הסתברות מ' | הרצאה 9 (00094412)

שם: איל

March 13, 2024

נושאי השיעור: משתנים מקריים רציפים

נושא ראשון - המשך הגדרות משתנים מקריים רציפים

תזכורת:

הגדרה. משתנה מקרי רציף.

- משתנה מקרי X מעל מרחב הסתברות (Ω, P) ייקרא רציף (לחלוטין) אם קיימת פונקציה $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ רציפה למקוטעין כך שמתקיים:

$$P\left(X \in [a, b]\right) = \int\limits_a^b f_X\left(x\right) dx$$

- הפונקציה f_X תיקרא **פונקציית הצפיפות של X.**
- תנאי שקול - לכל b מתקיים $F_X\left(x\right) = P\left(X \leq b\right) = \int_{-\infty}^b f_X\left(x\right) \ dx$

ראינו שתי דרכים למציאת צפיפות:

משפט 1. אם X הוא מ"מ רציף ו-x היא נקודת רציפות של f_X אז יש שתי אפשרויות:

1. $f_X\left(x\right) = F_X'\left(x\right) = \left(P\left(X \leq x\right)\right)'$
2. $f_X\left(x\right) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(X \in [x, x+\Delta])}{\Delta}$

הערה. באופן כללי יש משתנים מקריים שהם לא רציפים ולא בדידים. בקורס שלנו יש רק בדידים ורציפים ולכן אם משתנה מקרי הוא לא בדיד אז מבחינתנו הוא בהכרח רציף.

דוגמה 2. המשך מההרצאה הקודמת:

- בוחרים נקודה באקראי בדיסק היחידה.
- יש סיכוי שווה לכל נקודה.

- נסמן ב-R את מרחק הנקודה שנבחרה מהראשית.
- מצאנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של R:

$$F_R(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ a^2 & 0 \le a \le 1 \\ 1 & a > 1 \end{cases}$$

  - לאחר מכן הראנו ש-R משתנה מקרי רציף ומצאנו את צפיפותו בעזרת F_R.

כעת נפתור את הדוגמה בדרך אחרת:

- נראה ש-R הוא לא בדיד על ידי כך שנראה $P(R=r)=0$ לכל $r \in \mathbb{R}$, כי משתנה מקרי בדיד לא יכול לקיים את זה (כי $\sum P(R=r)=1$):
  - נשים לב שהנקודה לא מחוץ לדיסק ולכן מהגדרה מתקיים $P(R>1)=P(R<0)=0$
  - עבור $r \in [0,1]$, אז הנקודה נבחרה בדיוק על ההיקף של תת-מעגל ברדיוס r.
    - וההסתברות לכך קטנה מההסתברות שהנקודה נפלה בשטח גדול יותר, שנסמנו טבעת $r+\Delta$.
      - וההסתברות לנקודה ליפול בטבעת $r+\Delta$ היא בסיכוי שווה, כלומר:

$$= \frac{S(r+\Delta\ \ disc)}{S(whole\ \ unit\ \ circle)} = \frac{\pi \cdot (r+\Delta)^2}{\pi \cdot 1^2}$$

$$= \frac{\pi \cdot (r+\Delta)^2}{\pi \cdot 1^2}$$

$$= 2r\Delta + \Delta^2 \xrightarrow[\Delta \to 0]{} 0$$

      - כלומר $P(R=r) \le 0$
      - ולכן $P(R=r)=0$

- הראנו כי R רציף.
  - לכן לפי משפט 1, מתקיים:

$$f_R(r) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(R \in [r, r+\Delta])}{\Delta}$$

  - נשים לב שאם $r<0$ או $r>1$ אז נקבל $f_R(r)=0$
  - אם $r \in (0,1)$ אז:

$$f_R(r) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(R\ \ is\ \ in\ \ (r+\Delta)\ \ disc)}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{2r\Delta + \Delta^2}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} 2r$$

$$= 2r$$

– מצאנו את f_R חוץ מנקודות אי הרציפות שלה (בהכרח מספר סופי של נקודות) וחוץ מהנקודות $r = 0, r = 1$
– מכיוון שזו משתנה מקרי רציף מתקיים $P(R=0) = P(R=1) = 0$
– מכיוון שהצפיפות לא משתנה אם משנים אותה במספר סופי של נקודות אז נקודות אי הרציפות לא משפיעות על פונקציית הצפיפות.
  * לכן קיבלנו:

$$f_R(r) = \begin{cases} 2r & r \in [0,1] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

נושא שני - תוחלת של משתנה מקרי רציף:

הגדרה 3. תוחלת של משתנה מקרי רציף

• אם X משתנה מקרי רציף עם צפיפות f_X אז התוחלת שלו היא:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \ dx$$

– בהנחה שהאינטגרל קיים (כלומר מתכנס בהחלט).

משמעות ההגדרה:

• המשמעות היא כמו במקרה הרציף, כלומר ממוצע של הגודל המיוצג על ידי X על פני $n \to \infty$ ניסויים.

תזכורת:

• אם X משתנה מקרי (כלשהו) מעל Ω ו-$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אז המשתנה המקרי $Y = g(x)$ מוגדר על ידי $Y(\omega) = g(X(\omega))$

הערה. ראינו שאם X משתנה מקרי בדיד אז גם $g(X)$ הוא גם משתנה מקרי בדיד.
במשתנים מקריים רציפים זה לא נכון: $g(x)$ יכול להיות רציף, בדיד (או לא זה ולא זה, בקורסים אחרים).

משפט 4. תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי רציף.

- אם X הוא משתנה מקרי רציף ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ונגדיר $Y=g\left(X\right)$.
- אזי התוחלת של Y היא:

$$E\left[Y\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g\left(x\right)\cdot f_{X}\left(x\right)\ dx$$

  – (אם התוחלת של Y מוגדרת)

הערה. המשפט הזה יעבוד גם אם X רציף וגם אם X בדיד.

הערה. התכונות והמשפטים שחלו על תוחלת במקרה הבדיד נכונים גם למקרה הרציף. לדוגמה לינאריות התוחלת.

משפט 5. נוסחת הזנב למשתנה מקרי רציף:

- אם X משתנה מקרי רציף המקבל ערכים אי שליליים בלבד, כלומר $P\left(X\in[0,\infty]\right)=1$, אז:

$$E\left[X\right]=\int\limits_{x=0}^{\infty}P\left(X>x\right)\ dx=\int\limits_{x=0}^{\infty}\left(1-F_{X}\left(x\right)\right)dx$$

הערה. אם X משתנה מקרי רציף עם תוחלת מוגדרת אז:

$$Var\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left[X\right]\right)^{2}\right]$$

$$SD=\sqrt{Var\left(X\right)}$$

- כלומר בשונות וסטיית תקן אין הבדל בין המקרה הרציף לבדיד.

נושא שלישי - התפלגויות רציפות מוכרות (חשובות):

התפלגות ראשונה - התפלגות אחידה על קטע.

משפט 6. פונקציית צפיפות של משתנה יוניפורמי

- למשתנה מקרי רציף X עם צפיפות:

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{d-c} & c\leq x\leq d\\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  – נאמר כי יש התפלגות אחידה על $[c,d]$ (עבור $-\infty<c<d<\infty$)

- סימון: $X\sim Uni\left(\left[c,d\right]\right)$
  – המשמעות (שדיברנו עליה בהרצאה הקודמת) היא ש-X הוא ערכה של נקודה הנבחרת באקראי בסיכוי שווה בקטע $[c,d]$.
  – פונקציית ההתפלגות המצטברת שלה היא:

$$F_X\left(x\right)=P\left(X\leq x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}f_X\left(u\right)\ du$$

$$=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x}0dx & x\leq c\\ \cancel{\int_{-\infty}^{c}0dx}+\int_{c}^{x}\frac{1}{d-c}dx & c<x\leq d\\ 1 & x>d \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & x\leq c\\ \frac{x-c}{d-c} & c<x\leq d\\ 1 & x>d \end{cases}$$

הערה. עבור משתנה מקרי רציף X, פונקציית ההתפלגות המצטברת היא תמיד רציפה (כי היא אינטגרל של פונקציה).

תוחלת של משתנה מקרי רציף יוניפורמי

- התוחלת היא:

$$E\left[X\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X\left(x\right)dx=\int\limits_{c}^{d}x\cdot\frac{1}{d-c}dx$$

$$=\frac{1}{d-c}\cdot\frac{x^2}{2}\mid_{x=c}^{d}=\frac{1}{2}\cdot\left(d+c\right)$$

שונות וסטיית תקן של משתנה מקרי רציף יוניפורמי

- לפי הגדרה, השונות היא:

$$Var\left(X\right)=E\left[\left(x-E\left[X\right]\right)^2\right]$$

- נשים לב שקיבלנו תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי רציף.
- אפשר במקום לחשב אותו באופן ישיר לפי הגדרה, לחשב את התוחלת של הפונקציה $g(x) = (x - E[X])^2$, כלומר $\int (x - E[X])^2 \cdot f_X(x)$
- אבל יהיה יותר נוח להשתמש בנוסחה ממשתנים בדידים:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$$

* ראשית נחשב את התוחלת של הפונקציה של המשתנה המקרי הרציף X^2:

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_c^d x^2 \cdot \frac{1}{d-c}dx$$

$$= \frac{1}{d-c} \cdot \frac{x^3}{3} |_{x=c}^{x=d}$$

$$= \frac{d^2 + cd + c^2}{3}$$

* לאחר מכן נחשב את $(E[X])^2 = \left(\frac{d+c}{2}\right)^2$
- סה"כ נקבל:

$$Var(X) = \frac{(d-c)^2}{12}$$

התפלגות שנייה - התפלגות נורמלית/גאוסית

חלק ראשון - המקרה התקני/סטנדרטי:

הגדרה 7. התפלגות נורמלית (גאוסית) תקנית/סטנדרטית:
למשתנה מקרי רציף Z עם צפיפות $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$ עבור $-\infty < z < \infty$, נאמר כי יש התפלגות נורמלית (גאוסית) תקנית (סטנדרטית).
סימון: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

משמעות: אפשר לייצג (בקירוב) את ההתפלגות של הרבה גדלים בטבע בעזרת התפלגות נורמלית. לדוגמה, גובה/משקל/ציונים וכו'.

וידוא שפונקציית הצפיפות מוגדרת היטב:

- נדרוש:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$

  – אבל לפונקציה הזו אין פונקציה קדומה ידועה.
  – לא נכנסנו לזה בהרצאה, אבל זה אפשרי לחשב את האינטגרל המסוים הזה ולאמת שהוא שווה 1.

וידוא שפונקציית התפלגות המצטברת מוגדרת היטב:

- ראינו שמתקיים:

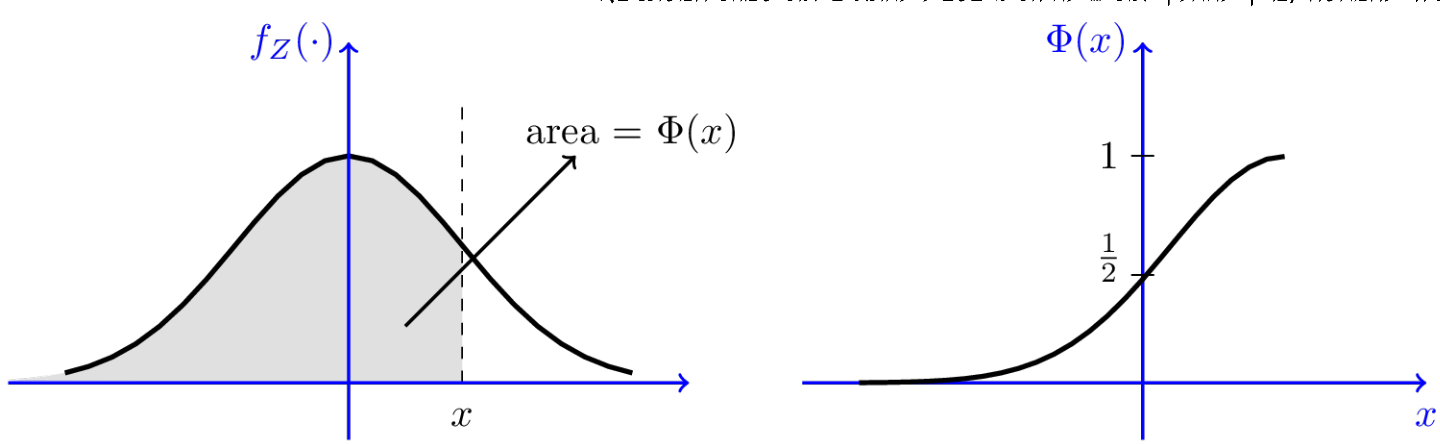
$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

- הגענו לאותה בעיה, כי אין ל-$f_Z(z)$ פונקציה קדומה.
  – נגדיר פונקציה חדשה:

$$F_Z(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

    * ונשתמש בה כדי לפתור תרגילים עם אינטגרלים כאלה.
    * לכל $z \in \mathbb{R}$ אפשר לחשב את הפיתרון (לדוגמה על ידי קירוב של האינטגרל) במחשבון.

איור להמחשה (צריך להחליף את x להיות z בשביל להתאים את שמות המשתנים):



טענה 8.

1. Φ היא רציפה ועולה ממש.
2. מתקיים:

$$\Phi\left(-\infty\right)=\lim_{z\to-\infty}\Phi\left(z\right)=0$$

$$\Phi\left(\infty\right)=\lim_{z\to\infty}\Phi\left(z\right)=1$$

3. $\Phi\left(-z\right)=1-\Phi\left(z\right)$

הוכחה.

1. מכיוון ש-Φ היא אינטגרל של פונקציה חיובית, מתקיים שהיא רציפה ועולה.
2. מההגדרה מתקיים:

$$\lim_{z\to-\infty}\int\limits_{-\infty}^{z}f_{Z}\left(z\right)dz=0$$

$$\lim_{z\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{z}f_{Z}\left(z\right)dz=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{Z}\left(z\right)dz\overbrace{=}^{by\ definition}1$$

3. הסברנו בציורים על האיור למעלה.

■

תוחלת של משתנה מקרי המתפלג נורמלי:

- כפי שראינו, מתקיים:

$$E\left[Z\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\cdot f_{Z}\left(z\right)dz$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^{2}}dz=0$$

  – (צריך להוכיח שאינטגרל קיים) זו פונקציה אי זוגית ב-z ולכן האינטגרל הוא אפס.

הערה 9. באופן כללי, אם X משתנה מקרי רציף עם צפיפות זוגית, כלומר $f_{X}\left(-x\right)=f_{X}\left(x\right)$, אז $E\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{X}\left(x\right)dx=0$ (אם האינטגרל קיים).

שונות של משתנה מקרי המתפלג נורמלי:

- נשתמש בנוסחה:

$$Var\left(Z\right)=E\left[Z^{2}\right]-\overbrace{\left(E\left[Z\right]\right)^{2}}^{=0}$$

- נחשב את התוחלת $E\left[Z^{2}\right]$:

$$E\left[Z^{2}\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^{2}}dz$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\cdot\overbrace{z\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^{2}}}^{=v'}dz$$

– נבצע אינטגרציה בחלקים $v'=z\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^{2}}$, $u=z$ ונקבל:

$$=\overbrace{z}^{u}\cdot\overbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^{2}}{2}}\right)}^{v}|_{-\infty}^{\infty}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overbrace{1}^{u'}\cdot\overbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^{2}}\right)}^{v}dz$$

* נשאר להראות שהביטוי $\overbrace{z}^{u}\cdot\overbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^{2}}{2}}\right)}^{v}|_{-\infty}^{\infty}$ שווה ל-$0-0$ על ידי שימוש בכלל לופיטל על הביטוי $u\cdot v$ (לא עשינו בהרצאה)
* ונקבל בסוף:

$$=0-0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{Z}\left(z\right)dz=1$$

חלק שני - המקרה הלא סטנדרטי של התפלגות נורמלי:

- נגדיר משתנה מקרי חדש Y כפונקציה של Z:

$$Y=\sigma\cdot Z+\mu,\ \ \sigma>0\ \ \mu\in\mathbb{R}$$

- נחשב את $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

  - נציב את הגדרת Y:

$$= P(\sigma \cdot Z + \mu \leq y)$$

    * נעביר אגפים:

$$= P\left(Z \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int\limits_{z=-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \; dz$$

    * נבצע החלפת משתנים, $z = \frac{u-\mu}{\sigma}$, $dz = \frac{du}{\sigma}$ ונקבל:

$$= \int\limits_{u=-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma} \; du$$

$$= \int\limits_{u=-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 \cdot 2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \; du$$

· מסקנה: Y הוא גם משתנה מקרי רציף ולכל $-\infty < y < \infty$ הצפיפות שלו היא:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 \cdot 2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

הגדרה 10. התפלגות נורמלית.

- למשתנה מקרי Y רציף עם התפלגות $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 \cdot 2 \cdot \pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ נאמר שיש לו התפלגות נורמלית עם פרמטרים μ, σ^2.

- <u>סימון:</u> $Y\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^{2}\right)$

הערה. אם $\mu=0$ ו-$\sigma^{2}=1$, נקבל בדיוק את ההתפלגות הנורמלית התקנית ולכן הסימון הוא אותו סימון. כלומר זוהי הכללה של ההתפלגות הנורמלית התקנית.

פונקציית ההתפלגות המצטברת היא:

$$F_{Y}\left(y\right)=\Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

התוחלת של Y היא (לפי לינאריות של תוחלת):

$$E\left[Y\right]=E\left[\sigma Z+\mu\right]$$

$$=\sigma\cdot E\left[Z\right]+\mu$$

- ולכן:

$$E\left[Y\right]=\mu$$

השונות של Y היא:

$$Var\left(Y\right)=Var\left(\sigma Z+\mu\right)$$

$$=\sigma^{2}\overbrace{Var\left(Z\right)}^{=1}$$

$$=\sigma^{2}$$

- קיבלנו:

$$Var\left(Y\right)=\sigma^{2}$$

מסקנה 11. הפרמטרים μ ו-σ^{2} הם השונות והתוחלת של ההתפלגות הנורמלית הכללית.

טענה 12.

- אם $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ אז לכל $0<s$ מתקיים שההסתברות שY הוא עד כדי s סטיות תקן מהתוחלת שלו היא:

$$P\left(\mu-s\cdot\sigma\leq Y\leq\mu+s\cdot\sigma\right)=2\cdot\Phi\left(s\right)-1$$

  - בפרט, אם נחשב במחשבון נקבל:

$$=\begin{cases} 0.63 & s=1\\ 0.95 & s=2 \end{cases}$$

הוכחה.

- נבחן את ההסתברות $P\left(\mu-s\cdot\sigma\leq Y\leq\mu+s\cdot\sigma\right)$.
  - לפי משפט מההרצאה הקודמת מתקיים:

$$P\left(\mu-s\cdot\sigma\leq Y\leq\mu+s\cdot\sigma\right)=F_Y\left(\mu+s\cdot\sigma\right)-F_Y\left(\mu-s\cdot\sigma\right)$$

    * נציב בהגדרת F_Y ונקבל:

$$=\Phi\left(\frac{\mu+s\cdot\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-s\cdot\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(s\right)-\Phi\left(-s\right)$$

$$=\Phi\left(s\right)-\left(1-\Phi\left(s\right)\right)$$

$$=2\cdot\Phi\left(s\right)-1$$

■

ציור להמחשה:

מתקיים:

$$\mu_2 > \mu_1$$

$$\sigma_2 < \sigma_1$$

$$y_1 = \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1\right)$$

$$y_2 = \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2\right)$$

התפלגות שלישית - התפלגות מעריכית/אקספוננציאלית:

הגדרה 13.

- למשתנה מקרי T רציף עם צפיפות:

$$f_T\left(t\right) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  – עבור $\lambda > 0$
  – נאמר כי יש התפלגות מעריכית עם פרמטר λ.

- דוגמאות: זמן עד לקלקול של רכיב, זמן עד להגעת בקשה לשרת.

נוודא שזאת אכן פונקציית צפיפות מוגדרת היטב:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \mid_{t=0}^{\infty} = -0 - (-1) = 1$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F_T(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(t)\,dt$$

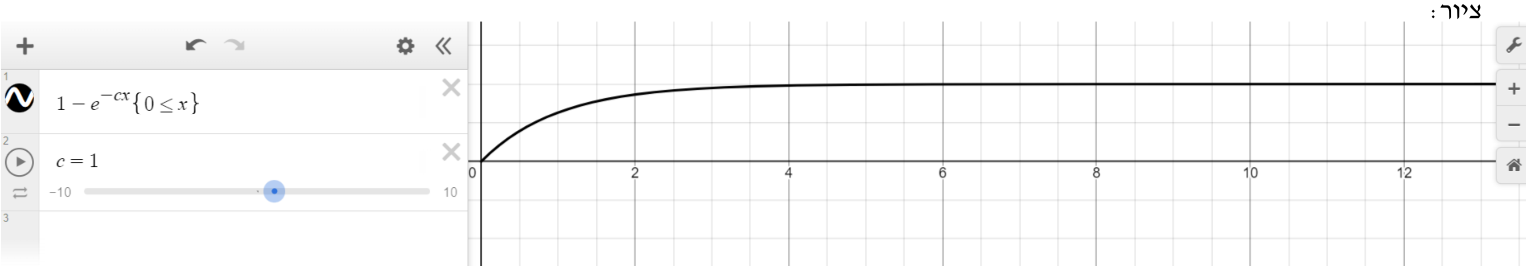
$$= \overbrace{\int_{-\infty}^{0} f_T(t)\,dt}^{=0} + \int_{t}^{\infty} f_T(t)\,dt$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

- ולכן $F_T(t)$ היא:

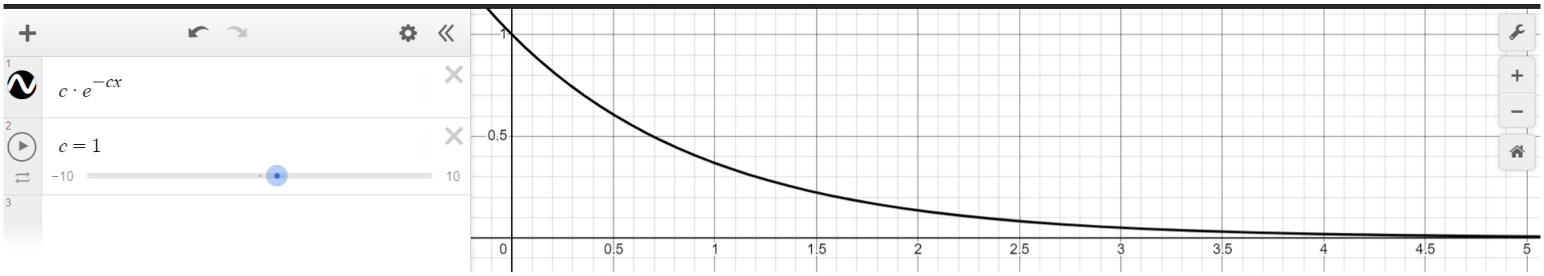
$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & 0 \le t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ציור:



פונקציית הזנב עבור $t \ge 0$:

$$P(T > t) = 1 - F_T(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$$



התוחלת שלו היא:

- מכיוון ש-T מקבל רק ערכים אי שליליים, לפי נוסחת הזנב נקבל:

$$E[T] = \int_{t=0}^{\infty} P(T > t) \ \ dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} dt$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \ |_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

הערה 14. אם T מייצג זמן עד לאירוע כלשהו, אז קיבלנו שממוצע הזמן הוא $\frac{1}{\lambda}$ אם ורק אם $\lambda = \frac{1}{average \ \ time \ \ until \ \ event}$ לכן לפעמים מכנים את הפרמטר λ בתור הקצב של ההתפלגות.

השונות שלו היא:

$$Var(T) = E\left[T^2\right] - (E[T])^2$$

- לפי תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי נקבל:

$$E\left[T^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_T(t) \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt$$

נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u=t^2, v'=\lambda\cdot e^{-\lambda t}$

$$=\overbrace{t^2}^{u}\cdot\overbrace{\left(-e^{-\lambda t}\right)}^{v}|_{t=0}^{\infty}-\int_0^\infty\overbrace{2t}^{u'}\cdot\overbrace{\left(\left(-e^{-\lambda t}\right)\right)}^{v}dt$$

$$=0-0-\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty t\lambda-e^{-\lambda t}dt$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}$$

- ולכן נקבל:

$$Var\left(T\right)=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

תכונת חוסר הזיכרון של המשתנה המקרי המעריכי:

משפט 15. חוסר זיכרון של משתנים מקריים המתפלגים באופן מעריכי.

- יהא $T\sim Exp\left(\lambda\right)$ (עבור $\lambda>0$).
- אזי לכל $0<t,s$ מתקיים:

$$P\left(\{T>s+t\}\mid\{T>s\}\right)=P\left(\{T>t\}\right)$$

הערה 16. אפשר להוכיח שההתפלגות הגאומטרית וההתפלגות המעריכית הן היחידות שמקיימות את תכונת חוסר הזיכרון.

הוכחה.

- נבחן את הביטוי $P\left(\{T>s+t\}\mid\{T>s\}\right)$ לפי הגדרת הסתברות מותנית:

$$P\left(\{T>s+t\}\mid\{T>s\}\right)=\frac{P\left(\{T>s+t\}\cap\{T>s\}\right)}{P\left(\{T>s\}\right)}$$

  - נשים לב כי $\{T>s+t\}\cap\{T>s\}$ זהו המאורע $\{T>s+t\}$.
  - לכן נקבל:

$$P\left(\{T>s+t\}\mid\{T>s\}\right)=\frac{P\left(T>t+s\right)}{P\left(T>s\right)}$$

* נשתמש בפונקציית הזנב של ההתפלגות המעריכית:

$$\frac{P\left(T>t+s\right)}{P\left(T>s\right)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$=e^{-\lambda t}$$

* ושוב לפי הזנב מתקיים:

$$=P\left(T>t\right)$$

■

<u>המשמעות של תכונת חוסר הזיכרון:</u>

- אם T מייצג זמן אקראי עד שאירוע כלשהו קורה, אז המשפט אומר שאם חיכינו כבר s יחידות זמן והאירוע עוד לא התרחש,
  - אז הסיכוי שהאירוע יתרחש לא לפני t יחידות זמן נוספות הוא כמו הסיכוי שמלכתחילה הוא יתרחש לא לפני t יחידות זמן מההתחלה.
- כלומר ההתפלגות עד זמן האירוע שוכחת שכבר המתנו s יחידות זמן כשהוא עוד לא קרה.

דוגמה 17. מוטיבציה להתפלגות המעריכית

- מכוניות יוצאות ממנהרות הכרמל אחרי השעה $00:00$ לפי החוקיות הבאה:
  - מכונית אחת לכל היותר במקטע זמן קטן כלשהו (אסור שיצאו יותר ממכונית אחת בו זמנית)
  - קצב היציאה קבוע - $\lambda=\frac{cars}{time\ unit}$, כלומר $P\left(car\ will\ go\ at\ time\ interval\ \Delta\right)=\lambda\cdot\Delta$.
    * כלומר תוחלת מספר המכוניות שיוצאות במקטע באורך Δ הוא λ.
  - מספר המכוניות במקטעי זמן זרים הם בלתי תלויים.
- **צ"ל:** מצאו את ההתפלגות של הזמן עד ליציאת המכונית הראשונה אחרי השעה $00:00$.

פיתרון:

- נסמן את הזמן עד ליציאת המכונית הראשונה אחרי השעה $00:00$ ב-T.
- נבחר $0<t$ ונחלק את ציר הזמן עד t לתתי מקטעים באורך Δ.
  - יהיו בערך $\frac{t}{\Delta}$ תתי מקטעים כאלה.
- ההסתברות שהמכונית הראשונה יצאה אחרי T יחידות זמן היא:

$$P\left(T>t\right)=P\left(no\ car\ left\ in\ all\ of\ the\ \frac{t}{\Delta}\ sub-intervals\right)$$

$$= P\left(no\ car\ left\ in\ the\ 1_{st}\ sub-interval\ \cap\ no\ car\ left\ in\ the\ 2_{nd}\ sub-interval\ \cap\ldots\right)$$

– נתון כי המאורעות הללו בלתי תלויים ולכן:

$$= P\left(no\ car\ left\ in\ the\ 1_{st}\ sub-interval\right) + P\left(no\ car\ left\ in\ the\ 2_{nd}\ sub-interval\right) + \ldots$$

– מכיוון שקצב היציאה λ קבוע, נקבל:

$$= \left(1-\lambda\Delta\right)^{\frac{t}{\Delta}}$$

* נשאיף את $\Delta \to 0$ ונקבל:

$$P\left(T>t\right) = e^{-\lambda t}$$

· ומכיוון ש-$F_T\left(t\right) = P\left(T\le t\right) = 1-P\left(T>t\right)$, נקבל:

$$F_T\left(t\right) = 1-e^{-\lambda t}$$

· נגזור ונקבל:

$$f_T\left(t\right) = e^{-\lambda t}$$

· כלומר:

$$T \sim Exp\left(\lambda\right)$$