שם: איל שטיין

April 17, 2024

[

לוגיקה | תרגול 3

שם: איל שטיין

April 17, 2024

נושא השיעור: הגדרה אינדוקטיבית של קבוצת הפסוקים החוקיים

תרגיל 1.

הוכיחו כי $(p_0 p_1)$ אינו פסוק חוקי.

פיתרון:

- נסמן את מספר האטומים ב-פסוק w להיות $\#_A(w)$
- נסמן את מספר הקשרים הבינאריים ב-w להיות $\#_\circ(w)$
- נבחר תכונה T:

$$T = \{w \in X \mid \#_A(w) = \#_\circ(w) + 1\}$$

- **צ"ל:**
  1. $a \notin T$
  2. $X_{B,F} \subseteq T$
- נפתור:

1. ראשית מתקיים $\#_A(a) = 1$ וגם $\#_\circ(a) = 0$

- ולכן $a \notin T$.

.2

- **בסיס:**
  - ניקח מילה בבסיס, $w \in B$.
    - היא מקיימת $\#_A(w) = 1$ וגם $\#_\circ(w) = 0$
      - כלומר $w \in T$.
- **צעד:**
  - יהיו $\beta, \gamma \in T$. לפי הגדרת T מתקיים:

$$\#_A(\beta) = \#_\circ(\beta) + 1$$

$$\#_A(\gamma) = \#_\circ(\gamma) + 1$$

  - נראה עבור $F_\neg$:

$$w = f_\neg(\beta) = (\neg\beta)$$

$$\#_A(w) = \#_A(\beta) = \#_\circ(w) + 1 = \#_\circ(\beta) + 1$$

  - נראה עבור $F_\circ$, לכל $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

$$w = f_\circ(\beta, \gamma) = (\beta \circ \gamma)$$

$$\#_A(w) = \#_A(\beta) + \#_A(\gamma)$$

$$= \underbrace{\#_\circ(\beta) + 1 + \#_\circ(\gamma)}_{=\#_\circ(w)} + 1$$
$$= \#_\circ(w) + 1$$

תרגיל 2.

<u>תרגיל 2</u> : נגדיר קבוצה אינדוקטיבית :

- **העולם** : $\mathrm{X} = \mathrm{WFF}$, קבוצת הפסוקים החוקיים.
- **הבסיס** : $B = \{(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \in \mathrm{WFF} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}\}$
- **הפעולות** : $\mathrm{F} = \{f_1, f_2\}$, כאשר :

$$f_1(w) = \begin{cases} p_0 & \text{קיימים } \alpha, \beta \in \mathrm{WFF} \text{ כך ש- } w = (\alpha \wedge \beta) \\ (\neg w) & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_2(w_1, w_2) = (w_1 \to w_2)$$

הוכיחו/הפריכו : $p_0 \in \mathrm{X}_{B,\mathrm{F}}$.

פתרון:

- נראה כי $p_0 \notin X_{B,F}$.
- נגדיר תכונה T - קיים לפחות קשר ובנוסף, כל הפסוקים שבהם קשר המרכזי הוא $\neg$ או $\to$.
- **צ"ל:**
  1. $p_o \notin T$
  2. $X_{B,F} \subseteq T$.
- **הוכחה:**
  1. נשים לב כי $p_0 \notin T$ כי אין בו קשרים בכלל.
  2. נוכיח באינדוקציית מבנה שמתקיים $T \supseteq X_{B,F}$:
     - **בסיס:**
       * יהי $w \in B$.
         - הקשר המרכזי ה-w הוא $\to$ לפי הגדרת B
         - ולכן $w \in T$
     - **צעד:**
       * יהיו $w_1, w_2 \in T$.
       * נבחן את $w = f_1(w_1)$.
         - מכיוון שהקשר המרכזי ב-w_1 הוא לא $\wedge$ (לפי הנחת האינדוקציה), מהפעלת הפונקציה על w_1 נקבל :

$$w = f_1(w_1) = (\neg w_1)$$

- ולכן $w \in T$.

* נבחן את $w = f_2 \left(w_1, w_2\right)$

$$w = f_2 \left(w_1, w_2\right) = \left(w_1 \to w_2\right)$$

- מתקיים $w \in T$ כי הקשר המרכזי ב-w הוא $\to$.