偏微分方程

更新日期：2025 年 05 月 06 日

22377264 安阳

练习 1: 给定 $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(0)=0$，推导初边值问题

$$\begin{cases} u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=0, & (x,t)\in\mathbb{R}_+\times(0,\infty), \\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}_+, \\ u(0,t)=g(t), & t\geqslant 0 \end{cases}$$

的解的公式：

$$u(x,t)=\frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}}e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}}g(s)\,\mathrm{d}s$$

提示：令 $v(x,t):=u(x,t)-g(t)$，然后用奇反射延拓 v 到 $\{x<0\}$ 上。

证明: 令 $v(x,t)=u(x,t)-g(t)$，那么方程化成

$$v_t-v_{xx}=-g'(t),$$

初始条件为 $v(x,0)=-g(0)=0$，边界 $v(0,t)=u(0,t)-g(t)=0$。

将 $v(x,t)$ 延拓到 $x<0$ 部分，令 $v(-x,t)=-v(x,t)$，热方程转化到全空间上，成为

$$v_t-v_{xx}=-g'(t)\quad x\in\mathbb{R},t>0,$$

直接解出

$$\begin{aligned} v(x,t)&=-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi(t-s)}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}\right)g'(s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\ &=\frac{x}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t\frac{g(s)}{(t-s)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-s)}\right)\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

□

练习 2: 若 $v\in C_1^2(\Omega_T)$ 在 Ω_T 中满足 $v_t-\Delta v\leqslant 0$，则称 v 是热传导方程的下解。

1. 证明 $\max_{\overline{\Omega}_T} v=\max_{\Gamma_T} v$。
2. 设 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是光滑且凸的，假设 u 是热传导方程的解，证明 $v:=\phi(u)$ 是下解。
3. 若 u 是热传导方程的解，证明 $v:=|Du|^2+u_t^2$ 是下解。

证明:

1. 设 v 在内部点 $(x_0,t_0)\in\Omega_T$ 取得最大值，则 $v_t(x_0,t_0)\geqslant 0, \Delta v(x_0,t_0)\leqslant 0$，代入方程得到 $v_t-\Delta v\geqslant 0$ 矛盾，故最大值在边界 Γ_T 上。
2. 令 $v=\varphi(u)$，那么

$$v_t=\varphi'(u)u_t,\quad \Delta v=\varphi''(u)|\nabla u|^2+\varphi'(u)\nabla u,$$

代入方程得到

$$v_t-\Delta v=\varphi'(u)(u_t-\Delta u)-\varphi''(u)|\nabla u|^2\leqslant 0,$$

而由题目条件和 φ 的凸性，不等式成立。
3. 定义 $v=|\nabla u|^2+u_t^2$，那么

$$v_t=2\nabla u\cdot\nabla u_t+2u_tu_{tt},$$

代入热方程 $u_t=\Delta u$ 化简得到

$$v_t-\Delta v\leqslant -2\ |\nabla^2 u|^2-2|\nabla u_t|^2\leqslant 0,$$

说明 v 是下解。

□

练习 3: 设 $u\in C(\Omega_T)\cap C^{2,1}(\Omega_T)$ 且满足

$$u_t-u_{xx}+c(x,t)u\leqslant 0,\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

其中 $c(x,t)$ 有界，且 $c(x,t)\geqslant 0$。试证明：如果 u 在 $\overline{\Omega}_T$ 上存在非负最大值，则 u 必在抛物边界 Γ_T 上达到它在 $\overline{\Omega}_T$ 上的非负最大值。

证明: 设 u 在 $\overline{\Omega}_T$ 内某点取到非负最大值 M，令 $w=ue^{-\lambda t}(\lambda>\|c\|_\infty)$，那么

$$w_t-w_{xx}+(c+\lambda)w\leqslant 0,$$

因为 $c+\lambda>0$，若 w 在内部取得最大值，则 $w_t\geqslant 0, w_{xx}\leqslant 0$ 从而矛盾。 □