代数学方法

卷一：基础架构

更新日期：2025 年 03 月 25 日

aytony

目录

1. 集合论

2. 范畴论基础

练习 2.0.1: 设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 是任意范畴中的态射。证明若 $A \xrightarrow{gf} C$ 和 $B \xrightarrow{hg} D$ 皆为同构，则 f, g, h 全是同构。

练习 2.0.2: 对范畴 C, C' 定义其并 $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ 如下:

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{C} \star \mathsf{C}') := \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \sqcup \mathrm{Ob}(\mathsf{C}'),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{C}'}(X,Y) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y) & X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}'}(X,Y) & X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}') \\ \text{独点集} & X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}), Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}') \\ \varnothing & X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}'), Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C}). \end{cases}$$

为 $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ 中的态射合理地定义合成和单位元，并验证 $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ 确实构成范畴；它包含 C 和 C' 作为全子范畴。对于有限序数范畴，证明 $\boldsymbol{n} \star \boldsymbol{m}$ 同构于 $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$。

练习 2.0.3: 选定 Grothendieck 宇宙，证明其中全体有限全序集及其间的保序映射构成一个范畴 Ord_f。证明有限序数 $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots$ 构成此范畴的骨架。

练习 2.0.4: 设 C 为范畴，并对每个 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ 上给定二元关系 $\mathcal{R}$。构造相应的商范畴 $\mathsf{C}/\mathcal{R}$ 连同函子 $Q : \mathsf{C} \to \mathsf{C}/\mathcal{R}$ 使得

- 对任意 C 中态射 f, g 有 $f\mathcal{R}g \Rightarrow Q(f) = Q(g)$；
- 函子 Q 在对象集上是双射；
- 对任何函子 $S : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ 满足 $f\mathcal{R}g \Rightarrow S(f) = S(g)$ 者，存在唯一的函子 $\overline{S} : \mathsf{C}/\mathcal{R} \to \mathsf{C}'$ 使得 $S = \overline{S}Q$。

说明 $Q : \mathsf{C} \to \mathsf{C}/\mathcal{R}$ 的唯一性。

练习 2.0.5: 设 $F : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_2$ 和 $G : \mathsf{C}_2 \to \mathsf{C}_3$ 为范畴等价（即：具有逆拟函子），证明 $GF : \mathsf{C}_1 \to \mathsf{C}_3$ 也是等价，其拟逆可以取为 F 和 G 的拟逆之合成。

练习 2.0.6: 详述例 2.6.8 中各个伴随对的余单位。

练习 2.0.7: 记 Ring 为以环为对象，环同态为态射的范畴，注意到这里的环皆含乘法幺元，同态按定义须保幺元。如果不假设环含幺，所得范畴记为 Rng（这可能是本书中唯一一次考虑这类环）。证明显然的函子 Ring → Rng 具有左伴随。

练习 2.0.8: 设 (F, G, φ) 是伴随对，则

1. $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{C}_1} \to GF$ 为同构当且仅当 F 是全忠实函子；
2. $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathsf{C}_2}$ 为同构当且仅当 G 是全忠实函子。

提示 基于对偶性 (以 C^{op} 代 C)，仅需证 (1)。先证明对所有 C_1 中的态射 $f : X \to Y$ 都有 $\varphi(Ff) = \eta_Y f : X \to GFY$：这是缘于 φ 的自然性导致图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{id}_{FY} & \in & \mathrm{Hom}(FY, FY) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(Y, GFY) & \ni & \eta_Y \\
\downarrow & & {\scriptstyle (Ff)^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow \\
Ff & \in & \mathrm{Hom}(FX, FY) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(X, GFY) & \ni & \varphi(Ff) = \eta_Y f
\end{array}$$

交换。米田引理（定理 2.5.1）表明 $\eta_Y : Y \xrightarrow{\sim} GFY$ 当且仅当 $f \mapsto \eta_Y f$ 给出双射 $\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, GFY)$，其中 X 取遍 C_1 的对象；既然 φ 是同构，这又相当于 $f \mapsto Ff$ 是双射，亦即 F 是全忠实的。

练习 2.0.9: 假设 C 既是完备也是余完备的。对于小范畴 I，证明对角函子 $\Delta : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ (定义 2.7.1) 有左、右伴随函子，阐释它们与 C 中的 $\varinjlim$ 与 $\varprojlim$ 的关系，相应的单位和余单位作何解释？

练习 2.0.10: 设域 $\Bbbk$ 为域，证明在 $\Bbbk$-向量空间范畴 $\mathsf{Vect}_f(\Bbbk)$ 里，每个对象都同构于一些有限维子空间间的 $\varinjlim$。将此想法移植到交换群范畴 Ab（考虑有限生成交换群的 $\varinjlim$）。

练习 2.0.11: 设 C 是 C' 的全子范畴，包含函子记为 $J : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$。说明对任意两个函子 $F, G : \mathsf{C}_0 \rightrightarrows \mathsf{C}$，与 J 的横合成诱导双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}\,(\mathsf{C}_0, \mathsf{C}')}(JF, JG) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}\,(\mathsf{C}_0, \mathsf{C})}(F, G).$$

练习 2.0.12: 在带基点的集合范畴 $\mathrm{Set}_\bullet$ 中描述积和余积，证明它是完备且余完备的。推广到 $\mathrm{Top}_\bullet$ 的情形。

练习 2.0.13: 考虑忘却函子 $\mathrm{Set}_\bullet \to \mathrm{Set}$，找出 U 的左伴随，并证明 U 无右伴随。