Чудов Богдан А-17-22
Лабораторная работа №3
Вариант 16

Цель работы. Применить на практике простейшие численные методы вычисления интегралов и производных. Исследовать поведение погрешности методов при измельчении шага. Познакомиться с понятиями порядка точности и обусловленности (плохой/хорошей) задачи и их отражением в расчетах. Вычислить определенный интеграл с заданной точностью.

Задача 1. Найти приближенные значения интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и производной $f'(a)$ используя указанные в индивидуальном порядке методы. Организовать серию расчетов с шагами $h_k=(b-a)/10^k;k=(1..15)$. Сделать выводы о порядке точности и обусловленности методов.
Исходные данные: $f(x)=e^{-x}(x^2-x);a=0;b=3;$квадратурная формула — трапеций; формула численного дифференцирования — левая.
1. $\int_0^3 e^{-x}(x^2-x)=\left.\frac{-(x^2+x+1)}{e^x}\right|_0^3\approx 0{,}35276811121776863$

$$\int_0^3 e^{-x}(x^2-x)=\overset{(1)}{\int_0^3\frac{x^2dx}{e^x}}-\overset{(2)}{\int_0^3\frac{x\,dx}{e^x}}=2-17e^{-3}-1+4e^{-3}=1-13e^{-3}\approx 0{,}35276811121776863$$

$$(1)\quad \int_0^3\frac{x^2dx}{e^x}=\left\|\begin{matrix}u=x^2 & dv=e^{-x}\\ du=2x & v=-e^{-x}\end{matrix}\right\|=-x^2e^{-x}\Big|_0^3+2\overset{(2)}{\int_0^3\frac{x\,dx}{e^x}}=-9e^{-3}+2-8e^{-3}=2-17e^{-3}$$

$$(2)\quad \int_0^3\frac{x\,dx}{e^x}=\left\|\begin{matrix}u=x & dv=e^{-x}\\ du=1 & v=-e^{-x}\end{matrix}\right\|=-xe^{-x}\Big|_0^3+\int_0^3 e^{-x}dx=-3e^{-3}+\left(-e^{-x}\Big|_0^3\right)=$$

$$=-3e^{-3}-e^{-3}+1=1-4e^{-3}$$

2. $f'(a)=-(x^2-3x+1)e^{-x}\big|_0=-1$
3. Значения полученные при помощи метода трапеций и левой формулы численного дифференцирования приведены в таблице 1.

Таблица 1

Шаг h	Приближенное значение интеграла	Погрешность численного интегрирования	Приближенное значение производной	Погрешность численного дифференцирования
3e-1	0.359	7e-03	-1.8	0.8
3e-2	0.35284	7e-05	-1.06	6e-02
3e-3	0.3527688	7e-07	-1.006	6e-03
3e-4	0.352768118	7e-09	-1.0006	6e-04
3e-5	0.35276811129	7e-11	-1.00006	6e-05
3e-6	0.3527681112185	7e-13	-1.000006	6e-06
3e-7	0.352768111217776	8e-15	-1.0000006	6e-07
3e-8	0.352768111217760	9e-15	-1.00000006	6e-08
3e-9	0.35276811121770	7e-14	-1.000000006	6e-09
3e-10	-	-	-1.0000000006	6e-10
3e-11	-	-	-1.00000000006	6e-11
3e-12	-	-	-1.000000000006	6e-12
3e-13	-	-	-1.0000000000006	6e-13
3e-14	-	-	-1.00000000000006	6e-14
3e-15	-	-	-1.000000000000006	6e-15

4. Листинг программы представлен в приложении 1.
5. **Вывод по задаче 1.1 (метод трапеций):** Порядок точности формулы трапеций p = 2. По полученной таблице видно, что при уменьшении шага в 10 раз, погрешность уменьшается в ≈100 раз, что говорит о порядке точности p=2, т.к априорная оценка погрешности имеет следующую формулу: $|I-I^{(n)}| \leq \frac{M_2*(b-a)}{12}*h^2$. Однако для анализа порядка точности можно использовать не все строки, т.к после h=3e-7 погрешность начинает расти, в силу машинного эпсилон. Также наилучшая точность достигается при h=3e-7. В проведенных расчетах можно говорить о хорошей обусловленности метода, т.к при изменении шага в n раз можно ожидать изменения погрешности в n^2 раз.
6. **Вывод по задаче 1.2 (левая формула численного дифференцирования):** Порядок точности левой формулы дифференцирования p=1. По полученной таблице можно видеть что это действительно так, ведь при уменьшении шага в 10 раз, погрешность также уменьшается в ≈10 раз. Это обосновано тем, что априорная оценка погрешности имеет следующую формулу: $|f'(x)-f'_{лев}(x)| \leqslant \frac{M_2}{2}*h$.

В данном случае для анализа порядка точности можно использовать все строки таблицы. Наилучшая точность достигается при наименьшем шаге h=3e-15. В проведенных расчетах можно говорить о хорошей обусловленности метода, т.к при изменении шага в n раз можно ожидать изменения погрешности в n раз.

Задача 2. Повторить расчет интеграла из Задачи 1 с помощью квадратурной формулы Ньютона-Котеса высокого порядка точности, указанной в индивидуальном варианте. Заполнить соответствующую таблицу. Сравнить результаты с результатами Задачи 1 (с учетом порядков точности использованных формул). Сделать выводы: пользуясь результатами вычислений, показать, что расчет подтверждает порядок точности формулы Ньютона-Котеса; а также показать, в чем проявилось преимущество одной из двух квадратуры формул (из задач 1 и 2) над другой. Используя алгоритм подбора единого на всем отрезке шага интегрирования, вычислить значение интеграла из Задачи 1 с помощью той же квадратурной формулы Ньютона-Котеса высокого порядка точности с заданной в индивидуальном варианте точностью ε. Предусмотреть возврат значения шага, на котором происходит выход из расчета.

Исходные данные: $f(x)=e^{-x}(x^2-x); a=0; b=3;$ m = 2 (формула Симпсона);

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=1,2}^{N-1}\left[f(x_{k-1})+4f(x_k)+f(x_{k+1})\right]=\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1}f(x_{2i})\right)$$

ε = 4e-12

1. Полученные значения интеграла и погрешности, вычисленные по формуле Симпсона, представлены в таблице 2. Листинг программы представлен в приложении 2.

Таблица 2

Шаг h	**Приближенное значение интеграла**	**Погрешность численного интегрирования**
3e-1	0.3531	4e-4
3e-2	0.35276815	4e-08
3e-3	0.352768111222	4e-12
3e-4	0.3527681112177685	1e-16
3e-5	0.352768111217764	4e-15
3e-6	0.352768111217764	4e-15
3e-7	0.352768111217766	2e-15
3e-8	0.35276811121781	4e-14

2**. Вывод по задаче 2.1**: Можно заметить что максимальная точность достигается с шагом h=3e-4, а дальнейшие вычисления только снижают точность. Это можно объяснить влиянием на вычисления машинного эпсилон. Порядок точности формулы симпсона p = 4. Это видно и по таблице, т.к при уменьшении шага в n раз, погрешность уменьшааетсяв n^4 раз. Можно говорить о большей эффективности метода, т.к при большем шаге можно добиться большей точности, чем в методе из задачи 1 (метод трапеций).

3. Результаты вычислений интеграла с заданной в точностью представленны в таблице 3. Листинг кода представлен в приложении 2.

Таблица 3

Значение точности	**Точное значение I**	**Приближенное значение I**	**Абсолютная погрешность**	**Шаг точности**
4e-12	0,35276811121776863	0.352768111219	2e-12	2.34375e-03

4. **Вывод по задаче 2.2**: Полученные значения шага и точности соответствуют значениям полученным ранее в таблице 2, следовательно алгоритм реализован верно.

Приложение 1

```
from math import e

D = -1.0
I = (-13/e**3) - (-1)

def f(x):
  return e**(-x) * (x**2 - x)

b = 3
a = 0
for k in range(1, 16):
   h = (b - a) / (10**k)
   # вычисление интеграла
   int_sum = (f(a) + f(b)) / 2
   for i in range(1, 10**k):
       int_sum += f(a + i*h)
   int_sum *= h
   # вычисление производной
   dx = (f(a) - f(a-h)) / h
   print('k = ', k, ' | Интеграл: ', int_sum, ' | delta I: ', abs(I - int_sum))
   print( 'Производная: ', dx, ' | delta D: ', abs(D - dx))
```

Приложение 2

```
from math import e

a = 0
b = 3


def f(x):
   return e**(-x) * (x**2 - x)


def simps(a, b, h):
   int_sum = f(a) + f(b)
   for i in range(1, int((b - a) / h), 2):
       int_sum += 4 * f(a + i * h)
   for i in range(2, int((b - a) / h - 1), 2):
       int_sum += 2 * f(a + i * h)
   int_sum *= h/3
   return int_sum




I = (-13/e**3) - (-1)
print(I)
# вычисление с 8 шагами
for k in range(1, 9):
   h = (b - a) / 10**k
   integral = simps(a, b, h)
   print( 'Интеграл: ', integral, ' | delta I: ', abs(I - integral))

# вычисление с заданной точностью
eps = 4e-12
h = 0.3
prevv = simps(a, b, h)
nextt = simps(a, b, h/2)
while abs(nextt - prevv) / 15 > eps:
   h = h/2
   prevv = nextt
   nextt = simps(a, b, h/2)
print( 'Интеграл: ', simps(a, b, h/2), ' | delta I: ', abs(I - simps(a, b,
h/2)), ' | h: ', h/2)
```