Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт Прикладной Математики и Механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 5
Тема «Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью одношагового метода»
Дисциплина «Численные методы»

Выполнил студент гр. 3630102/90003 А.А. Чеботин
Преподаватель: К.Н. Козлов

Санкт-Петербург, 2021 г.

1 Формулировка задачи и ее формализация.

Численным методом Рунге-Кутты 3-го порядка решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Исследовать метод на устойчивость задачи.

2 Алгоритм и условия применимости метода.

При изучении самых разнообразных явлений природы исследователи сталкиваются с такими случаями, когда функциональные зависимости между величинами находятся из уравнений, в которых присутствуют производные искомых функций. Наиболее простыми среди них являются те, что содержат только производные первого порядка и могут быть записаны в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

То есть производная явно выражена, y - искомая функция, x - независимая переменная, $f(x, y)$ - непрерывная функция от x и y.

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка относится к явным методам. Явные методы являются наиболее простыми в реализации: вспомогательные значения K_i вычисляются последовательно, каждое последующее из них явно выражается через уже найденные.

Ниже приведены формулы, используемые для вычисления следующего значения y_{i+1} из предыдущего значения y_i:

$$K_1 = f(x, y)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$K_3 = f(x_i + h, y_i - hK_1 + 2hK_2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Для вычисления решения с заданной точностью будем пользоваться правилом Рунге. Для погрешности решения будем пользоваться оценкой:

$$\frac{\left|y_{i,h} - y_{i,\frac{h}{2}}\right|}{2^p - 1}$$

В нашем случае $p = 3$, так как метод третьего порядка. Таким образом, решая задачу с шагом h, а затем с шагом $h/2$, будем находить погрешность в общих точках. Правило будет продолжать выполняться, пока не будет достигнута заданная точность ε.

3 Предварительный анализ задачи.

Имеем следующую задачу Коши (10 вариант):

$$(x+1)(y' + y^2) = -y, \qquad y(a) = \frac{1}{2\ln(2)}$$

Разрешим явно уравнение относительно y':

$$(x+1)(y' + y^2) = -y \Rightarrow y' + y^2 = -\frac{y}{x+1} \Rightarrow y' = -\frac{y}{x+1} - y^2$$

Таким образом, нам нужно решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x+1} - y^2 \\ y(a) = \dfrac{1}{2\ln(2)} \end{cases}$$

Для нахождения погрешностей, выведем аналитическое решение данной задачи:

$$y' = -\frac{y}{x+1} - y^2$$

Решим методом Бернулли: замена $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x+1} = -u^2v^2$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x+1}\right) = -u^2v^2$$

$$v' + \frac{v}{x+1} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x+1}$$

$$lnv = -\ln(x+1) \Rightarrow v = \frac{1}{x+1}$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{u'}{x+1} = -\frac{u^2}{(x+1)^2} \Rightarrow u' = -\frac{u^2}{x+1}$$

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x+1}$$

$$\int u^{-2} du = -\int \frac{dx}{x+1}$$

$$-\frac{1}{u} = -\ln(x+1) + C$$

$$u = \frac{1}{\ln(x+1)} + \frac{1}{C}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = uv = \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} + \frac{1}{\mathrm{C}}\right) = \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1) + C)}$$

Константу найдем из начальных условий: $y(a) = \frac{1}{2\ln(2)}$

$$\frac{1}{2\ln(2)} = \frac{1}{a+1}\left(\frac{1}{\ln(a+1)} + \frac{1}{C}\right)$$

$$\frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{(a+1)(\ln(a+1))} = \frac{1}{C(a+1)}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{a+1}{2\ln(2)} - \frac{(a+1)}{(a+1)(\ln(a+1))}$$

$$C = \frac{2\ln(2)}{a+1} - \ln(a+1)$$

Подставим в общее решение:

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)\left(\ln(x+1) + \frac{2\ln(2)}{a+1} - \ln(a+1)\right)}$$

Упростим частное решение и получим итоговый аналитический ответ

$$y(x) = \frac{a+1}{(x+1)\big(ln(4) - (a+1)ln(a+1) + (a+1)ln(x+1)\big)}$$

4 Тестовый пример с детальными расчетами.

Задача. Частица массой $m = 2$ кг движется прямолинейно, начальная скорость равна v_0. На частицу действует ускоряющая сила F = 20 Н, а также сила сопротивления, пропорциональная скорости (коэффициент $k = 0.5$). Определить скорость частицы в момент $t = 3$ с.

Дифференциальное уравнение:

$$m\frac{dv}{dt} = F - kv \;\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F - kv}{m} = \frac{20 - 0.5v}{2}, \qquad v(0) = 0$$

Решение. Решим численно данное дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутты 3-го порядка.

$$K_1 = f(t_i, v_i)$$

$$K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, v_i + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f(t_i + h, v_i - hK_1 + 2hK_2)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Правая часть дифференциального уравнения зависит только от переменной v. Пусть шаг интегрирования $h = 1$.

$$v_0 = 0$$

$$K_1 = \frac{20 - 0.5 \cdot 0}{2} = 10, \qquad K_2 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}10\right)\right)}{2} = 8.75,$$

$$K_3 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot (0 - 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 8.75)\right)}{2} = 8.125$$

$$v_1 = 0 + \frac{1}{6}(10 + 4 \cdot 8.75 + 8.125) = 8.854\ \frac{\text{м}}{c}, \qquad t_1 = 1\ c$$

$$\text{К}_1 = \frac{20 - 0.5 \cdot 8.854}{2} = 7.7865, \qquad K_2 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot \left(8.854 + \frac{1}{2} \cdot 7.7865\right)\right)}{2} = 6.813,$$

$$K_3 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot (8.854 - 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 6.813)\right)}{2} = 6.88$$

$$v_2 = 8.854 + \frac{1}{6}(7.7865 + 4 \cdot 6.813 + 6.88) = 15.84\ \frac{\text{м}}{c}, \qquad t_2 = 2\ \text{с}$$

$$\text{К}_1 = \frac{20 - 0.5 \cdot 15.84}{2} = 6.04, \qquad K_2 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot \left(15.84 + \frac{1}{2} \cdot 6.04\right)\right)}{2} = 5.285,$$

$$K_3 = \frac{\left(20 - 0.5 \cdot (15.84 - 1 \cdot 6.04 + 2 \cdot 1 \cdot 5.285)\right)}{2} = 4.91$$

$$v_3 = 15.84 + \frac{1}{6}(6.04 + 4 \cdot 5.285 + 4.91) = 21.2\ \frac{\text{м}}{c}, \qquad t_3 = 3\ \text{с}$$

Сравним полученное значение с аналитическим решением.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{20 - 0.5v}{2}$$

$$v(t) = -40e^{-0.25t} + 40$$

При $t = 3$ с, $v(t) = -40e^{-0.25\cdot 3} + 40 = 21.1053\ \frac{\text{м}}{c}$

Видно, что численное решение соответствует аналитическому с погрешностью 0.0947.

5 Подготовка контрольных тестов

Для исследования метода будем проводить следующие тесты.

1. Тест с зависимостью погрешности от шага интегрирования.

2. Тест с зависимостью погрешности от устойчивости задачи. Будем вносить возмущение в начальные условия и числовой коэффициент дифференциального уравнения.

6 Модульная структура программы

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <inttypes.h>

#define Y0 1/(2*log(2))

//Дифференциальное уравнение
double DiffEqFunc(double x, double y) {
}

//Решение (Аналитическое)
double DiffEqSol(double x) {

}

//Рунге-Кутта
void RK3(uint64_t n, double a, double b, const char* fileX, const char* fileY)
{
}

//Вычисление погрешности (теоретической) для правила Рунге
int get_err(double eps) {
}

//Вычисление отклонения (Фактической погрешности) от аналитического решения
double get_norm() {
}

int main()
{
}
```

7 Численный анализ решения задачи.

7.1 Влияние шага интегрирования.

Исследуем поведение численного решения в зависимости от шага интегрирования и посмотрим, насколько оно соответствует аналитическому решению задачи.

Возьмем шаг $h = 1, h = 0.5, h = 0.1$

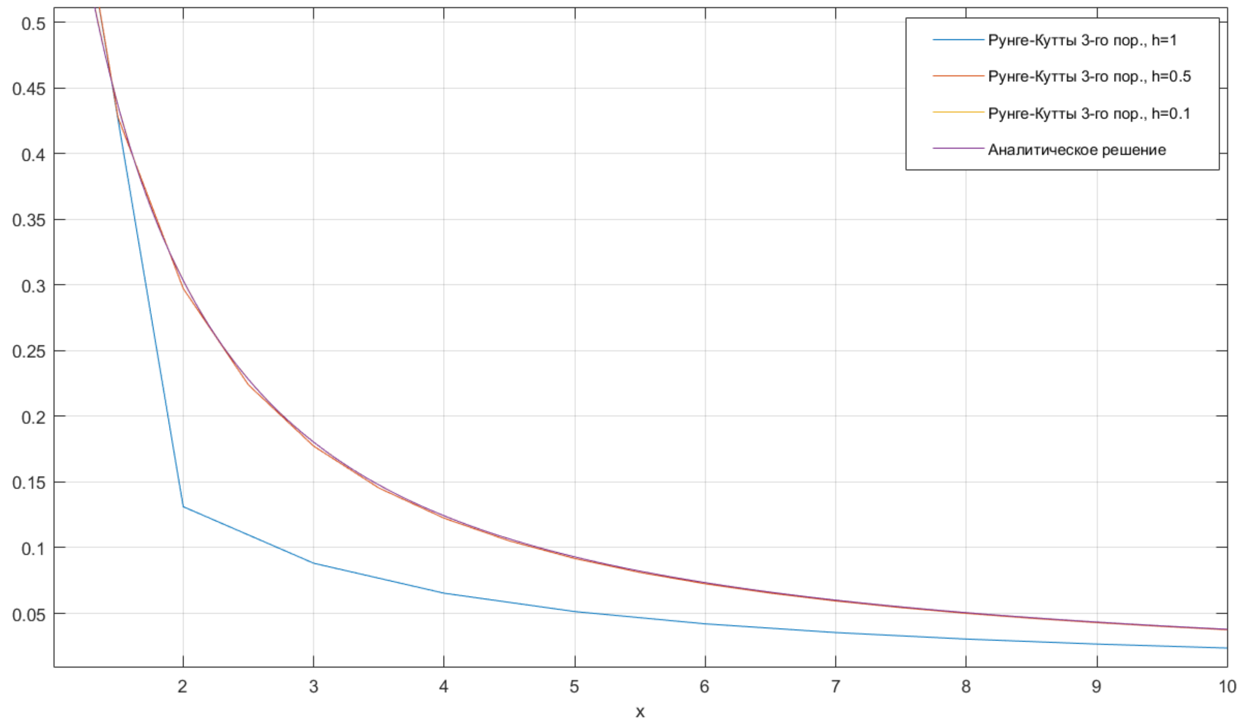


Рис 1. Аналитическое и численные решения задачи Коши.

Из рисунка видно, что чем меньше шаг - тем точнее численное решение сходится к аналитическому.

Построим зависимость максимальной ошибки от шага интегрирования.

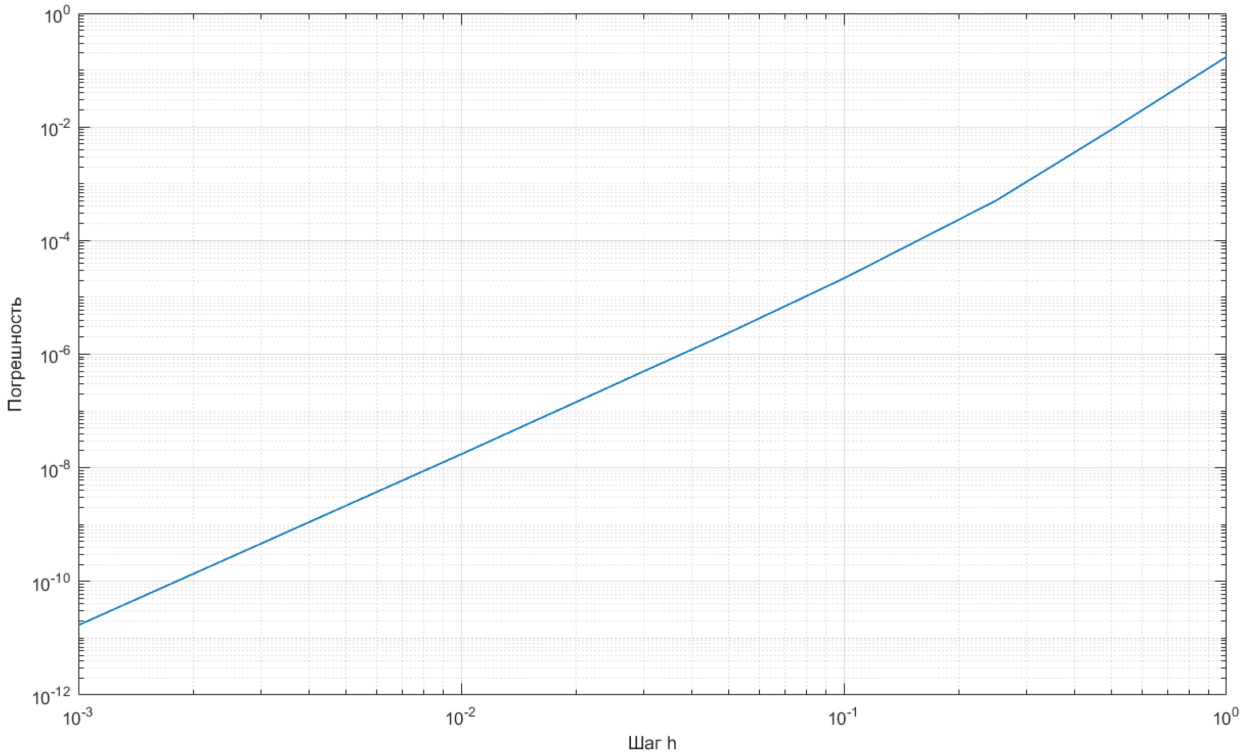


Рис 2. Зависимость погрешности от шага интегрирования.

7.2 Устойчивость задачи.

Внесем возмущение 1%, 2%, 3% в начальное условие $y(1) = \frac{1}{2\ln(2)}$ и решим дифференциальное уравнение, зафиксировав $h = 0.1$, $N = 90$.

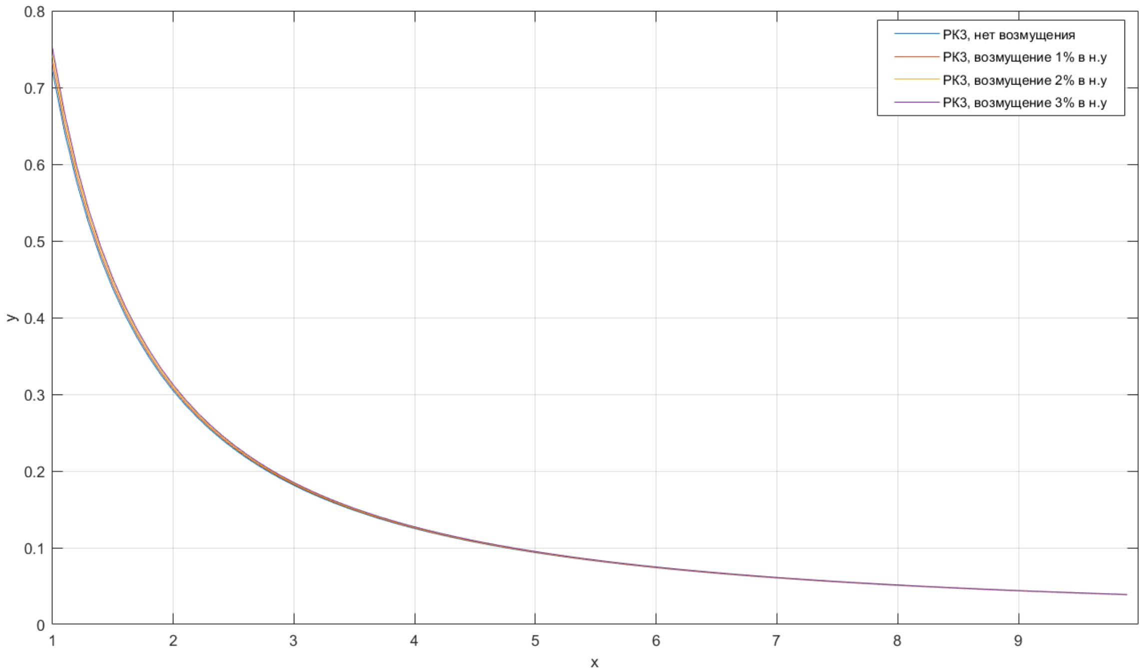


Рис 3. Интегральные кривые при возмущении в начальном условии.

Максимальное отклонение: 0.0166.

Теперь внесем возмущение 1%, 2%, 3% в числовой коэффициент в дифференциальном уравнении

$$y' = -\frac{y}{x+1} - y^2$$

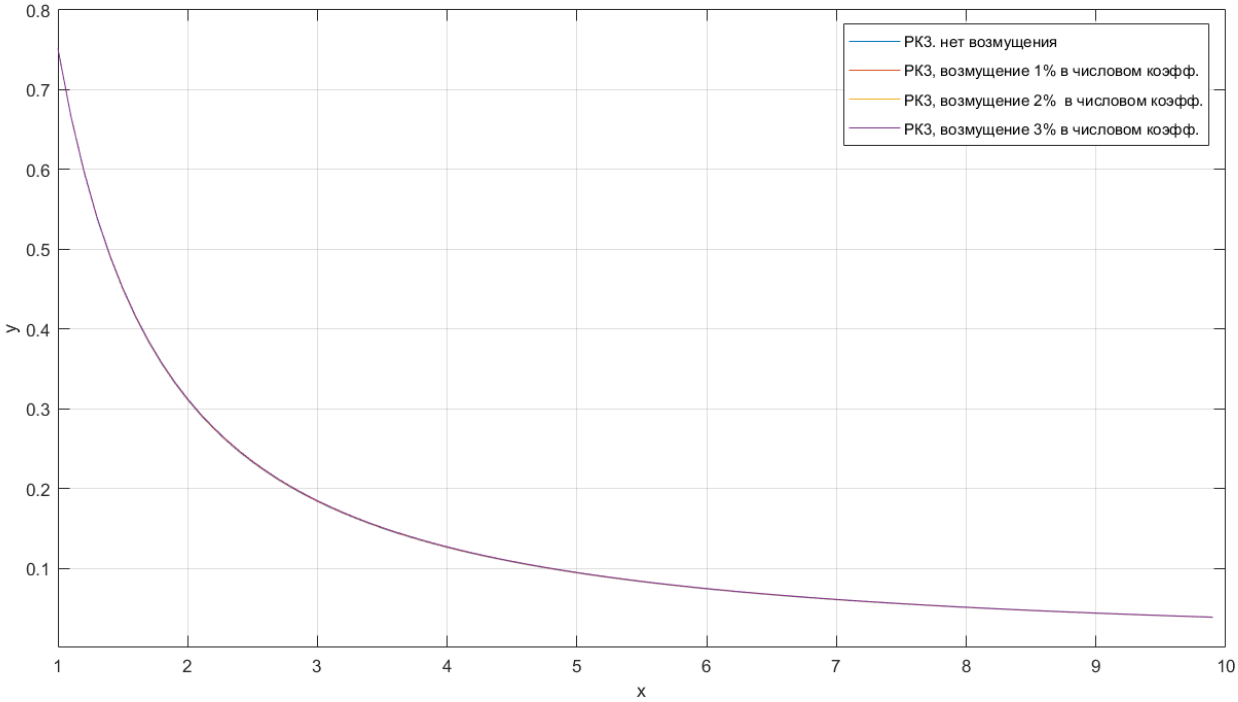


Рис 4. Интегральные кривые при возмущении в числовом коэффициенте.

Максимальное отклонение: 0.0012.

7.3 Оценка порядка точности.

Погрешность для шага $h = 0.1$ составила 0.000021582299743, для $h = 0.05$: 0.000002375210509.

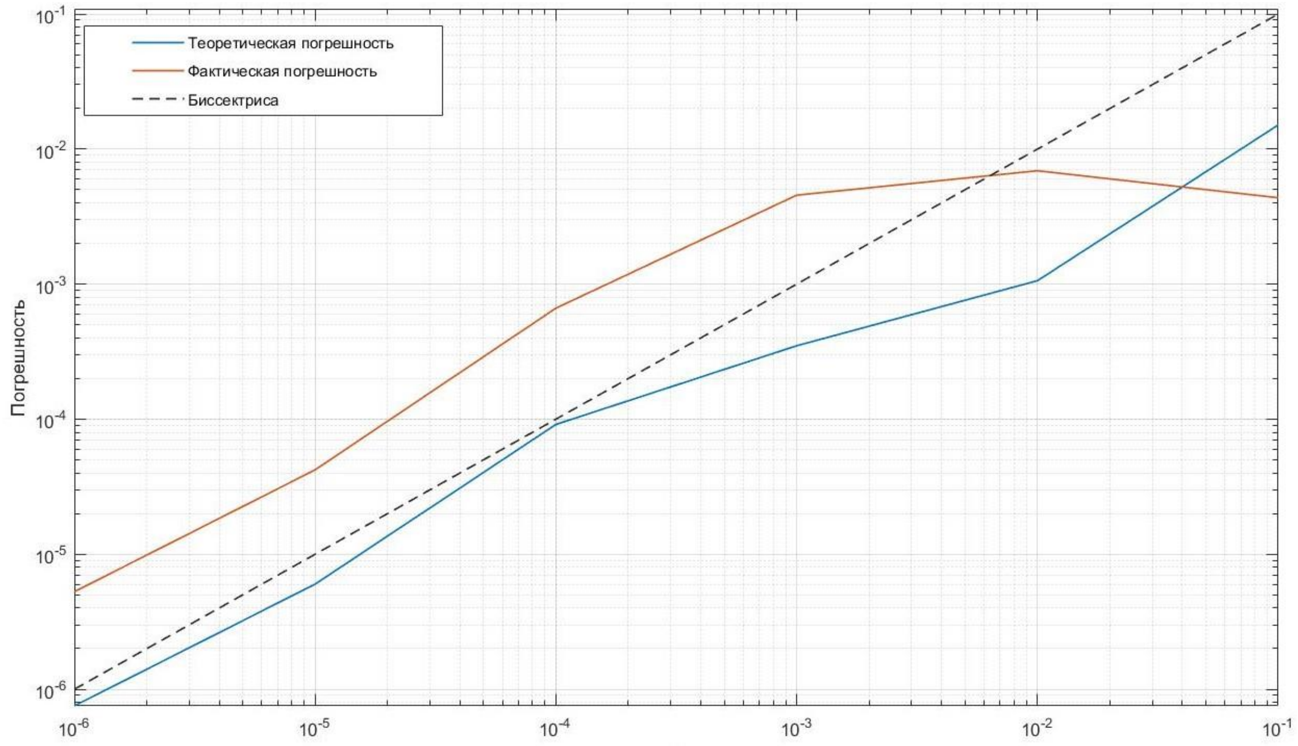
Видим, что погрешности отличаются в $\frac{0.000002375210509}{0.000021582299743} = 0.110053633638851$ раз. Шаги отличаются в 2 раза. Представим число 0.110053633638851 в виде 2^n, где n будет порядком точности метода.

$$0.110053633638851 = 2^n \Rightarrow n \approx 3.18$$

Видим, что порядок точности метода действительно равен трем.

7.4 Сравнение теоретической погрешности с фактической по правилу Рунге.

Будем пользоваться правилом Рунге для достижения заданной точности ε.



Краткие выводы.

Можно сделать вывод, что чем меньше шаг интегрирования - тем меньший вклад в погрешность дают члены более высокого порядка по сравнению с главным членом. При слишком грубых шагах есть вероятность получить прирост погрешности, вследствие чего можно наблюдать не совсем ожидаемый порядок точности.

Был оценен порядок точности метода. Метод является явным, простым в реализации. Также задача была исследована на устойчивость.