FUNGSI ALJABAR

Fungsi aljabar adalah suatu fungsi elementer yang diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar(penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pemangkatan, dan penarikan akar ke-n, n = 2,3,…) atas *fungsi konstan* y = k dan *fungsi identitas* y = x. Fungsi elementer yang bukan fungsi aljabar dinamakan *fungsi transenden.*

Contoh

$$f(x) = \frac{x}{x-1},\ g(x) = \sqrt{1-2x},\ \text{dan } h(x) = \frac{3x}{1+\sqrt[3]{x}}$$

semuanya adalah fungsi aljabar karena diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar atas y = k dan y = x. Tetapi fungsi

$$f(x) = \cos x,\quad g(x) = 2^x,\qquad \text{dan } h(x) = \log(1 + x^2)$$

Semuanya bukan fungsi aljabar karena tidak mungkin diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar atas y = k dan y = x.

Suku banyak Bentuk umumnya adalah

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Disini a_o, a_1,R, a_n dinamakan koefisien suku banyak, a_o dinamakan *koefisien pemuka (leading coefficient).* Bila $a_o \neq 0$, derajat suku banyak ini adalah n.

Kasus n = 1: Fungsi linier

Bentuk umum fungsi linier adalah y = f(x) = ax + b. Daerah asal dan daerah nilai fungsi linier adalah

$$D_f = R \text{ dan } R_f = \begin{cases} R, bila. a \neq 0 \\ \{b\}, bila, a = 0 \end{cases}$$

Grafik fungsi linear adalah garis lurus. Berbagai sifat tentang ini telah dipelajari pada Pasal 1.3. Sistem Koordinat dan Garis Lurus.

Kasus n = 2: Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah y = f (x) = $ax^2 + bx + c$, a $\neq$ 0. Daerah asal fungsi ini adalah D_f = R Untuk menentukan daerah nilainya, tulislah

(*) $$y = f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a}, a \neq 0$$

Dengan D = $b^2 - 4ac$. Bilangan real D dinamakan diskriminan bentuk kuadratnya. Dari bentuk ini diperoleh f (x) $\geq \frac{-D}{4a}$ bila a > 0, dan f(x) $\leq \frac{-D}{4a}$ bila a < 0. Jadi daerah nilai fungsi kuadrat adalah

$$R_f = \left[\frac{-D}{4a}, +00\right) \text{ bila } a > 0, \quad \text{dan} \quad R_f = \left(-00, \frac{-D}{4a}\right] \text{ bila } a < 0$$

Dari bentuk (*) juga diperoleh

$$f(x) > \forall \in R \Leftrightarrow a > 0 \text{ dan } D < 0$$

$$f(x) < \forall \in R \Leftrightarrow a < 0 \text{ dan } D < 0$$

Fungsi kuadrat yang nilainya selalu positif untuk setiap x $\in$ R dinamakan *definit positif*, syaratnya adalah a > 0 dan D < 0. Fungsi kuadrat yang nilainya selalu negatif untuk setiap x $\in$ R dinamakan *definit negatif*, syaratnya adalah a < 0 dan D < 0.

Grafik fungsi kuadrat dinamakan parabol. Pada fungsi kuadrat y = $\pm x^2 + k$, bila peranan x diganti oleh (-x), maka akan diperoleh bentuk yang sama. Akibatnya, grafik fungsi ini simetri terhadap sumbu y (garis x = 0). Berdasarkan ini diperoleh bahwa grafik fungsi kuadrat

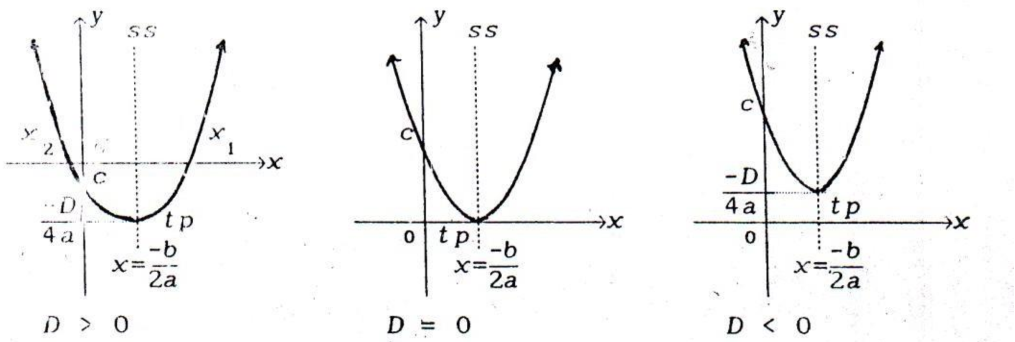
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a}, a \neq 0$$

Simetri terhadap garis x = $\frac{-b}{2a}$. (Jelaskan mengapa!). Garis x = $\frac{-b}{2a}$ ini dinamakan *sumbu simetri parabol.*

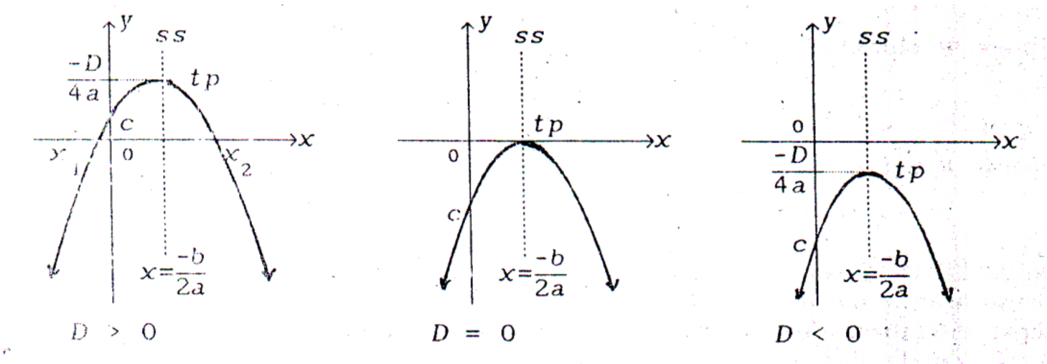
Sifat grafik fungsi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ adalah sebagai berikut

- Parabol terbuka ke atas bila $a > 0$, dan terbuka ke bawah bila $a < 0$.
- Titik $\left[\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right]$ dinamakan titik puncak parabol.
- Untuk kasus $D > 0$, parabol memotong sumbu x di titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ dengan $x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{4a}$ dan $x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$. Untuk kasus ini, $x_1 > x_2$ bila $a > 0$ dan $x_1 < x$ bila $a < 0$.
- Untuk kasus $D = 0$, parabol menyinggung sumbu x di titik $\left[\frac{-b}{2a}, 0\right]$.
- Untuk kasus $D < 0$, parabol terletak di atas sumbu x bila $a > 0$ (definit positif), dan terletak di bawah sumbu x bila $a < 0$ (definit negatif).

Pada Gb. 29 dn Gb.30 diperlihatkan parabol untuk semua kasus yang mungkin.



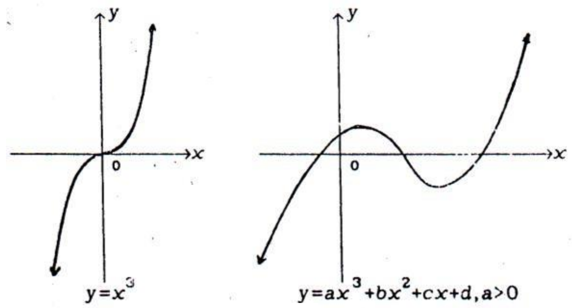
Gb.4. Parabol untuk kasus a > 0



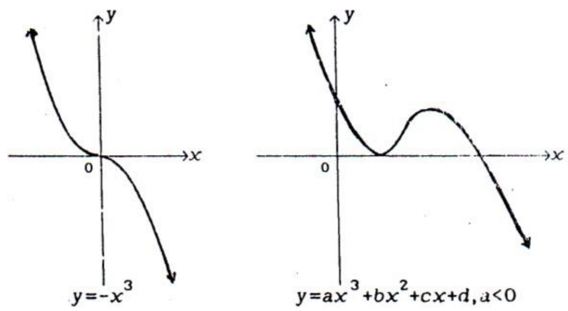
Gb.5 Parabol untuk kasus a < 0

Kasus n = 3: Fungsi kubik (Pangkat tiga)

Bentuk umum fungsi kubik adalah $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Daerah asal dan daerah nilai fungsi ini adalah $D_f = R$ dan $R_f = R$. Fungsi ini selalu memotong sumbu x, paling sedikit di satu titik. Untuk kasus $a > 0$, grafiknya mempunyai dua kemungkinan, selalu naik, atau mempunyai dua titik pundak. Demikian juga untuk kasus $a < 0$, grafiknya selalu turun, atau mempunyai dua titik puncak. Perhatikan Gb.31. dn Gb.32 yang memperlihatkan model grafik untuk fungsi ini untuk kasus $a > 0$, dan $a < 0$.



Gb.31. Grafik $f(x) = ax^3 + bx^3 + cx + d$ untuk kasus $a > 0$



Gb.6. Grafik $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ untuk kasus $a < 0$

Fungsi Rasional Bentuk umum fungsi rasional adalah

$$y = f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \text{ A dan B suku banyak}$$

daerah asal fungsi ini adalah

$$D_f = \{ x \in R : B(x) \neq 0 \} = R - \{ x \in R : B(x) = 0 \}$$

Untuk kasus Adan B berbentuk linear, daerah nilainya dapat ditentukan dengan menyatakan x dalam y. Untuk kasus A atau Bberbentuk kuadrat, daerah nilainya dapat ditentukan dengan sifat diskriminan dari bentuk kuadrat dalam x dan y.. Secara umum, daerah nilai fungsi rasional sukar ditentukan.

Fungsi Irasional Bentuk umum fungsi irasional adalah

$$y = f(x) = \sqrt[n]{g(x)}, \text{ g fungsi rasional, n = 2, 3,} \ldots$$

Daerah asal fungsi ini adalah $D_f = \{x \in R : g(x) \geq 0\}$ bila n bilangan genap, dan $D_f = D_g$ bila n bilangan ganjil.

FUNGSI TRIGONOMETRI

Ukuran sudut

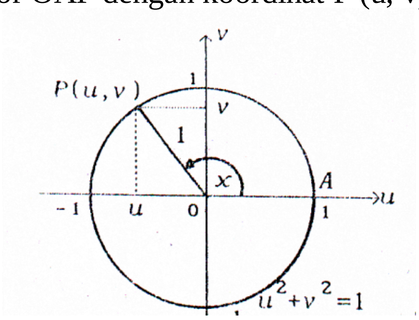
- Satu derajat, ditulis 1^o, adalah besarnya sudut pusat lingkaran di hadapan busur lingkaran yang panjangnya 1/360 keliling lingkaran.
- Satu radian, ditulis 1 rad, atau 1, adalah besarnya sudut pusat lingkaran berjari-jari r dihadapan busur lingkaran yang panjangnya juga r satuan.
- Hubungan antara ukuran derajat dan radian :

$$2\pi \text{ radian} = 360^o = \text{satu keliling lingkaran}$$

$$1^o = \frac{2\pi}{360^o} \approx 0{,}0175 \text{ rad,} \qquad \text{dan} \qquad 1 \text{ rad} = \frac{360^o}{2\pi} \approx 57{,}3^o$$

FUNGSI TRIGONOMETRI

Dalam lingkaran satuan $u^2 + v^2 = 1$, tetapkan sudut pusat x, $0 \leq x \leq 2\pi$ sehingga diperoleh sector OAP dengan koordinat P (u, v), perhatikan Gb. 33.



Gb. 7

Disini x adalah *sudut positif* karena diukur dari sumbu u positif ke *OP berlawanan arah putaran jarum jam. Sudut negatif* adalah sudut yang diukur dari sumbu u positif ke *OP searah dengan putaran jarum jam.*

Fungsi trigonometri dar x, x = <AOP, A (1,0) P (u,v) didefinisikan sebagai berikut.

Cosinus sudut x : cos x = absis titik P (u,v) = u

Sinus sudut x : sin x ordinat titik P (u, v) =

Tangent sudut x : tan x = $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v}{u}$, u ≠ 0

Contangent sudut x : cot x = $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u}{v}$, v ≠ 0

Secant sudut x : sec x = $\frac{1}{\cos x} = \frac{i}{u}$, u ≠ 0

Cosecant sudut x : csc x = $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{v}$, v ≠ 0

Karena u dan v memenuhi $u^2 + v^2 = 1$, maka $-1 \leq u \leq 1$ dan $-1 \leq v \leq 1$, jadi $-1 \leq \cos x \leq 1$ dan $-1 \leq x \leq 1$

Jika x = ∠AOP dengan A (1,0) dan P (u,v), maka –x = ∠AOQ dengan Q (u,v). Jadi sudut –x dan x berbeda hanya arah pengukuran sudutnya. Akibatnya kita mempunyai hubungan antara fungsi trigonometri sudut x dan sudut –x sebagai berikut.

Cos (-x) = cos x

Sin (-x) = -sin x

Tan (-x) = -tan x

cot (-x) = -cot x

sec (-x) = sec x

csc (-x) = -csc x

Karena titik P (u,v) terletak pada lingkaran satuan $u^2 + v^2 = 1$, maka dari definisi u = cos x dan v = sin x diperoleh rumus berikut yang dikenal sebagai kesamaan Pythagoras.

$$\mathrm{Cos}^2 x + \sin^2 x = 1$$

Bila kedua ruas kesamaan Pythagoras dibagi oleh $\cos^2 x$, maka diperoleh

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ n bilangan bulat}$$

Kita mempunyai dua titik pada lingkaran satuan $u^2 + v^2 = 1$, P (cos x, sin x) dan Q (cos y, din y), dengan x = $\angle$(OP, sb-x positif) dan y = $\angle$(OQ, sb-x positif). Berdasarkan rumus jarak dua titik diperoleh

$$PQ^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$
$$= 2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

Disini $\angle$POQ = $|x - y|$, dengan cos $\angle$POQ = cos $|x - y|$ = cos (x – y). Bila titik Q digeserkan ke titik (1,0) maka Q (1,0) dan P (cos) $|x - y|$, sin $|x - y$, sehingga

$$PQ^2 = (\cos |x - y| - 1)^2 + \sin^2 (x + y) = 2 - 2\cos (x - y)$$

Jadi kita mempunyai kesaman penting berikut, yang berlaku $\forall$ x,y $\in$ R

$$\text{Cos } (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Bila peranan y digantikan oleh –y, dengan menggunakan rumus cos (-y) = cos y dan sin (-y) = -sin y diperoleh

$$\text{Cos } (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Dari dua rumus terakhir kita mempunyai kaitan antara sinus dan cosinus, yaitu

$$\text{Cos } (\frac{\pi}{2} - x) \quad \sin x = -\cos (\frac{\pi}{2} + x)$$

Tulislah t = $\frac{\pi}{2} - x$, maka x = t - $\frac{\pi}{2}$, sehingga sin (t- $\frac{\pi}{2}$) = -cos t. Dari sini diperoleh :

$$\text{Sin } (\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

Dengan menggunakan kedua rumus terakhir dan rumus cosinus selisih dua sudut diperoleh :

$$\begin{aligned} \text{Sin } (x + y) &= \cos (\frac{\pi}{2} - (x + y) = \cos ((\frac{\pi}{2} - x) - y) \\ &= \cos (\frac{\pi}{2} - x) \cos y + \sin (\frac{\pi}{2} - x) \sin y \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

Bila peranan y digantikan oleh –y, dengan menggunakan rumus cos (-y) = cos y dan sin (-y) = -sin y diperoleh :

$$\text{Sin } (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Kesimpulan Kita telah mengkonstruksi empat rumus trigonometri berikut.

(1) Cos (x – y) = cos x cos y + sin x sin y

(2) Cos (x + y) = cos x cos y - sin x sin y

(3) Sin (x + y) = sin x cos y + cos x sin y

(4) Sin (x – y) = sin x cos y - cos x sin y

Jumlah dan selisih rumus (1) dan (2) menghasilkan

(5) Cos (x – y) + cos (x + y) = 2 cos x cos y

(6) Cos (x – y) - cos (x + y) = 2 sin x sin y

Misalkan s = x – y dan t = x + y, maka x = $\frac{s+t}{2}$ dan y = $-\frac{s-t}{2}$, akibatnya

(7) Cos s + cos t = 2 cos $\frac{s+t}{2}$ cos $\frac{s-t}{2}$

(8) Cos s – cos t = -2 sin $\frac{s+t}{2}$ sin $\frac{s-t}{2}$

Jumlah dan selisih rumus (3) dan (4) menghasilkan

(9) Sin (x + y) + sin (x – y) = 2 sin x cos y

(10) Sin (x + y) – sin (x – y) = 2 cos x sin y

Misalkan s = s + y dan t = x – y,maka x = $\frac{s+t}{2}$ cos $\frac{s-t}{2}$, akibatnya

(11) Sin s + sin t = 2 sin $\frac{s+t}{2}$ coss $\frac{s-t}{2}$

(12) Sin s – sin t = 2 cos $\frac{s+t}{2}$ sin $\frac{s-t}{2}$

Hasil bagi rumus (3) dan (2) menghasilkan

$$\text{Tan } (x + y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Bila peranan y digantikan oleh –y, dengan menggunakan rumus tan (-y) = -tan diperoleh rumus

$$\tan (x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Jadi kita mempunyai rumus berikut tentang tanget dari sudut ganda

(13) $\tan (x + y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

(14) $\tan (x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Bila pada rumus (2), (3) dan (13), peranan y digantikan oleh x, maka kita mempunyai rumus tentang sudut ganda berikut.

(15) $\text{Cos } 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

(16) $\text{Sin } 2x = 2 \sin x \cos x$

(17) $\text{Tan } 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Dengan menggunakan rumus $\cos^2 x = \dfrac{1}{\sec^2 x} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$ diperoleh

$$\text{Sin } 2x = 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Dan

$$\text{Cos } 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1 = \frac{2 - 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

Jadi kita mempunyai dua rumus penting berikut tentang kaitan sinus dan cosinus sudut gnda dengan nilai tangentnya.

(18) $\text{Sin } 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(19) $\text{Cos } 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

Dari rumus (2), (3) dan (13), diperoleh hasil berikut yang menyatakan periode fungsi trigonometri.

(20) Cos $(x + 2n\pi) = \cos x$, n bilangan bulat

(21) Sin $(x + 2n\pi) = \sin x$, n bilangan bulat

(22) Tan $(x + 2n\pi) = \tan x$, n bilangan bulat

(23) Cot $(x + 2n\pi) = \cot x$, n bilangan bulat

(24) Sec $(x + 2n\pi) = \sec x$, n bilangan bulat

(25) Csc $(x + 2n\pi) = \csc x$, n bilangan bulat

Kita dapat menentukan kaitan antara konstanta a, b, k, dan θ agar hubungan

$$a \cos x + b \sin x = k \cos (x - \theta)$$

berlaku untuk setiap nilai x. Dari bentuk yang diinginkan kita mempunyai

$$a \cos x + b \sin x = (k \cos \theta) \cos x + (k \sin \theta) \sin x$$

Karena hubungan ini berlaku $\forall\ x \in R$, maka $a = k \cos \theta$ dan $b = k \sin \theta$. Dari sini diperoleh

$$a^2 + b^2 = k^2, \quad \text{atau} \quad k = \sqrt{a^2} + b^2$$

dan sudut θ memenuhi

$$\cos \theta = a / \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{dan} \quad \sin \theta = b / \sqrt{a^2 + b^2}$$

Akibatnya, kita mempunyai kesamaan

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \le a \cos x + b \sin x \le \sqrt{a^2} + b^2$$

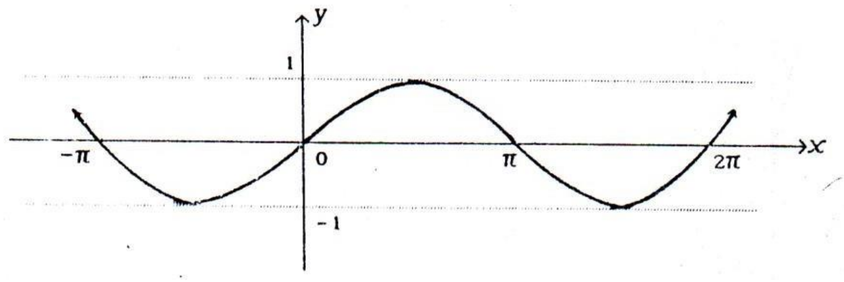
Catatan Hasil terakhir dapat juga diperoleh dengan membuat kesamaan

$$a \cos x + b \sin x = \mathbf{I} \sin (x + \varphi)$$

Grafik Fungsi Trigonometri

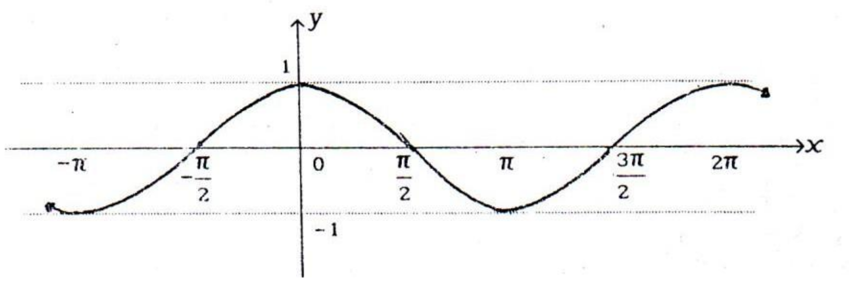
Berdasarkan konstruksinya, kaitan antara setiap nilai trigonometri dengan sudutnya membentuk suatu fungsi.

- *Fungsi sinus* : f (x) = sin x, D_f = R, R_f = [-1,1], f(x + 2π) = f (x) R x ∈ R
  Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.8.



Gb.8, grafik fungsi f (x) = sin x

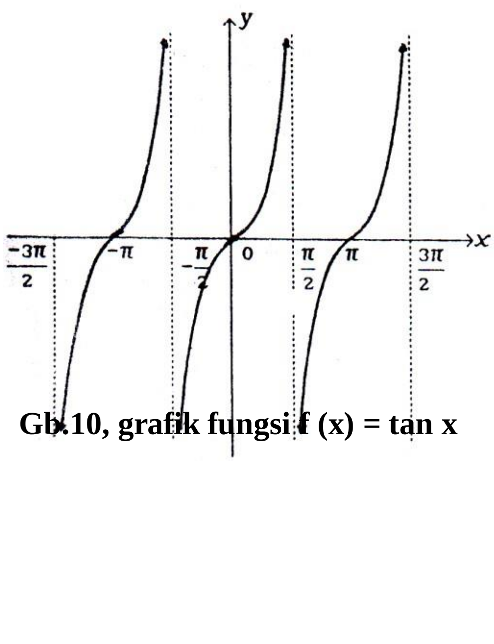
- *Fungsi cosinus* : f (x) = cos x, D_f = R, R_f = [-1,1], f (x + 2π) = f (x) R x ∈ R.
  Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.9

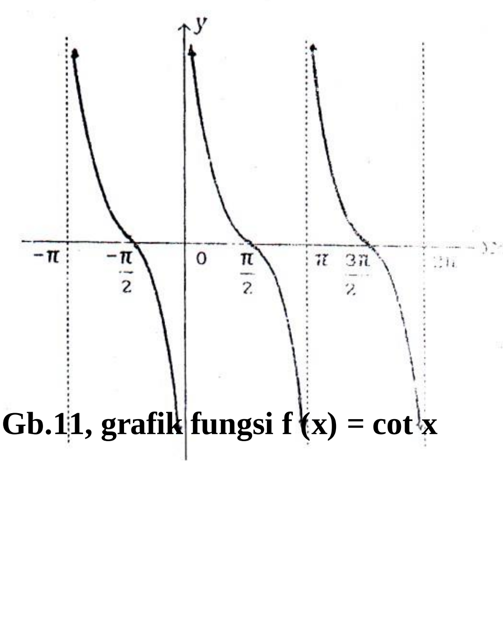


Gb.9, grafik fungsi f (x) = cos x

- *Fungsi tangent* : f (x) = tan x, D_f = R - {x : x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + nπ, n bilangan bulat}.

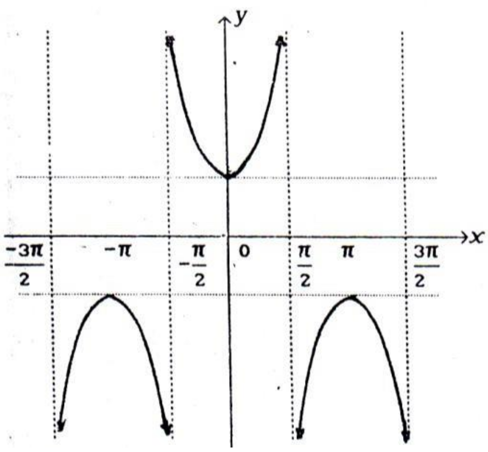
  R_f = R, f (x + π) = f (x) R x ∈ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.10



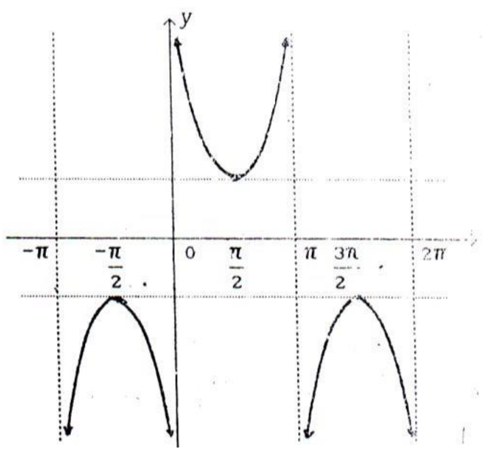


Gb.10, grafik fungsi f (x) = tan x **Gb.11, grafik fungsi f (x) = cot x**

- *Fungsi contangent* : f (x) = cot x, D_f = R - {x : x $\neq$ nπ, n bilangan bulat), R_f = R, f (x + π) = f (x) R x $\in$ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.37.
- *Fungsi secant* : f (x) = sec x, D_f = R - {x : x $\neq$ $\frac{\pi}{2}$ + nπ, n bilangan bulat, R_f = (-00,-1] $\cup$ [1,+00), f (x + 2π) = f (x) R x $\in$ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.12



Gb.12 grafik fungsi f (x) = sec



Gb. 13 grafik fungsi fungsi f (x) = csc x

- *Fungsi cosecant* : f (x) = csc x, D_f = R - {x : x $\neq$ nπ, n bilangan bulat}, R_f = (-00,-1] $\cup$ [1,+00), f (x + 2π) = f (x) /// x $\in$ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.13

Contoh. *Daerah nilai fungsi trigonometri*

Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi f (x) = $\sin^2$x + sin x.

Jawab

Karena fungsi sinus terdefinisi untuk setiap x $\in$ R, maka daerah asal fungsi f adalah D_f = R Untuk menentukan daerah nilai fungsi f, tulislah

$$f(x) = (\sin x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

Gunakan batas nilai fungsi sinus dan sifat pertaksamaan untuk memperoleh batas nilai f (x), prosesnya sebagai berikut.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x + \frac{1}{2} \leq 1\frac{1}{2}$$

$$0 \leq (\sin x + \frac{1}{2})^2 \leq 2\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4} \leq (\sin x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \leq 2$$

$$-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$$

Jadi daerah nilai fungsi f adalah $R_f = [-\frac{1}{4}, 2]$.

Contoh. *Daerah nilai fungsi trigonometri*

Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x \quad \text{dan} \quad g(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$$

Jawab

Karena nilai fungsi cosinus dan sinus terdefinisi untuk setiap $x \in R$, maka daerah asal fungsi f dan g adalah $D_f = R$ dan $D_g = R$

Untuk menentukan daerah nilai fungsi f dan g, gunakan berbagai sifat fungsi trigonometri untuk memperoleh bentuk lain dari fungsi f dan g.

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

dan

$$g(x) = \cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^4 x - 3\sin^4 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

Kemudian gunakan batas nilai fungsi cosinus dan sifat pertaksamaan untuk memperoleh batas nilai f (x) dan g (x), prosesnya sebagai berikut.

$$-1 \leq \cos 4x \leq 1$$

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos 4x \leq 1$$

$$-\frac{3}{8} \leq \frac{3}{8} \cos 4x \leq \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1$$

Jadi daerah nilai fungsi f dan g adalah $R_f = [\frac{1}{2}, 1]$ dan $R_g = [\frac{1}{4}, 1]$.