第一章 随机事件及其概率 3
1.1 随机试验、随机事件 3
1.2 随机事件的概率 4
1.3 条件概率 5
1.4 事件的独立性 6
1.5 伯努利(Bernoulli)概型 6
第二章 随机变量及其概率分布 8
2.1 随机变量及其分布函数 8
2.2 离散随机变量及其概率分布 8
2.3 连续型随机变量及其概率密度 9
2.4 几种常用的离散型随机变量 9
2.5 几种常用的连续型随机变量 10
2.6 随机变量的函数的分布 12
第三章 多维随机变量及其概率分布 14
3.1 二维随机变量 14
3.2 二维离散型随机变量及其概率分布 15
3.3 二维连续型随机变量及其概率密度 15
3.4 条件分布 16
3.5 二维随机变量的函数的分布 17
3.6 n 维随机变量 17
第四章 随机变量数字特征 19
4.1 数学期望 19
4.2 方差 19
4.3 协方差与相关系数 20
4.4 矩 21
第五章 大数定律及中心极限定理 23
5.1 切比雪夫(Chebyshev)不等式 23
5.2 大数定律 23
5.3 中心极限定理 24
第六章 样本及样本函数的分布 25
6.1 总体与样本 25
6.2 直方图与样本分布函数(略) 26
6.3 样本函数及其概率分布 26

6.4 χ^2 分布......27
6.5 t 分布......27
6.6 F 分布......28
第七章 参数估计......30
7.1 参数的点估计......30
7.2 估计量的评选标准......31
7.3 参数的区间估计......32
7.4 正态总体参数的区间估计......32
7.5 单侧置信区间......35
第 8 章 假设检验......37
8.1 假设检验的基本概念......37
8.2 正态总体参数的假设检验......38

第一章 随机事件及其概率

1.1 随机试验、随机事件

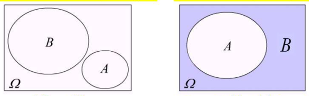
1. 随机试验特点：**重复性**、**明确性**、**随机性**
2. 随机事件及其运算
   1) 随机试验的样本点——随机试验的最基本的结果，常用 ω 表示
   2) 随机试验的样本空间——随机试验的所有基本结果构成的集合，常用 Ω 或 S 表示
   3) 随机事件——样本空间 Ω 的子集． 即在随机试验中可能发生也可能不发生的结果，常用 A、B、C…表示.
   4) 基本事件——样本空间 Ω 的单点集，也即随机试验的最基本结果
   5) 随机事件 A 发生(出现)了——在一次试验中，出现了随机事件 A 中的样本点.
   6) 必然事件——在每次实验中必然发生的事件，常用 Ω 表示
      样本空间 Ω 包含所有样本点，在每次试验中必有一个样本点出现，所以 Ω 必发生.
   7) 不可能事件——在每次实验中必然不发生的事件． 常用 Φ 表示.
3. 随机事件的关系及运算
   1) 随机事件的关系
   - 包含
   - 相等
   - 互不相容
   - 互逆
   2) 随机事件的运算
   - 和(并)
   - 积(交)
   - 差
   - 对偶律(De Morgan 律)：运算顺序：逆交并差，括号优先

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B},\qquad \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\bar{A}_k,\qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\bar{A}_k$$

   - 注意：
     - ✓ $\bar{A}=$ **A不发生**
     - ✓ 互不相容与互逆的区别与联系：A, B 互逆 $\rightleftarrows$ A, B互不相容

A,B互不相容(互斥):　　*A,B 互逆(对立):*



$AB=\varnothing,$　　$AB=\varnothing$ 且$A\cup B=\Omega.$

     - ✓ 基本事件间两两是互不相容的
     - ✓ 基本事件之并 $=\Omega$
     - ✓ $\Phi\subset AB\subset \begin{matrix}A\\B\end{matrix}\subset A\cup B\subset\Omega,$
     - ✓ $A-B=A-AB=A\bar{B}$

✓ $A \cup B = A \cup (B-A) = A \cup (B-AB)$

✓ $A = A\Omega = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$

符号	集合含义	事件含义
Ω	全集	样本空间，必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A⊂Ω	集合A	随机事件A
A⊂B	A包含在B中	A发生导致B发生
A∪B	A与B的并集	A与B至少有一个发生
A∩B	A与B的交集	A与B同时发生
A－B	A与B的差集	A发生但B不发生
Ā	A的补集	A不发生，A的逆事件
A∩B=Φ	A与B无相同元素	A与B互不相容

1.2 随机事件的概率

1. 频率：$f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$.

   1) 性质：**非负性**、**规范性**（$f_n(\Omega)=1$）、**有限可加性**（对于两两互不相容的事件，$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$.）、**波动性**、随试验次数增大有**稳定性**

   2) 用频率的稳定值作为事件 A 的概率.

2. 概率

   1) 同样具有：
      - 非负性
      - 规范性
      - 可列可加性

   2) 性质：

      ✓ 对于不可能事件,有 $P(\Phi)=0$.

      ✓ (有限可加性)对两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \left(i \neq j \Rightarrow A_iA_j = \Phi, i,j = 1,2,\cdots,n\right)$,

      有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

      ✓ 对于任一事件，有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

      ✓ 如果 $A \subseteq B$, 则有 $P(B-A) = P(B) - P(A)$； $P(A) \leq P(B)$.

      ✓ 对于任一事件，有 $P(A) \leq 1$.

      ✓ (减法公式)对于任意事件 A 与 B，有 $P(B-A) = P(B) - P(AB)$.

✓ 对于任意两个事件 A 与 B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$.

n 个事件和的概率 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3. **古典概型**（等可能概型）

①只含有限个样本点②每个样本点的出现是等可能的

$$P(A)=\frac{\text{A包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点总数}}$$

（分球入盒问题、分组问题）

4. **几何概型**

定义：对于有度量的有界区域 Ω 及任何有度量的子区域 $A\subseteq\Omega$，事件“随机点落在区域 A 内”的概率为 $P(A)=\dfrac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$.

（约会问题、蒲丰投针蒲丰投针问题）

1.3 条件概率

1. 条件概率与乘法公式

1) 条件概率：$P(B\mid A)\triangleq\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

2) 求条件概率：

✓ $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

✓ 缩减样本空间：$\boldsymbol{P(B|A)=\dfrac{AB\text{含的样本点数}}{\Omega_A\text{含的样本点数}}}$

3) 乘法公式

$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B\mid A)P(A)$

$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

2. 全概率公式

1) 完全事件组：设 Ω 为样本空间，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容，

(2)$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割(分划)或完全事件组

2) 全概率公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)$

3. 贝叶斯(Bayes)公式

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B\mid A_j)P(A_j)}$$

$P(A_i\mid B)$：后验概率　　　$P(A_i)$：先验概率

1.4 事件的独立性

1. 独立：P(AB)=P(A)P(B)

- A 与 B，A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$ 这四对事件中，若有一对相互独立,则其余三对也相互独立.
- 独立与不相容：一般没有必然联系，特殊情况下二者有关

  若$P(A)>0$，$P(B)>0$，则A，B独立与A，B互不相容不能同时成立.

  $P(AB)=P(A)P(B)>0 \quad P(AB)=P(\Phi)=0$

  即 当$P(A)>0$，$P(B)>0$时，有

  A与B 独立 $\Rightarrow$ A与B 相容(非互不相容)

  A与B 互不相容 $\Rightarrow$ A与B 不独立

- 三个事件的独立性

  $$\left.\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B)\\P(BC)&=P(B)P(C)\\P(CA)&=P(C)P(A)\end{aligned}\right\}\text{则称 A,B,C 两两独立}$$

  $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则称事件 A,B,C 相互独立(独立)

  - 三事件独立→三事件两两独立，反之不然.
  - 以下各组事件中若有一组相互独立,则其余各组的三个事件也相互独立：

    $$\boldsymbol{A,B,C};\quad \boldsymbol{\bar{A},B,C};\quad \boldsymbol{A,\bar{B},C};\quad \boldsymbol{A,B,\bar{C}};$$
    $$\boldsymbol{\bar{A},\bar{B},C};\quad \boldsymbol{A,\bar{B},\bar{C}};\quad \boldsymbol{\bar{A},B,\bar{C}};\quad \boldsymbol{\bar{A},\bar{B},\bar{C}}.$$

  - 若 A,B,C 相互独立,则 A∪B 与 C 相互独立, AB 与 C 相互独立， A-B 与 C 相互独立

- n 个事件的独立性

  $$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$
  $$(1\le i_1<\cdots<i_k\le n,k=2,\cdots,n)$$

1.5 伯努利(Bernoulli)概型

1. 定义：在相同条件下重复进行 n 次试验：

   (1) 各次试验是相互独立的：每次试验的结果都不影响其他各次实验的结果；

   (2) 每次试验只有两种可能结果；

   (3) 在每次试验中,A 发生的概率均一样,

   则称这样的 n 次试验为 n 重伯努利试验(概型),或 n 次重复独立试验.

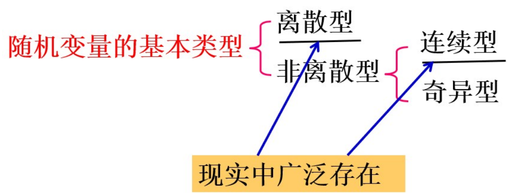
2. 二项概率公式：在 n 重伯努利试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k)$,(k=0,1,…,n).

$$\boldsymbol{P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}},\ (k=0,1,\cdots,n)$$

第二章 随机变量及其概率分布

2.1 随机变量及其分布函数

1. 随机变量
   1) 定义：设随机试验 E 的样本空间为 Ω,如果对于每一个样本点 $\omega \in \Omega$, 都有一个实数 X 与之对应，则称 $X = X(\omega)$ 为随机变量.
   2) 类型



2. 随机变量的分布函数
   1) 定义：设 X 是一随机变量, x 是任意实数,称函数 $F(x) = P\{X \le x\}, (-\infty < x < \infty)$ 为随机变量 X 的分布函数
   2) 性质
      - 对任意实数 x,有 $0 \le F(x) \le 1$.
      - F(x)是 x 的单调不减函数
      - $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
      - F(x)右连续，$F(x^+) = F(x)$.
      - $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$

2.2 离散随机变量及其概率分布

1. 离散型随机变量：随机变量 X 所有可能取到的不同的值是有限个或可列无限多个值,并且以确定的概率取这些值
2. 设 X 为离散型随机变量,X 的所有可能的取值为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$, 且
   $P\{X = x_k\} = p_k \quad (k = 1, 2, \cdots)$ 并且 p_k 满足以下两个条件:
   $$\left.\begin{array}{l} ① \ p_k \ge 0,\ k = 1, 2, \cdots \\ ② \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \end{array}\right\} \text{分布律的本质特征}$$
   则称(1)式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律.
3. 离散型随机变量的分布函数的特点
   - F(x)是单调不减、右连续的阶梯函数
   - 其间断点为随机变量 X 的可能取值
   - 在间断点的跳跃高度就是 X=该点的概率

2.3 连续型随机变量及其概率密度

1. 连续型随机变量及其概率密度

   1) 定义：$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，$-\infty<x<\infty$

   2) 注意：
      - 连续型的分布函数 $F(x)$ 在(-∞,+∞)连续，但 F(x)连续的 X 不一定连续
      - 概率密度 $f(x)$ 不一定连续,也不唯一，改变其有限多点的值不影响 X 的分布

2. 性质
   - $f(x)\ge 0,(-\infty<x<+\infty)$
   - $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$
   - $\forall a<b$ 有 $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$
   - 在 $f(x)$ 的连续点处，$f(x)=F'(x)$：反映了概率在 x 点附近的密集程度
   - 连续型随机变量 X 取任意点 c 的概率 $P\{X=c\}=0$
   - 连续型随机变量取值落在某一区间的概率与区间是开的是闭的无关.

$$
\begin{aligned}
P\{a<X\le b\}&=P\{a\le X\le b\}\\
&=P\{a\le X<b\}\\
&=P\{a<X<b\}\\
&=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}
$$

2.4 几种常用的离散型随机变量

1. (0-1)分布（两点分布）
   1) $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=1-p,\ (0<p<1)$
2. 二项分布

   1) 定义：$P(A)=p,\ P(\overline{A})=1-p,\ (0<p<1)$.试验独立重复进行 n 次，

   $$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad (k=0,1,\cdots,n),\quad X\sim B(n,p).$$

   2) 例子：扔硬币，正面朝上次数、篮球投中的次数
3. 泊松分布

   1) 定义：$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad (k=0,1,2,\cdots)$ 其中 $\lambda>0$,

   2) 例子：地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数
   3) 二项分布与泊松分布的关系：泊松定理

   设 λ >0 是常数,n 为任意正整数，$np_n=\lambda$,则对任一固定的非负整数 k，有

   $$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

泊松定理表明，**泊松分布是二项分布的极限分布**，当 n 很大，p 很小时，二项分布就可近似地看成是参数 λ=np 的泊松分布

4) 泊松分布的最可能取值

若λ为整数，则当$k=\lambda$或（λ-1）时$P\{X=k\}$最大

若λ为分数，则当$k=[\lambda]$时$P\{X=k\}$最大

4. 几何分布

1) $P(A)=p,\ P(\bar{A})=1-p,\ (0<p<1).$

$$P\left\{X=k\right\}=\left(1-p\right)^{k-1}p,\quad (k=1,2,\cdots)$$

$X\sim G(p)$.

5. 超几何分布 H(N,n,M)

1) 定义：设 X 的分布律为

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\qquad (m=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\})$$

这里$n<N,m<M,M<N$,则称X服从超几何分布.

2) 例子：废品率的计件检验

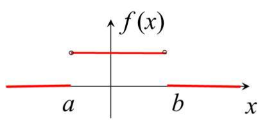
2.5 几种常用的连续型随机变量

1. 均匀分布

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$，X~U(a,b).

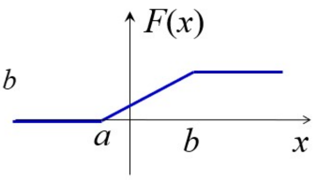
2) 说明：

- $f(x)$ 图形：



- X 的分布函数为

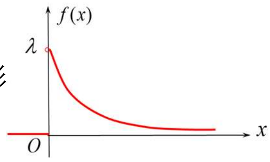
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$



2. 指数分布

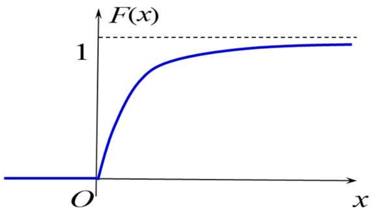
1) $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 其中$\lambda>0$是常数，$X\sim E(\lambda)$.

2) 说明

- $f(x)$ 图形 

- X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$



3) 例子：描述电子元件寿命、通话时间、机器修理时间、营业员服务时间

4) 指数分布的重要性质：无记忆性

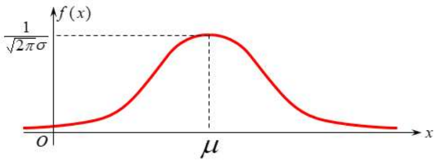
3. 正态分布

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty$， $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

2) 说明:

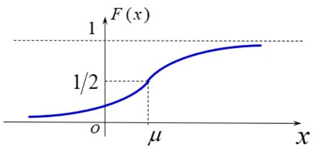
- X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<\infty)$$



- X 的分布函数为

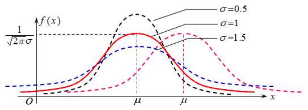
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t\quad(-\infty<x<\infty)$$



$$F(\mu)=\frac{1}{2}$$

3) 正态分布概率密度的性质

- $f(\mu+x)=f(\mu-x)$，即 $y=f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称
- 当 $x<\mu$ 时， $f(x)\uparrow$，当 $x>\mu$ 时， $f(x)\downarrow$ 所以极大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处,曲线 $y=f(x)$ 在对应的点处是拐点
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 即 $y=f(x)$ 以 x 轴为渐近线



- **μ**:小→大，图形向右平移，形状不变
  μ:大→小，图形向左平移，形状不变
  μ是位置参数：固定σ，对不同的μ，$f(x)$的形状不变，但位置不同.
  σ:小→大，图形变平坦
  σ:大→小，图形变陡峭
  σ是形状参数：固定μ，对于不同的σ，$f(x)$的形状不同.

4) 例子：测量误差、家庭收入

4. 标准正态分布
   1) 定义：设 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2),\ \mu=0,\ \sigma=1,\ X \sim N(0,1).$

      概率密度为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$(-\infty<x<+\infty)$

      分布函数为 $\Phi(x)=P\{X \le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad (-\infty<x<+\infty)$

   2) 性质
      - $\Phi(0)=1/2$
      - $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

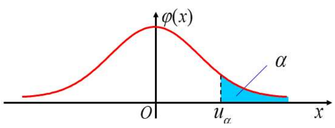
   3) 标准正态分布与正态分布的关系

      $Y=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

   4) 3σ 原则：正态分布的值几乎都落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内
   5) 标准正态分布的上 α 分位点

      对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，如果 u_α 满足条件 $P\left\{X \ge u_\alpha\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_\alpha}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\alpha$，则称

      u_α 为标准正态分布的上 α 分位点.



$\Phi\left(u_\alpha\right)=P\left\{X \le u_\alpha\right\}=1-P\left\{X > u_\alpha\right\}=1-\alpha$

即 $\Phi\left(u_\alpha\right)=1-\alpha.$

   6) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

2.6 随机变量的函数的分布

1. 离散型随机变量的函数的分布律

   设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，$(k=1,2,\cdots)$ 求随机变量 $Y=g(X)$ 的分布律

   步骤：(1)确定 Y 的取值 $y_1,y_2,\cdots,y_j,\cdots$

   (2)求概率 $P\{Y=y_j\}=\sum_{g(x_k)=y_j}P\{X=x_k\}$，$(j=1,2,\cdots)$

2. 连续型随机变量函数的分布

1) 一般方法

- 先求随机变量$Y=g(X)$的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=P\{X\in G\}$$
$$=\int_G f_X(x)dx$$

- 再对 $F_Y(y)$ 求导,可得 Y 的概率密度 f_Y(y)

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)$$

2) 特殊情况

定理：设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，$g(x)$ **处处可导，严格单调**，则随机变量$Y=g(X)$的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases} f_X\left[h\left(y\right)\right]\cdot\left|h'\left(y\right)\right|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & 其他，\end{cases}$

其中$\alpha=\min\left(g(-\infty),g(+\infty)\right)$，$\beta=\max\left(g(-\infty),g(+\infty)\right)$，$h(y)$是$g(x)$的反函数.

第三章 多维随机变量及其概率分布

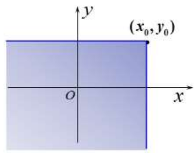
3.1 二维随机变量

1. 二维随机变量及其分布函数

   1) 分布函数：$F(x,y)=P\left\{\{X\le x\}\bigcap\{Y\le y\}\right\}=P\{X\le x,Y\le y\}$

   几何意义：$F(x_0,y_0)$就是二维随机变量的取值落在无界区域:

   $-\infty<X\le x_0,-\infty<Y\le y_0$ 内的概率 .



   2) F(x,y)的性质

   - $0\le F(x,y)\le 1$, 且 $F(+\infty,+\infty)=1, F(-\infty,-\infty)=0,$

     对任意固定 x， $F(x,-\infty)=0,$
     对任意固定 y， $F(-\infty,y)=0.$

   - 任意固定 $x_0, F(x_0,y)$ 是 y 的单调不减函数;

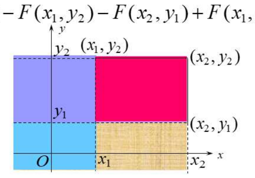
     任意固定 $y_0, F(x,y_0)$ 是 x 的单调不减函数;

   - $F(x,y)=F(x,y+0)$ 即 F(x,y)关于 y 右连续

     $F(x,y)=F(x+0,y)$ 即 F(x,y)关于 x 右连续.

   - $\forall x_1<x_2, y_1<y_2$ 有 $F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\quad\ge 0$

     $P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$
     $=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$

   - 

2. 边缘分布

   $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y),\quad F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$

3. 随机变量的独立性

   1) $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$， 则称 X 与 Y 相互独立

   若X与Y相互独立,
   联合分布函数 $\xleftrightarrow{\text{确定}}$ 边缘分布函数
   若X与Y不相互独立,
   联合分布函数 $\xrightarrow{\text{确定}}$ 边缘分布函数

3.2 二维离散型随机变量及其概率分布

1. 二维离散型随机变量及联合概率分布

   1) $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij} \quad i,j=1,2,\cdots$--(*)

   且满足 $(1)\, p_{ij}\ge 0, (\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,\cdots) \qquad (2)\sum_{i,j} p_{ij}=1$

2. 二维离散型随机变量的边缘分布

   1) $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \quad (i=1,2,\cdots)$

   $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \quad (j=1,2,\cdots)$

3. 二维离散型随机变量的独立性

   1) $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}, \quad (i,j=1,2,\cdots)$ 即

   $p_{ij}=p_{i\cdot}\, p_{\cdot j},\ (i,j=1,2,\cdots)$

   2) 结论：在离散型（X,Y)中，若 X 与 Y 独立，则（X,Y)联合分布的概率行与行之间成比例，列与列之间成比例。

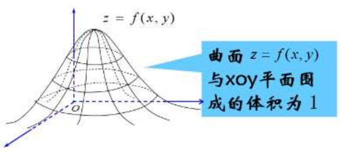
3.3 二维连续型随机变量及其概率密度

1. 二维连续型随机变量及其概率密度

   1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$

   2) $f(x,y)$ 的性质

   - $f(x,y)\ge 0$
   - $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv=1$
   - $\forall D\subset R^2,\ P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$
   - 在 $f(x,y)$ 的连续点处,有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$



2. 二维连续型随机变量的边缘概率密度

   1) $\boldsymbol{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,\ (-\infty<x<+\infty)}$

   $\boldsymbol{f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,\ (-\infty<y<+\infty)}$

3. 二维连续型随机变量的独立性

1) X、Y 相互独立的充要条件: $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\quad (-\infty<x,y<+\infty)$

4. 二维均匀分布和正态分布

1) 二维均匀分布

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}1/S, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}}$$

2) 二维正态分布

- $$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}$$

  $(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$

  $-\infty<\mu_1,\ \mu_2<+\infty,\ \sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ |\rho|<1$

- 二维正态分布的重要性质
  - ✓ 二维正态分布的边缘分布是一维正态分布
  - ✓ 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 X 与 Y 相互独立的充要条件: $\rho=0$.

3.4 条件分布

1. 离散型随机变量的条件分布律

1) $P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad (i=1,2,\cdots)$

2. 连续型随机变量的条件分布

1) 当 X 连续时，应该用 $P(X\le x \mid Y=y)$ 来定义。

2) $$\lim_{\varepsilon\to0^+}P(X\le x|y-\varepsilon<y\le y+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P(X\le x,y-\varepsilon<y\le y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon<y\le y+\varepsilon)}$$

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$$

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad f_Y(y)>0,x\in R$$

3) 

3.5 二维随机变量的函数的分布

1. 二维离散型随机变量的函数的概率分布
   1) 已知(X,Y)的分布律,求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律
      步骤：确定 Z 的取值 $z_1,z_2,\cdots,z_k,\cdots;\ z_k=g(x_i,y_j),\ \ i,j=1,2,\cdots$
      求概率 $P\{Z=z_k\}$.
2. 二维连续型随机变量的函数的概率分布
   1) 已知(X,Y)概率密度,求 $Z=g(X,Y)$ 概率密度
      步骤：先求随机变量 Z 的分布函数 $$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$
      对 $F_Z(z)$ 求导,得 Z 的概率密函数为 $f_Z(z)$=$F_Z'(z)$

3.6 n 维随机变量

1. n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\},$$

   其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为任意实数.

2. n 维随机变量的边缘分布函数

$$F_{X_i}(x_i)=F(+\infty,\cdots,+\infty,x_i,+\infty,\cdots,+\infty)$$

3. n 维离散型随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律

$$P\left\{X_1=x_{i1},X_2=x_{i2},\cdots,X_n=x_{in}\right\}=p_{i_1i_2\cdots i_n}$$
$$i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,\cdots$$

4. n 维连续型随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

5. n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的独立性

   1) $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$

      则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

   2) 离散型

$$P\left\{X_1=x_{i_1},X_2=x_{i_2},\cdots,X_n=x_{i_n}\right\}=P\{X_1=x_{i_1}\}\cdot P\{X_2=x_{i_2}\}\cdots P\{X_n=x_{i_n}\}$$

   3) 连续型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

6. n 维正态随机变量

定义：设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \left|C\right|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu) \right\}$$

其中 $C = (\mathbf{c}_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵，$\left|C\right|$ 是其行列式，

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$, 则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布.

第四章 随机变量数字特征

4.1 数学期望

1. 定义：

    1) 离散型：$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$

    2) 连续型：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx$

    注：若以上两式不绝对收敛，则数学期望不存在

2. 随机变量的函数的数学期望

    1) $Y=g(X)$, g 为连续函数，以下两式绝对收敛

    - 离散型：$\boldsymbol{E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k}$
    - 连续型：$\boldsymbol{E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx}$

    2) $Z=g(X,Y)$, $z=g(x,y)$ 为二元连续函数，以下两式绝对收敛

    - 离散型：$\boldsymbol{E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}}$
    - 连续型：$\boldsymbol{E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy}$

3. 柯西-许瓦兹不等式：$\boldsymbol{\left[E(XY)\right]^2\le E(X^2)E(Y^2)}$

4.2 方差

1. 定义：$D(X)=E\left[(X-EX)^2\right]$.

    $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

    说明：

    - D(X)反映了 X 的取值与其数学期望的偏离程度

        D(X)较小/大，则 X 取值比较集中/分散

    - 若 E(X)不存在，则 D(X)必不存在
    - $D(X)=E[(X-EX)^2]$ 是 $g(x)=(x-EX)^2$. 的数学期望
    - 计算：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

        另：离散型：$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^2\cdot p_k$

        连续型：$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot f(x)dx$

- 常见分布的数学期望与方差

分布	数学期望	方差
(0-1)分布	p	$p(1-p)$
二项分布$B(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布$P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$1/p$	$(1-p)/p^2$
均匀分布$U(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
指数分布$E(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

2. 当 X、Y 不独立时:
   $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E[(X-EX)(Y-EY)]$
3. 随机变量的标准化
   $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 标准化随机变量的数学期望为 0，方差为 1
4. 说明:
   1) D(X)=0 $\neq$ X 恒等于常数 E(X)
      方差为零说明 X 各取值与期望的偏离程度一样，等价于 X 取值几乎处处相等
   2) 概率为 1 的事件不一定是必然事件

      例如，$X\sim U[0,1]$,若$Y=\begin{cases}0, & X=0\\ 1, & 0<X\le 1\end{cases}$
      则有$P\{Y=1\}=1, E(Y)=1$，$D(Y)=0$，但$Y\neq 1$

4.3 协方差与相关系数

1. 协方差
   1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$
   2) 说明:
      - X、Y 相关 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$
      - $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
      - $\mathbf{Cov}(X,X)=E(X-EX)^2=D(X)$
   3) 性质:
      - $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
      - $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$
      - $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$
      - $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
2. 相关系数
   1) 定义: $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$
   2) 常用公式:
      $\rho_{XY}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$\rho_{XY} = \mathrm{Cov}(X^*, Y^*)$

3) 性质:

- $\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow$ 不相关 $\Rightarrow$ —>独立
- $|\rho_{XY}| \le 1$
- $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数 a, b, 使 $P\{Y = a + bX\} = 1$

4) 相关系数的含义

- 表示随机变量 X 和 Y 的线性相关的程度(相关、线性相关、正相关、负相关)
- 独立与不相关的关系:

$\boxed{\text{X与Y独立}} \overset{\Rightarrow}{\cancel{\Leftarrow}} \boxed{\rho_{XY} = 0} \rightleftarrows \boxed{\text{X,Y不相关}}$

- 二维正态分布的结论:

$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, \rho)$, $Cov(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$, 此时不相关 $\Leftrightarrow$ 独立

4.4 矩

1. 原点矩和中心矩

1) 定义:

$E(X^k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$: k 阶原点矩(k 阶矩)

$E[(X - E(X))^k]$ $(k = 2, 3, \cdots)$: k 阶中心矩

$E(X^k Y^l)$ $(k, l = 1, 2, \cdots)$: k+l 阶混合矩

$E[(X - EX)^k (Y - EY)^l]$ $(k, l = 1, 2, \cdots)$: k+l 阶混合中心矩

$E(X)$ ········ **1 阶原点矩**

$D(X)$ ········ **2 阶中心矩**

$\mathrm{Cov}(X, Y)$ ········ **2 阶混合中心矩**

2) 协方差矩阵

二维随机变量 (X_1, X_2)

$c_{11} = E[(X_1 - EX_1)^2] = D(X_1)$

$c_{12} = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)] = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$

$c_{21} = E[(X_2 - EX_2)(X_1 - EX_1)] = \mathrm{Cov}(X_2, X_1)$

$c_{22} = E[(X_2 - EX_2)^2] = D(X_2)$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

3) n 维正态分布

- 二维正态分布的矩阵表示式

$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$,

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{2/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

$$C=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$——协方差矩阵

$$|C|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

- n 维正态分布的矩阵表示式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\mu=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix}$$

第五章 大数定律及中心极限定理

5.1 切比雪夫(Chebyshev)不等式

1. 定理

设 X 的数学期望和方差都存在,则对任意给定的正数 ε,有

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ 或 } P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

5.2 大数定律

1. 依概率收敛
   1) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$：随机变量序列 a：常数

   $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$,称 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 依概率收敛于 a

   $$X_n \xrightarrow{p} a.$$

   2) 或：$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n-a|\geq\varepsilon\}=0$
   3) 解释：对任意ε>0,当 n 充分大时,{Xn 与 a 的偏差大于 ε} 这一事件发生的概率很小(趋于 0)
2. 大数定律

大数定律研究在什么条件下随机变量序列的算术平均值收敛于其均值的算术平均值：

$$\boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)}$$

即：$\boldsymbol{\bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X})}$

3. 切比雪夫大数定律
   1) 定理：随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ ①相互独立②有期望③方差有上界，则对任意给定的ε>0， 恒有

   $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

   2) 说明：$\boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{\mathrm{P}} E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)}$ 即 $\boldsymbol{\bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X})}$
   3) 推论：随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ ①相互独立②相同期望③相同方差，则对任意给定的ε>0， 恒有

   $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

4. 伯努利大数定律

1) n_A——n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数

P——事件 A 在一次实验中发生的概率

则对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

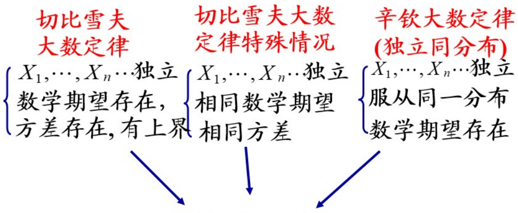
2) 说明：当 n→∞时,A 的频率依概率收敛于概率.

5. 辛钦大数定律（独立同分布大数定律）

1) 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ ①相互独立，②同一分布③有数学期望 $E(X_k) = \mu\ (k = 1, 2, \cdots)$, ，则对任意正数 ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

6.



$$\bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X})$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\bar{X} - E(\bar{X})\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

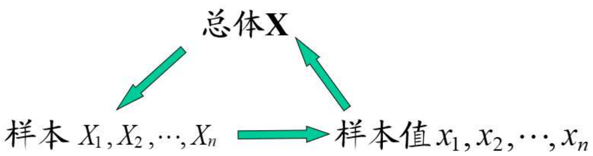
5.3 中心极限定理

第六章 样本及样本函数的分布

统计推断的内容：参数估计、假设检验、回归分析、方差分析

6.1 总体与样本

1. 总体
    1) 总体：所研究对象的全体
    个体：总体中的每个具体对象
    总体容量：总体中所包含的个体总数
2. 简单随机样本
    1) 特点：随机性、代表性、独立性
    2) 定义：设总体 X 是一随机变量，随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都与总体 X 有相同的分布,——来自总体 X 的简单随机样本（简称样本），n 称为样本容量
    $x_1, x_2, \cdots, x_n$,——样本观测值（样本值）
    3) 说明：
        - $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 表示对总体 X 进行了 n 次重复独立观测
        - 样本具有二重性：观察前：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量；观察后：$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个具体的观察数据
3. 总体、样本、样本值的关系
    1)



    2) 样本的联合分布函数

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n) \\
&= F_X(x_1) F_X(x_2) \cdots F_X(x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x_i)
\end{aligned}
$$

    3) 样本的联合概率密度

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \\
&= f_X(x_1) f_X(x_2) \cdots f_X(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)
\end{aligned}
$$

    4) 样本的联合分布律

$$
\begin{aligned}
& P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} \\
&= P\{X_1 = x_1\} P\{X_2 = x_2\} \cdots P\{X_n = x_n\} \\
&= P\{X = x_1\} P\{X = x_2\} \cdots P\{X = x_n\} \\
&= p_X(x_1) p_X(x_2) \cdots p_X(x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i)
\end{aligned}
$$

6.2 直方图与样本分布函数(略)

6.3 样本函数及其概率分布

1. 统计量
   1) 样本函数：g(X1,X2,···,Xn)
   2) 样本观测值：$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
   3) 如果 g(X1,X2,···,Xn)中不含任何未知参数，则称它为统计量
      注意：统计量是样本函数，是一个随机变量.
2. 常用的统计量
   1) 样本均值：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
      - 样本方差：
        $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - n\overline{X}^{\,2}\right)$$
      - 样本标准差：$S = \sqrt{S^2}$
      - 样本 k 阶原点矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad (k = 1, 2, \cdots)$
      - 样本 k 阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k \quad (k = 1, 2, \cdots)$
      - 样本最小值：$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$
      - 样本最大值：$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$
   2) 结论 $E\left(X\right) = \mu, \quad D\left(X\right) = \sigma^2$, 则
      - $E(\overline{X}) = \mu, \ D(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
      - $E(S^2) = \sigma^2 \quad D(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$
      - $E(B_2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \quad D(B_2) = \dfrac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$
      - $F_{\max}(x) = \left[F(x)\right]^n \quad F_{\min}(x) = 1 - \left[1 - F(x)\right]^n$
3. 正态总体的两个抽样分布定理
   1) 设 X1,X2,···,Xn 是来自正态总体 N(μ, σ^2)的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则随机变量
      $$u = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N\left(0, 1\right).$$
   2) $\boldsymbol{X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)}$ 分别独立地从总体 X 和总体 Y 中抽取样本
      $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 及 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$，则随机变量

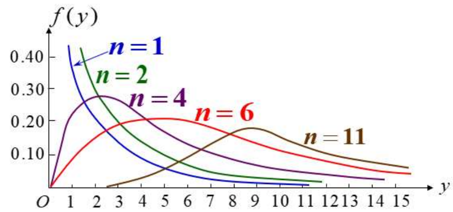
$$u=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

6.4 χ^2 分布

1. 定义：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立， 都服从 $\boldsymbol{N(0,1)}$， 则 $\chi^2\sim\chi^2(n)$. n 为自由度
2. 概率密度函数

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0\,, & y\le 0\end{cases}$$

$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}x^{z-1}e^{-x}dx,(z>0)$



3. 性质

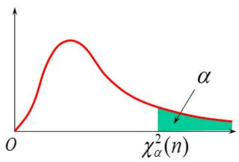
   1) $\boldsymbol{E(\chi^2)=n,\ D(\chi^2)=2n.}$

   2) $X\sim\chi^2(n_1),\ Y\sim\chi^2(n_2),$， 则 $X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2)$

   3) 当 n 充分大时，$\dfrac{\chi^2(n)-n}{\sqrt{2n}}$ 近似服从 $\boldsymbol{N(0,1)}$ $\chi^2(n)$ 近似服从 $\boldsymbol{N(n,2n)}$

4. 上α分为点

$$P\left\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\right\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f(x)\,dx=\alpha$$



5. 相关定理

   1) 设 X1, X2, ···, Xn 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$$

   2) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 有：

$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立； $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

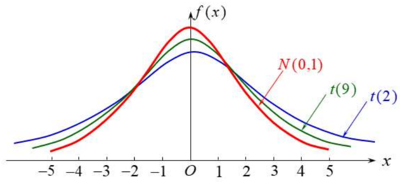
6.5 t 分布

1. 定义：$X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$， X 与 Y 独立，则 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$， $t\sim t(n)$.

n=1 时，为柯西分布

2. 概率密度函数

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}},\qquad(-\infty<x<+\infty)$$



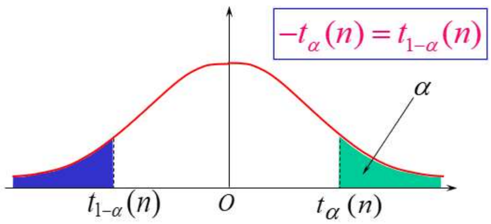
3. 性质

   1) $E(t(n))=0\quad D(t(n))=\frac{n}{n-2},n>2$

   2) 极限为 $N(0,1)$

4. 上α分为点

$$P\{t(n)>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$



5. 有关定理

   1) X1, X2, …, Xn 来自正态总体 $\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2)}$, $\quad \boldsymbol{t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)}$

   2) 两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2),N(\mu_2,\sigma^2)$ 样本容量：n1 和 n2，样本均值：$\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$，样本方差：S_1^2 和 S_2^2.

$$S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}},\quad \boldsymbol{t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)}.$$

6.6 F 分布

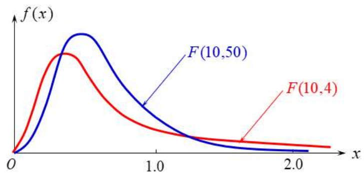
1. 定义：$X\sim\chi^2(n_1)$, $Y\sim\chi^2(n_2)$, X 与 Y 相互独立

$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$，$F\sim F(n_1,n_2)$. 第一自由度：n_1, 第二自由度：n_2

$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

2. 概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x>0 \\ 0 \quad, & x \le 0 \end{cases}$$

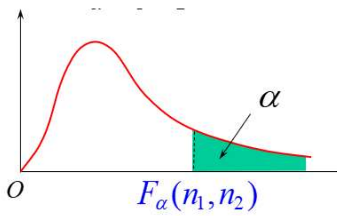


3. 性质:
   1) F 分布极限分布是正态分布.
   2) 若$F \sim F(1, n), T \sim T(n)$,则$F = T^2$

4. 上α分为点

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(x)\,dx = \alpha$$

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$



5. 有关定理
   1) $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 来自 $\boldsymbol{N(\mu_1,\sigma_1^2)}$, $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 来自 $\boldsymbol{N(\mu_2,\sigma_2^2)}$, 则

$$F = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2).$$

   2) $\boldsymbol{N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)}$容量：n1 和 n2，样本均值：$\overline{X}$和$\overline{Y}$，样本方差：$S_1^2$和$S_2^2$.

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

χ²分布： $\sum_1^n [N(0,1)]^2 \sim \chi^2(n)$

t分布： $\dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(n)}{n}}} \sim t(n)$

口诀:
正态方和卡方(x2)出，
卡方相除变F;
若想得到t分布，
一正n卡再相除;

F分布： $\dfrac{\dfrac{\chi^2(n_1)}{n_1}}{\dfrac{\chi^2(n_2)}{n_2}} \sim F(n_1, n_2)$

第七章 参数估计

参数估计方法：点估计、区间估计

7.1 参数的点估计

1. 点估计问题的一般提法
   1) X 的分布已知，但含有一个未知参数 θ,
      ① 从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
      ② 构造出一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,
      ③ 用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 作为 θ 的估计值

      $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$： θ 的点估计量

      $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$： θ 的点估计值
   2) 设总体 X 的分布已知， 但有 r 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的样本
      ① 构造 r 个统计量 $\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_r = \hat{\theta}_r(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{cases}$ 分别作为未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$ 的点估计量
      ② 代入样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，可得 r 个数： $\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_r = \hat{\theta}_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$
      ③ $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_r$： $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$ 的点估计值
   3) 常用的点估计方法：矩估计法、最大似然估计法
2. 矩估计法：用样本 k 阶矩 A_k 作为总体 k 阶矩 $E(X^k)$
   1) 总体 X 只有 1 个待估参数 θ,则求　　　　(有两个) θ1,θ2

      $$\mu_1 = E(X) \qquad\qquad \begin{cases} \mu_1 = E(X) \\ \mu_2 = E(X^2) \end{cases}$$
   2) 用 A1(即 $\overline{X}$)代替 μ1　　　　A1 代替 μ1，A2 代替 μ2
   3) 解出θ，得矩估计量

      $$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \qquad\qquad \begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{cases}$$
   4) 将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 用观测值代入，得矩估计值

$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\begin{cases}\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

3. 最大似然估计法

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,

1) 构造似然函数 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)$

2) 取对数

3) 求导(偏导)，得方程(组) $\dfrac{\partial L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)}{\partial\theta_i}=0,\ (i=1,2,\cdots,r)$

4) 解方程(组)，则 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r$ 的最大似然估计值和最大似然估计量分别为

$$\begin{cases}\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{cases}$$

4. 点估计

- 矩估计
  - 优点：简单易行，无需知道总体的分布
  - 缺点：要求总体k阶矩存在
- 最大似然估计
  - 优点：化问题为求极值问题，有很好的统计性质
  - 缺点：必须知道总体的分布

7.2 估计量的评选标准

1. 无偏性

1) 定义：$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是θ的估计量，如果 $E(\hat{\theta})$ 存在且有 $E(\hat{\theta})=\theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量，否则称为有偏估计量

2) 统计含义： 在大量重复试验下,由 $\hat{\theta}$ 所得的估计值的平均值恰是真值 θ，从而保证没有系统误差

3) 一般地，一个参数θ的无偏估计量不唯一

2. 有效性

1) $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是总体参数 θ 的无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

2) 一般地，在μ的无偏估计量中，$\overline{X}$ 最有效

3. 一致性

1) $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)(\mathrm{n}=1,2,\ldots)$ 是未知参数θ的估计量序列，如果当 $n\to\infty$时，$\hat{\theta}_n$ 依概率收敛于θ，即 $\forall\varepsilon>0$, 有

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$，则 $\hat{\theta}_n$ 是θ的一致估计量

2) 意义：只要样本容量足够大,就可以使一致估计量与参数真值之间的差异大于 ε 的概率足够地小，也就是估计量可以用任意接近于 1 的概率把参数真值估计到任意的精度；一致性是针对样本容量 $n \to +\infty$ 而言的，对于固定的样本容量 n，一致性是无意义的

7.3 参数的区间估计

区间估计的思想：从样本出发，构造两个统计量 θ_1, θ_2 使得两个统计量所形成的随机区间 (θ_1, θ_2) 包含待估参数的概率尽可能地大

1. 定义：总体 X 的分布中含有一个未知参数 θ，如果对于给定值 1-α (0<α<1)，存在两个统计量

   $\theta_1 = \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$\theta_2 = \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ $(\theta_1 < \theta_2)$，使得 $P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1-\alpha$，

   $1-\alpha$：置信度(置信水平)　　　(θ_1, θ_2)：参数θ的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

   θ_1, θ_2：置信下限和置信上限

2. 说明：
   1) 参数θ的置信水平为 1-α的置信区间(θ₁, θ₂)表示该区间包含未知参数θ的真值的可能性为 100(1-α)%.
   2) 置信度(置信水平)1-α 反映了置信区间包含真值的可靠程度. 1-α 越大，估计的可靠性越高
   3) 不同的置信水平，参数θ的置信区间不同
   4) 置信区间的长度反映了估计精度
   5) 当样本容量固定不变时，置信区间的可靠性越高(即(1-α)越大)，精度越低(即区间长度越长)
   6) 处理"可靠性与精度关系"的原则:先求参数的置信区间，在保证可靠性情况下,再提高精度
   7) α确定后，置信区间的选取方法不唯一，常选最小的一个

7.4 正态总体参数的区间估计

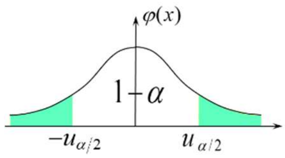
一个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$
- σ^2 已知，估计 μ
- σ^2 未知，估计 μ
- μ 已知，估计 σ^2
- μ 未知，估计 σ^2

两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- σ_1^2, σ_2^2 已知，估计 $\mu_1 - \mu_2$
- σ_1^2, σ_2^2 未知，估计 $\mu_1 - \mu_2$
- μ_1, μ_2 已知，估计 σ_1^2/σ_2^2
- μ_1, μ_2 未知，估计 σ_1^2/σ_2^2

1. 单个正态总体均值与方差的区间估计

   设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，从总体中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2.

1) σ^2已知, μ的置信水平为 1-α的置信区间



选取枢轴量$u=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,

给定置信水平 1-α，即要使得$P\left\{-u_{\alpha/2}<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$ 解μ

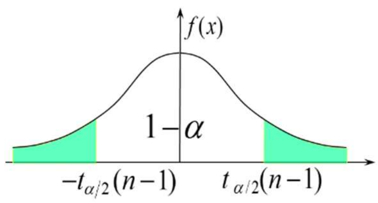
得$P\left\{\bar{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$

故μ 的置信水平为 1-α 的置信区间为 $\left(\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

置信区间的长度（精度）为$l=2u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

若α增大，则$1-\alpha$减小，$u_{\alpha/2}$减小，此时l缩短。

2) σ^2未知,μ的置信水平为 1-α的置信区间



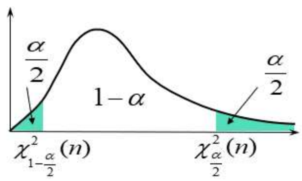
枢轴量$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

置信区间

$$\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

3) μ已知,σ^2 的置信水平为α的置信区间

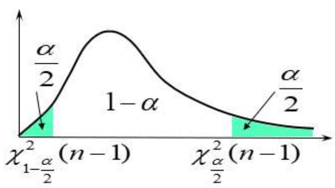
$$\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),\text{所以}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$



枢轴量$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

置信区间 $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\quad \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$

4) μ未知,σ^2 的置信水平为 1-αμ未知,σ^2 的置信水平为 1-α的置信区间



枢轴量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

σ^2 的置信水平为 1-α的置信区间 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

σ 的置信水平为 1-α的置信区间 $\left(\dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$

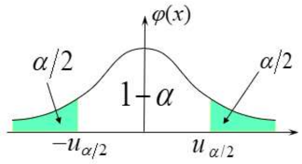
2. 两个正态总体均值差与方差比的区间估计

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$， $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为取自总体 X~ $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，Y~ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，$\bar{X}, S_1^2$ ，

$\bar{Y}, S_2^2$ 表示总体 X、Y 的样本均值和样本方差，置信度为 $1-\alpha$

1) σ_1^2, σ_2^2 已知，$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 1-α 的置信区间

枢轴量 $u=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

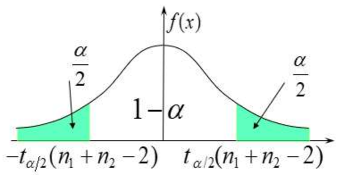


置信区间

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad (\bar{X}-\bar{Y})+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知，$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 1-α 的置信区间

枢轴量 $t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$



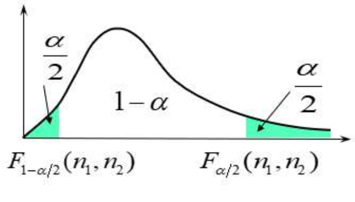
其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

置信区间

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ (\bar{X}-\bar{Y})+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

3) μ_1, μ_2 已知,方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 1-α 的置信区间

枢轴量 $F=\dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$



置信区间 $\left(\dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)},\quad \dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2,n_1)\right)$

4) μ_1,μ_2 未知,方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 1-α 的置信区间

枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

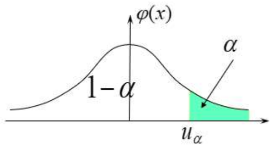
置信区间 $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\quad \dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\right)$

7.5 单侧置信区间

1.

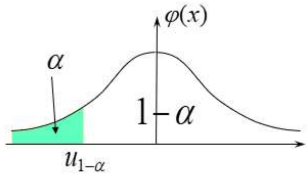
1) σ^2已知, μ的置信水平为 1-α的单侧置信区间

枢轴量 $u=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$



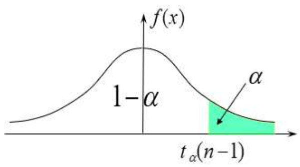
单侧置信区间 $\left(\bar{X}-u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad +\infty\right)$

或 $\left(-\infty,\ \bar{X}+u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

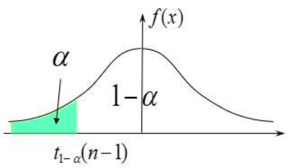


2) σ^2未知,μ 的置信水平为 1-α的单侧置信区间下限

枢轴量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

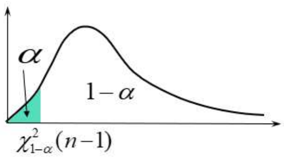


单侧置信区间 $\left(\bar{X}-t_\alpha(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\quad +\infty\right)$



或 $\left(-\infty,\ \bar{X}+t_\alpha(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

3) μ未知,σ^2 的置信水平为 1-α的单侧置信区间上限



枢轴量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

单侧置信区间 $\left(0, \quad \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$

第 8 章 假设检验

假设检验

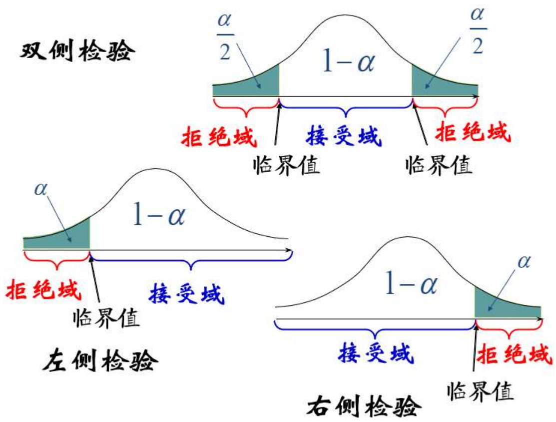
- **参数假设检验**
  依据样本对总体未知参数的某种假设作出真伪判断.
- **非参数假设检验**
  依据样本对总体分布的某种假设作出真伪判断.

8.1 假设检验的基本概念

1. 概念
   1) 统计假设：对总体分布形式或对总体分布中的某些参数作出的某种假设，称为统计假设
   2) 原假设和备择假设：如果关于总体有两个二者必居其一的假设，习惯上把其中的一个称作原假设(基本假设、零假设)，用 H_0 表示，而把另一个假设称作备择假设(对立假设)用 H_1 表示
      注：H_0：原本就有的架设，长期实践且认为是正确的假设
      H_1：否定 H_0 后要接受的假设，需事先规定好
   3) 原假设的确定一般应遵循以下几条原则：
      - 把“着重考察的假设”确定为原假设
      - 把“支持旧方法的假设”确定为原假设
      - 把等号放在原假设里
2. 假设检验的基本思想与方法
   1) 基本思想：如果小概率事件在一次试验中出现了，就认为是不合理的
   2) 方法(采用概率的反证性)：为了检验原假设 H_0是否成立，先假定它是成立的，然后看在接受这个假设之后，是否会导致不合理结果(就是看在一次实验中，是否出现小概率事件). 如果结果是合理的，就接受原假设 H_0；如不合理，则否定原假设 H_0，接受备择假设 H_1
3. 假设检验的两类错误
   1) 弃真
   2) 取伪

真实情况(未知)	所作决策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第I类错误
H_0 不真	犯第II类错误	正确

4. 显著水平为α的检验
   控制犯第一类错误的概率≤给定的α的检验法称为显著水平为α的检验，并称 α 为显著水平
5. 双侧假设检验与单侧假设检验
   如果原假设为 H_0：$\theta = \theta_0$，备择假设 H_1 根据实际可以有以下 3 种：
   (1)$\theta \neq \theta_0$，(2) $\theta < \theta_0$，(3) $\theta > \theta_0$
   分别为双侧检验、左侧检验、右侧检验



6. 假设检验的一般步骤

   1) 根据题意合理地建立原假设 H_0 和对立假设 H_1

   2) 选择适当的检验统计量（要求在 H_0 为真时，该统计量的分布是确定和已知的）

   3) 给定显著性水平α，查概率分布表,确定拒绝域

   4) 由样本观测值,计算检验统计量的观测值

   5) 作出判断:若统计量的值落入拒绝域,则拒绝原假设 H_0，否则接受原假设 H_0

8.2 **正态总体参数的假设检验**

1. 单个正态总体均值与方差的假设检验

有4种情况
- 1. σ^2 已知，检验 μ – u检验
- 2. σ^2 未知，检验 μ – t检验
- 3. μ 已知，检验 σ^2 – χ^2 检验
- 4. μ 未知，检验 σ^2 – χ^2 检验

双边 / 左边 / 右边

2. 两个正态总体均值差与方差比的假设检验

也有4种情况
- 5. σ_1^2, σ_2^2 已知，检验 $\mu_1-\mu_2$
- 6. σ_1^2, σ_2^2 未知，检验 $\mu_1-\mu_2$
- 7. μ_1, μ_2 已知，检验 σ_1^2/σ_2^2
- 8. μ_1, μ_2 未知，检验 σ_1^2/σ_2^2

双侧 / 左侧 / 右侧

3. 总结

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ （σ^2已知 ）	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$u \ge u_\alpha$ $u \le -u_\alpha$ $\lvert u\rvert \ge u_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ （σ^2未知 ）	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1-\mu_2 \le \delta$ $\mu_1-\mu_2 \ge \delta$ $\mu_1-\mu_2 = \delta$ (σ_1^2,σ_2^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu-\mu_0 > \delta$ $\mu-\mu_0 < \delta$ $\mu-\mu_0 \ne \delta$	$u \ge u_\alpha$ $u \le -u_\alpha$ $\lvert u\rvert \ge u_{\alpha/2}$
4	$\mu_1-\mu_2 \le \delta$ $\mu_1-\mu_2 \ge \delta$ $\mu_1-\mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-2)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}$	$\mu-\mu_0 > \delta$ $\mu-\mu_0 < \delta$ $\mu-\mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t \le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-1)$