

文章编号: 1006 - 0464( 2005) 04 - 0348 - 05

# SARS传播的数学模型的建立与分析

黄良英<sup>1</sup>, 邱修峰<sup>2</sup>, 周昌隆<sup>2</sup>

( 1. 江西省机械职工大学 计算机系, 江西 南昌 330004; 2. 赣南师范学院 数学与计算机系, 江西 赣州 341000)

**摘 要:** 建立一个 SARS传播的实用的、可求解的改进 SIR模型, 并用差分方法进行求解。利用北京 SARS病例数对模型验证表明, 拟合曲线与实际数据基本吻合, 平均相对绝对值误差为 0.0153。对隔离时机的提前或延后造成的后果进行数值分析, 可得出最终确诊病例累计数与隔离时机的延长或提前呈指数增长或下降的结论。  
**关键词:** 改进的 SIR模型; 拟合曲线; SARS  
**中图分类号:** TP274      **文献标识码:** A

## 1 问题的提出

严重急性呼吸道综合症 ( SARS)俗称传染性非典型肺炎, 是 21世纪第一个在世界范围内传播的传染病, SARS的爆发和蔓延给我国和世界其他部分地区的经济发展和人民生活带来了很大影响。因此, 定量地研究 SARS 传染病的传播规律, 建立 SARS传播的数学模型, 对预测和控制类似的传染病有重大的现实和科学意义。

## 2 模型的分析 and 建立

### 2.1 一个理想模型的分析

根据对传染病传播规律的研究和分析, 易知如果没有较全面细致的信息, 建立的模型是粗糙的和不可靠的, 从模型中无法得知控制传染病传播的必要数据。因此, 建立的 SARS 传播规律的数学模型必须利用已知的尽量多的相关信息, 并且能够真正预测以及能为预防和控制提供可靠的足够的信息。我们根据对疫情的控制程度将疫期分为未控期、过渡期和控制期, 将整个疫区的人群按现实情况合理分类。

2.1.1 假设将人群分为七类:

- 正常人: 用  $C$  表示。
- 病人: 用  $I_1$  表示。
- 潜伏期病人: 用  $I_2$  表示。
- 类似病人 (症状类似感染 SARS 但其实没有感染 SARS 的人): 用  $U_{PA}$  表示。

- 退出者: 用  $R$  表示。
- 医务及相关人员: 用  $I_3$  表示 (这里特指治疗 SARS 的医务及相关人员)。
- 流动人口  $V$  (其中又分为正常人  $C_V$ , 病人  $I_1$ , 潜伏期病人  $E_V$ , 类似病人  $A_V$ )。
- 2.1.2 将整个社会分为隔离区和外界。
- 隔离区里的人包括:
  - a) 被隔离的医务及相关人员  $\mu I_3$ 。
  - b) 被隔离的病人 (已过了潜伏期, 成为患者的人)  $\omega I_1$ 。
  - c) 被隔离的潜伏期病人  $\omega I_2$ 。
  - d) 被隔离的类似病人  $\omega U_{PA}$ 。
  - e)  $c$  和  $d$  相加为被隔离的疑似病人 (既被怀疑但未被确诊的病人)。
  - f) 被隔离的流 (入) 出入口  $\omega V$ 。
- 隔离区外的人员包含:
  - a) 未被隔离的病人  $(1 - \omega) I_1$ , 属于第一类传染者 (未被隔离的病毒携带者, 会感染别人)。
  - b) 未被隔离的潜伏者为潜伏期病人  $(1 - \omega) I_2$ , 属于第二类传染者。
  - c) 未被隔离的医务及相关人员  $(1 - \mu) I_3$ , 属于第三类传染者。
  - d) 未被隔离的类似病人  $(1 - \omega) U_{PA}$ 。
  - e) 治愈病人和因病死亡者 (来自隔离区和外界的所有病人)  $R$ 。
  - f) 正常人 (所有其他人)  $C$ 。
  - g) 未被隔离的流 (入) 出入口  $(1 - \omega) V$ 。

### 2.1.3 参数说明

$\alpha_1$ ——病人的传染系数。

$\alpha_2$ ——潜伏期病人的传染系数。(设潜伏期病人也有传染性,但  $a_2$  小于  $a_1$ )

$\alpha_3$ ——医务及相关人员的传染系数。

$\alpha_4$ ——类似病人的传染系数。

$\omega$ ——非医务及相关人员隔离率。

$\mu$ ——医务及相关人员的隔离率。

$q$ ——医务及相关人员的发病率。

$p$ ——流动人口流动率,在不同阶段取值不同。

$l$ ——潜伏期平均值,一般等于 5 d ( $l$  和  $n$  的值的确定根据北京市疫情数据估计)。

$m$ ——疗程平均值,一般等于 20 d

$n$ ——类似病人疗程平均值,一般等于 20 d

## 2.2 模型的建立

根据对各变量的分析及人口守恒(假设人口的自然出生率和死亡率在疫期相等),结合实际的疫情的传播规律及人口守恒,可以建立如下的微分方程组模型:

### 2.2.1 单位时间内普通人数的变化:

$\frac{dC(t)}{dt}$  = -新的感染病菌的人 - 因  $U_{PA}$  而感染的类似病人 + 出院的类似病人数目 + 流入 (或 - 流出) 的普通人数。 ( $t-n$ ) 表示前  $n$  天的相应数据。

$$\frac{dC(t)}{dt} = - [\alpha_1 I_1 (1 - \omega) + \alpha_2 I_2 (1 - \omega) + \alpha_3 I_3 (1 - \mu) + \alpha_4 U_{PA} (1 - \omega)] C(t) + \omega U_{PA} (t - n) + pCv \quad (1)$$

### 2.2.2 单位时间内病人数的变化:

$\frac{dI_1(t)}{dt}$  = 1 天前的潜伏期病人转化为确诊病人的人数 - 治愈的病人和死亡的病人数 + 流入 (或 - 流出) 的病人数。 ( $t-l$ ) 表示前  $l$  天的相应数据, ( $t-m$ ) 表示前  $m$  天的相应数据。

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = I_2(t-m) - I_1(t-m) + pIv \quad (2)$$

### 2.2.3 单位时间内潜伏期病人数的变化:

$\frac{dI_2(t)}{dt}$  = 因  $I_1 I_2 I_3$  而感染病菌的人数 - 转化为病人的潜伏期病人数 + 流入 (或 - 流出) 的潜伏期病人数。

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = [\alpha_1 I_1 (1 - \omega) + \alpha_2 I_2 (1 - \omega) + \alpha_3 I_3 (1 - \mu)] [C(t) + U_{PA}(t)(1 - \omega)] + pEv - I_2(t-m) + qI_3(1 - \mu) \quad (3)$$

### 2.2.4 单位时间内类似病人的变化:

$\frac{dU_{PA}}{dt}$  = 新增加的类似病人数 - 新减少类似病人数 + 流入 (或 - 流出) 的类似病人数。

$$\frac{dU_{PA}}{dt} = \alpha_4 C(t) U_{PA} (1 - \omega) - [\alpha_1 I_1 (1 - \omega) + \alpha_2 I_2 (1 - \omega) + \alpha_3 I_3 (1 - \mu)] U_{PA} (t) (1 - \omega) + pAv \quad (4)$$

### 2.2.5 单位时间内退出者人数的变化:

$$\frac{dR(t)}{dt} = I_1(t-m) \quad (5)$$

联立上述 5 个表达式成一微分方程组。其解析解求解非常困难,可用数值方法(利用计算机程序)求出近似解。变量的初值,容易确定,但系数必须在不同时间段取不同的值,并且可以考虑医疗水平和种群的免疫水平等因素。

## 2.3 改进的 SIR 模型

理想的模型终归是一个理想,因为没有足够的信息来求解。如何利用可获信息建立一个具有优良性质的模型,需要对现有的信息和资料设计出一个可解的改进的 SIR 模型。(北京市疫情数据来源: <http://www.beijing.gov.cn/Resource/Detail.asp?ResourceID=66070>)。

根据人口守恒原理,可建立如下模型。

模型将疫区的总人口数看成不变(不考虑流动人口),将疫区所有的人(假设人口的自然出生率和死亡率在疫期相等)分为:

I: 确诊病人 (infectious);

E: 潜伏期病人 (exposed 感染了 SARS 但处于潜伏期的人,假设没有传染性);

A: 类似病人 (analogous 症状类似感染 SARS 但其实没有感染 SARS 的人);

R: 退出者 (removed 痊愈和死亡的确诊病人);

S: 普通易感者 (susceptible)。

$$\frac{dS_1}{dt} = -\alpha_1 I(t)(1 - \bar{\omega}) S_1 - \alpha_2 [A(t)(1 - \bar{\omega}) + A(t)\bar{\omega} \beta_3] S_1$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha_1 I(t)(1 - \bar{\omega}) (S_1 + A(t)(1 - \bar{\omega}) + A(t)\bar{\omega} \beta_3) - \beta_1 E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta_1 E - \beta_2 I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta_2 I$$

$$\frac{dA}{dt} = \alpha_2 [A(t)(1 - \bar{\omega}) + A(t)\bar{\omega} \beta_3] S_1 - \alpha_1 I(t)(1 - \bar{\omega}) [A(t)(1 - \bar{\omega}) + A(t)\bar{\omega} \beta_3]$$

$I_0, S_{10}, R_0, A_0, E_0$  为初值

(1)、SARS流行病平均潜伏期为  $\frac{1}{\beta_1}$ , 即单位时间内潜伏期病人以比例常数  $\beta_1 > 0$  转为感染者;

(2)、确诊病人平均死亡或痊愈的疗程为  $\frac{1}{\beta_2}$ , 即单位时间感染者的恢复率为  $\beta_2 > 0$

(3)、类似病人平均疗程为  $\frac{1}{\beta_3}$ , 即单位时间内类似病人的恢复率为  $\beta_3 > 0$

(4)、单位时间内每个易感者与病人的接触率参数为  $\alpha_1 > 0$

(5)、易感者与类似病人的接触率参数  $\alpha_2 > 0$

(6)、考虑类似病人感染病菌转为潜伏期病人, 但潜伏期病人不会转为类似病人;

(7)、 $\omega$  为隔离率,  $\omega = 0$  时为未控期,  $0 < \omega < a < 1$  ( $a$  为一常数一般  $a > 0.8$ ) 时为过渡期,  $\omega > a$  是控制期;

(8)、 $A(t)\omega\beta_3$  为痊愈的被解除隔离的类似病人;

(9)、 $I, E$  和  $A$  均为被隔离对象;

(10)、 $(E+A)\omega$  为疑似病人。

## 2.4 模型的求解与运用

由于本模型很难求出解析解, 因此可根据差分方法, 数值求解用 Matlab 编程, 并利用模型对北京的疫情数据进行全面分析和拟合。

### 2.4.1 初值的设定:

$I_0 = 1$ , 3月1日出现第一例病例;

$S_{10} = 1.1$  千万, 不考虑流动人口;

$R_0 = 0$

$E_0 = 0$

$A_0 = 100$  这是一个根据人口总数和医学常识的估计值。

### 2.4.2 参数的设定:

$\beta_1 = 1.5$  设 SARS 流行病平均潜伏期为 5

$\beta_2 = 1.20$  设确诊病人平均死亡或痊愈的疗程为 20

$\beta_3 = 1.20$  设类似病人平均疗程为 20

$\alpha_2 = 1.0e-011$  类似病人与易感者的接触率参数也假设固定。

### 2.4.3 $\alpha_1$ 和 $\omega$ 的确定

在对北京疫区已确诊病例的分析和拟合中, 确定单位时间内每个易感者与病人的接触率参数为  $\alpha_1 = 2.7566e-008$  对于  $\omega$ , 在 4月20日以前, 设  $\omega$

$= 0$  自 4月20日起按如下方法处理 (其中  $i$  为自 3月1日以来的天数):

if ( $i = 51$ )  $\omega = 0$  ; end

if ( $i \leq 60$ ) & ( $i > 51$ )  $\omega = \omega + 1/20$  end

if  $i > 60$   $\omega = \omega + (1 - \omega) / 6$  end

这样 3月1日至 4月19日左右为未控期。

2.4.4 对北京疫区已确诊累计病例和每日新增确诊病例的拟合和误差分析。

用模型拟预测的北京疫区已确诊病例累计数与实际的数目的比较见图 1。

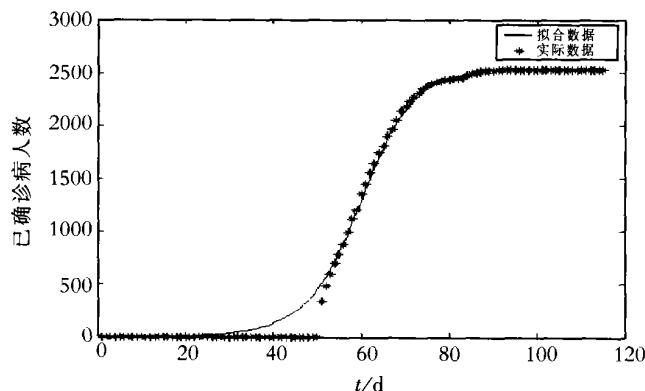


图 1 北京疫区模型拟预测病例与已确诊累计病例的拟合情况

从上图可以看出, 从 4月20日至 6月23日 65 d 的实际数据和预测拟合数据非常吻合, 最后的确诊病例累计数实际为 2523 人, 预测为 2521 人。经计算 65 d 的所有的相对绝对值误差累积和仅为 0.9977, 平均为  $0.9977/65 = 0.0153$  (相对绝对值误差是指  $|\frac{x - x^*}{x^*}|$ )。这说明本模型符合实际, 类似地可以对其他感兴趣的数据进行实际和预测的分析。

以下是北京疫区每日新增确诊病例的拟合情况示意图。

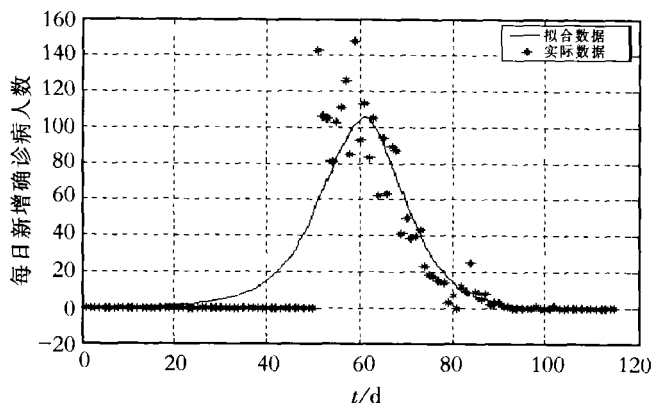


图 2 北京疫区每日新增确诊病例的拟合情况示意图

经计算 64 d (4月21日至 6月23日) 的所有的

相对误差累积和为 7 778 8 平均为 0 121 5。若去掉 3 个峰值再计算, 其相对误差累积和只有 1 084 4 平均为 0 017 2 这就非常理想了, 此时其相对绝对值误差累积和为 12 860 9 平均为 0 196 7。这说明本模型还是有一定的不足, 对每日新增确诊病例预测趋势是正确的, 但没有做到很精确, 这主要是因为实际的每日新增确诊病例沿着趋势线上下震荡, 因此其相对绝对值误差累积和较大, 但是相对误差累积和较小。从对确诊病例累计数的分析来看, 最后的确诊病例累计数的预测的相对误差接近于 0 为  $(2\,523 - 2\,521) / 2\,523$  约等于 0 000 8。从以上分析可知, 此模型的预测功能是非常吻合的, 可以用于实际传染病传播的预测和防治。科学的预测数据, 可为防治工作提供依据。

2 4 5 对隔离措施的提前或延后的数学分析。

以 4 月 20 日为采取严格隔离措施的基准日, 分别以一天为步长往前和往后 20 d 模拟预测, 并以 6 月 23 日确诊病例累计数  $y$  为自变量, 提前或延后的天数  $t$  ( $-20 \leq t \leq 20$ ) 为因变量进行分析。函数的模拟图如下:

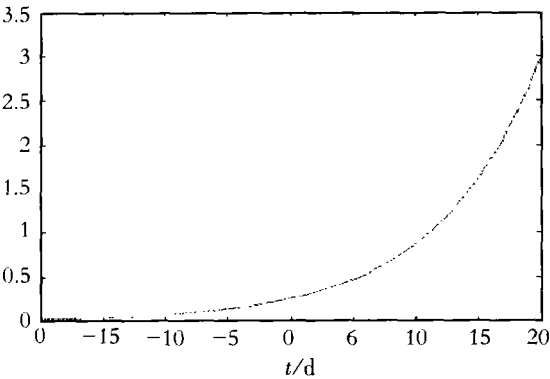


图 3 确诊病例累计数  $y$  与隔离提前或延后的天数  $t$  ( $-20 \leq t \leq 20$ ) 函数

观察图形发现, 该图与指数函数  $u = ae^{\frac{x}{b}}$  的图形相似。采用最小二乘法拟合, 令  $hu = hc + (x/b)$ , 设  $a = 1/b$ ,  $b = \ln a$  通过运用 Matlab 中的 polyfit 函数, 解出  $a, b$  的值, 再用代入法, 求出  $u, v$ 。所以最终拟合的曲线为:

$$y = 2\,509\,904.5 e^{\frac{t}{0.385}}$$

由此可知, 提早采取严格隔离措施可使确诊例数  $y$  呈指数下降, 延后则呈指数上升。

另外, 对隔离措施的执行效果 (以过渡期长短来评价) 也进行了分析。设一般过渡期为 10 d 若缩短为 5 d 或 1 d 结果如何呢?

从以下用模型得到的示意图可得出过渡期越短

越好的结论。

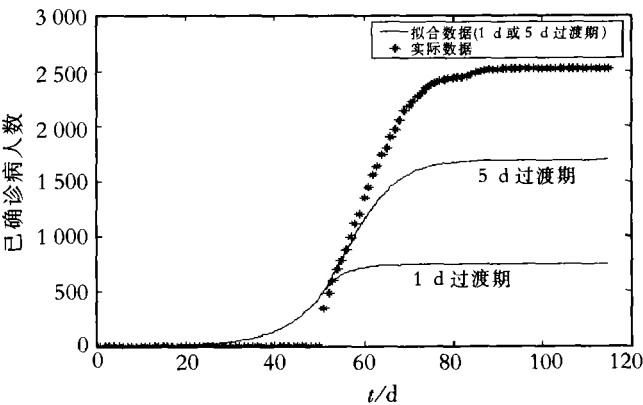


图 4 1 d 和 5 d 过渡期的拟合图

3 模型评价和改进

本传染病数学模型, 是通过已有的病例和疑似病例进行分析和预测, 以及研究 SARS 发病与流行特征及相应预防措施对疾病流行的影响, 准确认识传染病的敏感性和特异性, 不断改进模型中不合理的环节, 为预防与控制 SARS 传播提供科学的依据, 同时也为今后各类突发性公共卫生事件的控制和预防打下基础。

通过分析、计算和预测可知, 如果全社会的努力和投入的程度继续增加 (即隔离措施的提早进行、隔离率增大和过渡期缩短), 将使得疫情的周期缩短, 最后的累计病例人数还会减少。由此, 可以认为预防和控制 SARS 传播的最佳途径是: 加强控制力度。

另外, 对治疗传染性疾病的医务人员 (高度危险人员) 做特别处理模型可能会更加符合实际, 因为这些人员在未控制期和过渡期的感染率很高。

参考文献:

[1] 康熙雄, 高 星. 传染性非典型肺炎病毒学检测与诊断 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] 赵红炜, 舒柏荣. 重症急性呼吸综合征 (SARS) 简述 [J]. 实用全科医学, 2004 2(6): 559 - 560.

[3] 王正行. 北京 SARS 疫情 60 天的初步分析 [EB/OL]. www.phy.pku.edu.cn 2003.

[4] 姜启源. 数学模型 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[5] 张 娟, 马知恩. 具有饱和接触率的 SEIR 模型的动力学性质 [J]. 西安交通大学学报, 2002 36(2): 204 - 207.

[6] [美] Hanselman D Littlefield B. 精通 Matlab 6 [M]. 张 航, 黄 攀译. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[7] 王沫然. Matlab 6.0 与科学计算 [M]. 北京: 电子工业

出版社, 2001.

[ 8] 甘应爱. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.

## ANALYSIS AND CONSTRUCTION OF THE MATHEMATICAL MODEL ON THE SPREAD OF SARS

HUANG Liang ying<sup>1</sup>, QIU Xiufeng<sup>2</sup>, ZHOU Changling<sup>2</sup>

( 1 Department of Computer Jiangxi Provincial College of Mechanical Personnel Nanchang 330001 China

2 Department of Mathematics and Computer Gannan Teachers' College Ganzhou 341000 China)

**Abstract** To construct a useful improved SIR model of SARS that is solvable with the present information and the difference methods. The result is the same as the factual data, and the error estimation average absolute value is only 0.0153 when it was verified using the data from Beijing. In this paper to analyze the forward and backward result of the separation timing and find that the final definite number of sure patients increases or decreases with the backward or forward separation timing at the exponent level.

**Key words** improved SIR model; analogous curve; SARS

(上接第 347 页)

[ 7] 陈水利. 完全分配格上 Moore-Smith $\theta$ -收敛理论.

[ C] 中南地区模糊数学与系统理论与应用成果学术会

议论文集[ P], 国防科大出版社, 1991, 34-36.

[ 8] 熊金成. 占集拓扑讲义[M]. 北京: 人民教育出版社, 1982.

[ 9] 熊国士. 拓扑空间论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

## ALMOST STRONG $\theta$ -CONTINUOUS CORRESPONDENCES ON SUPER-SPACE

MA Xianli<sup>1</sup>, CHEN Guixiu<sup>2</sup>

( 1. Office of Education Administration Qinghai Normal University Xining 810008 China

2. Department of Mathematics Qinghai Normal University Xining 810008 China)

**Abstract** This paper defined almost strong  $\theta$ -continuous correspondences on super space. On the basis of open $\theta$ -open(closed) sets,  $\delta$ -open(closed) sets and regular open(closed) sets in topological space, some equivalent conditions of this kind of correspondences are obtained, and some applications of subset nets and convergence nets in this correspondences are given.

**Key words** topological space; super space; almost strong  $\theta$ -continuous correspondences; subset nets