אינפי 2מ' | תרגול 4 - עם ניקה

שם: איל שטיין

April 18, 2023

נושאי השיעור: אינטגרביליות

תרגיל 1.

- תהי $f\left(x\right)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
- נגדיר $g\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ לכל $x\in[a,b]$
- צ"ל: $g\left(x\right)$ רציפה ליפשיץ.

פתרון:

- תזכורת: $f\left(x\right)$ נקראת רציפה ליפשיץ בקטע I אם קיים $K>0$ כך שלכל $x,y\in I$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq\left|x-y\right|K$
- ניקח שתי נקודות בקטע: $p,s\in[a,b]$.
  - נניח בה"כ כי $p>s$.

$$\begin{aligned}\left|g\left(p\right)-g\left(s\right)\right| & =\left|\int\limits_{a}^{p}f\left(t\right)dt-\int\limits_{a}^{s}f\left(t\right)dt\right|\\
 & =\left|\int\limits_{s}^{p}f\left(t\right)dt\right|
\end{aligned}$$

  * ומכיוון שמתקיים אי שוויון $\left|\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt\right|\leq\int_{a}^{b}\left|f\left(t\right)\right|dt$, אפשר לכתוב:

$$=\left|\int\limits_{s}^{p}f\left(t\right)dt\right|\leq\int\limits_{s}^{p}\left|f\left(t\right)\right|dt$$

  * f אינטגרבילית ולכן חסומה. לכן קיים $0\leq M\in\mathbb{R}$ כך ש $\left|f\left(t\right)\right|<M$

- ולכן מתקיים:

$$\int\limits_{s}^{p} |f(t)|\,dt \le \int\limits_{s}^{p} M dt = M(p-s)$$

- לסיכום, קיבלנו שקיים $0 \le M \in \mathbb{R}$:

$$|g(p) - g(s)| \le M(p-s)$$

הערה 2.

- **תנאים מספיקים לאינטגרביליות:**
- תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע $[a,b]$.

1. אם $f(x)$ חסומה ורציפה (פרט למספר סופי של נקודות) אזי היא אינטגרבילית רימן.
2. אם $f(x)$ חסומה ומונוטונית למקוטעים (כלומר לא חייבת לשמור על כיוון המונוטוניות) בקטע סגור אזי היא אינטגרבילית רימן.

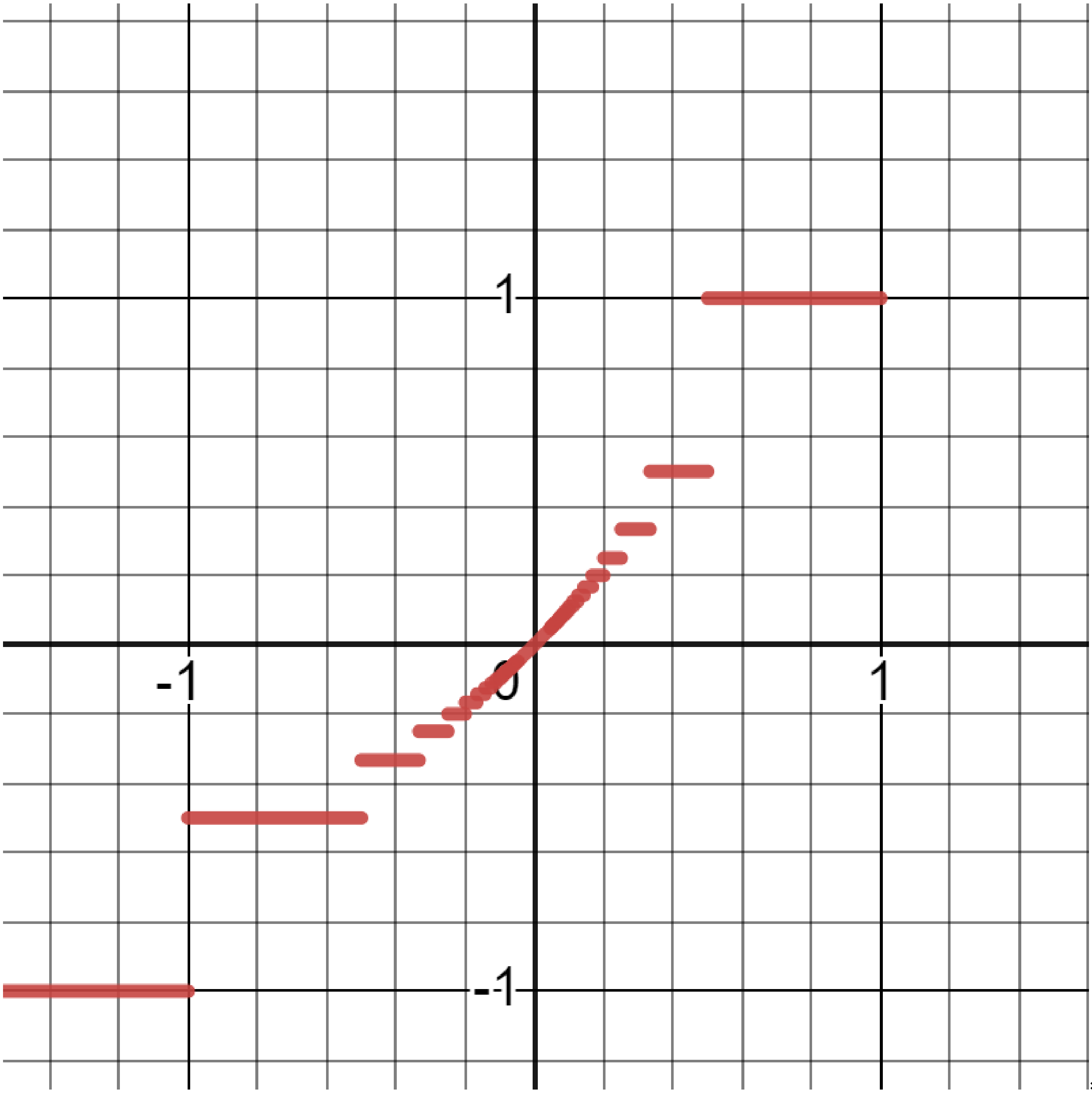
תרגיל 3.

- א. הראו כי הפונקציות הבאות אינטגרביליות בקטע $[0,1]$:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- ב. תנו דוגמה לפונקציה שלא מקיימת את שני התנאים המספיקים שהבאנו אבל היא כן אינטגרבילית בקטע $[0,1]$

פתרון:



- **א.** נצייר את $f\left(x\right)$:
  - נשים לב כי $f\left(x\right)$ מונוטונית וחסומה ולכן אינטגרבילית.
  - נשים לב כי $g\left(x\right)$ חסומה ורציפה פרט לנקודה אחת ($x=0$) ולכן גם היא אינטגרבילית.
- **ב.** ניקח את $f\left(x\right)+g\left(x\right)$.
  - זו לא פונקציה מונוטונית והיא גם לא רציפה במספר סופי של נקודות.

תרגיל 4.

- נתון כי $f\left(x\right)$ אינטגרבילית ב$[a,b]$ ו$f\left(x\right)\geq0$
- צ"ל:

– א. הראו כי אם $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים תת קטע $I = [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ כך ש $f(x) < \varepsilon$ לכל $x \in I$

– ב. הוכיחו כי אם לכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) > 0$ אז $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

פתרון:

א.

- יהי $\varepsilon > 0$.
- מכיוון שהפונקציה אינטגרבילית, זה אומר שהאינפימום של סכומי דרבו עליונים וסופרמום של סכומי דרבו תחתונים שווים.
  - האינטגרל שווה לאפס ולכן שניהם שווים לאפס.
    - לכן כל סכומי דרבו עליון שואפים לאפס.
      - כלומר קיימת חלוקה $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ כך ש $U(f,p) < \varepsilon \cdot (b-a)$
- נניח בשלילה שלכל $1 \le i \le n$ מתקיים $Sup_{[x_{i-1},x_i]} |f| \ge \varepsilon$, כלומר שבכל קטע של החלוקה ניתן למצוא x עבורו $|f(x)|$ גדול מ-ε
  - נבחן את סכום דרבו עליון:

$$\begin{aligned}
U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} Sup_{[x_{i-1},x_i]} |f| \cdot \Delta x_i \\
&\ge \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \varepsilon \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

  - זו סתירה.
- לכן קיים לפחות קטע אחד $I \subset [a,b]$ כך שבו מתקיים $Sup_{[x_{i-1},x_i]} |f| < \varepsilon$.
  - ומכיוון שהסופרמום קטן מ-ε מתקיים שלכל $x \in I$ מתקיים $f(x) < \varepsilon$

ב.

- נתון כי לכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) > 0$.
  - כלומר הפונקציה חיובית.
  - לכן מתקיים $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.
- נניח בשלילה ש: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.
  - מכיוון ש $f(x) > 0$, לכל תת קטע $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ מתקיים:

$$0 \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$$

- לפי סעיף א', קיים תת קטע $[\alpha,\beta]$ שאורכו קטן מ-1 ומתקיים בו $f\left(x\right)<1$
  - באינדוקציה: נמצא תת קטע $[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\subset[\alpha_n,\beta_n]$ כך שאורכו קטן מ$\frac{1}{n+1}$ ובתוכו מתקיים $f\left(x\right)<\frac{1}{n+1}$.
  - קיבלנו סדרה של קטעים שמקיימים את התנאים של הלמה של קנטור.
    - לכן קיימת נקודה x_0 בחיתוך של כל הקטעים, כלומר $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n]$
    - ובפרט מתקיים $f\left(x_0\right)<\frac{1}{n}$ לכל n בגלל אופן בניית הקטעים.
    - לכן מתקיים $f\left(x_0\right)=0$.
    - זו סתירה לנתון כי $f\left(x\right)>0$ לכל $x\in[a,b]$

תרגיל 5.

- תהי $f\left(x\right)$ רציפה ואי שלילית בקטע $[a,b]$.
- נתון: $\int_a^b f\left(x\right)dx=0$
- **צ"ל:** $f\left(x\right)=0$ לכל $x\in[a,b]$

פתרון:

- נניח בשלילה שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $f\left(c\right)\neq0$
  - נתון כי $f\left(x\right)\geq0$ לכל $x\in[a,b]$ ולכן $f\left(c\right)>0$
    - נסמן $f\left(c\right)=k$
  - $f\left(x\right)$ רציפה ולכן קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$ המקיים $|x-c|<\delta$ מתקיים (לפי ערך הביניים):

$$f\left(x\right)>\frac{f\left(c\right)}{2}=\frac{k}{2}>0$$

  - יצרנו קטע $[c-\delta,c+\delta]\subseteq[a,b]$ שבו מתקיים $f\left(x\right)>0$ ולכן ניתן לחלק את האינטגרל ולכתוב:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx &= \int\limits_a^{c-\delta}+\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta}+\int\limits_{c+\delta}^{b}\\ &\geq\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta}\leq\frac{k}{2}\cdot2\delta=k\cdot\delta>0\end{aligned}$$

  - סתירה לנתון.