

代数学方法

卷一：基础架构

更新日期：2025 年 03 月 25 日

aytony

目录

1. 集合论	3
2. 范畴论基础	4

1. 集合论

2. 范畴论基础

练习 2.0.1: 设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 是任意范畴中的态射。证明若 $A \xrightarrow{gf} C$ 和 $B \xrightarrow{hg} D$ 皆为同构，则 f, g, h 全是同构。

练习 2.0.2: 对范畴 C, C' 定义其并 $C \star C'$ 如下：

$$\begin{aligned} \text{Ob}(C \star C') &:= \text{Ob}(C) \sqcup \text{Ob}(C'), \\ \text{Hom}_{C \star C'}(X, Y) &:= \begin{cases} \text{Hom}_C(X, Y) & X, Y \in \text{Ob}(C) \\ \text{Hom}_{C'}(X, Y) & X, Y \in \text{Ob}(C') \\ \text{独点集} & X \in \text{Ob}(C), Y \in \text{Ob}(C') \\ \emptyset & X \in \text{Ob}(C'), Y \in \text{Ob}(C). \end{cases} \end{aligned}$$

为 $C \star C'$ 中的态射合理地定义合成和单位元，并验证 $C \star C'$ 确实构成范畴；它包含 C 和 C' 作为全子范畴。对于有限序数范畴，证明 $n \star m$ 同构于 $n + m$ 。

练习 2.0.3: 选定 Grothendieck 宇宙，证明其中全体有限全序集及其间的保序映射构成一个范畴 Ord_f 。证明有限序数 $0, 1, \dots$ 构成此范畴的骨架。

练习 2.0.4: 设 C 为范畴，并对每个 $X, Y \in \text{Ob}(C)$ 在 $\text{Hom}_C(X, Y)$ 上给定二元关系 \mathcal{R} 。构造相应的商范畴 C/\mathcal{R} 连同函子 $Q : C \rightarrow C/\mathcal{R}$ 使得

- 对任意 C 中态射 f, g 有 $f \mathcal{R} g \Rightarrow Q(f) = Q(g)$;
- 函子 Q 在对象集上是双射；
- 对任何函子 $S : C \rightarrow C'$ 满足 $f \mathcal{R} g \Rightarrow S(f) = S(g)$ 者，存在唯一的函子 $\bar{S} : C/\mathcal{R} \rightarrow C'$ 使得 $S = \bar{S}Q$ 。

说明 $Q : C \rightarrow C/\mathcal{R}$ 的唯一性。

练习 2.0.5: 设 $F : C_1 \rightarrow C_2$ 和 $G : C_2 \rightarrow C_3$ 为范畴等价（即：具有逆拟函子），证明 $GF : C_1 \rightarrow C_3$ 也是等价，其拟逆可以取为 F 和 G 的拟逆之合成。

练习 2.0.6: 详述例 2.6.8 中各个伴随对的余单位。

练习 2.0.7: 记 Ring 为以环为对象，环同态为态射的范畴，注意到这里的环皆含乘法幺元，同态按定义须保幺元。如果不假设环含幺，所得范畴记为 Rng （这可能是本书中唯一一次考虑这类环）。证明显然的函子 $\text{Ring} \rightarrow \text{Rng}$ 具有左伴随。

练习 2.0.8: 设 (F, G, φ) 是伴随对, 则

1. $\eta : \text{id}_{C_1} \rightarrow GF$ 为同构当且仅当 F 是全忠实函子;
2. $\varepsilon : FG \rightarrow \text{id}_{C_2}$ 为同构当且仅当 G 是全忠实函子。

提示 基于对偶性 (以 C^{op} 代 C), 仅需证 (1)。先证明对所有 C_1 中的态射 $f : X \rightarrow Y$ 都有 $\varphi(Ff) = \eta_Y f : X \rightarrow GFY$: 这是缘于 φ 的自然性导致图表

TEST TODO

交换。米田引理 (定理 2.5.1) 表明 $\eta_Y : Y \xrightarrow{\sim} GFY$ 当且仅当 $f \mapsto \eta_Y f$ 给出双射 $\text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, GFY)$, 其中 X 取遍 C_1 的对象; 既然 φ 是同构, 这又相当于 $f \mapsto Ff$ 是双射, 亦即 F 是全忠实的。

练习 2.0.9: 假设 C 既是完备也是余完备的。对于小范畴 I , 证明对角函子 $\Delta : C \rightarrow C^I$ (定义 2.7.1) 有左、右伴随函子, 阐释它们与 C 中的 \lim_{\rightarrow} 与 \lim_{\leftarrow} 的关系, 相应的单位和余单位作何解释?

练习 2.0.10: 设域 k 为域, 证明在 k -向量空间范畴 $\text{Vect}_f(k)$ 里, 每个对象都同构于一些有限维子空间间的 \lim_{\rightarrow} 。将此想法移植到交换群范畴 Ab (考虑有限生成交换群的 \lim_{\rightarrow})。

练习 2.0.11: 设 C 是 C' 的全子范畴, 包含函子记为 $J : C \rightarrow C'$ 。说明对任意两个函子 $F, G : C_0 \rightrightarrows C$, 与 J 的横合成诱导双射

$$\text{Hom}_{\text{Fct}(C_0, C')}(JF, JG) = \text{Hom}_{\text{Fct}(C_0, C)}(F, G).$$

练习 2.0.12: 在带基点的集合范畴 Set_\bullet 中描述积和余积, 证明它是完备且余完备的。推广到 Top_\bullet 的情形。

练习 2.0.13: 考虑忘却函子 $\text{Set}_\bullet \rightarrow \text{Set}$, 找出 U 的左伴随, 并证明 U 无右伴随。