אינפי 2מ' | תרגול 13 - עם ניקה

שם: איל שטיין

July 4, 2023

נושא השיעור: פונקציות בשני משתנים - כלל השרשרת, כלל לייבניץ, אינטגרל כפול

נושא ראשון - כלל השרשרת

משפט 1. תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה בנקודה (x_0,y_0) ויהיו שתי פונקציות $x(t,s)$ ו-$y(t,)$ הגזירות בנקודה (t_0,s_0) ומתקיים:

$$x_0 = x(t_0,s_0)$$

$$y_0 = y(t_0,s_0)$$

אזי:

- $u(t,s) = f(x(t,s), y(t,s))$ גם גזירה ב-(t_0,s_0) ומתקיים:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(t_0,s_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial s}(t_0,s_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial s}(t_0,s_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0,s_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial t}(t_0,s_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial t}(t_0,s_0)$$

תרגיל 1:

- תהי $f(x,y) \in C^1$.
- נגדיר $g(t) = f(\sin(t), e^t)$

- ונגדיר $h(t)=f\left(t^2,e^t\right)$
- נתון:
  - $g(0)=h(0)=2$
  - $g'(0)=3$
  - $h'(0)=1$

צ"ל: מצאו מישור משיק לגרף של $z=f(x,y)$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)=(0,1,2)$
פתרון:

- **תזכורת - מישור משיק:**
  - משוואת מישור משיק לגרף של פונקציה $f(x,y)$ הגזירה בנקודה כלשהי (x_0,y_0) היא:

$$z=z_0+f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

    * לכן אנחנו צריכים את הנגזרות החלקיות של f לפי x ולפי y בנקודה $(0,1)$.

- נתבונן בפונקציה $g(t)$:

$$g(t)|_{t=0}=f\left(\sin(0),e^0\right)=$$

$$=f(0,1)=2$$

  - ולכן הנקודה $(0,1,2)$ שייכת לגרף הפונקציה.

- לפי הנוסחה של כלל השרשרת, הנגזרת של g היא:

$$g'(0)=3=f_x'|_{(0,1)}\frac{dx}{dt}|_{t=0}+f_y'|_{(0,1)}\cdot\frac{dy}{dt}|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}&=f_x'(0,1)\cdot(\sin(0))'+f_y'\cdot(0,1)\cdot 1\\&=f_x'(0,1)+f_y'\cdot(0,1)=3\end{aligned}$$

- ועבור הנגזרת של h:

$$\begin{aligned}1&=h'(0)=f_x'(0,1)\cdot\left(t^2\right)'|_{t=0}+f_y'(0,1)\cdot\left(e^t\right)'|_{t=0}\\&=f_y'(0,1)\end{aligned}$$

- קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} f'_x(0,1) + f'_y(0,1) = 3 \\ f'_y(0,1) = 1 \end{cases}$$

  - ולכן נקבל $f'_x(0,1) = 2$

- ולכן משוואת המישור המשיק הוא:

$$z = 2 + 2\cdot(x-0) + 1\cdot(y-1)$$

$$0 = 2x + y - z + 1$$

תרגיל 2:

- תהי פונקציה $u(x,y) \in C^2(D)$ עבור $D = (0,\infty)\times(0,\infty)$
- נגדיר:

$$v(s,t) = u\left(\overbrace{e^{s+t}}^{x}, \overbrace{e^{s-t}}^{y}\right)$$

צ"ל: הוכיחו כי $v_{st} = 0 \iff x^2u_{xx} + x\cdot u_x = y^2u_{yy} + yu_y$

פתרון:

- נבדוק מהי המשוואה של הנגזרת השנייה של v ונבחן מה קורה כאשר היא מתאפסת ומתי היא מתאפסת.
- נסמן $x(s,t) = e^{s+t}$
- ונסמן $y(s,t) = e^{s-t}$
- מכיוון ש$u(x,y)$ גזירה ברציפות פעמיים לכל נקודה (x,y) המקיימת $x,y>0$ אז לפי הגדרת הפונקציות x ו-y:

$$x(s,t), y(s,t) > 0$$

  - ומכיוון ש x,y גזירות ברציפות פעמיים כי הן פונקציות עם e, אז ניתן להשתמש בכלל השרשרת פעמיים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{s+t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot e^{s-t} \end{aligned}$$

* ננסה לרשום את המשוואה הזו שוב כביטוי של x ו-y.

- מכיוון שמתקיים $\frac{\partial x}{\partial s}=e^{s+t}=x$ וגם $\frac{\partial y}{\partial s}=e^{s-t}=y$ אז אפשר לכתוב:

$$v_s=\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot y$$

- ולכן אם נגזור את v_s שוב, הפעם לפי t, נקבל:

$$v_{st}=(v_s)_t=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot y\right)_t$$

$$\begin{aligned}&=(u_x)_t\cdot x+u_x\cdot x_t+(u_y)_t\cdot y+u_y\cdot y_t\\&=(u_{xx}\cdot x_{tu}+u_{xy}\cdot y_t)\,x+u_x\cdot x_t+(u_{yx}\cdot x_t+u_{yy}\cdot y_t)\cdot y+u_y\cdot y_t\end{aligned}$$

- נציב:

$$x_t=\frac{d}{dt}\left(e^{s+t}\right)=x$$

$$y_t=\frac{d}{dt}\left(e^{s-t}\right)=-y$$

- נקבל:

$$v_{st}=(u_{xx}\cdot x-u_{xy}\cdot y)\cdot x+u_x\cdot x+(u_{yx}\cdot x-u_{yy}\cdot y)\cdot y-u_y\cdot y$$

- לפי משפט, מכיוון ש-$u(x,y)\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ אז $u_{xy}=u_{yx}$. ולכן:

$$\begin{aligned}v_{st}&=u_{xx}\cdot x^2-\cancel{u_{xy}\cdot y\cdot x}+u_x\cdot x+\cancel{u_{xy}\cdot x\cdot y}-u_{yy}\cdot y^2-u_y\cdot y\\&=u_{xx}\cdot x^2-u_{yy}\cdot y^2+u_x\cdot x-u_y\cdot y\end{aligned}$$

- אם נשווה לאפס את v_{st} ונעביר אגפים נקבל:

$$v_{st}=0=u_{xx}\cdot x^2+u_x\cdot x-u_{yy}\cdot y^2-u_y\cdot y$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u_{xx} \cdot x^2 + u_x \cdot x = u_{yy} \cdot y^2 + u_y \cdot y$$

תרגיל 3:

א. תהי $g(t)$ גזירה ברציפות בכל $\mathbb{R}$.
נגדיר פונקציה $z(x,y) = y \cdot g\left(\frac{y}{z}\right) - 8 \cdot x^{-2} \cdot y^2$
תהי (x,y) נקודה על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ עבור $x \neq 0$.
צ"ל: חשבו את הנגזרת המכוונת של $z(x,y)$ בנקודה (x,y) בכיוון וקטור הפונה מנקודה (x,y) לראשית. הביעו את התשובה כפונקציה של (x,y,z).

ב.
נניח שנתון בנוסף ש-$g\left(\frac{1}{2}\right) = -3$.
נגדיר:

$$F(y) = \int_{2y}^{y^2} z(x,y)\,dx$$

צ"ל: חשבו את $F'(2)$

3. א. פתרון:

- נשתמש במשפט הגרדיאנט.
  - על מנת להשתמש בו, אנחנו צריכים שהפונקציה z תהיה גזירה.
    - $z(x,y)$ גזירה כמכפלה של פונקציות גזירות.
    - ולכן:

$$\frac{\partial z}{\partial \hat{n}} = \overrightarrow{\nabla} z(x,y) \cdot \hat{n}$$
$$= (z_x(x,y), z_y(x,y)) \cdot \hat{n}$$

    - מכיוון ש(x,y) נמצאת על המעגל, אנחנו לא צריכים לנרמל את n אלא נקבל $\hat{n} = (-x,-y)$
    - נמצא את הנגזרות החלקיות של z:

$$z(x,y) = y \cdot g\left(\frac{y}{z}\right) - 8 \cdot x^{-2} \cdot y^2$$

- הנגזרת החלקית לפי x:

$$z_x = y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 16x^{-3}y^2$$

- הנגזרת החלקית לפי y:

$$z_y = g\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - 16x^{-2}y$$

* בעזרת משפט הגרדיאנט נקבל:

$$\frac{\partial z}{\partial \hat{n}} = \left(y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 16x^{-3}y^2,\ \ g\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - 16x^{-2}y\right) \cdot (-x, -y)$$

- נפתח את הכפל הסקלרי:

$$\begin{aligned}
&= -x\left(y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 16x^{-3}y^2\right) - y\left(g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) - 16x^{-2}y\right)\\
&= -x \cdot y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) - x \cdot 16x^{-3}y^2 - y \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) - y \cdot \frac{y}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot 16x^{-2}y\\
&= \cancel{g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y^2}{x}} - \cancel{16x^{-2}y^2} - y \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) - \cancel{\frac{y^2}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)} + \cancel{16x^{-2}y^2}\\
&= -y \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

- ולכן:

$$= -z - 8x^{-2}y^2$$

3. ב.

- נתון:

$$F(y) = \int_{2y}^{y^2} z(x,y)\,dx$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

- בנוסף נתון כי $z \in C^1$ בכל נקודה שבה $x \neq 0$.

– z_y רציפה וגם הפונקציות y^2 ו-$2y$ גזירות ברציפות.

* לכן לפי כלל לייבניץ מתקיים:

$$F'(y)=\int_{2y}^{y^2} z_y(x,y)\,dx+2y\cdot z\left(y^2,y\right)-2\cdot z(2y,y)$$

• נרצה לחשב את $F'(2)$:

$$\begin{aligned}F'(2)&=4\cdot z(4,2)-2\cdot z(4,2)\\&=2\cdot z(4,2)\end{aligned}$$

– **נציב** $z(x,y)=y\cdot g\left(\frac{y}{z}\right)-8\cdot x^{-2}\cdot y^2$ **עבור** $y=2$ **ו-** $x=y^2=4$

$$=2\cdot g\left(\frac{4}{2}\right)-8\cdot 4^{-2}\cdot 2^2=16$$

תרגיל 4:

חשבו:

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{1+de^x}$$

עבור $\alpha\in[0,1]$, בעזרת כלל לייבניץ.

פתרון:

• נכתוב את הביטוי בצורה של פונקציה בשני משתנים:

$$F(x,\alpha)=\frac{1}{1+\alpha e^x}$$

• הפונקציה רציפה במלבן $[0,1]\times[0,1]$.

– מתקיים כי הנגזרת של F לפי α היא:

$$F_\alpha=\frac{-e^x}{(1+\alpha\cdot e^x)^2}$$

* הנגזרת רציפה גם היא במלבן הזה
* ולכן לפי כלל לייבניץ מתקיים

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^1 F_\alpha(x,\alpha)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{-e^x}{(1+\alpha\cdot e^x)^2}dx \end{aligned}$$

* נפתור את האינטגרל בעזרת החלפת משתנים.
  * נסמן

$$1+\alpha\cdot e^x=t$$

$$\alpha\cdot e^x dx=dt$$

$$x=0\Rightarrow t=1+\alpha$$

$$x=1\Rightarrow t=1+\alpha\cdot e$$

  * נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha}\cdot\int_{1+\alpha}^{1+\alpha\cdot e}\frac{dt}{t^2} &= -\frac{1}{\alpha}\cdot\left(-t^{-1}\right)|_{1+\alpha}^{1+\alpha\cdot e} \\ &= \frac{1-e}{(1+\alpha)(1+\alpha\cdot e)} \end{aligned}$$

* קיבלנו:

$$I'(\alpha)=\begin{cases}\frac{1-e}{(1+\alpha)(1+\alpha\cdot e)} & 0<\alpha\le 1\\ 1-e & \alpha=0\end{cases}$$

– הביטויים מתלכדים ולכן ניתן לכתוב ביטוי יחיד:

$$I'(\alpha)=\frac{1-e}{(1+\alpha)(1+\alpha\cdot e)}$$

* נמצא את $I\left(0\right)$:

$$I\left(\alpha\right)=\int I'\left(\alpha\right)d\alpha$$

– לאחר פירוק לשברים חלקיים מתקבל:

$$\begin{aligned}&=ln\left(1+\alpha\right)-ln\left(1+e\cdot\alpha\right)+c\\&=ln\left(\frac{1+\alpha}{1+e\cdot\alpha}\right)+c\end{aligned}$$

* נמצא את c.
* עבור $\alpha=0$ מתקבל:

$$I\left(0\right)=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1}=1=ln\left(1\right)+c$$

$$c=1$$

· ולכן תוצאת האינטגרציה היא:

$$I\left(\alpha\right)=ln\left(\frac{1+\alpha}{1+e\cdot\alpha}\right)+1$$

נושא שני - אינטגרל כפול

תרגיל 5:

תהי פונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{x^{2}} & 0<y<x<1\\ -\frac{1}{y^{2}} & 0<x<y<1\\ 0 & x=y\ \ \vee\ \ x=0,1\ \ \vee\ \ y=0,1\end{cases}$$

צ"ל: חשבו את סכום האינטגרלים הנשנים הללו:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

פתרון:

- נתחיל מלחשב את

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

- נקבע y ונחלק את האינטגרל הפנימי לשני חלקים:

$$\int_0^1 \left(\int_0^y \left(-\frac{1}{y^2} \right) dx + \int_y^1 \left(\frac{1}{x^2} \right) dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\left(-\frac{1}{y^2} \cdot x \right) |_0^y + \left(-\frac{1}{x} \right) |_y^1 \right) dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{y} \right) dy \\ &= \int_0^1 (-1)\,dy \\ &= -1 \end{aligned}$$

- תרגיל - לחשב לבד את האינטגרל הנשנה השני. הוא יוצא 1.
  - האינטגרלים הנשנים לא שווים כי הפונקציה לא חסומה בתחום ולכן היא לא אינטגרבילית.

תרגיל 6:

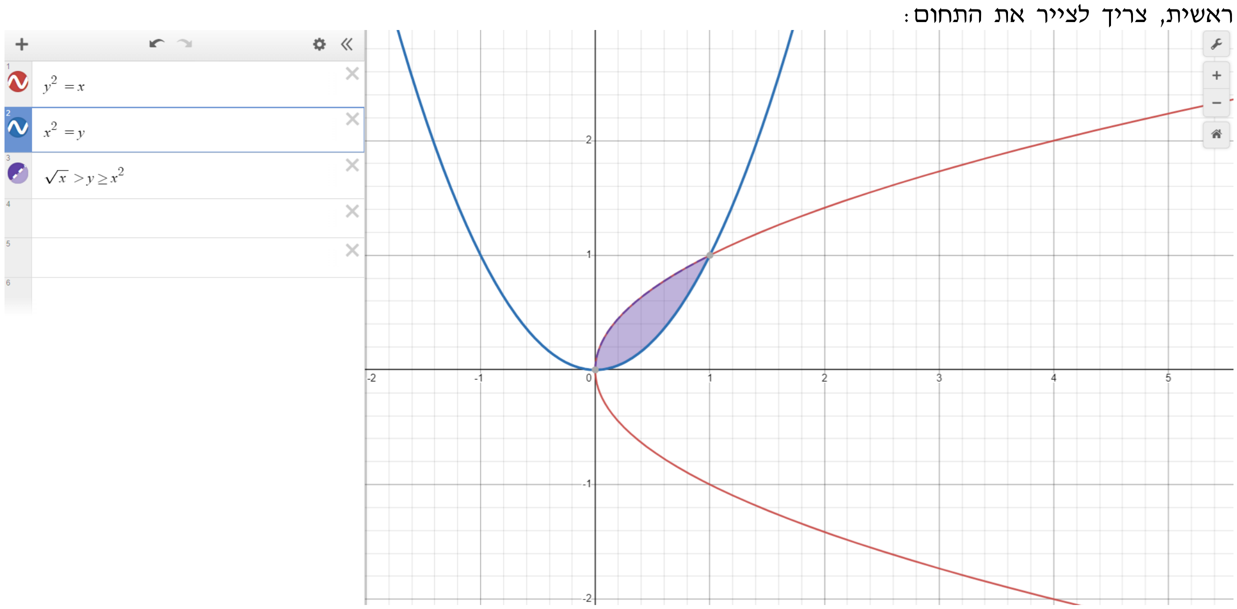
חשבו:

$$I = \iint_D \left(x^2 + y \right) dxdy$$

כאשר $D=\left\{(x,y)\ \mid\ y\geq x,\ \ y^2\leq x\right\}$

פתרון:

- ראשית, צריך לצייר את התחום:



- אנחנו מחפשים את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
- נקבע את x ונבדוק מהו y כפונקציה של x. נקבל $y=\sqrt{x}$, וזה יהיה הגבול העליון של התחום, כלומר הגרף האדום.
- הגבול התחתון הוא x^2, כלומר הגרף הכחול.
- ולכן:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy\right)dx\\
&= \int_0^1\left(\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right)dx\\
&= \int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}}\right)dx\\
&= \ldots=\frac{33}{140}
\end{aligned}$$