# Les Formules

$\vec{F} = \sum \vec{F_i}$ ➡ $\vec{\tau} = \sum (\vec{r_i} - \overrightarrow{x(t)}) \wedge \vec{F_i}$ **Les résultantes !**

## Vecteur d'état du Rigidbody

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$$

Position du centre de masse

Matrice d'orientation

Quantité de Mvt

Moment angulaire

Alors

$I(t) = R(t).I_{body}.R(t)^T$

$I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}{}_{body}.R(t)^T$

Alors

$$v(t) = \frac{P(t)}{M}$$

Alors

$\omega(t) = I(t)^{-1}.L(t)$

# Les Formules

$$\frac{d\overrightarrow{X'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{X'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{Y'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Y'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{Z'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Z'}$$

$$\frac{dR}{dt} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t)^* R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}.$$

$$\tau = \sum_i^{\cdots\cdots} \tau_i(t) = \sum_i^{\cdots\cdots} (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$$

# Evolution temporelle (Euler)

- Equation du mouvement de l'objet:

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta t.\frac{dX(t)}{dt}$$

Etat de l'objet à l'image suivante

Etat actuel de l'objet

?

- Etat de l'objet:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$$

- $x(t) \longleftrightarrow$ Position du barycentre de l'objet dans l'espace monde
- $R(t) \longleftrightarrow$ Rotation pr/pr au barycentre de l'objet (orientation)
- $P(t) \longleftrightarrow$ Quantité de mouvement (infos Translation)
- $L(t) \longleftrightarrow$ Moment cinétique (infos Rotation)

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$$

$P(t) \rightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M}$

$L(t) \rightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t)$ / $I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}{}_{body}.R(t)^T$

- Evolution de l’état de l’objet:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftrightarrow \text{Position du barycentre de l'objet dans l'espace monde} \\ \longleftrightarrow \text{Rotation pr/pr au barycentre de l'objet (orientation)} \\ \longleftrightarrow \text{Quantité de mouvement (infos Translation)} \\ \longleftrightarrow \text{Moment cinétique (infos Rotation)} \end{array}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow v(t) = \frac{P(t)}{M} \\ \longrightarrow \omega(t) = I^{-1}(t).L(t) \quad / \quad I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}{}_{body}.R(t)^T \end{array}$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dR(t)}{dt} \\ \frac{dP(t)}{dt} \\ \frac{dL(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{array}{l} — v(t) \\ — \vec{\omega} * R(t) \\ — F(t) \\ — \tau(t) \end{array}$$

$$\tau = \sum_{i}^{\cdots} \tau_i(t) = \sum_{i}^{\cdots} (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$$

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ R(t+\Delta t) \\ P(t+\Delta t) \\ L(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dR(t)}{dt} \\ \frac{dP(t)}{dt} \\ \frac{dL(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ R(t+\Delta t) \\ P(t+\Delta t) \\ L(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

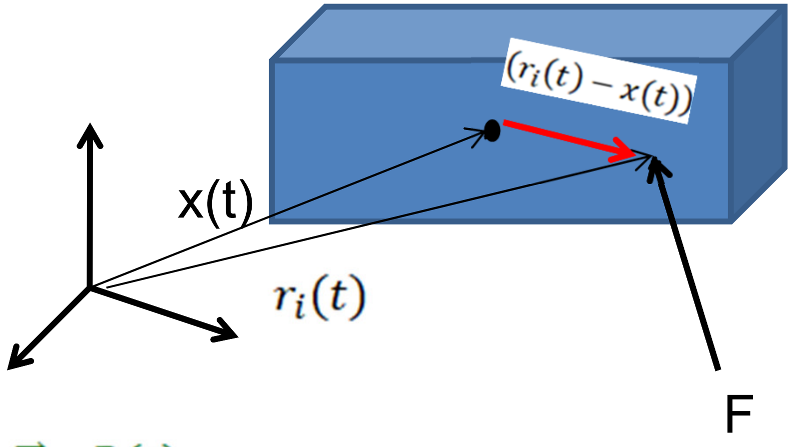
- # Itération i

x(t) connu

P(t) connu → $v(t) = \frac{P(t)}{M}$

R(t) connu→ $I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}{}_{body}.R(t)^T$

L(t)=connu→ $\omega(t) = I^{-1}(t).L(t)$ ⇨ $\dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$




F→ dP/dt

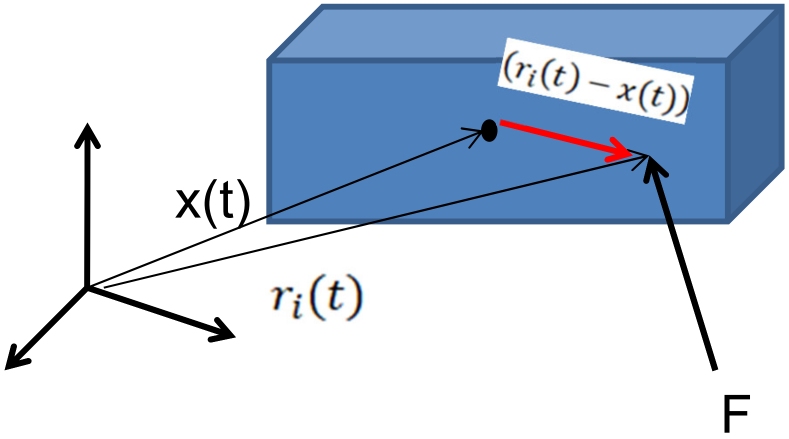
$\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$ ⇨ dL/dt

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ R(t+\Delta t) \\ P(t+\Delta t) \\ L(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

- # Itération 1

x(t) connu

P(t) connu → $v(t) = \frac{P(t)}{M}$




2 R(t) connu→ $I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}{}_{body}.R(t)^T$

2 L(t)=connu→ $\omega(t) = I^{-1}(t).L(t)$ ⇒ $\dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$

1 F→ dP/dt

1 $\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$ ⇒ dL/dt

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ R(t+\Delta t) \\ P(t+\Delta t) \\ L(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ \Delta t.F(t) \\ \Delta t.\tau(t) \end{pmatrix}$$

Etat actuel de l'itération 2

# Itération 2

x(t) connu

P(t) connu → $v(t) = \frac{P(t)}{M}$

R(t) connu→ $I^{-1}(t) = R(t).I^{-1}{}_{body}.R(t)^T$

L(t)=connu→ $\omega(t) = I^{-1}(t).L(t)$

⇨ $\dot{R}(t) = \vec{\omega} * R(t)$

F→ dP/dt

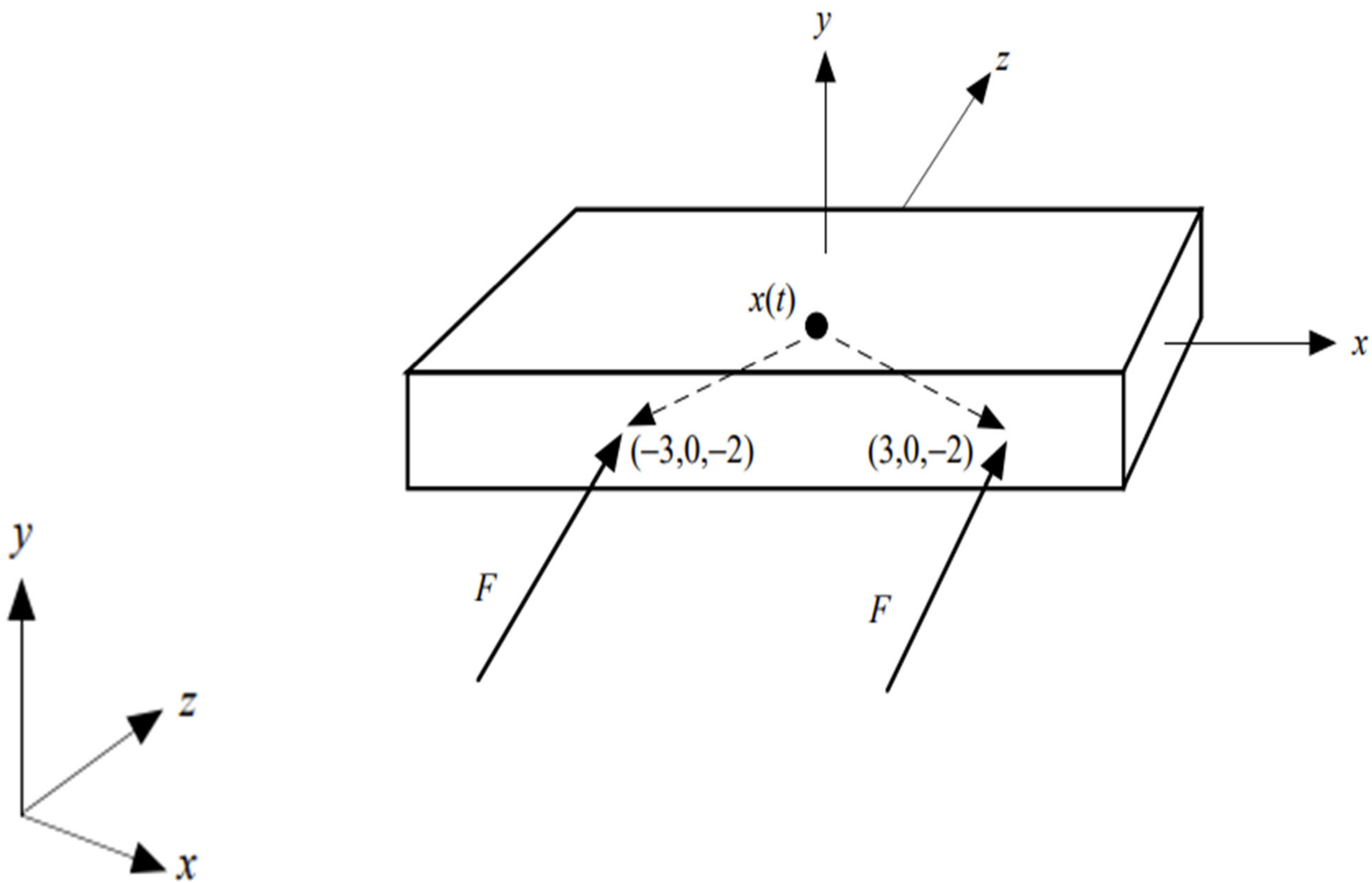
$\tau = \sum_i \tau_i(t) = \sum_i (r_i(t) - x(t)) \wedge F_i(t)$ ⇨ dL/dt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ \Delta t.F(t) \\ \Delta t.\tau(t) \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ R(t+\Delta t) \\ P(t+\Delta t) \\ L(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} + \Delta t. \begin{pmatrix} v(t) \\ \vec{\omega} * R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

# EXERCICE (2h)



# Bibliographie

- Course notes SIGGRAPH 2001 - David Baraff - Physically Based Modeling - Rigid Body Simulation