Obtención de los Coeficientes de la forma canónica para la Elipse, hipérbolas y parábolas

Determinación analítica de las cónicas

Grupo 12

December 05, 2023

Contenidos

Introducción

Formas cuadráticas

Definition

Una forma cuadrática en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una combinación lineal de los productos $x_i x_j$, esto es, una combinación lineal de cuadrados $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ y términos $x_1x_2, x_1x_3, \ldots, x_1x_n, x_2x_3, \ldots, x_2x_n, \ldots, x_{n-1}x_n$

Example

- $q = x^2 - y^2 + 4xy$ y $q = x^2 + 3y^2 - 2xy$ son formas cuadráticas en x y y.
- $q = -4x_{21} + x_{22}^2 + 4x_{23} + 6x_1x_3$ es una forma cuadrática en x_1, x_2 y x_3.
- La forma cuadrática general de x_1, x_2, x_3 es $a_1x_{21} + a_2x_{22}^2 + a_3x_{23} + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3$.

Formas cuadráticas

Las formas cuadráticas pueden ser escritas de la forma matricial $q(x) = x^T Ax$ donde A es una matriz simétrica $n \times n$ y x es un vector columna $n \times 1$.

La matriz A es llamada la matriz de la forma cuadrática q.

Example

Supongamos que $q = x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$. Los coeficientes de x_1^2 y x_2^2 son 1 y -1, respectivamente, por lo que colocamos estos, en orden, en las dos posiciones diagonales de una matriz A. El coeficiente de x_1x_2 es 4, que dividimos equitativamente entre las posiciones (1, 2) y (2, 1), colocando un 2 en cada lugar.

Así tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

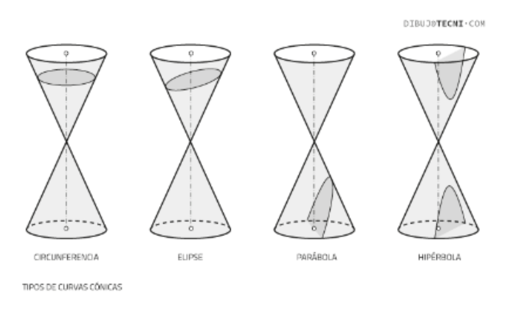
y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Luego:

$$q(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$$

Secciones Cónicas

Secciones Cónicas

Se utiliza el término cónica para referirse a todas las curvas que surgen de las diversas intersecciones entre un cono y un plano. Cuando dicho plano no cruza el vértice, se generan las cónicas específicas: parábola, elipse, hipérbola y circunferencia. En este proyecto, nos enfocaremos únicamente en las tres primeras.



Las secciones cónicas: círculo, elipse, parábola y hipérbola

Forma General de las Secciones Cónicas

Definition

Una sección cónica es el lugar en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ de una ecuación de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{1}$$

Se puede demostrar que esta ecuación representa uno de los siguientes:

1. el conjunto vacío
2. un solo punto
3. una o dos rectas
4. una elipse
5. una hipérbola
6. una parábola.

La parte de segundo grado de (1), $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es una forma cuadrática. Esto determina el tipo de la cónica.

Forma Matricial de las Secciones Cónicas

Podemos escribir la ecuación en forma matricial:

$$[x, y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d, e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0.$$

Escribimos $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$. Sea $U = [u, v]$ una matriz ortogonal cuyos vectores de columna u y v son vectores propios de A con valores propios λ_1 y λ_2. Aplicamos el cambio de variables

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

para diagonalizar la forma cuadrática $q(x, y)$ a la forma diagonal

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2.$$

Transformación de Coordenadas

La base ortonormal {u, v} determina un nuevo conjunto de ejes de coordenadas con respecto a los cuales el lugar de la ecuación

$$[x, y]A[x, y]^T + B[x, y]^T + f = 0$$

con B = [d, e] es el mismo que el lugar de la ecuación

$$0 = [u, v]\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)[u, v]^T + (BU)[u, v]^T + f$$

por lo tanto

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + [d, e][u, v][u, v]^T + f = 0 \qquad (2)$$

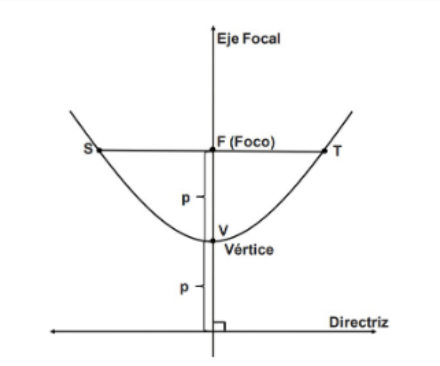
Determinación del Tipo de Cónica

Si la cónica determinada por (2) no es degenerada, es decir, no es un conjunto vacío, un punto, ni línea(s), entonces los signos de λ_1 y λ_2 determinan si es una parábola, una hipérbola o una elipse. La ecuación (1) representará

- una elipse si $\lambda_1\lambda_2 > 0$,
- una hipérbola si $\lambda_1\lambda_2 < 0$,
- una parábola si $\lambda_1\lambda_2 = 0$.

Parabola

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, llamada directriz, situada en el mismo plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano, llamado foco, y que no pertenece a la recta.



Parábola y elementos

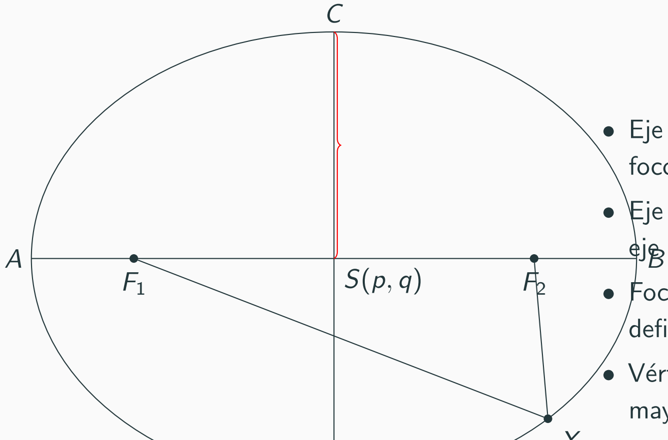
- Eje Focal: es la recta que pasa por el foco y el vértice
- Foco (F): es el punto fijo que se indica en la definición
- Directriz: es la recta fija mencionada en la definición
- Vértice (V): es el punto donde el eje focal corta la parábola
- Distancia focal (p): es la distancia desde el vértice al foco y del vértice a la directriz.
- Lado Recto (ST): es el segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco F, cuyos extremos son dos puntos de la parábola.

Parámetros de la Parábola

	Parábola de eje vertical	Parábola de eje horizontal
Ecuación General	$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ $C = 0, A \neq 0$	$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A = 0, C \neq 0$
Ecuación canónica	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
Coordenadas del Vértice	(h, k)	(h, k)
Coordenadas del Foco	$(h, k+p)$	$(h+p, k)$
Ecuación de la Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$
Ecuación del eje focal	$x = h$	$y = k$

Elipse

Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya distancia a dos puntos fijos en el plano tienen una suma constante. Los puntos fijos son los focos de la elipse. La recta que une los focos es el eje focal. El punto sobre el eje focal que está en el punto medio entre los dos focos es el centro. Los puntos donde la elipse interseca a su eje son los vértices de la elipse.



- Eje Mayor: es el segmento que pasa por los focos y los vértices de la elipse
- Eje Menor: es el segmento perpendicular al eje mayor en el centro de la elipse
- Focos (F): son los dos puntos fijos en la definición de la elipse
- Vértices (V): son los puntos donde el eje mayor corta la elipse

Elementos de la Hipérbola

	Hipérbola de eje horizontal
Ecuación General	$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Con A y C no ambas cero, distinto valor numérico y signos contrarios. $B = 0$ (Sin rotación de ejes)
Ecuación canónica	$(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$
Localización de los focos	$(h \pm c, k)$
Localización de los vértices	$(h \pm a, k)$
Ecuación del eje focal	$y = k$
Semieje focal	a
Semieje conjugado	b
Longitud focal	c
Relación pitagórica	$c^2 = a^2 + b^2$
Ecuación de las asinfotas	$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$

Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos en el plano es una constante. Los puntos fijos son los focos de la hipérbola. La recta que une los focos es el eje focal. El punto sobre el eje focal que está en el punto medio entre los dos focos es el centro. Los puntos donde la hipérbola interseca a su eje son los vértices de la hipérbola.

Elementos de la Hipérbola

	Hipérbola de eje horizontal
Ecuación General	$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Con A y C no ambas cero, distinto valor numérico y signos contrarios. $B = 0$ (Sin rotación de ejes)
Ecuación canónica	$(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$
Localización de los focos	$(h \pm c, k)$
Localización de los vértices	$(h \pm a, k)$
Ecuación del eje focal	$y = k$
Semieje focal	a
Semieje conjugado	b
Longitud focal	c
Relación pitagórica	$c^2 = a^2 + b^2$
Ecuación de las asinfotas	$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$

Bibliografia

- Applications of Linear Algebra in Various Fields (Part-1): https://www.researchgate.net/publication/356818396_Applications_of_Linear_Algebra_in_Various_Fields_Part-1
- Álgebra lineal y geometría cartesiana - Juan de Burgos Román
- Practical Linear Algebra: A Geometry Toolbox - Gerald Farin, Dianne Hansford

Gracias