем задачу Коши с начальным условием $y'(0) = \gamma_3 = 0.0256,\ y(0) = 0$

$$K_1 = 0.45 \cdot \frac{4(0.1^2+3)\cdot 0.0256 - 7\cdot 0.1 \cdot 0 + 0.1^4}{0.1^3 + 6\cdot 0.1} = 0.230$$

$$q_1 = 0.45 \cdot 0.0256 = 0.01152$$

$$K_2 =$$

$$= 0.45 \cdot \frac{4\left(\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^2+3\right)\left(0.0256+\frac{0.230}{2}\right) - 7\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)\left(0+\frac{0.01152}{2}\right) + \left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)}{\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)^3 + 6\left(0.1+\frac{0.45}{2}\right)}$$

$$= 0.396$$

$$q_2 = 0.45 \cdot \left(0.0256 + \frac{0.230}{2}\right) = 0.06327$$

$$y_1' = 0.0256 + 0.396 = 0.4216$$

$$y_1 = 0 + 0.06327 = 0.06327$$

Применяем формулу метода Адамса 2-го порядка, в качестве стартовых значений берем $y_0 = 0,\ y_1 = 0.06327$:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0)$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{4(x_1^2+3)y_1' - 7x_1y_1 + x_1^4}{x_1^3+6x_1} - \frac{4(x_0^2+3)y_0' - 7x_0y_0 + x_0^4}{x_0^3+6x_0}\right) =$$

$$= 0.06327 + \frac{0.45}{2} \cdot (3 \cdot \frac{4(0.55^2+3)\cdot 0.4216 - 7\cdot 0.55\cdot 0.06327 + 0.55^4}{0.55^3 + 6\cdot 0.55} -$$

$$- \frac{4(0.1^2+3)\cdot 0.0256 - 7\cdot 0.1\cdot 0 + 0.1^4}{0.1^3+6\cdot 0.1}) = 1.0027$$

Решение краевой задачи: $y_0 = 0,\ y_1 = 0.06327,\ y_2 = 1.0027$ было получено с погрешностью. Это связано с тем, что для тестового примера был выбран слишком грубый шаг h.

7.5. Подготовка контрольных тестов

Для исследования метода будем проводить следующие тесты:

1. Исследуем зависимость погрешности от шага интегрирования h;
2. Исследуем устойчивость задачи. Получим график относительного отклонения решения для разных процентов возмущения и максимального относительного отклонения от процента возмущения;
3. Исследуем зависимость фактической погрешности от заданной точности ϵ.

7.6. Модульная структура программы

Листинг 7.1: Структура программы

```


double DiffEqSol(double x) {
  Точное// решение
}


double DiffEq(double x, double y, double z) { // z это y'
  Дифференциальное// уравнение

}

void grid(double* X, double h, double a, double n)
{
    Создание// сетки
}

void Adams2(double d_y, double* X, double h, int n, double yo, double*
    Y) {
    Метод// Адамса го2- порядка
}

void secantMethod(double dY1, double dY2, double* X, double h, int n,
   double b, double yo, double* y3, const char* fileX, const char*
   fileY)
{
    Метод// секущих:
    Сначала// ищется решение задачи Коши с любым параметром гамма1,
    Далее// с другим любым параметром гамма2, а затем используется метод
   секущих
    для// нахождения окончательного параметра.
    Этот// параметр используется для получения окончательного решения
}
```

```
void factError(double* X, double* y3, int n, double * max_error)
{
    Вычисление// фактической ошибки
}


int get_err(double eps) {
    Правило// Рунге — считается теоретическая погрешность
}

int main() {
}
```

7.7. Численный анализ решения задачи

7.7.1. Влияние шага интегрирования

Построим зависимость максимальной ошибки от шага интегрировани. Шаги h будем задавать самим, меняя их от более грубых к более точным.

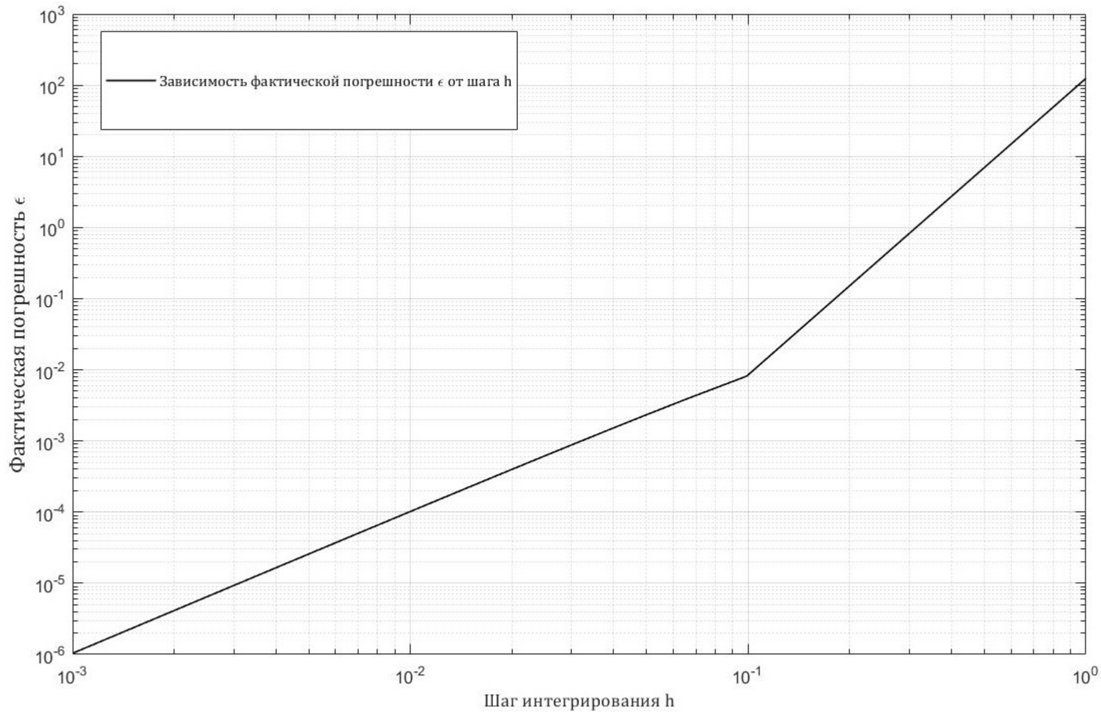

Рис 1. Зависимость фактической погрешности от шага h

Из графика видно, что при уменьшении шага, погрешность стремится к 0.

7.7.2. Устойчивость задачи

Во всех тестах будем использовать шаг $h = 0.1$. Внесем возмущение δ в числовой коэффициент дифференциального уравнения:

$$y''(x, y, z) = \frac{4(x^2 + (3 + \delta))z - 7xy + x^4}{x^3 + 6x}$$

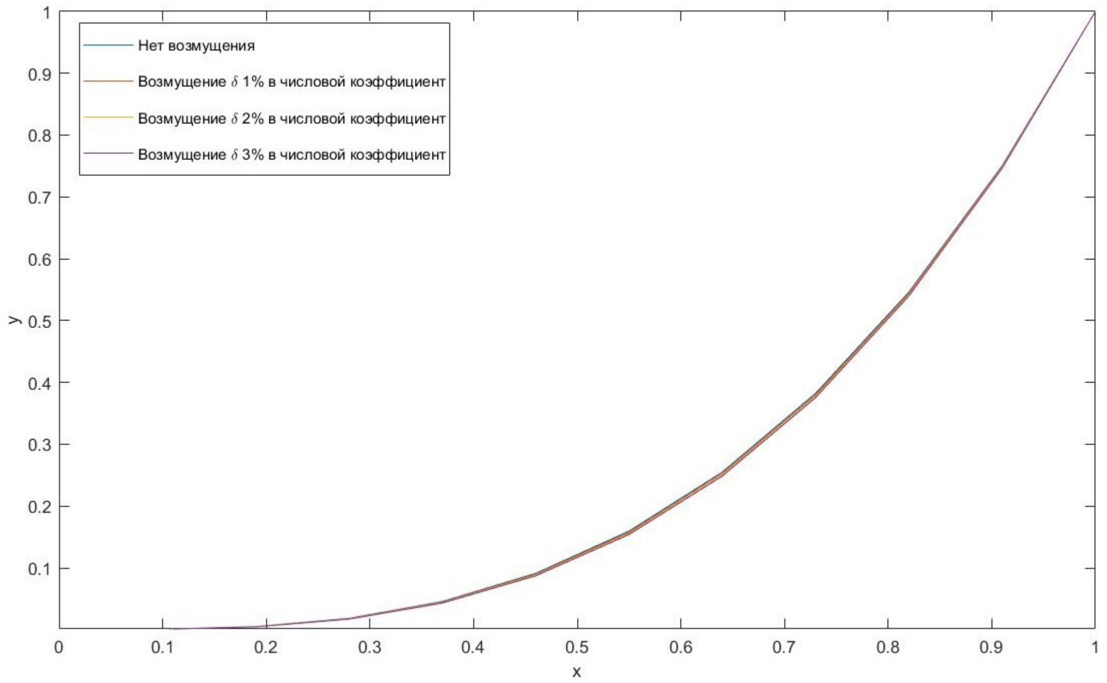

Рис 2. Интегральные кривые при возмущении δ в числовом коэффициенте.

Построим теперь график относительного отклонения решения по x для таких возмущений:

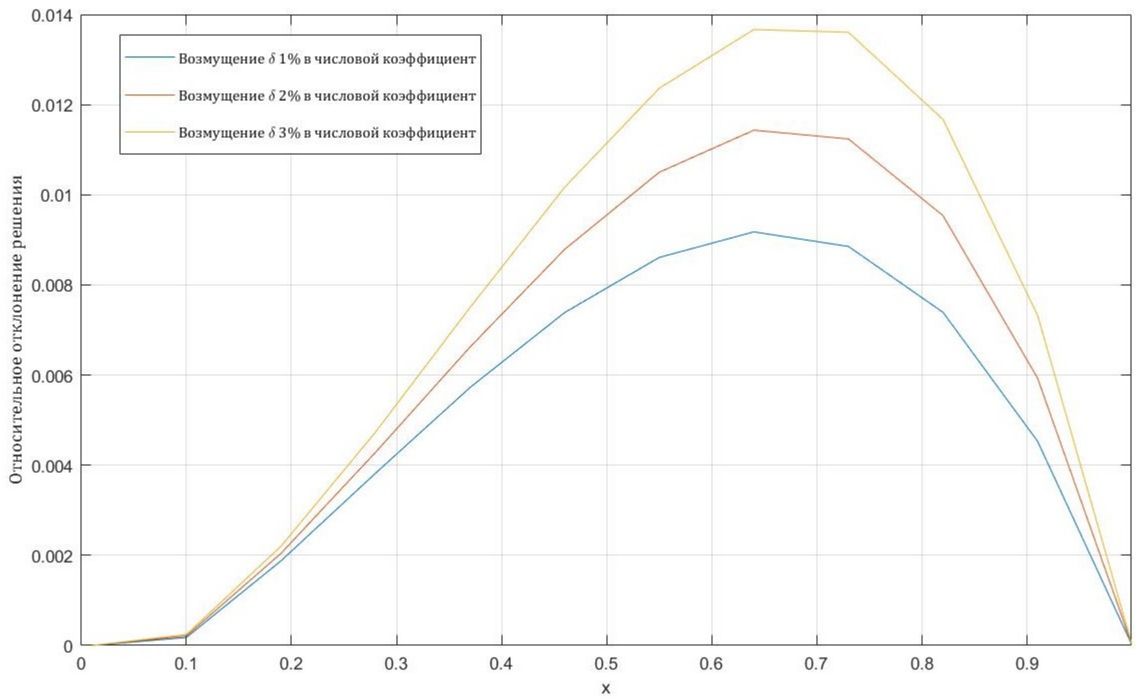

Рис 3. Отклонение от возмущения δ в числовом коэффициенте по x.

Построим график максимального отклонения решения от процента возмущения:

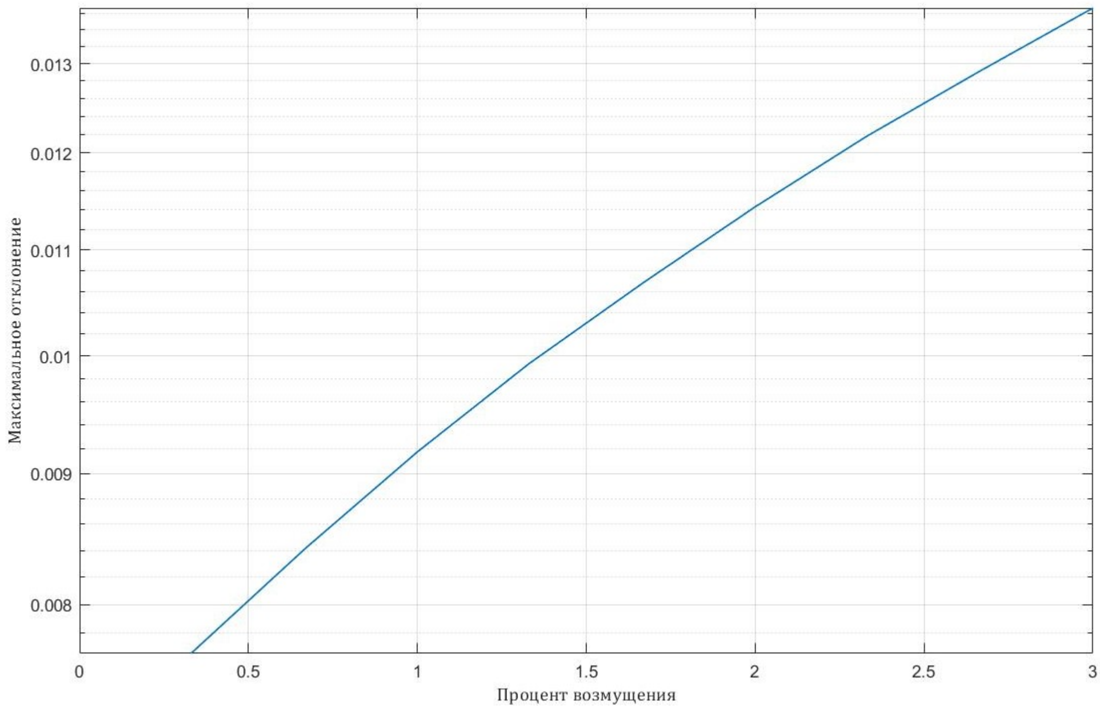

Рис 4. Максимальное отклонение от процента возмущения δ в числовом коэффициенте.

Проделаем тоже самое, внося возмущение δ в граничные условия:

$$y(a) = 0 + \delta,\ y(b) = 1 + \delta$$

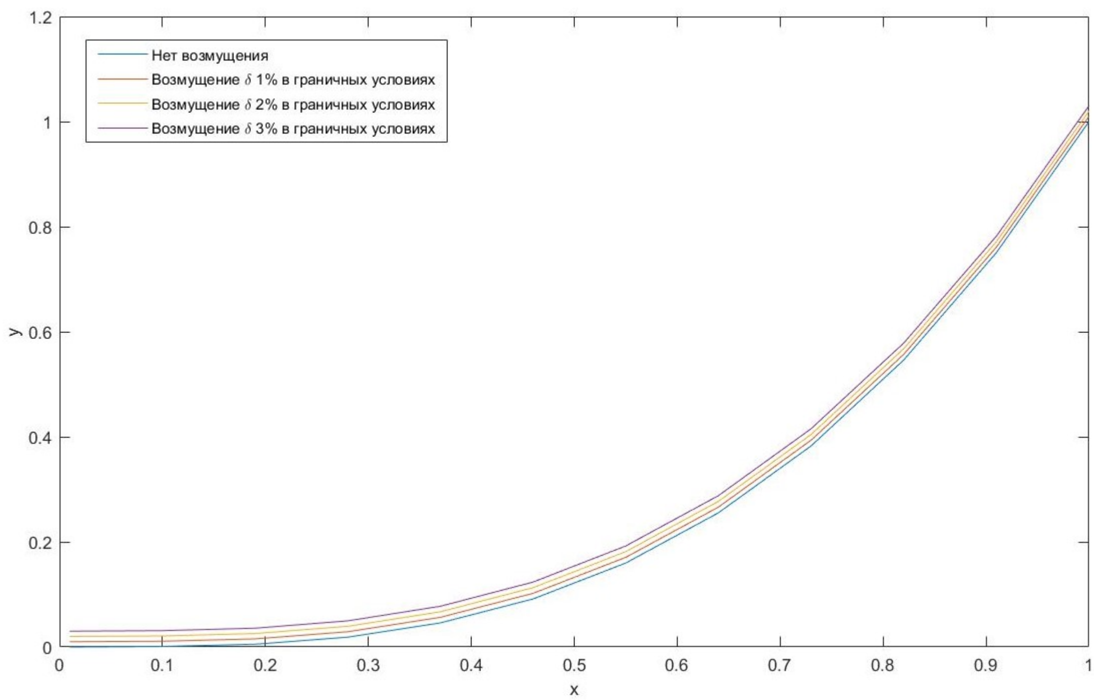

Рис 5. Интегральные кривые при возмущении δ в граничном условии.

Построим теперь график относительного отклонения решения по x для таких возмущений:

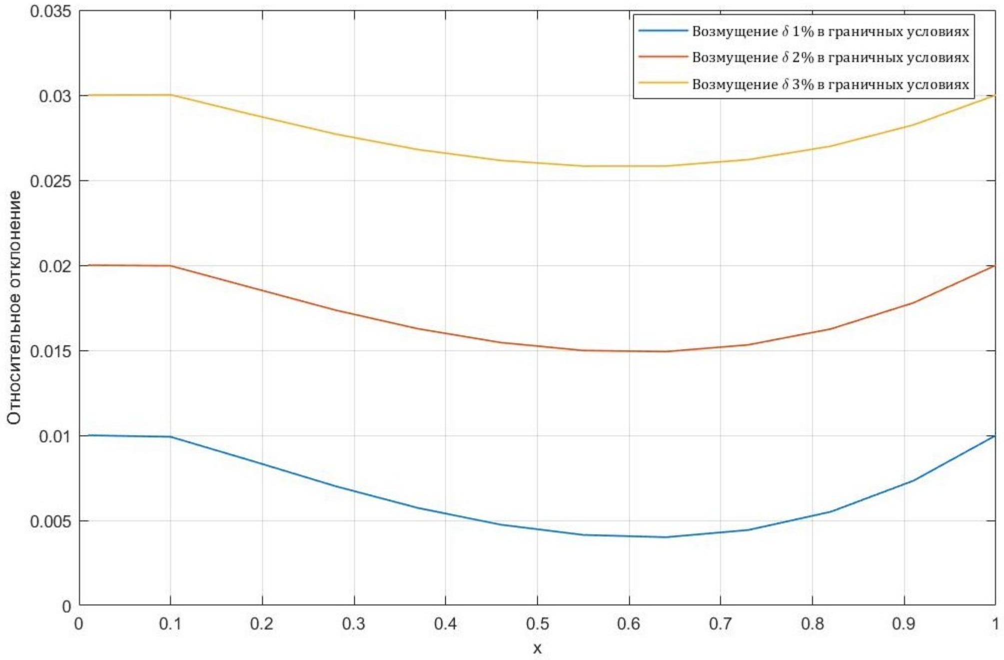

Рис 6. Относительное отклонение при возмущении δ в граничном условии по x.

7.7.3. Зависимость погрешности от заданной точности

С использованием правила Рунге, построим график зависимости фактической погрешности от заданной. Будем задавать разные ϵ и использовать следующее условие останова:

$$\frac{|y_{i,h} - y_{i,\frac{h}{2}}|}{3} < \epsilon$$

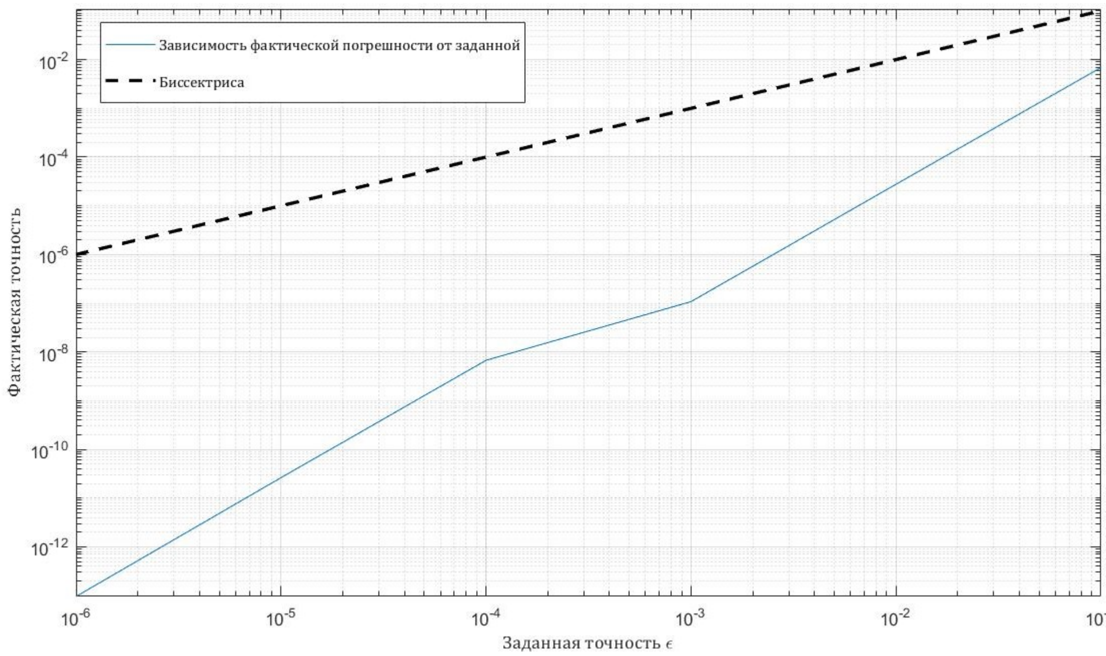

Рис 7. Зависимость фактической погрешности от заданной ϵ.

В график была добавлена биссектриса первой четверти, чтобы можно было видеть, достигается ли задаваемая точность ϵ. Как мы видим, метод работает точно.

7.8. Выводы

Метод стрельбы позволил свести решение краевой задачи к многократному решению задачи Коши и решения нелинейного уравнения для нахождения пристрелочного параметра. Была найдена зависимость погрешности от шага h и зависимость фактической погрешности от заданной с использованием правила Рунге.
Так же задача была исследована на устойчивость: метод пристрелки устойчив к возмущениям.