目录

第一章　函数与极限

1.1 函数及其性质

一、集合

1. 基本概念

a) 集合的表示方法：列举法、描述法

b) 集合的运算：

- $A-B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}=A\overline{B}$
- 直积：$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$。例如 $R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$，表示整个坐标平面

2. 区间与领域

- 邻域引入的作用：根据δ(δ>0)的变化，刻画变量 x 接近常量 x0 的程度

二、函数

a) 基本概念

a) 函数相同的条件：映射关系相同+定义域相同

b) 常用分段函数

符号函数	Dirichlet(狄利克雷)函数	整标函数
$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$	$y=D(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{是有理数时}\\0 & \text{当}x\text{是无理数时}\end{cases}$	以自然数为自变量的函数 $y=f(n)$

b) 函数的性质

a) 单调性（定义是什么）

b) 有界性（定义）

$$\text{若}X\subset D,\exists M>0,\forall x\in X,\text{有}\left|f(x)\right|\le M\text{ 成立,则称函数}f(x)\text{在}X\text{上有界, 否则无界}$$

c) 奇偶性：任何函数都可以表示成一个奇函数和一个偶函数之和，即

$$g(x)=f(x)+f(-x)\text{为偶函数，}h(x)=f(x)-f(-x)\text{为奇函数，从而}f(x)=\frac{1}{2}[g(x)+h(x)]$$

d) 周期性：并非所有周期函数都有最小正周期，如 Dirichlet 函数

c) 反函数

a) 定义：若函数是单射，则它存在逆映射，称为反函数，原来那个称为直接函数

- 不是所有函数都有反函数

b) 特点：

- 反函数的定义域和值域恰好是原来函数的值域和定义域
- 直接函数与反函数的图形关于 y=x 对称.

d) 复合函数

a) 定义:

设有两个函数 $y=f(u)(u\in U)$与$u=g(x)(x\in X)$, 且函数$u=g(x)$的值域$g(X)\subset U$,
则在X上确定了函数 $y=f[g(x)],x\in X$, 称为 $y=f(u)$与$u=g(x)$的复合函数. 记为 $y=f\circ g$

b) 注意点

- 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.（要求$g(X)\subset U$）
- 一般$f\circ g\neq g\circ f$

e) 基本初等函数

a) 基本初等函数: **常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数**

b) **初等函数:由<u>常数</u>和<u>基本初等函数</u>经过<u>有限次四则运算</u>和<u>有限次的函数</u>复合步骤所构成并可用<u>一个式子表示</u>的函数**

- 并不是所有的分段函数都不是初等函数: 如$y=|x|=\sqrt{x^2}$

1.2 极限

一、数列的极限

1、定义

设有数列x_n及常数a,若$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当$n > N$时有$\left| x_n - a \right| < \varepsilon$成立,

则称a是数列x_n的极限或称x_n收敛于a.记为$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

2、数列极限的性质

- 唯一性：如果收敛，那么它的极限唯一
- 有界性：收敛数列必有界
- 保号性：（略）
- 若数列x_n收敛于a,则它的任一子数列收敛于a.

二、函数的极限

1、定义（略）

2、性质

- 唯一性
- 局部有界性
- 局部保号性

3、函数极限与数列极限的关系

- 如果极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,$\{x_n\}$为$f(x)$定义域内任一收敛于$x_0$的数列,且满足$x_n \neq x_0 \left(n \in \mathbf{N}^+ \right)$,
  那么相应的函数值数列$\left\{ f(x_n) \right\}$必收敛,且$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- **函数极限存在的充要条件是它的任何子数列的极限都存在且相等**

4、函数极限不存在的几种情况

- 左极限≠右极限
- ∞：$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$
- 摆动：$\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$，$\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$

5、两个重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

三、极限的运算法则（略）

四、极限的存在准则

1、夹逼准则

在给定的变化过程中，如果$f(x), g(x), h(x)$满足

(1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

(2) $\lim g(x) = \lim h(x) = A$

则 $\lim f(x) = A.$

2、单调有界准则：单调有界数列必有极限.

3、Cauchy 收敛准则

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是 : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+$，使得当$m > N, n > N$时，有$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

五、无穷大与无穷小

1、无穷小

a) 定义

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称$f(x)$当$x \to x_0$时为无穷小.

b) 注意点

- 无穷小并不是一个很小的数，是一类特殊函数。是在某一变化过程中极限为 0 的函数，并且在一个过程中为无穷小的量在另一过程中可能不是无穷小量.
- 数“0”是无穷小量

c) 无穷小的比较（反映了趋向于零的“快慢”程度不同）

定义3 设$\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$，且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

(3) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小；记作$\beta = O(\alpha)$;

(4) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小；记作$\alpha \sim \beta$;

(5) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C (C \neq 0, k > 0)$，就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

d) 常用的等价无穷小(当$x \to 0$时)

等价无穷小代换（只能用于比值型，不能用于加减型）

$$\sin x \sim x, \qquad \tan x \sim x,$$
$$\arcsin x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x, \qquad e^x - 1 \sim x,$$
$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

2、无穷大

a) 定义

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称$f(x)$当$x \to x_0$时为无穷大.

b) 注意点（其他同上）

- 无穷大是一种特殊的无界变量，但是无界变量未必是无穷大，如$0, 1, 0, 2, \cdots, 0, n, \cdots$

1.3 函数的连续性

一、定义

1、在某点处连续的定义

设$y=f(x)$定义在$U(x_0,\delta)$,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称$y=f(x)$在 x_0处连续.

2、区间上连续的定义：区间上每一点都连续

二、间断点

1、间断点的定义（即不满足某点连续的定义，至少满足下面其中一种）

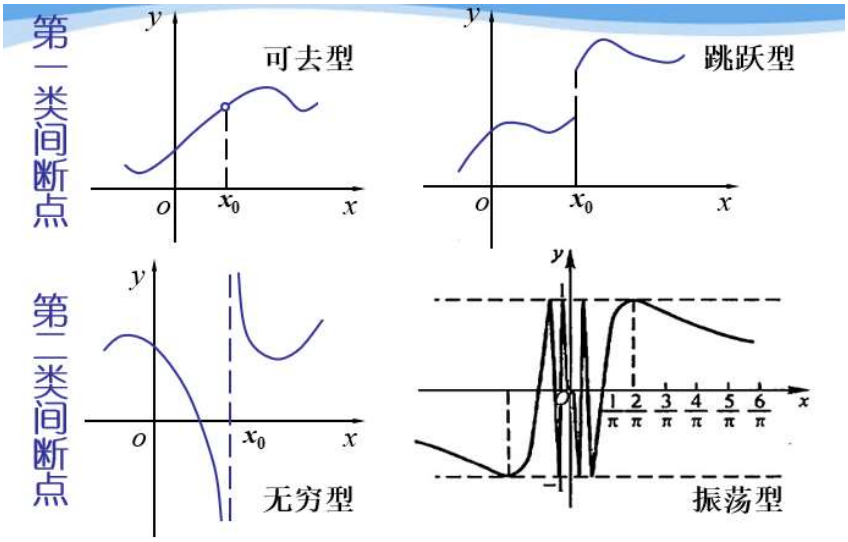
(1)不存在$f(x_0)$

(2)不存在$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

(3)二者都存在，但是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

2、几种类型的间断点

- 第一类间断点（左右极限都存在）：可去间断点、跳跃间断点
- 第二类间断点（左右极限不一定存在）：无穷间断点、震荡间断点



三、连续函数的运算

1、连续函数的运算后的连续性

- 连续函数的和差积商还是连续函数
- 连续函数的复合函数是连续函数
- 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数

2、初等函数的连续性

- 基本初等函数在其定义区间内是连续的
- 初等函数在其定义区间内是连续的

四、闭区间上连续函数的性质

1、最大值和最小值定理：在闭区间上连续的函数一定能取得它的最大值和最小值.

2、有界性定理：在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

3、零点定理

设 (1)$f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2)且$f(a)\cdot f(b)<0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$. 即方程 $f(x)=0$在 (a,b)内至少存在一个实根.

4、介值定理

设 (1)$f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2)且$f(a)\neq f(b)$,

(3)C为介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意一个数,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=C$.

第二章　函数与极限

2.1 导数与微分

一、导数的定义

1、引入：割线的极限位置—切线

- 某点导数的几何意义：该点切线的斜率

2、定义

a) $f(x)$在$x=x_0$处的导数(变化率)

设$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义,若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

- $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.
- 微商：$\frac{dx}{dy}$

b) $f(x)$在开区间I内的导数(导函数)

若$f(x)$在I内每一点可导,则称$f(x)$在I内可导.$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

- 闭区间可导 $\Leftrightarrow$ 开区间可导+端点处分别存在右导数和左导数
- $f'(x_0)\neq[f(x_0)]'$

c) 总结判断可导性的几种方法

- 不连续，一定不可导
- 直接用导数定义
- 看左右导数是否存在且相等

二、导数的计算

1、反函数求导：其直接函数先求导数，再求倒数.

注意成立条件：直接函数单调可导（存在反函数）且$\frac{dx}{dy}\neq 0$（反函数可导）

2、高阶导数

- 莱布尼兹公式（乘积的 n 阶导数）

$$[uv]^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

3、隐函数的求导（略）

4、参数方程的求导（略）

5、分段函数的求导：各自区间正常求导，分段点处用定义求导

6、对数求导法：先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数

- 适用范围：多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

三、微分

1、定义

若 $y=f(x)$在x_0处的增量 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$,其中$A$是与$\Delta x$无关的常数, 则称 $y=f(x)$ 在 x_0可微. $A\Delta x$称为$y=f(x)$在x_0的微分.记为$dy|_{x=x_0}=A\Delta x$.

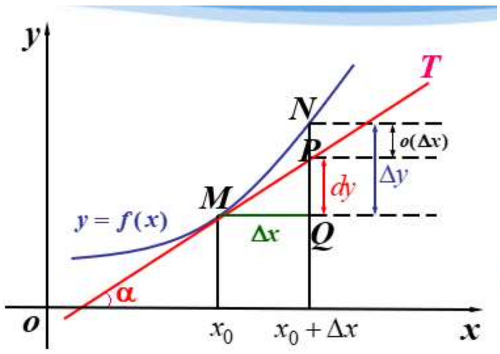
说明

- 注意dy和Δy的区别
- dy是Δx的线性函数
- $\Delta y-dy=o(\Delta x)$是比Δx高阶无穷小;
- 当$A\neq 0$时,dy与Δy是等价无穷小;

2、某一点处连续、可导、可微的关系

- 一元函数中可导等价于可微
- 可导必连续，连续不一定可导

3、微分的几何意义:



当Δy是曲线的纵坐标增量时,
dy就是切线纵坐标对应的增量.

4、四则运算（和导数相同）

- 一阶微分形式不变性

定理4. 设 (1) $u=g(x)$在x处可微,

(2)$y=f(u)$在相应点$u=g(x)$处可微,

则 $y=f[g(x)]$在x处可微,且

$$dy=f'(u)g'(x)dx \quad 或 \quad d\{f[g(x)]\}=f'(u)g'(x)dx$$

注意: 当u为自变量时,有 $dy=f'(u)du$

当u为中间变量时,设$u=g(x)$, 则$dy=f'(u)\boxed{g'(x)dx}$

即$dy=f'(u)du$

无论u为中间变量还是自变量，都具有同一微分形式.

这种性质称为一阶微分形式不变性.

2.2 微分中值定理

一、引入----导数与差商之间的关系

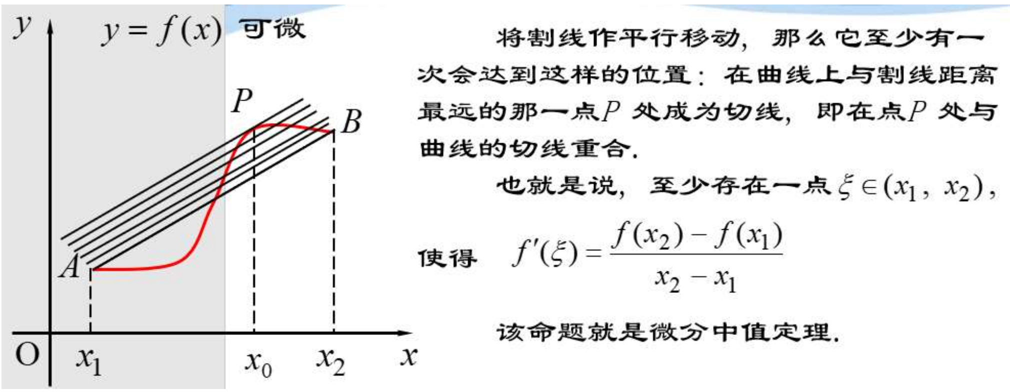
1、概念

- 某点处的差商：$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
- 某点处的导数：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2、为什么需要微分中值定理

我们常常需要从函数的导数所给出的局部的或“小范围”性质，推出其整体的或“大范围”性质。为此，我们需要建立函数的差商与函数的导数间的基本关系式,这些关系式称为“微分学中值定理”

3、导数与差商的关系



二、Fermat 定理 费马定理

1、极值的定义：x0 领域内的最值（极值是局部性质，而最值是全局性质）

- 极值点指的是横坐标（而不是点），极值指的是函数值
- 极值点必须在区间的内部
- 极值是局部性质，极小值不一定比极大值小
- 区间内部的最值点一定是极值点；反之不一定成立

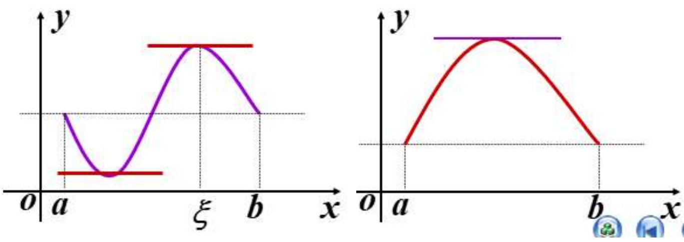
2、定理内容

设函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$处取得极值,且$f(x)$在x_0处可导,则 $f'(x_0)=0$.

- 可微函数在区间内部取极值的必要条件是函数在该点的导数值为零

三、Rolle 定理

1、定理内容



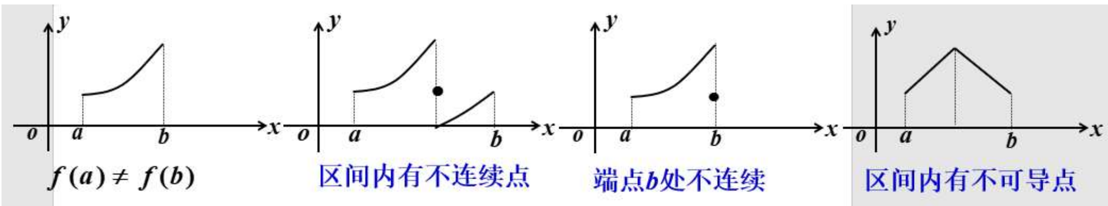
若函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) $f(a)=f(b)$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

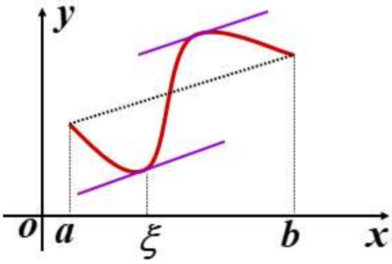


2、几何意义：函数图像上至少存在一点的切线平行端点连线（x 轴）

四、Lagrange 中值定理

1、引入：Rolle 定理一般化（不要求端点值相等）

2、定理内容



若函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3、几何意义：函数图像上至少存在一点的切线平行端点连线

4、引理---有限增量定理

在Lagrange中值公式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$中,

$$a<\xi<b,0<\xi-a<b-a,0<\frac{\xi-a}{b-a}<1,$$

令$\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$,则 $\xi=a+\theta(b-a)$, $0<\theta<1$.从而Lagrange中值公式可写为

$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a)$, $0<\theta<1$.取$a=x,b=x+\Delta x$时有,

$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$, $0<\theta<1$.即 $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$, $0<\theta<1$.

5、重要推论

- 设 f (x)在区间 I 上可导，且 f ′(x)=0, ∀x∈I.则 f (x)=C, x∈I. (C 为常数)
- 若 f ' (x)=g' (x)，x∈I，则 f x)=g(x)+C , x∈I (C 为常数)
- 若 f (x)的导数在(a, b)内不变号，则函数 f (x)在(a, b)内严格单调.

五、Cauchy 中值定理

1、引入：这次的曲线用参数方程表示

2、定理内容

设弧 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases} \qquad t\in[a,\ b]$$

若函数 $f(x),g(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) $g'(x)\neq 0$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3、几何意义：同 Lagrange 中值定理

六、微分中值定理的应用

1、证明恒等式

2、证明不等式

3、证明有关中值问题的结论

2.3 Taylor 公式

一、引入----用多项式表示一个复杂函数

1、微分中的近似公式：x 的一次多项式（用切线代替）

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{p_1(x)}$$

2、为了提高精度和减少估计误差，从而寻求更高次的多项式来描述

$$p_n(x)=a_n(x-x_0)^n+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\dots+a_3(x-x_0)^3+a_2(x-x_0)^2+a_1(x-x_0)+a_0$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$$

我们希望这个多项式与 $f(x)$ 在 x_0 处有相同的 $0\sim n$ 阶导数：

$$p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\ (k=0,1,2,\dots n)$$

则

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\quad (k=0,1,2,\dots)$$

二、Taylor 公式

1、带 peano 余项的 Taylor 公式

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 n 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中：$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$

- 优点：条件较弱（只需在 x0 处有 n 阶导数）
- 缺点：误差（即余项）不易做定量分析

2、带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，（$\xi$ 介于 x_0 与 x 之间）

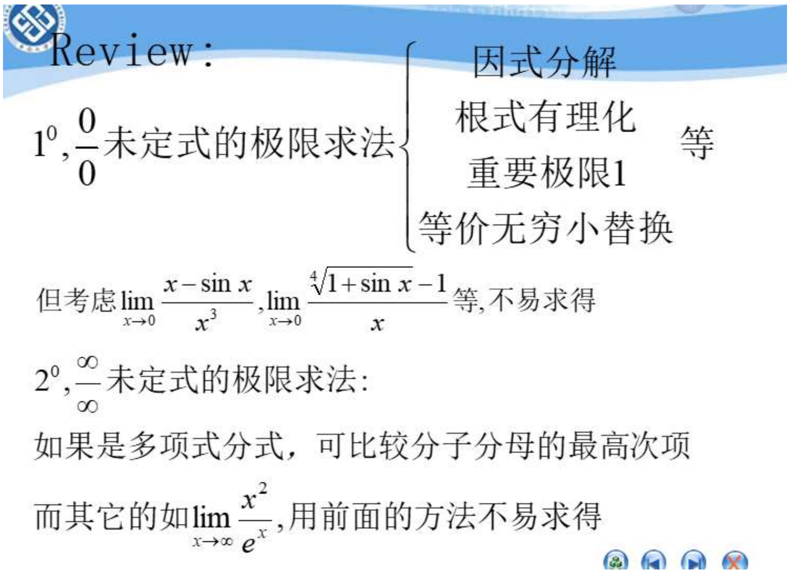
- 优点：可以定量分析
- 缺点：条件较强（这个要求到了 n+1 阶）

3、Maclaurin 公式：当 x0=0 时的 Taylor 公式

三、常用公式（略）

2.4 L'Hospital 法则 洛必达

一、Review



二、L'Hospital 法则

1、未定式 $\frac{0}{0}$的极限

设 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

(2) $f(x)$与$g(x)$ 在 $U(\tilde{x}_0,\delta)$内可导, 且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty)$.

2、未定式 $\frac{\infty}{\infty}$的极限

设 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $U(\tilde{x}_0,\delta)$内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty)$,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty)$.

3、未定式的 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$的极限： 转成上面两种

2.5 导数的应用（1）--极值和最值

一、函数单调性的判别法

1、定义: $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 若 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 I 上单增;反之单减

2、判别（导数）

设f(x)在区间I上可导，若对于一切 $x \in I, f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上单增;反之单减

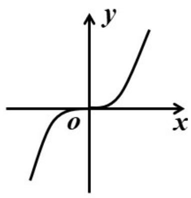
- 有导数不存在的点时，函数的单调性须重新考虑

二、函数的极值

1、注意点

- 极值点指的是横坐标（而不是点），极值指的是函数值
- 极值点必须在区间的内部
- 极值是局部性质，极小值不一定比极大值小
- 区间内部的最值点一定是极值点；反之不一定成立

2、极值存在的必要条件：Fermat 定理 费马



$$设函数 f(x) 在 x_0 可导,若 x_0 为极值点,则 f'(x_0)=0.$$

- 驻点：导数为 0 的点的横坐标（也不是点）。极值点一定是驻点，但是驻点不一定是极值点（见上图）
- 可能是极值点的：驻点、不可导点

3、极值存在的充分条件

a) 第一充分条件（看一阶导数）

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内可导, 且 $f'(x_0)=0$.

(1) 当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$ 且当 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0$: $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.反之取到极小值

(2) 当 $x \in U(\tilde{x}_0,\delta)$ 时，$f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$: $f(x_0)$ 不是极值.

b) 第二充分条件（看二阶导数）

设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内二阶可导,且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\ne 0$.则

(1) 若 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 为极小值点.

(2) 若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 为极大值点.

(3) 若 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在，则不能用第二充分条件判定,只能用第一充分条件.

- **即：使二阶导数不为 0 的点一定是极值点**

4、求极值的步骤

- 求定义域
- 求导，并求驻点和不可导点
- 验证驻点和不可导点是不是极值点

三、函数的最值

1、闭区间上可导函数的最值：驻点中选取

2、闭区间上连续函数的最值：驻点+不可导点

3、开区间或无穷区间上的最值：驻点+不可导点 并与端点处的极限值比较

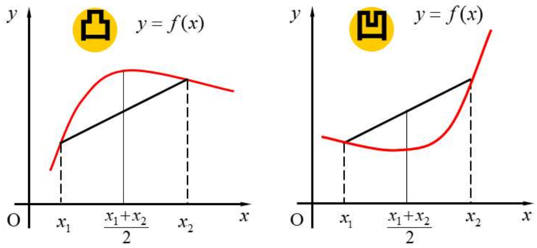
2.5 导数的应用（2）--函数图像相关

一、凹凸性

1、定义:

a) 直观定义：在区间 I 上

- 凸函数：曲线弧段位于相应的弦线上方
- 凹函数：曲线弧段位于相应的弦线下方



b) 严格定义 1

$$\text{设函数} f(x) \text{在区间I上连续}, \forall x_1, x_2 \in I,$$
$$\text{若恒有} f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{则称} f(x) \text{的图形是凹的}$$
$$\text{若恒有} f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{则称} f(x) \text{的图形是凸的}$$

c) 严格定义 2

$$\text{设f(x)在I内连续}, \forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \text{且} \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$
$$\text{若} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \text{则f(x)为区间I上的凸函数}.$$
$$\text{若} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \text{则f(x)为区间I上的凹函数}.$$

2、凹凸性的判定

a) 定理 1（看一阶导数）设 f (x)∈C [a,b]且在(a,b)内可导。

- 一阶导数在区间内单增：凹函数。反之为凸函数

b) 定理 2（看二阶导数）

$$\text{设f(x)在(a,b)内有二阶导数},$$
$$(1)\ \text{若} x \in (a,b) \text{时有} f''(x) < 0, \text{则f(x)在(a,b)内的图形是凸的}.$$
$$(2)\ \text{若} x \in (a,b) \text{时有} f''(x) > 0, \text{则f(x)在(a,b)内的图形是凹的}.$$

- 如果 $f''(x) \ge 0\ \ (\le 0)$，$x \in (a,\ b)$，但仅在个别孤立点处等于零,则定理仍然成立.

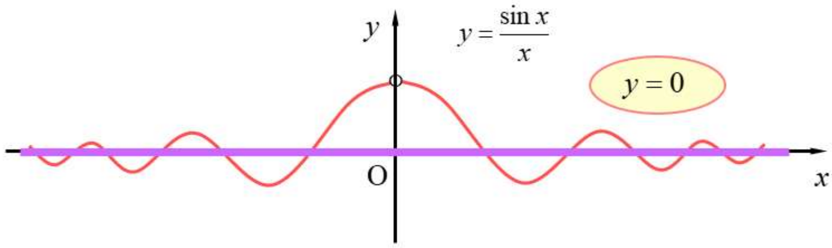
3、拐点

- 拐点：连续曲线上上凹弧与凸弧的分界点（也是做横坐标，不是点）
  注意：拐点处的切线必在拐点处穿过曲线
- 拐点处的性质：二阶导数等于 0（如果存在的话）
- 拐点存在的判定：拐点处两边的二阶导数符号不同
- 可能是拐点的点：二阶导等于 0 的点、二阶导不存在的点

4、判定凹凸性和拐点（略）

二、曲线的渐近线

注意：曲线可以穿过其渐近线



1、水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} f(x)=b$,则曲线$y=f(x)$水平渐近线$y=b$.

2、垂直渐近线：若 $\lim\limits_{x\to x_0^+(x_0^-)} f(x)=\infty$,则曲线$y=f(x)$垂直渐近线$x=x_0$.

3、斜渐近线：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$,则曲线 $y=f(x)$有斜渐近线$y=kx+b$.

- $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$
- 不存在斜渐近线的两种情况

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\text{不存在;}$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\text{ 存在,但b= }\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]\text{不存在,}$$

三、弧微分与曲率

1、基本概念---弧长函数

设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数.$A(x_0,y_0)$为基点,$M(x,y)$为曲线上任意一点,

规定:曲线的正向与x增大的方向一致;

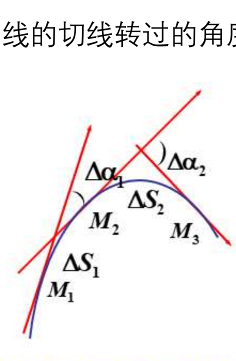
则弧长函数：$s=\left|\overset{\frown}{AM}\right|=s(x)$是单调递增函数

2、弧微分公式：$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$

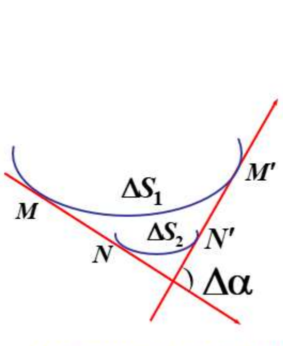
3、曲率

a) 为什么要引入：描述曲线局部性质（弯曲程度）的量

- 转角$\Delta\alpha$：曲线的切线转过的角度



弧长相同时,弧段弯曲程度越大转角越大



转角相同时,弧段越短弯曲程度越大

b) 曲率的定义（注意有绝对值）

$$平均曲率：\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

$$某点的曲率：K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

- 直线的曲率处处为零
- 圆上各点处的曲率等于半径的倒数,且半径越小曲率越大

c) 曲率的计算

函数形式的曲率（设$y=f(x)$ 二阶可导）

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

参数方程形式的曲率$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$

$$K=\frac{|\phi'(t)\psi''(t)-\phi''(t)\psi'(t)|}{[\phi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

4、曲率圆和曲率半径

a) 定义

设M为曲线C上任一点,在点M处作曲线的切线和法线,在曲线的凹向一侧法线上取点D使

$$|DM|=R=\frac{1}{K}$$

以D为曲率中心,R为曲率半径的圆叫做曲线在点M处曲率圆

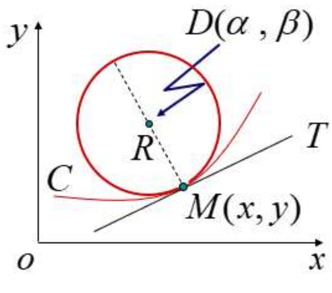
- 在点 M 处曲率圆与曲线有下列密切关系：有公切线、凹向一致、曲率相同

b) 求法

设点M处的曲率圆方程为$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2$

其中：$R=\dfrac{1}{K}$

α,β满足方程组$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2(M(x,y)\text{在曲率圆上})\\y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta}(DM\perp MT)\end{cases}$



c) 渐屈线与渐伸线：当 M 沿着曲线 fx 移动时

- 渐屈线：曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的~
- 渐伸线：曲线 C 称为轨迹 G 的~

第三章　一元函数积分学

3.1 不定积分

一、基本概念

1、原函数

a) 定义

$$\text{若在}I\text{内},F'(x)=f(x)\text{或}dF(x)=f(x)dx,$$
$$\text{则称}F(x)\text{为}f(x)\text{在}I\text{内的一个原函数}.$$

b) 原函数的存在性：只要连续就存在原函数（这条不熟）

- 初等函数在其定义区间上都有原函数
- 初等函数的原函数不一定是初等函数
- 如果 f(x) 在 I 上存在原函数,则称 f(x)在 I 上可积

2、不定积分：求函数的原函数

- 与原函数的辨析：是整体与个体的关系，原函数是一个函数，不定积分是一族函数.
- 几何意义：表示某一积分曲线沿着纵轴任意平移得到的曲线族
- 不定积分的性质（略）

二、不定积分的计算

1、常用积分表（略）

2、不定积分换元法

a) 第一换元法（凑微分法）：$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=\phi(x)}=F[\phi(x)]+C.$

b) 第二换元法（真·-换元）：如$\sqrt{a^2-x^2}$令$x=a\sin t$;

3、分部积分法：$\int udv=uv-\int vdu.$（优先级：对反幂三指）

4、几种特殊函数的积分（见 3-4PPT）

5、简单无理函数的积分（见 3-5PPT）

3.2 定积分

一、基本概念

1、定义（无限分割区间并求和取极限）

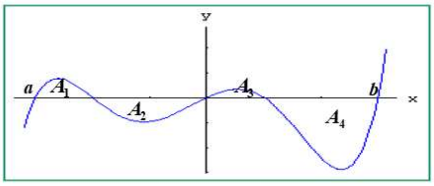
$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

- 当$\lambda \to 0$时,$n \to \infty$；但$n \to \infty$时不一定有$\lambda \to 0$.
- 定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的。若对于不同的分法和取法所得到的极限不同，则不可积
- 当函数f(x)在区间$[a,b]$上的定积分存在时，称f(x)在区间$[a,b]$上可积.
- 当$a > b$时,$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$（和求和不同）

2、两个定理

- 闭区间内可积的性质：函数在闭区间内有上界
- 闭区间内可积的条件（满足一个即可）
  - 闭区间内连续
  - 闭区间内只有有限个第一类间断点
  - 闭区间内单调



$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$

3、定积分的几何意义（见图）

它是介于x轴、函数$f(x)$的图形及两条直线$x=a, x=b$之间的各部分面积的代数和在x轴上方的面积取正号；在x轴下方的面积取负号.

4、积分上限函数

a) 定义：$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad x \in [a,b]$

b) 与$f(x)$的关系：是$f(x)$的原函数，即$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$。

c) 原函数存在定理：（联系定积分和不定积分的定理）

若f(x)在[a,b]上连续，则原函数一定存在，

且$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$就是f(x)在[a,b]上的原函数.

二、定积分的性质（只选了不熟的）

1、积分的估值

设m、M分别为曲线的最小值和最大值

则$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

2、定积分中值定理

如果函数 $f(x)$ 闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (a \le \xi \le b)$$

- 几何解释：曲边梯形的面积等于某一矩形的面积

三、定积分的计算

1、Newton-Leibniz 公式

如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2、换元法计算

3、分部积分法计算

3.3 广义积分

一、引入

我们前面讨论的积分是在有限区间上的有界函数的积分。在科学技术和工程中，往往需要计算以下几种积分，这就需要我们将定积分的概念及其计算方法进行推广

- 无穷区间上的积分
- 不满足有界条件的函数在有限区间上的积分
- 不满足有界条件的函数在无穷区间上的积分.

二、无穷积分

1、形式：$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$

2、无穷积分的敛散性（包含了计算方法）

$$(1)\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$(2)\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$(3)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$$

当极限存在时，称无穷积分收敛；否则发散.

三、无界函数的积分

1、形式：

a) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而且在点 a 的右邻域内无界．取 $\varepsilon>0$，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

- 上式称为瑕积分
- 如果极限存在，则称瑕积分收敛，反之发散

b) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，而且在点 b 的左邻域内无界.取 $\varepsilon>0$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

c) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 c $(a<c<b)$ 外连续，而且在点 c 的邻域内无界

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

2、瑕点：不可积的点

3.4 定积分的应用（略）

一、求平面图形的面积
二、求立体的体积
三、求平面曲线的弧长

第四章　无穷级数

4.1 正项级数

一、基本概念

1、无穷级数（简称为级数）的定义：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

- 称 u_n 为级数的一般项或通项
- 级数的前 n 项之和称为部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$

2、按每一项是常数还是关于除了 n 的其他变量的函数分

- 常数项级数：（容易理解错为通项是常数） $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ ；
- 函数项级数：$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

3、按每一项的正负情况分

- 正项级数：每一项都是非负的
- 交错级数：正负号相间的级数：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$或$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (其中$u_n > 0$)
- 任意项级数：正负号随机出现

二、常数项级数的敛散性

1、定义：$\lim_{n\to\infty} S_n = S$存在（反之发散）

2、性质

- 在级数前面加上或去掉**有限项**，不会影响级数的敛散性.
- 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和。但是，收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛，如$(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$，但$1-1+1-1+\cdots$发散
- 关于 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 的

级数收敛的必要条件：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

级数发散的充分条件：(1)若$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

(2)若$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$不一定收敛.

3、常见常数项级数及其敛散性

1.几何级数(等比级数) $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时,收敛 \\ 当|q|\geq 1时,发散 \end{cases}$

2.调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$是发散的.

3.$p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 当p>1时, & 收敛 \\ 当p\leq 1时, & 发散 \end{cases}$.

三、正项级数的敛散性（负项数列也适用）

1、收敛的充要条件：部分和数列 Sn 有界

2、比较审敛法（借助已知敛散性的技术）

a) 普通形式

设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,

(1)若$u_n \leq v_n (n=1,2,\cdots)$,且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(2)若$u_n \geq v_n (n=1,2,\cdots)$,且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,

则(1) 当$0 < l < +\infty$时,两级数有相同的敛散性；

(2) 当$l = 0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

(3) 当$l = +\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；

b) 极限形式

3、比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,如果$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

则$(1)\ \rho < 1$时级数收敛;

$(2)\ \rho > 1$时级数发散;

$(3)\ \rho = 1$时失效.

4、根值审敛法(柯西 Cauchy 判别法):

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,如果$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

则$(1)\ \rho < 1$时级数收敛;

$(2)\ \rho > 1$时级数发散;

$(3)\ \rho = 1$时失效.

四、交错级数的敛散性

1、Leibnitz 定理

如果交错级数同时满足下面两个条件:

$(1) u_n \geq u_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$

$(2) \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

则收敛。并且它的和$s \leq u_1$，其余r_n项的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$

2、任意项级数的判定方法

五、任意项级数的敛散性

1、绝对收敛与条件收敛

- 绝对收敛：每一项加绝对之后构成的正项级数也收敛
- 条件收敛：本身收敛，但是每一项加了绝对值之后不收敛

2、绝对收敛定理

$$\text{绝对收敛定理：若}\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\text{收敛,则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛.}$$

$$\text{但是：若}\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\text{发散,}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{不一定发散}$$

4.2 函数项级数中的---幂级数

一、基本概念

1、收敛点与收敛域

- 收敛点：使级数收敛的某一取值 x0
- 收敛域：全体
- 发散域：反之

2、求和

$$\text{和函数：} s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$
$$\text{部分和：} s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$
$$\text{余项：} r_n(x)=s(x)-s_n(x)$$

二、幂级数的定义及敛散性

1、形式

$$\text{一般形式:}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

$$\text{标准形式:}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

2、敛散性相关定理

a) Abel 定理（用于求收敛域）

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$点收敛，则对满足不等式$|x|<|x_0|$的一切x幂级数都绝对收敛.

反之，若当$x=x_0$时该幂级数发散，则对满足不等式$|x|>|x_0|$的一切x，该幂级数也发散.

- 上式是对于标准形式的幂级数而言的，对于一般形式的，需要还原变成标准形式

b) 定理 2（用于求收敛半径）

定理 2 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的所有系数$\underline{a_n\neq 0}$，

设 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho}$ （或 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho}$）

(1) 则当$\rho\neq 0$时，$R=\frac{1}{\rho}$； (2) 当$\rho=0$时，$R=+\infty$；

(3) 当$\rho=+\infty$时，$R=0$.

三、幂级数的性质

1、四则运算（和有限项一样）

设原来的收敛半径是 R1，R2。之后是 R

- 加/减/乘：R=min(R1，R2)
- 除：比原来两级数的收敛区间小得多

2、和函数的性质：

- 连续性：和函数在收敛区间内连续。且幂级数的收敛区间为闭区间时，和函数的连续区间也是该闭区间

- 可导性：在收敛区间可导，并可逐项求导任意次（收敛域不变）
- 可积性：在收敛区间可积，并可逐项积分（收敛域不变）

4.3 函数展开成幂级数

一、Taylor 级数

1、定义

前提：f(x) 在点x_0处任意阶可导

$$\text{Taylor级数}:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\text{Maclaurin级数}:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

2、Taylor(泰勒)级数的存在性（很重要）

a) 存在的问题：由上述公式算出的 Taylor 级数在收敛域内不一定收敛于 f(x)

即“有泰勒级数”不等于“能展成泰勒级数”

$$\text{例如 } f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在$x=0$点任意阶可导，且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore f(x)$的麦克劳林级数为$\sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n$

该级数在$(-\infty,+\infty)$内和函数$s(x)\equiv 0$. 可见

除$x=0$外，$f(x)$的Maclaurin 级数处处不收敛于$f(x)$.

b) 验证收敛的定理

$f(x)$ 在点 x_0 的 Taylor 级数在 $U_\delta(x_0)$ 内收敛于 $f(x)$ $\Leftrightarrow$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

二、函数展开成幂级数

1、直接法

步骤: (1)求出$f(x)$的各阶导数$f'(x),f''(x),\cdots$

(2)求出$f(x_0),f'(x_0),f''(x_0),\cdots$

(若在x_0处某阶导数不存在,则不能展成$(x-x_0)$的幂级数.)

(3)写出幂级数(并求其收敛区间)

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

(4)考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$,则(3)中的幂级数为$f(x)$的展开式.

2、间接法：利用已知的幂级数展开式，在通过恒等变形（求导、积分等）得到

- 端点情况的收敛性重新考虑

4.4 Fourier 级数

一、三角级数

1、正交函数系

a) 函数正交：$\int_a^b \phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0.$

b) 正交函数系：定义在某个区间上的一族任意两个之间都正交的函数系

c) 三角函数系：$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots\}$在$[-\pi, \pi]$上

2、三角级数的形式：$\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ $\qquad a_0, a_n, b_n$均为常数

- 利用正交性确定系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

二、函数展开成傅里叶级数

1、周期为 2π的函数的 Fourier 级数（只讲收敛条件）

级数收敛于函数的条件----- Dirichlet 充分条件收敛定理

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数。如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,且至多只有有限个极值点,则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时,级数收敛于 $f(x)$；
- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时,收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$；
- 当 x 为端点 $x = \pm\pi$ 时,收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

三、周期为 2l 的周期函数展成傅里叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}),$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx, \qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

四、仅在一段区间上定义的函数

1、[-pi, pi]上定义的函数

若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上满足收敛定理的条件,
则可展成**Fourier** 级数.具体作法是:

(1) 周期延拓:

在$[-\pi,\pi]$外补充定义使其成为周期函数$F(x)$

(2) 将$F(x)$展开成**Fourier**级数

(3) 限制x的取值范围为$[-\pi,\pi]$

(4) 收敛情况为:

在$[-\pi,\pi]$上的连续点x处,**Fourier**级数收敛于$f(x)$;

2、[-l, l]上定义的函数

若$f(x)$在$[-l,l]$上满足收敛定理的条件,
则可展成 **Fourier** 级数.具体作法是:

(1) 周期延拓:

在$[-l,l]$外补充定义得到周期函数$F(x)$

(2) 将$F(x)$展开成**Fourier**级数

(3) 限制x的取值范围为$[-l,l]$

(4) 收敛情况为:

在$[-l,l]$上的连续点x处,**Fourier**级数收敛于$f(x)$;

在$[-l,l]$上的间断点x处,**Fourier**级数收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

在$x=\pm l$处,**Fourier**级数收敛于$\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

4.5 函数展开成正弦级数与余弦级数

一、周期为 2π 的奇函数或偶函数

- 如果 $f(x)$ 为奇函数，则 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为正弦级数.
- 如果 $f(x)$ 为偶函数，则 Fourier 级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 称为余弦级数.

二、定义在[0，pi]上的函数

若$f(x)$在$[0,\pi]$上满足收敛定理的条件,则可展成Fourier级数. 具体作法分两种情况进行:

1. 将$f(x)$在$[0,\pi]$上展成正弦级数. 具体步骤是:

(1) 奇延拓：在$[-\pi,0]$上补充定义得到$F(x)$，使$F(x)$为$[-\pi,\pi]$上的奇函数

(2) 对$F(x)$作周期延拓

(3) 将经过奇延拓与周期延拓后的函数展成Fourier级数，必为正弦级数

(4) 限制x的取值范围为$[0,\pi]$

(5) 对收敛性进行讨论，类似于前面讨论的情况

2. 将$f(x)$在$[0,\pi]$上展成余弦级数. 具体步骤是:

(1) 偶延拓：在$[-\pi,0]$上补充定义得到$F(x)$，使$F(x)$为$[-\pi,\pi]$上的偶函数

(2) 对$F(x)$作周期延拓

(3) 将经过偶延拓与周期延拓后的函数展成Fourier级数，必为余弦级数

(4) 限制x的取值范围为$[0,\pi]$

(5) 对收敛性进行讨论，类似于前面讨论的情况

三、定义在[0，l]上的函数

若$f(x)$在$[0,l]$上满足收敛定理的条件,则可展成Fourier级数. 具体作法分两种情况进行:

1. 将$f(x)$在$[0,l]$上展成正弦级数. 具体步骤是:

(1) 奇延拓：在$[-l,0]$上补充定义得到$F(x)$，使$F(x)$为$[-l,l]$上的奇函数

(2) 对$F(x)$作周期延拓

(3) 将经过奇延拓与周期延拓后的函数展成Fourier级数

必为$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$，且$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

(4) 限制x的取值范围为$[0,l]$ (5) 对收敛性进行讨论

2. 将$f(x)$在$[0,l]$上展成余弦级数. 具体步骤是:

(1) 偶延拓：在$[-l,0]$上补充定义得到$F(x)$，使$F(x)$为$[-l,l]$上的偶函数

(2) 对$F(x)$作周期延拓

(3) 将经过偶延拓与周期延拓后的函数展成Fourier级数

必为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$，且$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

(4) 限制x的取值范围为$[0,l]$

(5) 对收敛性进行讨论