הסתברות מ' (00094412) | תרגול 5

שם: איל

February 16, 2024

נושא התרגול: תוחלת

נושא ראשון - פיצול/איחוד פואסון

הערה: וקטור אקראי מולטינומי זה חומר טכני ולכן לא עוברים עליו בתרגול. צריך להשלים אותו לבד ואפילו תהיה עליו שאלה בשיעורי הבית.

תרגיל 1.

יהיו X ו-Y מ"מ בלתי תלויים המתפלגים $X \sim Pois(\lambda)$, $Y \sim Pois(\lambda)$

א. נגדיר מ"מ Z כך ש: $Z = X + Y$. מצא את פונקציית ההסתברות של Z.

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן Z.

פיתרון 1. א.

- נשים לב כי Z הוא משתנה מקרי בדיד , כלומר יכול לקבל טווח של ערכים בן מנייה
  - **ולכן צ"ל:** $P_Z(z)$.
- ראשית, התומך של Z (הערכים שאותם z יכול לקבל בהסתברות שונה מ-0) .
  - בשביל זה, מכיוון שנתון כ X ו-Y מתפלגים פואסונית, מתקיים שהתומך שלהם הוא:

$$R_X = \{0, 1, \ldots\}$$

$$R_Y = \{0, 1, \ldots\}$$

- נתונות לנו $P_X(x)$, $P_Y(y)$.
  - ומכיוון שX, Y בלתי תלויים, ניתן להסיק את $P_{X,Y}(x, y)$:

$$P_{X,Y}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

– נציב את ההגדרות של הפונקציות השוליות לפי הנתון:

$$= \begin{cases} \frac{e^{-\lambda x}\lambda_X^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda y}\lambda_Y^y}{y!} & x,y \in \{0,1,\ldots\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

• נשתמש בקשר $Z = X + Y$ כדי למצוא את $P_{X,Z}$:

$$P_{X,Z}(x,z) = P(X = x, X + Y = z)$$

– מכיוון שמתקיים $X = x$, ניתן להציב זאת ב-$X + Y = z$ כדי לקבל:

$$= P(X = x, Y = z - x)$$

$$= P_{X,Y}(x, z - x)$$

* הערת אגב: נשים לב שהפונקציה שקיבלנו תלויה ב-x וב-z, כלומר אפשר לסמן אותה ב:

$$= g(x,z)$$

* נציב $y = z - x$ ב-$P_{X,Y}$ ונקבל:

$$P_{X,Y}(x, z-x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda x}\lambda_X^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda(z-x)}\lambda_Y^{(z-x)}}{(z-x)!} & x, z-x \in \{0,1,\ldots\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

– לאחר מכן נסכום על כל ערכי ה-x האפשריים כדי לקבל את הפונקציה השולית $P_Z(z)$:

$$P_Z(z) = \sum_{x=0}^{z} P_{X,Z}(x,z)$$

$$= \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda x}\lambda_X^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda(z-x)}\lambda_Y^{(z-x)}}{(z-x)!}$$

* נשים לב שהסכום רץ על x ולכן נוציא ממנו את כל האיברים שלא תלויים ב-x:

$$= \left(e^{-\lambda_X + \lambda_Y}\right) \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda_X^x}{x!} \cdot \frac{\lambda_Y^{z-x}}{(z-x)!}$$

* אנחנו רוצים לגרום לאיברים שבתוך הסכום להיות מהצורה של פונקציית הסתברות מוכרת, ולכן נכפיל ב-$\frac{z!}{z!}$:

$$= \left(e^{-\lambda_X+\lambda_Y}\right)\frac{z!}{z!}\sum_{x=0}^{z}\frac{\lambda_X^x}{x!}\cdot\frac{\lambda_Y^{z-x}}{(z-x)!}$$

- כעת נקבל בתוך הסכום:

$$= \frac{\left(e^{-\lambda_X+\lambda_Y}\right)}{z!}\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\lambda_X^x\lambda_Y^{z-x}$$

- נשים לב שבשביל שהביטוי בסכום יהיה מהצורה של פונקציה בינומית, אנחנו צריכים לדאוג שיתקיים $\lambda_X+\lambda_Y=1$, ולכן נכפול ב-$\frac{(\lambda_X+\lambda_Y)^z}{(\lambda_X+\lambda_Y)^z}$ ונקבל:

$$= \frac{\left(e^{-\lambda_X+\lambda_Y}\right)}{z!}\cdot(\lambda_X+\lambda_Y)^z\cdot\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^x\left(\frac{\lambda_Y^{z-x}}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^{z-x}$$

- כעת נשים לב שמתקיים:

$$\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^x\left(\frac{\lambda_Y^{z-x}}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^{z-x}=1$$

- ולכן מתקיים:

$$P_Z(z)=\begin{cases}\frac{\left(e^{-\lambda_X+\lambda_Y}\right)\cdot(\lambda_X+\lambda_Y)^z}{z!} & z=0,1,\ldots\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- לסיכום, הטריק שהשתמשנו בו הוא להשלים את הסכום שלנו לצורה מוכרת ואז לקבל סכום ששווה ל-1.

על מנת שלא נבצע את החישוב הזה בכל פעם, נוכל לנסח טענה:

טענה 2. **איחוד פואסון:**

- יהיו $X_1,X_2,\ldots,X_n$ משתנים אקראיים בלתי תלויים מפולגים פואסונית כלומר:

$$X_i\sim Pois(\lambda_i)$$

– אזי מתקיים:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$$

פיתרון 1. ב.

- **צ"ל:** $P_{X|Z}\left(x,z\right)$
- נחשב לפי הגדרה:

$$P_{X|Z}\left(x,z\right)=\frac{P_{X,Z}\left(x,z\right)}{P_Z\left(z\right)}$$

– נציב את התוצאות מסעיף א' ונקבל:

$$P_{X|Z}\left(x,z\right)=\begin{cases}\begin{pmatrix}z\\x\end{pmatrix}\left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^x\left(\frac{\lambda_Y^{z-x}}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^{z-x} & z=0,1,\ldots\ \wedge\ x=0,1,\ldots,z\\0 & otherwise\end{cases}$$

– נשים לב שהנוסחה שיצאה תואמת למשתנה המקרי הבינומי:

$$X\mid Z=z\sim Bin\left(z,\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)$$

נושא שני - תוחלת:

- תכונות התוחלת:

1. ליניאריות:

$$E\left(a\cdot X+b\cdot Y\right)=a\cdot E\left(X\right)+b\cdot E\left(Y\right)$$

2. אם X מקבל ערכים בין a ובין b אז $a\le E\left(X\right)\le b$

- **כלל הכפל:**

– עבור X,Y משתנים מקריים בלתי תלויים:

$$E\left(X\cdot Y\right)=E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)$$

* ההפך לא בהכרח נכון, כלומר אם יצא $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$ זה לא אומר שהמשתנים המקריים הללו בלתי תלויים.

– הערה: אפשר להרחיב את כלל הכפל לפונקציה של משתנה מקרי:

$$\Rightarrow E(g(X)\cdot h(Y))=E(g(X))\cdot E(h(Y))$$

- תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:

$$E(g(x))=\sum_{x\in R_x} g(x)\cdot P(X=x)$$

– לדוגמה אם אנחנו רוצים לחשב את $E\left(X^2\right)$, נשתמש בפונקציה $g(t)=t^2$.

– ועבור מקרה רב מימדי:

$$E(g(X,Y))=\sum_{x\in R_X,\ y\in R_Y} g(X,Y)\cdot P(X=x,Y=y)$$

תרגיל 2:

מטילים קובייה הוגנת 10 פעמים באופן בלתי תלוי.

חשב את התוחלת של המ"מ הבאים:

א. סכום התוצאות ב-10 הטלות.

ב. סכום שתי התוצאות הגבוהות ביותר ב-3 ההטלות הראשונות.

ג. תוצאה מקסימלית ב-5 הטלות ראשונות.

ד. מס' הפעמים שהתקבלה תוצאה המתחלקת ב-3 ב- 10 ההטלות.

ה. מס' התוצאות מתוך $\{1,2,3,4,5,6\}$ שלא הופיעו ב-10 ההטלות.

ו. מס' התוצאות מתוך $\{1,2,3,4,5,6\}$ שהופיעו ב-10 ההטלות

ז. מכפלת התוצאות ב-10 הטלות.

פיתרון 2. א. סכום התוצאות ב-10 הטלות

- נגדיר משתנה מקרי X_i = תוצאת ההטלה ה-i

- ונגדיר משתנה מקרי:

$$S=\sum_{i=1}^{10} X_i$$

- **צ"ל:** $E\left(S\right)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_{i}\right)$
- מלינאריות, מתקיים:

$$E\left(\sum_{i=1}^{10}X_{i}\right)=\sum_{i=1}^{10}E\left(X_{i}\right)$$

  – לכל i מתקיים

$$E\left(X_{i}\right)=\sum_{x=1}^{6}x\cdot P\left(X_{i}=x\right)=\frac{1}{6}\cdot\sum_{x=1}^{6}x$$

$$\Rightarrow E\left(X_{i}\right)=3.5$$

    * ולכן מתקיים:

$$E\left(S\right)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_{i}\right)=10\cdot3.5$$

פיתרון 2. ב. סכום שתי התוצאות הגבוהות ביותר ב-3 ההטלות הראשונות.

- במקרה הזה נצטרך להגדיר משתנה מקרי נוסף: M - התוצאה המינימלית מבין 3 ההטלות הראשונות.
- כעת נגדיר

$$T=\sum_{i-1}^{3}x_{i}-M$$

- מליניארות התוחלת, התוחלת של T היא:

$$E\left(T\right)=3\cdot\left(3.5\right)-E\left(M\right)$$

- כעת נמצא את $E\left(M\right)$ לפי הגדרה:

$$E\left(M\right)=\sum_{m=1}^{6}m\cdot P\left(M=m\right)$$

– נחשב את $P\left(M=m\right)$ ומכיוון שמדובר על מינימום ו-M מקבל רק ערכים שלמים, מתקיים:

$$P\left(M=m\right)=P\left(M\geq m\right)-P\left(M\geq m-1\right)$$

$$=P\left(X_{1}\geq m\right)\cdot P\left(X_{2}\geq m\right)\cdot P\left(X_{3}\geq m\right)-P\left(X_{1}\geq m-1\right)\cdot P\left(X_{2}\geq m-1\right)\cdot P\left(X_{3}\geq m-1\right)$$

* מתקיים $P\left(X_{i}\geq m\right)=\frac{7-m}{6}$ ולכן:

$$=\left(\frac{7-m}{6}\right)^{3}-\left(\frac{7-(m-1)}{6}\right)^{3}$$

פיתרון 2. ג. תוצאה מקסימלית ב-5 הטלות ראשונות.

- נסמן ב-Y את תוצאת ההטלה המקסימלית מבין 5 ההטלות הראשונות.
- **צ"ל:** $E\left(Y\right)$
- נעבוד לפי הגדרה:

$$E\left(Y\right)=\sum_{y=1}^{6}y\cdot P\left(Y=y\right)$$

– בתרגול הקודם מצאנו את $P\left(Y=y\right)$ כאשר חישבנו

$$P\left(Y=y\right)=P\left(Y\leq y\right)-P\left(Y\leq y-1\right)$$

* ומכיוון שהמשתנים המקריים בלתי תלויים מתקיים:

$$=P\left(X_{i}\leq y\right)\cdot P\left(X_{2}\leq y\right)\cdot\ldots\cdot P\left(X_{5}\leq y\right)-P\left(X_{i}\leq y-1\right)\cdot P\left(X_{2}\leq y-1\right)\cdot\ldots\cdot P\left(X_{5}\leq y-1\right)$$

$$\Rightarrow P\left(Y=y\right)=\left(\frac{y}{6}\right)^{5}-\left(\frac{y-1}{6}\right)^{5}$$

– נציב את המסקנה מהתרגול הקודם:

$$E\left(Y\right)=\sum_{y=1}^{6}y\cdot P\left(Y=y\right)$$

$$= \sum_{y=1}^{6} y \cdot \left(\left(\frac{y}{6}\right)^5 - \left(\frac{y-1}{6}\right)^5 \right)$$

$$= 5.431$$

פיתרון 2.ד. מכפלת התוצאות ב-10 הטלות.

- כל המשתנים המקריים בלתי תלויים ולכן לפי כלל הכפל מתקיים:

$$E\left(\prod_{i=1}^{10} x_i\right) = \prod_{i=1}^{10} E\left(x_i\right) = (3.5)^{10}$$

- התוחלת של מכפלת כל התוצאות היא מכלל הכפל:

תרגיל 3:

יהא Y מספר הפעמים שהתקבל H ב-3 הטלות מטבע הוגן בלתי תלויות.
חשבו את התוחלת של Y^2 ושל Y^4

פיתרון 3:

- מתוך הסיפור ניתן להבין כי Y הוא משתנה מקרי בינומי:

$$Y \sim Bin\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

- נרשום את $P_Y\left(y\right) = \binom{3}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{3-y}$ באופן מפורש:

$$P_Y\left(y\right) = \begin{cases} \frac{1}{8} & y = 0,3 \\ \frac{3}{8} & y = 1,2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- נשתמש בתכונה של פונקציה של משתנה מקרי:

$$E\left[Y^2\right] = \sum_{y=0}^{3} y^2 \cdot P_Y\left(y\right)$$

– נפתח את הטור:

$$E\left[Y^2\right]=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$$

• באותו אופן, עבור Y^4 מתקיים:

$$E\left[Y^4\right]=\sum_{y=0}^{3}y^4\cdot P_Y(y)$$

$$=0^4\cdot\frac{1}{8}+1^4\cdot\frac{3}{8}+2^4\cdot\frac{3}{8}+3^4\cdot\frac{1}{8}=16.5$$

שאלה 4:

מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים בעלי הסתברות להצלחה p עד אשר מקבלים הצלחה בפעם ה-m-ית.
נסמן ב-T_m את זמן ההצלחה ה-m-י. כאשר $T(0)=0$.
נגדיר $N_i=T_i-T_{i}$. כלומר, N_i מציין את מספר הניסויים בין הצלחה i להצלחה $i-1$.
א. הראה כי $N_i\sim Geo(p)$ לכל i
ב. הראה כי $T_m=\sum_{i=1}^{m}N_i\sim Nbin(m,p)$, כלומר סכום של m משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות, המתפלגים גאומטרית עם סיכוי להצלחה p מתפלג בינומי שלילי עם פרמטרים (m,p).
ג. חשב את $E(T_m)$

פיתרון 4. א. $N_i\sim Geo(p)$ לכל i

• ראשית נשים לב שהסיפור מזכיר לנו את המשתנה הבינומי השלילי.

• כדי לקבל אינטואיציה, נתחיל מ-N_1 = מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה:

$$N_1=T_1-\overbrace{T_0}^{=0}$$

$$=T_1\sim Geo(p)$$

• נראה עבור N_2 ונקבל מסימטריות שהטענה נכונה לכל N_i.

– ראשית נמצא את $P_{N_1,N_2}(n_1,n_2)$, כלומר את $P(N_1=n_1,N_2=n_2)$

* במילים: ההסתברות שההצלחה הראשונה קרתה אחרי n_1 ניסויים וההצלחה השנייה קרתה אחרי עוד n_2 ניסויים:

$$P\left(\left\{\underbrace{F,F,F,\ldots,F,S}_{n_1},\underbrace{F,F,\ldots,F,S}_{n_2}\right\}\right)$$

$$=\begin{cases} q^{n_1-1}\cdot p\cdot q^{n_2-1}\cdot p & n_1=1,2,\ldots\ \wedge n_2=1,2,\ldots \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

– לפי משפט משבוע שעבר, אם חישבנו את $P_{X,Y}(x,y)$ והוא יצא לנו $g(x)\cdot g(y)$ עבור פונקציה g אז מתקיים ש-X,Y בלתי תלויים וגם $g(x),g(y)$ הן פונקציות ההסתברות שלהן עד כדי כפל בקבוע.

* הערה: אסור שהטווחים של x,y האלה יהיו תלויים אחד בשני.
  · כלומר אם היה לנו טווח $n_1=1,2,\ldots,n_2$ אז המשפט לא היה עובד.
  · אפשר להסביר את הצורך הזה אם נכניס שני אינדיקטורים במכפלה:

$$\left(g\left(x\right)\cdot I\left\{x\in\{1,2,\ldots\}\right\}\right)\cdot\left(g\left(y\right)\cdot I\left\{x\in\{1,2,\ldots\}\right\}\right)$$

– במקרה שלנו, מכיוון ש $\sum q^{n_1-1}\cdot p=1$ וגם $\sum q^{n_2-1}\cdot p=1$ אנחנו לא צריכים לבצע תיקון של כפל בקבוע.

• הראנו שמתקיים $N_1\sim Geo(p)$ וגם $N_2\sim Gep(p)$.

– מסימטריות, הטענה מתקיימת לכל N_i.

פיתרון 4. ב. $T_m=\sum_{i=1}^{m}N_i\sim NBin(m,p)$

• נשים לב שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{m}N_i=(T_1-T_0)+(T_2-T_1)+\ldots+(T_{m-1}-T_{m-2})+(T_m-T_{m-1})$$

– זהו טור טלסקופי והמחוברים שנשארים אחרי צמצום הם:

$$=T_m-T_0=T_m$$

– לפי הסיפור אנחנו וידעים ש $T_M\sim NBin(m,p)$

פיתרון 4. ג. $E(T_m)$

• בעיקרון אנחנו צריכים לחשב לפי הגדרה: $E[T_m]=\sum_t t\cdot P(T_m=t)$

– אבל בדף הנוסחאות נתונות לנו התוחלות של משתנים מקריים מוכרים.

* התוחלת של משתנה מקרי בינומי שלילי היא $\frac{m}{p}$ ולכן זו התשובה.