05.01.22 תרגול 10

תחשיב היחסים

תזכורת: עבור מבנה M ונוסחה φ נאמר כי M מספק את φ, ונסמן $M\models\varphi$, אם לכל השמה z מתקיים $M\models_z\varphi$.

משתנים קשורים וחופשיים

הסבר אינטואיטיבי:

- משתנה יכול להופיע מספר פעמים בנוסחה, וכל הופעה נקראת **מופע** של המשתנה.
- אם מופע של משתנה v_i נמצא "בטווח" של כמת $\forall v_i$ או $\exists v_i$, המופע נקרא **קשור**.
- עבור משתנה v_i בנוסחה φ נאמר ש- v_i **חופשי** אם קיים מופע של v_i ב- φ שאינו קשור.
- עבור משתנה v_i בנוסחה φ נאמר ש- v_i **קשור** אם כל המופעים של v_i ב- φ קשורים.

דוגמה: $\varphi=\exists v_i\left[(\forall v_2\, R(v_2))\rightarrow R_2(v_1,v_2)\right]$

מופע קשור, מופע קשור, מופע שאינו קשור

המשתנה v_2 בנוסחה φ הוא חופשי

המשתנה v_1 בנוסחה φ הוא קשור

הגדרה פורמלית:

נגדיר באינדוקציה על מבנה הנוסחאות מהו **משתנה חופשי** v בנוסחה φ:

- בסיס: עבור φ נוסחה אטומית, אם v מופיע ב- φ אז v **חופשי** ב- φ.
- צעד: יהיו α,β נוסחאות:
  - עבור $\varphi=(\neg\alpha)$: v **חופשי** ב- φ אם v חופשי ב- α
  - עבור $\varphi=(\alpha\rightarrow\beta)$, $\varphi=(\alpha\leftrightarrow\beta)$, $\varphi=(\alpha\wedge\beta)$, $\varphi=(\alpha\vee\beta)$: v **חופשי** ב- φ אם v חופשי ב- α או v חופשי ב- β
  - עבור $\varphi=\exists y\alpha$, $\varphi=\forall y\alpha$: v **חופשי** ב- φ אם v חופשי ב- α וגם $v\neq y$

דוגמאות: בסיס: $\varphi_1=R(v_0,v_1)$, $\varphi_2=(v_0\approx v_1)$ $\leftarrow$ v_0,v_1 חופשיים ב- φ_1,φ_2

צעד: $\varphi_1=\neg R(v_0,v_1)$, $\varphi_2=\neg\exists v_0 R(v_0,v_1)$ $\leftarrow$ v_1 חופשי ב- φ_1,φ_2, v_0 חופשי ב- φ_1

$\varphi_1=R(v_0,v_1)\vee(v_0\approx v_1)$ $\leftarrow$ v_0,v_1 חופשיים ב- φ_1

$\varphi_2=(\exists v_0 R(v_0,v_1))\rightarrow(v_0\approx v_1)$ $\leftarrow$ v_0,v_1 חופשיים ב- φ_2

$\varphi_3=R(v_0,v_1)\wedge(\forall v_0(v_0\approx v_1))$ $\leftarrow$ v_0,v_1 חופשיים ב- φ_3

$\varphi_4=(\exists v_0 R(v_0,v_1))\leftrightarrow(\forall v_0(v_0\approx v_1))$ $\leftarrow$ v_1 חופשי ב- φ_4

$\varphi_5 = \forall v_0(v_0 \approx v_1)$ ← v_1 חופשי ב- φ_5

$\varphi_6 = \forall v_2(v_0 \approx v_1)$ ← v_0, v_1 חופשיים ב- φ_6

$\varphi_7 = \exists v_1 \forall v_0(v_0 \approx v_1)$ ← v_0, v_1 לא חופשיים ב- φ_7

נוסחא ללא משתנים חופשיים נקראת **פסוק**.

דוגמא: הנוסחא $\forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1)$ היא פסוק.

תרגיל 10: נתון המילון $\tau = \langle R(\cdot,\cdot), F_1(\cdot), F_2(\cdot,\cdot), c \rangle$, ונתון הפסוק $\varphi = \forall v_1 \forall v_2((F_1(v_1) \approx F_1(v_2)) \to (v_1 \approx v_2))$. אילו מבנים יספקו את הפסוק?

פתרון: כל המבנים M שעבורם F_1^M היא פונקציה חח"ע.

יהי M מבנה כלשהו עבור τ. אז:

$M \models \varphi$ ⇔ לכל השמה z: $M \models_z \varphi$ ⇔

לכל השמה z לכל $d_1, d_2 \in D^M$: $\underset{z' = z[v_1 \leftarrow d_1][v_2 \leftarrow d_2]}{M \models} (F(v_1) \approx F(v_2)) \to (v_1 \approx v_2)$ ⇔

לכל השמה z לכל $d_1, d_2 \in D^M$: אם $M \models_{z'} (F(v_1) \approx F(v_2))$ אז $M \models_{z'} (v_1 \approx v_2)$ ⇔

לכל השמה z לכל $d_1, d_2 \in D^M$: אם $z'(F_1(v_1)) = z'(F_1(v_2))$ אז $z'(v_1) = z'(v_2)$ ⇔

לכל השמה z לכל $d_1, d_2 \in D^M$: אם $F_1^M(z'(v_1)) = F_1^M(z'(v_2))$ אז $d_1 = d_2$ ⇔

לכל השמה z לכל $d_1, d_2 \in D^M$: אם $F_1^M(d_1) = F_1^M(d_2)$ אז $d_1 = d_2$ ⇔

F_1^M חח"ע.

התלות של נוסחא בהשמה

משפט: יהי α נוסחא מעל מילון τ, M מבנה עבור τ ו- z_1, z_2 זוג השמות עבור M, כך שלכל משתנה חופשי v_i ב- α מתקיים $z_1(v_i) = z_2(v_i)$.

אז $M \models_{z_1} \alpha \Leftrightarrow M \models_{z_2} \alpha$

מזכיר את משפט התלות הסופית מתחשיב הפסוקים.

דוגמא: $\alpha = (\forall v_0 \forall v_1 R(v_0, v_1)) \wedge (F(v_2, v_3) \approx c)$, יהי M כך ש- $D^M = \mathbb{N}$.

v_2, v_3 חופשיים ב- α, אז עבור:

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	...
z_1	5	10	8	17	1	1	1	...
z_2	20	70	8	17	0	0	0	...

אם $M \models_{z_1} \alpha$ אז $M \models_{z_2} \alpha$

מסקנה: בהינתן מבנה M, פסוק φ והשמה z: אם $M \models_z \varphi$ אז $M \models \varphi$

דוגמא: עבור הפסוק $\varphi = \forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1)$, אם קיים מבנה M והשמה z מעל M כך ש- $M \models_z \varphi$, אז $M \models \varphi$.

נוסחה φ היא **ספיקה** אם קיים מבנה M והשמה z כך ש- $M \models_z \varphi$.

מבנה M והשמה z **מספקים קבוצת נוסחאות** Σ אם לכל $\varphi \in \Sigma$ מתקיים $M \models_z \varphi$.

סימון: $M \models_z \Sigma$.

קבוצת נוסחאות Σ היא **ספיקה** אם קיים מבנה M והשמה z המספקים אותה.

נוסחה ψ **גוררת לוגית** נוסחה φ אם לכל מבנה M ולכל השמה z המספקים את ψ מספקים גם את φ. סימון: $\psi \models \varphi$.

נאמר כי קבוצת נוסחאות Σ **גוררת לוגית** נוסחה φ אם לכל מבנה M ולכל השמה z המספקים את Σ מספקים גם את φ. סימון: $\Sigma \models \varphi$.

נוסחה φ מעל מילון τ היא **אמת לוגית** אם לכל מבנה M עבור τ ולכל השמה z מתקיים $M \models_z \varphi$.

תרגיל 02: נתון המילון $\tau = \langle R(\cdot,\cdot), F(\cdot,\cdot), c_0, c_1 \rangle$. נגדיר $\Sigma = \{R(t,v_0) \mid t \text{ שם עצם}\}$.

א. הוכיחו כי Σ ספיקה. $\Sigma = \{R(v_1,v_0), R(c_1,v_0), R(F(v_1,v_2),v_0), \ldots\}$

פתרון: נוכיח כי קיים מבנה M והשמה z מעל M המספקים את Σ.

נבחר במבנה $M = \langle \overset{D^M}{\{a\}}, \overset{R^M}{\{(a,a)\}}, \overset{F^M}{f}, \overset{c_0}{a}, \overset{c_1}{a} \rangle$, כאשר $f(a,a)=a$.

תהי z השמה: $\forall i \in \mathbb{N},\ z(v_i)=a$

לכל $R(t,v_0)\in\Sigma$, מתקיים $M\models_z R(t,v_0) \Leftrightarrow (\bar{z}(t),\bar{z}(v_0))\in R^M \Leftrightarrow$ $(a,a)\in\{(a,a)\}$, וזה אכן נכון. לכן $M\models_z \Sigma$.

ב. הוכיחו כי $\Sigma \not\models \forall v_1 R(v_0,v_1)$

פתרון: נסמן $M=\langle \mathbb{N}, \geq, +, 0, 1\rangle$. תהי z ההשמה: $z(v_i)=0$ (בפרט $z(v_0)=0$)

צריך להוכיח ש- א. $M\models_z\Sigma$ ו- ב. $M\not\models_z \forall v_1 R(v_0,v_1)$

א. $M\models_z\Sigma$ יהי $\varphi=R(t,v_0)\in\Sigma$ כלשהו, עבור שם עצם t כלשהו.

$M\models_z\varphi \Leftrightarrow M\models_z R(t,v_0) \Leftrightarrow (\bar z(t), z(v_0))\in R^M \Leftrightarrow (\bar z(t),0)\in R^M \Leftrightarrow \bar z(t)\geq 0$

וזהו פסוק אמת, כי $\bar z(t)\in\mathbb{N}=D^M$ ולכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $i\geq 0$. לכן $M\models_z\Sigma$.

ב. $M\not\models_z \forall v_1 R(v_0,v_1)$ נניח בשלילה ש- $M\models_z \forall v_1 R(v_0,v_1)$: כי לא לכל n טבעי $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\geq n$

$M \models_z \forall v_1 R(v_0,v_1) \Leftrightarrow$ לכל $d\in D^M$, $M \models_{z'=z[v_1\leftarrow d]} R(v_0,v_1) \Leftrightarrow$ לכל $d\in D^M$, $(z'(v_0),z'(v_1))\in R^M \Leftrightarrow$

לכל $d\in D^M$, $(0,d)\in R^M \Leftrightarrow$ לכל $d\in D^M$, $0\geq d$

טענה זו לא מתקיימת (למשל, עבור $1\in \mathbb{N}$, $0<1$). לכן $M \not\models_z \forall v_1 R(v_0,v_1)$.

תרגיל 3: נתון מילון $\tau=<R(\cdot,\cdot),F(\cdot)>$. עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו או הפריכו כי היא אמת לוגית:

א. $\varphi_1=(\forall v_1\forall v_2 R(v_1,v_2))\rightarrow(\forall v_1\forall v_2 R(F(v_1),F(v_2)))$

פתרון: φ_1 היא אמת לוגית.

יהי מבנה M והשמה z. אזי:

$M\models_z \varphi \Leftrightarrow$ אם $M\models_z \forall v_1\forall v_2 R(v_1,v_2)$ אז $M\models_z \forall v_1\forall v_2 R(F(v_1),F(v_2)) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $M\models_{z'=z[v_1\leftarrow d_1][v_2\leftarrow d_2]} R(v_1,v_2)$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $M\models_{z''=z[v_1\leftarrow d_3][v_2\leftarrow d_4]} R(F(v_1),F(v_2)) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(z'(v_1),z'(v_2))\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(z''(F(v_1)),z''(F(v_2))) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(z'(v_1),z'(v_2))\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(F^M(z''(v_1)),F^M(z''(v_2)))\in R^M \Leftrightarrow$

אם לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(d_1,d_2)\in R^M$ אז לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(F^M(d_3),F^M(d_4))\in R^M$

וזו טענת אמת - כי אם לכל $d_1,d_2\in D^M$ $(d_1,d_2)\in R^M$ אז בפרט זה נכון עבור $F^M(d_3),F^M(d_4)\in D^M$.

ב. $\varphi_2=(\forall v_1\forall v_2 R(F(v_1),F(v_2)))\rightarrow(\forall v_1\forall v_2 R(v_1,v_2))$

פתרון: φ_2 איננה אמת לוגית.

נבחר במבנה $M=<\overset{D^M}{\{0,1\}},\overset{R^M}{\{(0,0)\}},F^M>$ כאשר, $\forall n\in\{0,1\}, F^M(n)=0$.

$M\models_z \varphi \Leftrightarrow$ אם $M\models_z \forall v_1\forall v_2 R(F(v_1),F(v_2))$ אז $M\models_z \forall v_1\forall v_2 R(v_1,v_2) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_3,d_4\in D^M$, $M\models_{z''=z[v_1\leftarrow d_3][v_2\leftarrow d_4]} R(F(v_1),F(v_2))$ אז לכל $d_1,d_2\in D^M$, $M\models_{z'=z[v_1\leftarrow d_1][v_2\leftarrow d_2]} R(v_1,v_2) \Leftrightarrow$

אם לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(z''(F(v_1)),z''(F(v_2)))$ אז לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(z'(v_1),z'(v_2))\in R^M \Leftrightarrow$

אם לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(F^M(z''(v_1)),F^M(z''(v_2)))\in R^M$ אז לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(z'(v_1),z'(v_2))\in R^M \Leftrightarrow$

אם לכל $d_3,d_4\in D^M$, $(F^M(d_3),F^M(d_4))\in R^M$ אז לכל $d_1,d_2\in D^M$, $(d_1,d_2)\in R^M$

עבור M שהגדרנו: לכל $d_3,d_4\in\{0,1\}$, אכן $(F^M(d_3),F^M(d_4))=(0,0)\in R^M$,

אבל עבור $d_1=0,d_2=1$ מתקיים ש- $(0,1)\notin R^M$.