(104031) אינפי 1מ' | תרגול 20 - יוליה

שם: איל שטיין

January 4, 2023

נושאי השיעור: רצפיות במ"ש, הנגזרת

נושא ראשון - רציפות במ"ש:

תרגיל 1.

- תהי $f(x)=\sqrt{x}$
  - ראינו בהרצאה ש- $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש ב-$[0,1]$ (אבל אפשר להוכיח גם לפי קנטור היינה: כי היא רציפה בקטע סגור ולכן היא רציפה במ"ש)

צ"ל: נוכיח ש $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש ב-$[1,\infty)$
פתרון: נפתור לפי הגדרה.

- יהי $\varepsilon>0$.
- נחפש $\delta>0$ כך שאם $x,y\in[1,\infty)$ וגם $|x-y|<\delta$ אז יתקיים $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|<\varepsilon$
  - נבחן את הביטוי $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|$:

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \cdot\frac{\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|}$$

$$=\frac{|x-y|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|}$$

  * מכיוון ש $1\le\sqrt{x}$ וגם $1\le\sqrt{y}$ נקבל ש $\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 2$
    - ולכן $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\frac{1}{2}$
  * נקבל ש:

$$\frac{|x-y|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|}\leq\frac{1}{2}|x-y|<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon$$

* לכן מספיק לקחת $\delta = 2\varepsilon$

תרגיל 2.

- תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקרן $[a,\infty)$.
- יהי $b > a$.
  - נתון כי f רציפה במ"ש בקטע $[a,b]$ ורציפה במ"ש בקרן $[b,\infty)$

צ"ל: f רציפה במ"ש ב$[a,\infty)$

פתרון:

- ניקח $a < x < b$ וניקח $b < y$
  - ניקח $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|$ ולפי אי שוויון המשולש יתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right| \leq \left|f\left(x\right)-f\left(b\right)\right| + \left|f\left(b\right)-f\left(y\right)\right|$
    * ולכן נוכל לבחור b מסוים ולקבל שקיים y בקרן $[b,\infty)$ כך שאם $\left|b-y\right| < \delta_1$ אז $\left|f\left(b\right)-f\left(y\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$
    * נבחר את אותו ה-b ונקבל שקיים $x \in [a,b]$ עבורו אם $\left|x-b\right| < \delta_2$ אז $\left|f\left(x\right)-f\left(b\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$
      · ואז נקבל שלפי הגדרת במ"ש יתקיים שf רציפה במ"ש ב$[a,\infty)$ כי עבור b מסוימת קיימת

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 > \left|x-b\right| + \left|y-b\right| \geq \left|x-y\right|$$

$$\delta > \left|x-y\right|$$

קיימים x,y כך שאם $\left|x-y\right| < \delta$ אז יתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

תרגיל 3. תהי $f\left(x\right)$ רציפה $[a,\infty)$

- נתון כי קיים $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = L$

צ"ל: הוכיחו כי $f\left(x\right)$ רציפה במ"ש ב $[a,\infty)$

פתרון:

- יהי $\varepsilon > 0$
- נתון שהגבול באינסוף קיים ולכן לפי תנאי קושי קיים $a < x_0$ כך שלכל $x,y > x_0$ מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right| < \varepsilon$$

  - נתבונן בקטע $[a, x_0+1]$.
    * לפי קנטור היינה, אם f רציפה ב$[a,x_0+1]$ אז רציפה במ"ש בקטע.

- לכן קיימת $\delta_1 > 0$ כך שאם $x,y \in [a,x_0+1]$ וגם $|x-y| < \delta_1$ אז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$
  - נסמן $\delta = min\{\delta_1, 1\}$ (כדי שכל x,y יהיו בקטע $[a,x_0+1]$ אם $|x-y| < \delta$)
    * יהיו $x,y \in [a,\infty)$ כך ש $|x-y| < \delta$ (בה"כ $x<y$):
      - נחלק לשני מקרים:

1. אם $x > x_0$
   (א) אז גם $y > x > x_0$
   (ב) ואז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

2. אם $x \le x_0$
   (א) אז $y < x_0 + 1$ (כי $\delta \le 1$)
   (ב) ולכן $x,y \in [a,x_0+1]$
   i. הם מקיימים $|x-y| < \delta_1$ ושייכים לקטע ולכן $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

- הוכחנו שהפונקציה רציפה במ"ש בקרן.

תרגיל 4. הראו כי $f(x) = \frac{1}{x}$ לא רציפה במ"ש בקטע $(0,1)$.

פתרון:

- נמצא $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיימים $x,y \in (0,1)$ אם $|x-y| < \delta$ כך שמתקיים $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \ge \varepsilon_0$
  - יהי $\delta > 0$.
    * ניקח שתי נקודות: $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}$
    * כלומר נמצא $n \in \mathbb{N}$ כך ש $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta$ (ונקבל $n > \frac{1}{2\delta}$)
      - ואז עבור $y_n = \frac{1}{2n}$, $x_n = \frac{1}{n}$ יתקיים:

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} < \delta$$

      - וגם:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n}\right| &= |n-2n| \\ &= n \ge 1 = \varepsilon_0\end{aligned}$$

- מצאנו $\varepsilon_0 = 1$ כך שלכל $\delta > 0$ קיימים $x,y \in 0,1$, $|x_n - y_n| < \delta$ כך שמתקיים $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n}\right| \ge \varepsilon_0$

נושא שני - הנגזרת:

הגדרה 5. נגזרת:

- תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת בקטע פתוח המכיל x_0.
- נאמר כי $f'\left(x_0\right)=L$ אם $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$
  - אפשר גם לכתוב כך: אם $\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ כאשר $h=x-x_0$

משפט 6. אם f גזירה ב-x_0 אז f רציפה ב-x_0.

תרגיל 7.

- בדקו רציפות וגזירות ב-0 $x_0=0$ עבור:
  1. $f_0\left(x\right)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$
  2. $f_1\left(x\right)=\begin{cases}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$
  3. $f_2\left(x\right)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

1. פתרון עבור f_0 :

- ראינו ש$\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.
  - אפשר להוכיח לפי משפט היינה:
    * למשל אם ניקח סדרה $x_n=\frac{1}{\pi\cdot n+\frac{\pi}{2}}$
      · אז יתקיים $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\cdot n+\frac{\pi}{2}\right)=\left(-1\right)^n$
      · ולכן לפי משפט היינה, גם $\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.
      · ומכיוון שהגבול בנקודה לא קיים אז f_0 לא רציפה ב $x_0=0$ כי הגדרת רציפות היא שהגבול בנקודה שווה לערך הפונקציה בנקודה.
  - ולפי משפט, אם f_0 לא רציפה ב-$x_0=0$ אז היא לא גזירה ב $x_0=0$.

2. פתרון עבור f_1:

- $\lim_{x\to0}f_1=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
  - יתקיים "חסומה כפול שואפת לאפס" והגבול בנקודה $x_0=0$ יהיה 0.
- לפי הגדרת הפונקציה, $f_1\left(0\right)=0$

– ולכן הנגזרת תהיה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{\cancel{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

– ומכיוון שהגבול של $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים, הנגזרת לא קיימת ב- $x_0=0$.

3. **פתרון עבור f_2:**

- נבדוק גזירות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

– ראינו שהגבול הוא 0 בגלל "חסומה כפול שואפת לאפס".

* לכן f_2 גזירה ב$x_0=0$, כלומר $f_2'(0)=0$

· ולפי משפט אם f_2 גזירה ב $x_0=0$ אז היא רציפה ב $x_0=0$

- נשאל: האם f_2 גזירה ברציפות ב-0? (כלומר האם הפונקציה f_2' רציפה בנקודה $x=0$)

– כלומר האם קיימת סביבה של $x=0$ בה f_2 גזירה וגם $f_2'(x)$ רציפה ב $x=0$

* כאשר $x\neq 0$ נקבל:

$$f_2'(x)=\left(x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_2'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

* ולכן $f_2'(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$
  * f_2 גזירה בכל $\mathbb{R}$.
  * הגבול $\lim_{x\to 0}f_2'(x)$ לא קיים כי $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$ אך ל $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ אין גבול. וכן הגבול בנקודה לא יכול להיות שווה לערך בנקודה (כי הוא ל לא קיים).
  * לכן f_2 לא "גזירה ברציפות" ב$x=0$.

הערה 8. $f_2'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)-f(0)}{x-0}$ זה לא אותו דבר כמו לומר $\lim_{x\to 0}f_2'(x)$

הערה 9. נתבונן ב$f(x)=|x|$.

* f לא גזירה ב$x=0$ כי $\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ והגבול הזה לא קיים כי הגבולות החד צדדיים שונים זה מזה:
  - כלומר $\lim_{x\to 0^+}f'=1$ אבל $\lim_{x\to 0^-}f'=-1$
    * כי $f'(x)=1$ כאשר $x>0$ ו- $f'(x)=-1$ כאשר $x<0$
      * כלומר:

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{x-t}\right)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-1$$

      * כלומר הנגזרת $f'(0)$ לא קיימת אבל הגבולות החד צדדיים של הנגזרת קיימים.

תרגיל 10.

תהי פונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ -x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

צ"ל: הראו כי $f(x)$ גזירה בנקודה אחת בדיוק.

פתרון:

* נוכיח ש-$f(x)$ גזירה ב$x=0$ ולא גזירה לכל $x\neq 0$.
* נתחיל מלהראות שהיא לא רציפה כאשר $x\neq 0$:
  - יהי $x_0\neq 0$.
  - קיימת סדרה $\mathbb{Q}\ni x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ וקיימת סדרה $\mathbb{Q}\not\ni y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$
    * מתקיים גם:
      * $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_n^2=x_0^2$
      * וגם $\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}y_n^2=-x_0^2$
    * מכיוון ש$x_0\neq 0$ אז $x_0^2\neq -x_0^2$ ולכן לפי משפט היינה לא קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$

- מכיוון שהגבול לא קיים אז f לא רציפה ב-x_0
- לכן לפי משפט, f לא גזירה ב-x_0

- נוכיח ש $f(x)$ גזירה ב-$x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

– נתבונן ב:

$$0\leq\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\frac{|f(x)|}{|x|}=\frac{x^2}{|x|}$$
$$=\frac{\left|x^2\right|}{|x|}=|x|\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

* מכיוון שמתקיים $\left|\frac{f(x)}{x}\right|=|x|\xrightarrow[x\to x_0]{}0$
* לפי המשפט, $|g(x)|\xrightarrow[x\to 0]{}0$ אם ורק אם $g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$
  - כלומר מכיוון ש $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ אז גם $\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$

– ולכן $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$

תרגיל 11. תהי $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
צ"ל: מצאו <u>לפי ההגדרה</u> $f'(a)$ עבור כל a בתחום ההגדרה של f.
פתרון:

- f מוגדרת בתחום $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- יהי $a\neq 1$
- נמצא גבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{a+1}{a-1}}{x-a}$$

– נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x+1)(a-1)-(a+1)(x-1)}{(x-a)(a-1)(x-1)}$$

– נפתח סוגריים במונה ונקבל:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to a} \frac{ax-x+a-1-ax+a-x+1}{(x-a)(a-1)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{2a-2x}{(x-a)(a-1)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{2(a-x)}{(x-a)(a-1)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{-2}{(a-1)(x-1)}
\end{aligned}$$

* קיבלנו פונקציה אלמנטרית $\frac{-2}{(a-1)(x-1)}$, כלומר:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{-2}{(a-1)(x-1)} &= -\frac{2}{(a-1)^2} \\
&= -\frac{2}{(a-1)^2} = f'(a)
\end{aligned}$$

תרגיל 12. יהיו $f(x), g(x)$ שתי פונקציות גזירות ב-x_0.

נגדיר פונקציה חדשה $k(x) = \begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ g(x) & x > x_0 \end{cases}$

צ"ל: מצאו תנאים הכרחיים ומספיקים כדי ש-$k(x)$ תהיה גזירה ב-x_0.

פתרון:

• לפי הגדרה, $k(x)$ גזירה ב-x_0 אם ורק אם קיים הגבול:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0}$$

– לפי משפט, זה יקרה אם ורק אם:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0}$$

1. נתחיל מהגבול משמאל:

– לפי הגדרת k נקבל:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

* מכיוון ש-$f'\left(x_0\right)$ קיים לפי הנתון, יוצא שהגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ קיים.
* ולכן גם הגבול החד צדדי $\lim_{x\to x_0^-}\frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0}$ קיים ושווה ל-$f'\left(x_0\right)$.

2. נעבור לגבול הימני:

– לפי הגדרת k מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{k\left(x\right)-k\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

– נוסיף ונחסיר את $g\left(x_0\right)$ במונה ונקבל:

$$=\lim_{x\to x_0^+}\left(\overbrace{\frac{g\left(x\right)-g\left(x_0\right)}{x-x_0}}^{\to g'(x_0)}+\frac{g\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)}{\underbrace{x-x_0}_{\to 0}}\right)$$

* מכיוון שבשבר הימני המכנה שואף ל-0 אז כל השבר ישאף לאינסוף.
* כלומר, בשביל שהגבול יהיה קיים, נצטרך שהשבר הימני יהיה שווה אפס.
* במילים אחרות: הגבול קיים אם ורק אם $g\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$. לכן נקבל:

$$=\lim_{x\to x_0^+}\left(\overbrace{\frac{g\left(x\right)-g\left(x_0\right)}{x-x_0}}^{\to g'(x_0)}+\frac{\overbrace{g\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)}^{=0}}{\underbrace{x-x_0}_{\to 0}}\right)$$

– קיבלנו שהגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{k(x)-k(x_0)}{x-x_0}$ קיים ושווה ל-$g'\left(x_0\right)$ אם ורק אם $g\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)$

– לפי משפט, גבול קיים בנקודה אם ורק אם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים.

* ולכן הגבול $k'\left(x_0\right)$ קיים אם ורק $g'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)$.

• <u>לסיכום:</u> $k\left(x\right)$ גזירה ב-x_0 אם ורק אם:

1. $f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$
2. $f'\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)$