偏微分方程

更新日期：2025 年 03 月 28 日

22377264 安阳

练习 1 (Hopf 引理)：设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，假设 $u \in C^1\left(\overline{S}\right) \cap C^2(S)$ 且满足条件：

1. $-\Delta u \leqslant 0$,
2. 存在 $x_0 \in \partial S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $u(x) < u(x_0)$，

则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > 0,$$

其中 ν 是 ∂S 在点 x_0 处的外法向量。

证明：先构造辅助函数。在边界点 x_0 邻域内，取半径 ε 的小球 $B(x_0, \varepsilon) \cap S$。定义比较函数

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha \varepsilon^2}, \quad r = |x - x_0|,$$

选取 α 足够大，使得在 $\partial B(x_0, \varepsilon)$ 上 $v \geqslant 0$，且满足$\Delta v > 0$。

然后应用极值原理，令 $w = u - u(x_0) + \delta v$。在 $S \cap B(x_0, \varepsilon)$ 内，由条件得 $\Delta w = \Delta u - \delta \Delta v \geqslant -\delta \Delta v < 0$。因在边界上 $u < u(x_0)$，当 δ 足够小时，w 在 $S \cap B(x_0, \varepsilon)$ 的边界非正。由极值原理，$w \leqslant 0$ 于内部。

那么在 x_0 处沿法向 ν 方向有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(x_0 - h\nu) - u(x_0)}{-h} \geqslant \delta \frac{\partial u}{\partial v} > 0,$$

故结论成立。 □

练习 2：设 $u(x)$ 是球 $B(0, R_0)$ 上的调和函数，定义

$$\omega(R) = \sup_{B(0,R)} u - \inf_{B(0,R)} u.$$

1. 应用 Harnack 不等式证明：存在 $\eta \in (0, 1)$，使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leqslant \eta \omega(R).$$

提示：对调和函数 $w(x) = u(x) - \inf_{B(0,R)} u$ 在球 $B(0, R/2)$ 上应用 Harnack 不等式。

2. 如果 $\sup_{B(0,R_0)} |u(x)| \leqslant M_0$，则存在常数 $\alpha \in (0,1)$ 和 $C > 0$，使得

$$\omega(R) \leqslant C(M_0 + 1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}, \quad R \in (0, R_0].$$

提示：对于任意 $R \in (0, R_0)$，存在一个整数 $i \geqslant 1$，使得 $R_0/2^i \leqslant R < R_0/2^{i-1}$。

证明:

1. 设

$$w(x) = u(x) - \inf_{B(0,R)} u,$$

则 $w \geqslant 0$ 且是调和的。由 *Harnack* 不等式，存在仅依赖于维数的 $\eta \in (0,1)$ 使得

$$\sup_{B(0,R/2)} w \leqslant \eta \inf_{B(0,R/2)} w \leqslant \eta \sup_{B(0,R)} w = 0,$$

所以得到

$$\omega(R/2) = \sup_{B(0,R/2)} w \leqslant \eta \sup_{B(0,R)} w = \eta\omega(R).$$

2. 对 $R \in (0, R_0)$ 知道一定存在 i 使得 $R_0/2^i \leqslant R < R_0/2^{i-1}$，递归一直应用得到

$$\omega(R) \leqslant \eta^i \omega(R_0/2^{i-1}) \leqslant \eta^i 2M_0.$$

由于 $i \approx \log_2(R_0/R)$，从而

$$\eta^i \leqslant \exp(i \ln n) \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = -\log_2 \eta,$$

那么有

$$\omega(R) \leqslant C(M_0 + 1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}.$$

□

练习 3: 求解边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的格林函数，其中

1. Ω 是上半平面；
2. Ω 是带形区域 $\{(x,y) \mid -\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$。

证明:

1.

$$
\begin{aligned}
G(x,y;x',y') &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}.
\end{aligned}
$$

2. 在 y' 上下对称位置放置无穷镜像电荷，此时有

$$
G(x,y;x',y') = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\Phi(x-x', y-(y'+2k)),
$$

其中 Φ 为二维 *Laplace* 方程基本解，容易看出该级数满足 $y=0, y=1$ 处的边界条件。

$\square$