ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого»

Интитут Прикладной Математики и Механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

КУРСОВАЯ РАБОТА

Решение краевой задачи для ОДУ 2-го порядка

Студент:

Чеботин А.А.
группа: 3630102/90003

Преподаватель:

Козлов К.Н

Санкт-Петербург, 2021 г.

Содержание

Лабораторная работа 7

7.1. Формулировка задачи и ее формализация.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$(x^3 + 6x)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 7xy = x^4, \quad y(a) = 0, y(b) = 1$$

Отрезок исследования: $[0; 1]$. То есть поставлена краевая задача. Требуется получить ее решение при помощи метода конечных разностей. Далее, провести сравнительный анализ данного метода и метода из лабораторной работы 7 - метода стрельбы.

7.2. Алгоритм метода и условия применимости

7.2.1. Алгоритм МКР

Имеем ОДУ 2-го порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

1. **Дискретизация**. Область непрерывного изменения значения аргумента x разбивается на конечное число интервалов, то есть на отрезке вводится сетка с шагом

$$h = \frac{b-a}{n},\ x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, ..., n,\ x_0 = a,\ x_n = b$$

2. **Аппроксимация**. Идея метода конечных разностей: вместо производных мы используем их конечно-разностные аналоги:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

После подставления данных аппроксимаций в каждый внутренний узел сетки (то есть при $i = 1, 2, ..., n-1$), приводим подобные слагаемые и получаем следующее разностное уравнение:

$$\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)y_{i+1}-(2-h^2q_i)y_i+\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)y_{i-1}=h^2f_i,\ i=1,2,...n-1$$

А так же учтем граничные условия $y_0 = A,\ y_n = B$, которые будут являться по-факту соответственно первым и последним уравнением в нашем СЛАУ.

3. **Решение СЛАУ**. В результате аппроксимации мы свели исходную задачу к системе алгебраических уравнений. Образованная этими уравнениями СЛАУ имеет трехдиагональную матрицу, поэтому будем применять метод прогонки, алгоритм которого имеет сложность $O(n)$.

   В нашем случае СЛАУ МКР будет иметь следующую структуру:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \left(1-\frac{h}{2}p_1\right) & \left(2-h^2q_1\right) & \left(1+\frac{h}{2}p_1\right) & ... & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{h}{2}p_2\right) & \left(2-h^2q_2\right) & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \left(2-h^2q_{n-1}\right) & \left(1+\frac{h}{2}p_{n-1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A \\ h^2f_1 \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_{n-1} \\ B \end{pmatrix}$$

   Алгоритм метода прогонки. Мы должны найти прогоночные коэффициенты.

   (a) Прямой ход.

$$i=1:\ \delta_1=-\frac{0}{1}=0,\ \lambda_1=\frac{A}{1}=A$$

$$i=2,...,n-1:\ \delta_i=-\frac{1+\frac{h}{2}p_i}{(1-\frac{h}{2}p_i)\delta_{i-1}+(2-h^2q_1)}$$

$$\lambda_i=\frac{h^2f_i-(1-\frac{h}{2}p_i)\lambda_{i-1}}{(1-\frac{h}{2}p_i)\delta_{i-1}+(2-h^2q_i)}$$

$$i = n: \ \delta_n = 0, \ \lambda_n = \frac{B - (1 - \frac{h}{2}p_n)\lambda_{n-1}}{(1 - \frac{h}{2}p_n)\delta_{n-1} + (2 - h^2 q_1)}$$

(b) Обратный ход.

$$i = n: \ y_n = \lambda_n$$

$$i = n-1, ..., 1: y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i$$

7.2.2. Условия применимости

Ограничение на шаг h: если в разностном уравнении

$$h \leq \frac{2}{\max |p(x)|}, \ x \in [a, b],$$

то МКР сходится.

7.3. Предварительный анализ задачи

Имеем краевую задачу:

$$(x^3 + 6x)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 7xy = x^4, \quad y(a) = 0, y(b) = 1$$

Разделим на переменный коэффициент перед y'':

$$y'' - \frac{4(x^2 + 3)}{x^3 + 6x}y' + \frac{7x}{x^3 + 6x}y = \frac{x^4}{x^3 + 6x}$$

Здесь $p(x) = -\frac{4(x^2+3)}{x^3+6x}$, $q(x) = \frac{7x}{x^3+6x}$, $f(x) = \frac{x^4}{x^3+6x}$.

Для исследования задачи на устойчивость, будем вносить в числовой коэффициент и граничные условия возмущение δ:

$$y'' - \frac{4(x^2 + (3 + \delta))}{x^3 + 6x}y' + \frac{7x}{x^3 + 6x}y = \frac{x^4}{x^3 + 6x}, \ y(0) = 0 + \delta, \ y(b) = 1 + \delta$$

Для нахождения фактической погрешности, будем вычислять отклонение полученного решения методом конечных разностей от точного решения исходной задачи:

$$y(x) = x^3$$

Для получения решения с заданной точностью ϵ, можно воспользоваться оценкой по правилу Рунге:

$$\frac{|y_{i,h} - y_{i,\frac{h}{2}}|}{3},$$

где в числителе вычисляется разность полученных решений с шагом h и $\frac{h}{2}$ в одинаковых точках x.

7.4. Тестовый пример с детальными расчетами

Решим краевую задачу методом конечных разностей

$$y'' - \frac{4(x^2+3)}{x^3+6x}y' + \frac{7x}{x^3+6x}y = \frac{x^4}{x^3+6x},\ y(0)=0,\ y(1)=1$$

Здесь $p(x) = -\frac{4(x^2+3)}{x^3+6x}$, $q(x) = \frac{7x}{x^3+6x}$, $f(x) = \frac{x^4}{x^3+6x}$. Создадим следующую сетку на отрезке $[0,1]$:

$$h = \frac{b-a}{2} = 0.5,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1$$

Выполняем аппроксимацию и получаем разностное уравнение:

$$\left(1 + \frac{0.5}{2}\cdot\left(-\frac{4(x_i^2+3)}{x_i^3+6x_i}\right)\right)y_{i+1} - \left(2 - 0.5^2\frac{7x_i}{x_i^3+6x_i}\right)y_i +$$

$$+\left(1 - \frac{0.5}{2}\cdot\left(-\frac{4(x_i^2+3)}{x_i^3+6x_i}\right)\right)y_{i-1} = 0.5^2\frac{x_i^4}{x_i^3+6x_i}$$

Упростим:

$$\left(1 - \frac{x_i^2+3}{x_i^3+6x_i}\right)y_{i+1} - \left(2 - \frac{1.75x_i}{x_i^3+6x_i}\right)y_i + \left(1 + \frac{x_i^2+3}{x_i^3+6x_i}\right)y_{i-1} = \frac{0.25x_i^4}{x_i^3+6x_i},$$

где $i = 1, 2, ..., n-1,\ y_0 = A,\ y_n = B$. В случае нашей сетки, $i = 0, 1, 2$, и соответственно имеем матрицу с тремя уравнениями. Запишем это уравнение выше в виде СЛАУ с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left(1 - \frac{x_i^2+3}{x_i^3+6x_i}\right) & \left(2 - \frac{1.75x_i}{x_i^3+6x_i}\right) & \left(1 + \frac{x_i^2+3}{x_i^3+6x_i}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5^2 f_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решаем методом прогонки.

$$\delta_0 = 0,\ \lambda_0 = A = 0$$

$$\delta_1 = -\frac{1 + \frac{x_1^2+3}{x_1^3+6x_1}}{\left(1 + \frac{x_1^2+3}{x_1^3+6x_1}\right)\delta_0 + \left(2 - \frac{1.75x_1}{x_1^3+6x_1}\right)} = -\frac{1 + \frac{0.5^2+3}{0.5^3+6\cdot 0.5}}{\left(1 + \frac{0.5^2+3}{0.5^3+6\cdot 0.5}\right)\cdot 0 + \left(2 - \frac{1.75\cdot 0.5}{0.5^3+6\cdot 0.5}\right)} =$$

$$= -1.186$$

$$\lambda_1 = \frac{0.5^2\frac{x_1^4}{x_1^3+6x_1} - \left(1 - \frac{x_1^2+3}{x_1^3+6x_1}\right)\lambda_0}{\left(1 - \frac{x_1^2+3}{x_1^3+6x_1}\right)\delta_0 + \left(2 - \frac{1.75x_1}{x_1^3+6x_1}\right)} = \frac{0.5^2\frac{0.5^4}{0.5^3+6\cdot 0.5} - \left(1 - \frac{0.5^2+3}{0.5^3+6\cdot 0.5}\right)\cdot 0}{\left(1 - \frac{0.5^2+3}{0.5^3+6\cdot 0.5}\right)\cdot 0 + \left(2 - \frac{1.75\cdot 0.5}{0.5^3+6\cdot 0.5}\right)} =$$

$$= 0.00290$$

Мы подошли к последнему шагу и согласно методу,

$$\delta_2 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{B - \left(1 - \frac{x_2^2+3}{x_2^3+6x_2}\right)\lambda_1}{\left(1 - \frac{x_2^2+3}{x_2^3+6x_2}\right)\delta_1 + \left(2 - \frac{1.75x_2}{x_2^3+6x_2}\right)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1^2+3}{1^3+6}\right)\cdot 0.00290}{\left(1 - \frac{1^2+3}{1^3+6}\right)\cdot(-1.186) + \left(2 - \frac{1.75}{1^3+6}\right)} =$$
$$= 0.804$$

Выполняем обратный ход,

$$y_2 = 0.804$$

$$y_1 = \delta_1 y_2 + \lambda_1 = -1.186 \cdot 0.804 + 0.00290 = -0.950$$

Вычислим погрешность. Обозначим численное решение как $\widetilde{y_1} = -0.950$, $\widetilde{y_2} = 0.804$. Точное решение - $y^*(x) = x^3$.

$$\epsilon_1 = |y_1^*(x) - \widetilde{y_1}(x)| = |0.125 + 0.950| = 1.075,$$

$$\epsilon_2 = |y_2^*(x) - \widetilde{y_2}(x)| = |1 - 0.804| = 0.196$$

Максимальная погрешность составила $\max(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1.075$. Большая погрешность связана с грубым шагом и разбиением исходного интервала всего на два промежутка.

7.5. Подготовка контрольных тестов

Для исследования метода будем проводить следующие тесты:

1. Исследуем зависимость погрешности от шага интегрирования h;
2. Исследуем устойчивость задачи. Получим график относительного отклонения решения для разных процентов возмущения и максимального относительного отклонения от процента возмущения;
3. Исследуем зависимость фактической погрешности от заданной точности ϵ.

7.6. Модульная структура программы

Листинг 7.1: Структура программы

```


double p(double x) {Переменный
// коэффициент перед y''
}

double q(double x) {Переменный
// коэффициент перед y'
}

double r(double x) {Переменный
// коэффициент перед y
}

double f(double x) {Свободный
// коэффициент
}

double DiffEqSol(double x) {Аналитическое
// решение
}

double GetMaxError(double* x, double* y, int n) {Вычисление
// фактической погрешности
}


int FDM(double (*p)(double x), double (*q)(double x), double (*r)(
    double x), double (*f)(double x), double a, double b, double y0,
    double yn,
  double h, double** y, double** x, int n) {Метод
// конечных разностей: сведение к СЛАУ и метод прогонки
}


int get_theor_err(double eps) {Используется
// для правила Рунге — считает теоретическую погрешность на двух сетках
}

int SaveSol(double* x, double* y, int n, const char* fileX, const char
    * fileY) {Сохранение
// численных решений в файлы
}


int main() {
```

```
}
```

7.7. Численный анализ решения задачи

7.7.1. Влияние шага интегрирования

Будем фиксировать множество различных убывающих шагов h и вычислять погрешность для каждого такого шага. Мы получаем следующую зависимость:

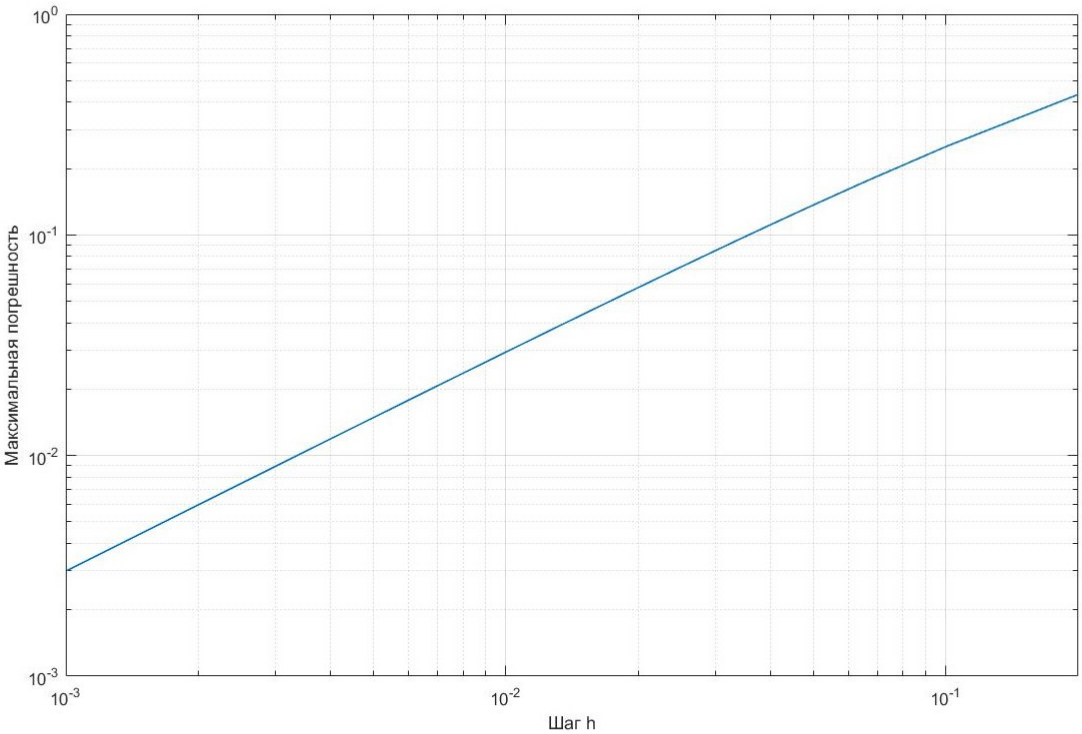

Рис 1. Зависимость фактической погрешности от шага h (МКР).

Видно, как погрешность (отклонение от точного решения) убывает с уменьшением шага. Теперь сравним данный результат с методом стрельбы.

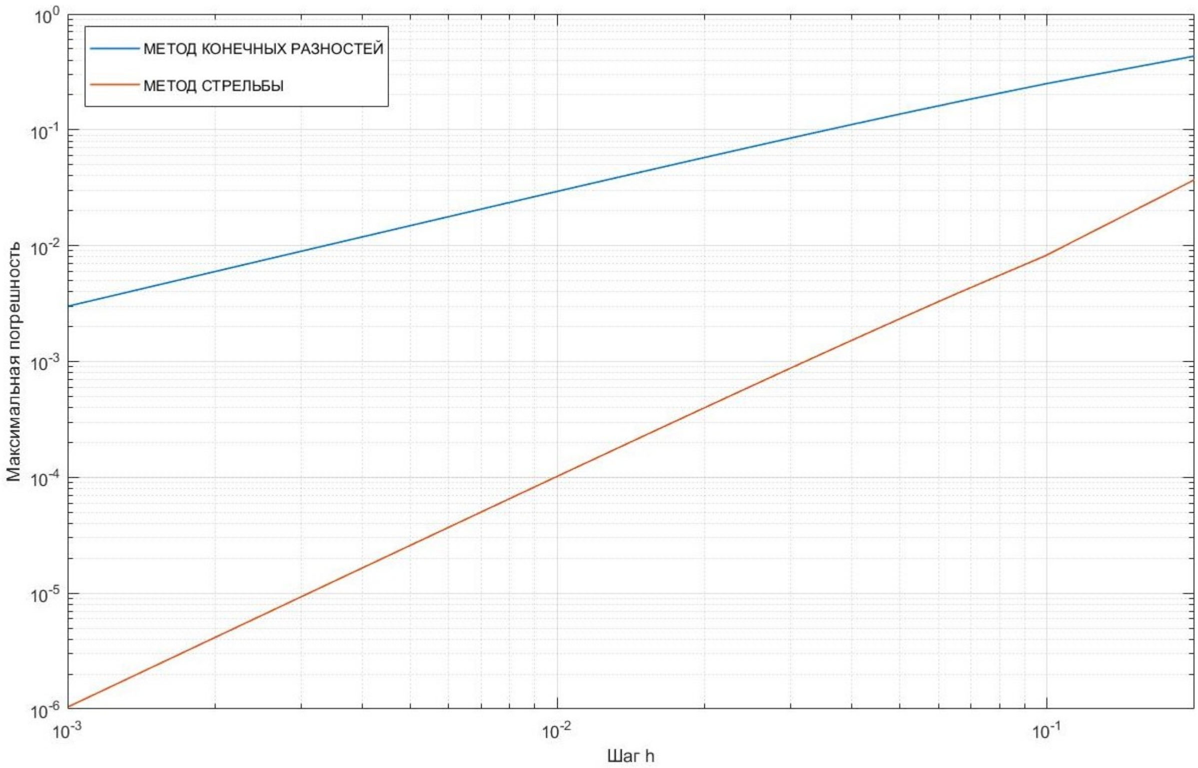

Рис 2. Зависимость фактической погрешности от шага h (МКР + метод стрельбы).

Исходя из графика, можно сделать следующий вывод: метод стрельбы оказался более точным, чем метод конечных разностей для любого шага h.

7.7.2. Устойчивость задачи

Внесем возмущение δ в числовой коэффициент:

$$y'' - \frac{4(x^2 + (3+\delta))}{x^3 + 6x} y' + \frac{7x}{x^3 + 6x} y = \frac{x^4}{x^3 + 6x}, \ y(0) = 0, \ y(b) = 1$$

Зафиксируем шаг $h = 0.01$. Внося различные проценты возмущения, построим график относительной погрешности от x.

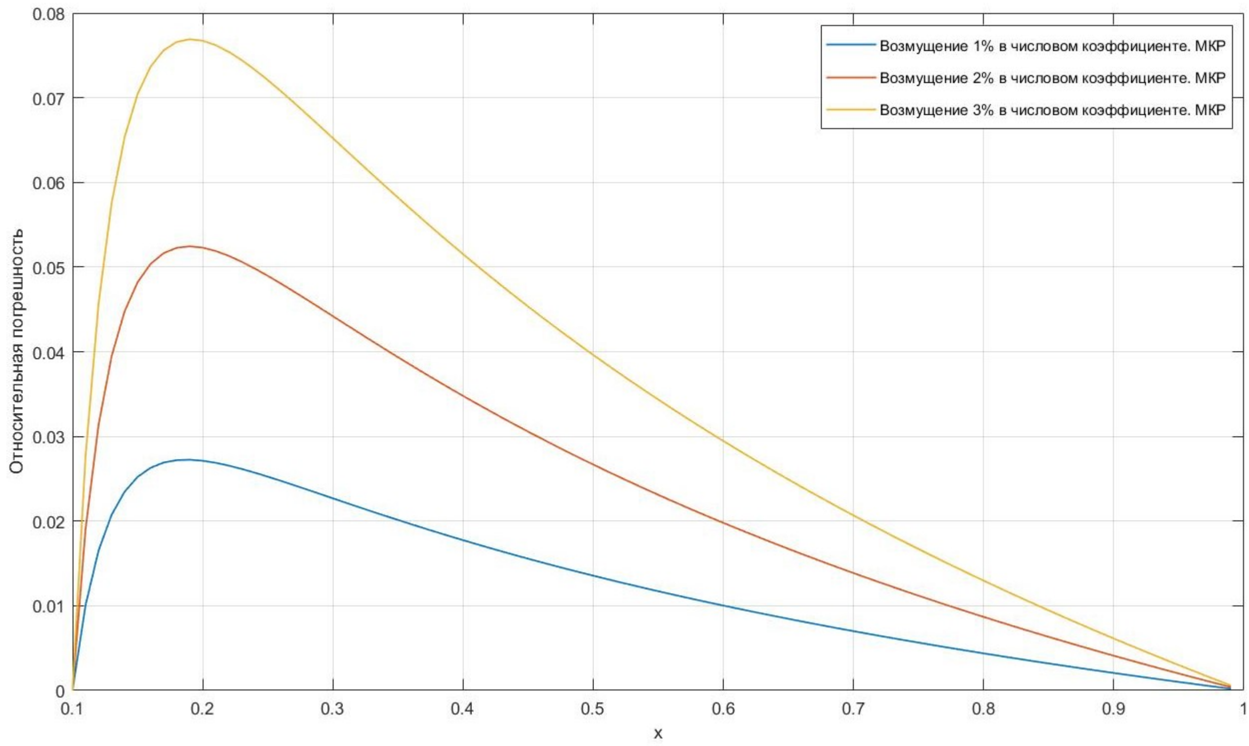

Рис 3.1. Зависимость относительной погрешности от x при δ в числовом коэффициенте (МКР).

Добавим в этот график ту же самую зависимость, только для метода стрельбы, с теми же самыми возмущениями и шагом $h = 0.01$.

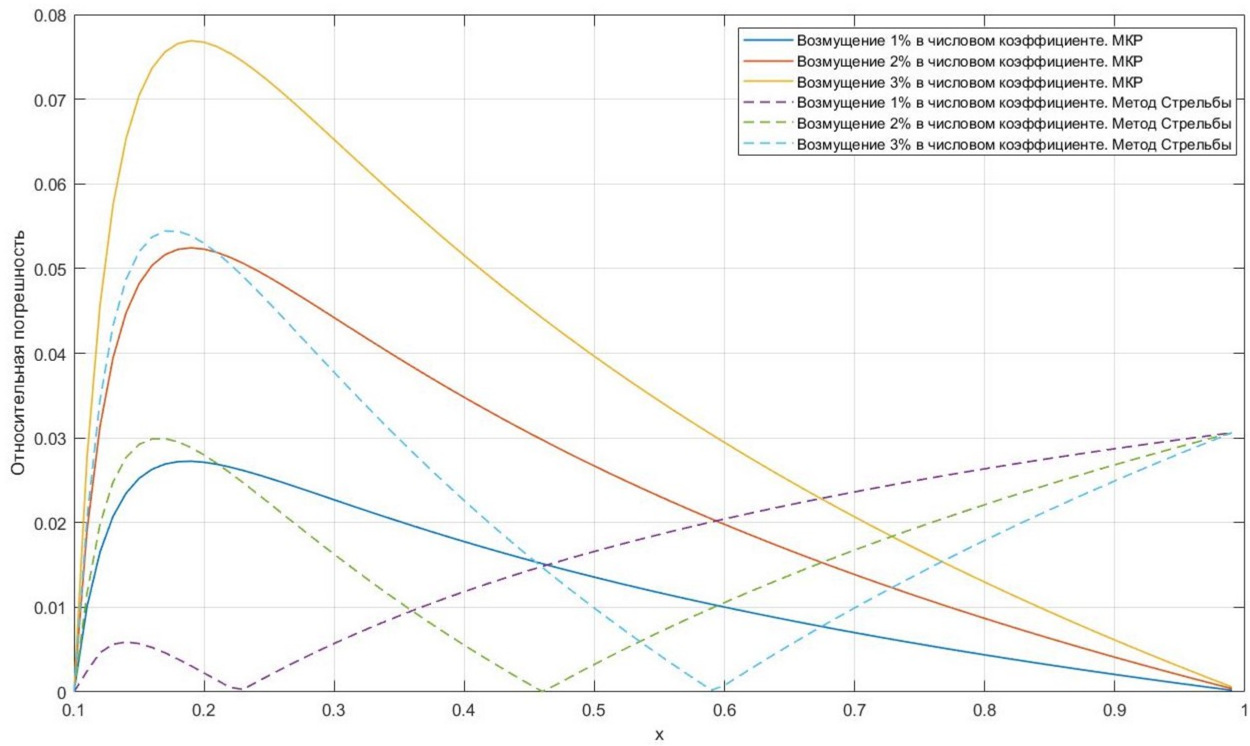

Рис 3.2. Зависимость относительной погрешности от x при δ в числовом коэффициенте (МКР + метод стрельбы).

Вывод можно сделать следующий: метод стрельбы более устойчив к возмущениями в дифференциальном уравнении, но не всегда - мы можем видеть, что метод стрельбы на конце промежутка имеет большую погрешность, чем метод конечных разностей. Это связано с самой идеей метода пристрелки: процесс схож с артиллерийской стрельбой по цели. Выбирается угол стрельбы α и производится «выстрел» - решается задача Коши. Если полученное решение на конце отрезка совпадает с граничным условием $y(b) = B$ с какой-либо заданной точностью, то цель считается «пораженной». Таким образом, на конце промежутка мы всегда будем наблюдать погрешность в методе стрельбы. Но в целом, погрешность метода конечных разностей превышает. Мы это можем видеть на следующем графике с зависимостью максимальной относительной погрешности от процента возмущения для обоих методов:

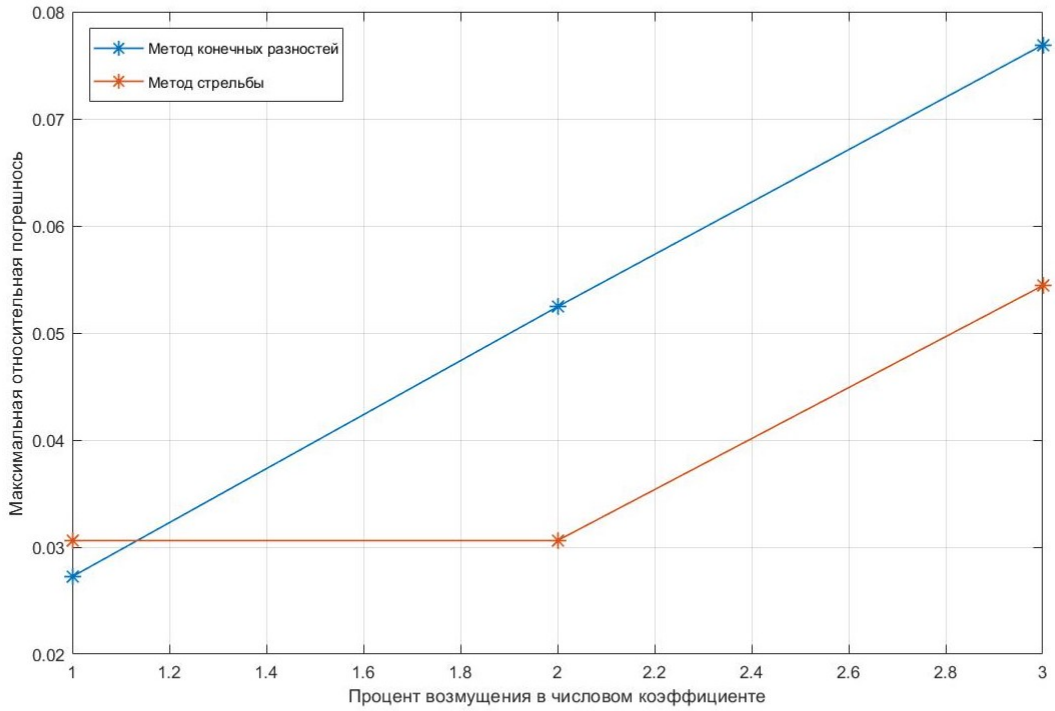

Рис 3.3. Зависимость максимальной относительной погрешности от процента возмущения δ в числовом коэффициенте (МКР + метод стрельбы).

Сравним численно:

δ	Макс. ошибка МКР	Макс. ошибка метод стрельбы
1%	0.027244338182085	0.030610152128365
2%	0.052448256668813	0.030610152128364
3%	0.076902108265264	0.054421169704017

Теперь внесем возмущение δ в граничные условия:

$$y'' - \frac{4(x^2+3)}{x^3+6x}y' + \frac{7x}{x^3+6x}y = \frac{x^4}{x^3+6x},\ y(0) = 0,\ y(b) = 1+\delta$$

Зафиксируем шаг $h = 0.01$. Внося различные проценты возмущения, построим график относительной погрешности от x.

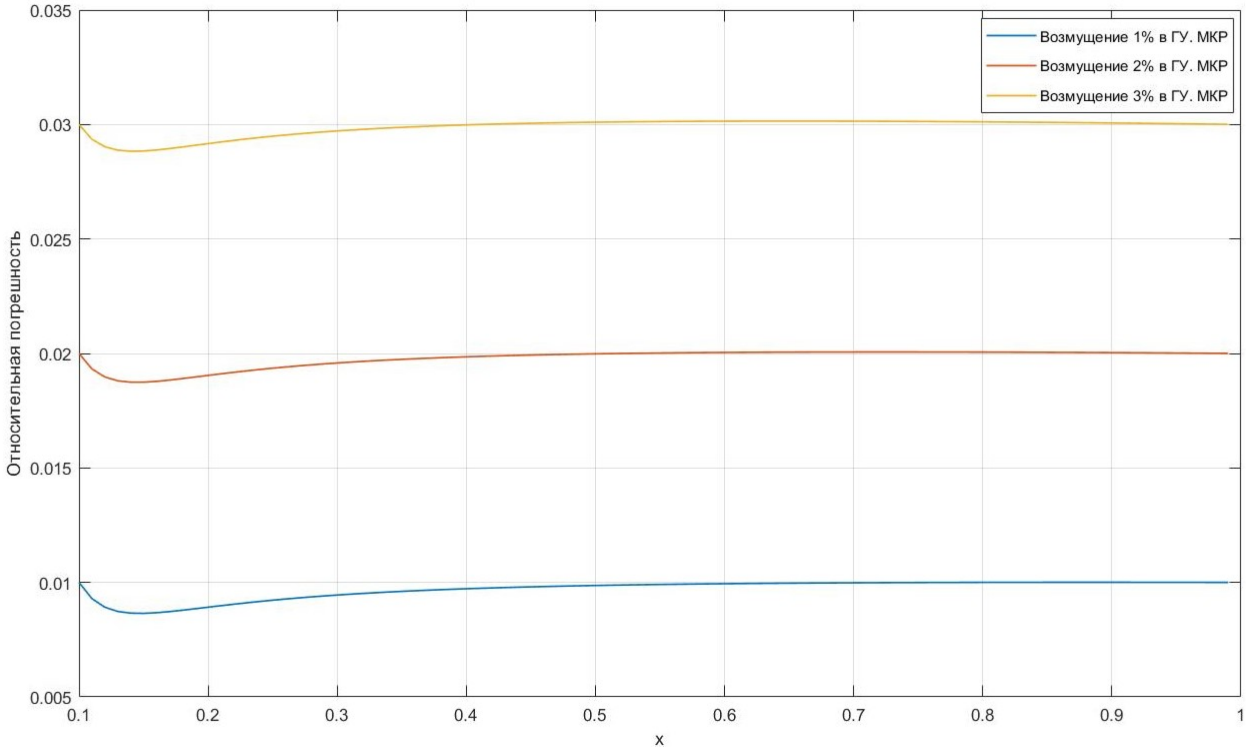

Рис 4.1. Зависимость относительной погрешности от x при δ в ГУ (МКР).

Сравним с методом стрельбы, добавив в этот график такие же зависимости

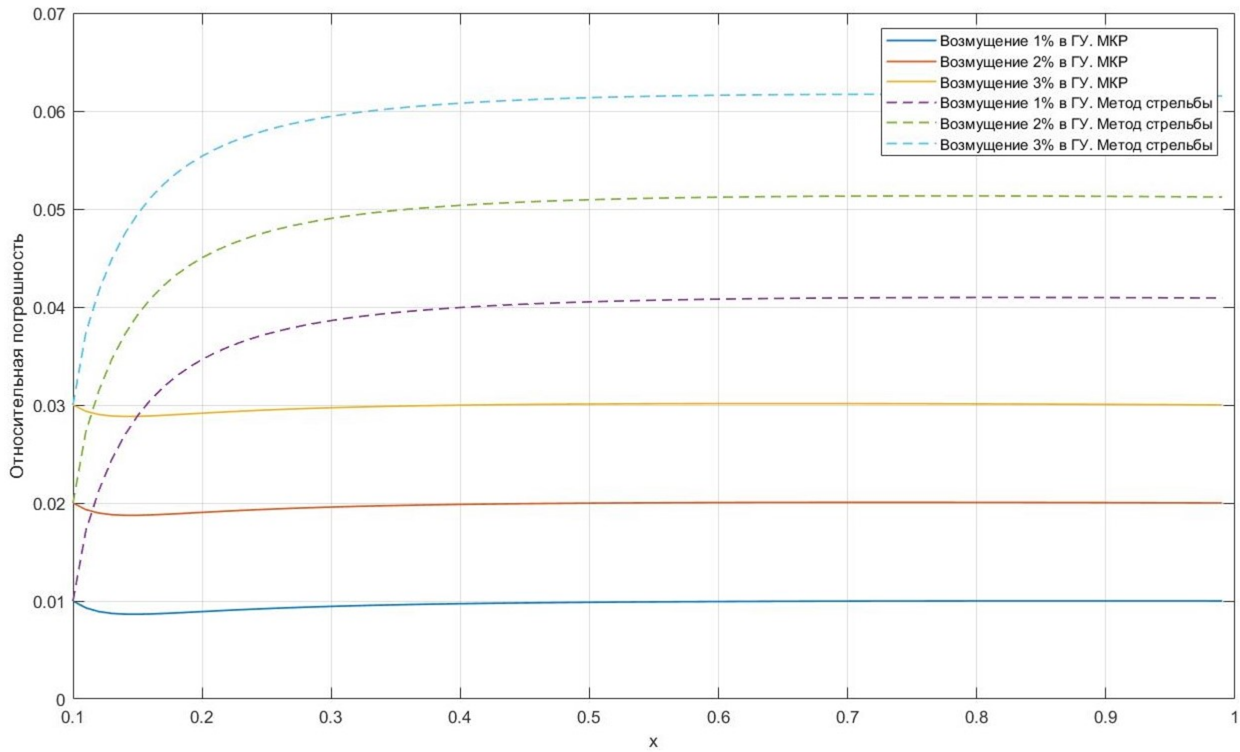

Рис 4.2. Зависимость относительной погрешности от x при δ в ГУ (МКР + метод стрельбы).

В данном случае метод конечных разностей выигрывает.

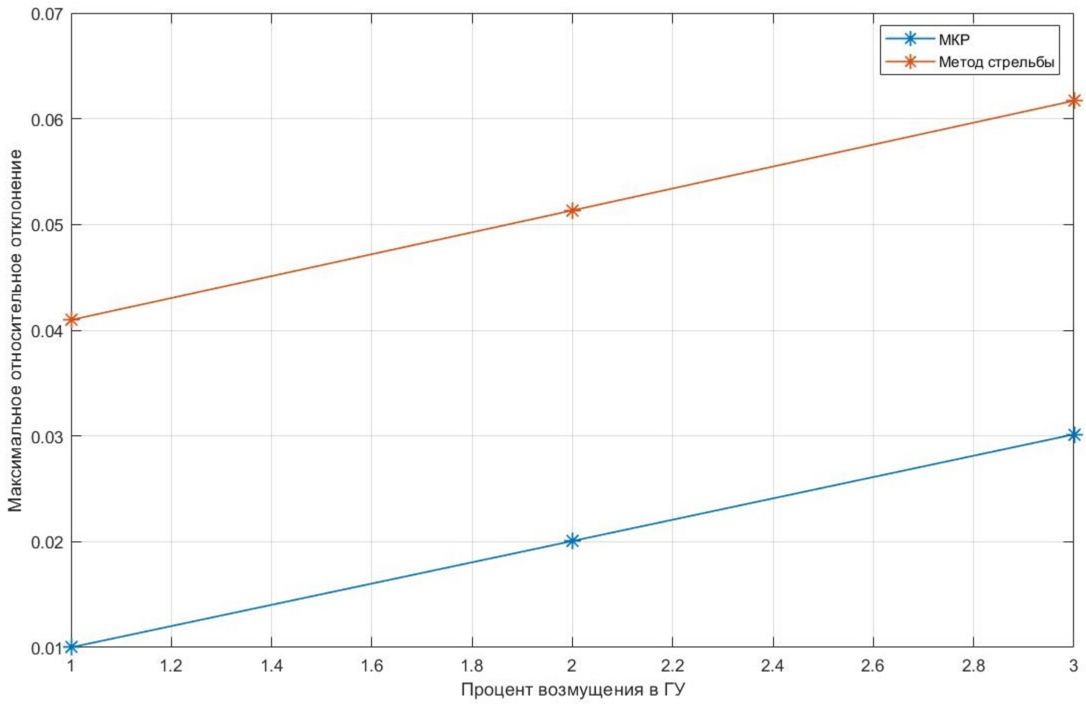

Рис 4.3. Зависимость максимальной относительной погрешности от процента возмущения δ в ГУ (МКР + метод стрельбы).

Сравним численно:

δ	Макс. ошибка МКР	Макс. ошибка метод стрельбы
1%	0.010007006085688	0.040973121940927
2%	0.020065412487985	0.051333266195254
3%	0.030149160302255	0.061703167704446

7.7.3. Зависимость погрешности от заданной точности

Теперь будем использовать правило Рунге. Будем задавать различную точность ϵ и посмотрим на погрешность.

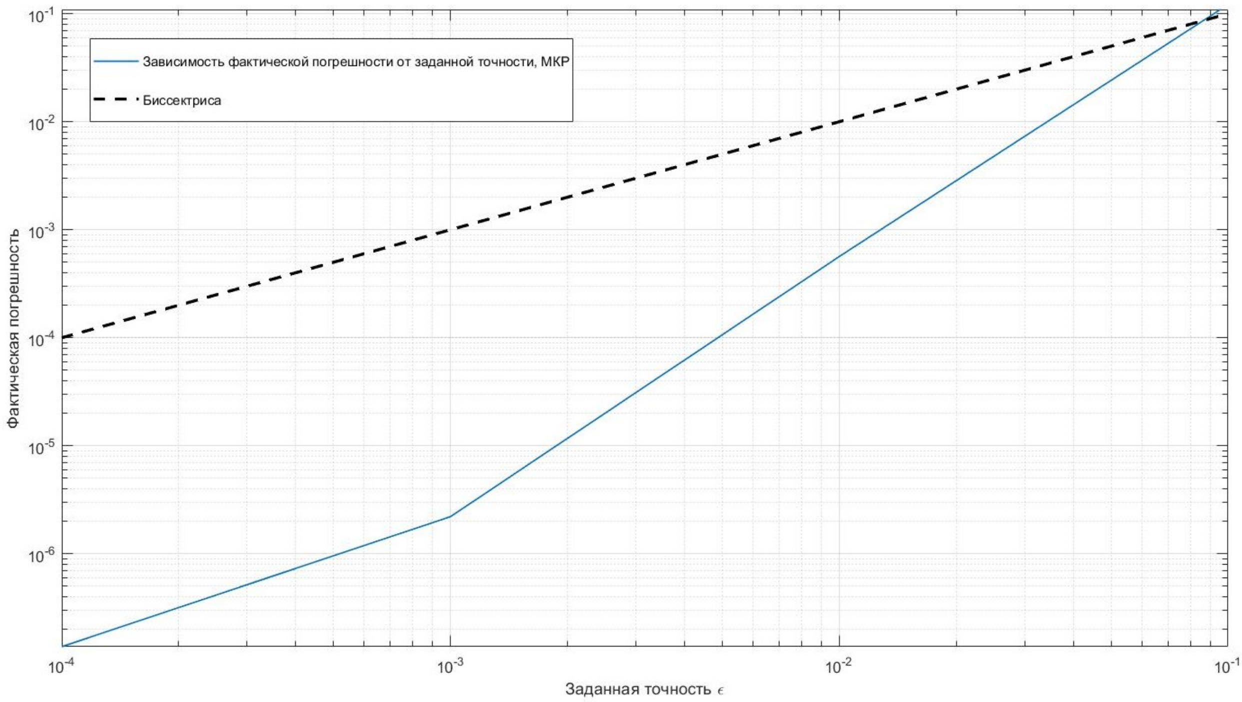

Рис 5. Зависимость факт. погрешности от заданной ϵ (МКР).

Как видно, метод обеспечивает требуемую точность.
Теперь сравним с методом стрельбы. Полученную зависимость из 7 лабораторной работы совместим с этой и оценим полученный результат.

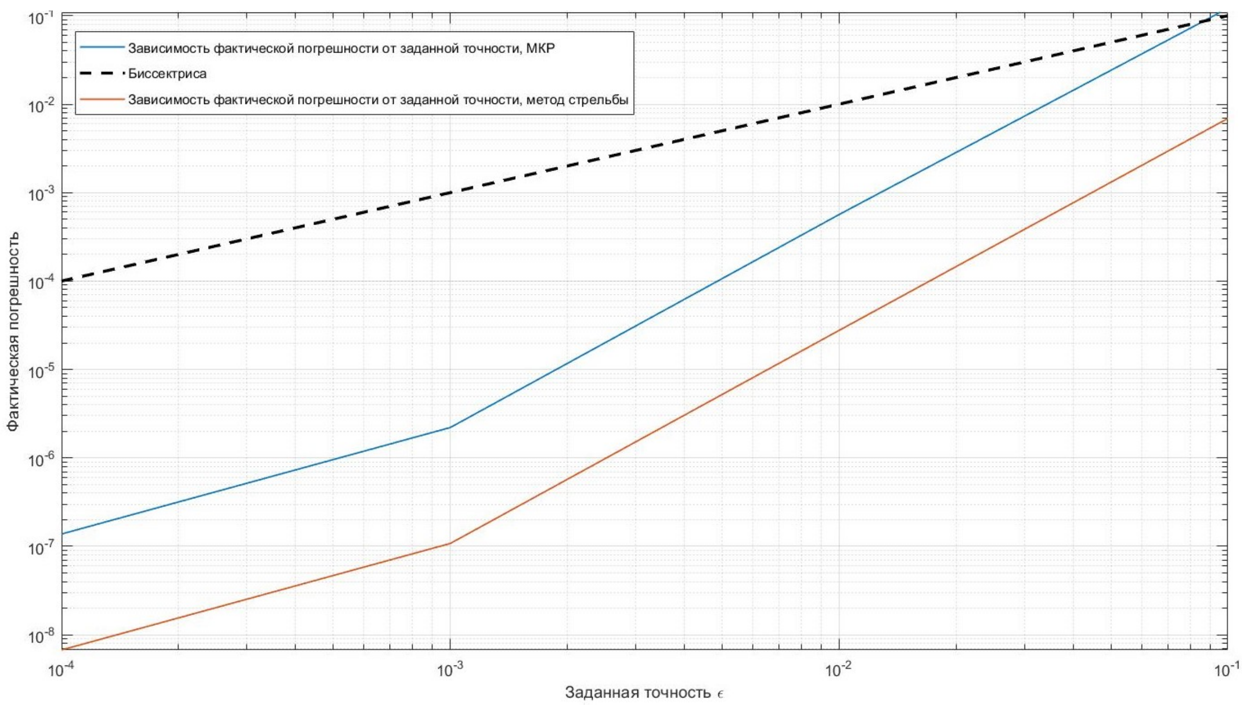

Рис 6. Зависимость факт. погрешности от заданной ϵ (МКР + метод стрельбы).

Таким образом мы видим, что оба метода обеспечивают требуемую точность - она всегда достигается. Более точным оказался метод стрельбы. Для обоих методов использовалось следующее условие остановки:

$$\frac{|y_{i,h} - y_{i,\frac{h}{2}}|}{3} < \epsilon$$

7.8. Выводы

Был исследован метод конечных разностей. Метод достаточно прост в реализации, задача сводится к решению системы линейных алгебраический уравнений с трехдиагональной матрицей, которая в свою очередь решается высокоэффективным методом прогонки.
Для сравнения был взят метод пристрелки, идея которого состоит в сведении к задаче Коши. Был проведен сравнительный анализ методов по устойчивости и точности: влияние шага интегрирования, возмущений. При возмущениях методы себя вели по разному, но устойчивость обоих методов достаточно хороша. К примеру, исходя из рис. 4.3, мы можем посмотреть на проценты погрешности и возмущения: для МКР погрешность 1% при возмущении 1%, 2% при возмущении 2% и 3% при возмущении 3%. Это очень хороший результат, свидетельствующий о устойчивости метода. Для метода стрельбы, результаты соответственно следущие: погрешность 4% при возмущении 1%, 5.1% при возмущении 2% и 6.1% при возмущении 3%, что тоже неплохо.
Так же с помощью правила Рунге в обоих методах возможно было строить решение с наперед заданной точностью ϵ и были получены зависимости 5 и 6. В основном, метод стрельбы оказался более точным, чем метод конечных разностей.