目录

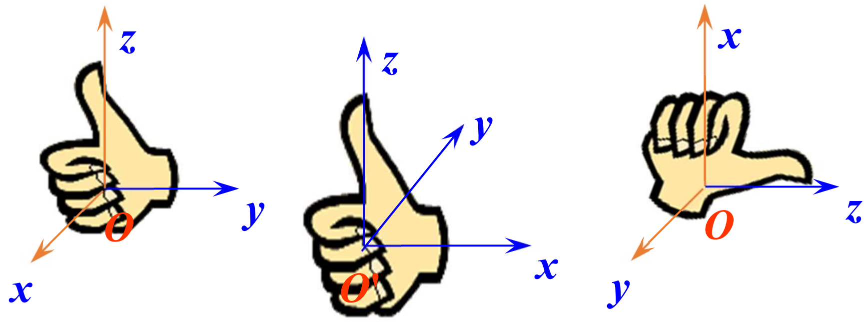
第五章　空间解析几何

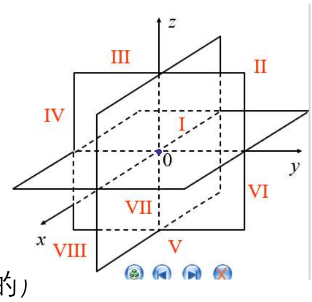
5.1 向量及其线性运算

一、空间解析几何基本概念

1、空间直角坐标系：

a)　三个坐标轴的正方向相对关系------符合右手系





b)　特点

- 三条轴
- 三个坐标面
- 八个卦限：第 I－VIII 卦限（不叫象限了!!，注意 1-8 是怎么变的）

二、向量的基本概念

1、向量（矢量）：既有大小又有方向

- 自由向量：不考虑起点位置的向量

2、向量间的关系

- 相等向量：大小相等且方向相同的两个向量
- 负向量：大小相等但方向相反的两个向量
- 共线向量（平行）：方向相同或相反（可以平移到同一直线上），判定如下

　设 $\vec{a} \neq 0$，则 $\vec{b}$ 平行于 $\vec{a} \Leftrightarrow$ 存在唯一的实数 λ，使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

- 共面向量：三个及以上向量之间的关系，平移后在同一个平面（见混合积）
- 垂直：（见数量积）
- 平行：（见向量积）

3、向量的坐标表示与运算（略）

4、向量的模、方向角、投影（略）

三、向量的运算

1、线性运算：加减法、数乘

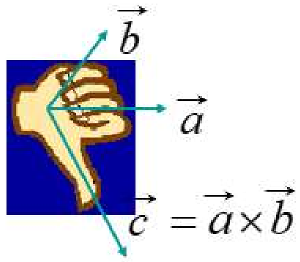
2、数量积（点积、内积）

a)　定义：$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

b)　性质：$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$

c)　几何意义：两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积

3、向量积（叉积）



a) 定义：$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

模：$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

方向：$\vec{c}\perp\vec{a}$ $\vec{c}\perp\vec{b}$且三者符合右手法则

b) 性质

$$(1)\ \ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.$$

$$(2)\ \ \vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

c) 运算规律（注意没有交换律）

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

d) 坐标表示

$$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \boldsymbol{b}_x & \boldsymbol{b}_y & \boldsymbol{b}_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

e) 几何意义：$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

4、混合积

a) 定义：$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\triangleq(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

b) 坐标表示

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

c) 性质

(1) 三个向量共面 $\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

(2) 轮换对称性：$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

d) 几何意义：$|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$表示以三个向量为棱边构成的平行六面体的体积

5.2 平面与空间直线

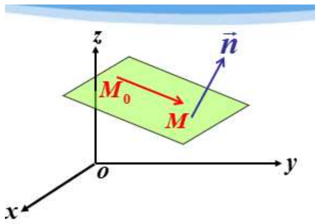
一、平面及其方程

1、平面的方程

a) 点法式方程（法向量和一个点确定一个平面）

已知$\vec{n}=\{A,B,C\}$,平面上已知点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,平面上任一点$M(x,y,z)$

则由$M_0M\perp\vec{n}$得平面方程为$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$



b) 三点式方程与截距式方程（三点确定一个平面）

$$三点共面条件:\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

特例，三个点在坐标轴上，即$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$

$$平面方程为\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

c) 一般式方程

$$已知法向量为\vec{n}=\{A,B,C\}\Rightarrow Ax+By+Cz+D=0(A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

几种特殊情况

- D=0，平面通过坐标原点
- A、B、C 其中一个为 0：平面对应通过 x、y、z 轴
- A、B、C 其中两个为 0：平面对应平行 xoy、xoz、yoz 面

2、平面间的关系

a) 关系概述

两平面平行不重合. $\Rightarrow$**两平面法向一致但无交点**

两平面平行重合. $\Rightarrow$**两法向一致且有交点**

两平面不平行相交
- **两平面垂直**
- **相交但不垂直** $\Rightarrow$**两法向不共线也不垂直**

b) 两平面的夹角

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

c) 两平面垂直和平行的判定

$$(1)\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$$

$$(2)\Pi_1 \parallel \Pi_2\text{但不重合} \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$(2)\Pi_1 \parallel \Pi_2\text{且重合} \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

3、点和平面间的关系

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

二、空间直线及其方程

1、空间直线的方程

a) 一般式方程（两平面的交线）

设Π_1、Π_2为两个不同的经过该直线的平面

Π_1： $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

Π_2： $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

则平面是这两个平面的交线，方程为$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

b) 对称式方程

已知直线上一定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,和一动点$M(x, y, z)$,且直线的方向向量为$\vec{s} = \{m, n, p\}$,

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

c) 参数方程

变量的含义同上

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

2、两直线的关系

a) 两直线夹角

b) 直线与平面的夹角

c) 两直线关系

$$(1)\quad L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0,$$

$$(2)\quad L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

d) 点到直线的距离

e) 两异面直线的距离

3、过直线的平面束方程

5.3 曲面及其方程、曲线及其方程（略）

一、球面

1、标准方程：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$

2、一般方程：$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$

$$(1)(D^2+E^2+F^2)/4-G>0 \Rightarrow \text{方程对应一个球面}$$
$$(2)(D^2+E^2+F^2)/4-G=0 \Rightarrow \text{退化为一点}$$
$$(3)(D^2+E^2+F^2)/4-G<0 \Rightarrow \text{不存在满足条件的点}$$

二、柱面

1、基本概念

a) 定义：直线沿着一条定曲线移动得到的图形

b) 相关概念

- 准线：定曲线
- 母线：动直线

2、其他（略）

三、旋转曲面

1、定义：一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面

2、其他：（略）

四、二次曲面

1、定义：三元二次方程所表示的曲面

2、讨论二次曲面性状方法：截痕法

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌

3、几种二次曲面

- 椭球面
- 抛物面：旋转抛物面、马鞍面（双曲抛物面）
- 双曲面：单叶双曲面、双叶双曲面
- 锥面

一、曲线方程

1、一般式方程（两个曲面的交线）

2、参数方程

二、空间曲线在坐标面的投影

第六章　多元函数微分学

6.1 多元函数微分的基本概念

一、预备知识

1、n 维空间：R^n

a) 定义（略）

b) R^n中的邻域的概念

一维空间：$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle\| x-x_0 \right| < \delta \}$

二维空间：$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$

...

如果是P_0的去心邻域，则为$\mathring{U}(P_0,\delta)$

讨论实际问题中也常使用方邻域

c) R^n中点的分类

- 按点 P 与其他点集 E 的关系分：内点、外点、边界点
  边界点的全体为边界，记为∂E
- 按点与领域其他点和关系分：聚点（P 任意小的去心领域内都有 E 的点）、孤立点
  聚点的全体为导集

注意：内点一定是聚点；边界点可能是聚点；E 的聚点可以属于 E，也可以不属于 E

d) R^n中点集的分类

- 按边界是否属于点集分：开集、闭集
- 连通：点集中任意两点都可用一完全属于该点集的折线相连
- 连通的集合按边界是否属于点集分：（开）区域、闭区域
- 按是否有边界分

二、多元函数的概念

1、几何意义：n 元函数在几何上表示 n+1 维空间上的一般曲面.

2、多元函数的 N 重极限

a) 形式：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

b) 与一元函数的不同点如下（这个对任何方式的理解很关键）

- 一元函数在某点的极限存在的充要条件是左右极限都存在且相等
- 多元函数必需是点 P 在定义域内以任何方式趋于 P0 时,f(P)都有极限,且相等.

c) 计算：对于未定型，不再有 L`Hospital 法则，须化成确定型（如参数方程换元）

d) 判断极限不存在的方法：选取不同的趋向路径，得到的结果不同即可

3、多元函数的累次极限

a) 形式：$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y),\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$（注意，二者不一定相等）

b) 与 N 重极限的关系

- 二者没有蕴含关系，可能一个存在，另一个不存在
- 定理：如果重极限和其中一个累次极限都存在，那他们一定相等（但无法得出另一个累次极限的存在性）

- 推论 1：累次极限存在，但是不相等，则重极限不存在
- 推论 2：累次极限可换序的条件是：所有累次极限都存在，并且 N 重极限也存在

4、多元函数的连续性

a) 某点处连续的定义：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

b) 间断点的定义：与一元函数类似

c) 闭区间上连续函数的性质：与一元函数类似

三、偏导数

1、某点偏导数的定义（举例说明）

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

2、偏导数存在和连续的关系（与一元函数不同）

- <u>可偏导不一定连续</u>，连续也不一定可偏导（没有必然关系）
- 用偏导数的几何意义解释
  - ➢ 二元函数的偏导数存在，只是表明函数沿 x 轴和 y 轴方向是连续的。
  - ➢ 而二元函数在一点处连续必须是沿空间的任何方向均连续，故由偏导数存在不能推出函数连续.

3、高阶偏导数

a) 偏导的顺序不能随便换，可以换的条件如下：

(1) 二元情况：若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 连续，则

$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

(2) 三元情况：当三阶混合偏导数在(x，y，z)连续时有

$f_{xyz}(x,y,z)=f_{yzx}(x,y,z)=f_{zxy}(x,y,z)=f_{xzy}(x,y,z)=f_{yxz}(x,y,z)=f_{zyx}(x,y,z)$

b) 初等函数满足上述条件，可以改变偏导次序

四、全微分

1、偏增量与偏微分

(1)偏增量：$\Delta z_x=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$

(2)偏微分：$f_x(x,y)\Delta x$

即：$\Delta z_x=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x$

2、全增量与全微分

a) 定义

全增量定义式：$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

如果全增量可以表示成 $\Delta z=A\Delta x+B\,\Delta y+o(\rho)$，

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 且 A、B 不依赖于 Δx、Δy，仅与 x、y 有关，则

称 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，称 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}f=A\Delta x+B\Delta y$ 为函数在该点的全微分

且此时 $A=\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$B=\dfrac{\partial z}{\partial y}$。即 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$

b) 可微的判定

定义法：

(1) dz是$\Delta x, \Delta y$的线性函数;

(2) $\dfrac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} \to 0, \ (\rho \to 0).$

偏导数法：所有偏导数连续

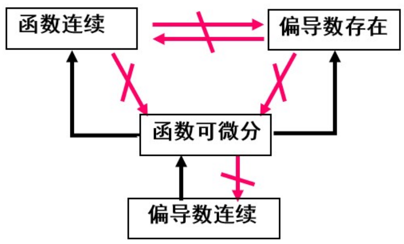
c) 微分的叠加原理：二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和（N 维同样成立）

d) 一阶微分形式不变性（对于高阶不成立）

设函数$z = f(u,v)$具有连续偏导数，则有全微分$dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv$;

无论u,v是自变量还是中间变量,上述全微分形式都不变

3、连续、可微、可偏导的关系



五、方向导数和梯度

1、方向导数

a) 定义

设方向向量为$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0(沿l)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

其中$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

- 注意：方向导数有方向之分。例如，沿 y 轴正向的方向导数为 f 'y (x0, y0)，而沿 y 轴负方向的方向导数为 – f 'y (x0, y0).
- 意义：沿着某一方向的变化率

b) 方向导数的存在定理：可微则存在任何非哪像的方向导数

c) 计算：$\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

2、梯度

a) 定义：

$$gradf(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$\begin{cases} 模：方向导数的最大变化率 \\ 方向：方向导数变化率最大的方向。 \end{cases}$$

方向的描述：设x轴到梯度的转角为θ,则$\tan\theta = \dfrac{f'_y}{f'_x}$.

b) 梯度的几何意义：函数在一点的梯度垂直于该点等值面(或等值线)，指向函数增大的方向.

c) 方向导数与梯度的关系

- 方向导数为梯度在方向 l 上的投影
- 沿梯度方向的方向导数最大，且等于$\left|gradf(x,y,z)\right|$

d) 运算公式（和导数相同）

6.2 多元函数微分法

一、复合函数微分法（略）

二、隐函数及其微分法

1、一个方程所确定的隐函数及其导数

2、方程组所确定的隐函数组及其导数（有一个雅可比行列式）

6.3 多元函数微分的应用

一、空间曲线的切线与法平面

1、曲线方程为参数方程的情况

2、曲线为一般式的情况

二、曲面的切平面与法线

1、设曲面为$F(x,y,z)=0$,求$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面与法线

2、设曲面为$z=f(x,y)$,求$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面与法线

三、多元函数的极值

1、极值的定义（略）

2、无条件极值（以二元函数为例）

a) 极值存在的必要条件（极值点的性质）

设$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)具有偏导数,且在(x_0,y_0)取得极值,

则$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$

- 同样，此时的驻点是(x_0,y_0)，而非(x_0,y_0,z_0)
- 驻点和极值点的关系：**驻点** $\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}$ **极值点（可偏导函数）**

b) 极值存在的充分条件

设$z=f(x,y)$在$U(P_0,\delta)$内连续,且有一、二阶连续偏导数

同时$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0), B=f_{xy}(x_0,y_0), C=f_{yy}(x_0,y_0)$, 则

(1)当$B^2-AC<0$时,有极值,$A<0$时有极大值,$A>0$时有极小值;

(2)当$B^2-AC>0$时,没有极值;

(3)当$B^2-AC=0$时,无法确定

c) 求极值的步骤

第一步 解方程组 $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$ 求出实数解，得驻点.

第二步 求$f_{xx}(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yy}(x,y)$.

第三步 对于每一个驻点(x_0,y_0)，求出二阶偏导数的值 A、B、C.

第四步 定出B^2-AC的符号，再判定是否是极值.

3、条件极值的求法

a) 降元法：约束条件等式直接带入函数中进行消元

b) Lagrage 乘数法（以二元为例）

$$\text{考虑} z = f(x,y) \text{在约束条件} \phi(x,y)=0 \text{下的可能极值点.}$$

$$\text{构造函数：} F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$

$$\text{令} \begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_\lambda = \phi(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{解出可能极值点} (x,y)$$

四、多元函数的最值（同高数上）

第七章　重积分

7.1 重积分的概念与性质

一、重积分概念

1、二重积分

a) 定义：（略）

b) 二重积分可积条件：在闭区域 D 上连续

c) 二重积分的性质

- 估值不等式（同一重积分）
- 二重积分中值定理

设函数$f(x,y)$在闭区域上连续，σ为D的面积，则在D上至少存在一点使得：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

- 关于区域的对称性和奇偶性

若D关于y轴对称,则（关于x同理）

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D_{右}} f(x,y)dxdy & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

d) 几何意义：

$(1)f(x,y)\geq 0$时,$\iint_D f(x,y)dxdy$为体积;

$(2)f(x,y)<0$时,$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right|$为体积,但本身值为负;

故$\iint_D f(x,y)dxdy$表示曲顶柱体体积的代数和.

2、三重积分

a) 定义（用正方体元）

b) 可积条件：在闭区域Ω上连续

c) 性质（与上面类似）

3、重积分的统一定义（略）

二、重积分的计算

1、二重积分的计算

- 化二重积分为二次积分
- 极坐标下计算

2、三重积分的计算

- 化三重积分为三次积分：“先一后二”法、“先二后一”法
- 技巧：轮换对称性、奇偶对称性
- 柱面坐标系
- 球面坐标系

3、重积分的换元法（没学过）

a)　二重积分的换元法

设 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上的闭区域 D 上连续，

变换T： $x=x(u,v), y=y(u,v)$将uov平面上的闭区域D'变换成xoy平面上的D,且满足

(1) $x(u,v), y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数；

(2) 在 D' 上雅可比式 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$

(3) $T: D\to D'$ 是$1\Leftrightarrow 1$的

则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\left|J(u,v)\right|dudv.$

说明:如果$Jacobi$行列式$J(u,v)$只在D'内个别点上或一条曲线上为零,

而在其他点上不为零,则上述换元公式仍成立.

注意：若$J(u,v)$不易算, 可用$J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$

b)　三重积分换元法，形式和上面类似

$$\boldsymbol{J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}}$$

三、重积分的几何应用（略）

7.2 曲线积分

一、第一类曲线积分

1、定义

定义式：$\int_S f(P)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta s_i.$

(1)平面曲线上对弧长的曲线积分：$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$

(2)空间曲线上对弧长的曲线积分：$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$

2、物理意义：已知线密度求质量

3、第一类曲线积分的存在性：当$f(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时存在

4、性质：积分没有方向性，即$\int_{AB}f(x,y)ds=\int_{BA}f(x,y)ds.$

5、计算方法（略）

二、第二类曲线积分

1、定义

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_L P(x,y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

2、物理意义：变力沿曲线作功

3、第二类曲线积分的存在性（同上）

4、性质：积分有方向性，换方向要加负号

5、计算

- 正常的方法（向量做）
- Green 公式

7.3 曲面积分

一、第一类曲面积分

1、定义

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

2、物理意义：已知面密度求质量

3、存在条件：P、Q、R 在有向光滑区面上连续

3、性质（与第一型曲线积分类似）

4、计算（略）

二、第二类曲面积分

1、预备概念

a) 单侧曲面与双侧曲面：动点沿着曲面上任意闭曲线移动并回到原点后，法向量不变的是双侧曲面，否则是单侧（莫比乌斯带）。这里讨论的是双侧曲面

b) 有向曲面的内外侧：用法向量与曲面的夹角判定

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

2、定义

3、物理意义：流量问题

4、存在条件：（同上）

5、性质：（与第二性曲线积分类似）

6、计算

- 直接计算
- 向量点积法
- Gauss 公式法

7、两类曲面积分的关系

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

其中$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦.

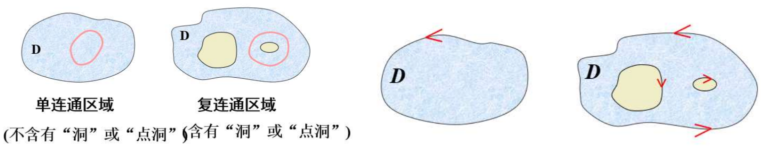
7.4 三大公式

一、Green 公式（用于第二型曲线积分） 格林

1、预备概念

a) 区域的连通性：设 D 为平面区域，如果 D 内任一闭曲线所围成的部分都属于 D，则称 D 为平面<u>单连通区域</u>，否则称为<u>复连通区域</u>.（即有没有洞）

b) 边界的方向性：当观察者沿 L 的正向行走时，区域 D 内离他近处的那一部分总在他的左边.



2、Green 公式

设区域D是由分段光滑正向曲线L围成,函数$P(x,y),Q(x,y)$

在D上具有连续一阶偏导数,则有

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \text{或} \oint_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

- 意义：平面区域的二重积分与沿此区域的第二类曲线积分的关系

3、平面曲线积分与路径无关性质

a) 定义：选取不同的积分路径得到的结果相等（可用于简化计算）

b) 何时无关

是一个单连通域，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数,则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关 （或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零）充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ 在 } G \text{ 内恒成立.}$$

c) 等价条件

设D是单连通域,函数$P(x,y),Q(x,y)$在D内具有一阶连续偏导数,

则以下四个条件等价：

(1)对D中任一分段光滑曲线L,曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

与路径无关,只与起止点有关.

(2)$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在D内是某一函数$u(x,y)$的全微分,即

$\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

(3)在D内每一点都有$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(4)沿D中任意光滑闭曲线L,有$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

二、Gauss 公式（计算第二型曲面积分） 高斯

1、公式内容

(1)设空间闭区域 Ω由分片光滑的闭曲面 Σ所围成;

(2)$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上有一阶连续偏导;

则 $$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

或 $$\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面的外侧,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的外法向量的方向余弦.

- 注意公式成立条件

(1) Σ－封闭曲面

(2) Σ－方向取外侧

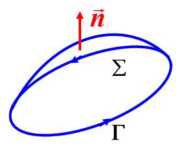
(3) $\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial z}$连续

2、意义：表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系

三、Stokes 公式 斯托克斯

1、引入：将 Green 公式推广至空间，表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系。

2、预备知识---曲面的侧与边界曲线的方向的规定(右手法则):



当右手四指依Γ的绕行方向时,大拇指所指的方向与Σ上法向量的指向相同，这时称Γ是有向曲面Σ的正向边界曲线.

3、公式内容

(1)设光滑曲面 Σ的边界Γ是按段光滑的连续曲线;

(2)$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Sigma$(连同$\Gamma$)上连续, 且有一阶连续偏导;则

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

其中Σ的侧与G的方向按右手法则确定.

4、空间曲线积分与路径无关的条件

定理2. 设空间开区域G是单连通区域;
$P(x,y,z),Q(x,y,z)R(x,y,z)$在$G$内具有一阶连续偏导数,则以下四个条件相互等价：

(1)沿G内任意分段光滑的闭曲线Γ有$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=0$.

(2)沿G内任意分段光滑的曲线 Γ, $\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关，只与Γ的起点和终点有关．

(3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$在$G$内恒成立. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\vec{0}$

(4)$Pdx+Qdy+Rdz$在G内是某一函数$u(x,y,z)$的全微分,

7.5 场论初步公式

一、场的概念

1、定义：场是发生物理现象的空间部分。像我们熟悉的重力场、将要讨论的电磁场等

2、场的分类

- 数量场：每一个点都有一个数对应
- 向量场：每一个点都有一个向量对应

二、通量与散度（由高斯公式而来）

1、引例

设Σ为场中任一有向曲面，流体的速度场为$v(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

则单位时间通过曲面S的流量为

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

2、通量

- $\Phi > 0$：流出大于流入，说明曲面内有正通量源
- $\Phi < 0$：流出小于流入，说明曲面内有负通量源
- $\Phi = 0$：流出等于流入，说明无通量源

3、散度

$$\text{定义式:}\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}\text{（曲面收敛于一点M）}$$

$$\text{表达式:}\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

- 散度的物理意义：通量对体积的变化率，散度绝对值的大小反映了源的强度

三、环流量与旋度（由斯托克斯公式而来）

1、引例

2、环流量

$$\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}A)_n\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}A_{\tau}\,\mathrm{d}s$$

- 等号前面：向量场 A 产生的旋度场穿过Σ的通量
- 等号后面：向量场 A 沿Γ的环流量
- 注意 Σ 与 Γ 的方向形成右手系

3、旋度（见下面）

四、三个算子

$$\text{梯度：}\nabla u=\operatorname{grad}u=\left(\tfrac{\partial u}{\partial x},\tfrac{\partial u}{\partial y},\tfrac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\text{散度：}\nabla\cdot\vec{A}=\operatorname{div}\vec{A}=\tfrac{\partial P}{\partial x}+\tfrac{\partial Q}{\partial y}+\tfrac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{旋度：}\nabla\times\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \tfrac{\partial}{\partial x}&\tfrac{\partial}{\partial y}&\tfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

第八章　常微分方程

8.1 微分方程的基本概念

一、基本概念

1、微分方程的阶：微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数

2、微分方程的分类

a) 线性方程、非线性方程

- 线性方程：对未知函数及若一个方程其导数的全体而言是一次的，且系数只与自变量有关（与未知函数及其导数无关）
- 非线性的如下

$$\frac{dx}{dt}=x^2 \qquad (\frac{dx}{dt})^2+x^2=t^5$$

b) 齐次方程、非齐次方程

- 齐次方程：自由项（不含未知函数及其导数的项）为零的方程
- 非其次的如下

$$\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=\sin x \qquad (\frac{dx}{dt})^2+x^2=t^5$$

3、微分方程的各种解：通解、特解

- {所有解}={通解}并{不能包含在通解内的所有特解}。
- 解的几何意义：通解的图形是一族积分曲线，特解是这族积分曲线中过某已知点的那条曲线

4、解法

- 初等积分法（通解可用初等函数或积分表示出来）
- 解不一定能用初等函数表示，此时可求数值解

8.2 典型的一阶微分方程

一、一阶微分方程的形式

1、形式：$F(x,y,y')=0$或$y'=f(x，y)$

二、可分离变量的方程的解法

Step1：分离变量为　$g(y)dy=f(x)dx$

Step2：两边积分　$\int g(y)dy=\int f(x)dx$

Step3：得到结果　$G(y)=F(x)+C$

三、齐次方程

1、形式：形如$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

2、解法：

Step1：变量代换，令$u=\frac{y}{x}$

Step2：化简方程为可分离变量的微分方程即　$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}$

Step3：按上之前的解法求解

3、本身不是齐次方程，但是可化为齐次的方程的

a)　形式

形如$\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1})$的微分方程

当$c=c_1=0$时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$

b)　求解（略）

四、一阶线性微分方程

1、标准形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

当$Q(x)\equiv 0$,上方程称为齐次的.

当$Q(x)\neq 0$,上方程称为非齐次的.

2、解法----常数变易法

Step1：先解对应的齐次方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$.得$y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

Step2：将式中的C改为$C(x)$，即$y=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

Step3：上式再代入非齐次方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$中，求得$C(x)$

3、线性微分方程通解的形式（提供另一种解法）

线性微分方程通解 = 所对应齐次通解+非齐次一个特解

五、Bernoulli 方程 伯努利

1、标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$$

(1) 当$n=0,1$时，方程为线性微分方程.

(2) 当$n\neq 0,1$时，方程为非线性微分方程.

2、解法：经过变量代换化为线性微分方程

Step1：两端除以y^n以转成类似齐次的形式，得$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

Step2：令$z=y^{1-n}$从而转成齐次方程,

则$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，代入上式得$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

Step3：求出通解后，将$z=y^{1-n}$代入即得可

六、全微分方程（恰当方程）

1、形式：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$（全微分的形式）

2、解法

- 法一：利用曲线积分与路径无关求解（已经是全微分形式的）
- 法二：积分因子法（本身不是全微分形式的，转为全微分方程）

(1) 积分因子定义：$\mu(x,y)\neq 0$为连续可微函数，乘上它后

$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$会变成全微分方程

(2)积分因子的求法（略）

法一：观察法（PPT总结了表格）

法二：公式法

8.3 几种高阶微分方程的解法

一、可降阶的高阶微分方程

1、形式 1: $y^{(n)}=f(x)$

- 直接 n 次积分即可

2、形式 2: $y''=f(x,y')$ （右端不显含变量 y）

3、形式 3: $y''=f(y,y')$

以上两个都是这个求解方法：设$y'=p(x)$从而降阶为一次的

二、二阶齐次线性微分方程

1、形式: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

2、性质: 叠加原理（推广到 n 维也成立）

(1) 若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是它的解，则它们的线性组合$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$也是

(2) 如果它们两个还线性无关，则他们的线性组合就是该方程的通解

3、求解: 只要找两个线性无关的特解即可（但是硬找很难线性无关）

a) 刘维尔公式

若 $y_1(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个非零解，则

$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\mathrm{d}x$ 是方程的与 $y_1(x)$ 线性无关的解

b) 求解

- 法一: 叠加原理

Step1：求出一个特解$y_1(x)$

Step2：利用刘维尔公式求出另一线性无关的特解$y_2(x)$

Step3：线性组合即可

- 法二: 特征方程法（这里直接举 n 阶为例）

n阶常系数齐线性微分方程的特征方程为

$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$

根的情况对应下表

特征根	通解中的对应项
单实根 r	**1 项** Ce^{rx}
k**重实根** r	k **项** $e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	**2 项** $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对共轭 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	**2 k 项** $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

三、二阶非齐线性微分方程

1、形式：$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

2、求解（推广到 n 维也成立）

- 法一：叠加原理

  Step1：求出对应的齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的通解

  Step2：求出当前非齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的一个特解

  Step3：二者组合即是该非齐次方程的通解

- 法二：常数变易法

  Step1：求出对应的齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的通解

  Step2：利用常数变易法求$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的通解

- 法三、特征方程法

  Step1：求出对应的齐次方程的通解

  Step2：根据f(x)的形式设特解，并用待定系数法确定系数

  常见类型：$P_m(x), P_m(x)e^{\lambda x}, P_m(x)e^{\lambda x}\cos\beta x, P_m(x)e^{\lambda x}\sin\beta x,$

四、欧拉方程

1、形式：$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$

2、求解：通过变量代换可化为常系数微分方程.

令$t=\ln x$,并记$\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \mathrm{D}^k=\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\,(k=2,3,\cdots)$则

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)\\[2mm] \dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}\right)\\ \cdots\end{cases}\qquad \begin{cases}xy'=\mathrm{D}\,y\\ x^2y''=\mathrm{D}^2\,y-\mathrm{D}\,y=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y\\ \cdots\cdot\\ x^ky^{(k)}=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)\,y\end{cases}$$

则欧拉方程$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots p_{n-1}xy'+p_ny=0$

就转成了常系数线性方程$\mathrm{D}^n\,y+b_1\,\mathrm{D}^{n-1}\,y+\cdots+b_ny=f(\mathrm{e}^t)$