目录

这个 ppt 有的东西没有，到时候再把笔记补充一下

第一章　绪论

1.1 信号的基本概念

一、信号的分类

1、确定信号与随机信号：是否可以表示为确定的时间函数——对指定的任一时刻，可确定其函数值

2、周期信号和非周期信号

3、连续时间信号与离散时间信号（有限个间断点也是连续时间信号）

4、幅度连续和离散信号：幅度是否只能取几个特定的值

	幅度连续	幅度离散
时间连续	模拟信号	没有起名字（如矩形信号）
时间离散	抽样信号	数字信号

5、能量信号与功率信号

a)　能量和功率的定义（定义为加在 1Ω电阻上的~~）

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\mathrm{t})\right|^2 dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|f(t)\right|^2 dt$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|f(t)\right|^2 dt$$

b)　分类

- 能量信号：能量有限、功率为零
- 功率信号：功率有限、能量无穷大

二、常见的连续时间信号

1、指数信号：$f(t)=Ke^{at}$

a)　特殊点

$$\text{定义：}\tau=\frac{1}{|a|}\Rightarrow f(\tau)=\frac{1}{e}=0.368$$

2、复指数信号（不是一种真正的电信号，利用它可简化分析和运算）

$$f(t)=Ke^{st}=Ke^{\sigma t}\cos\omega t+jKe^{\sigma t}\sin\omega t \qquad (-\infty<t<\infty)$$

$$\begin{cases}\sigma=0,\omega=0,\text{直流}\\ \sigma>0,\omega=0,\text{升指}\\ \sigma<0,\omega=0,\text{衰指}\end{cases} \qquad \begin{cases}\sigma=0,\omega\neq0,\text{等振}\\ \sigma>0,\omega\neq0,\text{增振}\\ \sigma<0,\omega\neq0,\text{衰振}\end{cases}$$

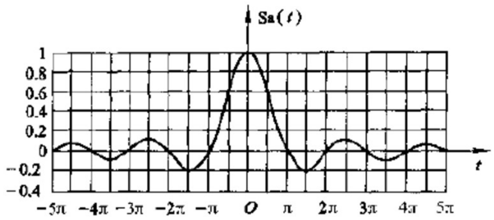
3、正弦信号

正弦信号：　$f(t)=K\sin(\omega t+\theta)$

指数衰减的正弦信号：　$f(\mathrm{t})=\begin{cases}0, & t<0\\ K\,\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t), & t\geq0\end{cases}$

4、抽样信号: $Sa(t)=\dfrac{\sin t}{t}$

a) 图像



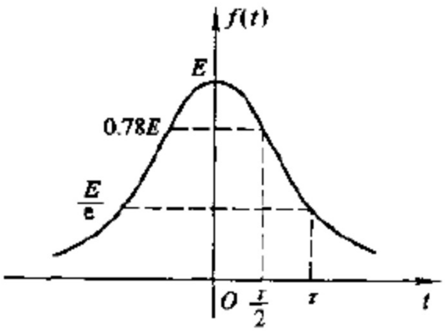
b) 性质

(1)减幅振荡、偶函数、零点：$t=k\pi$

(2)$Sa(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1,\quad \lim\limits_{t\to\infty}Sa(t)=0$

(3)$\int_0^{+\infty}Sa(t)dt=\dfrac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)dt=\pi$

5、钟形信号（高斯函数）$f(t)=Ee^{-(\frac{t}{\tau})^2}$ （注意特殊点）



三、信号的运算

1、信号的自变量变换

a) 信号的平移

$$f(t)\to f(t+t_0)\Rightarrow\begin{cases}t_0>0 & 左移\\ t_0<0 & 右移\end{cases}$$

b) 信号的反褶

$$f(t)\to f(-t)\Rightarrow 将信号以t=0为轴翻转$$

c) 信号的展缩

$$f(t)\to f(at)\Rightarrow\begin{cases}a>1 & 波形压缩\\ 0<a<1 & 波形扩展\end{cases}$$

d) 混合

2、信号的时域运算

a) 微分和积分

$$微分：f'(t)=\frac{d}{dt}f(t) \qquad 积分：\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

b) 相加和相乘

四、信号的分解

1、分解为直流分量+交流分量： $f(t)=f_D+f_A(t)$

2、分解为奇分量+偶分量：

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]+\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$$

3、分解为实部分量+虚部分量

4、分解为若干脉冲分量之和： $f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt$

5、分解为若干阶跃分量之和

1.2 阶跃信号与冲激信号

一、基本概念

1、奇异信号

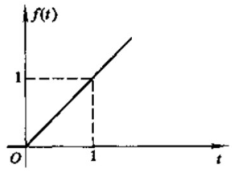
a) 定义（有两种情况）

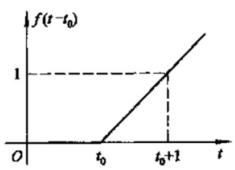
- 函数本身有不连续点
- 函数的导数与积分有不连续点

b) 常见的奇异信号（理想化的数学模型）：单位斜坡信号、单位阶跃信号、单位冲激信号、冲激偶信号

2、单位斜坡信号

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$$



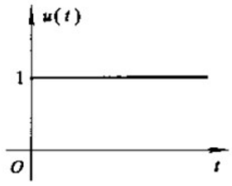


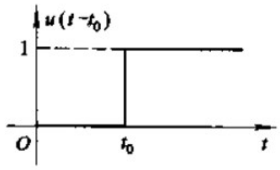
3、单位阶跃信号（积分器的模型）

a) 定义

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

$$t=0\text{处未定义或}=\frac{1}{2}$$





b) 用阶跃信号来表示其他信号

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$$

4、单位冲激信号

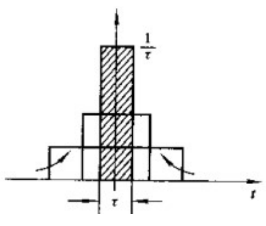
a) 定义：定义时间极短，取值极大的物理量

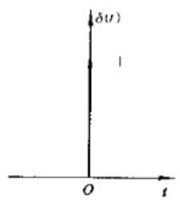
- 由矩形脉冲定义

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]$$

- 三角脉冲定义

底2τ，高$\frac{1}{\tau}$的三角脉冲，当$\tau\to 0$的极限





- 狄拉克定义

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0 \quad t\neq 0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1\\ \delta(t-t_0)=0 \quad t\neq t_0\end{cases}$$

b) 性质

(1)偶函数：$\delta(t)=\delta(-t)$

(2)筛选性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

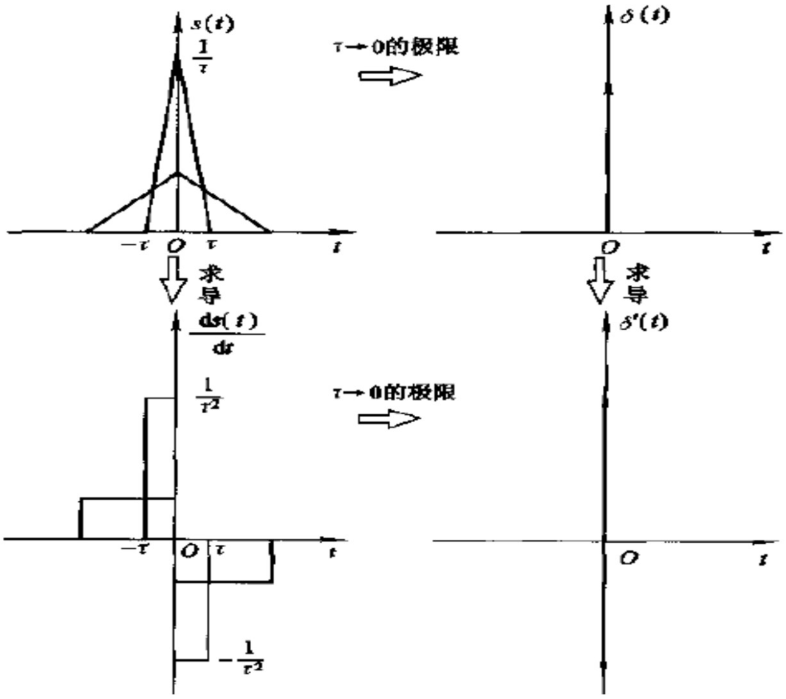
(3)乘积性：$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

(4)尺度变换：$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (a\neq 0)$

5、冲激偶函数（微分器的模型）

a)　定义（注意：画图是上下各一根线）

$$\delta'(t)=\begin{cases}\frac{d}{dt}\delta(t) & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$



b)　性质

(1)奇函数

(2)抽样性：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)dt=-f'(t_0)$

(3)积分：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$

二、几个的关系：依次求导的关系

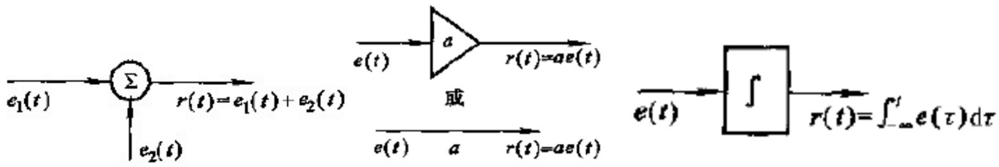
1.3 系统的基本概念

一、系统的数学模型

1、系统的表示方法：微分方程、系统框图

2、系统的阶数：系统模型若能用一个高阶微分方程表示，则规定此微分方程的阶次为系统的阶数

3、基本运算：相加、倍乘、积分



4、系统的分类

a) 连续时间系统与离散时间系统：输入和输出均为~时间信号

b) 即时系统（无记忆系统）与动态系统（记忆系统）：输出除了与当前激励有关外，是否与过去的工作状态有关

c) 集总参数系统与分布参数系统：前者用常微分方程表示，后者用偏微分方程

d) 线性系统与非线性系统：是否满足叠加性与均匀

- 叠加性：共同作用的响应等于分别作用的响应之和
- 均匀性：倍数的响应等于响应的倍数

e) 时变系统与时不变系统：系统参数是否随时间变化

f) 可逆系统与不可逆系统：在不同的激励信号作用下是否产生不同的响应（对应函数的定义，是的为可逆系统）

二、线性时不变系统 LTI（离散的为 LSI）

1、定义：确定性输入信号作用下的集总参数线性时不变系统

2、性质

a) 叠加性与均匀性

b) 时不变性

c) 微分特性

d) 因果性

第二章　连续时间系统的时域分析

2.1 概述

一、基本概念

1、连续时间系统的描述方法：建立微分方程----输入输出法（端口描述法）

2、时域分析法：直接求解系统的微分、积分方程，系统的分析与计算均在时域内完成

3、时域分析的实现：求解微分方程、求系统输入响应

二、微分方程

1、建立方法（略）

2、微分方程解的形式（解法略）

a) 齐次解 $r_h(t)$：系统齐次方程的解。又称为系统的自由响应/固有响应

- 形式只与系统特性有关，但是系数与初始状态、激励有关

b) 特解 $r_p(t)$：又称为强制响应/受迫响应

- 形式由激励决定，但是系数由激励和系统特性共同决定

c) 全响应 $r(t)=r_h(t)+r_p(t)$

3、初始条件的求解

a) 系统微分方程右端不含冲击响应：电路定律

b) 系统微分方程右端含冲击响应：冲激函数匹配法（？？？？？？）

三、系统的起始状态与线性、时变性的关系

1、若系统的起始状态为零，则外加激励信号和它对应的响应是线性时不变的

2、若系统的起始状态不为零，由于响应中零输入分量的存在，导致系统响应对外加激励不满足叠加性和均匀性，也不满足时不变性，因而是非线性时变系统

四、用算子符号表示微分方程（没学过）

1、定义：$p \triangleq \frac{d}{dt}$　　　　$\frac{1}{p} \triangleq \int_{-\infty}^{t} ()d\tau$

2、算子符号表示后的方程

(1)原始

$$C_0\frac{d^n}{dt^n}r(t)+C_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\cdots+C_{n-1}\frac{d}{dt}r(t)+C_nr(t)=E_0\frac{d^m}{dt^m}e(t)+E_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\cdots+E_{m-1}\frac{d}{dt}e(t)+E_me(t)$$

(2)表示后

$$(C_0p^n+C_1p^{n-1}+\cdots+C_{n-1}p+C_n)r(t)=(E_0p^m+E_1p^{m-1}+\cdots+E_{m-1}p+E_m)e(t)$$

(3)进一步令 $D(p)=C_0p^n+C_1p^{n-1}+\cdots+C_{n-1}p+C_n$，$N(p)=E_0p^m+E_1p^{m-1}+\cdots+E_{m-1}p+E_m$ 得

$$D(p)[r(t)]=N(p)[e(t)]$$

3、算子符号的基本规则

- 以 p 的正幂多项式出现的运算式，可以像多项式一样进行展开和因式分解

$$(p+3)(p+2)y(\mathrm{t})=(p^2+5p+6)y(t)$$

- 微分算子方程等号两边 p 的公因式不能随意消除

$$py(t)=pf(t) \quad \times\Rightarrow \quad y(t)=f(t)$$
$$\Rightarrow y(t)=f(t)+C$$

- 算子的乘除顺序不能随意颠倒

  先乘后除的算子运算不能相消；先除后乘的算子运算可以相消

$$p\cdot\frac{1}{p}y(t)\neq\frac{1}{p}\cdot py(t)$$

$$\begin{cases} p\cdot\dfrac{1}{p}y(t)=\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau=y(t) \\ \dfrac{1}{p}\cdot py(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}(\dfrac{d}{dt}y(\tau))d\tau=y(t)-y(-\infty)\neq y(t) \end{cases}$$

4、传输算子（可作为系统的数学模型）

$$r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)=H(p)e(t)$$

其中：$r(t)$为在激励为$e(t)$时的响应

2.2 其他的各种响应

一、零输入响应 $r_{zi}(t)$ 和零状态响应 $r_{zs}(t)$

1、系统的初始条件

$$r(0_-)=r_{zi}(0_-)+r_{zs}(0_-)=r_{zi}(0_-)\text{：只由系统的初始储能决定}$$
$$r(0_+)=r_{zi}(0_+)+r_{zs}(0_+)\quad\text{：由系统的初始储能、外加激励共同决定}$$

2、零输入响应（也是由系统的齐次方程得来）

a) 解的形式

$$r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$$

b) 与齐次解的区别（解的形式完全一样）

$$\text{齐次解的系数}A_i\quad\text{：由系统的}0_+\text{初始条件决定}$$
$$\text{零输入响应的系数}A_{zik}\text{：由系统的}0\_\text{起始状态决定}$$

3、零状态响应（由系统方程得来）

a) 解的形式

$$r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+B(t)$$

4、零输入响应、零状态响应与自由响应、强迫响应的关系

$$r(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{\alpha_k t}+B(t)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}+\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+B(t)$$

- 零输入响应：自由响应的一部分
- 零状态响应：自由响应的剩余部分+强迫响应

$$\text{系统完全响应为：}\quad i(t)=i_{zi}(t)+i_{zs}(t)$$

$$i(t)=\underbrace{(-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{2}{15}e^{-5t})}_{\text{零输入}}+\underbrace{\frac{8}{3}e^{-2t}-\frac{4}{15}e^{-5t}+\frac{8}{5}}_{\text{零状态}}$$

$$=\underbrace{\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{2}{15}e^{-5t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{8}{5}}_{\text{强迫响应}}\qquad =\underbrace{\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{2}{15}e^{-5t}}_{\text{瞬态响应}}+\underbrace{\frac{8}{5}}_{\text{稳态响应}}$$

二、瞬态响应、稳态响应

$$\text{瞬态响应：}t\to\infty\text{时趋于零}$$
$$\text{稳态响应：}t\to\infty\text{时保留下来}$$

三、冲激响应 $h(t)$ 与阶跃响应 $g(t)$

1、定义：输入分别为~时，对应的零状态响应

2、二者关系（积分微分的关系）

3、求法（再看笔记，不是常规求法）

2.3 卷积

一、基本概念

1、卷积的由来

任意信号可以这么表示：$e(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

将它通过冲激响应为$h(t)$的LTI系统后得到的响应为$r(t)=H[e(t)]=$

$H[\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)H[\delta(t-\tau)]d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau\triangleq e(t)*h(t)$

2、卷积的定义

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

二、卷积的计算

1、图解法

2、直接计算积分法

三、卷积的性质

1、代数性质

(1)交换律：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

(2)分配律：$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

(3)结合律:$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

2、微分与积分

(1)$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{d}{dt}f_2(t)=\frac{d}{dt}f_1(t)*f_2(t)$

(2)$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]d\lambda=f_1(t)*(\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda)=(\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda)*f_2(\lambda)$

3、与奇异函数的卷积

a) 与冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t) \qquad f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

b) 与冲激偶（微分器）的卷积

$f(t)*\delta'(\mathrm{t})=f'(t)$

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$$

c) 与阶跃函数（积分器）的卷积

d) 推广: $f(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=f^{(k)}(t-t_0)$

- 当 K>0 时，表示导数阶次；当 K<0 时，为重积分的次数

第三章　傅里叶变换

3.1 周期信号的傅里叶级数分析

一、基本概念

1、周期信号的功率特性-----帕赛瓦尔定理

- 帕赛瓦尔定理：周期信号的平均功率等于傅里叶级数展开各谐波分量有效值的平方和，即时域与频域能量守恒，即

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

二、三角函数形式的傅里叶级数

1、周期函数展开为傅里叶级数的条件-----狄里赫利条件

在一个周期内，满足下面的条件

(1)信号是绝对可积的，即：$\int_{t_0}^{t_0+T_1}|f(t)|dt < \infty$

(2)信号有有限个极值点和有限个一类间断点

2、形式

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

其中：

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1},\ a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)dt,\quad \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T_1}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)dt \\ b_n = \dfrac{2}{T_1}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt \end{cases}$$

实际中，有限项：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) + \varepsilon_n(N)$$

3、另一形式

a) 由来：上式的同次谐波进行合并

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

b) 形式

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

4、信号的单边谱

- 振幅频谱：c_n（代表各次谐波的幅值）
- 相位频谱：φ_n（代表各次谐波的初始相位）

三、指数形式的傅里叶级数

1、形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \qquad \text{其中：} F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

2、系数与三角形式的关系

$$\begin{cases}F_0=a_0=c_0=d_0\\ F_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=|F_n|e^{j\varphi_n} \qquad \text{其中：}|F_n|=|F_{-n}|=\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{1}{2}d_n\\ F_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=|F_{-n}|e^{-j\varphi_n}\end{cases}$$

$$\begin{cases}|F_n|+|F_{-n}|=c_n\\ F_n+F_{-n}=a_n\\ j(F_n-F_{-n})=b_n\end{cases}$$

3、信号的双边谱

a) 概念（略）

b) 与单边谱的比较

$$F_n=\frac{1}{2}c_n e^{j\varphi_n}$$

- 单边：每一谱线代表某一分量的幅度；
- 双边：谱线在原点两侧对称分布，且谱线长度减小一半（每一谱线正负各一半）。

四、函数对称性和系数的关系

1、概述：对于实函数且其波形满足某种对称性，其傅里叶级数中有些项将不出现

- 几种对称类型：偶函数、奇函数、奇谐函数

2、偶函数

$$\begin{cases}a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega_1 tdt=2F_n\\ b_n=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_n=d_n=a_n=2F_n\\ \varphi_n=0,\quad \theta_n=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_n=F_{-n}=\frac{a_n}{2}\end{cases}$$

3、奇函数

$$\begin{cases}a_0=a_n=0\\ b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega_1 tdt\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_n=d_n=b_n=2jF_n\\ \varphi_n=-\frac{\pi}{2},\quad \theta_n=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_n=-F_{-n}=-\frac{1}{2}jb_n\end{cases}$$

4、奇谐函数（半波对称函数）

a) 定义：$f(t)=-f(t\pm\frac{T_1}{2})$。即波形沿时间轴平移半个周期并相对于该轴上下翻转后，波形并不发生变化

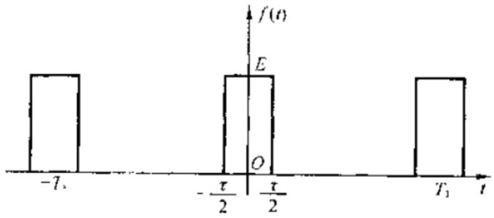
b) 系数

$$a_0 = 0$$

$$\begin{cases} n\text{为偶数时}\, a_n = b_n = 0 \\ n\text{为奇数时}\, a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt,\ b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t dt \end{cases}$$

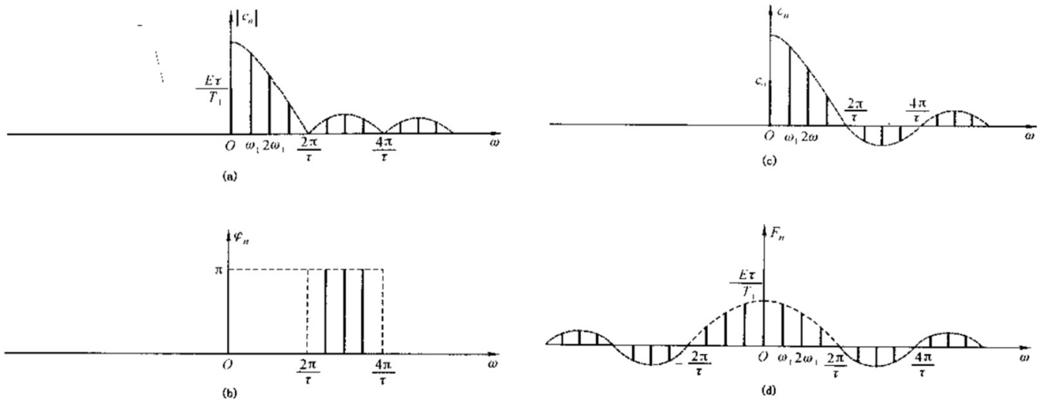
五、典型周期信号的傅里叶级数

1、周期矩形脉冲信号



三角形式：$f(t) = \dfrac{E\tau}{T_1} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2E\tau}{T_1} Sa(\dfrac{n\omega_1\tau}{2}) \cos n\omega_1 t$

指数形式：$f(t) = \dfrac{E\tau}{T_1} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\dfrac{n\omega_1\tau}{2}) e^{jn\omega_1 t}$



a) 频谱特点:

(1)离散性：谱线是离散的，谱线间隔为$\omega_1 = 2\pi/T_1$，周期越大，谱线越靠近

(2)谐波性：各次谐波分量的频率都是基波频率的整数倍

(3)包络性：各谱线的幅度包络线按抽样函数$Sa(n\omega_1\tau/2)$的规律变化

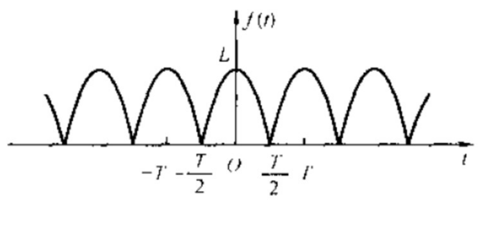
(4)收敛性：谱线幅度随着$n \to \infty$而衰减到零

(5)占有带宽：周期矩形脉冲信号包含无穷多条谱线，但它的能量主要集中在第一零点内，

把$\omega = 0 \sim 2\pi/\tau$这段频率范围称为矩形脉冲信号的占有带宽，$B_f = \dfrac{1}{\tau}$

信号的占有带宽B与时宽τ成反比。

2、周期全波余弦信号（略）



周期全波余弦信号的频谱包含直流分量及基波和各次谐波分量，谐波的幅度以$1/n^2$的规律收敛

3.2 傅里叶变换

一、频谱密度

1、引入原因

非周期信号相当于$T_1\to\infty$的周期信号，此时

(1)谱线间隔$\omega_1=2\pi/T_1\to 0$，由离散频谱变成连续频谱

(2)各个谱线的幅度谱$F_n=\dfrac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt\to 0$，但是$F_n\cdot T_1$可能是有限值

从而无法用傅里叶级数描述非周期信号的频域特性

2、定义

$$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}F_n\cdot T_1$$

$$(1)=\lim_{\omega_1\to 0}\frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}=\lim_{f_1\to 0}\frac{F(n\omega_1)}{f_1}$$ ：叫频谱密度的原因

$$(2)=\lim_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$ ：傅里叶变换的推导

因为$T_1\to\infty\Rightarrow\omega_1\to d\omega, n\omega_1\to\omega$

二、傅里叶变换

1、可以傅里叶变换的条件：满足狄里赫利条件，$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty$

2、定义

正变换：$F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

反变换：$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

3、频谱密度函数的性质

通常是复函数：$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

对于$\left|F(\omega)\right|$

(1)是频率的连续函数，且$f(t)$为实函数时，是偶函数

(2)幅度代表信号中各频率分量的幅度相对大小，实际振幅为无穷小量

对于$\varphi(\omega)$

(1)是频率的连续函数，且为奇函数

3.3 傅里叶变换的性质

1、简单特性

(1)对称性：$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

推论：若$f(t)$的频谱为$F(\omega)$，那么形状为$F(t)$的波形，其频谱必为$f(\omega)$

(2)线性：$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

(3)尺度变换特性：$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a}) \quad a \neq 0$

信号在时域压缩，等效于在频域扩展，反之亦然；

信号在时域反褶，等效于在频率域反褶

2、时移与频移

(1)时移特性：$f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$

信号的幅度谱是由信号的波形决定的，与信号在时间轴上出现的位置无关

信号的相位谱则是由二者共同决定的

(2)频移特性：$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

$$\begin{cases} f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)] \\ f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2j}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)] \end{cases}$$

3、微分与积分

微分：$\begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \\ \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) \leftrightarrow (-jt)^n f(t) \end{cases}$ 积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

4、奇偶虚实性

a) 反褶和共轭的性质

$$\text{无论}f(t)\text{是实数还是虚数}, \begin{cases} f(-t) \leftrightarrow F(-\omega) \\ f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega) \end{cases} \Rightarrow f^*(-t) \leftrightarrow F^*(\omega)$$

b) 由 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$ 可以推出

	$f(t)$是偶函数	$f(t)$是奇函数
$f(t)$是实函数	$F(\omega)$实偶	$F(\omega)$虚奇
$f(t)$是虚函数	$F(\omega)$虚偶	$F(\omega)$实奇

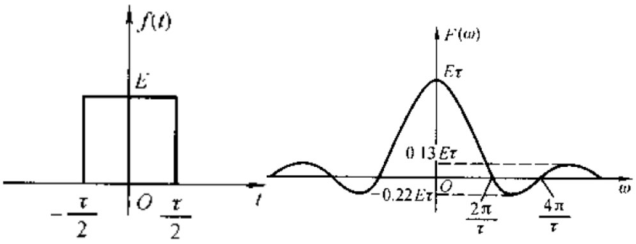
5、卷积定理 $\begin{cases} f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega) \\ f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \end{cases}$

3.4 不同类型信号的傅里叶变换

一、典型非周期信号的傅里叶变换（查表）

1、特别说明门函数的傅里叶变换

a) 时域波形和频域频谱



b) 与矩形脉冲的频谱对比

相同点
- 包络形状相同
- 占有带宽相同

不同点
- 一个是离散谱，一个是连续谱
- $F(\omega)$ 系数是 F_n 的 T 倍

二、周期信号的傅里叶变换

1、正弦和余弦

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]\leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]\leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

2、一般周期信号

$Step1$：展成傅里叶级数。$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$

$Step2$：两边做傅里叶变换。$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}]e^{-j\omega t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\int_{-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_1 t}e^{-j\omega t}dt$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

- 每个冲激的强度为对应傅里叶系数的 2pi 倍

三、抽样信号的傅里叶变换

1、抽样

a) 时域中的理想抽样（另外两种见通信原理）

$$\begin{cases}\text{抽样信号：} f_s(t)=f(t)\cdot p(t) & \text{（注意抽样信号和样值序列分别指谁）}\\ \text{样值序列的频谱：} P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s) & \text{其中，} \omega_s=2\pi f_s\text{，} P_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}p(t)e^{-jn\omega_s t}dt\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{抽样信号的频谱：} F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega-n\omega_s)$$

b) 频域中的理想抽样（与上面的效果类似）

2、抽样定理（时域抽样定理、频域抽样定理）

第四章　拉普拉斯变换

4.1 拉普拉斯变换的定义

一、引入

1、傅里叶变换的不足：要求信号绝对可积，而有些常用的信号不满足该条件，如

$$e^{at}(a>0)$$

2、由傅里叶变换到拉普拉斯变换

当$f(t)$不满足绝对可积条件时，乘上衰减因子$e^{-\sigma t}(\sigma \in R)$，

可以使$f(t)e^{-\sigma t}$绝对可积，

而$F[f(t)e^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

二、拉普拉斯变换

1、定义

a)　双边拉氏变换

$$\begin{cases} F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}ds \end{cases}$$

s称复频率，$F_b(s)$称信号的复频谱

b)　单边拉氏变换

$f(t)$为因果信号

$$\begin{cases} F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}ds \end{cases}$$

2、收敛域

a)　定义：使$f(t)e^{-\sigma t}$绝对可积的σ的取值范围

b)　指数阶函数

满足$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t}=0\ \ (\sigma>\sigma_0)$的函数

3、常用函数的拉氏变换（表~）

三、拉式变换的性质（单边？？）

1、简单特性

$$(1)\text{线性：}k_1f_1(t)+k_2f_2(t)\leftrightarrow k_1F_1(s)+k_2F_2(s)$$

$$(2)\text{尺度变换：}f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})\qquad a>0$$

2、时移与复频移

$$(1)\text{时移特性：}f(t-t_0)u(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}F(s)$$

$$(2)\text{复频移特性：}f(t)e^{-at}\leftrightarrow F(s+a)$$

3、微分与积分

$$\text{微分：}\begin{cases}\dfrac{d}{dt}f(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0\_)\\ \end{cases}\qquad \text{积分：}\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow\dfrac{F(s)}{s}+\dfrac{f^{(-1)}(0\_)}{s}\\ \text{其中：}f^{(-1)}(0\_)=\int_{-\infty}^{0}f(\tau)d\tau\end{cases}$$

4、初值定理和终值定理

（1）初值定理：$f(0_+)=\lim\limits_{t\to0_+}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$

前提：$f(t)$及其导数$f'(t)$存在；$f(t)$中不能含有冲激函数

（2）终值定理：$f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to0}sF(s)$

前提：$f(t)$及其导数$f'(t)$存在；$sF(s)$的所有极点都位于左半平面

5、卷积定理

$$\begin{cases}f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)F_2(s)\\ f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)\end{cases}$$

四、拉式反变换-----部分分式分解法（见笔记）

4.2 拉普拉斯变换的应用

一、拉式变换分析电路

1、s 域元件模型

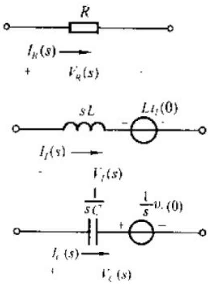
时域关系	s 域关系
$v_R(t)=Ri_R(t)$	$V_R(s)=RI_R(s)$
$v_L(t)=L\dfrac{d}{dt}i_L(t)$	$V_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0)$
$v_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(\tau)d\tau$	$V_C(s)=\dfrac{1}{sC}I_C(s)+\dfrac{v_C(0)}{s}$

2、s 域元件串联模型

$V_R(s)=RI_R(s)$

$V_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0)$

$V_C(s)=\dfrac{1}{sC}I_C(s)+\dfrac{v_C(0)}{s}$

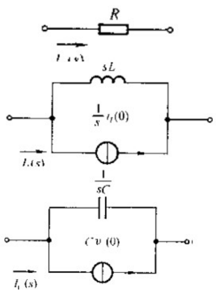


3、s 域元件并联模型

$I_R(s)=\dfrac{1}{R}V_R(s)$

$I_L(s)=\dfrac{1}{sL}V_L(s)+\dfrac{1}{s}i_L(0)$

$I_C(s)=sCV_C(s)-Cv_C(0)$



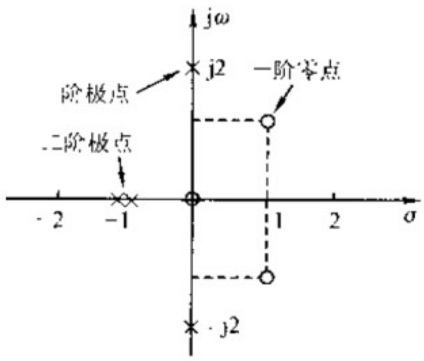
二、系统函数与零极图

1、系统函数（注意：是零状态的前提下）

2、零极图

a)　画法

极点用 × 表示，
零点用 ∘ 表示。
有几阶就画几次



b)　系统函数的零极点分布的特点

- 对实轴成镜像对称
- 极点和零点的数目相等，只是可能有若干极点或零点出现在 s 平面的无穷远处

c)　输入和输出拉式变换与自由响应、强迫响应的关系

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}+\sum_{k=1}^{v}\frac{K_k}{s-p_k}$$

- 自由响应的极点由系统函数的极点组成
- 强迫响应的极点由激励函数的极点组成

三、极点分布对稳定性的影响

- 稳定：极点均位于左半开平面
- 临界稳定：除了位于左半开平面外，虚轴或者原点有一阶极点（二阶以上都不行）
- 不稳定：存在极点位于右半开平面

四、正弦激励的稳态响应

激励为：$e(t)=E_m\sin(\omega_0 t)$，则稳态时的为$r_{ss}(t)=E_m H_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$

其中：$H(s)\big|_{s=j\omega_0}=H(j\omega_0)=H_0 e^{j\varphi_0}$

五、零极点对于时域波形的影响

1、极点对于时域波形的影响（影响波形）

a) 一阶极点的影响

a、极点为实数

(1)位于原点：$H(s)=\dfrac{1}{s}\Rightarrow h(t)=u(t)$

(2)实轴：$H(s)=\dfrac{1}{s\pm a}\Rightarrow h(t)=e^{\mp at}$ $\Rightarrow$指数函数

b、极点为共轭复根

(1)虚轴：$H(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\Rightarrow h(t)=\sin\omega t$ $\Rightarrow$等幅振荡

(2)左半平面：$H(s)=\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\Rightarrow h(t)=e^{-at}\sin\omega t$ $\Rightarrow$衰减振荡

(3)右半平面：$H(s)=\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\Rightarrow h(t)=e^{at}\sin\omega t$ $\Rightarrow$增幅振荡

b) 二阶以上极点的影响：相当于在上面的基础上乘t^n（以二阶为例）

a、极点为实数

(1)位于原点：$H(s)=\dfrac{1}{s^2}\Rightarrow h(t)=tu(t)$

(2)实轴：$H(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2}\Rightarrow h(t)=te^{-at}u(t)$

b、极点为共轭复根

(1)虚轴：$H(s)=\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\Rightarrow h(t)=t\sin\omega t u(t)$

2、零点对时域波形的影响：没有影响，只影响幅度和相位

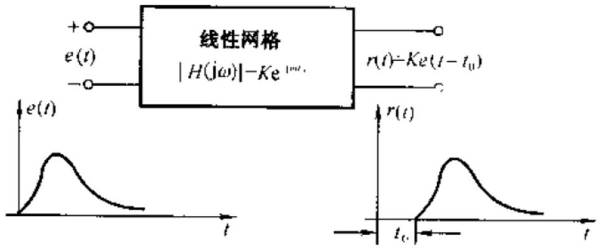
第五章　傅里叶变换理论的应用

一、利用系统函数求响应（略）

二、无失真传输

1、概念：响应信号相对于激励信号，只是大小与出现的时间不同，而无波形上的变化

$$y(t)=Kx(t-t_0)$$



2、无失真传输条件

a)　频域条件

$$H(j\omega)=Ke^{-j\omega t_0} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|=K \\ \varphi(\omega)=-\omega t_0 \end{cases}$$

- 即：幅频特性是常数，相频特性是一过原点的直线

b)　时域条件

$$h(t)=K\delta(t-t_0)$$

3、信号失真原因与类型

a)　信号失真原因

- 幅度失真：系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的衰减
- 相位失真：系统对信号中各频率分量产生的相移不与频率成正比

b)　失真类型

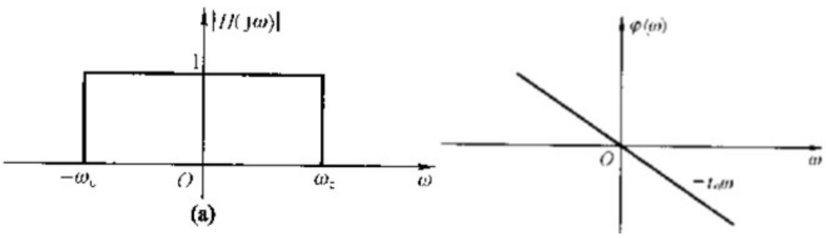
- 线性失真：响应中没有出现原输入信号中所没有的新的频率分量
- 非线性失真：响应中出现了原输入信号中所没有的新的频率分量

三、理想低通滤波器

1、定义：

- 允许低于截止频率的所有频率分量无失真地通过
- 对于高于截止频率的所有频率分量完全抑制

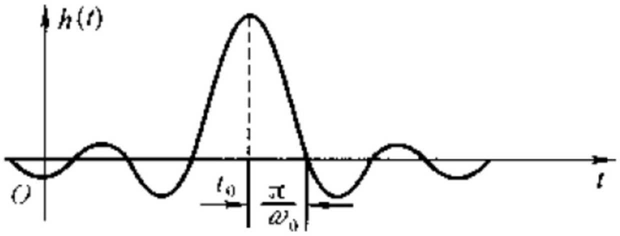
2、理想 LPF 的频率特性



- ω_c：截止频率
- t_0：响应相对于激励的延迟时间

3、理想 LPF 的冲激响应

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)}$$

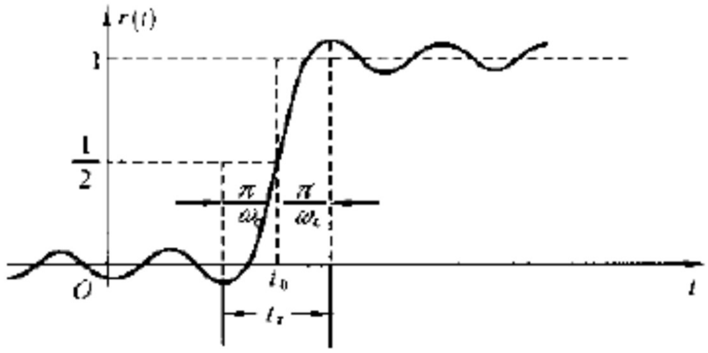


- 可以看出，在 t<0 时即有相应。所以是非因果系统，物理上不可实现

4、理想 LPF 的阶跃响应

a) 阶跃响应

$$r(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$$



b) 参数定义——上升时间：输出由最小值到最大值所需时间

$$t_r=\frac{2\pi}{\omega_c}=\frac{1}{B}\qquad B\text{为滤波器带宽}$$

- 阶跃响应的上升时间 t_r 与系统的截止频率成反比
- 阶跃响应有一个时延 t_0

c) 吉布斯现象

- 对于具有不连续点（跳变点）的波形，所取级数项数越多，近似波形的方均误差虽可减少，但在跳变点处的峰起（上冲）值不能减小
- 此峰值随项数增多向跳变点靠近，但是峰起值趋近于跳变值的 9%

四、系统的物理可实现性

1、时域准则——因果条件

$$h(t)=0,t<0$$

2、频域准则——佩利-维纳准则（必要条件）

$$设\left|H(j\omega)\right|满足平方可积条件，即\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega<\infty$$

$$若\left|H(j\omega)\right|物理可实现，其必需满足\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^2}d\omega<\infty$$

a) 结论

- 不允许网络特性在一频率内为零（否则不满足频域准则）
- 限制幅度特性的衰减速度

b) 满足该条件的还不一定物理可实现，需要找适当的相位函数与之构成物理可实现系统

五、抽样并恢复连续时间信号

1、理想抽样

a) 抽样和恢复的过程

$$抽样信号：f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$恢复时采用理想LPF：h(t)=T_s\cdot\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)\Leftrightarrow H(j\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$恢复后的信号：f(t)=f_s(t)*h(t)=T_s\cdot\frac{\omega_c}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)Sa(\omega_c(t-nT_s))$$

$$若选\omega_s=2\omega_m，\omega_c=\omega_m，则f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)Sa(\omega_c(t-nT_s))$$

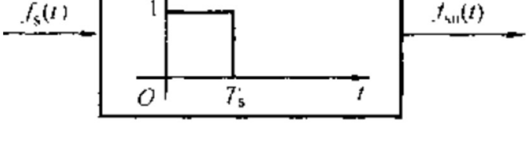
b) 结论（时域角度分析，抽样定理是频域角度）

$$当\omega_s>2\omega_m时，选\omega_m<\omega_c<\omega_s-\omega_m即可恢复$$

$$当\omega_s<2\omega_m时，使Sa波形相隔较远，无法恢复$$

2、零阶抽样保持

a) 概念：抽样瞬间，脉冲序列 $p(t)$ 对 $f(t)$ 抽样，保持并直到下一个抽样瞬时为止。



b) 抽样和恢复的过程

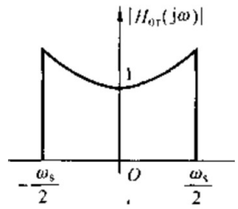
抽样信号：$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

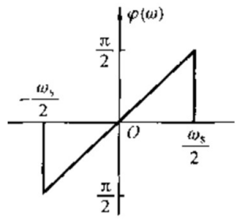
恢复时采用零阶抽样保持：$h_0(t)=u(t)-u(t-T_s) \Leftrightarrow H_0(\omega)=T_s Sa(\frac{\omega T_s}{2})e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$

恢复后的信号：$F_{s0}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega-n\omega_s)Sa(\frac{\omega T_s}{2})e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$

- 只这样会出现失真，需要加补偿滤波器

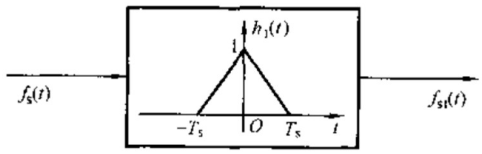
补偿滤波器：$H_{0r}(j\omega)=\begin{cases} \dfrac{e^{j\frac{\omega T_s}{2}}}{Sa(\frac{\omega T_s}{2})}, & |\omega|\le \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega|>\dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$





3、一阶抽样保持

a) 概念：将各样本值用直线连接



b) 抽样和恢复的过程（略）

第七章　离散时间系统的时域分析

7.1　离散时间信号

一、基本概念

1、离散时间信号

a)　定义：只在某些规定的离散瞬时给出函数值，在其他时间，函数没有定义

b)　表示方法：表达式、画图、逐个列出

2、离散时间信号的运算

a)　序列间相加、相乘

b)　移位

c)　反褶

d)　尺度展缩

$$(1)z(n)=x(an)\text{：压缩，去除某些点}$$

$$(2)z(n)=x(\frac{n}{a})\text{：扩展，补零}$$

e)　差分（对应于微分）与累加（对应于积分）

$$(1)\text{前向差分：}\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$$

$$(2)\text{后向差分：}\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$$

$$(3)\text{累加：}z(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)$$

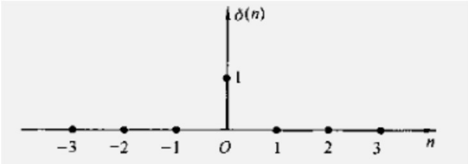
3、序列的能量

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$$

二、典型的序列

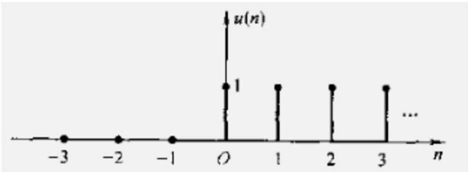
1、单位样值序列（单位冲激，脉冲，取样）

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$



2、单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

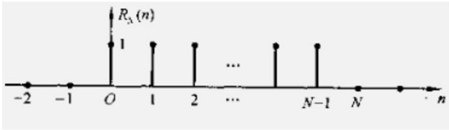


- 二者关系

$$\begin{cases}u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)\\ \delta(n)=u(n)-u(n-1)=\nabla u(n)\end{cases}$$

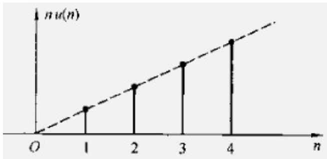
3、矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$
$$=u(n)-u(n-N)$$



4、斜变序列

$$x(n)=nu(n)$$



5、指数序列

$$x(n)=a^n u(n)$$

$$\begin{cases}|a|>1\text{：发散}\\ |a|<1\text{：收敛}\end{cases}\qquad \begin{cases}a>0\text{：序列取正}\\ a<0\text{：序列摆动}\end{cases}$$

6、复指数序列

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]}$$

$$\begin{cases}|x(n)|=1\\ \arg[x(n)]=\omega_0 n\end{cases}$$

7、正弦型序列

$$x(n)=\sin(n\omega_0)$$

正弦型序列的周期性：$N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}k$，$k$为整数

(1) $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为整数时：有周期性，最小正周期为$N=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

(2) $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$不是整数但是有理数时：有周期性

(3) $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$不是整数但是无理数时：没有周期性

三、离散时间信号的分解---单位样值之和

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

7.2 离散时间系统

一、基本概念

1、表示方法：差分方程、框图

2、基本运算单元：延时、乘系数、相加

3、差分方程的求法：递推法、时域经典求解方法（见笔记）、分别求零输入和零状态、Z 变换、卷积法

二、系统的分类

1、线性系统

a) 定义：$\mathrm{T}\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=a\mathrm{T}\left[x_1(n)\right]+b\mathrm{T}\left[x_2(n)\right]$

b) 易错点：$y(n)=5x(n)+3$ 不是线性系统

2、非移变系统（时不变）

a) 定义：$y(n-k)=\mathrm{T}\left[x(n-k)\right]$

3、稳定系统

a) 定义：$\left|x(n)\right|<C<\infty$ 时 $\left|y(n)\right|<C<\infty$

b) 另一判定：绝对可和 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$

c) 因果系统稳定性的判定：收敛域包含单位圆（或所有极点都在单位圆内）

4、因果系统

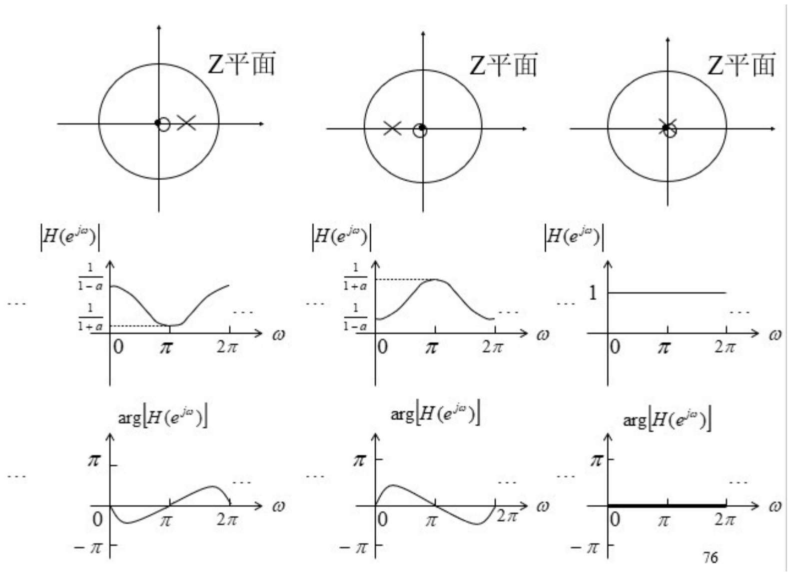
a) 定义：系统的输出只与当前和过去的输入有关，和未来的无关

b) 其他判定：$n<0$ 时，$h(n)=0$ 或收敛域为 $|z|>R$ 形式的

5、物理可实现系统：因果+稳定

三、离散时间系统的单位样值响应（略）

四、系统频率特性的几何确定方法（粗略地手画幅频特性和相频特性）



7.3 卷积和

一、卷积和

1、定义

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

2、卷积和的性质

- 交换律、分配率、结合律
- 筛选性:

$$\begin{cases}x(n)*\delta(n)=x(n)\\x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)\end{cases}$$

3、卷积和的计算（略）

二、解/反卷积

已知：$y(n)=h(n)*x(n)$，求$h(n)$或$x(n)$

由$y(n)=\sum\limits_{m=0}^{n}x(m)h(n-m)$可得
$$\begin{bmatrix}y(0)\\y(1)\\\vdots\\y(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(0)&0&\cdots&0\\h(1)&h(0)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\h(n)&h(n-1)&\cdots&h(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\\vdots\\x(n)\end{bmatrix}$$

从而可得
$$\begin{cases}x(0)=y(0)/h(0)\\x(1)=\left[y(1)-x(0)h(1)\right]/h(0)\\x(2)=\left[y(2)-x(0)h(2)-x(1)h(1)\right]/h(0)\\\cdots\\x(n)=\left[y(n)-\sum\limits_{m=0}^{n-1}x(m)h(n-m)\right]\Big/h(0)\end{cases}$$

同理：$h(n)=\left[y(n)-\sum\limits_{m=0}^{n-1}h(m)x(n-m)\right]\Big/x(0)$

第八章　z 变换

8.1　z 变换的基本概念

一、z 变换的引入

1、引入：由抽样信号的拉氏变换引出 z 变换

2、引入过程：

$$\begin{cases} \text{理想抽样信号：} x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \\ \text{它的拉氏变换：} X_s(s) = \int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT} \end{cases}$$

$$\text{令} z = e^{sT} \text{得：} X(z) = X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

$$\text{令} T = 1 \text{得：} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

二、z 变换的基本概念

1、z 变换定义

$$\begin{cases} \text{单边} z \text{变换：} X(z) = Z\left[x(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ \text{双边} z \text{变换：} X(z) = Z\left[x(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \end{cases}$$

若$x(n)$为因果序列，则二者等同

2、z 变换的收敛域 RoC

a)　收敛域的重要性

- 单边 z 变换没关系，序列与变换式唯一对应
- 双边 z 变换：在不同收敛域下，不同序列可能对应同一变换式

$$x_1(n) = a^n u(n) \qquad \Rightarrow X_1(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$x_2(n) = -a^n u(-n-1) \quad \Rightarrow X_2(z) = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

b)　级数收敛域的求法：比值判别法、根值判别法

c)　几种特殊序列的收敛域

$$(1)\text{有限长序列}: X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad \begin{cases} n_1 < 0, n_2 > 0 \text{时}: 0 < |z| < \infty \\ n_1 \ge 0, n_2 > 0 \text{时}: |z| > 0 \\ n_1 < 0, n_2 \le 0 \text{时}: |z| < \infty \end{cases}$$

$$(2)\text{右边序列：} n < n_1 \text{时} x(n) = 0 \qquad \begin{cases} n_1 < 0 \text{时：} R_{x1} < |z| < \infty \\ n_1 \ge 0 \text{时：} R_{x1} < |z| \\ \text{其中：} R_{x1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} \end{cases}$$

$$(3)\text{左边序列：}n > n_2\text{时}x(n)=0 \qquad \begin{cases} n_2 > 0\text{时}:0<|z|<R_{x2} \\ n_2 \le 0\text{时}:|z|<R_{x2} \\ \text{其中：}R_{x2}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)|}} \end{cases}$$

(4)双边序列：拆分成左边序列和右边序列，再取交集（可能没有交集）

3、典型序列的 z 变换（略）

4、z 反变换

a) 定义

$$x(n)=Z^{-1}\left[X(z)\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

C是包围$X(z)z^{n-1}$所有极点的逆时针闭合积分路线

通常选收敛域内以原点为中心的圆

b) 幂级数展开法计算 z 反变换：展开成幂级数，根据 z 变换的定义求

$$(1)x(n)\text{为右边序列：}X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad |z|>1$$

$$\text{由长除法得}X(z)=1+4z^{-1}+7z^{-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n)=3(n+1)u(n)$$

$$(2)x(n)\text{为左边序列：}X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} \qquad |z|<1$$

$$\text{由长除法得}X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)z^{n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(3n+1)z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n)=-(3n+1)u(-n-1)$$

$$(3)x(n)\text{为双边序列：}X(z)=\frac{2z}{z^2+4z+3} \qquad 1<|z|<3$$

$$X(z)=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+3}\Rightarrow\text{拆分为}\begin{cases} X_1(z)=\dfrac{z}{z+1} & |z|>1 \\ X_2(z)=\dfrac{-z}{z+3} & |z|<3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} X_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} \\ X_2(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-3)^{-n}z^{n}=\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}(-3)^n z^{-n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(n)=(-1)^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$$

c) 部分分式展开法求 z 反变换：展开成$\frac{z}{z-z_m}$等常用变换对，再依次反变换

$Step1:$两端除以z

$Step2:$之后因式分解得$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j}{(z-z_i)^j}$,并确定系数

(1)一阶极点：$\frac{A_m}{z-z_m}$项　　其中$A_m=(z-z_m)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=z_m}$

(2)重极点：$\frac{B_j}{(z-z)^j}$项　　其中$B_j=\frac{1}{(s-j)!}\left[\frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}}(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}$

$Step3$：两端乘z进行反变换

常用结论：$\frac{z}{z-z_m}\Leftrightarrow\begin{cases}z_m^n u(n) & |z|>|z_m| \\ -z_m^n u(-n-1) & |z|<|z_m|\end{cases}$

8.2　z 变换与拉普拉斯变换的关系

一、z 变换与拉普拉斯变换的关系

1、映射关系

$$z = e^{sT} \qquad T\text{是序列的时间间隔，重复频率为}\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

2、两个坐标系的对应关系

a)　推导

$$\text{两个变换中的变量：}\begin{cases} s = \sigma + j\omega \\ z = re^{j\theta} \end{cases}$$

$$\text{映射关系：} z = e^{sT}$$

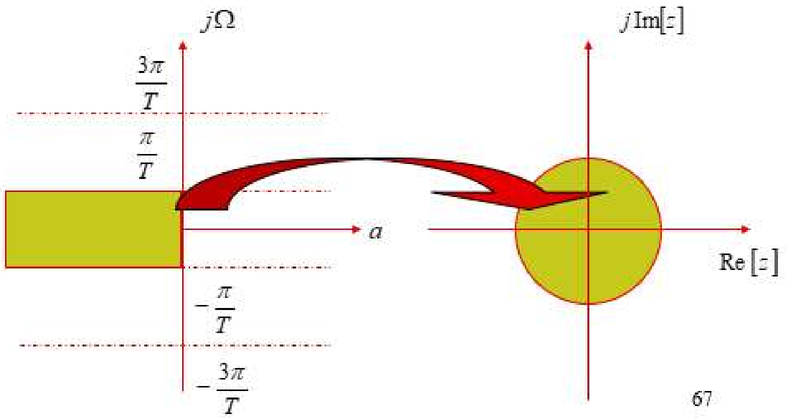
$$\text{上面的关系联立得} \Rightarrow \begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T \end{cases}$$

b)　平行于虚轴的映射

s 平面	z 平面
虚轴	单位圆
右半平面	单位圆外
左半平面	单位圆内

c)　平行于实轴的映射

s 平面	z 平面
实轴	正实轴
平行于实轴的直线	正实轴绕原点旋转
$s = j\dfrac{k\omega_s}{2}(k \in Z)$	负实轴

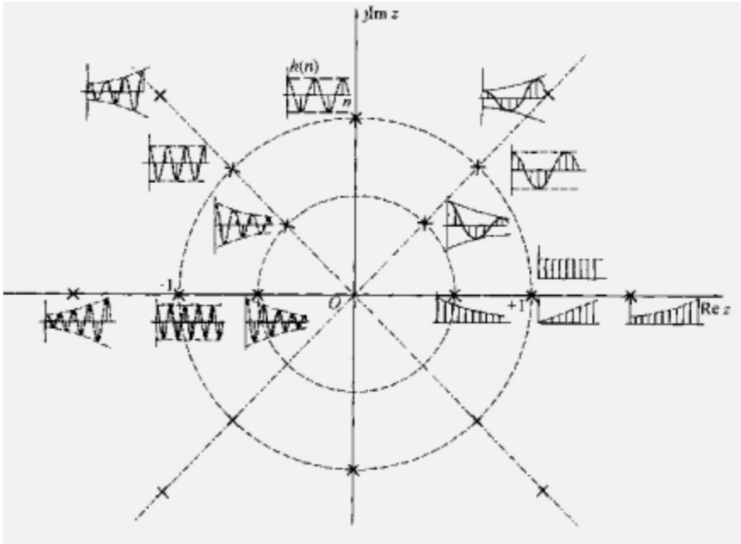


d)　注意点：不是单值映射

3、表达式的关系

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i t} u(t) & \Rightarrow L[\hat{x}(t)] = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{A_i}{s - p_i} \\ x(nT) = \sum_{i=1}^{N} x_i(nT) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i nT} u(nT) & \Rightarrow Z[x(nT)] = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{A_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}} \end{cases}$$

二、零极点对系统特性的影响（根据上面的关系）



三、零极点对稳定性的影响

1、稳定性定义：单位样值响应绝对可和

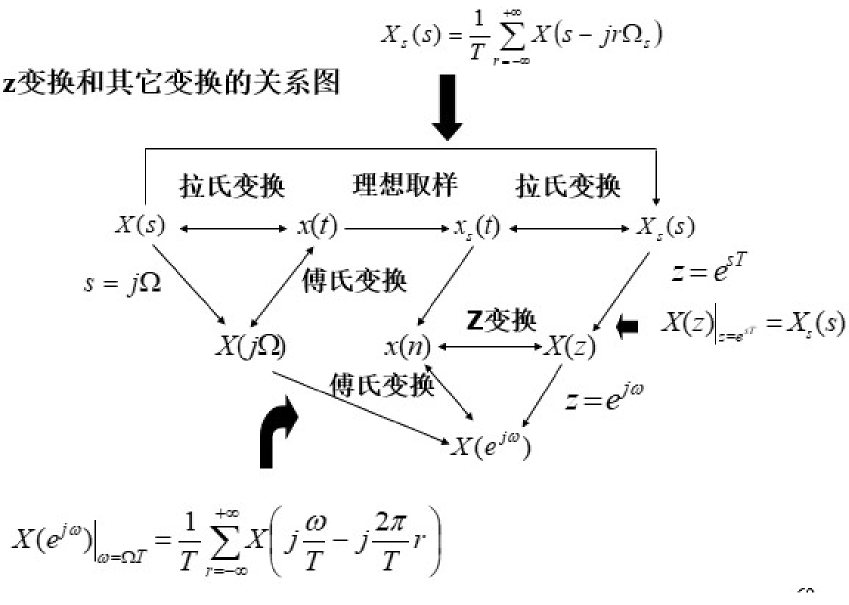
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$$

2、稳定性的一般判定

- 稳定：所有极点都在单位圆内
- 临界稳定：极点除了在单位圆内，还有在单位圆上（一阶？）
- 不稳定：存在极点出现在单位圆外

3、因果系统的稳定性判定：收敛域包含单位圆（因果系统收敛域是$\left|z\right|>a$ 型的）

四、z 变换与其他变换的关系



8.3 z 变换的基本性质

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

1、简单特性

(1)线性：

(2)尺度变换：$a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right) \qquad (R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2})$

2、时移与复频移

(1)时移特性：

(2)复频移特性：

3、微分与积分

微分：$\begin{cases} nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}X(z) \\ \end{cases}$ 积分：$\begin{cases} \end{cases}$

4、初值定理和终值定理

(1)初值定理：若$x(n)$是因果序列，则$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$

(2)终值定理：若$x(n)$是因果序列，则$x(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}\left[(z-1)X(z)\right]$

5、卷积定理

若$x(n) \leftrightarrow X(z)(R_{x1} < |z| < R_{x2})$，$h(n) \leftrightarrow H(z)(R_{h1} < |z| < R_{h2})$

$\begin{cases} x(n)*h(n) \leftrightarrow X(z)H(z) \qquad \max\left[R_{x1}, R_{h1}\right] < |z| < \min\left[R_{x2}, R_{h2}\right] \\ \text{频域没写} \end{cases}$