Pi randomness

Rapport de projet de simulation

Année académique 2016-2017

Auteurs :
SALEMI Marco
LECOCQ Alexis

Directeurs :
BUYS Alain
-

29 mai 2017

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Les décimales de pi **3**

2.1 Test de χ^2 3

2.2 Test du poker 4

2.3 Le collectionneur de coupons 5

2.4 Interprétation des tests 8

3 Générateur de loi uniforme **9**

4 Comparaison avec le générateur par défaut de Python **10**

4.1 Test de Kolmogorov-Smirnov 11

4.2 Test de gap 13

4.2.1 Notre générateur sur Pi 13

4.2.2 Le générateur de python 15

4.3 Le collectionneur de coupons 17

4.4 Interprétation des tests 18

5 Conclusion **19**

1 Introduction

Dans le cadre du cours de simulation, nous avons été amenés à réaliser un projet afin de mettre en pratique la théorie vue au cours.

Les objectifs du projet sont :

1. analyser le caractère aléatoire des décimales de pi par des tests vus au cours ;
2. utiliser ces décimales pour construire un générateur de loi uniforme dans l'intervalle [0, 1[;
3. comparer le générateur du point 2 avec celui utilisé par défaut dans Python.

Pour ce faire, un fichier nous est fourni. Celui-ci contient les 1 000 000 premières décimales du nombre pi.

Le projet doit être réalisé en python et nous avons opté pour la version 3.

Nous avons utilisé 2 librairies externes afin d'afficher nos graphiques et accéder à la table de chi_2. Ces librairies sont **scipy** et **plotme**. Elles doivent donc être télécharger afin de compiler notre projet.

2 Les décimales de pi

2.1 Test de χ^2

Le premier test consiste à étudier le nombre d'apparitions de chaque décimale. Si la séquence suit une loi uniforme, l'ensemble des décimales apparaissent exactement le même nombre de fois.

Décimales	Valeur attendue	Valeur observée
0	100000.0	99959
1	100000.0	99758
2	100000.0	100026
3	100000.0	100229
4	100000.0	100230
5	100000.0	100359
6	100000.0	99548
7	100000.0	99800
8	100000.0	99985
9	100000.0	100106

FIGURE 1 – Tableau des décimales

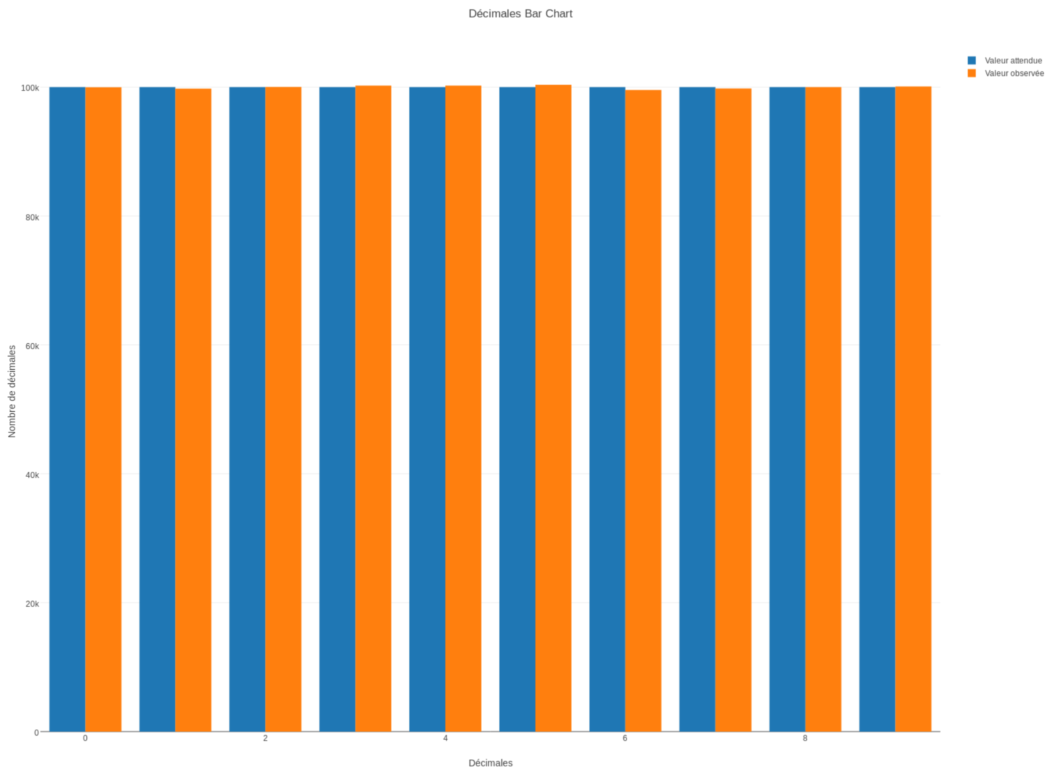


FIGURE 2 – Graphique des décimales

Comme nous pouvons le voir dans le tableau, le test est réussi pour tous les α choisis.

α	Valeur	Limite	Résultat
0.001	5.509	27.877	réussi
0.01	5.509	21.666	réussi
0.05	5.509	16.919	réussi
0.1	5.509	14.684	réussi

FIGURE 3 – Tableau du χ^2

2.2 Test du poker

Le test du poker consiste à prendre une suite de décimales (ici 5) et calculer le nombre de décimales différentes qui composent cette suite. Si la séquence suit une loi uniforme, la probabilité d'avoir r chiffres différents dans une séquence de longueur l est :

$$\frac{\left\{ \begin{matrix} l \\ r \end{matrix} \right\} \prod_{i=10-r+1}^{10} i}{10^l}$$

où $\left\{ \begin{matrix} l \\ r \end{matrix} \right\}$ est le nombre de Stirling.

Poker	Valeur attendue	Valeur observée
1	20	13
2	2700	2644
3	36000	36172
4	100800	100670
5	60480	60501

FIGURE 4 – Tableau du Poker

Comme nous pouvons le voir dans le tableau, le test est réussi pour tous les α choisis.

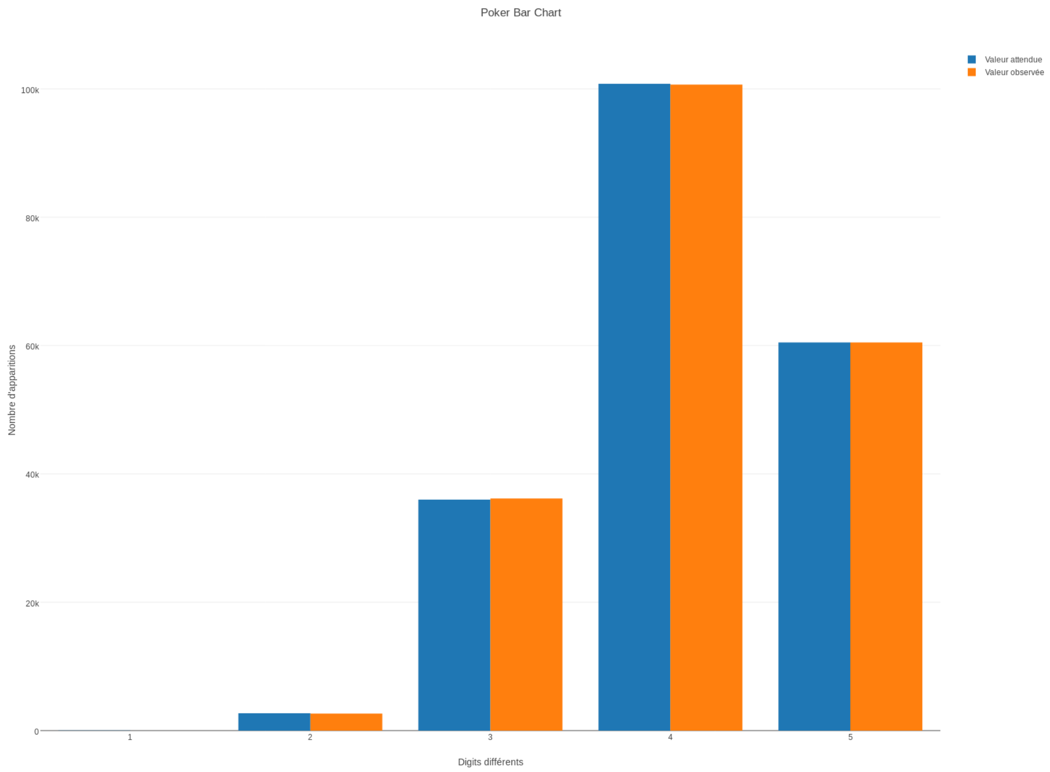


FIGURE 5 – Graphique du Poker

α	Valeur	Limite	Résultat
0.001	4.608	18.467	réussi
0.01	4.608	13.277	réussi
0.05	4.608	9.488	réussi
0.1	4.608	7.779	réussi

FIGURE 6 – Tableau du χ^2

2.3 Le collectionneur de coupons

Le collectionneur de coupons est un test permettant de vérifier si nos différentes décimales de Pi suivent une loi uniforme.

Le fonctionnement de ce test que nous avons adapté à notre problème se déroule comme ceci :
- Nous parcourons les différentes décimales de Pi dans l'ordre, en calculant le nombres de digits visités.
- Lorsque nous avons rencontrés tous les différents digits (de 0 à 9) dans une séquence donnée de taille r, nous gardons la valeur r en mémoire.
- Nous recommençons ensuite le procédé avec les décimales qui suivent

Nous obtenons ainsi les différentes occurrences de séquences de tailles r_i contenant tout les différents digits.

Nous comparons ensuite cette valeur à la valeur théorique suivant une loi uniforme, et ceci à l'aide d'un χ^2.

Nous calculons la valeur théorique à l'aide de la probabilité S_r ci-dessous. Celle-ci représente la probabilité de rencontrer r digits avant d'avoir rencontré tout les différents digits possibles. r est donc la longueur de la séquence contenants les digits.

où d est le nombre de différents digits possibles (il vaut 10 dans notre cas)

$$S_r = \frac{d!}{d^r}\left(\left\{ \begin{array}{c} r \\ d \end{array} \right\} - d \left\{ \begin{array}{c} r-1 \\ d \end{array} \right\}\right) = \frac{d!}{d^r}\left\{ \begin{array}{c} r-1 \\ d-1 \end{array} \right\}$$

FIGURE 7 – Graphique du Poker

Remarque : S_r sera égal à 0 lorsque r<d, donc lorsque r<10.

Ceci s'explique par le fait qu'il est impossible de rencontrer tout les différents digits, puisque la séquence est plus petite que le nombre des digits (qui vaut ici 10).

Nous obtenons donc le tableau de valeurs suivant pour les différentes longueurs de séquences , ainsi que le graphique correspondant, et le tableau représentant nos tests de χ^2. .

Collectionneur de coupons	Valeur attendue	Valeur observée
0-9	0	0
10	12.39307776	12
11	55.76884992	62
12	143.140048128	154
13	276.055807104	265
14	445.533624088	496
15	636.400653977	645
16	831.928596481	869
17	1017.20430344	1008
18	1180.91435762	1150
19	1315.83993579	1341
20	1418.52980752	1354
...	...	...
45	314.649867464	324
46	284.820911145	280
47	257.651373497	266
48	232.938892283	219
49	210.488959104	212
50	190.116510903	185
51	171.646916633	197
52	154.916499868	142
53	139.772710642	148
54	126.074036915	115
55	113.689727286	113
...	...	...
90	2.88994755473	0
91	2.60102568515	1
92	2.34098142576	4
93	2.10692993077	4
94	1.89627425595	0
95	1.7066766851	1
96	1.53603290049	1
97	1.38244871762	4
98	1.24421913165	0
99	1.11980944715	2
100	1.0078382854	0
101	0.907062283239	1

FIGURE 8 – Tableau du Collectionneur De Coupons 2

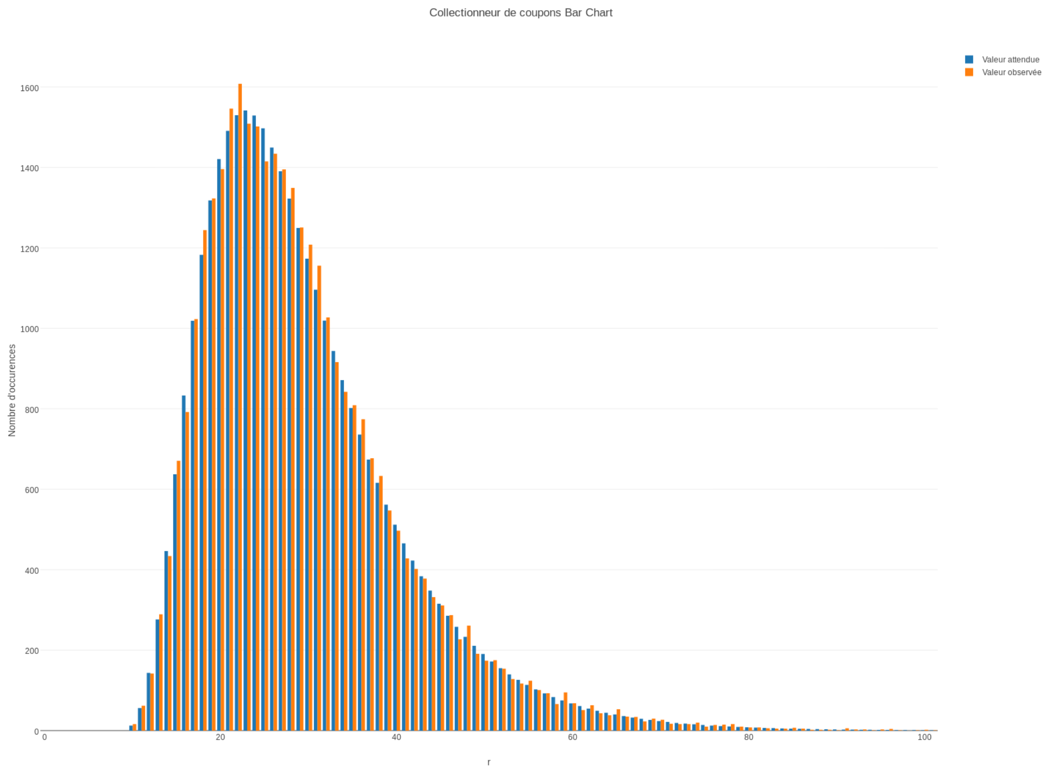


Figure 9 – Graphique du Collectionneur De Coupons

α	AValeur	Limite	Résultat
0.001	79.837	150.667055668	réussi
0.01	79.837	136.971003847	réussi
0.05	79.837	125.458419408	réussi
0.1	79.837	119.588667243	réussi

Figure 10 – Tableau de χ^2

Nous remarquons que les valeurs du tableau sont proches des valeurs théoriques. Ainsi que notre graphique suit la forme d'une gaussienne.

Ce test confirme donc que les décimales de Pi suivent bien une loi uniforme, car les différents tests de χ^2 sont respectés.

2.4 Interprétation des tests

D'après les tests effectués ci-dessus, les décimales de pi suivent une loi uniforme.

3 Générateur de loi uniforme

Notre générateur est très simple, il suit ces étapes :

1. lecture des 15 premiers chiffres à l'emplacement actuel comme un nombre ;
2. division de ce nombre par 10^{15} afin d'obtenir un nombre dans l'intervalle [0, 1[.

Quand nous arrivons à la fin du fichier, nous revenons au début pour que le générateur ne s'arrête jamais.

Afin que le générateur ne commence pas toujours la séquence au même emplacement, nous choisissons l'emplacement de départ en fonction d'un timestamp. Ce timestamp représente le nombre de millisecondes écoulées depuis le 1er janvier 1970 UTC.

La période de ce générateur est de 200 000. En effet, si le premier nombre est extrait du début du fichier, après 66 667 ($\lceil \frac{1000000}{15} \rceil$) mouvements de 15 caractères, nous nous retrouvons à 5 caractères après le début du fichier. Après 66 667 mouvements, nous nous retrouvons 10 caractères après le début du fichier. Si après 66 667 mouvements, nous aurions été 15 après le début du fichier, après 66 666 mouvements, nous revenons au début du fichier. Nous avons donc lu 3*66 666 $+2$ nombres aléatoires avant de relire le premier.

En tant que bons programmeurs, nous avons paramétré le nombre de digits lus pour générer un nombre aléatoire. Ainsi, le programmeur peut décider lui-même la balance entre une grande précision pour les nombres générés ou une grande période. En effet, si moins de digits sont lus, la précision d'un nombre sera plus petite mais la période aura tendance à s'agrandir.

4 Comparaison avec le générateur par défaut de Python

Nous allons maintenant comparer le caractère aléatoire de notre générateur avec celui utilisé par défaut dans Python (Mersenne Twister). Nous n'allons pas réutiliser ni le test du χ^2 ni le test du poker. Bien qu'il existe des méthodes de correspondance, d'autres tests sont plus appropriés pour tester des fonctions continues. Dans ces tests se trouve notamment le test de Kolmogorov-Smirnov.

4.1 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test vérifiant si les valeurs générés pseudo-aléatoirement sont réparties uniformément entre 0 et 1.

Pour effectuer ce test, nous générons 100 000 nombres avec notre générateur ainsi que 100 000 nombres avec le générateur de Python. Ensuite, nous divisons l'intervalle [0, 1] en 100 valeurs réparties uniformément. Pour chaque valeur, nous analysons la proportion de nombres de chaque générateur se trouvant en dessous de cette valeur. Nous comparons la proportion de chaque générateur avec la proportion attendue d'une loi uniforme et nous en prenons le plus grand écart (D_n).

À l'aide de la table de Kolmogorov-Smirnov, nous pouvons accepter ou refuser l'hypothèse disant que les générateurs suivent une loi uniforme.

Nous pouvons également aller plus loin et comparer les D_n obtenus pour chaque générateur Il est évident que le générateur ayant le plus petit D_n sera celui se rapprochant d'avantage de la loi uniforme.

X	Valeurs attendues	Valeurs de Pi	Valeurs de Python
0.01	0.01	0.01008	0.01019
0.02	0.02	0.02001	0.02041
0.03	0.03	0.03026	0.03055
0.04	0.04	0.03993	0.04118
0.05	0.05	0.04986	0.05164
0.06	0.06	0.05944	0.06145
0.07	0.07	0.06959	0.07172
0.08	0.08	0.0794	0.08185
0.09	0.09	0.08891	0.09194
0.1	0.1	0.09909	0.10154
...	...	...	...
0.45	0.45	0.44995	0.45082
0.46	0.46	0.4601	0.46057
0.47	0.47	0.47026	0.47057
0.48	0.48	0.48063	0.48064
0.49	0.49	0.49032	0.49075
0.5	0.5	0.50059	0.50101
0.51	0.51	0.51073	0.51043
0.52	0.52	0.52031	0.52009
0.53	0.53	0.53065	0.53072
0.54	0.54	0.54064	0.54095
0.55	0.55	0.55076	0.55057
...	...	...	...
0.9	0.9	0.8998	0.90023
0.91	0.91	0.90979	0.91049
0.92	0.92	0.91907	0.92049
0.93	0.93	0.92897	0.93025
0.94	0.94	0.93927	0.94029
0.95	0.95	0.94987	0.95097
0.96	0.96	0.95941	0.96029
0.97	0.97	0.96985	0.96935
0.98	0.98	0.9798	0.97962
0.99	0.99	0.98989	0.98957

FIGURE 11 – Tableau de Kolmogorov-Smirnov

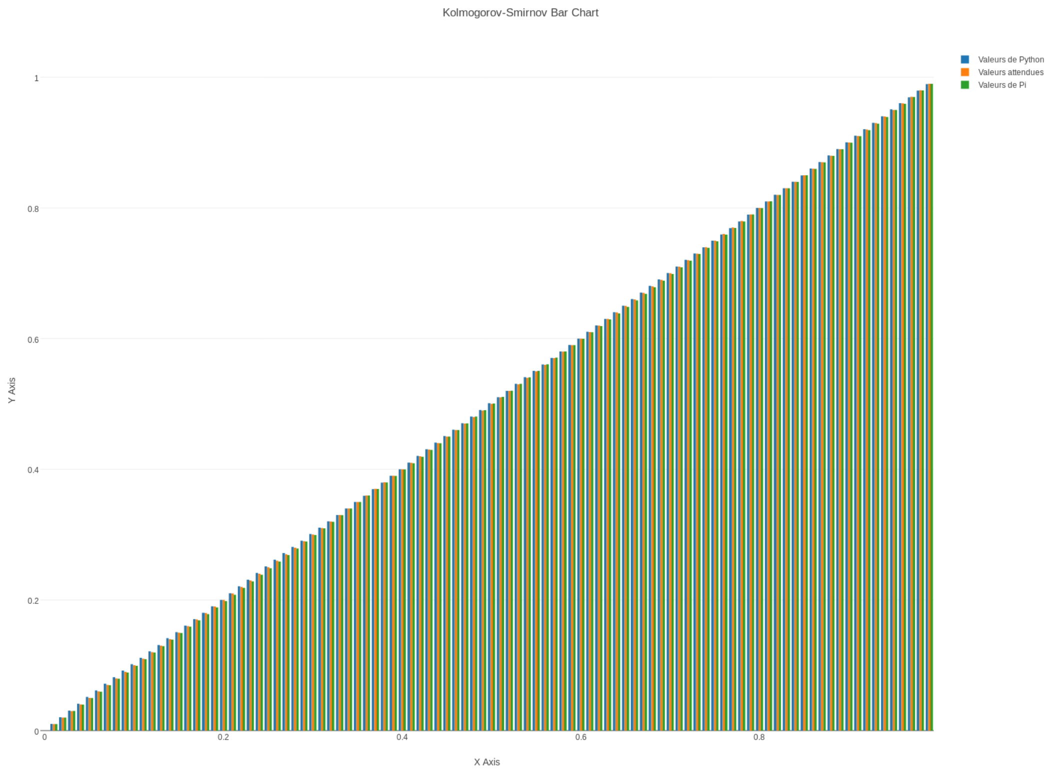


Figure 12 – Graphique de Kolmogorov-Smirnov

α	Valeur Pi	Valeur Python	Limite	Meilleur
0.001	0.00212	0.00194	0.006165	Python
0.01	0.00212	0.00194	0.005147	Python
0.05	0.00212	0.00194	0.004295	Python
0.1	0.00212	0.00194	0.00387	Python

Figure 13 – Tableau des D_α

Nous remarquons que le générateur de Python est meilleur dans ce test. Cependant, si on répète ce test, il est possible d'obtenir des résultats différents. En effet, tant que le nombre de nombres générés sera inférieur au plus petit commun multiple entre la période des deux générateurs, nous obtiendrons des nombres et donc des résultats différents.

4.2 Test du gap

Le test du gap est un test vérifiant la grandeur des trous (gap en anglais) séparant des nombres faisant partie d'un même intervalle.

Ce test se fait en différentes étapes :
- Nous générons n nombres à travers nos générateurs de nombres aléatoires.
- Nous choisissons un intervalle $[a, b] \in [0, 1]$ (nous avons ici choisis a=0 et b =1/2 pour un temps de calcul optimal).
- Nous marquons les nombres se trouvant dans cet intervalle
- Nous calculons les distances entre chaque nombres marqués (nous notons r_i les différentes distances.

Nous obtenons ainsi les différentes occurrences r_i que nous appelons les gaps (trous en anglais), et pouvons les comparer à l'aide d'un χ^2 avec les valeurs théoriques attendues :

$$r_i = Np(1-p)^i$$

$$r_{>i} = N(1-p)^{i+1}$$

où N est le nombres total de gaps observés

p est la probabilité d'être dans l'intervalle $|b - a|$

Nous avons donc effectuer ce test sur notre générateur pseudo-aléatoire et le générateur de python.

4.2.1 Notre générateur

Ci-dessous nous avons illustrer les occurrences pour les différents gaps obtenus dans un tableau et à l'aide d'un graphique. Nous avons fixé la limite à 15 afin d'éviter les classes vides, ces dernières étant néfastes au test de χ^2.

APi Gap	Valeur attendue	Valeur observée
0	250101.000	250067
1	125050.500	125248
2	62525.250	62273
3	31262.625	31471
4	15631.312	15616
5	7815.656	7860
6	3907.828	3826
7	1953.914	1898
8	976.957	954
9	488.479	471
10	244.239	252
11	122.120	135
12	61.060	66
13	30.530	30
14	15.265	19
> 15	15.265	16
Total	500202	500202

FIGURE 14 – Tableau de Pi Gap

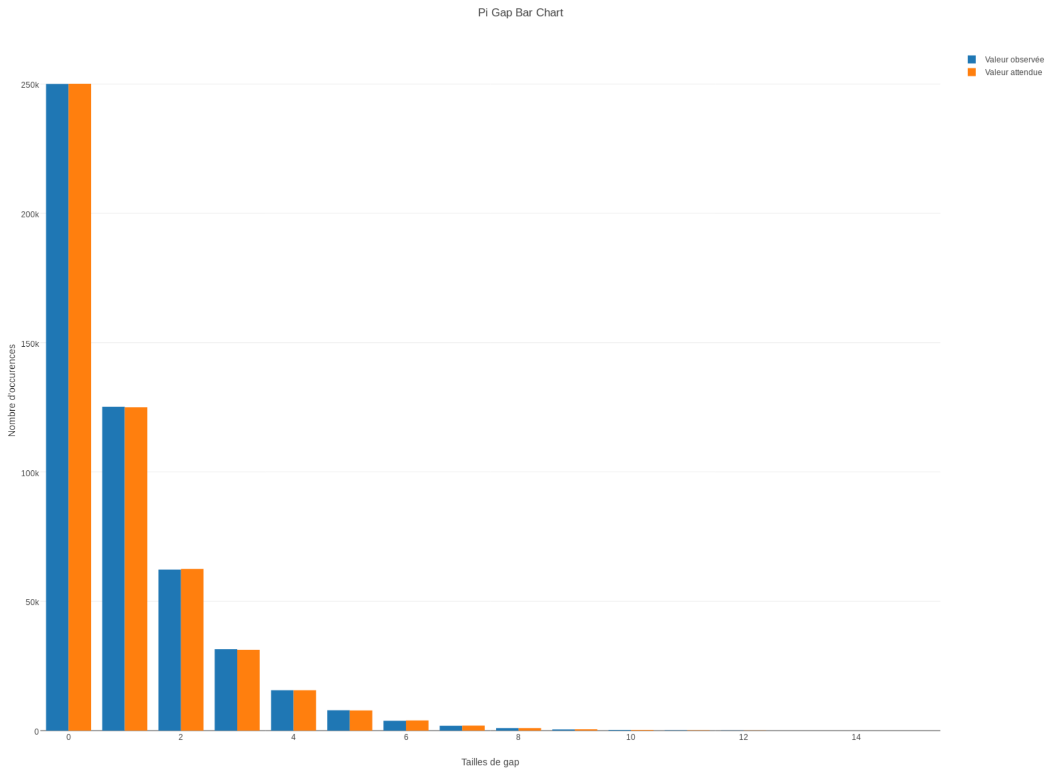


FIGURE 15 – Graphique de Gap

Résultats du test de χ^2 :

α	AValeur	Limite	Résultat
0.001	10.431	37.697	réussi
0.010	10.431	30.578	réussi
0.050	10.431	24.996	réussi
0.100	10.431	22.307	réussi

FIGURE 16 – Tableau de χ^2

Nous constatons donc que les différentes valeurs observées sont proches des valeurs théoriques. Et que le test de χ^2 réussit bien. Notre générateur passe donc ce test avec succès.

4.2.2 Le générateur de python

En ce qui concerne ce générateur, nous avons procédé de la même façon que ci-dessus pour notre générateur.

APython Gap	Valeur attendue	Valeur observée
0	249672.000	249152
1	124836.000	125037
2	62418.000	62606
3	31209.000	31237
4	15604.500	15686
5	7802.250	7839
6	3901.125	3834
7	1950.562	1969
8	975.281	942
9	487.641	522
10	243.820	254
11	121.910	122
12	60.955	78
13	30.478	31
14	15.239	19
> 15	15.239	16
Total	499344	499344

FIGURE 17 – Tableau de Python Gap

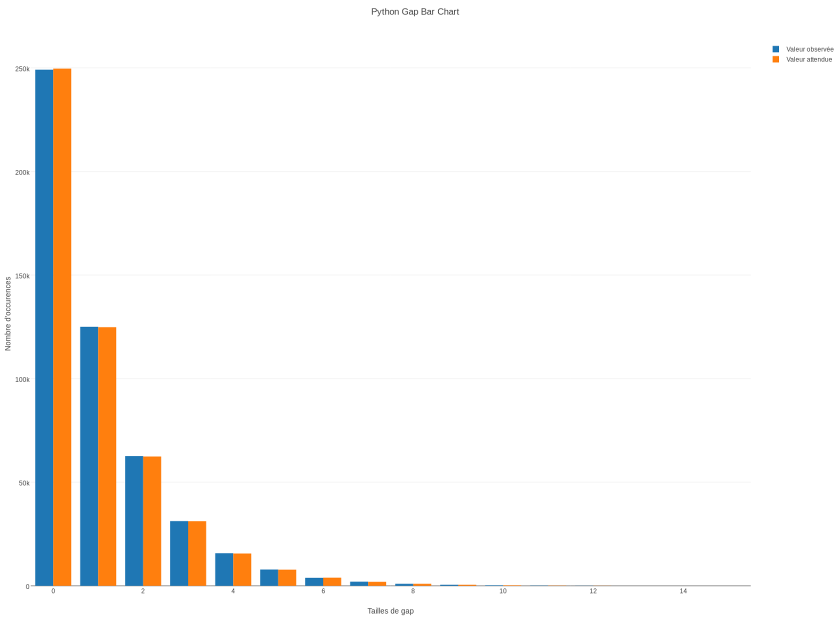


FIGURE 18 – Graphique de Gap

α	AValeur	Limite	Résultat
0.001	13.649	37.697	réussi
0.010	13.649	30.578	réussi
0.050	13.649	24.996	réussi
0.100	13.649	22.307	réussi

FIGURE 19 – Tableau de χ^2

Nous observons, ici aussi, que les valeurs sont proches des valeurs théoriques et que le test de χ^2 est réussi.

4.3 Le collectionneur de coupons

Tout comme nous l'avons précédemment effectué sur les décimales de Pi, nous allons ici effectuer le même test sur le générateur de python.

Afin d'effectuer ce test comme précédemment, nous avons du avoir recourt à une petite adaptation.

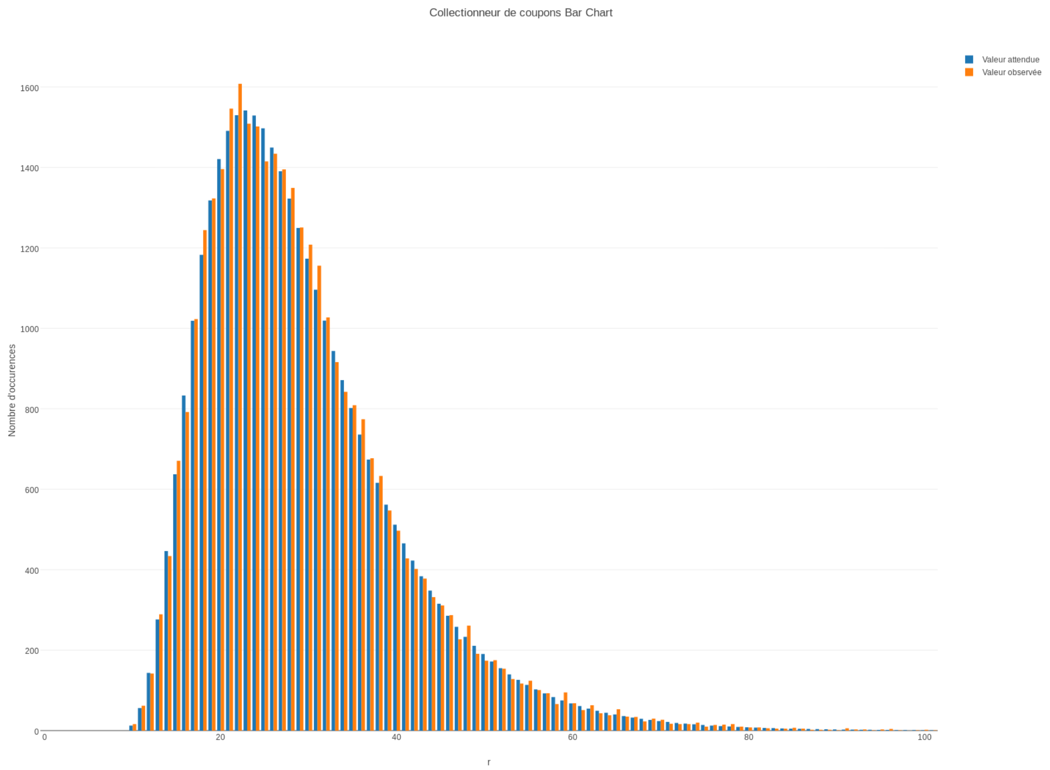
Nous avons donc discrétiser 1 million de nombres générés aléatoirement par python entre 0 et 1. Nous avons choisis ce nombre en rapport avec notre notre nombre de Pi qui possède 1 million de décimales.

Nous obtenons donc le tableau de valeurs, le graphique associé et les test de χ^2 suivants :

Collectionneur de coupons	Valeur attendue	Valeur observée
0-9	0	0
10	12.40614144	7
11	55.82763648	59
12	143.290933632	151
13	276.346800576	268
14	446.003265996	462
15	637.071490928	643
16	832.805541594	810
17	1018.27654972	1016
18	1182.15917248	1166
19	1317.22697718	1336
20	1420.02509544	1436
...	...	...
45	314.98154336	300
46	285.12114401	307
47	257.922966653	258
48	233.18443574	219
49	210.710837838	198
50	190.316914815	194
51	171.827851541	157
52	155.07979906	163
53	139.920046598	127
54	126.206932948	127
55	113.809568882	121
...	...	...
...	...	...
90	2.89299388033	3
91	2.60376745503	2
92	2.34344908011	3
93	2.10915086885	1
94	1.89827313956	2
95	1.70847571183	2
96	1.53765204971	1
97	1.38390597207	3
98	1.24553067677	0
99	1.12098985065	1
100	1.00890065885	0
101	0.9080184276	0

Figure 20 – Tableau de Collectionneur de coupons 2

Nous pouvons donc conclure, par les tests réussis, que le générateur suit lui aussi une loi uniforme.



α	AValeur	Limite	Résultat
0.001	70.467	150.667055668	réussi
0.01	70.467	136.971003847	réussi
0.05	70.467	125.458419408	réussi
0.1	70.467	119.588667243	réussi

FIGURE 21 – Tableau de χ^2

4.4 Interprétation des tests

Malgré la simplicité de notre générateur, celui-ci donne de très bons résultats. Cela peut s'expliquer par le fait que nous n'avons effectué nos tests que sur un nombre limité de nombres générés. En effet, la période de notre générateur est de 200 000 alors que la période du générateur de Python (Mersenne Twister) est de 2^{19937}.

D'après les tests effectués ci-dessus, ...

5 Conclusion

Nous avons bien réalisé les objectifs fixés dans l'introduction, à savoir analyser le caractère aléatoire des décimales de pi, construire un générateur uniforme et le comparer au générateur par défaut de Python.

Nous avons ainsi eu l'occasion de mettre en pratique et d'approfondir les concepts vus au cours théorique notamment les test de χ^2, le test du poker, le test de Kolmogorov-Smirnov, ...

Nous tenons à remercier le titulaire BUYS Alain pour le dévouement dont il a fait preuve cette année.