Obtención de los Coeficientes de la forma canónica para la Elipse, hipérbolas y parábolas

Determinación analítica de las cónicas

Grupo 12

December 05, 2023

Contenidos

Introducción

Formas cuadráticas

Definition

Una forma cuadrática en n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ es una combinación lineal de los productos $x_i x_j$, esto es, una combinación lineal de cuadrados $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2$ y términos $x_1x_2, x_1x_3, ..., x_1x_n, x_2x_3, ..., x_2x_n, ..., x_{n-1}x_n$

Example

- $q = x^2 - y^2 + 4xy$ y $q = x^2 + 3y^2 - 2xy$ son formas cuadráticas en x y y.
- $q = -4x_{21} + x_{22}^2 + 4x_{23} + 6x_1x_3$ es una forma cuadrática en x_1, x_2 y x_3.
- La forma cuadrática general de x_1, x_2, x_3 es $a_1x_{21} + a_2x_{22}^2 + a_3x_{23} + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3$.

Formas cuadráticas

Las formas cuadráticas pueden ser escritas de la forma matricial $q(x) = x^T A x$ donde A es una matriz simétrica $n \times n$ y x es un vector columna $n \times 1$.

La matriz A es llamada la matriz de la forma cuadrática q.

Example

Supongamos que $q = x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$. Los coeficientes de x_1^2 y x_2^2 son 1 y -1, respectivamente, por lo que colocamos estos, en orden, en las dos posiciones diagonales de una matriz A. El coeficiente de x_1x_2 es 4, que dividimos equitativamente entre las posiciones (1, 2) y (2, 1), colocando un 2 en cada lugar.

Así tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

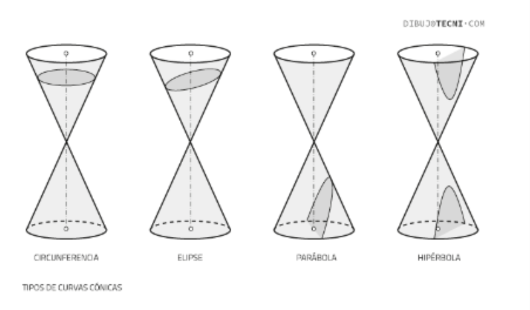
y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Luego:

$$q(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$$

Secciones Cónicas

Secciones Cónicas

Se utiliza el término cónica para referirse a todas las curvas que surgen de las diversas intersecciones entre un cono y un plano. Cuando dicho plano no cruza el vértice, se generan las cónicas específicas: parábola, elipse, hipérbola y circunferencia. En este proyecto, nos enfocaremos únicamente en las tres primeras.



Las secciones cónicas: círculo, elipse, parábola y hipérbola

Forma General de las Secciones Cónicas

Definition

Una sección cónica es el lugar en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ de una ecuación de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{1}$$

Se puede demostrar que esta ecuación representa uno de los siguientes:

1. el conjunto vacío
2. un solo punto
3. una o dos rectas
4. una elipse
5. una hipérbola
6. una parábola.

La parte de segundo grado de (1), $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es una forma cuadrática. Esto determina el tipo de la cónica.

Forma Matricial de las Secciones Cónicas

Podemos escribir la ecuación en forma matricial:

$$[x, y] \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d, e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0.$$

Escribimos $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$. Sea $U = [u, v]$ una matriz ortogonal cuyos vectores de columna u y v son vectores propios de A con valores propios λ_1 y λ_2. Aplicamos el cambio de variables

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

para diagonalizar la forma cuadrática $q(x, y)$ a la forma diagonal

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2.$$

Transformación de Coordenadas

La base ortonormal {u, v} determina un nuevo conjunto de ejes de coordenadas con respecto a los cuales el lugar de la ecuación

$$[x, y]A[x, y]^T + B[x, y]^T + f = 0$$

con B = [d, e] es el mismo que el lugar de la ecuación

$$0 = [u, v]\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)[u, v]^T + (BU)[u, v]^T + f$$

por lo tanto

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + [d, e][u, v][u, v]^T + f = 0 \tag{2}$$

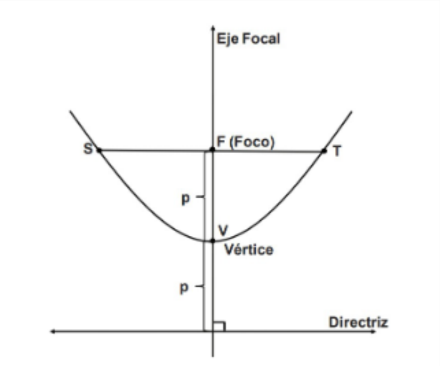
Determinación del Tipo de Cónica

Si la cónica determinada por (2) no es degenerada, es decir, no es un conjunto vacío, un punto, ni línea(s), entonces los signos de λ_1 y λ_2 determinan si es una parábola, una hipérbola o una elipse. La ecuación (1) representará

- una elipse si $\lambda_1\lambda_2 > 0$,
- una hipérbola si $\lambda_1\lambda_2 < 0$,
- una parábola si $\lambda_1\lambda_2 = 0$.

Parabola

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, llamada directriz, situada en el mismo plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano, llamado foco, y que no pertenece a la recta.



Parabola y elementos

Bibliografia

- Applications of Linear Algebra in Various Fields (Part-1): https://www.researchgate.net/publication/356818396_Applications_of_Linear_Algebra_in_Various_Fields_Part-1
- Álgebra lineal y geometría cartesiana - Juan de Burgos Román
- Practical Linear Algebra: A Geometry Toolbox - Gerald Farin, Dianne Hansford

Gracias