(104031) אינפי 1מ' | תרגול 9 - יוליה

שם: איל שטיין

November 21, 2022

נושאי השיעור: מספר e

נושא ראשון - המספר e

הגדרה 1.

1. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתקיים $e = \lim_{n\to\infty} a_n$

- הוכחנו ש$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ סדרה מונוטונית עולה ממש וחסומה. לכן, יש לה גבול.

2. $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת ל $\frac{1}{e} = e^{-1}$.

- ההוכחה של זה היא:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

3. **$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$, לכל סדרה $a_n > 0$.**

תרגיל 2. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה לפי n

- <u>בסיס: $n = 1$</u>
  - $\frac{1}{e} = \left(\frac{1}{e}\right)^1 < 1! = 1$
- <u>הנחה:</u> נניח של-n כלשהו מתקיים $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$

- <u>צעד:</u> נבחן את הביטוי $\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{n^n}{e^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

  – לפי הנחת האינדוקציה, $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ ולכן:

$$\frac{1}{e} \cdot \frac{n^n}{e^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} < \frac{1}{e} \cdot \overbrace{n! \cdot (n+1)}^{=(n+1)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
$$= \frac{1}{e} \cdot (n+1)! \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

  – מכיוון שהסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה ממש מתקיים שהיא מתכנסת לסופרמום שלהכך: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$.

    * ולכן:

$$\frac{1}{e} \cdot (n+1)! \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} \cdot (n+1)! \cdot e$$

$$\frac{1}{e} \cdot (n+1)! \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \cancel{\frac{1}{e}} \cdot (n+1)! \cdot \cancel{e}$$

  – נבחר הכל ביחד ונקבל:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} < \frac{1}{e} \cdot (n+1)! \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)!$$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} < (n+1)!$$

תרגיל 3. חשבו:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{5}{2n+1}\right)^n$$

פיתרון:

- המטרה שלנו בפתרון היא להגיע לביטוי מהצורה $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$.

- נתחיל לבחון את הביטוי:

$$\left(1-\frac{5}{2n+1}\right)^{n}=\left(1+\frac{(-5)}{2n+1}\right)^{\frac{2n}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(1+\frac{(-5)}{2n+1}\right)^{2n+1}}}{\sqrt{1+\frac{(-5)}{2n+1}}}$$

- אנחנו יודעים ש$0<\lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty$
  - נסמן $a_n=2n+1$ ונמצא:

$$\frac{\sqrt{\left(1+\frac{(-5)}{a_n}\right)^{a_n}}}{\sqrt{1+\frac{(-5)}{2n+1}}}$$

* ולכן המונה שואף ל-$\sqrt{e^{-5}}$.
* המכנה שואף ל-1
· לכן, כל הביטוי שואף ל-$\sqrt{e^{-5}}$

תרגיל 4. חשבו $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
פיתרון:

-

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}$$

- נשתמש במבחן השורש כדי לראות ש:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

- מהגדרת e אנחנו יודעים ש$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1$$

- לכן, הסדרה שואפת ל-∞.

תרגיל 5. חשבו: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$
פיתרון:

- נסמן $a_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$
- ונסמן $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=b_n$. נקבל $a_n=\sqrt[n]{b_n}$
  - אנחנו יודעים ש $\lim_{n\to\infty}b_n=e$
- מכיוון שגם b_{n+1} שואף ל-e,
  - נקבל ש: $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{e}{e}=1$
- הוכחנו בהרצאה טענה שאם המנות של איברים עוקבים מתכנסת לגבול סופי, אז גם השורש ה-n מתכנס לאותו הגבול
  - כלומר, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=1$
  - נקבל שגם $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=1$

פיתרון שני: (אם אותם הסימונים)

- אם נאמר ש-$\lim_{n\to\infty}b_n=e$ החל ממקום מסוים, אז גם

$$e-\frac{e}{2}<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}<e+\frac{e}{2}$$

- נפעיל שורש n על כל הצדדים ונקבל:

$$1\leftarrow\sqrt[n]{e-\frac{e}{2}}<\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}<\sqrt[n]{e+\frac{e}{2}}\to 1$$

- ולפי סנדויץ' גם האמצעי שואף ל-1.

טענה מספר 4:

יהיו a_n,b_n סדרות ו- $a,b\in\mathbb{R}$.
אם $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$ וְ- $\lim_{n\to\infty}b_n=b$
אז $\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=a^b$

תרגיל 6. חשבו:
א. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n$
א. פיתרון:

- נייצג את הביטוי בצורה שקרובה לייצוג של "שואף ל-e":

$$\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n = \left(\frac{\left(n^2-4n+2\right)+(2n-1)}{n^2-4n+2}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{(2n-1)}{n^2-4n+2}\right)^n$$
$$|$$

- נסמן $b_n = \frac{n^2-4n+2}{(2n-1)}$:

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^n$$

- ננסה לייצג את הביטוי בצורה $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$:

$$\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right)^{\frac{n}{b_n}}$$

  – נשאיף את n ל∞ ונבדוק איך הביטוי מתנהג:
    * נבדוק את $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2n-1\right)}{n^2-4n+2} = 2$$

    * כלומר,

$$\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}e}^{\overbrace{\frac{n}{b_n}}^{\xrightarrow[n\to\infty]{}2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^2$$

תרגיל 7. חשבו: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n+2}\right)^n$

- הסדרה חיובית (לפחות ממקום מסוים) ולכן:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n+2}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n+2}=\frac{1}{2}<1$$

- ולכן לפי מבחן השורש הסדרה שואפת ל-0.

תרגיל 8. חשבו: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

- נסמן $0<a_n=\frac{n!}{n^n}$
- נקבל:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n!}{n^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

- לפי חשבון גבולות:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$$

- לפי טענה שהוכחה בהרצאה, אם גבול המנות $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ קיים אז גם גבול השורשים קיים $\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\right)$ והוא אותו גבול.
  - לכן, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{e}$$