(104031) אינפי 1מ' | תרגול 24 - יוליה

שם: איל שטיין

January 18, 2023

נושאי השיעור: לופיטל, טיילור

נושא ראשון - תרגיל על דרבו משיעור שעבר:

תרגיל 1.

- תהי $f\left(x\right)$ גזירה בקטע $\left(a,b\right)$, רציפה ב-$\left[a,b\right]$ כך ש- $\lim_{x\to b^{-}}f'\left(x\right)=\infty$

צ"ל: f לא גזירה ב-b
פתרון:

- נניח בשלילה ש-f גזירה ב-b, כלומר קיימת $f'\left(b\right)$.
  - נסמן $f'\left(b\right)=C$.
  - על פי הגדרת הגבול האינסופי, קיימת נקודה $a<d<b$ כך שלכל $d<x<b$ מתקיים:

$$C<2\left|C\right|+2<f'\left(x\right)$$

    * לקחנו $2\cdot\left|C\right|+2$, למקרה שבו $C=0$
  - בקטע $\left[d,b\right]$ מתקיימים תנאי משפט דרבו אבל $f'\left(x\right)$ לא מקבלת בקטע אף ערך שבין C ובין $\left(2\cdot\left|C\right|+2\right)$ כי $\lim_{x\to b^{-}}f'\left(x\right)=\infty$
- סתירה להנחת השלילה.
- לכן f לא גזירה ב-b.

נושא שני - לופטיל:

תרגיל 2.

- תהי $f(x)$ גזירה פעמיים ברציפות, כלומר הנגזרת השנייה קיימת ורציפה, בקטע $[-1,1]$.
- $f(0)=0$
- נגדיר

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$$

צ"ל:

א. הוכיחו כי $g(x)$ גזירה ברציפות בקטע $(-1,1)$

ב. הוכיחו כי קיים $K>0$ כך שלכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים $|g(x)-f'(x)|\leq K|x|$

א. פתרון:

- לכל $x\neq 0$ נקבל ש- $g(x)$ היא מנה של פונקציות גזירות כאשר נגזרת המכנה $\neq 0$.
  - לכן לפי כללי גזירה נקבל שכאשר $x\neq 0$ מתקיים:

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$$

  - נשתמש במשפט: "אם: $g(x)$ רציפה ב-0, וגם $g(x)$ גזירה בסביבה מנוקבת של 0, וגם $\lim_{x\to 0} g'(x)$ קיים וסופי אז $g'(0)$ מוגדרת ו-$g'(x)$ רציפה ב-0".
    * נוכיח קודם ש $g(x)$ רציפה ב-0:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

      · קיבלנו ש $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$ ולכן $g(x)$ רציפה ב-0.
    * הראנו ש-$g(x)$ גזירה בסביבה מנוקבת של 0.
    * נשאר להראות ש-$\lim_{x\to 0} g'(x)$ קיים וסופי:

$$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$$

      · גם המונה וגם המכנה שואפים לאפס כי $f'(x)$ רציפה (מכיוון ש-f גזירה פעמיים).
      · ולכן:

$$\lim_{x\to 0}\overbrace{x}^{\to 0}\cdot\overbrace{f'(x)}^{\to f'(0)}=0$$

- מכיוון שגם המונה וגם המכנה גזירים, נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)\,x+1\cdot f'(x)-f'(x)}{2\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)\cancel{x}}{2\cdot\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}$$

- ומכיוון שנתון ש-f גזירה פעמיים ברציפות, אז f'' רציפה ולכן הגבול של $f''(x)$ קיים.
- לכן לפי לופיטל מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)\,x-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=L$$

– שלושת התנאים של המשפט מתקיימים ולכן $g'(x)$ קיימת ו-$g'(x)$ רציפה ב-0.

ב. צ"ל: קיים $K>0$ כך שלכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים $|g(x)-f'(0)|\le K|x|$

ב. פתרון:

- אפשר לכתוב את הצ"ל כ: "קיים $K>0$ כך שלכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים $|g(x)-g(0)|\le K|x-0|$"
- עבור $x=0$ מתקיים $|g(0)-g(0)|=0<K$
- עבור $x\neq 0$ נקבל שבקטע בין 0 ל-x מתקיימים תנאי לגראנז' ולכן קיימת נקודה c בין 0 ל-x כך ש

$$\frac{|g(x)-g(0)|}{|x-0|}=|g'(c)|$$

– מכיוון ש $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subset(-1,1)$

* אז הפונקציה g' רציפה וגזירה בקטע $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ לפי הנתון

- ולכן לפי משפט ויירשטראס נקבל שקיים מספר $K>0$ כך ש- $|g'(x)|\le K$ לכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
- בפרט עבור הנקודה $c\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים $|g'(c)|\le K$

- לכן קיים $K>0$ כך שלכל $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ מתקיים $|g'(x)|\le|x|\cdot K$

נושא שלישי - פולינום טיילור:

- תהי f גזירה n פעמים בנקודה $x=a$.

- אז פולינום טיילור של f מסדר n סביב a מוגדר:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k$$

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

משפט 3.

- אם נגדיר שארית $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$
  - אז $\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0$
    * אפשר לכתוב את הביטוי בצורה אחרת ולכתוב:

$$R_n(x)=o\left((x-a)^n\right)$$

הערה 4. כלומר המונה שואף לאפס "מהר" יותר מהמכנה.

תרגיל 5.

- מצאו פולינום מקלורן (טיילור ב$x=0$) עבור:
  - $f(x)=\frac{1}{1-x}$

פתרון:

- $f(x)=\frac{1}{1-x}$
  - f גזירה אינסוף פעמים כאשר $x=0$.
  - $f(0)=1$
- $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$
  - $f'(0)=1$
- $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$
  - $f''(0)=2$
- $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
  - $f^{(n)}(0)=n!$

- לכן פולינום מקלורן יהיה:

$$P_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\overbrace{f^{(k)}\left(0\right)}^{=k!}}{k!}\cdot\left(x-0\right)^{k}$$

  – ולכן:

$$P_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}x^{k}$$

תרגיל 6. מצאו פולינום מקלורן (טיילור ב$x=0$) עבור:

- $h\left(x\right)=ln\left(1+x\right)$

פתרון:

- $h\left(x\right)=ln\left(1+x\right)$
  – $h\left(0\right)=1$
- $h'\left(x\right)=\frac{1}{1+x}$ - שזה כמו בתרגיל הקודם, כלומר $f\left(-x\right)$
  – $h'\left(0\right)=1$
- $h''\left(x\right)=-\frac{1}{(1+x)^{2}}$ - שזה גם כמו בתרגיל הקודם $\left(-1\right)\cdot f'\left(-x\right)$
  – $h''\left(0\right)=-1$
- ולכן $h'''\left(x\right)$ - יהיה כמו בתרגיל הקודם $+f'''\left(-x\right)$
  – כלומר $h'''\left(0\right)=f''\left(0\right)=2$
- ואם נלך לנגזרת ה-n אז נקבל $h^{(n)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{n+1}f^{n-1}\left(0\right)$
  – כלומר $h^{(n)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{n+1}\cdot\left(n-1\right)!$
- נציב לנוסחת הפולינום ונקבל:

$$P_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^{k}\left(0\right)}{k!}x^{k}$$

$$\begin{aligned}P_n\left(x\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}\frac{\left(k-1\right)!}{k!}x^{k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}x^{k}\end{aligned}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

תרגיל 7. חשבון $P_n(x)$ עבור $f(x) = \cos(x)$

פתרון:

- ראינו בהרצאה ש-

$$P_{\sin x}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_{\sin x}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- נשים לב ש $f(0) = 1$ ולכן:

$$f(x) = \cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

תרגיל 8. חשבון את פולינום מקלורן $P_n(x)$ עבור e^x

פתרון:

- צריך לזכור ש: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$, כי נגזרת מכל סדר של e^x היא e^x

תרגיל 9.

א. בעזרת פולינום מקלורן, עבור $g(x) = e^x \cdot \sin(x)$, מצאו את: $g^{(5)}(0)$

ב. יהיו פונקציות גזירות בנקודה a לפחות n פעמים. T_n ו-P_n פולינומי טיילור סביב a מסדר n עבור f ו-g בהתאמה.

1. אז $P_n + T_n$ הוא פולינום טיילור מסדר n סביב $x = a$ עבור $f + g$. - להוכיח לבד.
2. פולינום טיילור של המכפלה $f \cdot g$ מסדר n סביב $x = a$ הוא $T_n \cdot P_n$ אחרי ההשמטה של כל החזקות הגדולות מ-n - אפשר להשתמש בלי הוכחה. ההוכחה היא בעזרת כלל לייבניץ עם הבינום של ניוטון.

א. פתרון:

- יש לנו פולינומי מקלורן ידועים עבור $\sin(x)$ ועבור e^x ולכן לפי הטענה בסעיף ב'-2 ניקח פולינומים מסדר 5:

$$P_5 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) \ - \ for \ \ \sin(x)$$

$$T_5 = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \ - \ for \ e^x$$

  - נכפול את שני הפולינומים ואחרי השמטת החזקות מסדר 6 עד 10 נקבל פולינום ממעלה 5:
    * נמצא מקדם של x^5 בפולינום המכפלה

$$1 \cdot \frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{30}$$

      · קיבלנו את המקדם של x^5 בפולינום מקלורן של המכפלה $P_n(x)$ ו-$T_n(x)$.
      · הוא שווה ל: $\frac{g^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{1}{30}$
      · ולכן $g^{(5)}(0) = -4$

שארית בצורת לגראנז':

- בשביל לחסום את הנגזרת ולראות למה היא מגיעה, צריך תנאים מחמירים יותר:
- אם f גזירה $n+1$ פעמים בסביבה של $x = a$ אז:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

  - כאשר c נמצאת בין x ל-a.
- לכן בשביל לפשר את הדיוק צריך לקרב את c (או x) ל-a.

תרגיל 10.

- חשבו את $\sqrt[4]{19}$ בדיוק של 10^{-3}

פתרון:

- נגדיר פונקציה $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$, ניקח $a = 16$ וניקח $x = 19$
  - כלומר $f(a) = f(16) = 2$
- $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בסביבת 16.

- נחפש n עבורו $|R_n(19)| \le \frac{1}{10^3}$:

$$R_n(19) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(19-16)^{n+1}$$

$$= 3^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

  - כאשר $c \in (16, 19)$
  - עבור $n = 0$:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$$

    * כלומר $0 < f'(c) = \frac{1}{4 \cdot c^{\frac{3}{4}}}$, ומכיוון ש $16 < c$ מתקיים:

$$f'(c) < \frac{1}{4 \cdot 16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{32}$$

    · לכן $|R_0(19)| \le \frac{\frac{1}{32}}{1!} \cdot 3 = \frac{3}{32}$

  - עבור $n = 1$:

$$f''(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^{-\frac{7}{4}}$$

$$f''(c) = -\frac{3}{16 \cdot c^{\frac{7}{4}}}$$

    * ולכן נקבל:

$$|R_1(19)| < \frac{27}{4096}$$

  - עבור $n = 2$:

$$f'''(x) = \frac{21}{64} \cdot x^{-\frac{11}{4}}$$

$$|f'''(c)| = \frac{21}{64 \cdot c^{\frac{11}{4}}}$$

* ולכן $|R_2| = \frac{3^3}{3!} \left|f^{(3)}(c)\right| < \ldots = \frac{189}{2^{18}} < 10^{-3}$

- לכן יש לחשב את פולינום טיילור עד סדר 2 ונקבל:

$$T_2(19) = f(16) + f'(16) \cdot (19-16) + \frac{f''(16)}{2} \cdot (19-16) = 2 \cdot \frac{357}{4096}$$