最適化 2 (第 5 回)

番原睦則 (banbara@i.nagoya-u.ac.jp)

名古屋大学情報学研究科

概要

ネットワーク計画

簡単に言うと，重み付きグラフ上での最適化

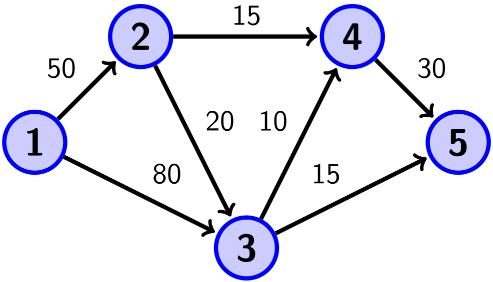
- ネットワーク計画問題のなかには，線形計画問題として定式化できる問題もある．
- 問題のネットワーク構造を利用することにより，効率の良いアルゴリズムを構成できる場合がある．

ネットワーク計画問題の代表例

- 最短路問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

最短路問題

グラフ $G = (V, E)$ の各枝 $(i, j) \in E$ が長さ a_{ij} をもつとき，ある節点 $s \in V$ から別の節点 $t \in V$ への路のなかで，最も長さの短いもの (路に含まれる枝の長さの和が最小のもの) を見つける問題



ダイクストラ法 [E.Dijkstra 1959]

- 最短路問題に対する代表的なアルゴリズム
- 多項式時間アルゴリズム

- 枝の長さに関する非負条件 $a_{ij} \geq 0$ $((i,j) \in E)$ を仮定
- $\boldsymbol{d(i)}$: 節点 s から各節点 $i \in V$ への最短路の長さの上限値
- $\boldsymbol{S}$: $d(i)$ が s から i への真の最短路の長さに等しい節点の集合
- $d(i)$ を次々と真の最短路の長さに更新していき，$S = V$ となるまで繰り返す.
- $\overline{S}$ は S の補集合. $\overline{S} = V \backslash S$
- $\boldsymbol{p(j)}$: s から j への最短路において，j の直前の節点

ダイクストラ法の計算手順

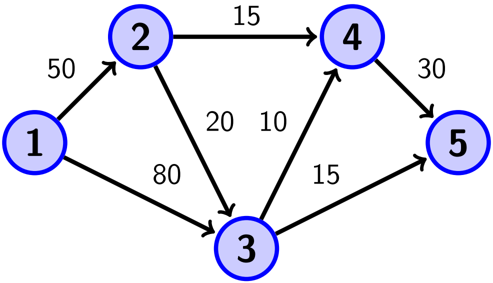
0. $S := \emptyset,\ \overline{S} := V,\ d(s) := 0,\ d(i) := \infty\ (i \in V \backslash \{s\})$ とおく．
1. $S = V$ なら計算終了．そうでないなら，
$d(v) = \min\{d(i) \mid i \in \overline{S}\}$ であるような節点 $v \in \overline{S}$ を選ぶ．
2. $S := S \cup \{v\},\ \overline{S} := \overline{S} \backslash \{v\}$ とし，$(v, j) \in E$ かつ　$j \in \overline{S}$ であるようなすべての枝 (v, j) に対して

$$d(j) > d(v) + a_{vj} \quad \text{ならば} \quad d(j) := d(v) + a_{vj}, \quad p(j) := v$$

とする．ステップ (1) に戻る．

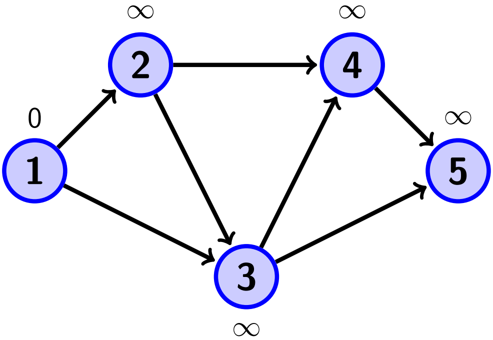
ダイクストラ法の計算例

ダイクストラ法を以下の例に適用する．ただし，$s = 1$ とする．



初期化

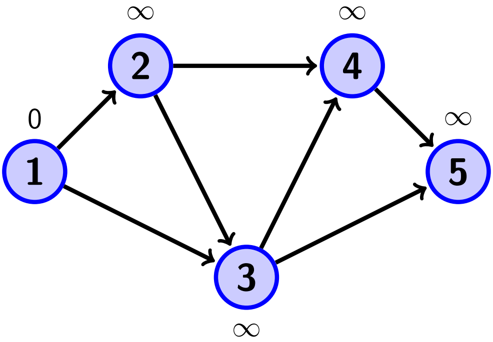
- $S := \emptyset, \ \overline{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $d(1) := 0, \ d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = \infty$



$p(2)$	*undef*
$p(3)$	*undef*
$p(4)$	*undef*
$p(5)$	*undef*

反復 1

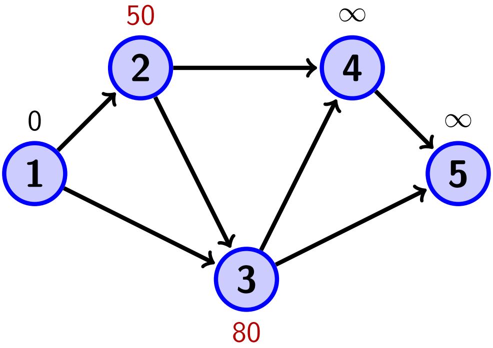
- $\min\{d(1), d(2), d(3), d(4), d(5)\} = \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\}$
- $v = 1$ を選ぶ．$S := \{1\}$，$\overline{S} = \{2, 3, 4, 5\}$
- $d(2) = \infty > d(1) + a_{12} = 0 + 50$ なので $d(2) = 50$，$p(2) = 1$
- $d(3) = \infty > d(1) + a_{13} = 0 + 80$ なので $d(3) = 80$，$p(3) = 1$



$p(2)$	*undef*
$p(3)$	*undef*
$p(4)$	*undef*
$p(5)$	*undef*

反復 1

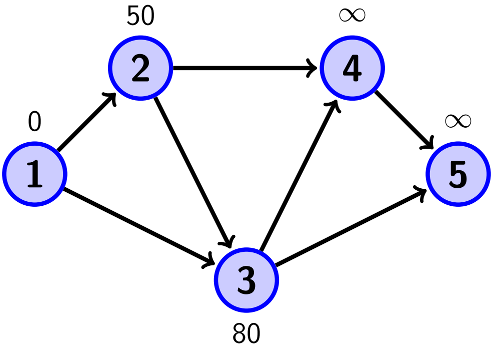
- $\min\{d(1), d(2), d(3), d(4), d(5)\} = \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\}$
- $v = 1$ を選ぶ． $S := \{1\}$， $\overline{S} = \{2, 3, 4, 5\}$
- $d(2) = \infty > d(1) + a_{12} = 0 + 50$ なので $d(2) = 50$， $p(2) = 1$
- $d(3) = \infty > d(1) + a_{13} = 0 + 80$ なので $d(3) = 80$， $p(3) = 1$



$p(2)$	1
$p(3)$	1
$p(4)$	*undef*
$p(5)$	*undef*

反復 2

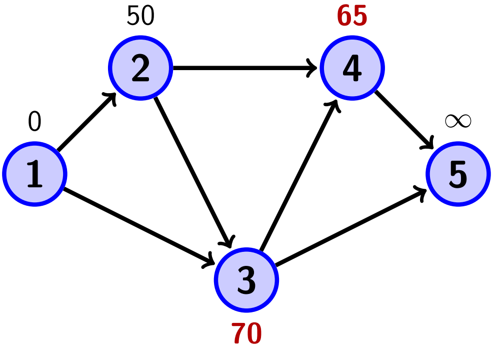
- $\min\{d(2), d(3), d(4), d(5)\} = \min\{50, 80, \infty, \infty\}$
- $v = 2$ を選ぶ． $S := \{1, 2\}$， $\overline{S} = \{3, 4, 5\}$
- $d(3) = 80 > d(2) + a_{23} = 50 + 20$ なので $d(3) = 70$， $p(3) = 2$
- $d(4) = \infty > d(2) + a_{24} = 50 + 15$ なので $d(4) = 65$， $p(4) = 2$



$p(2)$	1
$p(3)$	1
$p(4)$	*undef*
$p(5)$	*undef*

反復 2

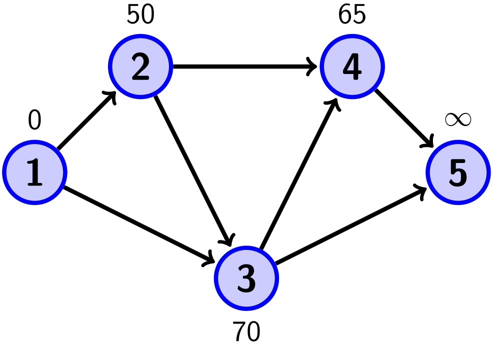
- $\min\{d(2), d(3), d(4), d(5)\} = \min\{50, 80, \infty, \infty\}$
- $v = 2$ を選ぶ． $S := \{1, 2\}$， $\overline{S} = \{3, 4, 5\}$
- $d(3) = 80 > d(2) + a_{23} = 50 + 20$ なので $d(3) = 70$， $p(3) = 2$
- $d(4) = \infty > d(2) + a_{24} = 50 + 15$ なので $d(4) = 65$， $p(4) = 2$



$p(2)$	1
$p(3)$	2
$p(4)$	2
$p(5)$	*undef*

反復 3

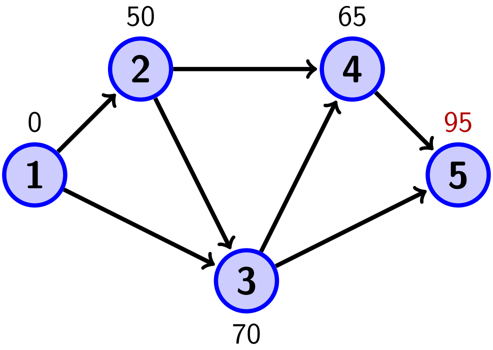
- $\min\{d(3), d(4), d(5)\} = \min\{70, 65, \infty\}$
- $v = 4$ を選ぶ．$S := \{1, 2, 4\}$，$\overline{S} = \{3, 5\}$
- $d(5) = \infty > d(4) + a_{45} = 65 + 30$ なので $d(5) = 95$，$p(5) = 4$



$p(2)$	1
$p(3)$	2
$p(4)$	2
$p(5)$	*undef*

反復 3

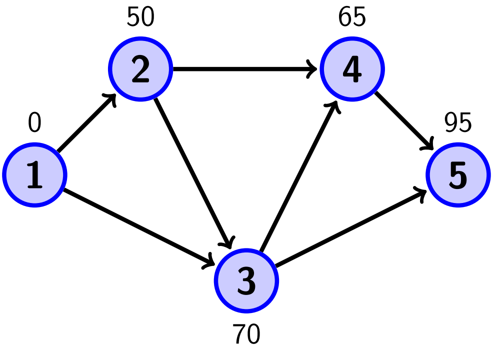
- $\min\{d(3), d(4), d(5)\} = \min\{70, 65, \infty\}$
- $v = 4$ を選ぶ． $S := \{1, 2, 4\}$， $\overline{S} = \{3, 5\}$
- $d(5) = \infty > d(4) + a_{45} = 65 + 30$ なので $d(5) = 95$， $p(5) = 4$



$p(2)$	1
$p(3)$	2
$p(4)$	2
$p(5)$	4

反復 4

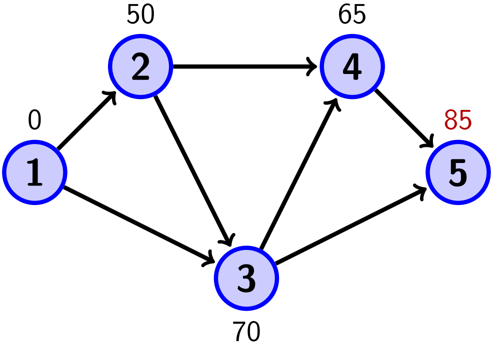
- $\min\{d(3), d(5)\} = \min\{70, 95\}$
- $v = 3$ を選ぶ． $S := \{1, 2, 3, 4\}$， $\overline{S} = \{5\}$
- $d(5) = 95 > d(3) + a_{35} = 70 + 15$ なので $d(5) = 85$， $p(5) = 3$



$p(2)$	1
$p(3)$	2
$p(4)$	2
$p(5)$	4

反復 4

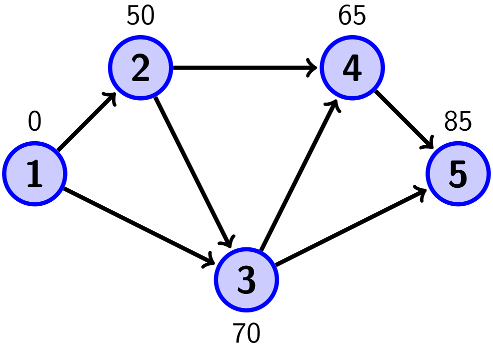
- $\min\{d(3), d(5)\} = \min\{70, 95\}$
- $v = 3$ を選ぶ．$S := \{1, 2, 3, 4\}$，$\overline{S} = \{5\}$
- $d(5) = 95 > d(3) + a_{35} = 70 + 15$ なので $d(5) = 85$，$p(5) = 3$



$p(2)$	1
$p(3)$	2
$p(4)$	2
$p(5)$	3

反復 5

- $\min\{d(5)\}$
- $v = 5$ を選ぶ． $S := \{1,2,3,4,5\}$， $\overline{S} = \emptyset$

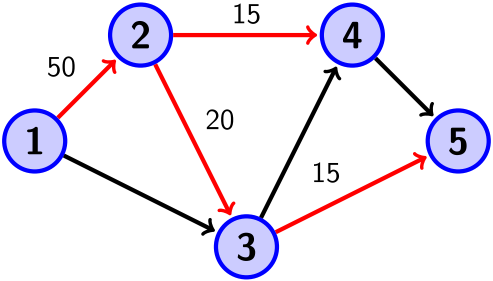


$p(2)$	1
$p(3)$	2
$p(4)$	2
$p(5)$	3

反復 6

- $S = V$ なので計算終了
- 各 $d(i)$ の値は，節点 1 から節点 i への最短路の長さ

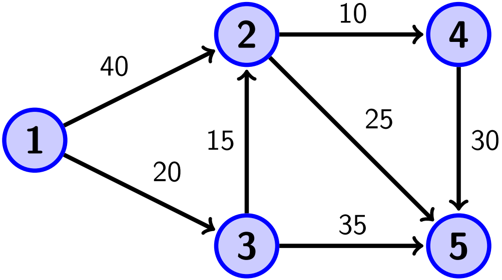
$$d(1) = 0,\ d(2) = 50,\ d(3) = 70,\ d(4) = 65,\ d(5) = 85$$



$p(2)$	1
$p(3)$	2
$p(4)$	2
$p(5)$	3

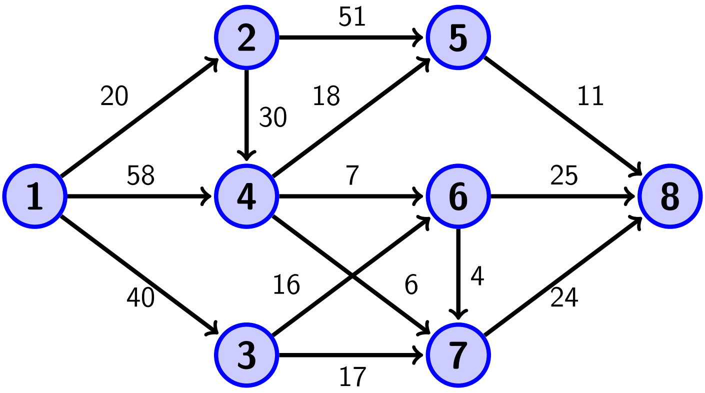
演習 1

ダイクストラ法を用いて，以下の重み付きグラフの節点 1 から各節点への最短路を求めよ．



演習 2

ダイクストラ法を用いて，以下の重み付きグラフの節点 1 から各節点への最短路を求めよ．



最大流問題

グラフ $G = (V, E)$ の各枝 $(i, j) \in E$ が容量 x_{ij} をもつとき，ある節点 $s \in V$(ソース) から別の節点 $t \in V$(シンク) まで流すことのできる流量の最大値を求める問題