שם: איל

April 3, 2024

[

לוגיקה | תרגול 12

שם: איל

April 3, 2024

נושא השיעור: גדירות של יחס במבנה

נושא ראשון - גדירות של יחס נתון בתוך מבנה נתון על ידי נוסחה:

__הגדרה 1__: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו-P יחס n-מקומי מעל D^M ($P \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{n}$).

נאמר כי P __גדיר__ ב-M אם קיימת נוסחה φ מעל τ בעלת n משתנים חופשיים $v_1, v_2, \ldots, v_n$ כך שלכל השמה z מתקיים:

$$M \models_z \varphi \iff (z(v_1), z(v_2), \ldots, z(v_n)) \in P$$

- זה שקול להוספת P במילון, כלומר ש$P \ni ((z(v_1), z(v_2), \ldots, z(v_n))$
- נשים לב כי P הוא לא סימן יחס אלא יחס ממש.
  - הוא לא מסומן ב-P^M כי הוא לא נמצא במבנה.
  - בכוונה כתבו P ולא R כדי שלא נתבלבל עם סימני היחס שיש במילון.
  - זה שימושי כי במקום לכתוב הרבה יחסים בתוך מילון, אפשר להגיע בעזרת המילון והמבנה ליחסים האלה.

__תרגיל 1__: נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ,\circ), c\rangle$.

1. הגדירו במבנה $M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, 0\rangle$ את היחס הדו-מקומי $P_1 = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j\right\}$.
2. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\}\rangle$ את היחס הדו-מקומי $P_2 = \{(A,B) \mid A \cup \{1\} \subseteq B\}$.
3. הגדירו במבנה $M = \langle P(\mathbb{N}), \subseteq, \cup, \{1\}\rangle$ את היחס החד-מקומי $P_3 = \{\emptyset\}$.

פיתרון 1. א.

- בשאלות כאלה תמיד יגידו לנו להגדיר יחס במבנה ולא יגידו לנו "הוכח/הפרך".
- תמיד יש $\approx$ במילון ולכן נרצה להגדיר שמתקיים גם $i \leq j$ וגם $i \neq j$.
- לכן נגדיר נוסחה φ שיש לה שני משתנים חופשיים שמקיימת שלכל השמה z מתקיים $M \models_z \varphi$.
  - __סימון:__ נהוג לסמן את המשתנים החופשיים $\varphi(v_1, v_2)$ - כי משתנים קשורים לא מושפעים מההשמה.
- לכן נבחר נוסחה

$$\varphi(v_1, v_2) = R(v_1, v_2) \wedge (\neg(v_1 \approx v_2))$$

- נרצה להראות שלכל השמה z מתקיים $M \models_z \varphi \iff (z(v_1), z(v_2), \dots, z(v_n)) \in P$
- תהי השמה z:

$$M \models_z \varphi$$

$$\iff$$

$$M \models_z R(v_1, v_2) \;\; AND \;\; M \models_z (\neg(v_1 \approx v_2))$$

$$\iff$$

$$(\overline{z}(v_1), \overline{z}(v_2)) \in R^M \;\; AND \;\; M \not\models_z (v_1 \approx v_2)$$

$$\iff$$

$$\overline{z}(v_1) \leq \overline{z}(v_2) \;\; AND \;\; M \;\; z(v_1) \neq z(v_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$z(v_1) < z(v_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z(v_1), z(v_2)) \in P$$

פיתרון 1. ב.

- נשים לב כי $F(A,c)$ מוגדרת להיות $A \cup \{1\}$ במבנה שלנו.
- לכן נגדיר את הנוסחה שלנו להיות:

$$\varphi(v_1, v_2) = R(F(v_1, c), v_2)$$

- תהא השמה z:

$$M \models_z \varphi(v_1, v_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$M \models_z R^M(F(v_1, c), v_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\overline{z}(F(v_1, c)), \overline{z}(v_2)) \in R^M$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(F^M(\overline{z}(v_1), \overline{z}(c)), z(v_2)\right) \in R^M$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$z(v_1) \cup \{1\} \subseteq z(v_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(z(v_1), z(v_2)) \in P_2$$

פיתרון 1. ג.

- נשים לב כי לכל קבוצה מתקיים כי הקבוצה הריקה מוכלת בה.
  - לכן ניקח:

$$\varphi(v_1) = \forall v_2 (R(v_1, v_2))$$

- תהא השמה z:

$$M \models_z \varphi$$

$$\Longleftrightarrow$$

  - לכל $d \in D^M$ מתקיים $M \models_{\underbrace{z[v_2 \leftarrow d]}_{=z'}} R(v_1, v_2)$
  - ומהגדרת סיפוק יחס:

$$\Longleftrightarrow$$

    * לכל $d \in D^M$ מתקיים $(\overline{z}'(v_1), \overline{z}'(v_2)) \in R^M$
      · ומהגדרת $\overline{z}'$:

$$\Longleftrightarrow$$

* לכל $d \in D^M$ מתקיים $(\overline{z}'(v_1), d) \in R^M$

$$\Longleftrightarrow$$

* לכל $d \in D^M$ מתקיים $z(v_1) \subseteq d$

$$\Longleftrightarrow$$

$$z(v_1) \in P_3$$

<u>טענה</u>: יהיו τ מילון, M מבנה מעל τ ו-P_1, P_2 שני יחסים k-מקומיים מעל D^M ($P_1, P_2 \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \ldots \times D^M}_{k}$) הגדירים ב-$M$ ע"י נוסחאות מעל τ בעלות k משתנים חופשיים φ_1, φ_2 בהתאמה. אז מתקיים:

1. היחס $P_1 \cap P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.
2. היחס $P_1 \cup P_2$ גדיר ע"י $\varphi_1 \vee \varphi_2$.
3. היחס $(D^M)^k \backslash P_1$ גדיר ע"י $\neg\varphi_1$.

תרגיל 2:

נתון המילון $\tau = \langle R(\circ,\circ), F(\circ)\rangle$.

יהי M המבנה הבא מעל τ:

$$M = \langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, R^M, F^M \rangle$$

כאשר R^M, F^M מוגדרים באופן הבא:

- $R^M = \left\{(a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N},\ a_i \le b_i\right\}$.
- בהינתן $b = b_0 b_1 b_2 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:

$$F^M(b) = b_1 b_2 b_3 \ldots$$

הוכיחו כי היחסים הבאים גדירים במבנה M:

1. $R_1 = \left\{(a,b) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N}^+,\ a_i = b_i\right\}$.
2. $R_2 = \{b^{\text{zero}}\}$, כאשר b^{zero} הוא וקטור האפס המוגדר באופן הבא: $b_i^{\text{zero}} = 0$ לכל $i \in \mathbb{N}$.
3. $R_3 = \left\{b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid b_i = 1 \text{ קיים לפחות } i \in \mathbb{N} \text{ אחד שעבורו } \right\}$.

פיתרון 2. א.

- מדובר בכל הוקטורים הבינארים ו-R^M משווה ביט לביט ו-F^Mמורידה את הביט הראשון.
- אנחנו צריכים לבדוק שוויון בין המחרוזות ללא הביט הראשון ולכן ניקח:

$$\varphi(v_1, v_2) = (F(v_1) \approx F(v_2))$$

- תהי השמה z.
- מתקיים:

$$M \models_z \varphi(v_1, v_2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\overline{z}\left(F\left(v_1\right)\right)=\overline{z}\left(F\left(v_2\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$F^M\left(\overline{z}\left(v_1\right)\right)=F^M\left(\overline{z}v_2\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

– לכל $i\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $z\left(v_1\right)_i=z\left(v_2\right)_i$

$$\Longleftrightarrow$$

– $\left(z\left(v_1\right),z\left(v_2\right)\right)\in P_1$

פיתרון 2. ב.

- וקטור האפס מקיים שהוא הכי קטן מבין הוקטורים ולכן ניקח:

$$\varphi_2\left(v_1\right)=\forall v_2\left(R\left(v_1,v_2\right)\right)$$

- תהי השמה z.
- מתקיים:

$$M\models_z\varphi_2\left(v_1\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\ldots$$

$$\iff$$

– לכל $d \in D^M$ מתקיים $(z(v_1), d) \in R^M$.

$$\iff$$

– לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$z(v_1)_i \leq 0$$

* ומכיוון ש $z(v_1) \in \{0,1\}$

$$\iff$$

– לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$z(v_1)_i = 0$$

$$\iff$$

$$z(v_1) \in P_2$$

פיתרון 2. ג.

- R_3 מכיל את כל מי שהוא לא אפס.
- לפי טענה 3 מתקיים $P_3 = \left(D^M\right)^k \setminus P_2$ ולכן ניקח:

$$\varphi_3 = \neg\varphi_2$$

הערות כלליות לגדירות:

- הרבה פעמים הקבוצה הראשונה בשלאה תהיה גדירה.
- אם יש קבוצה סופית של דרישות על הפסוק אז הקבוצה תהיה גדירה.
- כשרוצים לכתוב פסוק אינסופי:
  - אם הוא אוסף של אינסוף "וגם" אז אפשר לכתוב קבוצה אינסופית של פסוקים סופיים.
    - כי כדי לספק קבוצת פסוקים צריך לספק את כל הפסוקים בקבוצה.
  - אם רוצים לכתוב פסוק אינסופי שיש בו "או" שמחבר בין החלקים שלו אז הקבוצה לא גדירה.