(104031) אינפי 1מ' | תרגול 14 - יוליה

שם: איל שטיין

December 7, 2022

נושאי השיעור: פונקציות, גבול של פונקציות

הערה 1. תזכורת - אם $f:A\to B$ ו-$g:B\to C$ אז $g\circ f\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$, כלומר $g\circ f:A\to C$

נושא ראשון - הרכבה של פונקציות:

תרגיל 2. רשמו $f\circ g,\ \ g\circ f$
עבור $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$, $g\left(x\right)=x^{2}$
א) מהו תחום ההגדרה ומהי התמונה של כל הרכבה?
פתרון:

- התמונה של f היא $\left[-1,1\right]$ ותחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}$
- התמונה של g היא $\left[0,\infty\right]$ ותחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}$
- נתחיל מ $g\circ f\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$
  - כלומר, $g\circ f\left(x\right)=g\left(\sin^{2}\left(x\right)\right)$
  - לכן, $g\circ f:\mathbb{R}\to\left[0,1\right]$
- כעת נבחן את $f\circ g\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=\sin\left(x^{2}\right)$
  - לכן $f\circ g:\mathbb{R}\to\left[-1,1\right]$

תרגיל 3. מצאו $f\circ g$ עבור $f=\sin\left(x\right)$ ו-$g=arc\cos\left(x\right)$
פתרון:

- בגלל תכונות $arcos$ מתקיים $g:\left[-1,1\right]\to\left[0,\pi\right]$
- נבחן את $f\circ g\left(x\right)=\sin\left(arccos\left(x\right)\right)$
  - נחפש זהות כדי לפשט את הביטוי $\sin\left(arccos\left(x\right)\right)$:
    - * נשתמש בזהות $sin^{2}\left(x\right)+cos^{2}\left(x\right)=1$

- אך נעביר אגף ונקבל: $sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$
- נוציא שורש ונקבל $sin(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}$

– מכיוון ש$arccos(x) \in [0, \pi]$ מתקיים $\sin(arccos(x)) \geq 0$

* נשתמש בזהות שהזכרנו ונקבל:

$$\sin(arccos(x)) = \pm\sqrt{1 - cos^2(arccos(x))}$$

- מכיוון שאמרנו ש$\sin(arccos(x)) \geq 0$, מתקיים שלא יכול להיות שהביטוי שלילי
- ומכיוון ש$cos^2(arccos(x)) = x^2$, מתקיים:

$$\sin(arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

- ולכן $f \circ g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
  – ומכיוון ש-f היא sin היא לא יכולה להיות גדולה מ-1
    * כלומר, $0 \leq f \circ g(x) \leq 1$
- ולכן נסכם ונאמר שתחום ההגדרה והתמונה הם $f \circ g : [-1, 1] \to [0, 1]$

תרגיל 4. מצאו $f \circ g$, כולל תחום הגדרה ותמונה

- כאשר $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$
  – $f(x) = \frac{1}{x+2}$
- וכאשר $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$
  – $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$

פתרון:

- נבחן את $f \circ g = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)+2} = \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}+2} = \frac{x-2}{3(x-1)}$
- מכיוון שהטווח של g לא כולל את 2, הפונקציה $g(x)$ לא מוגדרת כאשר $x = 2$
- ומכיוון שהטווח של f הוא $[0, 1]$, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת רק עבור $0 \leq x \leq 1$
  – לכן, יש לדרוש ב-$f \circ g$ ש$x \neq 2$ וגם $0 \leq g(x) \leq 1$
    * כלומר, $0 \leq g(x) = \frac{x+1}{x+2} \leq 1$

$$0 \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 1 \quad \backslash \cdot (x+2)$$

* מכיוון שלא ידוע אם $(x+2)$ חיובי או שלילי נחלק לשני אי שוויונים:

1. $0 \leq x+1 \leq x+2$
   (א) לא מוביל לתוצאה של $g\left(x\right)$ שיהיה בין 1 ל-0.
2. $0 \geq x+1 \geq x+2$
   (א) מוביל לכך ש $x \leq -1$
   (ב) לכן תחום ההגדרה של $g\left(x\right)$ בהרכבה הוא $x \leq -1$ ואז $g\left(x\right)$ תעביר ל-$f\left(x\right)$ ערכים בין $[0,1]$

תרגיל 5. נגדיר $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ כך ש $f\left(x\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$
צ"ל: מצאו אם קיימת $f^{-1}\left(x\right)$ הפיכה ל$f\left(x\right)$.
פתרון:

- לפי ההגדרה, f הפיכה אם היא חד חד ערכית ו"על".
- נוכיח ש-f חד חד ערכית ואז נמצא את התחום ההגדרה של f^{-1} כדי להראות שf היא על:
- ראשית, נוכיח ש-f מונוטונית עולה ממש ולכן לפי המשפט היא תהיה חד חד ערכית:
  – אנחנו יודעים e^{x} היא מונוטונית עולה ממש
  – ואנחנו יודעים ש$-e^{-x}$ היא מונוטונית עולה ממש
  – ולכן גם אם נחבר אותן ונחלק ב-2 עדיין נקבל פונקציה מונוטונית עולה ממש:

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

  – מכיוון ש- $f\left(x\right)$ מונוטונית עולה ממש, היא גם חד חד ערכית.
- נמצא את הביטוי לפונקציה ההפוכה ל-f:
  – יהי $y\geq0$.
  – נחפש $y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$$2y=e^{x}-e^{-x}\quad\backslash\cdot e^{x}$$

$$2\cdot y\cdot e^{x}=e^{2x}-1$$

* נסמן $t=e^{x}$ ונקבל:

$$0=t^{2}-2\cdot y\cdot t-1$$

- ולכן:

$$t_{1,2}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

ומכיוון ש $e^x=t\geq 0$, ניקח את $t_1=y+\sqrt{y^2+1}$

* כלומר קיבלנו:

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

* נפעיל ln ונקבל:

$$x=ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

- מכיוון שהגדרנו את y להיות $y\geq 0$, מתקיים שהביטוי $\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\geq 1$
- בגלל התכונות של ln, הביטוי $ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$ מוגדר ל $y\in[0,\infty)$ והוא מחזיר ערכים חיוביים.
  - הראינו שהתמונה של f^{-1} שווה לטווח של f וכן הפוך.
    * לכן f היא על.

• לכן קיימת $f^{-1}=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

  – ותחום ההגדרה שלה הוא $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$

תרגיל 6. יהי קטע $[a,b]$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ לא חסומה (בה"כ מלמעלה).

הוכיחו: קיימת נקודה $x_0\in[a,b]$ כך ש f לא חסומה בכל סביבה של x_0.

פתרון: אפשר לפתור או עם BW או עם היינה בורל. נפתור בעזרת היינה בורל.

• נניח בשלילה שלכל $x\in[a,b]$ קיימת סביבה של ε_x כך ש-$f\left(x\right)$ חסומה בקטע I_{ε_x} (קטע פתוח).

  – לכן $\bigcup_{x\leftarrow[a,b]}I_{\varepsilon_x}$ הינו כיסוי פתוח של $[a,b]$

  – לפי למת היינה בורל, לקטע $[a,b]$ (החסום והסגור) קיים תת כיסוי סופי $\{I_{\varepsilon_1},I_{\varepsilon_2},\ldots,I_{\varepsilon_n}\}$

    * לפי הנחת השלילה בכל אחד מהקטעים האלה מתקיים שf חסומה, כלומר $|f\left(x\right)|<M_k$ כאשר $x\in I_{\varepsilon_k}$
      - קבוצת החסמים $\{M_1,M_2,\ldots,M_N\}$ היא קבוצה סופית ולכן קיים $M\in max\{M_1,M_2,\ldots,M_N\}$
      - ולכן לכל $x\in[a,b]$ מתקיים:
        – קיים k כך ש $x\in I_k$

  – לכן קיבלנו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $|f\left(x\right)|<M_k\leq M$

    * כלומר קיבלנו ש-f חסומה.
      - בסתירה לנתון.

• לכן, קיימת נקודה $x_0\in[a,b]$ כך ש-f לא חסומה בכל סביבה של x_0.

נושא שני - גבול של פוקנציה:

הגדרה 7. גבול של פונקציה באינסוף.
תהי פונקציה f מוגדרת ב-$[a,\infty)$. נאמר ש $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0\geq a$ כך שלכל $x>x_0$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$

הגדרה 8. גבול של פונקציה במינוס אינסוף.
תהי פונקציה f מוגדרת ב-$(-\infty,a]$. נאמר ש $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0\leq a$ כך שלכל $x<x_0$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$

תרגיל 9. הוכיחו לפי הגדרה:

1. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$
2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-1}\neq3$

פתרון:

.1

- $f\left(x\right)=\frac{2x+1}{x-1}$ מוגדרת בקרן $(-\infty,0]$
- <u>פורמט:</u>
  - יהי $\varepsilon>0$
  - עבור $x_0=?$, $x_0\leq0$ מתקיים:
    - עבור כל $x<x_0$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-2\right|<\varepsilon$
- נבחן את הביטוי $\left|f\left(x\right)-2\right|$

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)-2\right| &= \left|\frac{2x+1}{x-1}-2\right|\\ &= \left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right|\\ &= \left|\frac{3}{x-1}\right|\\ &= \frac{3}{\left|x-1\right|}\end{aligned}$$

- ומכיוון שתחום ההגדרה של $f\left(x\right)$הוא רק כאשר $x\leq0$, מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-2\right|=\frac{3}{1+\left(-x\right)}$$

$$\frac{3}{1+\left(-x\right)}<\frac{3}{-x}$$

* נבדוק מתי $\frac{3}{-x} < \varepsilon$ ונקבל (אם ורק אם) $x < -\frac{3}{\varepsilon}$.

- נמלא את הפורמט ונקבל:
  - יהי $\varepsilon > 0$
    * עבור $x_0 = -\frac{3}{\varepsilon}$, $x_0 \leq 0$ מתקיים:
      · עבור כל $x < x_0$ מתקיים $|f(x) - 2| < \varepsilon$

2. **צ"ל:** שלילת הגדרת הגבול - קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $x_0 \leq 0$ (בגלל תחום ההגדרה שבחרנו) קיים $x < x_0$ עבורו ε $|f(x) - 3| \geq$

- נבחן את הביטוי $\left|\frac{2x+1}{x-1} - 3\right|$

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x+1}{x-1} - 3\right| &= \left|\frac{2x+1-3x+3}{x-1}\right| \\ &= \frac{|-x+4|}{|x-1|}\end{aligned}$$

  - מכיוון שדרשנו ש-$x \leq 0$ אפשר להוריד את הערך המוחלט גם בונה וגם במכנה ונקבל:

$$\left|\frac{2x+1}{x-1} - 3\right| = \frac{4-x}{x-1}$$

  - ולכן כאשר $x < -1$ נקבל:

$$\frac{4-x}{x-1} > \frac{-x}{-x-x} = \frac{1}{2}$$

- כלומר, עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$, לכל $x_0 \leq 0$ קיים $x = min\{-2, x_0 - 1\}$ עבורו מתקיים $|f(x) - 3| \geq \frac{1}{2}$.
- שללנו את הגדרת הגבול והראנו שהביטוי מתקיים.
- לכן, -3 הוא לא הגבול.

תרגיל 10. הוכיחו לפי ההגדרה ש$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

פתרון:

- יהי $\varepsilon > 0$.
- נחפש $x_0 > 0$ כך שלכל $x > x_0$ יתקיים $\left|\frac{x}{e^x} - 0\right| < \varepsilon$.
  - מכיוון שגם x וגם e^x חיוביים, אפשר להוריד את הערך המוחלט ונקבל: $\frac{x}{e^x} < \varepsilon$
  - ומכיוון ש-$x > 0$ אז גם $[x] \geq 0$.

* לכן ניתן לכתוב:

$$0 < \frac{x}{e^x} < \frac{[x]+1}{e^{[x]}}$$

* נגדיר <u>סדרה</u> a_n להיות $a_n = \frac{n+1}{e^n}$.
  - נשים לב שזו סדרה חיובית ולכן ניתן להשתמש במבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{e^{n+1}}}{\frac{n+1}{e^n}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{e} < 1$$

  - ולכן לפי מבחן המנה, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
* עבור ε קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$
  - מכיוון ש-a_n חיובית אפשר להוריד את הסוגריים ולקבל: $\frac{n+1}{e^n} < \varepsilon$
  - לכן נבחר $x_0 = [N] + 1$ ואז יתקיים ש $[x_0] > N$
  - כעת, כאשר $x > x_0 > 0$ יתקיים:

$$\left|\frac{x}{e^x} - 0\right| = \frac{x}{e^x}$$

$$\frac{x}{e^x} < \frac{[x]+1}{e^{[x]}}$$

  - ומהגדרת הסדרה a_n מתקיים

$$\frac{[x]+1}{e^{[x]}} = a_{[x]} < \varepsilon$$

  - ולכן אם נחבר את אי השוויונות נקבל:

$$\left|\frac{x}{e^x} - 0\right| < \varepsilon$$

- נחבר הכל ביחד ונקבל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים x_0 כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $\left|\frac{x}{e^x} - 0\right| < \varepsilon$.

תרגיל 11. תהי פונקציה $f(x)=\sin(x-[x])$.
הוכיחו: לא קיים $\lim_{x\to\infty}f(x)$
פתרון:

- נבחן את הביטוי $x-[x]$.
  - כאשר $x=0$ אז גם $(x-[x])=0$
    * לפי הגדרת עיגול כלפי מטה, הביטוי $x-[x]$ לא שווה 1 ולכן והוא תמיד יהיה בקטע $[0,1)$.
- לכן, לכל $x-[x]$ נקבל ש $0\geq\sin(x-[x])> sin(1)$.
- נניח בשלילה שקיים L כך ש $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$
  - אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0>0$ כך שלכל $x>x_0$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$
    * לפי תכונות הערך המחלט מתקיים $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$
  - לכן, עבור כל $x_1>x_0$ יתקיים $L-\varepsilon<f(x_1)<L+\varepsilon$
  - וגם עבור כל $x_2>x_0$ יתקיים $L-\varepsilon<f(x_2)<L+\varepsilon$

$$L-\varepsilon<f(x_2)<L+\varepsilon \quad \backslash\cdot(-1)$$

$$-(L-\varepsilon)>-f(x_2)>-(L+\varepsilon)$$

$$-(L+\varepsilon)<-f(x_2)<-(L-\varepsilon)$$

* ולכן אם נחבר $(+)$ את שני אי השוויונות נקבל:

$$-2\varepsilon<f(x_1)-f(x_2)<2\varepsilon$$

· ולפי תכונות הערך המוחלט מתקיים:

$$|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$$

* כלומר, לפי הגדרת הגבול, קיים x_0 כך שלכל $x_1,x_2>x_0$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$

  - נחפש ε_1, x_1, x_2 עבורם הביטוי $|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$ לא מתקיים:
    * נבחר $x_1=[x_0]+1$ ונבחר $x_2=x_1+\frac{\pi}{6}$
    * לכן $|f(x_1)-f(x_2)|=|\sin(x_1-[x_1])-\sin(x_2-[x_2])|$

· ומכיוון שx_1 הוא מספר שלם $\sin\left(x_1-[x_1]\right)=0$

· ומכיוון ש x_2 הוא לא מספר שלם, מתקיים $\sin\left(x_2-[x_2]\right)=\frac{\pi}{6}$

· לכן: $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=\frac{1}{2}$

* נחפש מתי $\frac{1}{2}>2\varepsilon_1$ ונקבל שזה קורה כאשר $\varepsilon_1=\frac{1}{8}$.

– מצאנו $\varepsilon_1=\frac{1}{8}$ ו- $x_1=[x_0]+1$ ו- $x_2=x_1+\frac{\pi}{6}$ עבורם הגדרת הגבול לא מתקיימת כי מתקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|>2\varepsilon_1$.

* סתרנו את הנחת השלילה לפיה קיים לפונקציה גבול.

• כלומר, לא קיים ל-$f\left(x\right)$ גבול כאשר $x\to\infty$.