(104031) אינפי 1מ' | תרגול 18 - יוליה

שם: איל שטיין

December 28, 2022

נושאי השיעור: רציפות, משפט ערך הביניים, משפט ווירשטראס

נושא ראשון - סיווג נקודות אי-רציפות:

תרגיל 1. תהי
$$f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{\left(x+\pi\right)\left|x\right|}{\sin\left(x\right)} & \sin\left(x\right)\neq0\\ 0 & \sin\left(x\right)=0 \end{cases}$$

- מצאו וסווגו את נקודות אי-הרציפות של f בקטע $[-4,4]$

פתרון:

- כאשר $\sin\left(x\right)\neq0$ אז הפונקציה אלמנטרית כי $|x|$ היא פונקציה אלמנטרית כי $|x|=\sqrt{x^2}$ ומוגדרת בכל $\mathbb{R}$.
  - לכן הפונקציה $\frac{(x+\pi)|x|}{\sin(x)}$ היא אלמנטרית בכל תחום הגדרתה.
  - כלומר לכל $x\in[-4,4]$ אם $\sin\left(x\right)\neq0$ אז $f\left(x\right)$ אלמנטרית ולכן היא רציפה.
- כלומר, נקודות אי-הרציפות יכולות להיות רק כאשר $\sin\left(x\right)=0$.
  - $\sin\left(x\right)=0$ בתחום שלנו רק כאשר $x=0\pm\pi$.
  - נחלק לשלושה מקרים:

1. מקרה ראשון: $x=-\pi$
   * בסביבה של $-\pi$ יתקיים $x<0$ ולכן $|x|=-x$
     · לכן בסביבה הנקובה של $x=-\pi$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\frac{\left(x+\pi\right)\cdot\left(-x\right)}{\sin\left(x\right)}$$

     · נשתמש בזהות: $\sin\left(x+\pi\right)=-\sin\left(x\right)$ ונקבל:

$$f\left(x\right)=-\frac{\left(x+\pi\right)}{\sin\left(x+\pi\right)}\cdot\left(-x\right)$$

$$f(x)=\frac{(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}\cdot(x)$$

- נסתכל על הגבול:

$$\lim_{x\to-\pi}\overbrace{\frac{x+\pi}{\sin(x+\pi)}}^{\to1}\cdot x$$

- בגלל שקיבלנו גבול מפורסם, מתקיים:

$$\lim_{x\to-\pi}x=-\pi$$

- כלומר $-\pi=\lim_{x\to-\pi}f(x)\neq f(-\pi)=0$
- לכן לפי הגדרת אי רציפות סליקה (הגבול קיים בנקודה אך לא שווה לערך הפונקציה בנקודה), קיימת אי רציפות סליקה ב-$x=-\pi$

2. מקרה שני: $x\to0$
   * $x\to0^{+}$
   - כלומר $x>0$ ולכן $|x|=x$

$$\lim_{x\to0^{+}}f(x)=\lim_{x\to0^{+}}(x+\pi)\overbrace{\frac{x}{\sin(x)}}^{\to1}=\pi$$

   * $x\to0^{-}$
   - כלומר $x<0$ ולכן $|x|=-x$=

$$\lim_{x\to0^{-}}f(x)=\lim_{x\to0^{-}}(x+\pi)\cdot\frac{-x}{\sin(x)}=-\pi$$

   * קיבלנו ש $\lim_{x\to0^{-}}f(x)\neq\lim_{x\to0^{+}}f(x)$ ושני הגבולות קיימים.
   - לכן לפי הגדרת אי רציפות קפיצה (שני הגבולות החד-צדדיים קיימים אך לא שווים), יש ב $x=0$ אי רציפות קפיצה.

3. מקרה שלישי: $x=\pi$
   * מכיוון $x>0$ אז $|x|=x$

$$\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{\overbrace{x\cdot(x+\pi)}^{\to2\pi^{2}}}{\underbrace{\sin(x)}_{\to0}}$$

- מכיוון שהמכנה שואף לאפס מתקיים שהגבול לא סופי ולכן הוא לא קיים,
- בנוסף נשים לב שמצד ימין הגבול הוא ∞ ומצד שמאל הגבול הוא $-\infty$, כלומר הגבולות החד צדדיים לא קיימים במובן הצר.
- לכן אי הרציפות היא מסוג "עיקרית" (לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים לא קיים).

- לסיכום:
  - כאשר $x=\pi$ יש אי רציפות מסוג עיקרית
  - כאשר $x=-\pi$ יש אי רציפות מסוג סליקה
  - כאשר $x=0$ יש אי רציפות מסוג קפיצה

תרגיל 2. מצאו וסווגו את כל נקודות אי-הרציפות עבור: $f(x)=[|x|]-|[x]|$
פתרון:

- לכל $x\geq 0$ מתקיים $|x|=x$ ולכן גם $[x]\geq 0$
  - ואז יתקיים $|[x]|=[x]$
    * מכאן ש- אם $x\geq 0$ מתקיים $f(x)=[x]-[x]=0$
      - כלומר הפונקציה $f(x)$ קבועה ולכן רציפה.
- אם $x<0$ נחלק לשני מקרים:
  1. x שלם ($x=-n$ כאשר $n\in\mathbb{N}$)
     - ואז

$$f(-n)=[|-n|]-|[-n]|$$

$$f(-n)=[n]-|-n|$$

$$f(-n)=[n]-|n|=0$$

       * כלומר כאשר x שלם יתקיים $f(x)=0$

  2. x לא שלם, כלומר $x\notin\mathbb{Z}$.
     - אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $-n-1<x<-n$
     - במקרה כזה $[x]=-n-1$:

$$f(x)=[|x|]-|[x]|=[|x|]-|-n-1|$$

* מכיוון ש$x<0$ מתקיים $|x|=-x$ ולכן:

$$f\left(x\right)=\left[-x\right]-\left|-n-1\right|$$

· ומכיוון ש $n<-x<n+1$, לפי הגדרת "עיגול לשלם" נקבל: $\left[-x\right]=n$ ולכן:

$$f\left(x\right)=n-\left|n+1\right|$$

$$f\left(x\right)=n-n-1=-1$$

$$f\left(x\right)=-1$$

- כלומר כאשר x שלם מתקיים $f\left(x\right)=0$ וכאשר x לא שלם מתקיים $f\left(x\right)=-1$
  - מצאנו שיש אי-רציפות מסוג קפיצה (גבולות חד-צדדיים קיימים ושונים) ב $x=0$ כי

$$\lim_{x\to0^{+}}f\left(x\right)=0$$

$$\lim_{x\to0^{-}}f\left(x\right)=-1$$

  - ומצאנו שיש אי רציפות סליקה לכל $x=-n$, כאשר $n\in\mathbb{N}$ (גבול קיים אך לא שווה לערך הפונקציה בנקודה)

* כי $f=-1$ בכל סביבה נקובה של $x=-n$ ולכן:

$$\lim_{x\to\left(-n\right)}f\left(x\right)=-1$$

· אך ערך הפונקציה בנקודה $x=-n$ הוא:

$$0=f\left(-n\right)$$

· ולכן:

$$\lim_{x\to\left(-n\right)}f\left(x\right)\neq f\left(-n\right)$$

נושא שני - משפט ערך הביניים:

משפט 3. משפט ערך הביניים:

- תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $[a,b]$.
  - ניסוח ראשון: אם $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$ (כלומר הסימנים שלהם הפוכים) אז קיימת $c\in\left(a,b\right)$ כך ש $f\left(c\right)=0$
  - ניסוח שני: אם $f\left(a\right)\neq f\left(b\right)$ (נניח בה"כ כי $f\left(a\right)<f\left(b\right)$) אז לכל t, כך ש $f\left(a\right)<t<f\left(b\right)$, קיימת $c\in\left(a,b\right)$ כך ש $f\left(c\right)=t$

הערה 4. נשתמש בעיקר בניסוח הראשון.

תרגיל 5.

- הראו שקיים פיתרון למשוואה הבאה:

$$e^{x}=3x \tag{1}$$

פתרון:

- נגדיר פונקציה $f\left(x\right)=e^{x}-3x$
  - $f\left(x\right)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ כי סכום פונקציות אלמנטריות הוא גם פונקציה אלמנטרית (ולכן f רציפה בכל תחום הגדרתם).
  - עבור $x=0$ מתקיים $f\left(0\right)=1>0$
  - עבור $x=1$ מתקיים $f\left(1\right)=e-3<0$
  - בקטע $[0,1]$ מתקיימים תנאי משפט ערך הביניים (הפונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$ ובפרט ב-$[0,1]$ ויש ערכי פונקציה עם סימנים הפוכים)
    - ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת $c\in\left(0,1\right)$ כך ש $f\left(c\right)=0$
      - ומכיוון ש $f\left(c\right)=e^{x}-3x=0$ קיבלנו שעבור $x=c$ מתקיים $e^{x}=3x$

תרגיל 6. הראו שקיים פתרון למשוואה הבאה:

$$\tan\left(x\right)=x+1 \tag{2}$$

פתרון:

- נגדיר $f\left(x\right)=\tan\left(x\right)-x-1$
- הפונקציה מוגדרת ב$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ אך אנחנו צריכים קטע סגור בשביל להשתמש במשפט ערך הביניים.
  - אנחנו יודעים שכאשר ${x\rightarrow\frac{\pi}{2}}^{-}$ מתקיים $\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}^{-}}\tan\left(x\right)=\infty$ וכאשר $x\rightarrow-{\frac{\pi}{2}}^{+}$ מתקיים $\lim_{x\rightarrow-\frac{\pi}{2}^{+}}\tan\left(x\right)=-\infty$

* ומכיוון ש $x+1$ חסום בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, לפי חשבון גבולות מתקיים:
  · גם $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^{+}}f\left(x\right)=-\infty$
  · וגם $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}f\left(x\right)=\infty$
– לכן קיימת נקודה a המוגדרת $-\frac{\pi}{2}<a<0$ כך ש $f\left(a\right)<0$
  * וקיימת נקודה b המוגדרת $0<b<\frac{\pi}{2}$ כך ש $0<f\left(b\right)$

• אזי בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\supset\left[a,b\right]$ מתקיים ש-f רציפה (כי f היא סכום אלמנטריות) ולכן לפי משפט ערך הביניים:
  – קיימת נקודה c המוגדרת $c\in\left(a,b\right)$ כך ש $f\left(c\right)=0$
• הגדרנו את $f\left(x\right)$ להיות $f\left(x\right)=\tan\left(x\right)-x-1$
  – והראנו $f\left(c\right)=\tan\left(x\right)-x-1=0$
    * זאת אומרת שקיים פיתרון למשוואה כאשר $x=c$.

תרגיל 7. תהי $f\left(x\right):\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ רציפה. הראו שקיים פיתרון למשוואה:

$$e^{f(x)}=e\cdot x-x+1 \tag{3}$$

פתרון:

• נגדיר $g\left(x\right)=e^{f(x)}-e\cdot x+x-1$
  – $g\left(x\right)$ מוגדרת ורציפה בקטע $\left[0,1\right]$ כי $e^{f(x)}$ היא הרכבה של פונקציות רציפות וסכום של רציפות הוא פונקציה רציפה.
  – לכל $x\in\left[0,1\right]$ מתקיים $0\le f\left(x\right)\le1$ כי הטווח של $f\left(x\right)$ הוא $\left[0,1\right]$
    * ולכן

$$e^{0}\le e^{f(x)}\le e^{1}$$

$$1\le e^{f(x)}\le e$$

  · אם ניקח $x=0$ נקבל $g\left(0\right)=\overbrace{e^{f(0)}}^{\ge1}-1\ge0$
  · ואם ניקח $x=1$ נקבל

$$g\left(1\right)=e^{f(1)}-e+1-1$$

$$g\left(1\right)=\overbrace{e^{f(1)}}^{\le e}-e\le0$$

- אם $g(0)=0$ או $g(1)=0$ אז סיימנו כי מצאנו פיתרון למשוואה.
- אחרת, כלומר אם $g(0)\neq 0$, אז $g(0)>0$ ו-$g(1)<1$
- ואז בקטע $[0,1]$ מתקיימים תנאי משפט ערך הביניים ולכן קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $g(c)=0$ וזהו פיתרון למשוואה.

תרגיל 8. תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ רציפה.
צ"ל: הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=c$ (נקראת גם "נקודת שבת" כי שום דבר לא זז בה. היא "שובתת")
פתרון:

- נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)-x$
  - $g(x)$ היא סכום של פונקציות רציפות ולכן היא מוגדרת ורציפה בקטע $[a,b]$
  - עבור $x=a$ יתקיים $g(a)=f(a)-a$
    - אנחנו יודעים ש- $a\leq f(a)$ כי הטווח של הפונקציה f הוא $a\leq f(x)\leq b$
  - עבור $x=b$ יתקיים $g(b)=f(b)-b$
    - אנחנו יודעים ש- $f(b)\leq b$ כי הטווח של הפונקציה f הוא $a\leq f(x)\leq b$
- אם $g(a)=0$ או $g(b)=0$ אז סיימנו כי $g(a)=f(a)-a=0$ או $g(b)=f(b)-b=0$
  - אחרת, $g(a)>0$ ו- $g(b)<0$.
    - ובקטע $[a,b]$ מתקיימים תנאי ערך הביניים.
      - ולכן קיימת $c\in(a,b)$ כך ש $g(c)=0$
      - ומכיוון שהגדרנו את g להיות: $g(x)=f(x)-x$
      - $g(c)=0=f(c)-c$
      - נעביר אגפים ונקבל: $f(c)=c$

הערה 9. פונקציה יכולה לקיים את קיום הנקודה $c\in(a,b)$ במשפט ערך הביניים גם בלי להיות רציפה. לכן משפט ערך הביניים הוא לא משפט "אם ורק אם".

תרגיל 10.

- תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|f(x)-x^3\right|\leq x^2$

צ"ל: $f(x)$ "על".
פתרון:

- יהי $y_0\in\mathbb{R}$.
- נוכיח שקיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=y_0$ (ואז לפי הגדרה f תהיה "על"):
  - נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)-y_0$
  - $g(x)$ היא רציפה בכל $\mathbb{R}$ כי היא סכום של פונקציות רציפות.

– לפי הנתון מתקיים:

$$x^3 - x^2 \le f(x) \le x^2 + x^3 \quad \backslash - y_0$$

$$x^3 - x^2 - y_0 \le \underbrace{f(x) - y_0}_{=g(x)} \le x^2 + x^3 - y_0$$

$$x^3 - x^2 - y_0 \le g(x) \le x^2 + x^3 - y_0$$

* מכיוון ש $\lim_{x\to\infty}\left(x^3 - x^2 - y_0\right) = \infty$, לפי משפט הפיצה גם $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
* באותו אופן, $\lim_{x\to-\infty} x^2 + x^3 - y_0 = -\infty$ ולכן לפי משפט הפיצה $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

– נמצא שתי נקודות שייצרו קטע סגור:

* נקודה $a < 0$ כך ש $g(a) < 0$
* ונקודה $b > 0$ כך ש $g(b) > 0$
  · כעת בקטע $[a,b]$ מתקיימים תנאי משפט ערך הביניים.
  · לכן קיימת $c \in (a,b)$ כך ש $g(c) = 0$

• כלומר $f(c) - y_0 = 0$ ולכן לכל $y_0 \in \mathbb{R}$ קיימת $c \in [a,b]$ כך ש $f(c) = y_0$

נושא שלישי - משפט ויירשטראס:

משפט 11. משפט ויירשטראס:

• תהי f רציפה בקטע $[a,b]$. אזי:

1. f חסומה בקטע.
2. קיימים ל-f מינימום ומקסימום גלובלי.

תרגיל 12. תהי $f(x)$ רציפה ב-(a,∞) כך שקיימים $\lim_{x\to\infty} f(x) = K$ ו- $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
צ"ל: הוכיחו כי f חסומה ב(a,∞)
פתרון:

• נגדיר פונקציה $g(x) : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ כך ש:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x > a \\ L & x = a \end{cases}$$

– כעת:

$$L=g\left(a\right)=\lim_{x\to a^{+}}g\left(x\right)=\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)$$

* לכן $g\left(x\right)$ רציפה מימין ב $x=a$, והיא מתנהגת כמו $f\left(x\right)$ בשאר התחום ולכן היא רציפה ב $[a,\infty)$

- מכיוון שלפי הגדרת $g\left(x\right)$ ולפי הנתון מתקיים $\lim_{x\to\infty}g\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=K$ אז:
  – לכל $\varepsilon>0$ (ובפרט $\varepsilon=1$) קיימת נקודה $b>a$ כך שלכל $x>b$ מתקיים:

$$K-1<g\left(x\right)<K+1$$

- $g\left(x\right)$ רציפה ב-$[a,b]$ ולכן לפי סעיף (1) במשפט ווירשטראס היא חסומה בקטע.
  – כלומר קיים $M_1>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $|g\left(x\right)|<M_1$
- נסמן $M=max\left\{M_1,|K-1|,|K+1|\right\}$
  – ואז לכל $x>a$ יש שני מקרים:
    1. אם $x\leq b$
       (א) אז $|f\left(x\right)|=|g\left(x\right)|<M_1\leq M$
       i. כלומר $f\left(x\right)$ חסומה אם $a<x<b$
    2. אם $b<x$
       (א) אז

$$K-1<\overbrace{f\left(x\right)}^{=g(x)}<K+1$$

(ב) ובגלל הגדרת M יתקיים:

$$-M\leq|K-1|\leq K-1<\overbrace{f\left(x\right)}^{=g(x)}<K+1\leq|K+1|\leq M$$

i. כלומר $f\left(x\right)$ חסומה אם $a<b<x$

- הראנו שלכל $x\in(a,\infty)$ מתקיים ש-f חסומה.

תרגיל 13. - לפתור לבד

- תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.

- **נתון:** $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = \infty$

צ"ל: הוכיחו כי ל-f קיים מינימום מוחלט ב-$\mathbb{R}$.
רעיון ההוכחה:

- נצטרך למצוא קטע סגור שרירותי שבו f רציפה ואז לפי משפט ווירשטראס יתקיים שיש לפונקציה מינימום:
  - אם נסמן $f(0) = c$ אז קיימת נקודה b שאם $x > b$ אז מתקיים $f(x) > c$
    * ואותו דבר נכון לגבי שאיפה למינוס אינסוף, כלומר קיימת נקודה a כך שאם $x < a$ יתקיים $f(x) > c$
      · לכן בין a ל-b קיימת נקודה x_n כך ש $f(x_n) \leq f(0)$

- נמשיך בתרגול הבא.