אינפי 2מ' | תרגול 6 - עם ניקה

שם: איל שטיין

May 9, 2023

נושאי השיעור: אינטגרל מוכלל

נושא ראשון - חזרה על אינטגרל מוכלל

תרגיל 1. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$$

- נבחן את הביטויים אחד אחד:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right)|_0^M=\infty$$

  – ולכן גם האינטגרל המקורי מתבדר.

נושא שני - מבחני השוואה:

למה 2. אם $a>0$ האינטגרל $\int_0^a\frac{dx}{x^p}$ מתכנס $\iff$ $p<1$

למה 3. עבור $a>0$ האינטגרל $\int_0^\infty\frac{dx}{x^p}$ מתכנס $\iff$ $p>1$

תרגיל 4. בדקו האם האינטגרל הבא מתכנס:

- $\int_0^1\frac{dx}{1-\cos(x)}$. האינטגרד $f(x)=\frac{1}{1-\cos(x)}$ רציף (ולכן אינטגרבילי) וחיובי בקטע $(0,1]$.
  – פיתוח טיילור סביב $x=0$ של $\cos(x)$ הוא $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ ולכן $1-\cos(x)=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}$
  – ולכן "ננחש" ש $1-\cos(x)$ מתנהגת כמו x^2 בסביבת 0.

* ולכן לפי הניחוש הזה, גם $\frac{1}{1-\cos(x)}$ מתנהג כמו $\frac{1}{x^2}$
· על מנת לבדוק אם הניחוש נכון, נחשב את גבול המנה שלהם:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1-\cos(x)}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}$$

· ולפי לופיטל מתקיים:

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin(x)}=2>0$$

· ולכן $\int_0^1\frac{dx}{1-\cos(x)}$ ו- $\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ מתבדרים יחד (לפי הלמה).

תרגיל 5. עבור אילו ערכי α,β האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

1. $\int_0^1\frac{dx}{(ln^\beta(1+x))\cdot x^\alpha}$

• נבחן את האינטגרד:

$$f(x)=\frac{1}{(ln^\beta(1+x))\cdot x^\alpha}$$

– הפונקציה רציפה וחיובית בקטע $(0,1]$ ולכן אפשר להשתמש במבחן השוואה גבולי.
– פיתוח טיילור של $ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}$ ולכן $ln^\beta(1+x)$ מתנהג כמו x^β.
* ולכן $f(x)$ מתנהג כמו $\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$
– לפי מבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{(ln^\beta(1+x))\cdot x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\alpha+\beta}}{(ln^\beta(1+x))\cdot x^\alpha}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\beta}{ln^\beta(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{ln(1+x)}\right)^\beta$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{ln(1+x)}=1$$

* ולכן $\int_0^1\frac{dx}{(ln^\beta(1+x))\cdot x^\alpha}$ מתכנס יחד עם $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$ אמ"מ $\alpha+\beta<1$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{(ln^{\beta}(x))\cdot(x-1)^{\alpha}}$

- נבצע החלפת משתנים, $t=x-1 \Leftarrow x=t+1$, נקבל כי כאשר $x=1$ מתקיים $t=0$ וכאשר $x=2$ מתקיים $t=2$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}\cdot\left(ln^{\beta}\left(1+t\right)\right)}$$

  – ולכן לפי הסעיף הקודם, האינטגרל מתכנס אמ"מ $\alpha+\beta<1$

תרגיל 6. עבור אילו ערכי α האינטגרל $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^{\alpha}(x)}$

פתרון:

- הפונקציה $\frac{1}{\cos^{\alpha}(x)}$ לא חסומה ליד הקצוות ולכן נפצל את האינטגרל:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^{\alpha}\left(x\right)} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos^{\alpha}\left(x\right)} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^{\alpha}\left(x\right)}$$

  – האינטגרל המקורי יתכנס אמ"מ שני המחוברים מתכנסים. נשים לב כי מכיון ש$\cos\left(x\right)=\cos\left(-x\right)$ נקבל כי שני המחוברים הם סימטריים ולכן נבחן אחד מהם:
  – נשתמש בזהות $\cos\left(x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ וגם בפיתוח טיילור של $\sin\left(x\right)=x-\frac{x^3}{3!}$
    * כלומר בסביבת אפס $\sin\left(x\right)$ מתנהג כמו x, ולכן $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ מתנהג כמו $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ מתנהג כמו $\frac{\pi}{2}-x$ ליד $x=\frac{\pi}{2}$
    * לכן ננחש ש$\frac{1}{\cos^{\alpha}(x)}$ מתנהג כמו $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}$ בסביבת $\frac{\pi}{2}$.
  – מכיוון ש $\frac{1}{\cos^{\alpha}(x)}$ פונקציה רציפה וחיובית ב$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ וגם $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}$ רציפה וחיובית ב$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, נבחן את גבול המנה שלהם:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos\left(x\right)}\right)^{\alpha} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos\left(x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-1}{-\sin\left(x\right)}=1$$

    * ולכן האינטגרלים $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^{\alpha}(x)}$ ו-$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}$ מתכנסים יחד אמ"מ $\alpha<1$, כי אפשר לעשות החלפת משתנים
  – אותו טיעון תקף עבור המחובר השני בכלל הסימטריות של $\cos\left(x\right)$ ולכן נקבל שהאינטגרל המקורי מתכנס אמ"מ $\alpha<1$.

תרגיל 7. בדקו התכנסות של $\int_0^{\infty}\frac{arctan(x)}{x(x+1)}dx$

פתרון:

- יש לנו שתי נקודות סינגולריות: $x=0$ וגם ב∞. לכן נפצל לשני אינטגרלים:

$$\int_0^\infty \frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}dx=\int_0^1 \frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}dx+\int_1^\infty \frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}dx$$

- נבחן את המחובר השמאלי:

$$\int_0^1 \frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}dx$$

  – נבדוק את ההתנהגות של האינטגרנד ליד 0^+:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{arctan\left(x\right)}{x}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$\overbrace{=}^{l'hopital}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x^2}=1$$

    * ולכן האינטגרנד $\frac{arctan(x)}{x(x+1)}$ חסומה ורציפה ב$[0,1]$ פרט לנקודה אחת $(x=0)$ ולכן אינטגרבילית רימן בקטע.
      · לכן האינטגרל $\int_0^1\frac{arctan(x)}{x(x+1)}dx$ אינו אינטגרל מוכלל אלא אינטגרל רימן.

- נבחן את המחובר הימני:

$$\int_1^\infty \frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}dx$$

  – מכיוון שכאשר $x\to\infty$ הפונקציה $arctan\left(x\right)$ מתנהגת כמו $\frac{\pi}{2}$ והפונקציה $x\left(x+1\right)$ מתנהגת כמו x^2.
  – ומכיוון ש $\frac{arctan(x)}{x(x+1)}>0$ נקבל כי:

$$\frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}\approx\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{arctan(x)}{x(x+1)}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{arctan\left(x\right)}{x\left(x+1\right)}\cdot x^2=\frac{\pi}{2}$$

    * ולכן $\int_1^\infty\frac{arctan(x)}{x(x+1)}dx$ ו-$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ מתכנסים יחד.

תרגיל 8. לאילו ערכי m,q מתכנס האינטגרל $\int_1^\infty x^m e^{-qx}dx$?
פתרון:

- ראשית נבחן את הגבול עבור $q>0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^{qx}}=0$$

  – ועבור $q<0$ נקבל שהגבול:

$$\lim_{x\to\infty}e^{|q|x}x^m=\infty$$

  * ולכן קיים $x_0>1$ כך שלכל $x>x_0$ הפונקציה תהיה גדולה מ-1

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{|q|x}x^m=\overbrace{\int_1^{x_0}e^{|q|x}x^m}^{=C}+\lim_{M\to\infty}\int_{x_0}^M \underbrace{e^{|q|x}x^m}_{>1}$$

  · ניתן להשתמש במבחן ההשוואה על המחובר הימני ולקבל:

$$\begin{aligned}\int_1^{x_0}e^{|q|x}x^m+\lim_{M\to\infty}\int_{x_0}^M e^{|q|x}x^m&>C+\lim_{M\to\infty}\int_{x_0}^M 1dx\\&=C+\lim_{M\to\infty}(M-x_0)=\infty\end{aligned}$$

  · ולכן האינטגרל מתבדר לכל ערך של m.

  – כלומר עבור $q<0$ האינטגרל מתבדר לכל m.
  – עבור $q=0$ נקבל:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^m e^{-qx}dx&=\int_1^\infty x^m dx\\&=\int_1^\infty\frac{1}{x^{-m}}dx\end{aligned}$$

  * ולכן האינטגרל מתכנס אמ"מ $-m>1$ כלומר $m<-1$

  – עבור $q>0$ נקבל:

$$\int_1^\infty\frac{x^m}{e^{qx}}$$

* נחפש פונקציה גדולה יותר שאינטגרל שלה מתכנס ונשווה ביניהן, ולכן נשווה ל$\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^m}{e^{qx}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+2}}{e^{qx}}=0$$

* ולכן הפונקציה שלנו, $\frac{x^m}{e^{qx}}$, קטנה יותר מהפונקציה $\frac{1}{x^2}$. כלומר $\frac{1}{x^2}<\frac{x^m}{e^{qx}}$ כאשר $x\to\infty$.
  · ולכן לפי מבחן השוואה מתקיים כי $\int_1^\infty\frac{x^m}{e^{qx}}$ מתכנס לכל m.

• <u>לסיכום</u>:
  – עבור $q<0$ האינטגרל מתבדר לכל m
  – עבור $q=0$ האינטגרל מתכנס אמ"מ $m<-1$
  – עבור $q>0$ אינטגרל מתכנס לכל m

תרגיל 9. מצאו את כל ערכי הפרמטר p (אם קיימים) שעבורם מתכנס האינטגרל $\int_0^\infty\frac{x^p-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x-1}$

פתרון:

• לכאורה יש שתי נקודות סינגולריות: 0,1 וגם שאיפה לאינסוף. לכן נוסיף עוד שתי נקודות: $0,\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},\infty$
  – נבדוק מה קורה ליד $x=1$ (כלומר נבדוק אם הפונקציה חסומה. אם היא חסומה אז אפשר לחשב אינטגרל רימן רגיל):

$$\lim_{x\to1}\frac{x^p-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x-1}\overbrace{=}^{l'hopital}\frac{p\cdot x^{p-1}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{1}=p+\frac{1}{2}$$

* כלומר לפונקציה יש אי רציפות סליקה בנקודה $x=1$\
  · ולכן $\int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}}f(x)\,dx$ הוא אינטגרל רימן וניתן לחלק את הקרן $(0,\infty)$ לשני קטעים בלבד: $(0,2]$ ו-$[2,\infty)$

• בקטע $(0,2]$ האינטגרל הוא:

$$\int\limits_0^2\frac{\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}$$

  – עבור $p=-\frac{1}{2}$ האינטגרד שווה לאפס ולכן האינטגרל מתכנס.
  – עבור $p>-\frac{1}{2}$, כלומר $-p<\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^p-x^{-\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{p+\frac{1}{2}}-1\right)$$

* כלומר:

$$\frac{\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{x^{p+\frac{1}{2}}-1}{x-1}\right)$$

* ננחש שהפונקציה מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ולכן נשווה את הפונקציה ל-$\frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{x^{p+\frac{1}{2}}-1}{x-1}=1$$

· ולכן $\int_{0}^{2}f\left(x\right)dx$ ו- $\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנסים יחד.

– עבור $p<-\frac{1}{2}$ נקבל שהמונה:

$$\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{p}\left(1-x^{-p-\frac{1}{2}}\right)$$

* נציב בפונקציה ונקבל:

$$\frac{x^{p}\left(1-x^{-p-\frac{1}{2}}\right)}{x-1}<0$$

· כלומר זו פונקציה שלילית (אבל שומרת על סימן קבוע) ולכן נכפול את הפונקציה ב(-1) כדי לקבל פונקציה חיובית (והאינטגרל שלהם יהיה עם סימנים הפוכים)

* ולכן נשווה את הפונקציה $(-1)\cdot\frac{x^{p}\left(1-x^{-p-\frac{1}{2}}\right)}{x-1}$ עם $\frac{1}{x^{-p}}$:

$$\lim_{x\to0^{+}}\frac{(-1)\cdot\frac{x^{p}\left(1-x^{-p-\frac{1}{2}}\right)}{x-1}}{\frac{1}{x^{-p}}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{1-x^{-p-\frac{1}{2}}}{1-x}=1$$

· ולכן האינטגרל $\int_{0}^{2}\frac{\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}dx$ מתכנס יחד עם $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^{-p}}$ עבור $-p<1$, כלומר $p>-1$

· אנחנו עדיין תחת ההנחה ש $p<-\frac{1}{2}$ ולכן האינטגרל $\int_{0}^{2}\frac{\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}dx$ מתכנס אמ"מ $-1<p<-\frac{1}{2}$

- <u>סיכום ביניים:</u> בקטע $[0,2]$ האינטגרל מתכנס עבור $-1<p$
- בקטע $[2,\infty)$ האינטגרל $\int_{2}^{\infty}\frac{\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}dx$
  – הוא יתכנס עבור $p=-\frac{1}{2}$
  – עבור $p>-\frac{1}{2}$ נקבל:

$$0<\frac{\frac{1}{x^{-p}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}\sim\frac{x^{p}}{x}=\frac{1}{x^{-p+1}}>0$$

* נשווה את הפונקציה ל$g\left(x\right)=\frac{1}{x^{-p+1}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\ldots=1$$

· ולכן $\int_{2}^{\infty}f\left(x\right)dx$ מתכנס יחד עם $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^{-p+1}}dx$ אמ"מ $-p+1>1$ כלומר $p<0$.

· אנחנו תחת ההנחה כי $p>-\frac{1}{2}$ ולכן נקבל $-\frac{1}{2}\leq p<0$

– עבור $p<-\frac{1}{2}$ נקבל $\frac{x^{p}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}\sim\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x}\sim-x^{\frac{3}{2}}<0$

* נשווה את $f\left(x\right)\frac{x^{p}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{x-1}$ ל$g\left(x\right)=x^{-\frac{3}{2}}$ ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\ldots=1$$

· ולכן $\int_{2}^{\infty}f\left(x\right)$ מתכנס יחד עם $\int_{2}^{\infty}x^{-\frac{3}{2}dx}$

· כלומר $\int_{0}^{\infty}f\left(x\right)dx$מתכנס עבור $p<0$

• <u>לסיכום:</u> האינטגרל כולו מתכנס עבור $-1<p<0$