אינפי 1מ' (104031) | תרגול 22 - יוליה

שם: איל שטיין

January 11, 2023

נושאי השיעור: משפטי גזירות - פרמה, רול, לגראנז', דרבו

נושא ראשון - תרגיל משיעור קודם:

תרגיל 1.

- יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$
- נתון שלכל $x \in [-1,1]$ מתקיים: $(a_1)^x + (a_2)^x + \ldots + (a_n)^x \geq n$
- **צ"ל:** $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$

פתרון:

- נסמן $f(x) = (a_1)^x + (a_2)^x + \ldots + (a_n)^x$
  - הערה: הפונקציה $f(x) = (a_1)^x + (a_2)^x + \ldots + (a_n)^x$ היא פונקציה גזירה.
- מכיוון ש- $0 \in [-1,1]$, נקבל שעבור $x = 0$ מתקיים $n = f(0) = (a_1)^0 + (a_2)^0 + \ldots + (a_n)^0 \geq n$
  - לכל $x \in [-1,1]$ מתקיים, על פי הנתון, ש- $f(x) \geq n$
    - לכן $f(x)$ מקבלת מינימום ב- $x = 0$
      - מכך שזו נקודה פנימית נובע שהמינימום הוא מינימום מקומי.
      - לפי משפט פרמה, אם f גזירה בנקודה $x_0 = 0$ וגם x_0 היא נקודת מינימום פנימית אז $f'(x_0) = 0$
- נגזור את $f(x)$ בנקודה $x = 0$ ונקבל:

$$f'(0) = \left(a_1^x \cdot ln(a_1) + \ldots + a_n^x \cdot ln(a_n)\right) \ | \ x = 0$$

$$f'(0) = \left(1 \cdot ln(a_1) + \ldots + 1 \cdot ln(a_n)\right) = ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = 0$$

$$ln\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\right)=0$$

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$$

נושא שני - משפט רול:

- תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b) כך ש $f\left(a\right)=f\left(b\right)$.
- אזי קיים $c\in(a,b)$ כך ש $f'\left(c\right)=0$.

תרגיל 2. הראו שלמשוואה $x-\frac{1}{2}\sin\left(x\right)=3$ יש פיתרון אחד בדיוק.
פתרון:

- נגדיר פונקציה $f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}\sin\left(x\right)-3$
  - היא מוגדרת, רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$.
- נשתמש במשפט ערך הביניים כדי להראות שקיים לפחות פיתרון אחד:
  - $f\left(0\right)=-3$
  - $f\left(\pi\right)=\pi-3>0$
    - * לכן תנאי משפט ערך הביניים מתקיימים בקטע $[0,\pi]$ (כי f רציפה, $f\left(\pi\right)>0$ ו-$f\left(0\right)<0$)
      - · לכן קיימת $c\in(0,\pi)$ כך ש$f\left(c\right)=0$, כלומר קיים פיתרון למשוואה.
- נניח בשלילה שקיים פיתרון נוסף למשוואה, כלומר קיימת $d\neq c$ כך ש $f\left(d\right)=0$.
  - נניח בה"כ $c<d$.
    - * בקטע $[c,d]$ מתקיימים תנאי משפט רול כי הפונקציה רציפה, גזירה ולפי הנחת השלילה מתקיים $f\left(d\right)=f\left(c\right)$
      - · לכן קיימת נקודה $c<b<d$ כך ש $f'\left(b\right)=0$.
      - · אבל אם נגזור את f נקבל $f'\left(x\right)=1-\frac{1}{2}\cos\left(x\right)>0$. הביטוי הזה תמיד גדול ממש מ-0 ולא יכול להיות שווה אפס.
      - · לכן $f'\left(b\right)=0$ זו סתירה לכך ש- $f'\left(x\right)=1-\frac{1}{2}\cos\left(x\right)$.
- סתרנו את הנחת השלילה ולכן לא קיים פיתרון נוסף למשוואה.

תרגיל 3.

- יהי פולינום $p\left(x\right)=x^4-6x^3+24x^2-63x-2$

צ"ל: כמה שורשים יש ל-$p\left(x\right)$ ב-$\mathbb{R}$?

פתרון:

- החזקה של הפולינום זוגית ולכן על ידי חלוקה ב-x^4 נקבל:

$$p(x) = x^4 \cdot \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{63}{x^3} - \frac{2}{x^4}\right)$$

  – כלומר:

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$$

- נציב $x = 0$ ונקבל: $0 > -2 = p(0)$
- מכך שהגבול של $p(x)$ הוא אינסוף, קיימות $a < 0$ וגם $b > 0$ כך ש $f(a) > 0$ וגם $f(b) > 0$
- $p(x)$ רציפה ולכן בקטעים $[a,0]$ ו-$[0,b]$ מתקיימים תנאי ערך הביניים,
  – ולכן קיימות נקודות $x_1 \in (a,0)$ ו- $x_2 \in (0,b)$ כך ש $p(x_1) = p(x_2) = 0$
    * קיבלנו לפחות שני שורשים.
- $p(x)$ גזירה ולכן:

$$p'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 48x - 63$$

  – נגזור שוב:

$$p''(x) = 12x^2 - 36x + 48$$

$$0 \neq p''(x) = 12\left(x^2 - 3x + 4\right) > 0$$

* אם$p'(x)$ הייתה מתאפסת פעמיים או יותר, אז לפי משפט רול $p''(x)$ הייתה חייבת להתאפס לפחות פעם אחת.
  · מכאן נובע ש-$p'(x)$ מתאפסת לכל היותר פעם אחת.
  · ולכן לפי משפט רול, p מתאפסת לכל היותר פעמיים.
  · מכאן של-$p(x)$ יש בדיוק שני שורשים.

תרגיל 4. יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בכל $\mathbb{R}$.

- נתון: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$f(x) \cdot g'(x) \neq f'(x) \cdot g(x)$$

צ"ל: הוכיחו כי בין כל שני אפסים סמוכים של f יש אפס של g ולהפך.

פתרון:

- יהיו נקודות $a<b$ כך ש $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ ולכל $x\in\left(a,b\right)$ מתקיים $f\left(x\right)\neq0$
  - כלומר a,b הן שתי נקודות אפסים סמוכות של $f\left(x\right)$.
- צ"ל: קיימת $c\in\left(a,b\right)$ כך ש $g\left(c\right)=0$.
- נניח בשלילה שלא קיימת נקודה c כזו, כלומר $g\left(x\right)\neq0$ לכל $x\in\left(a,b\right)$.
  - מהנתון נובע שאם $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ אז $g\left(a\right)\neq0$ וגם $g\left(b\right)\neq0$
    * כלומר לכל $x\in\left[a,b\right]$ מתקיים $g\left(x\right)\neq0$.
- נגדיר $h\left(x\right)=\frac{f(x)}{g(x)}$ המוגדרת ב-$\left[a,b\right]$
  - h רציפה ומוגדרת בקטע.
    * $h\left(a\right)=h\left(b\right)=0$
      · ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $d\in\left(a,b\right)$ כך ש $h'\left(d\right)=0$
      · אבל על פי הנתון:

$$h'\left(x\right)=\frac{f'\left(x\right)\cdot g\left(x\right)-f\left(x\right)\cdot g'\left(x\right)}{g^{2}\left(x\right)}\neq0$$

      · סתירה.
- הראנו שבין כל שני אפסים של f יש נקודה שבה g מתאפסת.
  - הוכחה זהה תראה שבין כל שני אפסים של g יש נקודה שבה f מתאפסת.

נושא שלישי - משפט לגראנז':

משפט 5. משפט לגראנז'

- תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע סגור $\left[a,b\right]$ וגזירה בקטע פתוח $\left(a,b\right)$.
  - אזי קיימת $c\in\left(a,b\right)$ עבורה מתקיים $f'\left(c\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

תרגיל 6.

- יהיו שתי נקודות $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

צ"ל: $\frac{\beta-\alpha}{\cos^{2}(\alpha)}<\tan\left(\alpha\right)-\tan\left(\beta\right)<\frac{\beta-\alpha}{\cos^{2}(\alpha)}$

פתרון:

- נכתוב את הצ"ל כך:

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} < \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

- נגדיר פונקציה $f(x) = \tan(x)$.
- הקטע $[\alpha, \beta] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ולכן f רציפה וגזירה בקטע $[\alpha, \beta]$
  - לפי משפט לגראנז' קיימת נקודה $\alpha < \delta < \beta$ כך ש $f'(\delta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$
    * נציב את הנגזרת של $\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ונקבל:

$$\frac{1}{\cos^2(\delta)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

· מכיוון ש:
1. $\cos(x) > 0$ לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ובפרט גם בקטע (α, β)
2. $\cos(x)$ יורדת מונוטונית בקטע (α, β)

· לכן $\frac{1}{\cos^2(x)}$ מונוטונית עולה ממש בקטע (α, β)

· מכאן שאם $\beta < \delta < \beta$ אז $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} < \frac{1}{\cos^2(\delta)} < \frac{1}{\cos^2(\beta)}$

- לסיכום, מכיוון ש-$\frac{1}{\cos^2(x)}$ מונוטונית עולה ממש בקטע (α, β) וגם $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\cos^2(\delta)}$ אז מתקיים:

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} < \frac{1}{\cos^2(\delta)} < \frac{1}{\cos^2(\beta)}$$

תרגיל 7.

- תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ וגזירה בקטע $(0,1)$ כך ש $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ולכל $x \in (0,1)$ מתקיים:

$$|f'(x)| \leq 2x$$

צ"ל: $f(x) = x^2$

פתרון:

- נגדיר $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ כך ש $g(x) = f(x) - x^2$
- נוכיח ש- $g(x) = 0$ לכל $x \in [0,1]$.
  - על פי הנתון $g(0) = g(1) = 0$
  - נניח בשלילה שקיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך ש $g(c) \neq 0$.
    * נניח בה"כ ש $g(c) < 0$

- נתבונן בקטע $[c,1]$:
- $g(x)$ רציפה ב $[c,1]$ וגזירה בקטע $(c,1)$ כסכום של פונקציות רציפות וגזירות.
- לכן בקטע $[c,1]$, לפי משפט לגראנז': קיימת נקודה $c<d<1$ כך ש

$$g'(d)=\frac{g(1)-g(c)}{1-c}$$

$$g'(d)=\frac{0-g(c)}{1-c}>0$$

- מצד שני, לפי הנתון:

$$-2x\leq f'(x)\leq 2x$$

- כלומר לכל $x\in(0,1)$ ובפרט עבור $g'(d)$ מתקיים:

$$g'(d)=f'(d)-2d\leq 0$$

- סתירה לכך שלפי לגראנז' קיבלנו $g'(d)>0$.

– עבור $g(c)>0$ ההוכחה זהה, אך נצטרך לקחת נקודה בקטע $[0,c]$ במקום בקטע $[c,1]$

תרגיל 8. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה.

- נתון: עבור קבוע $M>0$, לכל $x>8$ מתקיים

$$|f'(x)|\leq M$$

צ"ל: הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

פתרון:

- כשרואים תרגיל עם נגזרת חסומה, צריכים לחשוב על לגראנז'.
- יהי $x>8$.
- על פי הנתון, $-M\leq f'(x)\leq M$
- נתבונן בקטע $[8,x]$:
  - מתקיימים תנאי משפט לגראנז' ולכן קיימת נקודה $c\in(8,x)$ כך ש $f'(c)=\frac{f(x)-f(8)}{x-8}$
    * נוסיף ערך מוחלט לשוויון ונקבל: $\left|\frac{f(x)-f(8)}{x-8}\right|=|f'(c_x)|\leq M$
    * כלומר $\left|\frac{f(x)-f(8)}{x-8}\right|\leq M$

- ולכן לכל $x > 8$ מתקיים $-M \leq \frac{f(x)-f(8)}{x-8} \leq M$
- נכפול במכנה (הוא חיובי כי $x > 8$):

$$f(8) - M(x-8) \leq f(x) \leq M(x-8) + f(8)$$

- נחלק ב-x^2 ונקבל:

$$\overbrace{\frac{f(8) - M(x-8)}{x^2}}^{\xrightarrow[x\to\infty]{}0} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \overbrace{\frac{M(x-8) + f(8)}{x^2}}^{\xrightarrow[x\to\infty]{}0}$$

- נשאיף את $x^2 \to \infty$ ולפי משפט הסנדוויץ' יתקיים:

$$\frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

- כנדרש.

תרגיל 9. תרגיל ממבחן:

- תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בקרן $(0,\infty)$.
- נתון:
  - $f''(x) > 0$ לכל $x > 0$.
  - $\lim_{x\to 0} f(x) \leq L$ (גבול סופי).

צ"ל:

א. הוכיחו שהגבול $\lim_{n\to\infty} f'(x)$ קיים במובן הרחב

ב. הוכיחו כי קיימת סדרה a_n כך ש $n < a_n < n+1$, עבורה $\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = 0$

ג. הוכיחו כי $f'(x) < 0$ לכל $x > 0$

ד. הראו שלכל $x > 0$ מתקיים $f(x) > L$

א. הוכחה:

- $f'(x)$ פונקציה גזירה.
  - לכל $x > 0$ מתקיים $(f')'(x) = f''(x) > 0$
    - לכן לפי מסקנת לגראנז', f' מונוטונית עולה ממש.
    - לפי משפט מההרצאה, לפונקציה מונוטונית קיים גבול במובן הרחב.

ב. הוכחה:

- f גזירה בכל קטע $[n,n+1]$
  - לכן לפי לגראנז', קיימת $a_n\in(n,n+1)$ כך ש:

$$\begin{aligned} f'(a_n) &= \frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n} \\ &= f(n+1)-f(n) \end{aligned}$$

  - על פי הנתון, $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ולכן לפי משפט היינה לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$$

    * בפרט, זה מתקיים עבור $x_n=n$ ועבור $x_{n+1}=n+1$,
      · לפי חשבון גבולות מתקיים

$$f(n+1)-f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L-L=0$$

    * ולכן $f'(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ג. פתרון:

- לפי סעיף א': $\lim_{n\to\infty} f'(x)$ קיים במובן הרחב
  - לכן לפי משפט היינה: לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ קיים ושווה לאותו הערך (הסופי או אינסופי)
- בסעיף ב' הראנו שקיימת $n<a_n$ שעבורה $\lim_{n\to\infty} f'(a_n)=0$
  - נשים לב ש- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ לפי משפט הפיצה.
    * ומכאן שאם הגבול קיים לפי סעיף א' אז לפי משפט היינה מתקיים $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$
- אמרנו ש-$f'(x)$ מונוטונית עולה ממש.
  - פונקציה מונוטונית עולה ממש מתכנסת לסופרמום שלה,
    * ולכן $0=sup\ f'(x)$ בקרן $(0,\infty)$
      · אבל $f'(x)\neq 0$ כי אם $f'(x)$ מונוטונית עולה <u>ממש</u> אז היא לא יכולה לקבל מקסימום (ובפרט מקסימום שיהיה שווה לאפס).
- לכן $f'(x)<0$ לכל $x>0$.

ד. פתרון:

- בדרך דומה לסעיף ג', נוכיח ש-f מונוטונית יורדת ממש.
  - ומכיוון ש $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=L$ אז L הוא גם האינפימום של $f\left(x\right)$ בקרן $\left(0,\infty\right)$.
    * מכך ש$f\left(x\right)$ יורדת ממש נקבל שלא קיים $x>0$ כך ש $f\left(x\right)=L=inf\ \ f\left(x\right)$ בקרן $\left(0,\infty\right)$
      · לכן לכל $x>0$ מתקיים $f\left(x\right)>L$.

נושא רביעי - משפט דרבו:

משפט 10. משפט דרבו

- תהי $f\left(x\right)$ גזירה בקטע סגור $[a,b]$.
- אז $f'\left(x\right)$ מקבלת בקטע $\left(a,b\right)$ את כל הערכים בין $f'_{+}\left(a\right)$ ובין $f'_{-}\left(b\right)$.
  - **סימון:** $f'_{+}\left(a\right)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

תרגיל 11.

- תהי $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $[0,a]$ וגזירה ב $(0,a]$.
- נתון:
  1. $f\left(0\right)=0$
  2. $f\left(a\right)\cdot f'\left(a\right)<0$

צ"ל: הוכיחו כי קיימת $c\in\left(0,a\right)$ כך ש $f'\left(c\right)=0$.

פתרון:

- בקטע $[0,a]$ מתקיימים תנאי לגראנז' כי הפונקציה רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח.
  - לכן קיימת $b\in\left(0,a\right)$ כך ש $f'\left(b\right)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$
    * כלומר $f'\left(b\right)=\frac{f(a)}{a}$
      · ומכיוון ש-$a>0$ קיבלנו ש $f'\left(b\right)$ ו-$f\left(a\right)$ הם באותו סימן (או שלילי או חיובי)
      · נכפול את השוויון ב-$f'\left(a\right)$ ולפי הנתון נקבל:

$$f'\left(b\right)\cdot f'\left(a\right)=\frac{f\left(a\right)\cdot f'\left(a\right)}{a}<0$$

    * הפונקציה f גזירה בקטע $[a,b]$ ובשני הקצוות f' מקבלת ערכים עם סימנים שונים.
      · לכן לפי משפט דרבו קיימת נקודה $c\in\left(b,a\right)\subset\left(0,a\right)$ כך ש:

$$f'\left(c\right)=0$$