אינפי 1מ' (104031) | תרגול 26 - יוליה

שם: איל שטיין

January 25, 2023

נושאי השיעור: טיילור - המשך, קמירות, אי-שוויון יינסן

נושא ראשון - טיילור, המשך:

תרגיל 1.

- תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירה פעמיים כך ש- $f'(0)=f'(1)=0$

צ"ל: הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(0,1)$ עבורה $|f''(c)|\geq 4\cdot|f(1)-f(0)|$
רמז: התבוננו ב-$f\left(\frac{1}{2}\right)$
פתרון: (אפשר לעשות את התרגיל עם לגראנז' פעמיים אבל הוא יותר פשוט עם טיילור)

- נפתח את $f\left(\frac{1}{2}\right)$ סביב שתי נקודות $x=0$ ו-$x=1$.
- נתון כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ גזירה פעמיים ולכן ניתן לכתוב לכתוב פולינום טיילור מסדר 1 עם שארית לגראנז',
  - בפרט אפשר לפתח פולינום טיילור סביב $x_0=0,1$, כאשר d בין 0 ובין $\frac{1}{2}$:
    - נפתח את פולינום טיילור ושארית R_1 סביב $x=0$ ונקבל:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(x)=f(0)+f'0\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)+R_1(x)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(x)=f(0)+f'(0)\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)+\frac{f''(d)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)^2$$

- לפי הנתון מתקיים $f'(0)=0$ ולכן:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)+\frac{f''(d)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

* באותו אופן נפתח סביב $x=1$ ונקבל:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(1\right)+f'\left(1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)+R_{1}\left(x\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(1\right)+\frac{f''\left(e\right)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

* נחסיר את שתי המשוואות אחת מהשנייה ונקבל:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(0\right)+\frac{f''\left(d\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-f\left(1\right)+\frac{f''\left(e\right)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=0$$

$$f\left(1\right)-f\left(0\right)=\frac{f''\left(d\right)-f''\left(e\right)}{8}$$

$$\left|f\left(1\right)-f\left(0\right)\right|\cdot8=\left|f''\left(d\right)-f''\left(e\right)\right|$$

- נניח בשלילה שלכל $c\in\left(0,1\right)$ מתקיים $f''\left(c\right)<4\left|f\left(1\right)-f\left(0\right)\right|$
  - נקבל לפי אי-שוויון המשולש ש:

$$\left|f''\left(d\right)-f''\left(e\right)\right|\leq\left|f''\left(d\right)\right|+\left|f''\left(e\right)\right|$$

* בפרט עבור $d,e\in\left(0,1\right)$ אם נציב את הנחת השלילה נקבל:

$$\left|f''\left(d\right)\right|+\left|f''\left(e\right)\right|<4\left|f\left(1\right)-f\left(0\right)\right|+4\left|f\left(1\right)-f\left(0\right)\right|$$

$$\left|f''\left(d\right)\right|+\left|f''\left(e\right)\right|<8\left|f\left(1\right)-f\left(0\right)\right|$$

· זאת סתירה לכך שהראנו כי $\left|f\left(1\right)-f\left(0\right)\right|\cdot8=\left|f''\left(d\right)-f''\left(e\right)\right|$

- ולכן לכל $c\in\left(0,1\right)$ מתקיים $f''\left(c\right)\geq4\left|f\left(1\right)-f\left(0\right)\right|$.

נושא שני - קמירות:

הגדרה 2. קמירות

- $f\left(x\right)$ נקראת קמורה בקטע I אם לכל $x_1,x_2\in I$ (בה"כ ניקח $x_1<x_2$) ולכל $t\in\left[0,1\right]$ מתקיים:

$$f\left(x_1\cdot t+x_2\left(1-t\right)\right)\leq t\cdot f\left(x_1\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(x_2\right)$$

תרגיל 3.

- תהי $f\left(x\right)$ קמורה בקטע $\left[a,b\right]$

צ"ל: f מקבלת מקסימום באחד מהקצוות.

פתרון:

- לא נתון האם הפונקציה גזירה או רציפה ולכן לא ניתן להשתמש במשפט ויירשטראס.
- ננסח את **הצ"ל** באופן הבא:
  - "לכל $x\in\left[a,b\right]$ מתקיים $f\left(x\right)\leq max\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$"
- נסמן $M=max\left\{ f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$
- נשים לב שלכל $x\in\left[a,b\right]$ קיים $t\in\left[0,1\right]$ כך ש $x=t\cdot a+\left(1-t\right)\cdot b$.
  - נציב ונקבל $f\left(x\right)=f\left(t\cdot a+\left(1-t\right)\cdot b\right)$
  - אם כך מכיוון ש-f קמורה לפי הנתון, מתקיים:

$$f\left(x\right)=f\left(t\cdot a+\left(1-t\right)\cdot b\right)\leq t\cdot f\left(a\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(b\right)$$

  * מכיוון ש$f\left(a\right)\leq M$ וגם $f\left(b\right)\leq M$ מתקיים:

$$\begin{aligned}t\cdot f\left(a\right)+\left(1-t\right)\cdot f\left(b\right) & \leq t\cdot M+\left(1-t\right)\cdot M\\ & =M\end{aligned}$$

- ולכן לכל $x\in\left[a,b\right]$ מתקיים $f\left(x\right)\leq M$

למה 4. למת המיתרים:

- תהי f קמורה בקטע I.
- יהיו $x_1<x_2<x_3$ נקודות השייכות לקטע I.
- נגדיר:

1. $m_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
2. $m_2 = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$
3. $m_3 = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

- אז מתקיים: $m_1 \leq m_2 \leq m_3$

תרגיל 5.

- תהי f קמורה בקטע I.
- תהי c נקודה פנימית ב-I.
- נתון: c נקודת מינימום מקומי של f.

צ"ל: הראו כי $x = c$ היא גם נקודת מינימום גלובלי של f בקטע I.

פתרון:

- ננסח את ה**צ"ל**: "לכל $x \in I$ מתקיים $f(x) \geq f(c)$".
- נניח בשלילה שקיימת נקודה $x \in I$ כך שמתקיים $f(x) < f(c)$. ניקח (בה"כ) $c < x$:
  - לפי הנתון, c נקודת מינימום מקומי ולכן קיימת סביבה שלה שבה כל ערכי הפונקציה בכל נקודה גדולים או שווים ל-$f(c)$.
  - כלומר c מינימום מקומי לכן קיימת $c < y < x$ כך ש- $f(c) \leq f(y)$.
    - לפי למת המיתרים מתקיים:

$$\frac{f(y)-f(c)}{y-c} \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

- נשים לב ש $x - c > 0$ וגם $y - c > 0$
- וגם נשים לב כי $f(y) - f(c) \geq 0$ כי c נקודת מינימום מקומית.
- וגם נשים לב כי לפי הנחת השלילה מתקיים $f(x) - f(c) < 0$
- ולכן:

$$\frac{\overbrace{f(y)-f(c)}^{\geq 0}}{\underbrace{y-c}_{>0}} \leq \frac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{<0}}{\underbrace{x-c}_{>0}}$$

- באגף ימין קיבלנו ביטוי שלילי ובאגף שמאל קיבלנו ביטוי גדול או שווה ל-0.
- סתירה לכך שהביטוי הימני גדול או שווה לביטוי השמאלי.

- לכן לכל נקודה $x \in I$ מתקיים $f(x) \geq f(c)$, כנדרש.

תרגיל 6.

- תהי f קמורה ב-I.
- תהי $c\in I$ נקודה פנימית בה מתקבל מקסימום מוחלט.

צ"ל: f קבועה ב-I.
פתרון:

- יהיו $x,y\in I$.
  - מכיון ש-c נקודה פנימית, ניקח (בה"כ) $x<c$ ו-$c<y$.
    - כלומר $x<c<y$.
- נתון כי f קמורה ולכן לפי למת המיתרים מתקיים

$$\frac{f\left(c\right)-f\left(x\right)}{c-x}\leq\frac{f\left(y\right)-f\left(c\right)}{y-c}$$

  - נתון כי c מקסימום מוחלט ולכן $f\left(x\right),f\left(y\right)\leq f\left(c\right)$.
    - ולכן:

$$\frac{\overbrace{f\left(c\right)-f\left(x\right)}^{\geq0}}{\underbrace{c-x}_{<0}}\leq\frac{\overbrace{f\left(y\right)-f\left(c\right)}^{\geq0}}{\underbrace{y-c}_{>0}}$$

      - אי השוויון יתקיים אם ורק אם המונה שווה 0.
      - כלומר אם ורק אם $f\left(c\right)=f\left(x\right)=f\left(y\right)$.
  - כאמור, לקחנו נקודות כלליות $x,y\in I$.
    - לכן קיבלנו שלכל שתי נקודות $x,y\in I$ מתקיים $f\left(x\right)=f\left(y\right)=f\left(c\right)$.
- ולכן f קבועה.

תרגיל 7.

- תהי f קמורה בקרן $[a,\infty)$
- נתון ש: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

צ"ל: הראו ש-$f\left(x\right)$ מונוטונית יורדת בקרן.
פתרון:

- ננסח את **הצ"ל**: "לכל $a\leq c<d$ מתקיים $f\left(c\right)\geq f\left(d\right)$"
- נניח בשלילה שקיימות נקודות $a\leq c<d$ כך שמתקיים $f\left(c\right)<f\left(d\right)$:

– יהי $d<x$.

* אז לפי למת המיתרים מתקיים:

$$\frac{f\left(d\right)-f\left(c\right)}{\underbrace{d-c}_{>0}}\leq\frac{f\left(x\right)-f\left(d\right)}{\underbrace{x-d}_{>0}}$$

· נשים לב שהמכנה חיובי בשני האגפים ולפי הנחת השלילה מתקיים $f\left(d\right)-f\left(c\right)>0$

· לכן נסמן את האגף השמאלי $0<t=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$

· מכיוון ש-$t>0$, נכפול בו ונקבל:

$$f\left(x\right)-f\left(d\right)\geq t\cdot\left(x-d\right)\quad\backslash+f\left(d\right)$$

$$f\left(x\right)\geq f\left(d\right)+t\cdot x-t\cdot d\ \backslash x$$

· מכיוון ש$x>0$ נקבל:

$$\frac{f\left(x\right)}{x}\geq t+\frac{f\left(d\right)-t\cdot d}{x}$$

· נשאיף את $x\to\infty$ ומכיוון שלפי הנתון $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}\geq\lim_{x\to\infty}\left(t+\frac{f\left(d\right)-t\cdot d}{x}\right)$$

· מכיוון ש- $\left(f\left(d\right)-t\cdot d\right)$ הוא קבוע, נקבל: $\lim_{x\to\infty}\left(t+\frac{f(d)-t\cdot d}{x}\right)=t$.

· לפי יחס סדר גבולות מתקיים: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\geq t>0$

· זו סתירה לנתון לפיו $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

· כלומר קיבלנו $0>0$.

• לכן לכל שתי נקודות $a\leq c<d$ מתקיים $f\left(c\right)\geq f\left(d\right)$, כנדרש.

נושא שלישי - אי-שוויון יינסן ($Janssen$):

משפט 8. אי-שוויון יינסן:

• תהי f קמורה ב-I.

- אז לכל $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ ולכל $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ כך ש $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$
  - יתקיים $f\left(\sum_{k=1}^{n}(t_k \cdot x_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot f(x_k)$

תרגיל 9.

- היעזרו בפונקציה $f(x) = -ln(x)$ כדי להוכיח שלכל $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ מתקיים

$$\sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots, x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

פתרון:

- ראשית נראה ש-$f(x)$קמורה בתחום הגדרתה $(0,\infty)$:
  - נשים לב כי f גזירה פעמיים בקטע $(0,\infty)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

* נשים לב שהנגזרת תמיד שלילית ולכן f מונוטונית יורדת ממש (לפי מסקנות לגראנז').
* ובנוסף, f קמורה בקטע $(0,\infty)$
  · (כי פונקציה הגזירה פעמיים מקיימת: f קמורה $\Longleftrightarrow f'' \geq 0$)

- כעת **צ"ל**: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.
- מכך ש-$f(x)$ מונוטונית יורדת נקבל:

$$f\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\right) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \Longleftrightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

  - נציב $f(x) = -ln(x)$ ונקבל:

$$\Longleftrightarrow -ln\left((x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\right) \geq -ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\left(ln(x_1) + ln(x_2) + \ldots + ln(x_n)\right) \geq -ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot x_k\right)$$

– נחזיר לכתיב של $f(x) = -ln(x)$ ונקבל:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot x_k\right)$$

* נסמן $t_1, t_2, \ldots, t_n = \frac{1}{n}$, כאשר $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$ עבור $t_k \in [0,1]$.
  · ולכן:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot x_k\right) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} t_k\cdot f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\cdot x_k\right)$$

• כלומר קיבלנו:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k\cdot f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\cdot x_k\right) \Longleftrightarrow \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

– מכיוון ש-f קמורה, לפי אי שוויון יינסן, מתקיים:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k\cdot f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\cdot x_k\right)$$

* ומכיוון שכל המעברים היו "אם ורק אם", מתקיים:

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$