偏微分方程

更新日期：2025 年 04 月 01 日

22377264 安阳

练习 1：设 u 满足：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in B(0,R) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = g(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

当边界条件 $g(\theta)$ 满足相容性条件

$$\int_0^{2\pi} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$$

时，解可表示为：

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau)\ln\big(R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\tau - \theta)\big)\,\mathrm{d}\tau + C,$$

其中 C 为任意常数，(r,θ) 为点 (x,y) 的极坐标。

证明：设解为

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

其法向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = g(\theta),$$

那么其傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi n R^{n-1}} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos n\tau d\tau \\ b_n = \dfrac{1}{\pi n R^{n-1}} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin n\tau d\tau. \end{cases}$$

利用 *Poisson* 积分公式和对数势函数，最终解就可表示为

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau)\ln\big(R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\tau - \theta)\big)\,\mathrm{d}\tau + C,$$

其中 C 为任意常数，由积分条件 $\int g = 0$ 保证解的存在唯一性。 $\square$

练习 2: 证明在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中，格林函数满足：

$$G(x,y) < \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad \forall x,y \in \Omega.$$

证明: 记自由空间格林函数为

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}.$$

设格林函数分解形式 $G(x,y) = \Phi(x,y) + v(x,y)$，其中 v 满足

$$\begin{cases} \Delta_x v = 0, & x \in \Omega \\ v|_{x\in\partial\Omega} = \dfrac{1}{4\pi|x-y|}, & x \neq y. \end{cases}$$

由极大值原理，$v(x,y) > 0$ 在 Ω 内取到，从而有

$$G(x,y) = \Phi(x,y) + v(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} + v(x,y) < \frac{1}{4\pi|x-y|}.$$

$\square$

练习 3: 证明当 $y \to x$ 时，有 $G(x,y) \to +\infty$，且其阶数与基本解 $\Phi(x,y)$ 相同。

证明: 由格林函数的构造 $G(x,y) = \Phi(x,y) + v(x,y)$。当 $y \to x$ 时，

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \to -\infty,$$

其中校正项 $v(x,y)$ 在 $y \to x$ 时保持有界，故阶数由 $\Phi(x,y)$ 主导，即

$$\lim_{y\to x} \frac{G(x,y)}{\Phi(x,y)} = 1.$$

$\square$

练习 4: 设 $c(x) \geqslant c_0 > 0$，$u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的解，则成立能量估计：

$$\int_\Omega |Du(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

其中 M 是仅依赖 c_0 的常数。

证明: 方程两边乘以 u 并积分得到

$$\int_\Omega (-\Delta u)u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)u^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fu\,\mathrm{d}x,$$

再应用分部积分得到

$$\int_\Omega |Du|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega c(x)u^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fu\,\mathrm{d}x,$$

代入 *Poincaré* 不等式就有

$$\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x \leqslant C_p\int_\Omega |Du|^2\,\mathrm{d}x,$$

结合 $c(x) \geqslant c_0 > 0$ 得

$$\int_\Omega |Du|^2\,\mathrm{d}x + \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2\,\mathrm{d}x,$$

取 $M = \max(1, 1/c_0)$ 即得结论。

□