代数学方法

卷一：基础架构

更新日期：2025 年 04 月 21 日

aytony

目录

1. 集合论

2. 范畴论基础

练习 2.1: 设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 是任意范畴中的态射。证明若 $A \xrightarrow{gf} C$ 和 $B \xrightarrow{hg} D$ 皆为同构，则 f, g, h 全是同构。

证明: 因为 gf, hg 都是同构所以 f, g 都是单态射，g, h 都是满态射。由于它们是同构，所以存在 φ, ψ 使得 $\varphi gf = 1_A, \psi hg = 1_B$。

要证明 f 是同构，只要证明 $\varphi gf = 1_A$ 且 $f\varphi g = 1_B$，前者是假设，而由 $f\varphi gf = f1_A = f$ 右消去 f 得到后者。

要证明 g 是同构，只要证明 $\psi hg = 1_B$ 且 $g\psi h = 1_C$，前者是假设，后者由 $g\psi hg = g1_B = g$ 使用右消去得到。

要证明 h 是同构，只要证明 $g\psi h = 1_C$ 且 $hg\psi = 1_D$，前者由 $g\psi hg = g1_B = g$ 使用左消去得到，后者由 $\psi hg\psi = 1_B\psi = \psi$ 使用左消去得到，这是因为 $\psi gf = 1_A$ 可逆从而 ψ 是满态射。 □

练习 2.2: 对范畴 C, C' 定义其并 $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ 如下:

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{C} \star \mathsf{C}') := \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \sqcup \mathrm{Ob}(\mathsf{C}'),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{C}'}(X, Y) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) & X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}'}(X, Y) & X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}') \\ \text{独点集} & X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}), Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}') \\ \varnothing & X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}'), Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}). \end{cases}$$

为 $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ 中的态射合理地定义合成和单位元，并验证 $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ 确实构成范畴；它包含 C 和 C' 作为全子范畴。对于有限序数范畴，证明 $\boldsymbol{n} \star \boldsymbol{m}$ 同构于 $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$。

证明: 先定义合成。对 $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C} \star \mathsf{C}'), f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{C}'}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{C}'}(Y, Z)$ 存在，我们分类讨论。

1. 若 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 或 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}')$，则分别按照 C 或 C' 中定义的态射合成方式进行合成；
2. 若 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}), Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}')$，那么 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{C}'}(Y, Z)$ 是唯一的，因为这个集合是独点集，直接定义 $g \circ f$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{C}'}(X, Z)$ 这个独点集中的唯一元素即可；
3. 若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}), Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}')$，那么 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ 是唯一的，定义 $g \circ f$ 是 $\mathrm{Hom}(X, Z)$ 中的唯一元素即可；
4. 不可能出现其他情况，因为不会有从 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}')$ 到 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 的态射存在。

再定义单位元。对 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C} \star \mathsf{C}')$，若 $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$，那么定义 1_X 为 C 中 X 的单位态射；否则定义 1_X 为 C' 中 X 的单位态射。

再验证 $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ 构成范畴：

1. 对 $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathsf{C} \star \mathsf{C}')$，由定义知道 f 的定义域和值域一定都是 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C} \star \mathsf{C}')$ 中的元素；

2. 上文已经定义了单位态射；
3. 上文定义的复合运算对 $\mathsf{C}\star\mathsf{C}'$ 封闭；
4. 复合运算有结合律。对 $\forall f,g,h\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C}\star\mathsf{C}')$ 且它们可进行复合，若 $f,g,h\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ 或 $f,g,h\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C}')$，那么由于 C,C' 是范畴，它们自然是结合的；否则，$(hg)f,h(gf)$ 一定都是从 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 中一元素映射到 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}')$ 中一元素，而这是一个独点集，所以它们两个一定相同。
5. 容易验证 $\forall f:X\to Y\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C}\star\mathsf{C}')$ 有 $f1_X=f=1_Yf$。

直接按定义容易验证 C,C' 是 $\mathsf{C}\star\mathsf{C}'$ 的全子范畴。 □

练习 2.3：选定 Grothendieck 宇宙，证明其中全体有限全序集及其间的保序映射构成一个范畴 Ord_f。证明有限序数 $\mathbf{0},\mathbf{1},\cdots$ 构成此范畴的骨架。

证明：*TODO* □

练习 2.4：设 C 为范畴，并对每个 $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ 上给定二元关系 $\mathcal{R}$。构造相应的商范畴 $\mathsf{C}/\mathcal{R}$ 连同函子 $Q:\mathsf{C}\to\mathsf{C}/\mathcal{R}$ 使得
- 对任意 C 中态射 f,g 有 $f\mathcal{R}g\Rightarrow Q(f)=Q(g)$；
- 函子 Q 在对象集上是双射；
- 对任何函子 $S:\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$ 满足 $f\mathcal{R}g\Rightarrow S(f)=S(g)$ 者，存在唯一的函子 $\overline{S}:\mathsf{C}/\mathcal{R}\to\mathsf{C}'$ 使得 $S=\overline{S}Q$。

说明 $Q:\mathsf{C}\to\mathsf{C}/\mathcal{R}$ 的唯一性。

证明：基于 $\mathcal{R}$ 定义等价关系 $\mathcal{R}'$，使得对 $\forall f,g\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ 有 $f\mathcal{R}'g$，如果 $f\mathcal{R}g$，并基于传递性进行扩充。那么 $Q(f)=Q(g)$ 当且仅当 $f\mathcal{R}'g$。基于选择公理对 $\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ 中的 $\mathcal{R}'$-等价类选定代表元，由这些代表元作为态射和 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 作为对象构成的范畴记为 $\mathsf{C}/\mathcal{R}$。

对每个 $f\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$，记其代表元为 $Q(f)\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C}/\mathcal{R})$，对 $X\in\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 令 $Q(X)=X$，这样就定义了函子 Q，容易看出它的函子性。容易证明它服从前两个条件。

对于第三个条件，对 $\forall Q(f)\in\mathrm{Mor}(\mathsf{C}/\mathcal{R})$，令 $\overline{S}(Q(f))=S(f)$ 即可。由于 f 可能不唯一，先说明 $\overline{S}$ 是良定的。设 f,f' 满足 $Q(f)=Q(f')$，那么 $f\mathcal{R}'g$，从而选择公理保证 $S(f)=S(g)$。容易看出 $S=\overline{S}Q$。$\overline{S}$ 存在性得证。 □

练习 2.5：设 $F:\mathsf{C}_1\to\mathsf{C}_2$ 和 $G:\mathsf{C}_2\to\mathsf{C}_3$ 为范畴等价（即：具有逆拟函子），证明 $GF:\mathsf{C}_1\to\mathsf{C}_3$ 也是等价，其拟逆可以取为 F 和 G 的拟逆之合成。

证明：设 $F':\mathsf{C}_2\to\mathsf{C}_1$ 和 $G':\mathsf{C}_3\to\mathsf{C}_2$ 分别为 F,G 的拟逆函子，那么有同构 $\varphi:F'F\xrightarrow{\sim}\mathrm{id}_{\mathsf{C}_1},\varphi':FF'\xrightarrow{\sim}\mathrm{id}_{\mathsf{C}_2},\psi:G'G\xrightarrow{\sim}\mathrm{id}_{\mathsf{C}_2}$ 和 $\psi':GG'\xrightarrow{\sim}\mathrm{id}_{\mathsf{C}_3}$。那么容易看出 $F'G'$ 为 GF 的拟逆函子，这是因为

$$F'G'GF \xrightarrow{\mathrm{id}_{F'} \circ \psi \circ \mathrm{id}_F (\sim)} F'F \xrightarrow{\quad \varphi' (\sim) \quad} \mathrm{id}_{\mathsf{C}_1},$$

$$GFF'G' \xrightarrow{\mathrm{id}_{F} \circ \varphi' \circ \mathrm{id}_{G'} (\sim)} GG' \xrightarrow{\quad \psi' (\sim) \quad} \mathrm{id}_{\mathsf{C}_3}.$$

其中自然映射的合成均为横合成。 □

练习 2.6: 详述例 2.6.8 中各个伴随对的余单位。

练习 2.7: 记 Ring 为以环为对象，环同态为态射的范畴，注意到这里的环皆含乘法幺元，同态按定义须保幺元。如果不假设环含幺，所得范畴记为 Rng（这可能是本书中唯一一次考虑这类环）。证明显然的函子 Ring $\to$ Rng 具有左伴随。

证明: 即证明遗忘函子 G : Ring $\to$ Rng 具有左伴随。直接令函子 F : Rng $\to$ Ring，将每个环 R 映射到其幺元化环 R^+，这里的 R 的幺元化环 R^+ 定义为

$$R^+ = R \times \mathbb{Z}, \qquad (r,n) \times (s,m) = (rs + nr + ms, nm),$$

其中单位元为 $(0,1)$。

然后证明 F 是 G 的左伴随。只要证明对 $\forall R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Rng}), S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ring})$ 构造自然同构

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ring}}(R^+, S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Rng}}(R, S^-).$$

构造 φ 如下:

1. 对环同态 $f : R^+ \to S$ 定义 $g : R \to S^-, r \mapsto f(r,0)$;
2. 对环同态 $g : R \to S^-$ 定义 $f : R^+ \to S, (r,n) \mapsto g(r) + n \cdot 1_S$。

容易证明两个映射互为逆，并保持环同态结构。 □

练习 2.8: 设 (F,G,φ) 是伴随对，则

1. $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{C}_1} \to GF$ 为同构当且仅当 F 是全忠实函子;
2. $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathsf{C}_2}$ 为同构当且仅当 G 是全忠实函子。

提示 基于对偶性（以 C^{op} 代 C），仅需证 (1)。先证明对所有 C_1 中的态射 $f : X \to Y$ 都有 $\varphi(Ff) = \eta_Y f : X \to GFY$：这是缘于 φ 的自然性导致图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{id}_{FY} & \in & \mathrm{Hom}(FY,FY) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(Y,GFY) & \ni & \eta_Y \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Ff)^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow \\
Ff & \in & \mathrm{Hom}(FX,FY) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(X,GFY) & \ni & \varphi(Ff) = \eta_Y f
\end{array}$$

交换。米田引理（定理 2.5.1）表明 $\eta_Y : Y \xrightarrow{\sim} GFY$ 当且仅当 $f \mapsto \eta_Y f$ 给出双射 $\mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X,GFY)$，其中 X 取遍 C_1 的对象；既然 φ 是同构，这又相当于 $f \mapsto Ff$ 是双射，亦即 F 是全忠实的。

证明：先证必要性，设 $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{C}_1} \to GF$ 为同构，那么只要证明对 $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_1)$ 映射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_1}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_2}(FX,FY)$$

是双射。由于 η 是同构，对 $\forall f : X \to Y$ 有

$$\eta_Y \circ f = GF(f) \circ \eta_X,$$

因为 η_X, η_Y 是同构，所以 $f \to GF(f)$ 是双摄，又因为 φ 是伴随对的自然同构，于是得到

$$\varphi(F(f)) = \eta_Y \circ f,$$

于是 $f \mapsto F(f)$ 是双射，那么 F 是全忠实的。

再证充分性，假设 F 是全忠实的，那么 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}_1)$ 映射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_1}(X,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_2}(FX,FX)$$

是双摄，存在唯一态射 $\eta_X : X \to GFX$ 使 $F(\eta_X) = \mathrm{id}_{FX}$，且 η_X 是同构。因此 η 是同构。 □

练习 2.9：假设 C 既是完备也是余完备的。对于小范畴 I，证明对角函子 $\Delta : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ (定义 2.7.1) 有左、右伴随函子，阐释它们与 C 中的 $\lim_{\rightarrow}$ 与 $\lim_{\leftarrow}$ 的关系，相应的单位和余单位作何解释？

练习 2.10：设域 $\Bbbk$ 为域，证明在 $\Bbbk$-向量空间范畴 $\mathsf{Vect}_f(\Bbbk)$ 里，每个对象都同构于一些有限维子空间间的 $\lim_{\rightarrow}$。将此想法移植到交换群范畴 Ab（考虑有限生成交换群的 $\lim_{\rightarrow}$）。

练习 2.11：设 C 是 C' 的全子范畴，包含函子记为 $J : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$。说明对任意两个函子 $F, G : \mathsf{C}_0 \rightrightarrows \mathsf{C}$，与 J 的横合成诱导双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Fct}\,(\mathsf{C}_0,\mathsf{C}')}(JF,JG) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Fct}\,(\mathsf{C}_0,\mathsf{C})}(F,G).$$

证明：对任意自然变换 $\varphi \in \mathrm{Hom}(JF,JG)$，定义 $\psi \in \mathrm{Hom}(F,G)$ 为 $\psi_X = J^{-1}(\varphi_X)$，因为 J 是全忠实的，所以 J^{-1} 良定。

然后验证 ψ 的自然性，即对 C_0 中态射 $f: X \to Y$，要验证 $\psi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \psi_X$ 交换。这是因为

$$J(\psi_Y \circ F(f)) = \varphi_Y \circ JF(f) = JG(f) \circ \varphi_X = J(G(f) \circ \psi_X),$$

上式使用了 J 的函子性，φ 的自然性和 J 的忠实性。

上述过程直接定义映射 $\Phi : \varphi \mapsto \psi$，其逆为 $\Psi : \psi \mapsto J \circ \psi$，容易看出 Ψ, Φ 互逆。 $\square$

练习 2.12: 在带基点的集合范畴 $\mathrm{Set}_\bullet$ 中描述积和余积，证明它是完备且余完备的。推广到 $\mathrm{Top}_\bullet$ 的情形。

练习 2.13: 考虑忘却函子 $\mathrm{Set}_\bullet \to \mathrm{Set}$，找出 U 的左伴随，并证明 U 无右伴随。