שם: איל שטיין

February 28, 2024

[

לוגיקה | תרגול 6

שם: איל שטיין

February 28, 2024

נושא השיעור: נאותות, עקביות ושלמות של מערכת הוכחה.

בתרגול הקודם אמרנו שכשאנחנו מייצרים מערכת הוכחה נרצה שהיא תהיה נאותה, כלומר שכל מה שאפשר להוכיח גם ינבע לוגית מההוכחות.

תרגיל 1 - התרגיל הכי קשה בתרגול הזה

•

סעיף 1. הוכיחו/הפריכו: מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר
פיתרון:

- כלומר שואלים אותנו האם $Ded_N(\emptyset) \subseteq Con(\emptyset)$.
- נחפש דברים לא הגיוניים במערכת ההוכחה:
  - או שנחפש איבר שהוא לא טאוטולוגיה, או שנבנה סדרת יצירה שמובילה לסתירה.
- נשים לב כי בבסיס יש לנו A שהיא טאוטולוגיה. אם בבסיס היה איבר שהוא לא טאוטולוגיה היינו יכולים לסיים כי זו לא הייתה מערכת נאותה.
- נסתכל על כללי ההיסק שלנו:
  - נשים לב ש-$MP1$ תמיד יוצר ביטוי נכון.
  - הכלל $MP2$ הוא לא נכון כי $\neg\alpha$ יכול להיות טאוטולוגיה אבל β לא חייב להיות טאוטולוגיה.
    - מצאנו בעיה.
- בשביל להשתמש ב-$MP2$ אנחנו צריכים לבדוק האם קיימים בקבוצה פסוקים מהצורה שניתן להכניס ל-$MP2$:

– נשים לב שאין לנו דרך להגיע לפסוק שהקשר המרכזי בו הוא $\vee$.

* ולכן מכיוון שאין אף איבר שיכול להיכנס לפונקציה $MP2$, אז זה כאילו אין לנו את $MP2$.
* כלומר המערכת שלנו נאותה במובן הצר.

• נוכיח שהמערכת שלנו נאותה במובן הצר, כלומר נראה $Ded_N(\emptyset) \subseteq Con(\emptyset)$ באינדוקציית מבנה.

– הבעיה היא שאנחנו נצטרך להשתמש בפונקציה $MP2$.

– לכן נגדיר תכונה T שבה יש את כל הטאוטולוגיות $\gamma \in WFF$ שמקיימים שהקשר המרכזי שלהם הוא לא $\vee$.

* מכיוון ש-T מכילה רק טאוטולוגיות, מתקיים $T \subseteq Con(\emptyset)$.
* נשים לב כי לא ניתן להפעיל את $MP2$ על איברים ב-T לפי הגדרתה.

– צריך להוכיח $Ded_N(\emptyset) \subseteq T$ באינדוקציית מבנה:

* **בסיס:**
  · ניקח $\varphi \in A$, כלומר איבר באקסיומות.
  · ראשית נוודא שמתקיים $\models \varphi$ בעזרת בניית טבלת אמת לכל ערכי α, β האפשריים והוכחה שהערך של פסוק באקסיומות הוא 1.
  · לאחר מכן, נשים לב כי הקשר המרכזי הוא $\rightarrow$, כלומר שונה מ-$\vee$.
  · לכן מתקיים כי $\varphi \in T$.

* **סגור:**
  · ניקח $\delta, \gamma \in T$.
  · ניקח $\varphi = MP1(\gamma, \delta)$
  · כעת מתקיים:

$$\varphi = \neg\neg((\neg\delta) \vee \gamma)$$

  · נבנה טבלת אמת ונשים לב כי φ אכן טאוטולוגיה.
  · נשים לב כי הקשר המרכזי הוא $\neg$ ולא $\vee$, כנדרש.
  · כלומר $\varphi \in T$.
  · ניקח $\omega = MP2(\gamma, \delta)$ ונשים לב כי ω לא תיתכן (כלומר הפונקציה $MP2$ מחזירה ω במקרה הזה) כי לפי הנחת האינדוקציה הקשר המרכזי ב-γ וב-δ הוא לא $\vee$.
  · ולכן $\omega \in T$.

• הראנו באינדוקציית מבנה שמתקיים $Ded_N(\emptyset) \subseteq T \subseteq Con(\emptyset)$.

תרגיל 1, סעיף 2:

הוכיחו/הפריכו: מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הרחב.

פיתרון:

• שואלים אותנו האם לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים $Ded_N(\Sigma) \subseteq Con(\Sigma)$

• בהמשך לסעיף הקודם, נוסיף הנחה שבעזרתה יהיה אפשר להשתמש ב-$MP2$ ונראה שכעת זו לא מערכת הוכחה נאותה:

– ניקח $\Sigma = \{\neg p_0, \neg p_0 \vee p_1\}$.

- נראה סדרת הוכחה ל-p_1:

1. $\neg p_0$ - שייך להנחות.
2. $\neg p_0 \vee p_1$ - שייך להנחות.
3. $MP2\left(\neg p_0, \neg p_0 \vee p_1\right) = p_1$

* נשים לב כי עבור ההשמה z_0 מתקיים $z_0 \models \Sigma$ וגם $z_0 \not\models p_1$
  - לכן $\Sigma \not\models p_1$.
  - זו סתירה כי הראנו סדרת יצירה כך שמתקיים $\Sigma \vdash_N p_1$.

נושא שני - עקביות:

- עקביות דומה לפושע בחקירה: אם אפשר להסיק דבר והיפוכו מתוך הסיפור שלו אז הוא לא עקבי.
- כדי להראות שקבוצה Σ היא עקבית, ניקח פסוק ונראה שהוא לא נובע לוגית מהקבוצה.

תרגיל 2:

- נחפש פסוק שלא נובע לוגית ממנה, לדוגמה פסוק סתירה.
  - ניקח $\alpha = \neg\left(p_0 \to p_0\right)$
    * מתקיים $z_0 \models \Sigma$
    * מתקיים $z_0 \not\models \alpha$ (כי זו סתירה ולכן אף השמה לא מספקת אותה).
      - ולכן $\Sigma \not\models \alpha$.
    * ממשפט הנאותות מתקיים $\Sigma \nvdash \alpha$.
  - לפי ההגדרה השקולה לעקביות מתקיים כי Σ עקבית כי קיים פסוק α שעבורו $\Sigma \nvdash \alpha$

מסקנה 1. התרגיל שעשינו האו דוגמה לכך שאם קבוצה Σ יהא ספיקה אז קיימת השמה שמספקת אותה ולכן ניקח סתירה של אחד הפסוקים ונקבל שההשמה לא מספקת את הסתירה הזו. ולכן כל קבוצה Σ ספיקה היא גם עקבית.

<u>הערה:</u> הכיוון השני גם נכון, כלומר עקביות גם גורר ספיקות.

נושא שלישי - שלמות.

פיתרון תרגיל 3 - הוכיחו/הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

- בתרגיל הראשון רצינו לראות האם ניתן לכתוב סדרת הוכחה לסתירות.
- עכשיו אנחנו רוצים לבדוק שכל מה שנכון גם ניתן להוכחה.
- נשים לב כי בצירוף של A_1 ו-$MP2$, אפשר לקבל מיידית סדרת הוכחה ל-α.
  - כלומר המערכת הזו מוכיחה כל פסוק, בפרט גם את כל הפסוקים שנובעים לוגית מ-Σ.
- ניקח פסוק (במקרה הזה אפילו לא צריך שהוא ינבע לוגית מ-Σ) ונראה שהמערכת מוכיחה אותו:
  - תהא Σ.

- יהי פסוק α כך ש $\models \alpha$ Σ.
- נראה סדרת הוכחה ל-α:

1. לפי אקסיומה A_1 שבבסיס, עבור $\alpha \in WFF$ מתקיים $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
2. לפי כלל ההיסק $MP2$ מתקיים: α.

- לכן $\Sigma \vdash_N \alpha$ לכל קבוצת Σ.