(104031) אינפי 2מ' | תרגול 2 - ניקה

שם: איל שטיין

April 4, 2023

נושאי השיעור: שיטת ההצבה

נושא ראשון - שיטת ההצבה:

חצי שני של השיעור:

-

תרגיל 1.

- צ"ל: $\int\frac{dx}{\cos(x)+2\sin(x)+3}$

הוכחה.

- נציב $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$
- ואז: $dx=\frac{2dt}{t^2+1}$
  * הפונקציה תהיה:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\cos\left(x\right)+2\sin\left(x\right)+3} & =\int\frac{1}{\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}+2\frac{2t}{1+t^{2}}+3}\\
 & =\int\frac{2dt}{1-t^{2}+4t+3\left(1+t^{2}\right)}\\
 & =\int\frac{2dt}{2t^{2}+4t+4}\\
 & =\int\frac{dt}{t^{2}+2t+2}
\end{aligned}$$

* יש לנו פולינום אי-פריק במכנה ולכן נעשה השלמה לריבוע (כמו שלמדנו בתרגול הראשון):

$$\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}$$
$$=arctan\left(t+1\right)+c$$

* נציב בחזרה $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ונקבל:

$$\int\frac{dx}{\cos\left(x\right)+2\sin\left(x\right)+3}=arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+c$$

■

נושא שני - אינטגרביליות רימן:

תרגיל 2. הוכיחו כי $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ אינטגרבילית רימן בקטע $[1,2]$

הוכחה.

- תזכורת:

הגדרה 3. תהי $f\left(x\right)$ חסומה. $f\left(x\right)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש:

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$$

- הפונקציה $\frac{1}{x}$ חסומה בקטע $[1,2]$.
- יהי $\varepsilon>0$.
- נמצא חלוקה P כך שיתקיים $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$, על ידי כך שנחלק את הקטע ל-n קטעים שווים (נקרא גם חלוקה רגולרית).
  - נבחר P_n, חלוקה ל-n קטעים שווים. כלומר:

$$P_n=\left\{x_0=1,x_1=1+\frac{1}{n},\ldots,x_n=2\right\}$$

* בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ עבור $i=1,\ldots,n$ מתקיים כי $f\left(x\right)$ רציפה ולכן f מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי.
  · נסמנם ע"י M_i ו-m_i.
  · $f\left(x\right)$ מונוטונית יורדת ולכן בקטע $[x_{i-1},x_i]$, המקסימום $M_i=\frac{1}{x_{i-1}}=f\left(x_{i-1}\right)$ והמינימום $m_i=\frac{1}{x_i}=f\left(x_i\right)$

– נבחן את סכום דרבו עליון:

$$U\left(f,P_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\cdot M_i$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{i-1}}$$

– נבחן את סכום דרבו תחתון:

$$L\left(f-P_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\cdot m_i$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

* נבחן את ההפרש ביניהם:

$$U-L=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{i-1}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$$

· נשים לב שזהו סכום "טלסקופי" ולכן יתקבל:

$$U-L=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2n}$$

· נבחר $n>\frac{1}{2\varepsilon}$ ואז יתקיים:

$$U\left(f,P_n\right)-L\left(f,P_n\right)=\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

■

הגדרה 4.

- נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ו-P_n סדרת חלוקות $[a,b]$ כך ש: $\lambda\left(P_n\right)\to 0$

– אזי לכל בחירה של נקודות ביניים c_i מתקיים כי עבור $S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\cdot f\left(c_i\right)$ (נקרא "סכום רימן") מתקיים:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{n\to\infty}S_n$$

הערה 5. כלומר לכל בחירה של נקודות ביניים, ברגע שהפונקציה אינגטרבילית, סכומי רימן שווים לסכומי דרבו.

תרגיל 6. חשבו $\int_0^1 e^x dx$.

הוכחה.

- e^x רציפה בכל $\mathbb{R}$.
  – לפי משפט, אם פונקציה רציפה בקטע סגור אז היא אינטגרבילית רימן.
  – לכן e^x אינגטרבילית רימן בקטע $[0,1]$.
- ניקח סדרה P_nשל חלוקות רגולריות:

$$P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\right\}$$

  – פרמטר החלוקה שלנו שואף לאפס כי $\lambda\left(P_n\right)=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$
    * לכן לכל בחירה של c_i (נקודות ביניים) נקבל סכום רימן, שהגבול של סדרת סכומי רימן יהיה שווה ל $\int_0^1 e^x dx$.
      · נבחר $c_i=\frac{i}{n}$, כלומר לכל קטע בחלוקה P_n נבחר את הנקודות הקיצוניות של הקטע.
      · כעת נקבל כי:

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}f\left(c_i\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i\end{aligned}$$

      · תזכורת - נוסחה לסכום של סדרה הנדסית סופית:

$$s=\sum_{i=1}^{n}q^i=q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

      · נציב ונקבל:

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{e^{\frac{n}{n}}-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\cdot e^{\frac{1}{n}}$$

- אנחנו מחפשים את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

- על מנת למצוא אותו נבחן את:

$$=(e-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

- נציב $t=\frac{1}{n}$ ולפי לופיטל "$\frac{0}{0}$" כאשר $t\to 0^{+}$ נקבל:

$$=(e-1)\cdot\lim_{t\to 0^{+}}\frac{e^{t}-1}{t}$$

$$=(e-1)\cdot\lim_{t\to 0^{+}}\frac{e^{t}}{1}=(e-1)\cdot 1$$

- ולפי ההגדרה מתקיים כי:

$$\int_{0}^{1}e^{x}dx=\lim_{n\to\infty}S_n=e-1$$

■

תרגיל 7.

- תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

- תהי P חלוקה של קטע $[0,1]$
- צ"ל:
  - א. חשבו סכום דרבו תחתון $L(f,P)$ ו- $\underline{\int_{0}^{1}} f(x)\,dx$
  - ב. חשבו סכום דרבו עליון $U(f,P)$ ו-$\overline{\int_{0}^{1}} f(x)\,dx$

הוכחה.

- תהי P חלוקה של הקטע $[0,1]$:

$$P=\{0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=1\}$$

- לפי צפיפות הרציונליים, בכל קטע בחלוקה תהיה נקודה אי רציונלית ונקודה רציונלית
  - ולכן בכל קטע בחלוקה, קיימת נקודה בה $f(x)=0$
    - ולכן $m_i=Inf\{f(x)\ \mid x\in[x_i,x_{i-1}]\}=0$
    - כלומר לכל חלוקה P מתקיים כי $L(f,P)=0$
      - ואז לכל חלוקה P, לפי הגדרת אינטגרל תחתון מתקיים:

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=Sup\{L(f,P)\}=0$$

■