

## 目录

第一章 绪论 .....	2
1.1 基本概念 .....	2
第二章 离散时间信号与离散时间系统 .....	3
2.1 基本概念 .....	3
2.2 离散时间信号的傅里叶变换 (DTFT) .....	4
第三章 离散傅里叶变换及其快速算法 .....	5
3.1 离散傅里叶级数 (DFS) .....	5
3.2 离散傅里叶变换 (DFT) .....	6
3.3 DFT 与其他变换的关系 .....	8
3.3 快速傅里叶变换 (FFT) .....	10
3.4 几种卷积和相关的对比 .....	12
3.5 FFT 的其他应用 .....	14
3.6 其他不要求的东西 .....	15
第四章 数字滤波器的原理和设计方法 .....	18
4.1 概述 .....	18
4.2 IIR 和 FIR 滤波器的网络结构 .....	19
4.3 IIR 滤波器的设计方法 .....	21
4.4 几种类型的 IIR 滤波器 .....	24
4.5 IIR 滤波器的频带变换 .....	25
4.6 FIR 滤波器的设计法一——窗函数法 .....	26
4.7 FIR 滤波器的设计法二——频率抽样设计法 .....	29
第五章 离散时间随机信号 .....	30
5.1 信号的谱分析 .....	30
5.2 随机变量的描述 (见随机信号分析) .....	30
5.3 离散随机信号通过线性非移变系统 (同上) .....	30
第七章 功率谱估计的经典方法 .....	31
7.1 概述 .....	31
7.2 估计理论 .....	32
7.3 自相关函数的估计 .....	33
7.4 功率谱密度的估计 .....	33

时域补零对频谱的影响：不改变整体形状，相当于增大频域抽样点数，从而谱线更加密集，减弱栅栏效应（可能谱线的位置和原来不同）

# 第一章 绪论

## 1.1 基本概念

### 一、数字信号处理的基本概念

#### 1、信号处理

- a) 信号处理：将含有某种信息的信号，送到一个处理设备中去，使之变换成人们所希望的信号，从而提取其中信息的过程。
- b) 数字信号处理：用数值计算方法对数字序列进行各种处理，把信号变换成符合需要的某种形式

#### 2、数字信号处理的对象：离散时间信号（老师反复强调不是数字信号）

- 回顾信号的分类（4种）：模拟信号、离散时间信号、数字信号、未命名

#### 3、数字滤波器

##### a) 概念：略

##### b) 分类

- IIR 无限冲激响应滤波器：冲激响应序列长度无穷
- FIR 有限冲激响应滤波器：冲激响应序列长度有限

## 第二章 离散时间信号与离散时间系统

### 2.1 基本概念

#### 一、全通系统和最小相位系统

##### 1、全通系统

a) 定义:  $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$

- 含义: 让输入信号中所有频率分量以恒定的增益或衰减通过系统

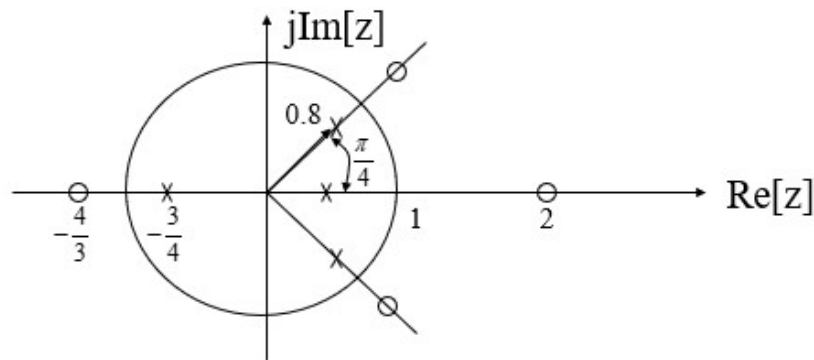
b) 系统函数的形式

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad \text{或} \quad H_{ap}(z) = A \prod_{c=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \cdot \prod_{r=1}^{M_r} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$

- 物理可实现的条件:  $|d_k| < 1$ ,  $|e_k| < 1$

c) 零极点的特点

- 个数:  $M = N = M_c + 2M_r$
- 分布 (之前讨论了好多, 见图回忆)



d) 相频特性

- 单调递减
- 一阶全通滤波器 当  $\omega$  从 0 变到  $2\pi$  时, 相位减少  $2\pi$

##### 2、最小相位系统

a) 最小相位序列:  $z$  变换的所有零、极点都在单位圆内的序列

b) 最小相位系统:  $z$  变换的所有零、极点都在单位圆内的系统

3、任意系统的分解: 任何系统都可以表示成一个最小相位系统和一个全通系统的级联,

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

#### 二、相位延迟和群延迟

1、相位延迟:  $T_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$

2、群延迟:  $T_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$

- 如果是指数序列, 则二者等价

## 2.2 离散时间信号的傅里叶变换 (DTFT)

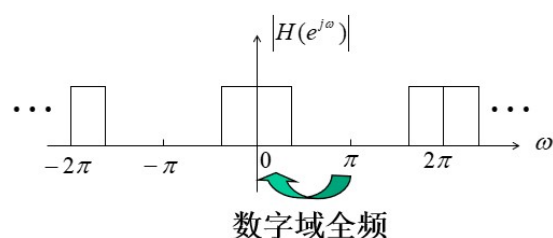
### 一、引入

	时域	频域	复频域
连续时间信号	$x(t)$	$X(j\Omega)$	$X(s)$
离散时间信号	$x(n)$	$X(e^{j\omega})$	$X(z)$

### 二、离散傅里叶变换的定义

#### 1、定义

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$



#### 2、特点

- $X(e^{j\omega})$  是周期为  $2\pi$  的连续波
- 如果  $x(n)$  是实序列，则  $X(e^{j\omega})$  的幅频特性偶对称，相频特性奇对称
- 0 对应模拟滤波器的低频， $\pi$  对应模拟滤波器的高频； $[0, \pi]$  为数字域的全频

### 三、离散傅里叶变换的性质

#### 1、线性 (略)

#### 2、时移和频移

$$\begin{cases} x(n-k) \leftrightarrow e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) \\ x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{cases}$$

#### 3、折叠: $x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

#### 4、序列乘 n (频域微分): $nx(n) \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

#### 5、复共轭:

$$\begin{cases} x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega}) \\ x^*(-n) \leftrightarrow X^*(e^{j\omega}) \end{cases}$$

#### 6、卷积

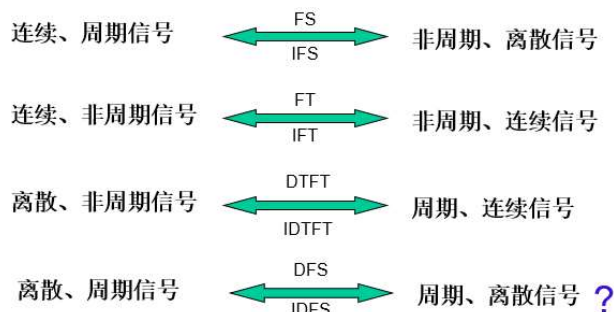
$$\begin{cases} x(n) * y(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}) \\ x(n) \cdot y(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) \end{cases}$$

#### 7、对称性 (略)

## 第三章 离散傅里叶变换及其快速算法

### 3.1 离散傅里叶级数 (DFS)

#### 一、引入



离散--抽样--对应周期延拓--周期信号

#### 二、离散傅里叶级数的定义

##### 1、预备概念

一个周期为  $N$  的周期序列  $\tilde{x}(n)$  可以表示为  $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

##### 2、傅里叶级数正反变换

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \end{cases} \quad \text{其中: } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

#### 三、离散傅里叶级数的性质

##### 1、线性 (略)

##### 2、移位

$$\begin{cases} DFS[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk} \tilde{X}(k) \\ IDFS[\tilde{X}(k-l)] = W_N^{-nl} \tilde{x}(n) \end{cases}$$

##### 3、变换与起点无关

$$\begin{cases} \tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{X}_2(k) = \sum_{n=m_1}^{m_2} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \end{cases} \Rightarrow \tilde{X}_1(k) = \tilde{X}_2(k) \quad \text{其中: } m_1 = rN + n_1, m_2 = rN + n_1 + N - 1, 0 \leq n_1 \leq N - 1$$

## 3.2 离散傅里叶变换 (DFT)

### 一、引入过程

#### 1、有限长序列的周期延拓

将有限长序列  $x(n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  延拓成周期序列  $\tilde{x}(n)$ , 二者关系如下

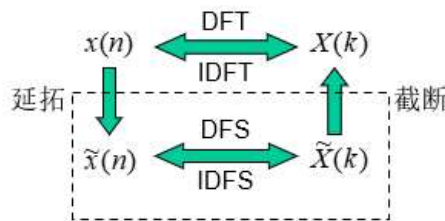
$$\begin{cases} \tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN) \triangleq x((n))_N \\ x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \end{cases}$$

符号  $((n))_N$  表示  $n$  对模  $N$  的余数, 即  $n = kN + ((n))_N$ ,  $0 \leq ((n))_N \leq N-1$

#### 2、有限长序列的截断: 取主值区间

#### 3、DFT 与 DFS 的关系 (也是 DFT 的原理)

- 离散傅里叶变换(DFT): 离散傅里叶级数时域、频域取主值区间。



### 二、DFT 的定义

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

### 三、DFT 的性质

#### 1、线性 (公式略): 要求长度相同, 否则补零

#### 2、圆周位移定理: $W_N^{nl} x(n) \Leftrightarrow X((k+l))_N R_N(n)$

#### 3、对称性

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N} nk - j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N} nk$$

#### a) $X(k)$ 的奇偶虚实性

	$x(n)$ 偶序列	$x(n)$ 奇序列
$x(n)$ 实序列	实偶	虚奇
$x(n)$ 虚序列	虚偶	实奇

b) 对称性: 若  $x(n)$  是长度为  $n$  的实序列

$$X(k) = X^*(N-k) \Rightarrow \begin{cases} |X(k)| = |X(N-k)| \\ \arg[X(k)] = -\arg[X(N-k)] \end{cases}$$

4、巴塞伐尔定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

### 3.3 DFT 与其他变换的关系

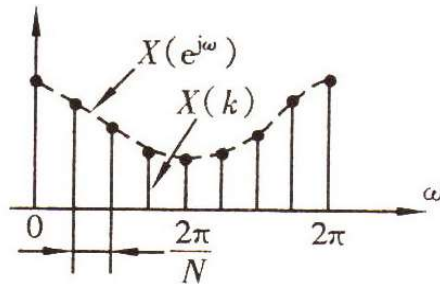
#### 一、DFT 与 DTFT 的关系

##### 1、关系式

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

##### 2、关系

- 计算机要能处理必须时域和频域都离散
- DTFT 是在时域抽样生成离散序列后做傅里叶变换，此时频域仍离散
- DFT 是在 DTFT 的基础上在频域进行抽样，从而时域和频域都离散了



3、频域抽样应该遵循的原则：  $N \leq M$ ，其中 N、M 分别为时域和频域的抽样点数

4、由 DFT 恢复 DTFT

a) 内插函数：  $\phi(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)}$

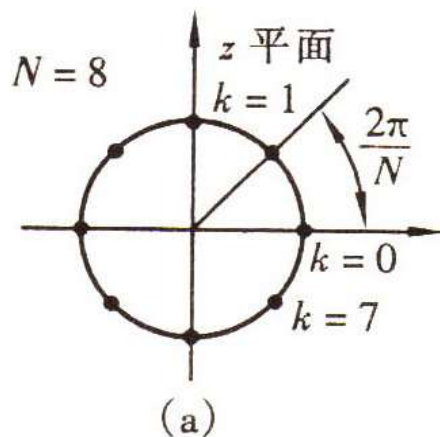
b) 恢复表达式：  $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi(\omega - k \frac{2\pi}{N})$

#### 二、DFT 与 ZT 的关系

##### 1、关系式

$$X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = X(k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

2、关系：相当于复频域的单位圆上等间隔采样





3、频域抽样应该遵循的原则：同上

4、由 DFT 恢复 ZT

a) 内插函数:  $\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$

• 极点:  $z = 0$  ( $N-1$ 阶, 因为  $z = W_N^{-k}$  和零点中的某一个抵消)

• 零点:  $z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m} \quad m = 0, \dots, N-1$

b) 恢复表达式:  $X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z)$

### 3.3 快速傅里叶变换 (FFT)

一、FFT 的引入——DFT 的计算量可以大大简化 (很多重复计算)

1、利用  $W_N$  的周期性和对称性简化

- 周期性:  $W_N^{n(rN+k)} = W_N^{nk}$

- 对称性:  $W_N^{nk+\frac{N}{2}} = -W_N^{nk}$

2、利用分解算法进一步利用上面的优势: 如一个  $N$  点 DFT 分成两个  $N/2$  点 DFT

3、前两点结合后, 与原来计算量的对比

a) 计算量的变化

- 复乘数:  $N^2 \rightarrow 2 \times \left(\frac{N}{2}\right)^2$

- 复加数:  $N(N-1) \rightarrow N\left(\frac{N}{2}-1\right)$

- FFT 具有  $\log_2 N$  级、 $N/2$  个蝶形运算、 $(N/2)\log_2 N$  计算复杂度

以  $N=4$  为例: DFT 16 次复数乘法 12 次复数加法

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^{0 \times 0} & W_4^{1 \times 0} & W_4^{2 \times 0} & W_4^{3 \times 0} \\ W_4^{0 \times 1} & W_4^{1 \times 1} & W_4^{2 \times 1} & W_4^{3 \times 1} \\ W_4^{0 \times 2} & W_4^{1 \times 2} & W_4^{2 \times 2} & W_4^{3 \times 2} \\ W_4^{0 \times 3} & W_4^{1 \times 3} & W_4^{2 \times 3} & W_4^{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

FFT: 8 次复数乘法 12 次复数加法

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & -W_4^0 & -W_4^1 \\ W_4^0 & -W_4^0 & W_4^0 & -W_4^0 \\ W_4^0 & -W_4^1 & -W_4^0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

b) 时间复杂度的变化

- DFT:  $O(N^2)$

- FFT:  $O(N \log_2 N)$

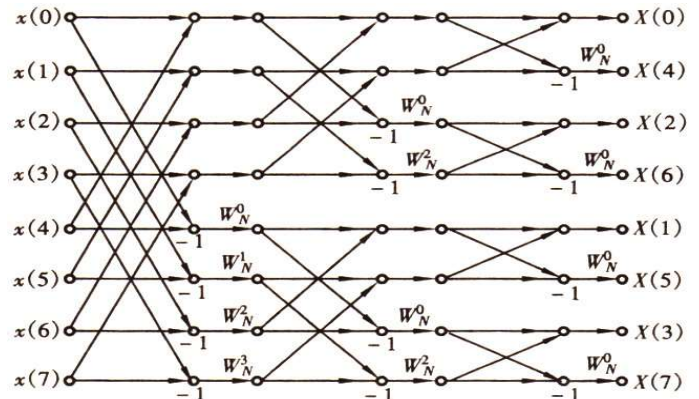
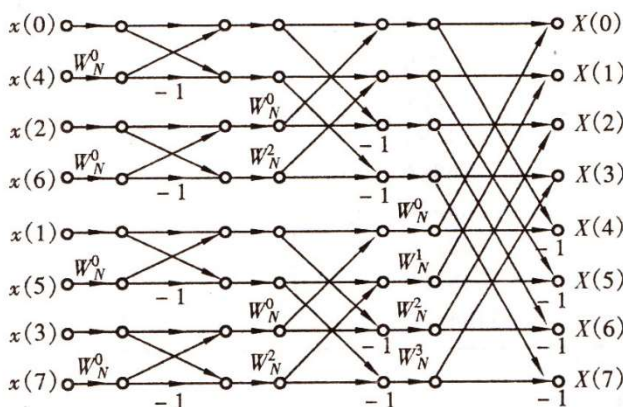
二、时间抽选基 2--FFT 算法 (库里-图基算法) 左图

三、频率抽选基 2--FFT 算法 (右图)

- 时抽 FFT、频抽 IFFT 使用同一程序

- 时抽 IFFT、频抽 FFT 使用同一程序

- IFFT 的另一种方法:  $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn} \right]^*$



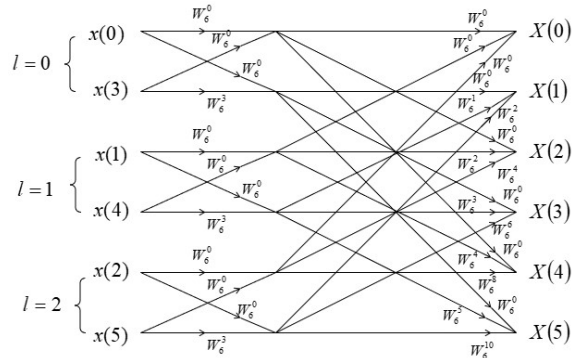
#### 四、N 为复合数的 FFT

1、什么情况：  $N \neq 2^M$

2、处理方法

a) 补零法，使  $N' = 2^M$

b) 任意基 FFT 算法：适用于  $N$  是一个复合数，即它可以分解成一些因子的乘积



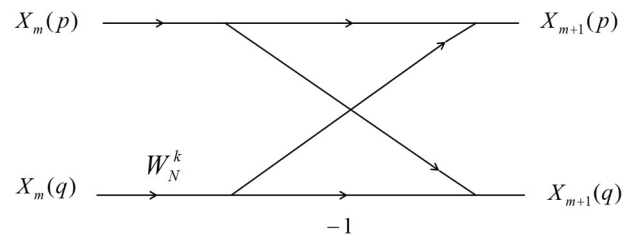
c) 如果要求准确的  $N$  点 DFT，而  $N$  又是质数，则只能采用直接 DFT 方法，或者用后面将要介绍的 CZT(Chirp z 变换)方法

#### 五、蝶形、同址和变址计算

1、蝶形运算

a) 图示及其代表的运算

$$\begin{cases} X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^k X_m(q) \\ X_{m+1}(q) = X_m(p) - W_N^k X_m(q) \end{cases}$$



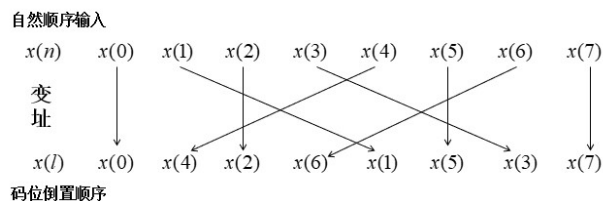
b) 一个蝶形运算的运算量：一次复乘，两次复加

2、同址（原位）计算：输出、输入数据利用同一内存单元

- 蝶形运算的特点：每一个蝶形运算的输入输出都是两个数据与其它结点的数据无关，其它蝶形运算也与这两结点的数据无关
- 因此，一个蝶形运算一旦计算完毕，原输入数据便失效了。这就意味着输出数据可以立即使用原输入数据结点所占用的内存。从而提高效率

3、变址计算

a) 内容



b) 倒位序的求法

- 第一个是 0
- 已知一个倒位序号求下一个倒位序号：反向加法（高位加 1，向右进位）

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0 \\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1 \end{array}$$

c) 倒位规则（二选一）

- $n < l$  空间内容互换， $n \geq l$  空间内容不变
- $n \geq l$  空间内容互换， $n < l$  空间内容不变

### 3.4 几种卷积和相关的对比

#### 一、线性卷积和线性相关（一般离散信号）

##### 1、离散卷积（略）

##### 2、离散相关

##### a) 定义

$$\begin{cases} r_{1,2}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(m-n) \\ r_{2,1}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m)x_1(m-n) \end{cases}$$

$$r_{1,2}(n) = r_{2,1}(-n)$$

##### b) 与离散卷积的关系

$$r_{1,2}(n) = x_1(n) * x_2(-n)$$

#### 二、周期卷积和周期相关（周期性离散信号，DFS 中引入）

##### 1、周期卷积

##### a) 定义

$$\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

##### b) 性质（类似）

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) \leftrightarrow \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k) \\ \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \tilde{X}_1(k) * \tilde{X}_2(k) \end{cases}$$

##### 2、周期相关（略）

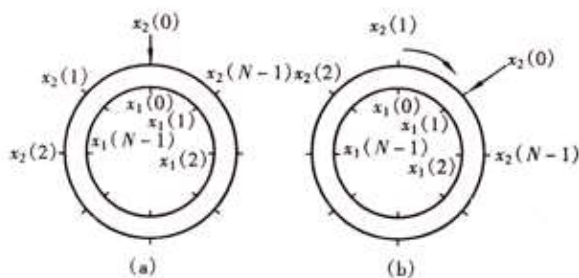
#### 三、循环卷积和循环相关（有限长离散信号，DFT 中引入）

##### 1、循环卷积（第三个卷积）

##### a) 定义：

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)$$

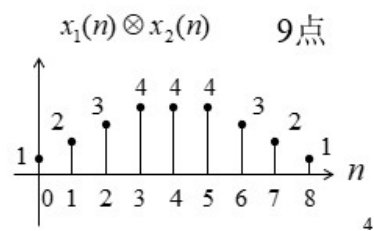
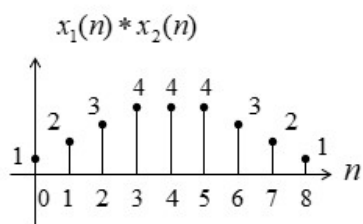
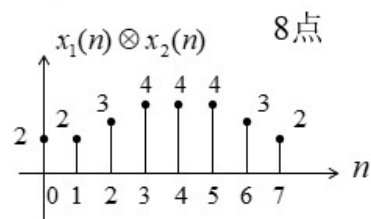
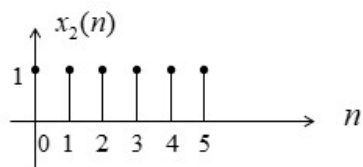
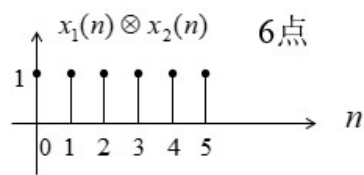
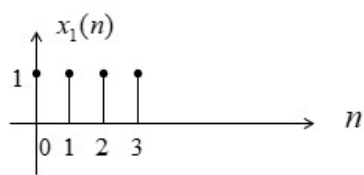
- 如果是  $n$  点卷积，则符号里面的  $\times$  改为  $\otimes$
- b) 性质（略，频域卷积的系数和 DFS 的相同）
- c) 简便算法（画圆）



##### d) 利用循环卷积计算线性卷积

- 注意：点数不够会有混叠失真
- 要求：  $L \geq N + M - 1$ ，其中  $N$  和  $M$  分别为两序列的长度

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \xrightarrow{L \geq N + M - 1} x_1(n) * x_2(n)$$



## 2、循环相关

### a) 定义

$$\begin{cases} \tilde{r}_{1,2}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \\ \tilde{r}_{2,1}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n) \end{cases}$$

### b) 循环相关定理：和循环卷积类似

### 3.5 FFT 的其他应用

#### 一、卷积的快速计算

##### 1、循环卷积

$$\left. \begin{aligned} (1) X_1(k) &= FFT[x_1(n)] \\ (2) X_2(k) &= FFT[x_2(n)] \\ (3) X_3(k) &= X_1(k)X_2(k) \\ (4) x_3(n) &= IFFT[X_3(k)] \end{aligned} \right\} 0 \leq k, n \leq N-1$$

##### 2、线性卷积

$$\left. \begin{aligned} (1) & \text{两序列补零至长度 } L \geq N + M - 1 \\ (2) X_1(k) &= FFT[x_1(n)] \\ (3) X_2(k) &= FFT[x_2(n)] \\ (4) X_3(k) &= X_1(k)X_2(k) \\ (5) x_3(n) &= IFFT[X_3(k)] \end{aligned} \right\} 0 \leq k, n \leq L-1$$

#### 二、相关的快速计算

##### 1、循环相关（与循环卷积的区别在第三步）

$$\left. \begin{aligned} (1) X_1(k) &= FFT[x_1(n)] \\ (2) X_2(k) &= FFT[x_2(n)] \\ (3) R_{1,2}(k) &= X_1(k)X_2^*(k) \\ (4) \hat{r}_{1,2}(n) &= IFFT[R_{1,2}(k)] \end{aligned} \right\} 0 \leq k, n \leq N-1$$

##### 2、线性相关（与线性卷积的区别在第四步）

$$\left. \begin{aligned} (1) & \text{两序列补零至长度 } L \geq N + M - 1 \\ (2) X_1(k) &= FFT[x_1(n)] \\ (3) X_2(k) &= FFT[x_2(n)] \\ (4) R_{1,2}(k) &= X_1(k)X_2^*(k) \\ (5) r_{1,2}(n) &= IFFT[R_{1,2}(k)] \end{aligned} \right\} 0 \leq k, n \leq L-1$$

### 3.6 其他不要求的东西

#### 一、线性卷积的另一减少运算量的方法——分段卷积

##### 1、引入

- 应用场景：在长序列与短序列进行卷积时常采用分段卷积的方法处理
- 概念：将长序列分段为多个子段，对每个子段分别计算线性卷积后，再将每段计算输出按照一定的关系组合在一起，即可得到与原序列计算卷积相同的结果。
- 优点：降低运算量，特别是对子段的计算采用 FFT 方法，进一步提高速度。
- 分段卷积的分类：重叠相加法、重叠保留法（略）

##### 2、重叠相加法

###### a) 原理说明

- 将长序列  $x(n)$  分成  $p$  段长为  $L$  的短序列，每段表示为

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n), & kL \leq n \leq (k+1)L-1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

- 则有限长序列可以表示为： $x(n) = \sum_{k=0}^{p-1} x_k(n)$
- 从而卷积可以先  $p$  段分别和另一序列卷积，之后再求和，即

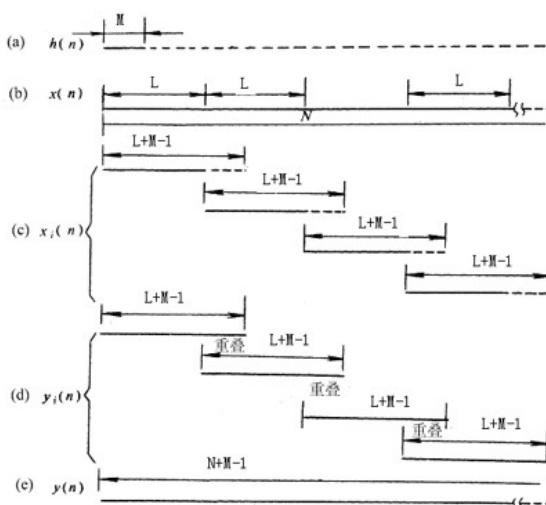
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{p-1} x_k(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{p-1} y_k(n)$$

###### b) 计算流程

$$\left. \begin{array}{l} \text{求 } H(k) \\ \text{求 } X_k(k) \end{array} \right\} \Rightarrow Y_k(k) = X_k(k)H(k) \Rightarrow y_k(n) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{p-1} y_k(n)$$

###### c) 图示

- 可以看出：相邻两段  $y_k(n)$  序列有  $M-1$  个点发生重叠



## 二、线性调频 z 变换 (chirp-z): 完成频谱细化

### 1、引入

#### a) 与 DFT 的关系

- DFT: 相当于对 ZT 在单位圆上取样
- chirp-z: 相当于对 ZT 在 z 平面上沿着螺旋线进行取样

#### b) 由 ZT 引入 chirp-z

- ZT 表达式:  $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$

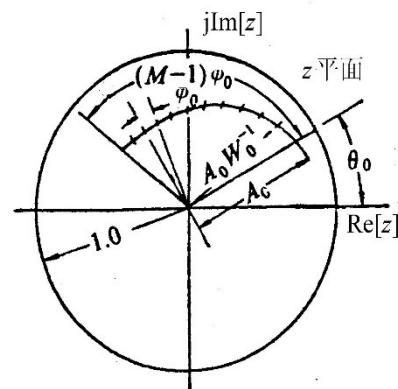
- 沿着螺旋线进行取样

$$\left. \begin{aligned} z_k &= AW^{-k} \\ A &= A_0 e^{j\theta_0} \\ W &= W_0 e^{-j\phi_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_k = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\phi_0)}$$

其中  $0 \leq k \leq M-1$

- 得 chirp-z 的表达式

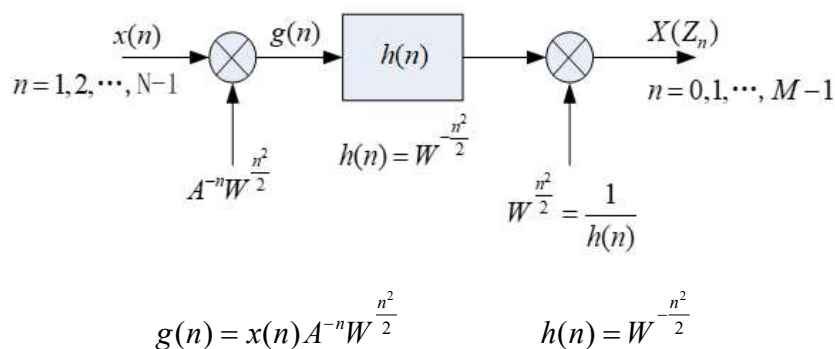
$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n}W^{nk} \quad 0 \leq k \leq M-1 \\ &= \dots = W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \end{aligned}$$



### 2、chirp-z 的表达式

$$X(z_k) = W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}} \right] W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \quad 0 \leq k \leq M-1$$

### 3、系统框图





## 三、离散余弦变换 (DCT)

## 1、引入 (实质上是实偶函数的 DFT)

- DFT 的表达式:  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N} nk - j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N} nk$

- 当信号为实偶函数时:

$$\text{Im}[X(k)] = 0 \Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N} nk$$

- 但是, 为了使上式能扩展到不仅对实偶成立。于是做了一些操作, 将实信号做成了实偶信号, 从而...
- 和公式对比后, 前面的系数是工程上...

## 2、公式

## a) 代数形式

$$X_c(k) = DCT[x(n)] = \sqrt{\frac{2}{N}} c(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2n+1}{2N} k\pi\right)$$

$$\text{其中: } c(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & k=0 \\ 1 & 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

## b) 矩阵形式 (略)

## 3、性质 (略)

## 第四章 数字滤波器的原理和设计方法

### 4.1 概述

#### 一、数字滤波器的基本原理

##### 1、数字滤波器的差分方程和系统函数

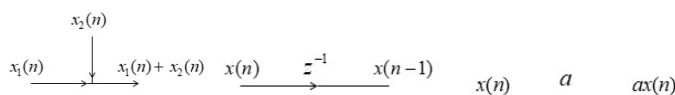
###### a) 差分方程

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

###### b) 系统函数

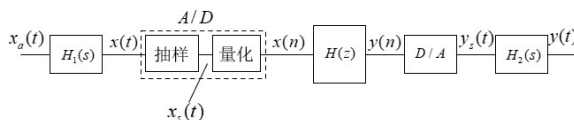
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

###### c) 系统框图的几个单元

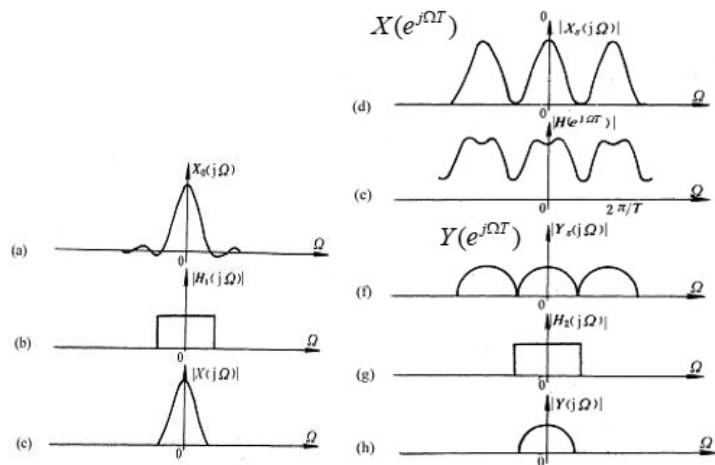


##### 2、??

###### a) 框图

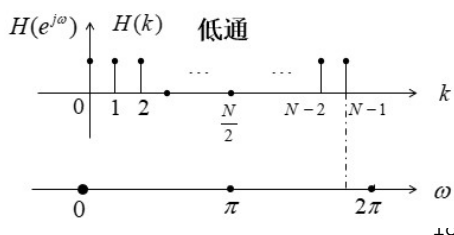


###### b) 各点波形



#### 二、数字滤波器的分类

- 1、FIR 数字滤波器与 IIR 数字滤波器
- 2、递归型滤波器与非递归型滤波器
- 3、低通、高通、带通、带阻、全通

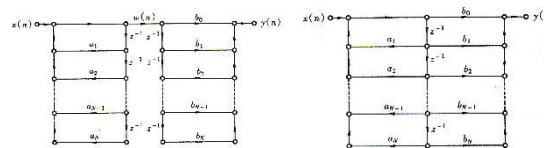


## 4.2 IIR 和 FIR 滤波器的网络结构

### 一、IIR 的网络结构

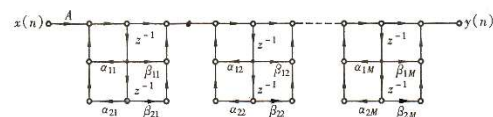
#### 1、直接 I 型（系统框图是第一个图）

a) 对应表达式: 
$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$



#### 2、直接 II 型（系统框图是第二个图）

a) 对应表达式: 
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

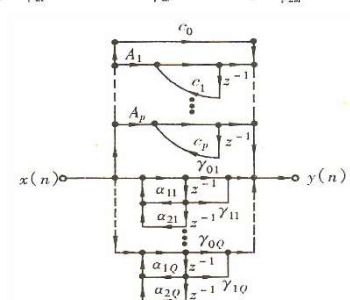


#### b) 评价

- 优点: 减少了延迟单元数
- 缺点: 零、极点调整难

#### 3、级联型

a) 对应表达式: 
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})}$$



- b) 评价: 每一级都可以单独调整零极点的位置而不影响其它零极点。同时可以灵活调整二阶基本节的次序

#### 4、并联型

a) 对应表达式: 
$$H(z) = c_0 + \sum_{k=1}^P \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^Q \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$

### 二、FIR 滤波器的结构

#### 1、FIR 滤波器的特点

- $h(n)$  在有限个值不为零
- 系统函数  $H(z)$  在  $|z| > 0$  处收敛,  $N-1$  个极点全部位于  $z = 0$  处,  $N-1$  个零点可在  $z$  平面任何位置
- 没有输出到输入间的反馈, 不存在稳定性问题

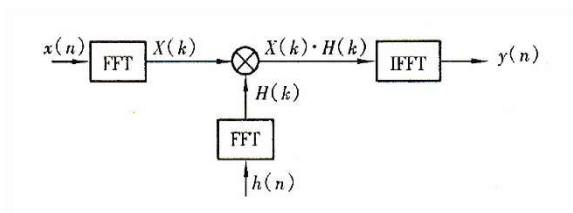
#### 2、直接型

#### 3、级联型

#### 4、快速卷积型（右图）

#### 5、线性相位 FIR 滤波器及网络结构

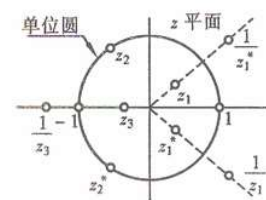
a) 判定:  $h(n) = \pm h(N-1-n)$



## b) 分类及特点

- $H(\pi) = 0$  说明无法做 HPF、BSF
- $H(0) = 0$  说明无法做 LPF、BPF

FIR 滤波器		$\omega = 0$	$\omega = \pi$
$h(n) = h(N-1-n)$ 第一类线性相位 FIR 滤波器 $\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$	N 为奇数		
	N 为偶数		$H(\pi) = 0$
$h(n) = -h(N-1-n)$ 第二类线性相位 FIR 滤波器 $\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega - \frac{\pi}{2}$	N 为奇数	$H(0) = 0$	$H(\pi) = 0$
	N 为偶数	$H(0) = 0$	


 c) 零点分布特点：若  $z_i$  是零点，则  $1/z_i$ 、 $z_i^*$ 、 $1/z_i^*$  都是零点

## d) 框图（略）

## 6. 频率取样型

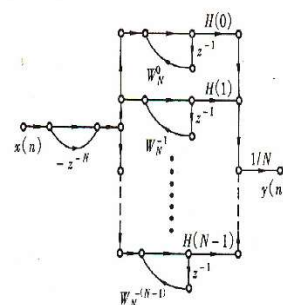
a) 对应表达式：
$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \frac{1}{N} H_1(z)H_2(z)$$

## b) 零极点分布

- 梳状滤波器  $H_1(z)$  的零点： $z_{ok} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^{-k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$
- $H_2(z)$  极点： $z_{pk} = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$
- $H(z)$  的零极点：一个极点同梳状滤波器的一个零点相抵消

## c) 缺陷

- 复数乘法运算较麻烦
- 可能出现零、极点不完全抵消的情况，引起系统不稳定
- d) 解决方法——引入修正参数（略）

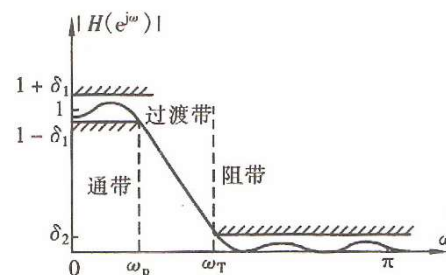


### 4.3 IIR 滤波器的设计方法

#### 一、数字滤波器的一般设计步骤

##### 1、数字滤波器的指标

- 通带容限:  $1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, |\omega| \leq \omega_p$
- 阻带容限:  $|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \omega_T \leq |\omega| \leq \pi$



##### 2、一般设计步骤

- 根据实际确定滤波器性能指标（幅度特性、截止频率等）
- 用一个稳定的因果系统逼近这些指标
- 用有限精度运算实现数字滤波器

##### 3、IIR 滤波器的设计方法概述

- 零、极点累试法
- 计算及优化设计
- 设计相应的模拟滤波器后转换为数字滤波器：冲激响应不变变换法、双线性变换法

#### 二、冲激响应不变变换法

- 1、原理：数字滤波器是对应的模拟滤波器抽样得到，从而冲激响应不变，即

$$h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} = h_a(nT)$$

##### 2、分析和推导

- 对于已知的模拟滤波器:  $H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \Rightarrow h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$
- 而数字滤波器相当于抽样之后只取整数点，即  $h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(nT)$
- 对由冲激响应不变法得到的冲激响应进行 z 变换即得到数字滤波器的系统函数

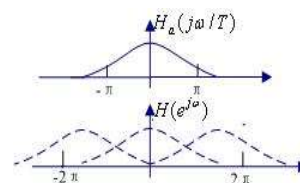
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} \right] z^{-n} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$3、映射关系 \begin{cases} z = e^{sT} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$$

##### 4、存在的问题——混叠问题

- a) 问题描述：如果抽样时间间隔过长，将会导致频谱混叠，从而无法获得正确的数字滤波器
  - b) 无混叠的条件分析
- 要想分析混叠，必须转到频域中去

- 由  $h(n) = h_a(nT)$  得  $H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_a(s - jr\Omega_s)$



- 再从 s 域转到频域中得： $H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}r\right)$
- 可见：当  $H_a(j\Omega) = 0$ ,  $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$  时，才能保证无混叠

### 5、适用性

- 适用于：低通、带通滤波器
- 不适用于：高通、带阻滤波器

## 三、双线性变换法

### 1、引入的原理

- 首先根据已知的模拟系统的差分方程  $c_1 y'_a(t) + c_0 y_a(t) = d_0 x(t)$  可得

$$\begin{cases} H_a(s) = \frac{d_0}{c_1 s + c_0} \\ y_a(t) = \int_{t_0}^t y'_a(t) dt + y_a(t_0) \end{cases}$$

- 令  $t = nT, t_0 = (n-1)T$ ，将上式离散化得  $y_a(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} y'_a(t) dt + y_a[(n-1)T]$
- 离散序列即只取上述抽样序列的整数点，令  $y(n) = y_a(nT), x(n) = x(nT)$  得

$$[y(n) - y(n-1)] = \frac{T}{2} \left\{ -\frac{c_0}{c_1} [y(n) + y(n-1)] + \frac{d_0}{c_1} [x(n) + x(n-1)] \right\}$$

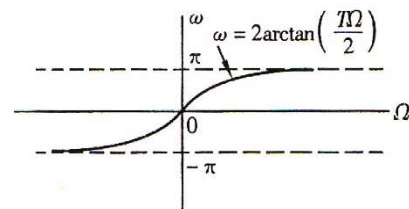
- 对上式做 z 变换并整理得  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_0}{c_1 \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c_0}$ ，而  $H_a(s) = \frac{d_0}{c_1 s + c_0}$

从而可得模拟与数字的映射关系

### 2、映射关系的说明

a) 映射关系：
$$\begin{cases} s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ \omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \end{cases}$$

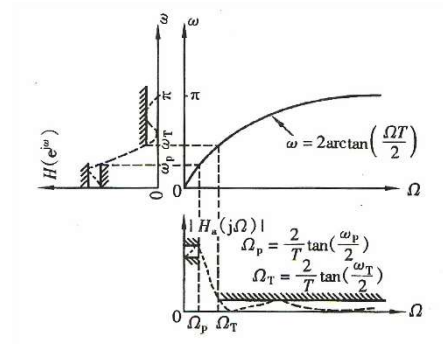
- b) 优点：克服了冲激响应不变法的频谱混叠问题  
c) 缺点：牺牲了线性，导致频率畸变（频率不是线性映射）



- 分析：令  $s = j\Omega \Rightarrow j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} \Rightarrow \omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$
- 克服方法：预畸变（模拟域频率先经过预畸变，之后再用此方法可以抵消畸变）

$$\begin{cases} \Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \\ \Omega_T = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_T}{2}\right) \end{cases}$$

d) 适用：分段线性滤波器



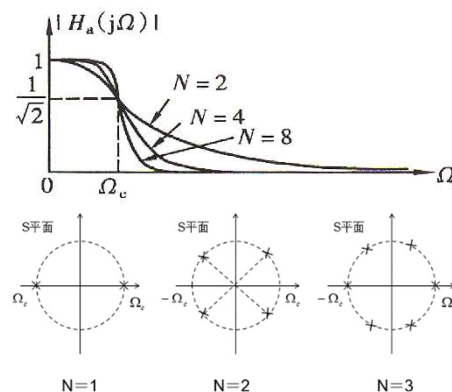
## 4.4 几种类型的 IIR 滤波器

### 一、巴特沃思滤波器（都不起伏）

#### 1、模拟巴特沃斯滤波器的特性

##### a) 幅度平方函数及与 N 的关系

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$



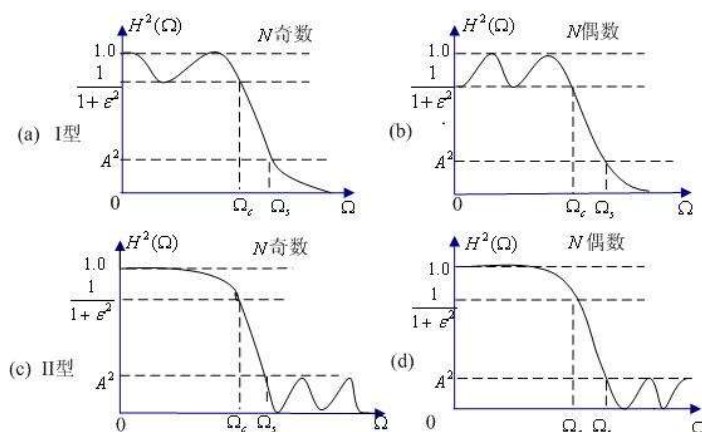
##### b) 极点特点

- $2N$  个极点等间隔分布在半径为  $\Omega_c$  的圆周上
- 极点关于虚轴对称，且没有极点落在虚轴上
- 当  $N$  为奇数时，实轴上有两个极点。当  $N$  为偶数时，实轴上无极点，极点关于实轴对称

#### 2、数字巴特沃斯滤波器（根据上一节的方法设计即可）

### 二、切比雪夫滤波器（通带起伏或阻带起伏）

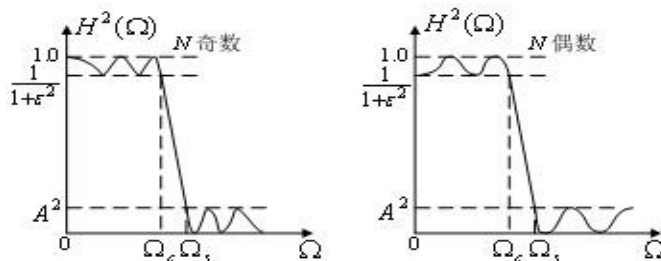
#### 1、模拟切比雪夫滤波器



#### 2、数字（略）

### 三、椭圆滤波器（考尔滤波器）（通带阻带都起伏）

#### 1、模拟椭圆滤波器



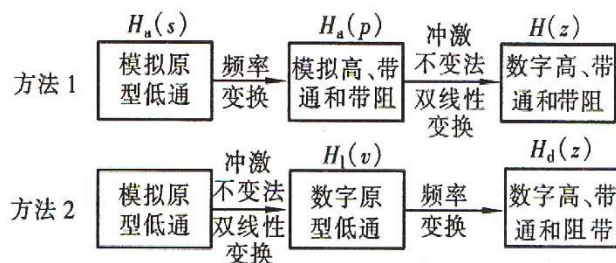
#### 2、数字椭圆滤波器（略）



## 4.5 IIR 滤波器的频带变换

### 一、频带变换原理

1、频带变换内容：由原型滤波器得各种 LPF、HPF、BPF、BSF



2、模拟频带变换原理（略）

3、数字频带变换原理（略）

### 二、模拟频带变换

- 模拟原型 LPF 截止频率： $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$

若  $s \leftarrow \text{代以 } \frac{s}{\Omega_u}$  低通  $\longrightarrow$  低通 ( $\Omega_u$ )

若  $s \leftarrow \text{代以 } \frac{\Omega_u}{s}$  低通  $\longrightarrow$  高通 ( $\Omega_u$ )

若  $s \leftarrow \text{代以 } \frac{s^2 + \Omega_u \Omega_L}{s(\Omega_u - \Omega_L)}$  低通  $\longrightarrow$  带通 ( $\Omega_u, \Omega_L$ )

若  $s \leftarrow \text{代以 } \frac{s(\Omega_u - \Omega_L)}{s^2 + \Omega_u \Omega_L}$  低通  $\longrightarrow$  带阻 ( $\Omega_u, \Omega_L$ )

### 三、数字频带变换

- 数字原型 LPF 截止频率： $\omega_c$

若  $z^{-1} \leftarrow \text{代以 } \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$   $\alpha = \frac{\sin[(\omega_c - \omega_u)/2]}{\sin[(\omega_c + \omega_u)/2]}$  低通  $\longrightarrow$  低通

若  $z^{-1} \leftarrow \text{代以 } \frac{-(z^{-1} + \alpha)}{1 + \alpha z^{-1}}$   $\alpha = -\frac{\cos[(\omega_c + \omega_u)/2]}{\cos[(\omega_c - \omega_u)/2]}$  低通  $\longrightarrow$  高通

若  $z^{-1} \leftarrow \text{代以 } \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1}$   $\alpha = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_L)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_L)/2]}$   $k = [(\omega_u + \omega_L)/2] \text{tg}(\omega_c/2)$  低通  $\longrightarrow$  带通

若  $z^{-1} \leftarrow \text{代以 } \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{1+k} z^{-1} + 1}$   $\alpha = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_L)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_L)/2]}$   $k = [(\omega_u - \omega_L)/2] \text{tg}(\omega_c/2)$  低通  $\longrightarrow$  带阻

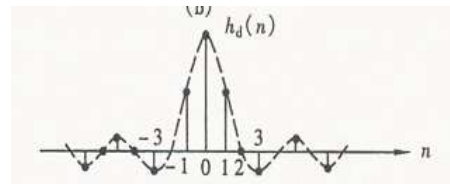
## 4.6 FIR 滤波器的设计法——窗函数法

## 一、窗函数法

- 1、设计思路：先设计出无限长，之后截断移位得到
- 2、设计步骤（举例说明）

- 得到无限长序列  $h_d(n)$ （假设设计理想低通）

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$



- 给无限长序列  $h_d(n)$  加窗函数截断得到有限长序列  $h_N(n)$ （假设加的是矩形窗）

$$h_N(n) = h_d(n)w_R(n) \quad \text{其中: } w_R(n) = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

- 上述有限长序列还需要转成因果序列（稳定+因果才能物理可实现）

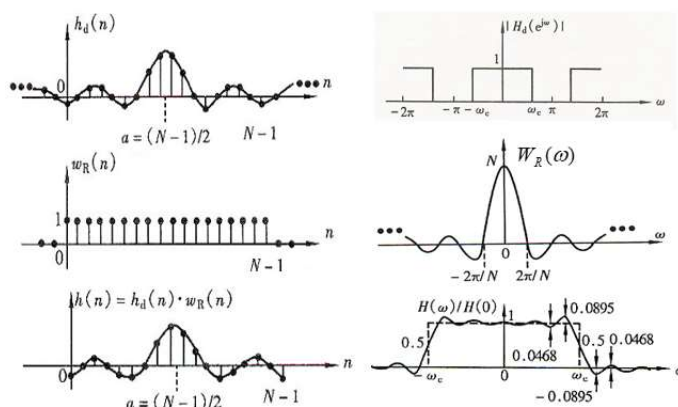
$$h(n) = h_N\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- 综合上面三步，最终得到的 FIR 滤波器的冲激响应为

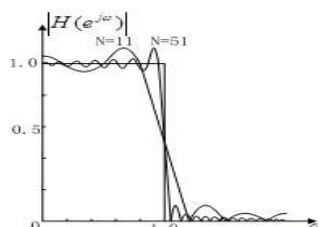
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} d\omega \quad 0 \leq n \leq N-1$$

## 3、对于上面步骤的进一步说明

- a) 截断所带来的影响：能量损失
- b) 对窗函数的要求：主瓣窄、旁瓣小
  - 主瓣窄：使设计出的滤波器具有较陡的过渡带
  - 旁瓣小：使其能量尽量集中在主瓣内，使设计出的滤波器肩峰和余振较小，阻带衰减较大
- c) 理想低通与矩形窗卷积的过程



- d) 吉布斯现象：增加  $N$  值只能相应减少过渡带的宽度，但截止频率附近最大肩峰的相对值始终保持不变



## 二、常用窗函数

### 1、矩形窗

$$a) \text{ 时域: } w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases} = R_N(n)$$

$$b) \text{ 频域: } W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega}$$

$$c) \text{ 主瓣宽度: } \frac{4\pi}{N}$$

### 2、巴特利特窗 (三角形窗)

$$a) \text{ 时域: } w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases}$$

$$b) \text{ 频域: } W(\omega) = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin(\omega N/4)}{\sin(\omega/2)} \right|^2, \quad M = \frac{N-1}{2}$$

$$c) \text{ 主瓣宽度: } \frac{8\pi}{N}$$

### 3、汉宁(Hanning)窗——升余弦窗

$$a) \text{ 时域: } w(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right] w_R(n)$$

$$b) \text{ 频域: } W(e^{j\omega}) = W(\omega) e^{-j\omega\alpha}$$

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right]$$

$$c) \text{ 主瓣宽度: } \frac{8\pi}{N}$$

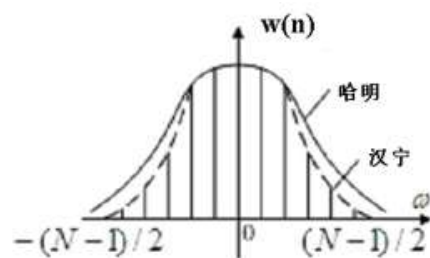
d) 相对于矩形窗: 主瓣宽度增加、旁瓣幅度减小

### 4、哈明(Hamming)窗——改进的升余弦窗

$$a) \text{ 时域: } w(n) = \frac{1}{2} \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right] w_R(n)$$

$$b) \text{ 频域: } W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right]$$

$$c) \text{ 主瓣宽度: } \frac{8\pi}{N}$$



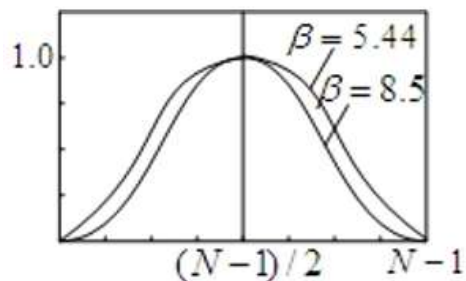
5、布莱克曼(Blackman)窗—二阶升余弦窗

a) 时域:  $w(n) = \left[ 0.42 - 0.5 \cos \frac{2n\pi}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4n\pi}{N-1} \right] w_R(n)$

b) 频域: (略)

6、凯泽窗(Kaiser)

a) 时域:  $w(n) = \frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left( \frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right]}{I_0(\beta)}$



• 其中:  $I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$  零阶第一类修正贝塞尔函数

三、窗函数的选择方法

$$N = \frac{A}{\Delta\omega}$$

• 例如, 矩形窗过渡带宽  $\Delta\omega = 4\pi/N$

窗函数	旁瓣峰值幅度/dB	过渡带宽	阻带最小衰减/dB
矩形窗	-13	$4\pi/N$	-21
三角形窗	-25	$8\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	-44
哈明窗	-41	$8\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	-74
凯塞窗( $\alpha=7.865$ )	-57	$10\pi/N$	-80

## 4.7 FIR 滤波器的设计法二——频率抽样设计法

### 一、设计思想和原理

1、设计思想：对理想频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  等间隔频率抽样得到  $H(k)$ ，并以此作为滤波器的频率响应

#### 2、原理说明

- 对理想频率响应进行等间隔频率抽样得

$$H(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

- 通过内插函数恢复  $H(e^{j\omega})$ 、 $H(z)$

$$\begin{cases} H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \\ H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} = e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) s(\omega, k) \end{cases}$$

$$\text{其中: } s(\omega, k) = e^{j(N-1)k\pi/N} \frac{\sin[N(\omega - 2k\pi/N)/2]}{N \sin[(\omega - 2k\pi/N)/2]}$$

#### 3、 $H(k)$ 的确定 ( ? ? )

a) 原则 (略)

b) 结论

- N 为偶数

$$H(k) = \begin{cases} e^{-j(N-1)k\pi/N} & k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ 0 & k = N/2 \\ -e^{-j(N-1)k\pi/N} & k = N/2 + 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

- N 为奇数

$$H(k) = e^{-j(N-1)k\pi/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

### 二、设计步骤

1、根据所设计的滤波器的通带与阻带的要求、N 的奇偶性确定  $H(k)$ ，在阻带内

$$H(k) = 0$$

2、用给定的  $H(k)$  构成所设计的滤波器的转移函数  $H(z)$  及频率响应  $H(e^{j\omega})$

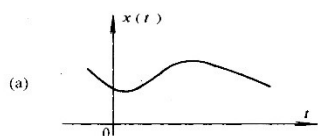
## 第五章 离散时间随机信号

### 5.1 信号的谱分析

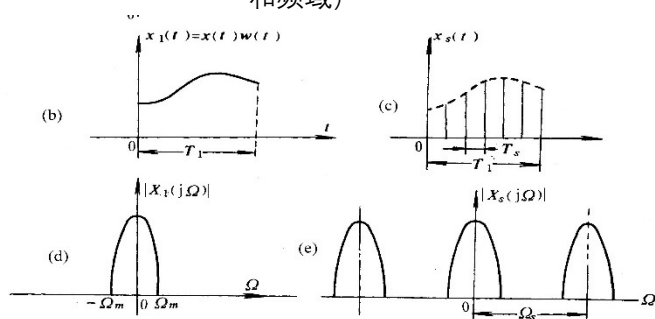
#### 一、信号的谱分析

##### 1、流程

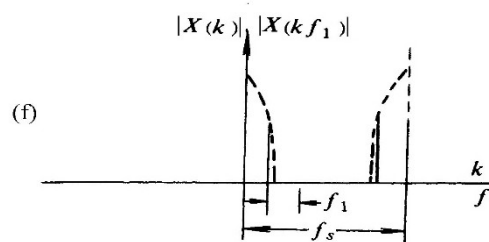
- 模拟随机信号



- 模拟随机信号的截断和抽样（时域和频域）



- 频域中抽样得到最终的谱



##### 2、对参数的要求

- 抽样要求:  $f_s \geq 2f_m$

- 频域抽样点数的要求:  $N = \frac{T_1}{T_s} = \frac{f_s}{f_1} \Rightarrow N \geq \frac{2f_m}{f_1}$

#### 二、用 FFT 进行谱分析的问题

- 1、精确度: 用 FFT 分析确定性连续时间信号只能是一种近似

- 2、原因如下, 有下面三种误差

- 混叠: 对于频带很宽的信号, 由于频域的截短必然产生混叠。经常采用的克服混叠的办法是尽可能提高抽样频率和在信号输入端加抗混叠滤波器。
- 泄漏: 对于时域很宽的信号, 由于时域截短产生频域的泄漏
- 栅栏效应: 由于 FFT 是将一幅连续的频谱进行 N 点抽样, 就好像对一幅频谱图通过一个“栅栏”观察一样, 只能在离散点处看到真实图形

### 5.2 随机变量的描述（见随机信号分析）

### 5.3 离散随机信号通过线性非移变系统（同上）

## 第七章 功率谱估计的经典方法

### 7.1 概述

#### 一、维纳辛钦定理及在实际应用中的问题

1、定理内容:  $S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m) z^{-m}$ , 其中  $R_{xx}(m) = E[x(n)x^*(n+m)]$

- 但是计算机无法表示无限长, 于是自相关函数表示为

$$R_{xx}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x^*(n+m)$$

2、上述存在的两个困难

- 不可能知道取样序列的所有数据
- 已知数据通常是被噪声或干扰“污染”了的

- 所以采用下面的普估计方法

#### 二、谱估计的方法

- 1、经典谱估计: 周期图法、Blackman-Tukey 法
- 2、线代谱估计: 参数模型法

## 7.2 估计理论

### 一、基本概念

#### 1、真值和估计值

$$\alpha \begin{cases} m_x \\ \sigma_x^2 \\ R_{xx}(m) \\ S_{xx}(e^{j\omega}) \end{cases} \quad \hat{\alpha} \begin{cases} \hat{m}_x \\ \hat{\sigma}_x^2 \\ R_N(m) \\ S_{per}(e^{j\omega}) \end{cases}$$

(真值)                      (估计值)

### 二、估计的参数

#### 1、估计的偏差

- a) 定义:  $B = \alpha - E[\hat{\alpha}]$
- b) 分类: 无偏估计 ( $B = 0$ )、渐进无偏 ( $\lim_{N \rightarrow \infty} B = 0$ )、有偏 ( $B \neq 0$ )

- 无偏估计和渐进无偏估计都是好的估计

#### 2、估计的方差

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \text{Var}[\hat{\alpha}] = E\left\{\left[\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}]\right]^2\right\}$$

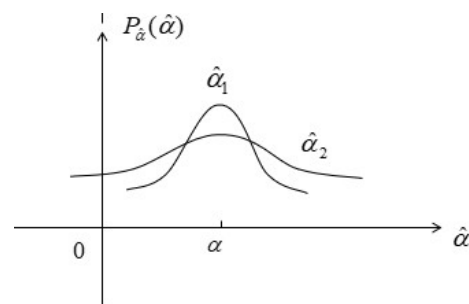
#### 3、估计的均方误差

$$MS(\hat{\alpha}) = E[(\alpha - \hat{\alpha})^2] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 + B^2$$

### 三、估计的质量

#### 1、无偏性 (见上)

2、有效性:  $RE = \left[ \frac{\text{Var}(\hat{\alpha}_1)}{\text{Var}(\hat{\alpha}_2)} \times 100 \right] \%$



#### 3、一致性: 如果观测数据量趋于无穷大时, 估计的偏差和方差都趋于零

- 一致估计是好估计

### 四、估计的方法

#### 1、最大似然估计

$$\mathbf{X} = [x(0) \ x(1) \ \cdots \ x(N-1)]^T$$

最大似然估计: 使  $p(\mathbf{X}, \alpha)$  最大的  $\hat{\alpha}$ 。

可以证明: 最大似然估计是渐进无偏估计, 在所有的无偏估计和渐进无偏估计中, 最大似然估计的方差是最小的。



## 7.3 自相关函数的估计

### 一、无偏估计

#### 1、表达式

$$R'_N(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m), \quad |m| \leq N-1$$

#### 2、估计质量：无偏估计、一致估计

### 二、有偏估计

#### 1、表达式

$$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x^*(n+m), \quad |m| \leq N-1$$

#### 2、估计质量：渐进无偏、一致估计

## 7.4 功率谱密度的估计

### 一、周期图法（最初用于判断时间序列中是否隐藏周期性）

#### 1、周期图的原理

##### a) 原理的思路

- 从均值为零的广义平稳遍历随机过程得到一个取样序列中的一段实数数据  $x_N(n)$

$$\text{其中: } x_N(n) = w_N(n)x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

- 利用自相关函数的有偏估计来估计自相关函数
- 利用上述自相关函数的估计来估计功率谱

##### b) 估计表达式

$$S_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_N(m) e^{-j\omega m} = \frac{1}{N} X_N(e^{j\omega}) X_N^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2$$

#### 2、估计的偏差：渐进无偏、不具有 consistency。所以不是好估计

- 不具有 consistency 的原因：  $\text{Var}[S_{per}(e^{j\omega})] = \sigma_x^4$

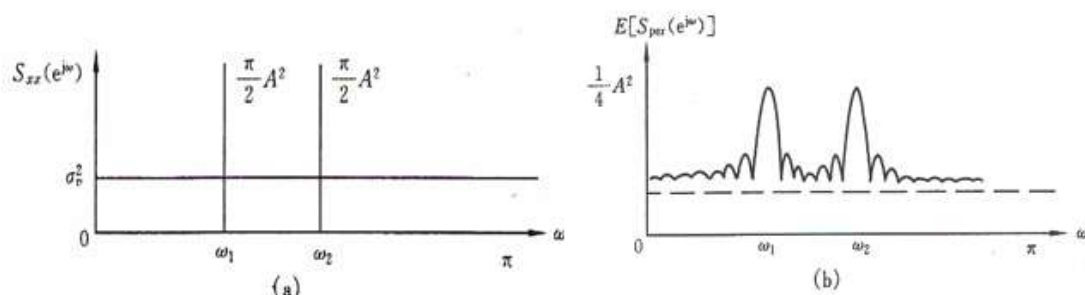
#### 3、周期图的频率分辨率

##### a) 定义：周期图能够分辨两个频率相近的正弦信号的能力

##### b) 衡量：窗谱主瓣宽度

##### c) 举例

- 白噪声加两个正弦信号：  $x(n) = A_1 \sin(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 n + \phi_2) + v(n)$
- 理论的频谱（左图）和估计的频谱（右图）为



## 二、Blackman-Tukey 法

1、原理：通过随机过程的取样序列来估计自相关序列，之后根据维纳辛钦定理估计功率谱

## 2、算法

## a) 一般算法

(1) 求随机序列的自相关函数估计值，即

$$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m), \quad |m| \leq N-1$$

(2) 求功率谱密度

$$S_N(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_N(m)e^{-j\omega m}$$

## b) 借助 FFT

可以用FFT计算自相关函数，求功率谱，其步骤如下：

(1) 补零：  $x(n)$  补零至  $2N-1$ ，得  $x'(n)$

(2) 求  $x'(n)$  的离散傅里叶变换 ( $2N-1$  点FFT)

$$X'(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x'(n)W_L^{nk} \quad 0 \leq L \leq 2N-1$$

(3) 求  $X'(k)X'^*(k)$

(4) 求自相关函数  $R_N(m) = \text{IFFT}[X'(k)X'^*(k)]$

(5) 计算功率谱密度  $S_N(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_N(m)e^{-j\omega m}$

58

## 三、经典谱估计的矛盾——方差和分辨率

1、增加  $N$ ，可以提高谱的分辨率

2、增加  $N$ ，导致主瓣变窄，从而…使方差增大