目录

第一章　行列式

1.1 行列式的基本概念

一、基本概念

1、全排列的概念：把 n 个不同的元素排成的一列，称为这 n 个元素的一个全排列

- 全排列数量：n!

2、逆序数的概念

a) 相关概念

- 标准次序：标号由小到大的排列
- 逆序：在一个排列中，若某两个元素排列的次序与标准次序不同，就称这两个数构成一个逆序。一个排列中所有逆序的总和称为这个排列的逆序数。

b) 一个排列逆序数的计算方法

- 一个元素p_i的逆序数t_i：排在p_i前面并比p_i大的元素个数
- 一个排列逆序数的计算：$t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$

c) 由逆序数引申出的分类

- 奇排列：逆序数为奇数的排列
- 偶排列：逆序数为偶数的排列

二、行列式的基本概念

1、定义（看看别的课件怎么定义）

$$D \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum (-1)^t a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

- 即所有排列乘上-1 的 t 次方（t 即为上文提到的每个排列的逆序数）之后求和
- 定义即包含行列式计算的定义法，当二、三维时，体现为对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2、常见行列式

(1) 上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4)副对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3、行列式的性质

- 转置前后的行列式值相等
- 互换行列式的两行/列，行列式变号
  - 推论：若行列式有两行（列）相同，则行列式为 0
- 用非零数 k 乘行列式的某一行（列）中所有元素，等于用数 k 乘此行列式。（这点与矩阵不同）
  - 推论：若行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于 0
- 若某一行是两组数的和，则此行列式就等于如下两个行列式的和（和矩阵不同）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 行列式的某一行（列）的所有元素乘以同一数 k 后再加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

1.2 行列式按行（列）展开及线性方程组的求解

一、行列式按行（列）展开

1、基本概念------余子式和代数余子式

$$a_{ij}\text{的余子式}M_{ij}:\text{划去元素}a_{ij}\text{所在的行和列后，余下的}n-1\quad\text{阶行列式}$$

$$a_{ij}\text{的代数余子式}A_{ij}:A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

2、行列式展开定理

a) 定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad\text{或}\quad D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

b) 推论：行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式之和等于 0，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad\text{或}\quad a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j$$

二、线性方程组的求解

1、线性方程组相关概念

a) 齐次和非齐次的概念

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{齐次：常数项}b_i\ \text{全为}0\\\text{非齐次：不全为}0\end{cases}$$

b) 齐次线性方程组的性质

- 显然，其中一个解是零解（即所有 x 都等于 0）
- 如果齐次线性方程组的系数行列式 D≠0, 则没有非零解(即只有零解这个唯一解)

2、求解方法----- Cramer 法则

a) 内容

$$\text{如果线性方程组}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\text{的系数行列式}D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0$$

$$\text{则该线性方程组一定有解，且是唯一解}x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

$$\text{其中}D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

b) 推论：如果线性方程组无解或解不唯一，则它的系数行列式必为零。

第二章　矩阵

2.1 矩阵及其运算

一、矩阵的基本概念

1、定义

记作 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，简记为$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$或 $A_{m\times n}$

2、同型矩阵和相等矩阵

- 同型矩阵：两个矩阵的行数、列数都相等
- 相等矩阵：同型矩阵的基础上对应元素也相等
- 等价矩阵：矩阵 A 经初等变换可得到 B

3、一些特殊的矩阵

- 零矩阵O（注意：不同阶数的零矩阵是不相等的）、单位矩阵E
- 行矩阵、列矩阵：即向量
- 方阵：行列数相等
- 对角阵：在方阵的基础上，除了主对角线外的元素都是 0。记为 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$
- 数量矩阵：在对角阵的基础上，主对角线全是同一个非零常数
- 奇异矩阵（退化矩阵）：$|A|=0$。非奇异矩阵反之
- 对称阵与反对称阵：对称阵：$A^{\mathrm{T}}=A$ 反对称阵：$A^{\mathrm{T}}=-A$　（反的主对角全 0）

二、矩阵的基本运算

1、线性运算

- 加法（和行列式不同）

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- 数乘（和行列式不同）

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2、矩阵相乘

a) 相乘条件

b) 误区

- 没有交换律
- 没有消去律：AB=AC 无法说明 B=C

c) 特例：方阵的幂，有一个误区　　当 $AB\neq BA$ 时，$\left(AB\right)^k\neq A^kB^k$.

3、转置： $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$

三、方阵的行列式

1、定义：记做|A|或 det A

2、运算规律

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A|; \\
&(2)\ |\lambda A| = \lambda^{n} |A|; \\
&(3)\ |AB| = |A||B| \\
&\text{注：虽然 } AB \neq BA, \text{但} |AB| = |BA|.
\end{aligned}
$$

四、矩阵的伴随矩阵

1、定义：矩阵对应的行列式中的各个元素的代数余子式A_{ij}构成的矩阵

$$
A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^{\mathrm{T}}
$$

2、性质： $A A^{*} = A^{*} A = |A| E$

五、逆矩阵

1、定义：设A是n 阶矩阵，若存在n阶矩阵 B 使$AB = BA = E$，则称A是可逆的，并称B是A的逆矩阵，记为A^{-1}

- 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵唯一

2、可逆的判定

- 行列式角度：$|A| \neq 0$（充要）
- 初等变换角度：方阵 A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积（充要，仅适用于方阵）
  - 推论：方阵 A 可逆的充要条件是 A ~ E

3、逆矩阵的求法

$$
\begin{aligned}
&(1)\text{定义法：找满足条件的}B \\
&(2)\text{公式法：}A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}
\end{aligned}
$$

4、可逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A.$

(2) 若A可逆，数$\lambda \neq 0$, 则λA也可逆，且$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

(3) 若A, B为同阶方阵且均可逆，则 AB亦可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

(4) 若A可逆，则A^{T}也可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$

注意：$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

2.2 矩阵的分块法

一、具体内容

1、用途:

2、具体做法：将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的一个子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵。

3、举例

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$$

二、分块矩阵的运算规则

1、加减乘的只要分块规则相同，行列相同即和前面一样

2、注意转置（内外都转置!!）

$$\text{设 } A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

3、对于分块对角矩阵

(1)行列式：$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

(2)逆矩阵：若 $|A_i|\neq 0\ (i=1,2,\cdots,s)$，则 $|A|\neq 0$，并有 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

(3)乘积：$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}$.

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

3.1 矩阵的初等变换和矩阵的秩

一、初等变换

1、初等变换：初等行变换、初等列变换

2、三种初等行变换（初等列变换同理）

(1) 对调 i, j 两行，$r_i \leftrightarrow r_j$

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以第 i 行的所有元素，$r_i \times k$

(3) 把第 j 行所有元素的 k 倍加到第 i 行对应的元素上去．$r_i + kr_j$

3、初等变换的性质

- 三类初等变换都是可逆的，并且其逆变换是同一类的初等变换。

行变换	逆变换	列变换	逆变换
$r_i \leftrightarrow r_j$	$r_i \leftrightarrow r_j$	$c_i \leftrightarrow c_j$	$c_i \leftrightarrow c_j$
$r_i \times k$	$r_i \times \frac{1}{k}$	$c_i \times k$	$c_i \times \frac{1}{k}$
$r_i + kr_j$	$r_i - kr_j$	$c_i + kc_j$	$c_i - kc_j$

二、初等矩阵

1、定义：由单位矩阵经过一次初等变换所得矩阵

2、记号

$$(1)\ E \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i, j)$$

$$(2)\ E \xrightarrow{r_i \times k} E(i(k))$$

$$(3)\ E \xrightarrow{r_i + kr_j} E(i, j(k))$$

3、初等矩阵的性质：都可逆；其逆矩阵、转置、矩阵都是同一类的初等矩阵

$$(1)\ E(i, j)^{-1} = E(i, j),\quad E(i, j)^{\mathrm{T}} = E(i, j)$$

$$(2)\ E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k})),\quad E(i(k))^{\mathrm{T}} = E(i(k))$$

$$(3)\ E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k)),\ E(i, j(k))^{\mathrm{T}} = E(j, i(k))$$

4、初等矩阵与初等变换的联系

$$(1) A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AE(i, j)^{\mathrm{T}} \qquad A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AE(i, j)^{\mathrm{T}}$$

$$(2) A \xrightarrow{r_i \times k} E(i(k))A \qquad A \xrightarrow{c_i \times k} AE(i(k))^{\mathrm{T}}$$

$$(3) A \xrightarrow{r_i + kr_j} E(i, j(k))A \qquad A \xrightarrow{c_i + kc_j} AE(i, j(k))^{\mathrm{T}}$$

三、矩阵化为标准型

1、等价矩阵

a) 定义：如果 A 矩阵经过有限次初等变换变成了 B，则两矩阵等价，记为 A ~ B

b) 判定：m×n 阵 A 与 B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q，使得 PAQ = B

2、行阶梯形与行最简形

3、等价标准形：任意矩阵都等价为这种形式 $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

4、举例

$$\text{对于}(A,b)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{行阶梯型:}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{行最简形:}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{等价标准形:}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

四、矩阵的秩

1、矩阵 A 的 k 阶子式：任取 k 行、k 列所得的 k^2 个元素而不改变它们的相对位置所得到的 k 阶行列式

2、矩阵 A 的秩 R(A)：矩阵 A 的最高阶非零子式的阶数（该阶中，只要有一个子式非零即可）

- 若 A 的所有 r 阶子式(如果有)全等于零，则阶数大于 r 的所有子式全等于零

3、秩的性质

- 若 A 有一个 k 阶子式非零，则 R(A) ≥ k；若 A 的所有 k 阶子式全等于零，则 R(A) < k
- 初等行变换、转置不改变秩的大小
  - 推论：如果两矩阵相似，则秩相等
  - 矩阵乘上可逆矩阵秩也不变（因为可逆矩阵可由若干个初等矩阵表示）
- 矩阵的秩=矩阵的行向量组的秩=矩阵的列向量组的秩（下一章）
- 两矩阵秩的关系

$$\textbf{(1)}\text{单独:}\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B)$$

$$\textbf{(2)}\text{相加:}R(A+B)\le R(A)+R(B)$$

$$\text{若}A_{m\times n}B_{n\times l}=O,\text{则}R(A)+R(B)\le n$$

$$(3)\text{乘积:}R(A_{m\times n})+R(B_{n\times l})-n\le R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$$

3.2 线性方程组的解

一、非齐次性线性方程组解的条件

$A_{m\times n}x=b$有解的充要条件是$r\left(A\right)=r\left(A,b\right)$，并且

(1)当$r\left(A\right)=r\left(A,b\right)=n$时，有唯一解；

(2)当$r\left(A\right)=r\left(A,b\right)<n$时，有无穷多解。

二、齐次性线性方程组解的条件

$A_{m\times n}x=0$一定有一个零解，而有非零解的$A_{m\times n}x=0$充要条件是$R(A)<n$

三、矩阵方程有解的条件

(1)$AX=B$有解的充要条件是$R(A)=R(A,B)$

(2)$A_{m\times n}X=O$有非零解的充要条件是$R(A)<n$

第四章　向量组的线性相关性

4.1 向量组的线性相关性和向量组的秩

一、向量组的概念

1、定义：同一维数的列向量（或行向量）所组成的集合

2、两个向量组等价的条件：向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示

3、向量组的线性组合表示的条件

a)　单个可由向量组的线性组合表示的条件

$$\begin{aligned}&\text{向量}b\text{可由向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性表示}\\&\quad\Leftrightarrow Ax=b\text{有解，其中}A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\\&\quad\Leftrightarrow R(A)=R(A,b)\end{aligned}$$

b)　向量组可由向量组的线性组合表示的条件

$$\begin{aligned}&\text{向量组}B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l\text{可由向量组}A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性表示}\\&\quad\Leftrightarrow AX=B\text{有解，其中}A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\text{，}B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)\\&\quad\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)\\&\text{如果可以表示，则}R(B)\le R(A)\end{aligned}$$

二、线性相关性

1、向量组的线性相关性

a)　定义

设向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在不全为零实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，

使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=\mathbf{0}$　　则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性相关.

否则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关.

b)　性质

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\text{维向量组}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性相关}\\&\quad\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\text{ 有非零解, 其中}\boldsymbol{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)\\&\quad\Leftrightarrow \boldsymbol{R(A)<m}\end{aligned}$$

c)　相关定理

(1) 若向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{B}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 也线性相关。

推论：若向量组 $\boldsymbol{B}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 也线性无关。

(2) m 个 n 维向量 $(\mathbf{m>n})$ 构成的向量组一定线性相关。

(3) 若向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{B}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\boldsymbol{b}$ 线性相关，

　　则 **b** 能由向量组 **A** 线性表示，且表示式唯一.

d)　其他方法判断线性相关性（下一章）

(1) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中不含零向量，且两两正交，则该向量组线性无关

(2)

三、向量组的秩

1、最大（线性）无关组和秩的定义

设A为一个向量组, A 的部分组$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足:

(1)$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关,

(2)A的任意向量都可由A_0线性表示.

则称A_0为A的最大无关组

r为向量组A的秩，记做R_A,或$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$

注意:

- 只含零向量的向量组没有最大无关组，规定秩为 0
- 向量组的最大无关组一般不是唯一的
- 任意一个最大线性无关组都与向量组本身等价（秩相同且能相互表示）

2、用一个向量组表示另一个向量组

a) 条件

向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示的充要条件是

$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$

b) 两个向量组的特点

若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，则

$R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)\le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$

4.2 线性方程组解的结构

一、齐次线性方程组

1、基本概念

a) 方程组的形式：$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

b) 解的性质

$$\textbf{(1)}\text{若}\xi_1,\xi_2\text{是它的解，则}\boldsymbol{x}=\xi_1+\xi_2\text{仍然是它的解}$$
$$\textbf{(2)}\text{若}\xi_1\text{是它的解，则}\boldsymbol{x}=\lambda\xi_1\text{仍然是它的解}$$

c) 基础解系

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，满足

(1)$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关；

(2)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任一解都可以由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表示

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系。

2、何时存在基础解系

设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵，如果$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}<\boldsymbol{n}$,则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系存在，且每个基础解系中含有$\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}$个解向量。

二、非齐次线性方程组

1、基本概念

a) 方程组的形式：$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

b) 解的性质

(1)η_1,η_2是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则$\eta_1-\eta_2$是对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解。

(2)若η是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\xi$是对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则$\xi+\eta$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解。

2、解的形式

若$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解，则其通解为$\boldsymbol{x}=\eta^*+\xi$

(1)η^*是$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的一个特解，

(2) ξ是对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解。

4.3 向量空间

一、向量空间的基本概念

1、向量空间：对于加法及数乘两种运算封闭的 n 维向量的非空集合

- 注意：0 必是向量空间的元素（否则不满足封闭性）（可用来判断是否为~）

2、子空间：设 V 为向量空间，W 是 V 的非空子集，若 W 对于加法及数乘两种运算封闭，则称 W 是 V 的子空间

- 零子空间 V = { 0 }

3、向量空间的基

设**V**是向量空间，如果向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in V$,满足

(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关。

(2)V中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，

那么，就称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间**V**的一个基，

r称为向量空间**V**的维数，记作**dimV＝r**;并称**V** 是**r** 维向量空间

二、向量用基表示

1、向量在某一基下的坐标

设a_1,a_2,a_3是$\mathbb{R}^3$的一个基，x是$\mathbb{R}^3$中的向量，

$x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$

则称有序数组x_1,x_2,x_3为向量x在基a_1,a_2,a_3下的坐标。

2、基变换

设b_1,b_2,b_3是$\mathbb{R}^3$的另一个基，并且

基变换公式:$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)P$

其中：P称为从基a_1,a_2,a_3到基b_1,b_2,b_3的过渡矩阵

第五章　相似矩阵及二次型

5.1 向量的 xx、正交化、正交矩阵

一、向量的内积、长度及正交性

1、向量间的内积

a)　定义

设$\mathbf{n}$维向量$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$,称$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$为向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的内积，

记作$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

b)　性质

$$(1)\begin{cases}[x,x]>0 & x\neq 0\\ [x,x]=0 & x=0\end{cases}$$

$$\text{(2)Cauchy}-\text{Schwarz}不等式:[x,y]^2\le[x,x][y,y]$$

2、向量的长度

a)　定义

$$\|x\|=\sqrt{[x,x]}$$

$$特别地:|x\|=1时为单位向量$$

b)　性质

$$(1)\begin{cases}\|x\|>0 & x\neq 0\\ \|x\|=0 & x=0\end{cases}$$

$$(2)\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

3、向量间的夹角

a)　定义：$\theta=\arccos\dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|},\ x\neq 0,\ y\neq 0$

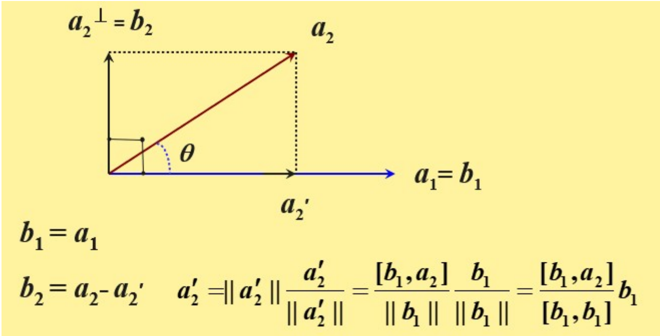
b)　两向量正交：夹角为 90 度　　　　$x\perp y\Leftrightarrow[x,y]=0$

二、向量组与基的规范正交化

1、规范正交基（标准正交基）的概念：向量空间中两两正交且都是单位向量的一组基

2、Schimidt 正交化：已知一组线性无关的向量组，将它正交化为等价的正交向量组

a) 原理



b) 公式

$$\text{令}\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1;$$

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1;$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_r-\frac{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\frac{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_{r-1},\boldsymbol{b}_{r-1}]}\boldsymbol{b}_{r-1};$$

则$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$是正交向量组，并且与原向量组等价

3、基的规范正交化（求规范正交基）

第一步：利用施密特正交化过程把基正交化

第二步：把正交后的向量组单位化

三、正交矩阵

1、定义：满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

2、性质：$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

5.2 方阵的特征值和特征向量

一、定义

1、特征值和特征向量的定义

设A是n阶方阵，若数λ和非零向量x，使得$Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$

则称λ是A的一个特征值，x为A的对应于特征值λ的特征向量。

- 对应同一个特征值的特征向量不唯一，但一个特征向量只能对应一个特征值
- 对应同一个特征值的若干个特征向量的线性组合仍是对应这个特征值的特征向量

2、特征值的求法------求解特征多项式：$f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$

- 它的解空间称为对应于λ的特征子空间
- 特征值的性质

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(A)\end{cases}$$

- 同一个方阵的不同特征值的对应的特征向量线性无关。

3、由 A 衍生出的矩阵的特征值

若λ是A的特征值，则

(1)$k\lambda$是kA的特征值(k是常数)，且$kAx=k\lambda x$

(2)λ^m是A^m的特征值(m是正整数)，且$A^m x=\lambda^m x$

(3)若A可逆，则λ^{-1}是A^{-1}的特征值，且$A^{-1}x=\lambda^{-1}x$

$\lambda^{-1}|A|$是A^*的特征值，且$A^*x=\lambda^{-1}|A|x$

(4)若$\varphi(x)$为x的多项式，则$\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值，且$\varphi(A)x=\varphi(\lambda)x$

(5)A和A^T的特征值相同，特征多项式相同。

5.3 相似矩阵

一、基本概念

1、定义

设**A, B**都是**n**阶矩阵，若存在可逆矩阵**P**，使得$P^{-1}AP=B$

则称矩阵**A**与矩阵**B**相似。

运算$P^{-1}AP$称为对**A**作相似变换，可逆矩阵**P**称为相似变换矩阵。

2、性质:

- 反身性、对称性、传递性
- 相似矩阵有相同的特征多项式、特征值(但是有相同特征多项式的矩阵不一定相似)

$$\text{推论：若矩阵}A\text{与对角阵}\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{相似，}$$

则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是**A**的**n**个特征值。

二、矩阵的对角化（即和对角阵相似）

1、可对角化的条件: n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量

(1)特征多项式有n个不同的根：可对角化

(2)特征多项式有k个重根：相似于对角阵的条件是$R(A-\lambda E)=n-k$

2、实对称阵的对角化（一定可以对角化）

a) 如何对角化

$$\text{找到正交矩阵}Q\text{，使得}Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$$

b) 实对称阵的特点

- 实对称阵的特征值为实数
- 实对称阵的对应于不同特征值的特征向量正交
- 实对称阵一定存在一个对应的正交矩阵使其相似于对角阵

5.4 二次型及其标准形

一、二次型的基本概念

1、什么是二次型

含有$\boldsymbol{n}$个变量$\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_n}$的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)} &\boldsymbol{= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2} \\ &\boldsymbol{+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n} \\ &\boldsymbol{+ 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n} \end{aligned}$$

例如：$\boldsymbol{f(x, y) = x^2 + 4xy - 5y^2}$是二次型，

$\boldsymbol{f(x, y) = x^2 + y^2 + 5}$，$\boldsymbol{f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 2x}$不是二次型

2、二次型的标准形（或法式）：只含有平方项的二次型

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

3、二次型的矩阵表示

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^{\mathrm{T}}Ax$$

其中：$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$。$A$为对称矩阵

4、相关名词的定义

- A 称为 f 的矩阵
- f 称为 A 的二次型
- 对称矩阵 A 的秩称为二次型 f 的秩

二、二次型的标准化

1、非退化线性变换（可逆线性变换）

$$\text{线性变换}\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

$$\text{令}C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

则线性变换可写成$x = Cy$

- C 是可逆矩阵：是非退化线性变换，
- C 是正交矩阵：是正交变换。

2、矩阵的合同：（合同是一种等价关系）

设A,B都是n 阶矩阵，若存在可逆矩阵C ，使得$C^{\mathrm{T}}AC = B$,
则称矩阵A与矩阵B合同

- 注意相似、合同、等价的区别

3、化二次型为标准型

a) 正交相似变换法---主轴定理

主轴定理： 任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^{\mathrm{T}}Ax$,
总有正交变换 $x = Py$,
使之化为标准形
$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$
其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是二次型 f 的矩阵 A 的全部特征值.

b) 拉格朗日配方法（配方消去交叉项，之后换元）

三、正定二次型

1、预备定理

设二次型$f = x^{\mathrm{T}}Ax$,秩为r，可逆变换$x = Cy, x = Pz$分别把二次型变为标准形
$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_n^2 \quad (k_i \neq 0)$$
$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0)$$
则$k_1, k_2, \cdots, k_r$与$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$中值为正的个数相等。
并把其中值为正的个数称为二次型的正惯性指数，
其中值为负的个数称为二次型的负惯性指数。

2、二次型的分类

二次型$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$,若对任意$x \neq 0$都有$f(x) > 0$
(1)如果对任何的非零实向量x，都有$f(x) > 0$，则称f为正定二次型；
(2)如果对任何的非零实向量x，都有$f(x) < 0$，则称f为负定二次型;?
(3)如果对任何的实向量x，都有$f(x) \geq 0$，则称f为半正定二次型；
(4)如果对任何的实向量x，都有$f(x) < 0$，则称f为半负定二次型；
(5)如果存在实向量x1及x2，使$f(x1) > 0$，$f(x2) < 0$，则称f为不定二次型.

3、正定二次型的判定：（几个等价的充要条件）

- 标准形的所有系数全是正的，即其正惯性指数是 n
- A 的特征值全是正的
- 这条对于对称矩阵而言
  - 霍尔维茨定理：A 的各阶顺序主子式全是正的则是正定二次型
  - A 的奇数阶主子式是负的，偶数阶主子式是正的，则是负定二次型