偏微分方程

更新日期：2025 年 04 月 24 日

22377264 安阳

练习 1：设 $c \in \mathbb{R}$，考虑以下初值问题：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f, & \text{在} \ \ \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \ \ \text{中} \\ u = g, & \text{在} \ \ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \ \ \text{上} \end{cases}$$

证明：考虑方程

$$u_t - \Delta u + cu = f \quad \text{在} \, \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

的初值条件：

$$u = g \quad \text{在} \, \mathbb{R}^n \times \{t = 0\},$$

首先考虑齐次方程

$$u_t = \Delta u + cu = 0,$$

设解的形式为

$$u(x, t) = e^{-ct} v(x, t),$$

代入得到

$$e^{-ct}(v_t - \Delta v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_t - \Delta v = 0,$$

于是 $v(x, t)$ 满足标准热方程，解为

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) \, \mathrm{d}y,$$

其中热核

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

于是齐次方程的解就是

$$u'(x, t) = e^{-ct} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) \, \mathrm{d}y \, .$$

对于非齐次方程，其解可以表示为

$$u(x, t) = u' + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-c(t-s)} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \, .$$

那么显式解就是

$$u(x,t)=e^{-ct}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}e^{-c(t-s)}\Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\,.$$

$\square$

练习 2: 设 u 是齐次热方程 $u_t-\Delta u=0$ 在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 中的光滑解。

1. 证明：对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，缩放函数

$$u_\lambda(x,t):=u(\lambda x,\lambda^2 t)$$

   仍为原方程的解。

2. 利用 (1) 证明函数

$$v(x,t):=x\cdot\nabla u(x,t)+2tu_t(x,t)$$

   也是方程的解。

证明: 对于缩放不变性，设 $u_\lambda(x,t)=u(\lambda x,\lambda^2 t)$，只要验证 $\partial_t u_\lambda=\Delta u_\lambda$。考虑计算各个偏导数。时间导数为

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda x,\lambda^2 t)\cdot\lambda^2,$$

空间导数为

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}(\lambda x,\lambda^2 t)\cdot\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\lambda x,\lambda^2 t)\cdot\lambda^2,$$

那么得到

$$\Delta u_\lambda=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_i^2}=\lambda^2\Delta u(\lambda x,\lambda^2 t).$$

直接代入方程得到

$$\partial_t u_\lambda=\lambda^2\partial_t u=\lambda^2\Delta u=\Delta u_\lambda,$$

其中用到了 $\partial_t u=\Delta u$，从而 u_λ 是原方程的解。

对于对称性，定义

$$v(x,t)=x\cdot\nabla\cdot u(x,t)+2t\partial_t u(x,t),$$

分别计算 $v_t,\Delta v$ 得到

$$
\begin{aligned}
v_t &= \nabla u \cdot \nabla u + x \cdot \nabla u_t + 2\partial_t u + 2t\partial_{tt} u, \\
\Delta v &= \Delta(x \cdot \nabla u) + 2t\Delta\partial_t u.
\end{aligned}
$$

利用热方程 $\partial_t u = \Delta u$，直接化简即可验证 $v_t = \Delta_v = 0$。 $\square$

练习 3: 设 $n = 1$ 且解具有形式 $u(x,t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$。

1. 证明：方程 $u_t = u_{xx}$ 可约化为

$$
v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0 \quad \left(z = x/\sqrt{t}\right),
$$

   并证明其通解为

$$
v(z) = c\int_0^z e^{-s^2/4}\, ds + d,
$$

   其中 c, d 为常数。

2. 通过选择适当的常数 c，给出 $n = 1$ 时的基本解 $\Phi(x,t)$，并验证该解满足

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,t)\, dx = 1,
$$

   最后分析当 $t \to 0^+$ 时解的初始条件。

证明: 对于第一问，设 $u(x,t) = v(z)$，其中 $z = x/\sqrt{t}$。分别计算导数得到

$$
\begin{aligned}
u_t &= v'(z) \cdot \left(-\frac{x}{2t^{3/2}}\right) = -\frac{z}{2t}v'(z), \\
u_{xx} &= \frac{v''(z)}{t}.
\end{aligned}
$$

代入方程 $u_t = u_{xx}$ 得到

$$
-\frac{z}{2t}v'(z) = \frac{v''(z)}{t} \quad \Longrightarrow \quad v''(z) + \frac{z}{2}v'(z) = 0.
$$

求解 *ODE* 得到

$$
v(z) = c\int_0^z e^{-s^2/4}\, \mathrm{d}s + d.
$$

对于第二问，对 $v(x,t) = v(z)$ 关于 x 求导得到

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v'(z)}{\sqrt{t}} = \frac{c}{\sqrt{t}}e^{-x^2/(4t)},
$$

选取 $c = 1/\sqrt{4\pi}$ 满足初始条件，然后得到基本解

$$
\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/(4t)}.
$$

当 $t \to 0^+$ 时，这个解趋近于 *Dirac*-δ 函数，满足初始条件。 $\square$