数学系课程
定理框架手册

基础拓扑学讲义

尤承业 编著

北京大学出版社

aytony

2024 -- 05 -- 10

目录

1 | 拓扑空间与连续映射

1.1 | 拓扑空间

定义 1.1: 设 X 是一个非空集合. X 的一个子集族 τ 称为 X 的一个**拓扑**，如果它满足

1. $X, \emptyset$ 都包含在 τ 中;
2. τ 中任意多个成员的并集仍在 τ 中;
3. τ 中有限多个成员的交集仍在 τ 中.

集合 X 和它的一个拓扑 τ 一起称为一个**拓扑空间**，记作 (X, τ). 称 τ 中的成员为这个拓扑空间的**开集**.

例 1.1.1: 设 X 是无穷集合，$\tau_f = \{A^c \mid A \text{ 是 } X \text{ 的有限子集}\} \cup \{\emptyset\}$，则不难验证 τ_f 是 X 的一个拓扑，称为 X 上的**余有限拓扑**.

例 1.1.2: 设 X 是不可数无穷集合，$\tau_c = \{A^c \mid A \text{ 是 } X \text{ 的可数子集}\} \cup \{\emptyset\}$，则 τ_c 也是 X 的拓扑，称为**余可数拓扑**.

例 1.1.3: 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数的集合，规定 $\tau_e = \{U \mid U \text{ 是若干各开区间的并集}\}$，这里“若干”可以是无穷，有限，也可以是零，因此 $\emptyset \in \tau_e$. 则 τ_e 是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑，称为 R 上的**欧式拓扑**. 记 $\boldsymbol{E} = (\mathbb{R}, \tau_e)$.

例 1.1.4: 记 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$. 规定 $\mathbb{R}^n$ 上的度量 d 为:

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

不难验证 d 满足正定性、对称性和三角不等式，记 $\boldsymbol{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$，称为 n **维欧氏空间**.

引理: $(\boldsymbol{X}, d)$ 的任意两个球形邻域的交集是若干球形邻域的并集.

命题 1.1: X 上由度量 d 决定的度量拓扑 τ_d 满足 X 上的拓扑性质.

定义 1.2: 拓扑空间 X 的一个子集 A 称为**闭集**，如果 A^c 是开集.

命题 1.2: 拓扑空间的闭集满足:

1. X 与 $\emptyset$ 都是闭集;
2. 任意多个闭集的交集是闭集;
3. 有限个闭集的并集是闭集.

定义 1.3: 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，点 $x \in A$. 如果存在开集 U，使得 $x \in U \subset A$，则称 x 是 A 的一个**内点**，A 是 x 的一个**邻域**. A 的所有内点的集合称为 A 的**内部**，记作 $\mathring{A}$（或 A°）.

命题 1.3:
1. 若 $A \subset B$，则 $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. $\mathring{A}$ 是包含在 A 中所有开集的并集，因此是包含在 A 中的最大开集;
3. $\mathring{A} = A \iff A$ 是开集;
4. $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$;
5. $(A \cup B)^\circ \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

定义 1.4: 设 A 是拓扑空间 X 的子集，$x \in X$. 如果 x 的每个邻域都含有 $A \setminus \{x\}$ 中的点，则称 x 为 A 的**聚点**. A 的所有聚点的集合称为 A 的**导集**，记作 A'. 称集合 $\overline{A} := A \cup A'$ 为 A 的**闭包**.

命题 1.4: 若拓扑空间 X 的子集 A 和 B 互为余集，则 $\overline{A}$ 与 $\mathring{B}$ 互为余集.

命题 1.5:
1. 若 $A \subset B$，则 $\overline{A} \subset \overline{B}$;
2. $\overline{A}$ 是所有包含 A 的闭集的交集，所以是包含 A 的最小的闭集;
3. $\overline{A} = A \iff A$ 是闭集;
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
5. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

定义 1.5: 规定 A 的子集族

$$\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}.$$

容易验证 τ_A 是 A 上的一个拓扑，称为 τ 导出的 A 上的**子空间拓扑**，称 (A, τ_A) 为 (X, τ) 的**子空间**.

命题 1.6: 设 X 是拓扑空间，$C \subset A \subset X$，则 C 是 A 的闭集 $\iff C$ 是 A 与 X 的一个闭集之交集.

命题 1.7: 设 X 是拓扑空间，$B \subset A \subset X$，则

1. 若 B 是 X 的开（闭）集，则 B 也是 A 的开（闭）集;
2. 若 A 是 X 的开（闭）集，B 是 A 的开（闭）集，则 B 也是 X 的开（闭）集.

1.2 | 连续映射与同胚映射

定义 1.6: 设 X 和 Y 都是拓扑空间，$f : X \to Y$ 是一个映射，$x \in X$. 如果对于 Y 中 $f(x)$ 的任一邻域 V，$f^{-1}(V)$ 总是 x 的邻域，则称 f 在 x 处**连续**.

命题 1.8: 设 $f : X \to Y$ 是一映射，A 是 X 的子集，$x \in A$. 记 $f_A = f|A : A \to Y$ 是 f 在 A 上的限制，则

1. 如果 f 在 x 连续，则 f_A 在 x 也连续;
2. 若 A 是 x 的邻域，则当 f_A 在 x 连续时，f 在 x 也连续.

定义 1.7: 如果映射 $f : X \to Y$ 在任一点 $x \in X$ 处都连续，则说 f 是**连续映射**.

定理 1.1: 设 $f : X \to Y$ 是映射，下列各条件互相等价:

1. f 是连续映射;
2. Y 的任一开集在 f 的原象是 X 的开集;
3. Y 的任一闭集在 f 的原象是 X 的闭集.

命题 1.9: 设 X，Y 和 Z 都是拓扑空间，映射 $f : X \to Y$ 在 x 处连续，$g : Y \to Z$ 在 $f(x)$ 处连续，则复合映射 $g \circ f : X \to Z$ 在 x 处连续.

定理 1.2 (粘接定理): 设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 X 的一个有限闭覆盖. 如果映射 $f : X \to Y$ 在每个 A_i 上的限制都是连续的，则 f 是连续映射.

定义 1.8: 如果 $f : X \to Y$ 是一一对应，并且 f 及其逆 $f^{-1} : Y \to X$ 都是连续的，则称 f 是一个**同胚映射**，或称**拓扑变换**，或简称**同胚**. 当存在 X 到 Y 的同胚映射时，就称 X 与 Y **同胚**，记作 $X \cong Y$.

例 1.2.1: 开区间（作为 $\boldsymbol{E}^1$ 的子区间）同胚于 $\boldsymbol{E}^1$.

例 1.2.2: $\boldsymbol{E}^n$ 中的单位球体 $D^n := \{x \in \boldsymbol{E}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ 的内部 $\mathring{D}^n$ 同胚于 $\boldsymbol{E}^n$. 同胚映射 $f : \mathring{D}^n \Rightarrow \boldsymbol{E}^n$ 可规定为: $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}, \forall x \in \mathring{D}^n$. 它的逆映射为:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1+\|y\|}, \quad \forall y \in \boldsymbol{E}^n.$$

例 1.2.3: $\boldsymbol{E}^n \setminus \{O\} \cong \boldsymbol{E}^n \setminus D^n$（$O$ 为原点）.

例 1.2.4: 球面 S^2 去掉一点后与 $\boldsymbol{E}^2$ 同胚.

例 1.2.5: 任何凸多边形（包含内部）都互相同胚.

例 1.2.6: 凸多边形与 D^2 同胚.

定义 1.9: 拓扑空间的在同胚映射下保持不变的概念成为**拓扑概念**，在同胚映射下保持不变的性质叫**拓扑性质**.

1.3 | 乘积空间与拓扑基

命题 1.10: $\overline{\mathcal{B}}$ 是 $X_1 \times X_2$ 上的一个拓扑.

定义 1.10: 称 $\overline{\mathcal{B}}$ 为 $X_1 \times X_2$ 上的**乘积拓扑**，称 $\left(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{B}}\right)$ 为 (X_1, τ_1) 和 (X_2, τ_2) 的**乘积空间**，简记为 $X_1 \times X_2$.

定理 1.3: 对于任何拓扑空间 Y 和映射 $f: Y \to X_1 \times X_2$，f 连续 $\Longleftrightarrow$ f 的分量都连续.

推论: $\forall b \in X_2$，由 $x \mapsto (x, b)$ 规定的映射 $j_b: X_1 \to X_1 \times X_2$ 是嵌入映射.

定义 1.11: 称集合 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 为**集合 X 的拓扑基**，如果 $\overline{\mathcal{B}}$ 是 X 的一个拓扑；称拓扑空间 (X, τ) 的子集族 $\mathcal{B}$ 为这个**拓扑空间的拓扑基**，如果 $\overline{\mathcal{B}} = \tau$.

命题 1.11: $\mathcal{B}$ 是集合 X 的拓扑基的充分必要条件是:

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$；
2. 若 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$，则 $B_1 \cap B_2 \in \overline{\mathcal{B}}$（也就是 $\forall x \in B_1 \cap B_2$，存在 $B \in \mathcal{B}$，使得 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$）.

例 1.3.1: 规定 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$. 显然 $\mathcal{B}$ 满足 命题 1.11 中条件 1. 任取 $[a_1, b_1), [a_2, b_2)$，若 $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$，记 $a = \max\{a_1, a_2\}, b = \min\{b_1, b_2\}$，于是 $a \leq x < b$. 则 $[a, b) \in \mathcal{B}$，并且 $x \in [a, b) \subset [a_1, b_2) \cap [a_2, b_2)$. 因此 命题 1.11 中条件 2 也满足. 这样，$\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑基.

命题 1.12: $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 (X, τ) 的拓扑基的充分必要条件为:

1. $\mathcal{B} \subset \tau$（即 $\mathcal{B}$ 的成员是开集）;
2. $\tau \subset \overline{\mathcal{B}}$（即每个开集都是 $\mathcal{B}$ 中一些成员的并集）.

例 1.3.2: 若 $\mathcal{B}$ 是 (X, τ) 的拓扑基，$A \subset X$. 规定 $\mathcal{B}_A \coloneqq \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$. 它是 A 的子集族. 显然 命题 1.12 的条件 1 成立. 设 V 是 A 的开集，则有 $U \in \tau$，使 $V = A \cap U$. 设 $U = \bigcup_\alpha B_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{B}$，则 $V = \bigcup_\alpha A \cap B_\alpha \in \overline{\mathcal{B}}_A$. 于是 $\overline{\mathcal{B}}_A$ 满足 命题 1.12 条件 2. 因此 $\overline{\mathcal{B}}_A$ 是 (A, τ_A) 的拓扑基.

例 1.3.3: 设 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b, a, b \text{ 为有理数}\}$. 则 $\mathcal{B}$ 是 $\boldsymbol{E}^1$ 的拓扑基.

2 | 几个重要的拓扑性质

2.1 | 分离公理与可数公理

T_1 **公理**：任何两个不同点 x 与 y，x 有邻域不含 y，y 有邻域不含 x.

T_2 **公理**：任何两个不同点有不相交的邻域.

命题 2.1：X 满足 T_1 公理 $\iff X$ 的有限子集是闭集.

推论：若 X 满足 T_1 公理，$A \subset X$，点 x 是 A 的聚点，则 x 的任一邻域与 A 的交是无穷集.

命题 2.2：Hausdorff 空间中，一个序列不会收敛到两个以上的点.

T_3 **公理**：任意一点与不含它的任一闭集有不相交的（开）邻域.

T_4 **公理**：任意两个不相交的闭集有不相交的（开）邻域.

命题 2.3：度量空间 (X, d) 满足 T_i 公理（$i = 1, 2, 3, 4$）.

命题 2.4：
- 满足 T_3 公理 $\iff$ 任意点 x 和它的开邻域 W，存在 x 的开邻域 U，使得 $\overline{U} \subset W$.
- 满足 T_4 公理 $\iff$ 任意闭集 A 和它的开邻域 W，有 A 的开邻域 U，使得 $\overline{U} \subset W$.

C_1 **公理**：任一点都有可数的邻域基.

命题 2.5：如果 X 在 x 处有可数邻域基，则 x 有可数邻域基 $\{V_n\}$，使得 $m > n$ 时，$V_m \subset V_n$.

命题 2.6：若 X 是 C_1 空间，$A \subset X, x \in \overline{A}$，则 A 中存在收敛到 X 的序列.

推论：若 X 是 C_1 空间，$x_0 \in X$，映射 $f : X \to Y$ 满足：当 $x_n \to x_0$ 时，$f(x_n) \to f(x_0)$，则 f 在 x_0 连续.

C_2 **公理**：有可数拓扑基.

命题 2.7：可分度量空间是 C_2 空间.

例 2.1.1：Hilbert 空间 E^ω 是一个度量空间. 在所有平方收敛的实数序列构成的线性空间中，规定内积

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

它决定度量 ρ:

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},$$

得到的度量空间就是 E_ω.

定理 2.1 (Lindelöf 定理)：若拓扑空间 X 满足 C_2, T_3 公理，则它也满足 T_4 公理.

2.2 | Урысон 引理及其应用

定理 2.2 (Урысон 引理)：如果拓扑空间 X 满足 T_4 公理，则对于 X 的任意两个不相交闭集 A 和 B，存在 X 上的连续函数 f，它在 A 和 B 上分别取值为 0 和 1.

定理 2.3 (Tietze 扩张定理)：如果 X 满足 T_4 公理，则定义在 X 的闭子集 F 上的连续函数可连续地扩张到 X 上.

命题 2.8: 拓扑空间 X 可度量化 $\iff$ 存在从 X 到一个度量空间的嵌入映射.

定理 2.4 (Урысон 度量化定理): 拓扑空间 X 如果满足 T_1, T_4 和 C_2 公理，则 X 可以嵌入到 Hilbert 空间 E^ω 中.

2.3 | 紧致性

定义 2.1: 拓扑空间称为**列紧的**，如果它的每个序列有收敛（即有极限点）的子序列.

命题 2.9: 定义在列紧拓扑空间 X 上的连续函数 $f: X \to \boldsymbol{E}^1$ 有界，并达到最大、最小值.

定义 2.2: 拓扑空间称为**紧致的**，如果它的每个开覆盖有有限的子覆盖.

命题 2.10: 紧致 C_1 空间是列紧的.

命题 2.11: 对任给 $\delta > 0$，列紧度量空间存在有限的 $\delta-$ 网.

定义 2.3: 设 $\mathcal{U}$ 是列紧度量空间 (X, d) 的一个开覆盖，$X \notin \mathcal{U}$. 称函数 $\varphi_{\mathcal{U}}$ 的最小值为 $\mathcal{U}$ 的 **Lebesgue 数**，记作 $L(\mathcal{U})$.

命题 2.12: $L(\mathcal{U})$ 是正数；并且当 $0 < \delta < L(\mathcal{U})$ 时，$\forall x \in X, B(x, \delta)$ 必包含在 $\mathcal{U}$ 的某个开集 U 中.

命题 2.13: 列紧度量空间是紧致的.

定理 2.5: 若 X 是度量空间，则 X 列紧 $\iff$ X 紧致.

命题 2.14: A 是 X 的紧致子集 $\iff$ A 是 X 的任一开覆盖有有限子覆盖.

命题 2.15: 紧致空间的闭子集紧致.

命题 2.16: 紧致空间在连续映射下的像也紧致.

推论: 定义在紧致空间上的连续函数有界，并且达到最大、最小值.

命题 2.17: 若 A 是 Hausdorff 空间 X 的紧致子集，$x \notin A$，则 x 与 A 有不相交的邻域.

推论: Hausdorff 空间的紧致子集是闭集.

定理 2.6: 设 $f: X \to Y$ 是连续的一一对应，其中 X 紧致，Y 是 Hausdorff 空间，则 f 是同胚.

命题 2.18: Hausdorff 空间的不相交紧致子集有不相交的邻域.

命题 2.19: 紧致 Hausdorff 空间满足 T_3, T_4 公理.

引理: 设 A 是 X 的紧致子集，y 是 Y 的一点，在乘积空间 $X \times Y$ 中，W 是 $A \times \{y\}$ 的邻域. 则存在 A 和 y 的开邻域 U 和 V，使得 $U \times V \subset W$.

定理 2.7: 若 X 和 Y 都紧致，则 $X \times Y$ 也紧致.

定义 2.4: 拓扑空间 X 称为**局部紧致的**，如果 $\forall x \in X$ 都有紧致的邻域.

命题 2.20: 设 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，则
- X 满足 T_3 公理；
- $\forall x \in X$，x 的紧致邻域构成它的邻域基；
- X 的开子集也是局部紧致的.

定义 2.5: 拓扑空间 X 称为**仿紧的**，如果 X 的每个开覆盖都有局部有限的开加细.

3 | 商空间与闭曲面

3.1 | 几个常见曲面

3.2 | 商空间与商映射

定义 3.1：设 (X,τ) 是拓扑空间，$\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系. 规定商集 $X/\sim$ 上的子集族

$$\tilde{\tau} := \{V \subset X/\sim \mid p^{-1}(V) \in \tau\},$$

则 $\tilde{\tau}$ 是 $X/\sim$ 上的一个拓扑，称为 τ 在 $\sim$ 下的**商拓扑**，称 $(X/\sim, \tilde{\tau})$ 是 (X,τ) 关于 $\sim$ 的**商空间**.

定理 3.1：设 X, Y 是两个拓扑空间，$\sim$ 是 X 上的一个等价关系，$g : X/\sim \to Y$ 是一映射，则 g 连续 $\iff g \circ p$ 连续.

定义 3.2：设 X 和 Y 是拓扑空间，映射 $f : X \to Y$ 称为**商映射**，如果

1. f 连续；
2. f 是满的；
3. 设 $B \subset Y$，如果 $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集，则 B 是 Y 的开集.

定理 3.1a：若 $f : X \to X'$ 是商映射，$g : X' \to Y$ 是一映射，则 g 连续 $\iff g \circ f$ 连续.

命题 3.1：如果 $f : X \to Y$ 是商映射，则 $X/\overset{f}{\sim} \cong Y$.

命题 3.2：连续的满映射 $f : X \to Y$ 如果还是开映射或闭映射，则它是商映射.

定理 3.2：如果 X 紧致，Y 是 Hausdorff 空间，则连续满映射 $f : X \to Y$ 一定是商映射.

命题 3.3：商映射的复合也是商映射.

定理 3.3：设 $f : X \to Y$ 是商映射，Z 是局部紧致的 Hausdorff 空间，$\mathrm{id} : Z \to Z$ 表示恒同映射，则

$$f \times \mathrm{id} : X \times Z \to Y \times Z$$

也是商映射.

4 | 同伦与基本群

4.1 | 映射的同伦

定义 4.1: 设 $f,g \in C(X,Y)$. 如果有连续映射 $H: X \times I \to Y$，使得 $\forall x \in X, H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$，则称 f 与 g **同伦**，记作 $f \simeq g: X \to Y$，或简记为 $f \simeq g$；称 H 是连接 f 与 g 的一个**同伦**（或称**伦移**），记作 $H: f \simeq g$（或 $f \overset{H}{\simeq} g$）.

命题 4.1: 同伦关系是 $C(X,Y)$ 中的一种等价关系.

命题 4.2: 若 $f_0 \simeq f_1 : X \to Y, g_0 \simeq g_1 : Y \to Z$，则 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : X \to Z$.

命题 4.3: 设 $A \subset X, f,g \in C(X,Y)$. 如果存在 f 到 g 的同伦 H，使得当 $a \in A$ 时，$H(a,t) = f(a) = g(a), \forall t \in I$，则称 f 和 g **相对于 $\boldsymbol{A}$ 同伦**，记作 $f \simeq g \text{ rel } A$；称 H 是 f 到 g 的相对于 $\boldsymbol{A}$ 的同伦，记作 $H: f \simeq g \text{ rel } A$（或 $f \overset{H}{\simeq} g \text{ rel } A$）.