(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 1 - אירנה

שם: איל שטיין

November 5, 2022

עד יום ראשון (30/10/2022), לסיים מעבר על החומר של מספרים מרוכבים כי נתחיל להשתמש בהם.

עשינו חזרה על סימונים של תורת הקבוצות (איחוד, חיתוך, הפרש, קבוצה ריקה, קבוצות המספרים).

למדנו סימון נוסף של משלים - A^c. לסימון ממתק"א, $\overline{A}$, יש משמעות אחרת לפעמים ולכן באלגברה נשתמש בראשון.

דיברנו גם על הקבוצה $\mathbb{C}=\left\{ a+bi\quad|\quad a,b\in\mathbb{R},\quad i^{2}=-1\right\}$

והוספנו את האמירה ש: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

הגדרה 1. שדה

נתונה קבוצה $\mathbb{F}$ ושתי פעולות המוגדרות על איברי הקבוצה: (+) חיבור, (·) כפל.

הקבוצה $\mathbb{F}$, יחד עם פעולות החיבור והכפל היא שדה אם היא מקיימת את אחד עשר התכונות (אקסיומות) הבאות:

1. סגירות לחיבור: לכל $a,b\in\mathbb{F}$, $(a+b)\in\mathbb{F}$
2. אסוציאטיביות בחיבור (חוק הקיבוץ): לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים ש:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

3. קיום אדישות בחיבור: קיים "0" ב $\mathbb{F}$ כך שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a+"0"=a$
4. קיום נגדי: לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים $-a\in\mathbb{F}$ כך ש $a+(-a)=0$
5. קומוטטיביות בחיבור (חוק החילוף): לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים ש:

$$a+b=b+a$$

6. סגירות לכפל: לכל $a,b,\in\mathbb{F}$ מתקיים ש

$$(a\cdot b)\in\mathbb{F}$$

7. אסוציאטיבות בכפל: לכל $a,b,c,\in\mathbb{F}$ מתקיים ש

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

8. קיום אדיש בכפל: קיים אדיש $"1"\in\mathbb{F}$ וכן $"1"\neq"0"$, כך שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים ש:

$$a\cdot"1"=a$$

9. לכל $0\neq a\in\mathbb{F}$ קיים $a^{-1}\in\mathbb{F}$ שמקיים

$$a\cdot"a^{-1}"="1"$$

10. קומוטטיביות לכפל: לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים $a\cdot b=b\cdot a$

11. דיסטריבוטיביות (חוק הפילוג): לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים ש:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

- **הערה:** כרגע אנחנו יודעים ש $\mathbb{Q}$ ו- $\mathbb{R}$ הם שדות (וגם $\mathbb{C}$, אבל לא נוכיח את זה כרגע). $\mathbb{N}$ ו-$\mathbb{Z}$ הם לא שדות.

- **הערה:**
  - הופכי של מספר כלשהו בחיבור:

$$a-b=a+\underbrace{(-b)}_{opposite\ \ of\ \ b}$$

– בכפל נכתוב הופכי בצורה כזאת:

•

$$\frac{a}{b} = a \cdot \underbrace{b^{-1}}_{opposite\ \ of\ \ b} \quad , \, b \neq 0$$

• **הערה:** פעולה <u>בינארית</u> על קבוצה A היא פונקציה שמקבלת שני איברים ב-A ומחזירה איבר אחד ב-A.

– אז יוצא שאם $\mathbb{F}$ היא קבוצה עם שתי פעולות בינאריות (חיבור וכפל) אז לא צריך לבדוק סגירות (כלומר התוצאה תהיה ב-$\mathbb{F}$).

– יש אסכולה שמוכיחה את מושג ה"שדה" בצורה כזאת ואז לא צריך להוכיח סגירות.ד

הגדרה 2. חבורה - קבוצה G עם פעולה $\cdot$ המוגדרת על אברי הקבוצה היא חבורה אם מתקיימות הדרישות הבאות:

1. סגירות לפעולה: לכל $a, b \in G$ מתקיים $(a \cdot b) \in G$
2. אסוציאטיביות: לכל $a, b \in G$ מתקיים $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. קיום איבר אדיש: קיים $e \in G$ כך שלכל $a \in G$ מתקיים ש:

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

4. קיום הופכי: לכל $a \in G$ קיים $a^{-1} \in G$ כך שמתקיים

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

הגדרה 3. אם לכל $a, b \in G$ מתקיים $a \cdot b = b \cdot a$ אז G נקראת חבורה אָבֵלית.

• <u>**הסבר על חבורה במילים:**</u> **חבורה** זו קבוצה עם פעולה אחת בלבד (נהוג לקרוא לה כפל) שמקיימת סגירות, אסוציאטיביות, אדיש לפעולה והופכי לפעולה.

– בחבורה לא חייב שיתקיים חוק החילוף (קומוטטיביות). יש חבורות שכן מתקיים בהן והן נקראות חבורות אבליות (על שם המתמטיקאי נילס הנריק אָבֶּל) או קומוטטיביות.

– אז אם אנחנו שולטים בחבורות היטב, לשדה יש רק שתי תכונות. יש ענף שלם במתמטיקה על חקר שדות וחבורות.

הגדרה 4. הגדרה מקוצרת של שדה:
בהינתן קבוצה $\mathbb{F}$ עם שתי פעולות (חיבור וכפל), $\mathbb{F}$ היא שדה אם:

1. $\mathbb{F}$ היא חבורה אָבֶּלית ביחס לפעולת החיבור.
2. $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ היא חבורה אָבֶּלית ביחס לכפל.
3. דיסטריבוטיביות (חוק הפילוג).

משפט 5. תכונות של שדות:
נתון שדה $\mathbb{F}$.
התכונות שלו הן:

1. האדיש החיבורי הוא יחיד
2. לכל $a \in \mathbb{F}$ הנגדי הוא יחיד
3. האדיש הכפלי הוא יחיד
4. לכל $0 \neq a \in \mathbb{F}$, ההופכי הוא יחיד
5. אם $a+c=b+c$ אז $a=b$.
6. אם $c \neq 0$, $a \cdot c = b \cdot c$ אז $a=b$
7. לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $a \cdot 0 = 0$
8. $\underbrace{(-1)}_{opposite} \cdot a = -a$
9. $a \cdot b = 0$ אם ורק אם $a=0$ או $b=0$
10. $-(a \cdot b) = a \cdot (-b) = (-a) \cdot (b)$
11. $-(-a) = a$
12. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
13. $-(a+b) = -a-b$
14. $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$
15. $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
16. $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

הוכחה. נתחיל בהוכחה של תכונה מספר 1:
ניקח שני איברים: 0, $\widetilde{0}$ שהם אדישים חיבוריים. נראה ש $0 = \widetilde{0}$:

$$0 + \widetilde{0} = 0$$

כי $\widetilde{0}$ הוא אדיש חיבורי.

$$\widetilde{0}+0=\widetilde{0}$$

כי 0 הוא אדיש חיבורי.

יוצא ש:

$$\widetilde{0}=0$$

■

הוכחה. נוכיח את תכונה מספר 4: לכל $0\neq a\in\mathbb{F}$ קיים a^{-1} יחיד.

ניקח $a\in\mathbb{F}$

ניקח $a^{-1},\ \widetilde{a}^{-1}$

יוצא ש:

$$a^{-1}=a^{-1}\cdot 1=a^{-1}\cdot\underbrace{\left(a\cdot\widetilde{a}^{-1}\right)}_{1}=\underbrace{\left(a^{-1}\cdot a\right)}_{1}\cdot\widetilde{a}^{-1}$$

■

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 2 - יוסי

שם: איל שטיין

November 5, 2022

חזרה על השיעור הקודם:

בשיעור הקודם דיברו על חשבון שאריות (mod)

והגדרנו שדה $Z_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

הוכחנו את המשפט

$$(a+b)\,mod\ n = (a\ mod\ n + b\ mod\ n)\,mod\ n$$

$$(a\cdot b)\,mod\ n = (a\ mod\ n\cdot b\ mod\ n)\,mod\ n$$

ואמרנו ש-Z_n חבורה קומוטטיבית לחיבור. כלומר, מתקיים בה (1) סגירות, (2) חוק הקיבוץ, (3) קיום איבר נייטרלי/אדיש, (4) קיום איבר נגדי ולבסוף גם (5) חוק החילוף כי חבורה קומוטטיבית).

(1) הראינו סגירות ל-$\oplus$ (חיבור ואז מודול).

(2) חוק הקיבוץ מתקיים כי הוא מתקיים בZ_n.

(3) האיברים האדישים הם 0, 1

(4) האיבר הנגדי בחיבור מודול הוא $n-a$.

(5) הראינו ש-Z_n קומוטטיבית כי $a\oplus b=(a+b)\,mod\ n=(b+a)\,mod\ n=b\oplus a$

ובאותה הדרך קמוטטיביות לכפל מודול ($\odot$).

לא הראנו הופכי לכפל מודול. האם קיים ל$Z_n^{\otimes}$ הופכי לכפל מודול?

נניח ש-n לא ראשוני (פריק). למשל, לZ_6נקבל $2\cdot 3=0 \pmod 6$

אך מכיוון ש-$0 \neq (mod\ 6)\ 2$ וגם $0 \neq (mod\ 6)\ 3$ יוצא שZ_6 לא יכול להיות שדה.

נראה עכשיו שאם n ראשוני אז בהכרח קיים הופכי:

- יהא $0\neq a\in Zp$ כך ש p ראשוני ונראה שקיים $b\in Z_p$ כך ש- $a\odot b=1$:
- נגדיר קבוצה $A=a\odot\mathbb{Z}_p=\{a\odot 0, a\odot 1, a\odot 2\ldots, a\odot(p-1)\}$
  - מכיוון שהקבוצה מכילה p איברים, אחד מהאיברים חייב להיות שווה 1.
  - נראה שכל איברי הקבוצה שונים זה מזה:

* נניח שבקבוצה יש שני איברים זהים, כלומר קיימים $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_p$ כך ששני איברים בקבוצה שווים: $(a \odot b_1) = (a \odot b_2)$
  · צריך לציין שדיסטריביטיביות מתקיימת מזה שהיא נכונה ב$\mathbb{Z}$ ולפי המשפט $a \odot (b+c) = a \odot b \oplus a \odot c$
* נניח בלי הגדרת הכלליות (כלומר אני מניח הנחה אבל לא פוגם בכלליות ההוכחה כי אפשר להפוך את האגפים וככה ההוכחה לא משתנה) כי $b_1 < b_2$ ונקבע כי:

$$a \cdot b_1 = a \cdot b_2 \ \ (mod\ p)$$

$$a \cdot (b_1 - b_2) = 0 \ \ (mod\ n)$$

  · מכיוון שהשארית שווה ל-0 במשוואה למעלה:

$$p \ | \ a \cdot (b_2 - b_1)$$

  · זאת אומרת, או ש:

$$p \ | \ (b_2 - b_1)$$

  · או ש:

$$p \ | \ a$$

  · $a < p$ מכייון ש $a \in Z_p$ ויוצא שהוא לא יכול לחלק אותו, ומכיוון ש $b_2 - b_1 < p$ גם הוא לא יכול לחלק אותו.
* הגענו לסתירה והיא מלמדת אותנו שכל האיברים ב-A וקיים איבר $1 \in A$.
  – כלומר, מכיוון ש קיים איבר הופכי ל-a.
  – הוכחנו את המשפט: Z_pשדה ביחד לפעולות החשבון המודולורי אם ורק אם p ראשוני.

איך מוצאים הופכי בחשבון מולודרי? משתמשים באלגוריתם של אוקלידס.

שדה סופי לא יכול להיות בכל גודל.

תרגיל 1.

$$5x + 7 = 1\,(mod\ 7)$$

מכיוון ש $7\,(mod\ n) = 0$

$$5x = 1\,(mod\ 7)$$

לחלק ב-5 במודול 7 זה אותו דבר כמו לכפול בהופכי. ההופכי של 5 במודול 7 הוא 3 כי $5 \cdot 3$ שווה 15. 15 במודול 7 שווה ל- 1 ולכן:

$$5x = 1\,(mod\ 7) \quad \backslash 3$$

$$x = 3\,(mod\ 7) \quad \backslash 3$$

תרגיל 2.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

ננסה להציב ב-x מספרים מ-0 עד 10 ונראה שהמשוואה לא עובדת.
נשתמש בנוסחת השורשים ונקבל:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1-4}\right) \ \ (mod\ 11) \\ &= 6 \cdot \left(-1 \pm \sqrt{-3}\right) \ \ (mod\ 11) \end{aligned}$$

צריך לבדוק את יש מספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל -3 במודול 11:

$$x_{1,2} = 6 \cdot \left(-1 \pm \sqrt{8}\right) \ \ (mod\ 11)$$

ננסה להציב מספרים מ-1^2 עד 10^2 ונראה ש-8 הוא לא ריבוע ב-$(mod\ p)$

פולינומים:

הגדרה 3. פולינום
יהי $\mathbb{F}$ שדה.

פולינום ממעלה n מעל השדה $\mathbb{F}$ הוא ביטוי פורמלי מהצורה:

$$p\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

כאשר $a_i\in\mathbb{F}$ (a_i נקראים מקדמי הפולינום) ו-$a_i\neq 0$ רק עבור מספר סופי של מקדמים.

- a_n נקרא <u>מקדם מוביל</u>.
- הסימון ל'מעלה' של פולינום הוא $deg\left(p\left(x\right)\right)$.
- כל איבר מהצורה $a_i\cdot x^i$ נקרא מונום.
- פולינום האפס הוא $q\left(0\right)=0$ והמעלה שלו מוגדרת להיות מינוס אינסוף.
- הפולינום נקרא "ממשי" (או מעל $\mathbb{R}$) אם כל ה-a_i ממשיים.
- הפולינום נקרא "מרוכב" (או מעל $\mathbb{C}$) אם כל ה-a_i מרוכבים.
- פולינום יכול להוית מעל לכל שדה ובפרט מעל שדה סופי.
- כתיבה מקוצרת של פולינומים:

$$p\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

דוגמה 4.

1. x^2+6x+5 הוא פולינום ממעלה 2 אבל גם מעל $\mathbb{R}$.
2. z^3-iz^2-z+i הוא פולינום ממעלה 3 אבל לא מעל $\mathbb{R}$.
3. x^2+2 הוא פולינום ממעלה 2 מעל השדה $\mathbb{Z}_3$ ($\mathbb{Z}_p:p=3$)
4. $p\left(x\right)=5$ הוא ממעלה 0
5. $p\left(x\right)=0$ הוא ממעלה $-\infty$

שוויון בין פולינומים:

- $p\left(x\right)=q\left(x\right)$ אם הם מאותה מעלה וכל מקדמיהם שווים.

סכום פולינומים:

- $\left(p+q\right)\left(z\right)=p\left(z\right)+q\left(z\right)$

כפל פולינומים:

$(p\cdot q)(z)=p(z)\cdot q(z)$

דוגמה 5.

$$p(z)=z^2+2z+5$$

$$q(z)=2z+i$$

$$(p\cdot q)(z)=\left(z^2+2z+5\right)(2z+i)=z^3+iz^2+z+i$$

הערה.

1. $deg\,(p+q)\leq max\,\{deg\ \ p, deg\ \ q\}$
2. $deg\,(p\cdot q)=deg\ \ p\ \ +\ \ deg\ \ q$

למה 6. לא נוכיח בשיעור:

1. $p\cdot q=q\cdot p$
2. $(p\cdot q)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)$
3. $(p+q)\,r=p\cdot r+q\cdot r$
4. $p(x)\cdot q(x)=0\ \ \Leftarrow\ \ p(x)=0$ או $q(x)=0$

שורשים של פולינומים ופירוק:

הגדרה 7. יהא $\mathbb{F}$ שדה ויהא $p(x)$ פולינום מעל $\mathbb{F}$.
$x_0\in\mathbb{F}$ נקרא שורש של $p(x)$ אם $p(x_0)=0$

דוגמה 8.

1. $z_0=1$ הוא שורש של הפולינום: $q(x)=z^3-iz^2-z+i$
2. לפולינום $p(z)=z^2+i$ אין שורשים ממשיים אבל יש לו שורשים מרוכבים: $z=-1$ או $z=i$
   (א) נשים לב שמתקיים הפירוק הבא: $p(z)=(z-i)(z+i)$

3. ביטוי מהצורה $(x-x_o)$ נקרא "גורם ליניארי". למעשה זהו פולינום ממעלה 1 עם שורש x_0.

- **הערה**: אם ניקח מכפלה מהצורה $p(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_n)$ נקבל פולינום ממעלה n עם שורשים $x_1,\ldots,x_n$ כי כולם מאפסים את המשוואה.
  - נרצה להראות את הכיוון ההפוך: שאם יש פולינום מעל $\mathbb{C}$ ממעלה n אז ניתן לפרק אותו בצורה שהראינו למעלה:

$$p(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_n)$$

* המשפט היסודי של האלגברה אומר: "לכל פולינום מעל $\mathbb{C}$ ממעלה $n\geq1$ יש לפחות שורש מרוכב אחד."

למה 9. המסקנה שנרצה להראות: לכל פולינום ממעלה n מעל $\mathbb{C}$ יש בדיוק n שורשים מרוכבים.

- כדי להוכיח זאת, נשתמש בעובדה ש:כל שכל פולינום $p(x)$מעל שדה $\mathbb{F}$ ניתן לכתיבה בצורה הבאה:

$$p(x)=t(x)\cdot q(x)+r(x)$$

כאשר $r(x)$ מקיים: $deg\ r(x)<\ deg\ q(x)$ או $r(x)=0$.

* שמות:
ל-$r(x)$ קוראים "השארית" של $p(x)$ בחלוקה של $q(x)$.
$t(x)$ נקראת "מנת החלוקה".

הוכחה. **הוכחת המסקנה:**

- ניקח פולינום $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.
- לפי המשפט היסודי של האלגברה, יש לו לפחות שורש אחד. נניח ש-x_1 הוא שורש.
- נחלק את $p(x)$ ב- $(x-x_1)$ ונקבל כי:

$$p(x)=(x-x_1)\,T_{n-1}(x)$$

* ל $T_{n-1}(x)$ יש גם שורש, נקרא לו x_2. נחלק אותו ב x_2 ונקבל:

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\,T_{n-2}(x)$$

* ממשיכים באותו אופן עד שמקבלים:

$$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

– נשווה את $p\left(x\right)$שלנו להגדרה של $p\left(x\right)$:

$$p\left(x\right)=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+\ldots+a_{n}x^{n}=a\left(x-x_{1}\right)\left(x-x_{2}\right)\ldots\left(x-x_{n}\right)$$

– נקבל כי $a=a_{n}$

* ולכן:

$$p\left(x\right)=a_{n}\cdot\left(x-x_{1}\right)\cdot\left(x-x_{2}\right)\cdot\ldots\left(x-x_{n}\right)$$

■

• **משפט "בזוי"(לא נוכיח כרגע):** פולינום $p\left(x\right)$ מתחלק בגורם $\left(x-a\right)$ללא שארית אם ורק אם a הוא שורש של $p\left(x\right)$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 3 - יוסי

שם: איל שטיין

November 5, 2022

נושא השיעור: פולינומים מרוכבים.

פעם קודמת למדנו שכל פולינום מעל המרוכבים ניתן לכתיבה באופן הבא:

$$p\left(x\right)=a_{n}\cdot\left(x-x_{1}\right)\cdot\left(x-x_{2}\right)\cdot\ldots\left(x-x_{n}\right)$$

משפט 1. יהא $p\left(x\right)$ פולינום בעל מקדמים ממשיים. אם $z_{0}\in\mathbb{C}$ הוא שורש של $p\left(z\right)$ אזי גם $\overline{z_{0}}$הוא שורש שלו.

הוכחה.

- נניח כי z_{0}הוא שורש של $p\left(x\right)$.
  - אזי מתקיים $p\left(z_{0}\right)=0$.
- ניקח $p\left(x\right)$ פולינום מהצורה: $p\left(x\right)=a_{n}\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots ax+a_{0}$
  - אזי $a_{n}\cdot z_{0}^{n}+a_{n-1}\cdot z_{0}^{n-1}+\ldots a\cdot z_{0}+a_{0}=0$
    - * נשים גג מעל הביטוי ונקבל:

$$\overline{a_{n}\cdot z_{0}^{n}+a_{n-1}\cdot z_{0}^{n-1}+\ldots a\cdot z_{0}+a_{0}}=\overline{0}$$

  - נשתמש בשלוש עובדות:
    1. $\overline{z_{1}+z_{2}}=\overline{z_{1}}+\overline{z_{2}}$
    2. $\overline{z_{1}\cdot z_{2}}=\overline{z_{1}}\cdot\overline{z_{2}}$
    3. $\overline{z^{n}}=\left(\overline{z}\right)^{n}$
  - ונקבל שמכיוון שהצמוד של הסכום הוא סכום הצמודים יוצא:

$$\begin{aligned}\overline{a_{n}\cdot z_{0}^{n}+a_{n-1}\cdot z_{0}^{n-1}+\ldots+a\cdot z_{0}+a_{0}} & =\overline{a_{n}\cdot z_{0}^{n}}+\overline{a_{n-1}\cdot z_{0}^{n-1}}+\ldots+\overline{a\cdot z_{0}}+\overline{a_{0}}\\
 & =a_{n}\cdot\overline{z_{0}^{n}}+a_{n-1}\cdot\overline{z_{0}^{n-1}}+\ldots+a\cdot\overline{z_{0}}+\overline{a_{0}}
\end{aligned}$$

– לכן, $\overline{z_0}$ הוא גם שורש.

הערה 2. כל פולינום עם מקדמים ממשיים ניתן לכתיבה כמכפלת פולינומים ממשיים ממעלה 1 או 2.

דוגמה 3. ניקח פולינום מעל $\mathbb{C}$ לדוגמא:

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots (x - x_n)$$

- השורשים יהיו $x - x_i$

1. אם $x - x_i$ הוכחנו את ההערה.
2. אם $x - x_i$ מרוכב שלא ממשי אזי בהכרח יופיע $x - \overline{x_i}$ בצורה הבאה

$$(x - x_i)(x - \overline{x_i}) = x^2 - \underbrace{x(x_i + \overline{x_i})}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(x_i \cdot \overline{x_i})}_{\in\mathbb{R}}$$

■

מסקנה 4. $p(z) = z^4 + 1$ הוא פולינום פריק מעל הממשיים.

1. כדי למצוא את השורשים נבחן את $z^4 = -1$

(א) נקבל:

$$\begin{aligned} z_k &= cis\left(\frac{180 + 360k}{4}\right) \\ &= cis(45 + 90k) \end{aligned}$$

i. $k = 0, 1, 2, 3$ מכיוון שהמעלה היא 4 .

א׳. $z_0 = cis(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ב׳. $z_1 = cis(135) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ג׳. $z_2 = cis(225) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ד׳. $z_3 = cis(315) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

כל אלה השורשים של הפולינום.

ii. נבחן את הביטוי: $p(z) = \left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right) \cdot \left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right) \left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right) \cdot \left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)$

א׳. נקבל שהוא שווה ל- $p(z) = \left(\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\left(\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$

כעת נוכיח את המשפט ה"בזוי" מהשיעור הקודם:

משפט 5. "בזוי" - פולינום $p\left(x\right)$ מתחלק בגורם $\left(x-a\right)$ללא שארית אם ורק אם a הוא שורש של $p\left(x\right)$

הוכחה.

- כיוון ראשון: אם $p\left(x\right)$ מתחלק ב $\left(x-a\right)$ ללא שארית $\Leftarrow$ a הוא שורש של $p\left(x\right)$
  - נניח ש-$p\left(x\right)$ מתחלק ב $\left(x-a\right)$ ללא שארית. אזי: $p\left(x\right)=q\left(x\right)\left(x-a\right)$
    * לכן a הוא שורש.
- כיוון שני: $p\left(x\right)$ מתחלק ב$\left(x-a\right)$ללא שארית $\Rightarrow$ a הוא שורש של $p\left(x\right)$
  - נניח ש-a הוא שורש.
    * $p\left(x\right)=\left(x-a\right)\cdot q\left(x\right)+R$
      · נקבל כי $p\left(a\right)=0$ כי a הוא שורש
      · $p\left(a\right)=0\cdot q\left(x\right)+R=R$
      · כלומר, $p\left(a\right)=R$
      · כלומר, $p\left(x\right)$ מתחלק ב-a ללא שארית

■

משפט 6. נוסחת וייטה:
יהי פוליונום $p\left(x\right)$

$$p\left(x\right)=a_{n}\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots ax+a_{0}$$

או בכתיב אחר:

$$p\left(x\right)=a_{n}\cdot\left(x-x_{1}\right)\cdot\left(x-x_{2}\right)\cdot\ldots\left(x-x_{n}\right)$$

כעת מבצעים השוואת מקדמים על שני האגפים ופותיחם את האגפים (פתיחת האגפים היא ארוכה מאוד ולא נעשה אותה בשיעור)
המקדמים של x^{n} הם

$$\left(x^{n}\right)\qquad a_{n}=a_{n}$$

המקדמים של x^{n-1} הם

$$\left(x^{n-1}\right)\qquad a_{n-1}=a_{n}\left(-x_{1}-x_{2}-x_{3}\ldots-x_{n}\right)$$

המקדמים של x^{n-2} הם

$$a_{n-2}=a_n\left(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+\ldots+x_{n-1}\cdot x_n\right)\qquad\left(x^{n-2}\right)$$

המקדמים של a_0 הם

$$a_0=a_n\left(-1\right)^n\left(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_{n-1}\cdot x_n\right)$$

סיכום השורשים של הפולינום:

- $x_1+x_2+x_3+x_{n-1}+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $\left(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_{n-1}\cdot x_n\right)=\frac{a_0}{a_n}\left(-1\right)^n$

למה 7. לפולינום $p\left(x\right)$ מעל שדה $\mathbb{F}$ יש שורש α מריבוי k אם ורק אם:

$$p\left(\alpha\right)=p'\left(\alpha\right)=\ldots p^{(k-1)'}\left(\alpha\right)=0$$

וגם $p^{(k)'}\left(\alpha\right)\neq0$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 4 - יוסי

שם: איל שטיין

November 6, 2022

נושא השיעור: מטריצות

(לפי צילג: מטריצה - טבלה של מספרים מעל שדה. אם הטבלה הזו היא לא מעל שדה לא נעסוק בה בקורס הזה.
נהוג לסמן מטריצות באותיות גדולות ואת האיברים שלה באותיות קטנות עם אינדקס. לדוגמא A תסמן מטריצה, $\alpha_{n,k}$ יסמן את האיבר שנמצא בשורה ה-n ובעמודה ה-k.)

הגדרה 1. מטריצה - מערך דו מימדי עם איברים מהשדה $\mathbb{F}$ בכל אחד מאיברי המערך.

דוגמה 2.
$$A_{3X3}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 9 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 19\end{pmatrix}$$

סימון כללי למטריצה בעלת m שורות ו-n עמודות:

$$A_{mXm}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

בכל פם שנכתוב $A_{mxn}=(a_{ij})$, המספר i מייצג את מספר השורה, ו-j מייצג את מספר העמודה.

סימונים ומונחים:

1. $A=A_{mXn}=(a_{ij})$
2. סדר של המטריצה הוא mXn כלומר, למטריצה יש m שורות ו-n עמודות.
3. קבוצת כל המטריצות מעל שדה $\mathbb{F}$ מסומנת לרוב על ידי $M_{mXn}^{(\mathbb{F})}$, אך לפעמים על ידי $\mathbb{F}^{mXn}$
4. אם $m=n$ אז מטריצה נקראת ריבועית ומסומנת $M_n(\mathbb{F})$

5. <u>אלכסון ראשי</u> - במטריצה ריבועית בלבד, כל האיברים באלכסון משמאל למעלה עד ימין למטה נקראים איברי האלכסון הראשי. כשהמטריצה לא ריבועית אין לה אלכסון ראשי. באלכסון הראשי, $i = j$

$$A = \begin{pmatrix} alachson & 9 \\ 6 & alachson \end{pmatrix}$$

6. <u>מטריצת האפס</u> - מטריצה (מכל סדר) שכל איבריה אפסים. היא תהיה האדיש החיבורי בחיבור מטריצות . הסימון שלה הוא $\underset{mXn}{0}$

7. <u>מטריצת יחידה</u> - מטריצה ריבועית שבה כל איברי האלכסון הראשי הם 1 והיתר הם אפסים. מסומנת I או I_N. היא תהיה האדיש הכפלי בכפל מטריצות.

דוגמה 3. I_3 היא $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. <u>מטריצה אלכסונית</u> - מטריצה ריבועית שבה כל איבר מחוץ לאלכסון הראשי הוא 0.

דוגמה 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

9. <u>מטריצה סקאלרית</u> - מטריצה אלכסונית (שהיא גם מטריצת יחידה) שבה איברי האלכסון שווים.

דוגמה 5. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

10. <u>מטריצה משוחלפת</u> - נתונה $A \in M_{mXn}(\mathbb{F})$ נגדיר A^tלהיות מטריצה $M_{nXM}(\mathbb{F})$כך שלכל i, j מתקיים $A^t_{ji} = A_{ij}$

דוגמה 6. ניקח את המטריצות: $A_{2X4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \pi \\ e & \sqrt{2} & 3 & 17 \end{pmatrix}$ ו- $B_{3X3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$

- $A^t = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 3 \\ \pi & 17 \end{pmatrix}$ ו - $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & 19 \end{pmatrix}$

11. מטריצה סימטרית - מטיצה ריבועית המקיימת $A^t = A$, כלומר לכל i, j מתקיים $a_{ij} = a_{ji}$

דוגמה 7. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \\ 7 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

- $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \\ 7 & 11 & 5 \end{pmatrix}$, יוצא ש: $C = C^t$. מטריצה כזאת נקראת סימטרית. כלומר, $C_{ij} = C_{ji}$

12. מטריצה אנטי סימטרית - מטריצה ריבועית כך ש- $A^t = -A$. כלומר, מתקיים $a_{ij} = -a_{ji}$.

(א) בפרט: $a_{ii} = -a_{ii}$, כלומר: $2 \cdot a_{ii} = 0$

i. יוצא ש $a_{ii} = 0$ (האלכסון הראשי תמיד 0, חוץ מבשדה Z_2)

דוגמה 8. $D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה אנטי סימטרית כי $D^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

• <u>הערה:</u> מעל Z_2 האלכסון הראשי לא חייב להיות 0.

דוגמה 9. מעל Z_2 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ יוצא ש-$a_{12} = -a_{21}$ ובחשבון של $mod2$ זה יוצא $1 = -1\,(mod2)$

13. <u>מטריצה משולשית עליונה</u> - מטריצה ריבועית שבה כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי שווים 0. כלומר, $a_{ij} = 0$ עבור $i > j$.

דוגמה 10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

14. <u>מטריצה משולשית תחתונה</u> - מטריצה ריבועית שבה כל האיברים מעל לאלכסון הראשי שווים 0. כלומר, $a_{ij} = 0$ עבור $j > i$.

דוגמה 11. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

15. <u>וקטור שורה</u> - מטריצה בעלת שורה בודדת. $A \in M_{1Xn}(\mathbb{F})$

דוגמה 12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

16. וקטור עמודה - מטריצה בעלת עמודה בודדת. $A \in M_{mX1}(\mathbb{F})$

דוגמה 13. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

הגדרה 14. יהא $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m, n \in \mathbb{N}$. תהיינה $A = (a-ij)$ ו- $B = (b_{ij})$ שתי המטריצות ב-$M_{mXn}(\mathbb{F})$. יהי $\alpha \in \mathbb{F}$.

1. $A = B$ אם $a_{ij} = b_{ij}$ לכל $1 \leq i \leq m$ ולכל $i \leq j \leq n$

2. $A + B$ הינה מטריצה $C \in M_{mXn}(\mathbb{F})$, $C = (c_{ij})$ כך ש $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

דוגמה 15. חיבור מטריצות: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 13 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

3. כפל של מטריצה בסקלאר - כפל מטריצה A בסקלאר $\mathbb{F}$, $C = (c_{ij})$ כך ש- $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 5 - יוסי

שם: איל שטיין

November 10, 2022

נושא השיעור: כפל מטריצות, הצבת מטריצה בפולינום, מערכות משוואת ליניאריות.

שיעור קודם הגדרנו חיבור מטריצות וכפל של מטריצה בסקאלר.

נושא ראשון - כפל מטריצות:

משפט 1. יהי $\mathbb{F}$ שדה. ויהיו $m,n\in\mathbb{N}$. תהיינה $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$.
אזי:

1. $A+B=B+A$ - קומוטטיביות בחיבור
2. $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$ - אסוציאטיביות בחיבור
3. $A+'0'=A$ (כאשר '0' היא מטריצת האפס) - קיום אדיש חיבורי
4. $A+\left(-A\right)='0'$ - קיום נגדי
5. $\alpha\left(A+B\right)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$
6. $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
7. $\left(\alpha\beta\right)A=\alpha\left(\beta A\right)$
8. $\left(A+B\right)^{t}=A^{t}+B^{t}$
9. $\left(\alpha A\right)^{t}=\alpha A^{t}$
10. $\left(A^{t}\right)^{t}=A$

הוכחה. נוכיח את מספר 5 - $\alpha\left(A+B\right)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$:

- A,B הם מאותו סדר.
- $\left(\alpha\left(A+B\right)\right)_{ij}=\alpha\left(A+B\right)_{ij}=\left(\alpha A\right)_{ij}+\left(\alpha B\right)_{ij}=\alpha\left(A_{ij}\right)+\alpha\left(B_{ij}\right)$

■

כפל מטריצות:

דבר ראשון, לפני שכופלים מטריצות, צריך לוודא שמספר העמודות במטריצה הראשונה שווה למספר השורות במטריצה השנייה.

דוגמה 2. $\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}}^{3\times 2}$ אפשר לכפול ב- $\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}}^{3\times 3}$

בשביל לכפול, מכפילים איברים מהשורה הראשונה במטריצה הראשונה בעמודות של המטריצה השנייה.

בדוגמא הזאת, המכפלה תהיה $\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3 & 1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0\\ 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3 & 4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 0\\ 7\cdot 1+8\cdot 2+9\cdot 3 & 7\cdot 0+8\cdot 1+9\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 2\\ 32 & 5\\ 50 & 8\end{pmatrix}$

הגדרה 3. כפל מטריצות:

יהא $\mathbb{F}$ שדה והיו $m,n\in\mathbb{N}$ ו-$A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $B\in M_{n\times l}(\mathbb{F})$.

AB היא המטריצה $C\in M_{m\times l}(\mathbb{F})$

שאיבריה מוגדרים על ידי $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$

מסקנה 4. כפל מטריצות הוא לא קומוטטיבי (לא חל עליו חוק החילוף).

דוגמה. ניקח שתי מטריצות: A שהיא 4×2 ו-B שהיא 3×4.יוצא ש-AB מוגדר אך BA לא מוגדר.

דוגמה 5. נראה שנקבל שתי תוצאות שונות אם הופכים את הסדר בפעולת הכפל בין שתי מטריצות:

- $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

מסקנה 6. חזקות של מטריצות (ריבועיות):

נגדיר את $A^0=I$ ואת $A^n=A^{n-1}\cdot A$.

נבחן מהו $(A+B)^2$:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$$

מסקנה 7. אין מחלקי '0'. כלומר, אם $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

דוגמה 8. ניקח שתי מטריצות שהתוצאה שלהן היא מטריצת האפס ונכפיל את מטריצת האפס באחת מהן:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

אי אפשר לצמצם את המטריצה משני הצדדים.

משפט 9. יהא $\mathbb{F}$ שדה ויהיו:

- $m,n,l,p \in \mathbb{N}$
- $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- $B,D \in M_{n\times l}(\mathbb{F})$
- $C \in M_{l\times p}(\mathbb{F})$
- $\alpha \in \mathbb{F}$

מתקיים:

1. $(AB)C = A(BC)$ - אסוציאטיביות
2. $A(B+D) = AB+AD$ - דיסטריבוטיביות 1
3. $(D+B)C = DC+BC$ - דיסטריבוטיביות 2
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. $AI_n = A$ (I_n הוא מטריצת היחידה של מטריצה מסדר n)
6. $I_m \cdot A = A$ (I_m הוא מטריצת היחידה של מטריצה מסדר m)
7. $A \cdot 0_{n\times r} = 0_{n\times r}$
8. $0_{n\times r} \cdot A = 0_{n\times r}$
9. $(AB)^t = B^tA^t$

הוכחה. נוכיח את מספר 9 - $(AB)^t = B^tA^t$:

- נתון ש- $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
- נתון ש- $B \in M_{n\times l}(\mathbb{F})$
  - כלומר, AB יהיה מסדר $m \times l$
  - לכן, $(AB)^t$ יהיה מסדר $l \times m$.
- B^t יהיה מסדר $l \times n$
- A^t יהיה מסדר $n \times m$
  - B^tA^t יהיה מסדר $l \times m$
- האיבר $\left((AB)^t\right)_{ij} = (AB)_{ji}$, כי $(AB)^t$ היא המטריצה המשוחלפת של AB

- $(AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki}$ לפי הגדרת כפל מטריצות שהבאנו למעלה.
- נבחן את הביטוי $(B^t A^t)$:

$$\begin{aligned}(B^t A^t) &= \sum_{k=1}^{n} (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki}\end{aligned}$$

- הסבר: $(B^t)_{ik} = b_{ki}$ וגם $(A^t)_{kj} = a_{jk}$
- השוויון $b_{ki} \cdot a_{jk} = a_{jk} \cdot b_{ki}$ מתקיים כי נתון ש-$a, b \in \mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F}$ הוא שדה (כלומר מתקיים בו חוק החילוף).

■

נושא צדדי - הצבה של מטריצה בפולינום:

הגדרה 10. יהא $\mathbb{F}$ שדה, $n \in \mathbb{N}$, $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ פולינום מסדר k מעל $\mathbb{F}$
הצבת המטריצה B בפולינום P מוגדרת להוית המטריצה $n \times n$ הבאה:

$$p(B) = \sum_{i=0}^{k} a_i B^i$$

דוגמה 11. $p(x) = x^2 + 2x + 1 \quad \Leftarrow \quad p(B) = B^2 + 2B + I$

נושא שלישי - מערכות משוואת ליניאריות:

דוגמה 12.

- $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ - מעל $\mathbb{R}$ הפיתרון הוא $x = y = \frac{1}{2}$
- $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 1 = 6 \end{cases}$ - מעל $\mathbb{R}$ אין פתרונות (מעל Z_5 יש)

- $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ - מעל $\mathbb{R}$ יש ∞ פתרונות.

הגדרה 13. יהא $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - (סה"כ n סימונים שרירותיים).

1. הביטוי $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ (או בקיצור $\sum\limits_{i=1}^{n}$) כאשר $a_i \in \mathbb{F}$ לכל i נקרא תבנית ליניארית ב$-x_1, x_2, \ldots, x_n$ מעל $\mathbb{F}$.
2. יהיו $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ ונסמן $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. פעולת ההצבה של c בתבנית הלינארית $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$ מוגדרת על ידי $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot c_i$
   (א) הערה - הסימון $\underline{c}$ מסמן וקטור c.
3. משוואה ליניארית ב-n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ מעל $\mathbb{F}$ היא הביטוי הפורמלי $b = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ כאשר $b \in \mathbb{F}$ נקרא המקדם החופשי של המשוואה.
4. אם $b = 0$ המשוואה הליניארית נקראת <u>הומוגנית</u>. אחרת (כלומר אם $b \neq 0$) זוהי משוואה אי-הומוגנית.
5. מערכת משוואות ליניארית היא קבוצה המכילה מספר של משוואות ליניאריות.
   (א) באופן פורמלי: (ל-m משוואות ב-n נעלמים)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

6. אם כל המשוואות במערכת הן הומוגניות (לכל i מתקיים ש-$b_i = 0$) אז המערכת נקראת הומוגנית. אחרת, היא אינה הומוגנית.
7. וקטור $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ נקרא פיתרון של משוואה ליניארית $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i = b$ אם הצבתו בתבנית הליניארית $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$ שווה ל-b. (כלומר, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot c_i = b$)
8. וקטור $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ נקרא פיתרון של מערכת משוואת ליניאריות אם הוא מהווה פיתרון של כל אחת מהמשוואות במערכת.

דוגמה 14. נתונה מערכת משוואות:

- $x + 2y + 5z = 4x$
- $x - 2y + z = 0$

- נציב את $(1,1,1)$ - כלומר $x=1,y=1,z=1$. מערכת המשוואת לא עובדת ולכן הוא לא פיתרון.
- נציב את $(2,1,0)$. מערכת המשוואות עובדת.

דוגמה 15. אפשר לייצג מקדמים של משוואה במטריצה:
נתונה מערכת משוואות:

- $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$
  - במטריצה, המקדמים ייראו כך: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 \\ 1 & -1 & |0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} x+y=1 \\ -2y=-1 \end{cases}$
  - במטריצה, המקדמים ייראו כך: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 \\ 0 & -2 & |-1 \end{pmatrix}$

הגדרה 16. ישנן שלוש פעולות שורה בסיסיות (אלמנטריות):

1. החלפת שורה $R_i \leftrightarrow R_j$
2. כפל שורה בסקאלר $\alpha R_i \to R_j$
3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת $R_i + \alpha R_i \to R_i$

דוגמה 17. נתונה מערכת משוואת:

- $x_1+x_2+2x_3=6$
- $2x_1-x_2+x_3=3$
- $3x_1+2x_2-x_3=3$
- נייצג כמטריצות: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
- ונכתוב כמטריצה $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{cases} R_3-3R_1\to R_3 \\ R_2-2R_1\to R_2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & & -7 & -15 \end{array}\right] \overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right]$
- נמשיך: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right] \overset{R_3-3R_2\to R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array}\right] \begin{cases} -R_2\to R_2 \\ \frac{1}{18}R_3\to R_3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

- כלומר:
  - $x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$
  - $x_2 + 7x_3 = 15 \;\Rightarrow\; x_2 = 1$
  - $x_3 = 2$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 6 - יוסי

שם: איל שטיין | ת"ז: 208622142

November 13, 2022

נושא השיעור: הערה על כפל של מטריצות, מערכות משוואות

הערה על כפל מטריצות:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}\right)$$

כלומר, לכפול את המטריצה זה כמו לפתוח סוגריים בכל קומה.

אפשר גם לכתוב את זה בצורה אחרת:

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

נושא שני - מערכות משוואות ליניאריות:

הערה 1. בשיעור הקודם הגדרנו שלוש פעולות אלמנטריות:

1. החלפת שורה $R_i \leftrightarrow R_j$

2. כפל שורה בסקאלר $\alpha R_i \to R_j$
3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת $R_i + \alpha R_i \to R_i$

בשיעור שעבר התחלנו לדבר על מערכות משוואות מהצורה הבאה

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

אפשר לכתוב את המערכת בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

דוגמה 2. <u>דירוג מטריצות</u>:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{4} & 5 & 6 & 1 \\ \mathbf{7} & 8 & 9 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2-4R_1\to R_2 \quad R_3-7R_1\to R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & -2 & -6 & -3 \\ \mathbf{0} & -6 & -12 & -6 \end{array}\right] \overset{R_3-2R_2\to R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & -3 & -6 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & = \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

דירוג מטריצות נעשה על ידי פעולה על כל הצדדים של משוואה אחת או בין שתי משוואות.
בקורס הזה, המשתנה החופשי (שאפשר לבחור אותו) הוא המשתנה שבשורה שלו אין "איבר פותח" (שיש איבר שונה מ-0 בשורה שלו, לדוגמה במטריצה הימנית ביותר, בשורה התחתונה כל האיברים הם 0 ולכן אין שם איבר פותח)

במקרה הזה, $x_1 = -1 + x_3$ ו-$x_2 = 1 - 2x_3$

קיבלנו $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -1+t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$

דוגמה 3. $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{4} & 5 & 6 & 1 \\ \mathbf{7} & 8 & 9 & \cancel{1}2 \end{array}\right]$ נחליף מספר אחד במטריצה. הדירוג עדיין נעשה באותו אופן אבל מקבלים בסוף שאין פיתרון.

הגדרה 4. <u>דירוג מטריצות : (צורת מדרגות)</u>

1. כל שורות האפס (אם הן קיימות) נמצאות בתחתית.
2. האיבר הפותח (יש לו כמה שמות, לדוג' "מוביל ציר") בכל שורה שאיננה שורת אפס, נמצא מימין לאיבר הפותח בשורה שמעליו.
   - משתנה במקום של איבר פותח נקרא משתנה קשור (או "תלוי"). אחרת הוא נקרא חופשי.

הגדרה 5. <u>דירוג קנוני : (צורת מדרגות קנונית)</u>

1. צורת מדרגות
2. האיבר הפותח צריך להיות 1
3. כל יתר האיברים בעמודה של איבר פותח הם אפסים.

דוגמה 6. זו מטריצה שעדיין לא מדורגת קנונית : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ נהפוך אותה למטריצה מדורגת :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{cases} R_1 - 2R_3 \to R_1 \\ R_2 - 7R_3 \to R_2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_1 - R_2 \to R_1}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 1$,$x_2 = 1$,$x_3 = 2$.

אם מס' המשתנים הכללי פחות מספר המשתנים הקשורים שווה 0 אז יש פיתרון יחיד. (אם התשובה היא 1 אז יש אינסוף פתרונות)

דוגמה 7. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 2 \end{array}\right]$

- נדרג את המטריצה :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 2 \end{array}\right] \begin{cases} R_2 - 5R_1 \to R_2 \\ R_3 - 9R_3 \to R_3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -1 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -7 \end{array}\right] \overset{R_3 - 2R_2 \to R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

– קיבלנו שאין פיתרון מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$.

* מעל $\mathbb{Z}_5$ יהיו 25 פתרונות כי יש ארבעה משתנים כלליים ויש שני משתנים קשורים, כלומר, יש שני חופשיים.

– נמשיך לדרג קנונית מעל Z_5 כדי לפתור:

–

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{cases} R_2 \to R_2\,(mod5) \\ \\ \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1-2R_2\to R_1}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

הערה. הערה: אם אני רוצה לעבור ל-Z_5 זה אפשרי, כל עוד לא חילקנו או הכפלנו בכפולות של 5 (כי המספר 5 הוא אפס בחשבון מודולו 5). במקרה שלנו הפחתנו $5R_1$ אבל זה בסדר כי אם כל הביטוי הזה שווה 0 אז הפחתנו 0, כלומר לא עשינו כלום.

– נמשיך לפתור את $\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ונקבל:

1. $x_1 = 3 - 4x_3 - 3x_4$
2. $x_2 = 4 - 2x_3 - 3x_4$

* נבחר את $x_3 = s$ ואת $x_4 = t$ ונקבל:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_i \in Z_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-4s-3t \\ 4-2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s,t \in Z_5 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3+s+2t \\ 4+3s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s,t \in Z_5 \right\}$$
$$= \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s,t \in Z_5 \right\}$$

משפט 8. קבוצת הפתרונים של מערכת משוואות אינה משתנה אם מבצעים כל אחת מהפעולות הבאות:

1. החלפת השורות של שתי משוואות $R_i \leftrightarrow R_j$
2. כפל שורה באיבר מהשדה שהוא שונה מאפס $\alpha R_i \to R_j$
3. הוספת כפולה של שורה ממשוואה אחת לשורה של משוואה אחרת $R_i + \alpha R_i \to R_i$

הוכחה. צריך להוכיח לבד את 1+2. נראה את 3.

- נסתכל על מערכת המשוואות הבאות:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = b_i\\ \dots\\ \dots\\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi}x_i = b_m\end{cases}$$

בלי הגבלת הכלליות נראה זאת עבור הכפלת המשוואה השנייה $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = b_2$ ב-$\alpha \in \mathbb{F}$ ואז נוסיף אותה למשוואה הראשונה.

- נשווה בין שתי מערכות המשוואות:
-

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = b_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = b_2\\ \dots\\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi}x_i = b_m\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} (a_{1i} + \alpha a_{2i}) = b_i + \alpha b_2\\ \dots\\ \dots\\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi}x_i = b_m\end{cases}$$

- יהא $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ פיתרון של המערכת הימנית (תיקרא מערכת 1). נראה שהוא פיתרון של המערכת השמאלית (תיקרא מערכת 2):
  - כיוון ש- $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ פתרון של מערכת מספר 1, בפרט מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_i = b_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_i = b_2$$

  - נכפול את המשוואה השנייה ב-α ונוסיף אותה לראשונה ונקבל (לפי הפעולות בשדה):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}c_i + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i}c_i\right) = b_1 + \alpha b_2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i\left(a_{1i} + \alpha a_{2i}\right) = b_1 + \alpha b_2$$

  - מכאן ש-$c_1, c_2, \dots, c_n$ פיתרון המשוואה הראשונה במערכת מספר 2, מצד שני הוא פיתרון גם ליתר המשוואות במערכת השנייה כי אלו גם משוואות של מערכת מספר 1.

- לכן, $c_1, c_2, \dots, c_n$ פותרים גם את מערכת מספר 2.

- הראנו שכל פיתרון של מערכת מספר 1 הוא פיתרון של מערכת מספר 2. (ההוכחה בכיוון ההפוך היא אותו הדבר, רק שמפחיתים בה שורה אחת משורה שניה במקום להוסיף)

■

הערות:

1. למטריצה לאחר דירוג קוראים מטריצת מדרגות
2. למטריצה לאחר דירוג קנוני קוראים מדורגת קנונית.

הגדרה 9. שתי מטריצות A ו- B נקראות שקולות שורה אם ניתן לקבל אחת מהשנייה על ידי ביצוע מספר סופי של פעולות אלמנטריות.

מסקנה 10. תהיינה שתי מטריצות בעלות סדר זהה. מטריצות אלה שקולות שורה אם ורק אם שתי המערכות המתאימות להן הן שקולות.

משפט 11. כל מטריצה מעל שדה היא שקולת שורות למטריצה קנונית יחידה. (נוכיח בשיעור הבא)

הגדרה 12. יהא $\mathbb{F}$ שדה. תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. מספר השורות השונות מ-0 במטריצה המדורגת המתקבלת מ- A על ידי פעולות שורה אלמנטריות נקרא ה"**דרגה**" של A ומסומן $rank\left(A\right)$ או $r\left(A\right)$.
הערות: דרגת המטריצה אינה תלויה באופן הדירוג או במטריצה המדורגת (שקולת שורה למטריצה קנונית יחידה). אפשר לבצע פעולות דומות על עמודות (כרגע לא רלוונטי).

משפט 13. תהא $A\underline{x}=\underline{b}$ מערכת של m משוואות ב-n נעלמים:

1. למערכת יש פיתרון יחיד אם ורק אם $r\left(A\right)=r\left(A|b\right)=n$ (כלומר הדרגה של A כולל הפתרונות לכל שורה, כלומר b)
2. אם מתקיים $r\left(A|b\right)>r\left(a\right)$ למערכת אין פיתרון
3. אם מתקיים $r\left(A|b\right)=r\left(a\right)<n$ אזי למערכת יש אינסוף פתרונות כאשר השדה אינסופי ומספר סופי גדול מ-1 כשהשדה סופי. ומספר דרגות החופש הוא $n-r\left(a\right)$.
   (א) אם $\mathbb{F}$ שדה סופי - מספר הפתרונות הוא $|\mathbb{F}|^{n-r(A)}$.

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | הרצאה 7 - יוסי

שם: איל שטיין

November 15, 2022

נושא השיעור: משפטי דירוג מטריצות

משפט 1. כל מטריצה מעל שדה היא שקולת שורות למטריצה מדורגת קנונית יחידה.

הוכחה. (בלי הוכחת יחידות)

- נסמן את המטריצה ב-A, כך ש $A=A_{m\times n}=(a_{ij})$
- נוכיח באינדוקציה על מספר העמודות שלה:
  - **בסיס:** $n=1$
    * $A=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$.
      · אם $A=0$ אז היא כבר מטריצה מדורגת.
      · אם $A\neq0$ אז נחליף שורות כך שבאיבר הראשון יהיה $a\neq0$ ואז מאפסים את מה שמתחתיו ומחלקים אותו ב-a.
  - **הנחה:** נניח שכל מטריצת בעלת $n-1$ עמודות היא שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית.
  - **צעד:** נוכיח שכל מטריצה בעלת n עמודות היא שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית:
    * אם בעמודה הראשונה של A יש רק אפסים אז $A=\begin{pmatrix}0&|&\\0&|&B\\\cdots&|&\\0&|&\end{pmatrix}$, כאשר המטריצה B מתחילה מהעמודה השנייה של A.
      · מכיוון של-B יש $n-1$ עמודות, לפי הנחת האינדוקציה היא שקולת שורה למטריצה קנונית.
    * אם העמודה הראשונה של A היא לא עמודה של אפסים, נוכל להחליף שורות כך שהאיבר $a_{11}\neq0$.
      · נכפול את האיבר הראשון (a_{11}) ב-$\frac{1}{a_{11}}$ ונאפס את כל האיברים מתחתיו.

- נקבל שהאיבר $a_{11}=1$, (שאר השורה לא מעניינת אותנו) ומתחתיו יש מטריצה עם $n-1$ עמודות שמסומנת ב$*$ (ולפי הנחת האינדוקציה יש לה קנונית ששקולה לה)

$$\begin{pmatrix} 1 & ' & ' & ' \\ 0 & * & * & * \\ \dots & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

- נעשה דירוג כלשהו שיעביר את כל האיזור עם הכוכביות ($\boxed{*}$) למטריצה קנונית (כאמור, דירוג כזה קיים לפי הנחת האינדוקציה כי למטריצה הזו יש $n-1$ עמודות)

$$\begin{pmatrix} 1 & ' & ' & ' \\ 0 & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \\ \dots & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \\ 0 & \boxed{*} & \boxed{*} & \boxed{*} \end{pmatrix} \overset{some\ derug\ to\ make\ all\ the\ stars\ canonit}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & ' & ' & ' \\ 0 & \overline{*} & \overline{*} & \overline{*} \\ \dots & \overline{*} & \overline{*} & \overline{*} \\ 0 & \overline{*} & \overline{*} & \overline{*} \end{pmatrix}$$

- קיבלנו מטריצה קנונית באזור שמסומן רק ב- $\overline{*}$.
- באמצעות המטריצה שמורכבת רק מ- $\overline{*}$ נאפס את כל האיברים בשורה הראשונה מעל האיבר הפותח שלה. נקבל מטריצה קנונית (נסמנה D):

$$\begin{pmatrix} 1 & ' & ' & ' \\ 0 & \overline{*} & \overline{*} & \overline{*} \\ \dots & \overline{*} & \overline{*} & \overline{*} \\ 0 & \overline{*} & \overline{*} & \overline{*} \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

■

<u>שלוש הערות בשביל המשפט הבא:</u>

הערה 2. הסימון $|A|$ פירושו מספר האיברים בקבוצה A.

הערה 3. לפעמים מסמנים את הביטוי $r\left(A/b\right)$ ב-$r\left(A^*\right)$.

הערה 4. הביטוי $r\left(A|b\right)$ פירושו הדרגה של A כולל הפתרונות לכל שורה (כלומר כולל b).

משפט 5. תהא $A\underline{x}=\underline{b}$ מערכת של m משוואות ב-n נעלמים:

1. למערכת יש פיתרון יחיד אם ורק אם $r\left(A\right)=r\left(A|b\right)=n$
2. אם מתקיים $r\left(A|b\right)>r\left(A\right)$ אז למערכת אין פיתרון
3. אם מתקיים $r\left(A|b\right)=r\left(A\right)<n$ אזי למערכת יש אינסוף פתרונות כאשר השדה אינסופי ומספר סופי גדול מ-1 כשהשדה סופי (כלומר, $|\mathbb{F}|^{n-r(A)}$ כאשר $\mathbb{F}$ סופי).
ומספר דרגות החופש הוא $n-r\left(A\right)$.

הבהרה: אם $\mathbb{F}$ שדה סופי אז מספר הפתרונות הוא $|\mathbb{F}|^{n-r(A)}$.

הוכחה.

- נסמן $A^*=(A/b)$.
- נסמן $C^*=(c/d)$ היא המטריצה הקנונית השקולה של המטריצה המורחבת A/b
- <u>מקרה ראשון:</u> אם $r(A)\neq r(A^*)$
  - נקבל מצב כזה: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right]$ ובמקרה כזה אין פיתרון.
    * $r(A)<r(A^*)$ בגלל שA מוכלת בA^* (לפי הערה 4: הביטוי $r(A|b)$ פירושו הדרגה של A כולל הפתרונות לכל שורה)

- <u>מקרה שני:</u> אם $r(A)=r(A^*)$
  - נקבל מצב כזה: $C^*=\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & 0 & * & * & * & * & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & d_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & d_3 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
    * נסמן את הנעלמים ב-$x_{i1},x_{i2},\dots,x_{ir}$ ואת מספר המשתנים הקשורים ב-r.
    * נסמן בx_j את האיברים החופשיים שאינם מתאימים לאיבר מוביל.
      - מערכת המשוואות המתקבלת עבור C^* היא:

$$x_{i1}+\sum x_j=d_1$$

$$x_{i2}+\sum x_j=d_2$$

$$x_{i3}+\sum x_j=d_3$$

$$\dots$$

$$x_{ir}+\sum x_j=d_r$$

      - נעביר אגפים בכל אחת מהמשוואות הללו ונקבל: $x_{i1}=d_1-\sum x_j$ ... עד $x_{ir}=d_r-\sum x_j$
      - ועכשיו נוכל לבחור שרירותית את כל הx_j-ים כי הם איברים חופשיים שלא מתאימים לאיבר מוביל ואז ה$x_{i1},x_{i2},\dots,x_{ir}$ ייקבעו מתוכם.

- מספר דרגות החופש שלנו = $n-r$.
  - לכן, מקרה שלישי: $r\left(a\right)=n$
    * נקבל שיש 0 דרגות חופש ולמעשה יש פיתרון יחיד.

■

דוגמה 6. נניח שדירגנו מטריצה וקיבלנו: $A=\left[\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & 2 & 3 & 1\\ 0 & \mathbf{4} & 9 & 2\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3\end{array}\right]$

- $r\left(A\right)=3$ = מספר השורות השונות מאפס אחרי הדירוג = מספר המשתנים הקשורים.
- $r\left(A/b\right)=3$
- לפי המשפט, מכיוון ש$r\left(A/b\right)=r\left(A\right)$ למערכת יהיה פיתרון יחיד.

דוגמה 7. נניח שדירגנו מטריצה וקיבלנו: $\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9\\ 0 & 4 & 9 & -1 & 11 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17\end{array}\right]$

- $r\left(A\right)=2$
- $r\left(A/b\right)=3$
- מתקיים ש$r\left(A\right)<r\left(A/b\right)$ ולכן לפי המשפט למערכת אין פיתרון.

- הערת אגב: אם ניקח את אותה המטריצה ב-Z_{17} (שבה 17 הוא אפס) נקבל ש- $r\left(A\right)=2$ וגם $r\left(A/b\right)=2$. ואז יוצא שמספר המשתנים התלויים (מספר העמודות) הוא 5.
  - כלומר, $r\left(A\right)=r\left(A/b\right)<5=n$ ומכיוון שמדובר בשדה סופי, כמות הפתרונות תהיה $\left|Z_{17}\right|=17^{3}$.

דוגמה 8. עבור אלו ערכים של λ יש למערכת הזו $\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right]$ מעל $\mathbb{R}$:

(1) פיתרון יחיד?

(2) אינסוף פתרונות?

(3) אין פיתרון?

תשובה:

- דבר ראשון נדרג את המטריצה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right] \overset{Swap\, R_1, R_2}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right] \overset{\begin{cases} R_2 - \lambda R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \end{cases}}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right] \overset{Swap\, R_2, R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \boldsymbol{1-\lambda} & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \boldsymbol{1-\lambda} & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{array}\right]$$

- מכיוון ש-λ יכול להיות שווה 1, יוצא ש$1-\lambda$ יכול להיות שווה אפס או לא שווה אפס.
  - נבנה טבלאות של מה קורה אם $1-\lambda=0$ ומה קורה אם $1-\lambda\neq 0$ כדי למצוא עבור אילו ערכים של λ יש למערכת פיתרון (מומלץ לדרג לאט):
  - הטבלאות יצאו כך:

אם $1-\lambda=0$
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
יש אינסוף פתרונות מכיוון ש$r(A)=1$ ויש 3 משתנים. לכן יש 2 דרגות חופש

אם $1-\lambda\neq 0$
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \boldsymbol{1-\lambda} & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{array}\right] \overset{\begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}\cdot R_2 \to R_2 \\ \cdot\frac{1}{1-\lambda} R_3 \to R_3 \end{cases}}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1 \end{array}\right]$
$= \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{R_3-(1+\lambda)\cdot R_2 \to R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right]$
נעשה שוב טבלה, כי שוב הגענו לצומת - האם $\lambda+2=0$ או לא:

אם $\lambda+2\neq 0$	**אם** $\lambda+2=0$
$r(A)=r(A^*)=3$	$r(A)<r(A^*)=3$
יוצא שיש פיתרון יחיד	יוצא שאין פיתרון

- ננתח את מה שקיבלנו:
  - אם $\lambda=1$ אז יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש.
  - אם $\lambda\neq 1$ וגם $\lambda=-2$ אז אין פיתרון.
  - אם $\lambda\neq 1$ וגם $\lambda\neq 2$ אז יש פיתרון יחיד.

הערה. אם היו מבקשים מאיתנו בסוף הדירוג לעשות את אותו התרגיל על שדה אחר, לדוגמא Z_5, צריך לעבור על השלבים של הדירוג ולראות שלא חילקנו או הכפלנו ב-5 (שהוא אפס).

תרגיל 9. יהא $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית.
יתקיים $r(A) = n$ אם ורק אם A שקולת שורה ל-I_n (שהיא מטריצת היחידה מגודל $n \times n$)
לפתור לבד.

הגדרה 10. מערכת הומוגנית - $A\underline{x} = \underline{0}$.

טענה 11. אם $\underline{x_1}, \underline{x_2}$ פותרים את המערכת אזי גם $\underline{x_1} + \underline{x_2}$ פותרים אותה.

טענה 12. אם $\underline{x_0}$ פותר את המערכת ההומוגנית אזי כך גם $\underline{\lambda_0}$ פותר אותה עבור $\lambda \in \mathbb{F}$

מסקנה 13. אם $\underline{x_1}, \underline{x_2}$ פותרים את המערכת ההומוגנית אזי גם הביטוי $\lambda_1 \cdot \underline{x_1} + \lambda_2 \cdot \underline{x_2}$ פותר את המערכת עבור $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$

דוגמה 14. נניח שדירגנו מטריצה כך: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

- במערכת הומוגנית, $\underline{x_0}$ תמיד פותר את המערכת.
  - ובמערכת הזו:
    - $x_1 = x_3$
    - $x_2 = -2x_3$
      - נסמן $x_3 = t$ ומתקיים:

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\} \underbrace{=}_{x_3=t} \left\{\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{F}\right\} = \left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{F}\right\}$$

  - צורת הכתיבה $\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{F}\right\}$ אומרת שבהכרח יש פיתרון.

הוכחה. של טענה 11.

- אם $\underline{x_1}, \underline{x_2}$ פותרים את המערכת $A\underline{x} = 0$ ונראה ש$\underline{x_1} + \underline{x_2}$ פותרים אותה:

$$A\left(\underline{x_1} + \underline{x_2}\right) = A\underline{x_1} + A\underline{x_2}$$

- מכיוון שגם $\underline{x_1}, \underline{x_2}$ פותרים את המערכת $A\underline{x} = 0$ מתקיים $A\underline{x_1} = \underline{0}$ וגם $A\underline{x_2} = \underline{0}$ ולכן:

$$A\underline{x_1} + A\underline{x_2} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

■

הוכחה. של טענה 12.

- נניח ש-$\underline{x_0}$ את המערכת $a\underline{x} = 0$. אזי לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$A\left(\lambda \underline{x_0}\right) = \lambda \cdot A\left(\underline{x_0}\right) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

■

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 8 - יוסי

שם: איל שטיין

November 20, 2022

נושא השיעור: מערכות משוואות ליניאריות, מערכות הומוגניות ומערכות לא הומוגניות, מטריצות אלמנטריות

בשיעור הבא נלמד על מרחבים וקטוריים.

מערכות משוואות ליניאריות:

שני משפטים להשלמה משיעור קודם:

משפט 1. יהא $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A\in M_{m\times n}^{\mathbb{F}}$ מטריצה ריבועית.
$r\left(A\right)=n$ אם ורק אם A שקולת שורות ל-I_{n} (מטריצת היחידה מגודל $n\times n$)

משפט 2. יהא $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A\in M_{n\times n}^{\left(\mathbb{F}\right)}$. אזי $r\left(A\right)=n$ אם ורק אם לכל $\underline{b}$ יש פיתרון יחיד ל- $A\underline{x}=\underline{b}$

הוכחה.

- כיוון ראשון $\Leftarrow$: אם קיים b כך שלמערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ אין פיתרון אז $r\left(A\right)<n$.
  - אם $r\left(A\right)=n$ אז גם $r\left(A^{*}\right)=n$
    - מתקיים ש$r\left(A\right)=r\left(A^{*}\right)$.
      - לכן,
  - על פי המשפט (אודות הדרגה והקשר לפתרונים) נקבל שיש פיתרון יחיד.
- כיוון שני $\Rightarrow$: אם $r\left(A\right)<n$ אז קיים b כך שלמערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ אין פיתרון.
  - נניח בשלילה ש $r\left(A\right)<n$.
    - נדרג את A ונקבל במטריצה המדורגת קנונית $\widetilde{A}$ עם לפחות שורת אפסים אחת (לפי הגדרת "דרגה").
      - נוסיף ל-$\widetilde{A}$ עמודת פתרונות (נסמנה b) שכולה אפסים חוץ מהאיבר האחרון (כלומר למערכת הזו אין פתרון):

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}\ldots & \ldots & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & 1\end{array}\right]$$

- נעשה דירוג בכיוון ההפוך על $\widetilde{A}$ כדי להגיע ל-A ונקבל $\left[\begin{array}{c|c} A & \tilde{b} \end{array}\right]$, כאשר $\tilde{b}$ היא עמודת פתרונות כלשהי.
- אין פיתרון עבור עמודת הפתרונות $\tilde{b}$ כי היא התקבלה מדירוג של מטריצה שאין לה פיתרון.
- השלילה אומרת שאם $r(A) \neq n$ אז לא לכל $\underline{b}$ יש פיתרון יחיד. הראנו שקיים b כלשהו שאין לו פיתרון.

■

נושא שני: הקשר בין מערכת הומוגנית אי-הומוגנית.

משפט 3.

1. יהא $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ פותרים את המערכת ההומוגנית $A\underline{x} = 0$ אזי גם $\underline{x}_1 + \underline{x}_2$ פותר אותה.
2. אם $\underline{x_0}$ פותר את המערכת ההומוגנית $A\underline{x} = 0$ אז גם $\lambda\underline{x_0}$ פותר אותה לכל $\lambda \in \mathbb{F}$.

מסקנה 4. אם $\underline{x_1}, \underline{x_2}$ פותרים את המערכת ההומוגנית אזי גם $\lambda\underline{x_1} + \lambda\underline{x_2}$

טענה 5. אם $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ פותרים את המערכת האי הומוגנית $A\underline{x} = b$ אז ההפרש שלהם פותר את ההומוגנית.

הוכחה.

- נניח כי $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ פותרים את המערכת האי-הומוגנית $A\underline{x} = b$.
- נוכיח ש$\underline{x}_1 - \underline{x}_2$ פותר את המערכת ההומוגנית $A\underline{x} = 0$:

$$A(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = A\underline{x}_2 - A\underline{x}_1 = \underline{b} - \underline{b} = 0$$

■

דוגמה 6.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 10 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 11 \end{array}\right]$$

- נדרג את המטריצה ונקבל:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- נפתור את המערכת:

$$x_4 = t$$

$$x_2 = -1 - 2 \cdot s - 3t$$

$$x_1 = 7 + s + 2t$$

$$x_3 = s$$

- נקבל את <u>הפיתרון הכללי</u> (אוסף כל הפתרונות שיש למערכת) של המערכת האי-הומוגנית:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7 + s + 2t \\ 1 - 2 \cdot s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- נפתור כעת את המערכת ההומוגנית ונקבל את הפיתרון הכללי שלה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} s + 2t \\ -2 \cdot s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- כלומר, המשפט בעצם אומר שהפתרון הכללי של האי הומוגנית (נסמנו $\underline{X}_c$) שווה לפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית ($\underline{X}_h$) פחות פיתרון פרטי של המערכת האי-הומוגנית ($\underline{X}_p$):

$$\underline{X}_c = \underline{X}_h - \underline{X}_p$$

  – מהדוגמה שלנו יוצא:

•

$$\begin{pmatrix}7\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}-\underline{X}_p$$

טענה 7. תהא $A\underline{x}=0$ מערכת הומוגנית ומערכת $A\underline{x}=b$ מערכת אי הומוגנית תואמת.
נסמן ב-$\underline{X}_h$ את אוסף כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית (=הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית)
נסמן ב$\underline{X}_c$ את אוסף כל הפתרונות של המערכת האי-הומוגנית
נסמן ב-$\underline{X}_p$ פיתרון פרטי של המערכת האי-הומוגנית.
צ"ל: $\underline{X}_c=\underline{X}_h-\underline{X}_p$ במידה ול-$A\underline{x}=b$ יש פיתרון.

הוכחה.

- רעיון ההוכחה:
  - בכיוון הראשון: נקבע $\underline{x}_0$ פתרון פרטי של המערכת האי הומוגנית ונראה ש- $h+\underline{x}_0$ פותר את המערכת האי הומוגנית לכל $h\in\underline{x}_h$
  - בכיוון השני: נראה שכל y_0 שהוא פיתרון של המערכת האי-הומוגנית ניתן לכתיבה בצורה $y_0=\underline{h}+\underline{x}_0$
- כיוון ראשון:
  - $h+\underline{x}_0$ פותר את המערכת האי-הומוגנית כי

$$A\left(h+\underline{x}_0\right)=\underbrace{Ah}_{=0}+\underbrace{A\underline{x}_0}_{=b}=0+b$$

- כיוון שני:
  - נבחר את h להיות y_0-x_0 ונקבל: $y_0=\underline{h}+\underline{x}_0=y_0$.
  - מכיוון שהפרש של שני פתרונות של המערכת האי-הומוגנית פותר את המערכת ההומוגנית, אפשר לייצג כל פיתרון של המערכת האי-הומוגנית מהצורה $y_0=\underline{b}+\underline{x}_0$

■

תרגיל 8. תהא A מטריצה ממשית מסדר 3×4.
נתון:

- $r\left(A\right)=3$
- וקטורים הבאים הם פתרונות פרטיים של $A\underline{x}=b$:

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}$$

צ"ל: מצאו את הפתרון הכללי של המערכת האי-הומוגנית.

פיתרון:

- אנחנו יודעים שההפרש של u ושל v יהיה פיתרון פרטי שיפתור את המערכת ההומוגנית:

$$\underline{u}-\underline{v}=\begin{pmatrix}2\\5\\4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\6\end{pmatrix}$$

- דרגות חופש =1= $4-r\left(A\right)$.
- מכיוון שיש רק דרגת חופש אחת, כל סקלאר כפול הפיתרון הפרטי גם הוא יהיה פיתרון של המערכת ההומוגנית.
  – כלומר, הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית יהיה:

$$t\begin{pmatrix}1\\2\\1\\6\end{pmatrix}$$

  – ולכן הפיתרון הכללי של המערכת האי-הומוגנית יהיה הפתרון של ההומוגנית ועוד פתרון פרטי:

$$t\begin{pmatrix}1\\2\\1\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}$$

נושא שלישי: מטריצות אלמנטריות.

הגדרה 9.

דוגמה 10. דוגמא עובר פעולות על שורות של מטריצה:

מקרה ראשון: נניח שניקח מטריצת יחידה מסדר 3×3 ונחליף לה שורה אחת:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \overset{Swap\, R_1,\, R_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- נכפול את המטריצה הזו במטריצה אחרת:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}$$

- ראינו שגם במטריצה שבחרנו התחלפה השורה.

מקרה שני:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \overset{2\cdot R_2 \to R_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\8&10&12\\7&8&9\end{pmatrix}$$

- ראינו שהשורה השנייה הוכפלה ב-2.

מקרה שלישי:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \overset{R_3 - 2R_2 \to R_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\8&10&12\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

דוגמה 11. דוגמא שמראה מה קורה אם משנים את העמודות של המטריצה.

- ניקח מטריצת יחידה מסדר 3×3 ונחליף את שתי העמודות השמאליות שלה:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&6\\8&7&9\end{pmatrix}$$

- כלומר, קיבלנו חילוף עמודות באותה צורה כמו שהחלפנו את העמודות במטריצת היחידה.
- הערה: אותו דבר יקרה אם נעשה כפל של עמודה בסקלאר.

משפט 12. תהא A מטריצה $A\in M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$ ותהא θ פעולה אלמנטרית על שורות A המסומנת $\theta\left(A\right)$.
אזי: $\theta\left(A\right)=\theta\left(I_n\right)\cdot A$

הערה 13. המטריצה $\theta\left(A\right)$ נקראת **מטריצה אלמנטרית.**

משפט 14. אם α פעולה אלמנטרית על עמודות המטריצה, אזי יתקיים $\theta\left(A\right)=A\cdot\theta\left(I_m\right)$

הוכחה. נוכיח את הטענה עבור פעולה אלמנטרית על השורות, כאשר הפעולה האלמנטרית היא פעולת כפל בסלקאר של שורה והוספתה לשורה אחרת.

- תהא α פעולה: $R_i+\beta\cdot R_j\to R_i$
  - כלומר,

$$\theta\left(A\right)=\begin{pmatrix}a_{11}\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&a_{in}\\a_{i1}+\beta\cdot a_{j1}&\ldots&\ldots&\ldots&a_{in}+\beta\cdot a_{jn}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&\ldots&\ldots&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\theta\left(I_m\right)\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\beta&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\ldots&\ldots&\ldots&a_{1n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{21}&\ldots&\ldots&\ldots&a_{in}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&a_{jn}\\a_{m1}&\ldots&\ldots&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{i1}+\beta a_{ji}&\ldots&\ldots&\ldots&a_{in}+\beta\cdot a_{jn}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&\ldots&\ldots&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

■

מסקנה 15. A ו-B יהיו שקולות שורה אם ורק אם קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,E_2,\ldots,E_k$ כך ש- $B=E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_k\cdot A$

בשיעור הבא נלמד על מרחבים וקטוריים.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 9 - יוסי

שם: איל שטיין

November 27, 2022

נושא השיעור: מרחבים וקטוריים - הגדרת מרחבים וקטוריים, תכונות של מרחבים וקטוריים, תת מרחב וקטורי

נושא ראשון - הגדרת מרחב וקטורי.

- חזרה קצרה על שדות: שדה מורכב משתי חבורות - חבורה קומוטטיבית לחיבור וחבורה קומוטטיבית לכפל.
- כדי ליצור מרחב וקטורי נצרף לשדה כלשהו חבורה נוספת (שהיא חבורה קומוטטיבית לגבי חיבור, עם פעולת חיבור שונה).
  - כלומר, ניקח שדה $\mathbb{F}$ עם פעולות + ו-·.
  - נצרף אליה חבורה V קומוטטיבית לחיבור ($\oplus$).

הגדרה 1. מרחבים וקטוריים:

- יהא $\mathbb{F}$ שדה עם הפעולות $+$ ו- $*$
- תהא V חבורה קומוטטיבית עם הפעולה $\oplus$.
- נאמר ש-V הוא **מרחב וקטורי** מעל $\mathbb{F}$ אם קיימת פעולת כפל $(\cdot)$ שתיקרא כפל בסקלאר בין איברי $\mathbb{F}$ ובין איברי V המקיימת:
  1. סגירות - לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ ולכל $\underline{v}\in V$ מתקיים $\lambda\cdot\underline{v}\in V$.
  2. אסוציאטיביות - לכל $\underline{v}\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha\cdot\beta)\cdot\underline{v}=\alpha\cdot(\beta\cdot\underline{v})$.
  3. זהות - בעבור $1\in\mathbb{F}$ (האדיש הכפלי בשדה) מתקיים $1\cdot\underline{v}=\underline{v}$ לכל $\underline{v}\in V$.
  4. דיסטריבוטיביות 1 - לכל $\underline{u},\underline{v},\in V$ וכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים $\lambda\cdot(\underline{v}\oplus\underline{u})=\lambda\cdot\underline{v}\oplus\lambda\cdot\underline{u}$
  5. דיסטריבוטיביות 2 - לכל $\underline{v}\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha+\beta)\,\underline{v}=\alpha\underline{v}\oplus\beta\underline{v}$

דוגמה 2.

- נגדיר:
  - $\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\ \mid\ a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$

- חיבור ב-$\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$ (אמורים לכתוב את פעולת החיבור כך: $\oplus$, אבל לשם הפשטות נכתוב +)

- נראה ש$\mathbb{R}^2$ היא חבורה קומוטטיבית לחיבור:
  - <u>סגירות</u> - לכל $\underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $\underline{a}+\underline{b} \in \mathbb{R}^2$
  - <u>אסוציאטיביות</u> - לכל $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c} = \underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$
  - <u>אדיש לחיבור</u> - $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
  - <u>קיום נגדי</u> - עבור $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ הנגדי הוא $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$
  - <u>קומוטטיביות</u> - $\underline{a}+\underline{b} = \underline{b}+\underline{a}$

- ניקח $\alpha \in \mathbb{R}$ ו-$\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ ונגדיר $\alpha \cdot \underline{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. נראה שחמשת התנאים לקיום מרחב וקטורי מתקיימים לכפל:
  - <u>סגירות</u> - $\alpha \cdot \underline{a} \in \mathbb{R}^2$ לכל $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$
  - <u>אסוציאטיביות</u> - $\alpha \cdot \beta \cdot \underline{a}$ לכל $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ ו- $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
  - <u>אביר אדיש כפלי</u> - האיבר $1 \in \mathbb{R}$ מקיים $1 \cdot \underline{a} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \underline{a}$
  - <u>דיסטריבוטיביות 1</u> - $\alpha \cdot (\underline{a}+\underline{b}) = \alpha \cdot \underline{a} + \alpha\underline{b}$ לכל $\underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$
  - <u>דיסטריבוטיביות 2</u> - $(\alpha+\beta) \cdot \underline{a} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{a}$ לכל $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ ולכל $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

- המסקנה היא ש-$\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
  - באופן דומה, ניתן להראות שכל $\mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
    - * פעולת החיבור ופעולת כפל בסקלאר יהיו דומות לאלו של $\mathbb{R}^2$.

מסקנה 3. מכיוון שהראנו ש-$\mathbb{R}^n$ הוא מרחב וקטורי, אפשר להראות באותה הדרך ש-$\mathbb{F}^n$ גם הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F}$ הוא שדה כלשהו.

הערה 4. אי אפשר להגדיר את המרחב הווקטורי$\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{C}$ כי לא תתקיים סגירות. (לדוגמא, $i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}$)

הערה 5. מותר לקחת את $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{R}$ כי עדיין תתקיים סגירות (כי $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

דוגמה 6. $M^{(\mathbb{F})}_{m\times n}$ - אוסף המטריצות מסדר $m \times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$ כלשהו. עם חיבור מטריצות וכפל של סקלאר במטריצה.

- האוסף הזה הוא מרחב וקטורי.
  - לדוגמא: אם $M^{(\mathbb{R})}_{2\times 3}$ נקבל $\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$ והוא יהיה מרחב וקטורי

דוגמה 7. $\mathbb{F}_n^{[x]}$ הוא אוסף הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n. עם חיבור פולינומים וכפל סקלאר בפולינום מעל $\mathbb{F}$. האוסף הזה הוא מרחב וקטורי.

- כלומר, $\left\{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{F}\right\}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
  – לדוגמא, $\mathbb{R}_2^{[x]}$ - אוסף כל הפולינומים ממעלה שקטנה או שווה ל-2 יהיה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

דוגמה 8. $\mathbb{F}^{[x]}$ - אוסף כל הפולינומים מעל שדה $\mathbb{F}$. עם פעולת חיבור פולינומים ופעולת כפל סקלאר שייך ל-$\mathbb{F}$ בפולינום. האוסף הזה הוא מרחב וקטורי.

דוגמה 9. אוסף כל הפונקציות $f\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ עם חיבור פונקציות וכפל סקלאר בפונקציה מעל $\mathbb{F}$. האוסף הזה יהיה מרחב וקטורי.

- לדוגמא, $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

נושא שני - תכונות של מרחבים וקטוריים

משפט 10. יהי מרחב וקטור V מעל שדה $\mathbb{F}$.
אזי:

1. אם $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ לכל $\underline{w}, \underline{v}, \underline{u} \in V$ אז $\underline{v} = \underline{w}$
2. קיים איבר אדיש יחיד ב-V וגם לכל איבר $\underline{v} \in V$ קיים נגדי $(-\underline{v})$ יחיד.
3. אם $0 \in \mathbb{F}$ אז $0 \cdot \underline{v} = 0$
4. אם $\underline{0} \in V$ אז לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$
5. אם $\alpha\underline{v} = 0$ אז או ש$\alpha = 0$ או ש$\underline{v} = 0$
6. $-\alpha\underline{v} = -(\alpha\underline{v}) = \alpha(-\underline{v})$

הוכחה.

1. נניח ש $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$.
   (א) נוסיף $-\underline{u}$ לשני האגפים ונקבל:

$$\underline{u} + \underline{v} + (-\underline{u}) = \underline{u} + \underline{w} + (-\underline{u})$$

$$\underbrace{(\underline{u} + (-\underline{u}))}_{=0} + \underline{v} = \underbrace{(\underline{u} + (-\underline{u}))}_{=0} + \underline{w}$$

$$\underline{v} = \underline{w}$$

2. יש איבר אדיש יחיד - נסמן שיש שני איברים אדישים (נסמן $\underline{0}_1, \underline{0}_2$) ונראה שהם שווים.

(א) כדי להראות שיש נגדי יחיד נעשה אותו דבר ונסמן (נסמן $-\underline{a}_1, -\underline{a}_2$) ונראה שהם שווים.

3. נניח ש- $0 \in \mathbb{F}$. ונבחן את הביטוי $0 \cdot \underline{v}$:

$$0 \cdot \underline{v} = (0+0)\, \underline{v}$$

$$= 0\underline{v} + 0\underline{v}$$
$$= \underline{0}$$

4. נתון ש- $\underline{0} \in v$.

(א) נתחיל מהביטוי $\alpha \cdot \underline{0}$:

$$\alpha \cdot \underline{0} = \alpha\,(\underline{0} + \underline{0})$$

$$= \alpha \cdot \underline{0} + \alpha \cdot \underline{0}$$

$$\alpha \cdot \underline{0} = \alpha \cdot \underline{0} + \alpha \cdot \underline{0} \ \backslash + (-\alpha \cdot \underline{0})$$

$$\underline{0} = \alpha \cdot \underline{0}$$

5. נתון $\alpha \underline{v} = 0$.

(א) אם $\alpha \neq$, נכפול ב-α^{-1} ונקבל:

$$\underline{v} = \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$$

(ב) אם $\alpha = 0$ סיימנו.

6.

(א) נתחיל בביטוי $\alpha\underline{v}+(-\alpha\underline{v})$:

$$\begin{aligned}\alpha\underline{v}+(-\alpha\underline{v}) &= (\alpha+(-\alpha))\,\underline{v}\\ &= 0\cdot\underline{v}\\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

$$\alpha\underline{v}+(-\alpha\underline{v})=\underline{0}$$

(ב) נתחיל בביטוי $\alpha\underline{v}+\alpha\,(-\underline{v})$:

$$\begin{aligned}\alpha\underline{v}+\alpha\,(-\underline{v}) &= \alpha\,(\underline{v}+(-\underline{v}))\\ &= \alpha\,(\underline{0})\\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

$$\alpha\underline{v}+\alpha\,(-\underline{v})=\underline{0}$$

(ג) כלומר, קיבלנו ש:

$$\alpha\cdot(-\underline{v})=-\alpha\cdot\underline{v}=\alpha\cdot(-\underline{v})$$

■

נושא רביעי - תת מרחב וקטורי:

הקדמה - נניח שלקחנו קבוצה של וקטורים ולקחנו תת קבוצה מתוכה.
בקבוצה הקטנה רוב התנאים לקיום מרחב וקטורי מתקיימים ממילא, לדוגמא דיסטריבוטיביות.
מה שלא בהכרח נשמר היא:

1. סגירות (כי יכול להיות שנצא מהקבוצה על ידי חיבור או כפל בסקאלר)
2. קיום נגדי
3. קיום הופכי.

כלומר, נוכל לצמצם את הבדיקות שלנו כשנרצה לבדוק האם הקבוצה הקטנה היא תת מרחב כי רוב התנאים מתקבלים ב"ירושה" מקבוצת הווקטורים הראשית.

הגדרה 11. יהיה V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. W נקרא תת מרחב (ת"מ) של V אם $W \subseteq V$ וגם W מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לאותן הפעולות.

דוגמה 12. V הוא תת מרחב של V מעל $\mathbb{F}$

דוגמה 13. $\underline{0}$ הוא גם תת מרחב של V מעל $\mathbb{F}$.

דוגמה 14. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ הוא תת מרחב של $V = \mathbb{R}^3$

דוגמה 15. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ גם הוא תת מרחב של $V = \mathbb{R}^3$

דוגמה 16. $W = \mathbb{R}^2$ הוא תת מרחב של $V = \mathbb{R}^3$.

דוגמה 17. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$ היא לא תת מרחב של R^3 בגלל שלא תמיד מתקיימת סגירות כאשר מכפילים בסקלאר מ-$\mathbb{R}$.

דוגמה 18. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ היא לא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ כי W לא מכיל את וקטור האפס.

משפט 19. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא W תת קבוצה של V עם אותן הפעולות המוגדרות של V.

- W היא תת מרחב של V אם ורק אם:
  1. $W \neq \emptyset$
  2. W סגורה לחיבור: לכל $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ מתקיים $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$
  3. W סגורה ביחס לכפל בסקלאר: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $\underline{w} \in W$ מתקיים $\alpha \cdot \underline{w} \in W$

הוכחה.

- W היא תת מרחב של V $\underline{\Leftarrow}$
  - אם W תת מרחב של V אז W היא מרחב וקטורי בפני עצמה.
    * לכן W היא חבורה קומוטטיבית
    * היא מכילה את האדיש החיבורי לכן היא לא ריקה
    * היא מרחב וקטורי ולכן היא סגורה ביחס לחיבור
    * היא מרחב וקטורי ולכן היא סגורה ביחס לכפל בסקלאר.
- W היא תת מרחב של V $\underline{\Rightarrow}$
  - נבדוק שW חבורה קומוטטיבית ביחס לחיבור (של המרחב הוקטורי V):
    * סגירות - נתון שיש סגירות לחיבור וסגירות ביחס לכפל בסקלאר.
    * סגירות - נתון שמתקיים סגירות ביחס לכפל בסקלאר.

* קיום אדיש - מכיון שנתון שW לא ריקה, קיים איבר כלשהו שמקיים $\underline{w} \in W$.
  · מכיוון ש$0 \in \mathbb{F}$ ומכיוון שנתון שמתקיים סגירות ביחס לכפל בסקלאר נקבל ש $0 \cdot \underline{w} = \underline{0} \in W$
* קיום נגדי חיבורי - לכל $\underline{w} \in W$ מתקיים $(-1) \cdot \underline{w} = -\underline{w}$ בגלל סגירות לכפל בסקלאר.
* אסוציאטיביות וקומוטטיביות לחיבור מתקבלות בירושה.
* עבור כפל בסקלאר מתקבלות בירושה: אסוציאטיביות, אדיש לכפל, דיסטריבוטיביות ()

■

הערה 20. כדי לראות אם קבוצה היא תת מרחב וקטורי, נסתכל דבר ראשון אם היא מכילה את וקטור האפס. אם וקטור האפס לא נמצא אז זה לא מרחב וקטורי כי כל תת-מרחב הוא גם מרחב וקטורי.

הערה 21. לפעמים מוכיחים את הסגיורת של 1-2 בפעם אחת. כלומר מוכיחים $\lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2 \in W$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 10 - יוסי

שם: איל שטיין

November 27, 2022

נושא השיעור: תתי מרחב, צירוף ליניארי ופרישה, מבוא להרצאה הבאה (פעולות על מרחבים וקטוריים וסכום ישר)

נושא ראשון - המשך תתי מרחב:

משפט 1. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא W תת קבוצה של V עם אותן הפעולות המוגדרות של V.

- W היא תת מרחב של V אם ורק אם:
  1. $W \neq \emptyset$
  2. W סגורה לחיבור: לכל $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ מתקיים $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$
  3. W סגורה ביחס לכפל בסקלאר: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $\underline{w} \in W$ מתקיים $\alpha \cdot \underline{w} \in W$
- הוכחנו את המשפט הזה בהרצאה האחרונה (מספר 9).

נמשיך עם דוגמאות לתתי מרחב:

טענה 2. אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא תת מרחב:

- תהי W מערכת הומוגנית: $W = \{\underline{x} \in \mathbb{F} \mid A\underline{x} = 0\}$. נניח ש-$A_{m\times n}$.
  - אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית מהווה תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה. ■

- $\underline{0} \in W$ תמיד כי $A\underline{0} = \underline{0}$
- ניקח $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ ונראה כי:
  * $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$, אבל $A(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = A\underline{w}_1 + A\underline{w}_2 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$
- ניקח $\lambda \in \mathbb{F}$ ו- $\underline{w} \in W$.
  * נראה כי $\lambda \cdot \underline{w} \in W$ אבל $A(\lambda\underline{w}) = \lambda\left(\overbrace{A\underline{w}}^{=\underline{0}}\right) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$

הערה 3. אוסף הפתרונות של מערכת אי הומוגנית (מהסוג $A\underline{x}=b$) הוא לא מרחב וקטורי (אחת הסיבות היא כי וקטור האפס לא נמצא)

דוגמה 4. $V=\mathbb{R}^{x}[x]$ - כלומר V שייך לאוסף כל הפולינומים ממעלה שלישית.

- מקרה ראשון: $W=\{p(x)\in V \mid p(1)=0\}$
  - פולינום האפס (סומן בשיעור כ-0_p) שייך לקבוצה.
  - ניקח $p(x), q(x)\in W$.
    - סגירות לחיבור: נראה כי $(p+q)(x)\in W$.
      - אבל $(p+q)(q)=p(1)+q(1)=0+0$
    - כפל בסקאלר: ניקח $p(x)\in W$, $\lambda\in\mathbb{F}$. נראה כי $(\lambda p)(x)\in W$.
      - אבל $(\lambda p)(1)=\lambda p(1)=\lambda\cdot 0=0$
- מקרה שני: $W=\{p(x)\in V \mid p(0)=1\}$
  - פולינום האפס (כאמור, מסומן 0_p) לא שייך ל-W כי $0_p(0)=0\neq 1$

נושא שני - צירוף ליניארי ופרישה:

דוגמה 5.

- ניקח שני וקטורים: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. נכפיל אותם ונקבל מקרה כזה:

$$2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$$

  - נאמר ש$\begin{pmatrix}11\\16\end{pmatrix}$ (וגם $\begin{pmatrix}32\\42\end{pmatrix}$) הם צירוף ליניארי של $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

הערה 6. כאמור, דרשנו בתת מרחב ש-$\lambda\underline{w}_1+\lambda\underline{w}_2\in W$.
כלומר, דרשנו שצירוף ליניארי של כל שני וקטורים בקבוצה יישארו בקבוצה.

דוגמה 7. מקרה בו לא מתקיימת סגירות:
נניח שניקח קבוצה $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$. במקרה כזה, אם נכפול את הוקטורים או אם נחבר אותם עם וקטור אחר, אנחנו יכולים לצאת החוצה מהקבוצה ואז לא תתקיים סגירות.

הגדרה 8.

- יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $\underline{v}_1,\underline{v}_2\ldots\underline{v}_n$ קבוצת וקטורים (סופית) ב- V.
- הוקטור $\underline{v}\in V$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $\underline{v}_1,\underline{v}_2\ldots\underline{v}_n$ אם קיימים סקלארים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ב-$\mathbb{F}$ כך ש: $V=\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n$

– אזי $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ נקראים מקדמי הצירוף הלינארי.

דוגמה 9.

- האם $\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$ הוא צירוף ליניארי של $\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$?

פיתרון:

– נבדוק האם קיימים λ_1, λ_2 כך ש- $\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \cdot \lambda_2 + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \lambda_1 = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$

* $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4$
* $2\lambda_1 - \lambda_2 = 3$
* $3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 4$

· נכניס למטריצה:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

· נדרג את המטריצה ונקבל:

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ & -8 & -8 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

· הדרגה של $A|b$ ושל A היא 2. מספר המשתנים הוא 2 ולכן יש 0 דרוגת חופש ויש פיתרון יחיד.

· יוצא ש $\lambda_1 = 2$ ו-$\lambda_1 = 1$.

הערה 10. אם היינו לוקחים את $\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$ במקום, היינו מקבלים שאין פתרון.

ה-$span$ (פרישה) הוא אוסף כל הצירופים האפשרייםף

הגדרה 11.

- יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו-$A \subseteq V$ היא תת קבוצה סופית או אינסופית של וקטורים.

- הקבוצה <u>הנפרשת</u> על ידי A היא:

$$span\left(A\right)=\left\{\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_s\underline{v}_s \mid \underline{v}_i\in V,\ \ \alpha_i\in\mathbb{F}\ ,\ \ i=1,2\ldots,s\right\}$$

  – s הוא אינדקס, כלומר $s\in\mathbb{N}$.

- כלומר, אוסף כל הצירופים הליניאריים האפשריים של וקטורים מתוך A.

הערה 12. **נוצר סופית**: אם קבוצה מסוימת W נוצרה ממספר ממפר סופי של איברים, ה-$span$ שלה נקרא "נוצר סופית".

דוגמה 13. $\mathbb{R}^3=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ - הוא $span$ שנוצר סופית

דוגמה 14. $\mathbb{F}^n=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\ldots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix}\right\}$ - גם הוא $span$ שנוצר סופית

דוגמה 15. $M_{2\times3}^{(\mathbb{F})}=span\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$ - גם הוא $span$ שנוצר סופית

הערה 16. הערת אגב - אם נוסיף לקבוצות הללו איבר נוסף הן לא יהיו הכי מינימליות שהן יכולות להיות (יהיו לזה השלכות בהמשך).

הגדרה 17. $span$

- אם קיימת קבוצה סופית כך ש-$W=span\left(A\right)$ נאמר ש-W <u>נוצר סופית</u> וש-A <u>קבוצה פורשת</u> של W

  – אם $A=\emptyset$ אזי $span\left(A\right)=\left\{\underline{0}\right\}$

הערה 18. המינוח של "<u>קבוצה פורשת</u>" נשמר גם עבור קבוצה אינסופית.

דוגמה 19. דוגמה למרחב שהוא לא "נוצר סופית" - אוסף כל הפולינומים ממעלה x, כלומר $\mathbb{F}\left[x\right]$

משפט 20. $span$ הוא תמיד תת מרחב:

- יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

  – אם $A\subseteq V$ היא תת קבוצה.

  – אזי $span\left(A\right)$ תת מרחב של V

1. לא ריקה. לכן, $\underline{0}\in span\left(A\right)$.
2. ניקח $\underline{w}=\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_r\underline{v}_r\in span\left(A\right)$ ו- $\underline{u}=\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_r\underline{v}_r\in span\left(A\right)$

(א) יוצא ש: $\underline{w}+\underline{u}=\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_r\underline{v}_r+\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_r\underline{v}_r\in span\left(A\right)$

3. ניקח $\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_r\underline{v}_r\in W$ ו- $\lambda\in\mathbb{F}$.

(א) אזי ברור ש- $\lambda\cdot\left(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_r\underline{v}_r\right)=\lambda\cdot\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\lambda\cdot\alpha_r\underline{v}_r$

(ב) ומכיוון ש $\left(\lambda\cdot\alpha_1\right)\underline{v}_1+\ldots+\left(\lambda\cdot\alpha_r\right)\underline{v}_r\in span\left(A\right)$ יוצא ש:

$$\lambda\cdot\left(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_r\underline{v}_r\right)\in span\left(A\right)$$

הערה 21. נניח שיש קבוצה $A\subseteq V$.

- יוצא שגם $span\left(A\right)\subseteq V$
- יוצא שגם $A\subseteq span\left(A\right)$ כי ב-$span\left(A\right)$ לוקחים את כל הצירופים הלינאריים של A, ובפרט את A עצמו.

הגדרה 22.

- יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
- תהא A קבוצת וקטורים ב-V כלומר, $A\subseteq V$.
- W יקרא תת מרחב וקטורי מינימלי שמכיל את A אם:
  1. W הוא תת מרחב של V
  2. $A\subseteq W$
  3. לכל תת מרחב W' שמכיל את A מתקיים ש-$W\subseteq W'$, כלומר W' מכיל את W.

משפט 23.

- תהא A קבוצת וקטורים במרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
- אזי $span\left(\mathbb{F}\right)$ הוא תת מרחב מינימלי שמכיל את A והוא יחיד.

הוכחה. - נראה יחידות:

- נניח כי W' ו- W'' שניהם תתי מרחב מינימליים המכילים את A.
- מתכונה (3) בהגדרת של "תת מרחב מינימלי" מתקיים ש:
  - $W'\subseteq W''$ ו - $W''\subseteq W'$ ולכן $W'=W''$.
- כעת, נראה ש-$span\left(A\right)$ הוא תת מרחב מינימילי לפי התכונות שבהגדרה.
  - תכונה (1) הראנו במשפט שאם $A\subseteq V$ אזי $span\left(A\right)$ הוא תת מרחב של V.
  - תכונה (2) - $A\subseteq span\left(A\right)$ נובע מהגדרת $span$, שהוא אוסף כל הצירופים הלינאריים שמכילים את A ולכן מכיל גם את A עצמו.
  - תכונה (3):
    * יהא W' תת מרחב שמכיל את A, מכיוון ש-W' הוא תת מרחב הוא מקיים סגירות.
    * יוצא ש-W' מכיל את הצירוף הליניארי של A ולכן $span\left(A\right)\subseteq W'$

■

תרגיל 24. אם W הוא תת מרחב של V אז $Span\left(W\right)=W$
פתרון:

- תת מרחב מקיים סגירות לכפל בסקאלר ולחיבור
  - לכן כל הצירופים הליניאריים של W יישארו בתוך W
    - לכן, $span\left(W\right)=W$

משפט 25. למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ יש פיתרון **אם ורק אם** $\underline{b}$ הוא צירוף ליניארי של עמודות A **אם ורק אם** $\underline{b}\in span\left\{A_1,A_2,\ldots,A_n\right\}$ כאשר $A_1,A_2,\ldots,A_n$ הם העמודות של A.
הסבר -

הגדרה 26.
בהניתן מטריצה A:

1. נסמן את עמודות A ב- $A_1,A_2,\ldots,A_n$ אזי $column\left(A\right)=span\left\{A_1,A_2,\ldots,A_n\right\}$ ונקרא מרחב העמודות של המטריצה A.
2. נסמן את שורות A ב- $A_1,A_2,\ldots,A_n$, אזי $row\left(A\right)=span\left\{A_1,A_2,\ldots,A_n\right\}$ ונקרא מרחב השורות של המטריצה A.

דוגמה 27. ניקח את המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix}$$

- אזי: $column\left(A\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}\right\}$
- ו: $row\left(A\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\10\\11\\12\end{pmatrix}\right\}$

נושא שלישי - פעולות בין תת מרחבים (מבוא להרצאה הבאה):

- אם ניקח U,W תתי מרחבים של V.
  1. אזי $U\cap W$ הוא תת מרחב (לפתור בבית כתרגיל)
  2. ו- $U\cup W$ הוא תת מרחב אם ורק אם $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$
  3. $U+W$ - נגדיר את מושג הסכום הזה ונראה שגם הוא תת מרחב.
  4. נראה ש $U\oplus W$ הוא תת מרחב עם תכונות מיוחדות. (נקרא סכום ישר)

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | הרצאה 11 - יוסי

שם: איל שטיין

November 29, 2022

נושא השיעור: פעולות בין מרחבים וקטוריים, סכום ישר

נושא ראשון - המשך פרישה מההרצאה הקודמת:

נסכם את הנושא של $span$ מההרצאה הקודמת:

- יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. ויהי $K \subseteq V$.

1. $span\left(K\right)$ הוא תת מרחב של V המכיל את הקבוצה K
2. אם W הוא תת מרחב של V המכיל את K אזי W מכיל גם את $span\left(K\right)$
   (א) זה נכון מכיוון $span\left(K\right)$ הוא תת המרחב המינימלי שמכיל את K. ולכן אם יש תת מרחב שמכיל את K הוא מכיל גם את $span\left(K\right)$

הערה 1. אם הוכחנו שקבוצה מסוימת היא $span$ אז היא בהכרח גם תת מרחב.

דוגמה 2. איך למצוא קבוצה פורשת למרחב:

- יהי תת מרחב $W=\left\{ p\left(x\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid p\left(1\right)=0\right\}$
- אנחנו רוצים למצוא קבוצה פורשת עבור W:
  - ניקח $p\left(x\right)=ax^{2}+bx+c\in W$ ונתון $p\left(1\right)=0$. זה קורה אם ורק אם סכום המקדמים שווה לאפס.
    * נבחר $b=\beta$, $c=\delta$ ואז $a=-\beta-\delta$
      · נקבל:

$$\begin{aligned}W & =\left\{ \left(-\beta-\delta\right)x^{2}+\beta x+\delta\mid\beta,\delta\in\mathbb{R}\right\} \\
 & =\left\{ \beta\left(x^{2}+x\right)+\delta\left(-x^{2}+1\right)\ \mid\beta,\delta\in\mathbb{R}\right\} \\
 & =sp\left\{ -x^{2}+x,-x^{2}+1\right\}
\end{aligned}$$

תרגיל 3. לתרגול עצמי - מצאו קבוצה פורשת לשתי הקבוצות הבאות:

.1

$$T=\left\{p\left(x\right)\in\mathbb{R}^{3}\ \mid\ p\left(1\right)=p\left(-2\right)\right\}$$

.2 מעל $\mathbb{C}$

$$W=\left\{A\in M_{2\times2}\ \mid\ \begin{pmatrix}1 & i\\ -1 & 1\end{pmatrix}A=0_{M}\right\}$$

נושא שני - פעולות בין תת מרחבים:

- מההרצאה הקודמת:
  - אם ניקח U,W תתי מרחבים של V.
    1. אזי $U\cap W$ הוא תת מרחב
    2. ו- $U\cup W$ הוא תת מרחב אם ורק אם $U\subseteq W$ או $W\subseteq U$
    3. $U+W$ - נגדיר את מושג הסכום הזה ונראה שגם הוא תת מרחב.
    4. נראה ש $U\oplus W$ הוא תת מרחב עם תכונות מיוחדות. (נקרא סכום ישר)

נחלק את הפעולות הללו למשפטים ונוכיח אותם:

משפט 4. חיתוך בין תתי מרחבים.
יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U,W\subseteq V$ תת מרחבים של V.
אזי $U\cap W$ הוא גם תת מרחב של V

הוכחה.

- קיום איבר האפס - איבר האפס נמצא גם ב-U וגם ל-W ולכן $0\in\cup\cap W$
- סגירות לחיבור - ניקח $\underline{v}_{1},\underline{v}_{2}\in U\cap W$ כלומר, $\underline{v}_{1},\underline{v}_{2}\in U$ וגם $\underline{v}_{1},\underline{v}_{2}\in W$
  - מכיוון ש-U,W הם תתי מרחב של V אז מתקיים $\underline{v}_{1}+\underline{v}_{2}\in U$ וגם $\underline{v}_{1}+\underline{v}_{2}\in W$
    * ולכן $\underline{v}_{1}+\underline{v}_{2}\in U\cap W$
- סגירות לכפל בסקאלר - ניקח $\underline{v}\in W\cap U$, $\lambda\in\mathbb{F}$.
  - מכיוון ש-$\underline{v}\in W\cap U$ אז מתקיים $\underline{v}\in W$ וגם $\underline{v}\in U$
    * ומכיוון שגם U וגם W הם תתי מרחב נובע ש $\lambda\underline{v}\in U$ וגם $\lambda\underline{v}\in W$
      · ולכן $\lambda\underline{v}\in U\cap W$

■

משפט 5. איחוד בין תתי מרחבים

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

יהיו W_1, W_2 תתי מרחבים של V.

אזי $W_1 \cup W_2$ הוא תת מרחב אם ורק אם: $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$

הוכחה.

- <u>כיוון ראשון:</u>
  - אם $W_2 \subseteq W_1$ או $W_1 \subseteq W_2$ אז מתקיים או $W_1 \cup W_2 = W_1$ או ש $W_1 \cup W_2 = W_2$
- <u>כיוון שני:</u>
  - נניח כי $W_1 \cup W_2$ הוא תת מרחב. צ"ל: או $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$
    * יש שתי אפשרויות: או $W_1 \subseteq W_2$ או ש $W_1 \not\subseteq W_2$
      · אם $W_1 \subseteq W_2$ אז סיימנו.
      · אבל אם $W_1 \not\subseteq W_2$ זה אומר שקיים $\underline{w}_1 \in W_1$ אבל $\underline{w}_1 \notin W_2$
      · ניקח $\underline{w}_2 \in W_2$ (ונוכיח ש-$\underline{w}_2 \in W_1$ וזה יוכיח לנו ש-$W_2 \subseteq W_1$):
        1. אזי $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W_1 \cup W_2$ כי כל אחד שייך ל-W אחר.
           (א) ומכיוון שהנחנו ש$W_1 \cup W_2$ הוא תת מרחב, מתקיים גם $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W_1 \cup W_2$
           i. ולכן לפי הגדרת איחוד מתקיים $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W_1$ או $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W_1$
           ii. ומכיוון שגם W_1 וגם W_2 הם תתי מרחבים וסגורים לחיבור. לכן נובע ש:
           א׳. או ש$\underbrace{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)}_{\in W_1} - \underline{w}_1 \in W_1$ ואם נפתח את הסוגריים נקבל $\underline{w}_2 \in W_1$.
           ב׳. - או ש $\underbrace{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)}_{\in W_2} - \underline{w}_2 \in W_2$ - המקרה הזה יוצר סתירה כי כשפותחים את הסוגריים נובע ממנו ש- $\underline{w}_1 + \cancel{\underline{w}_2 - \underline{w}_2} \in W_2$ כלומר - $\underline{w}_1 \in W_2$
        2. כלומר, הוכחנו ש$\underline{w}_2 \in W_1$ ולכן הוכחנו ש-$W_2 \subseteq W_1$
  - הגענו לכך שאו $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$ כנדרש.

■

דוגמה 6. לאיחוד תתי קבוצות שהוא לא מרחב וקטורי.

- ניקח שתי קבוצות

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = sp \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- נראה שהאיחוד שלהם הוא לא תת מרחב:

$$U\cup V=\left\{\begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix}\ \ OR\ \ \begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ 0\end{pmatrix}\ \ \mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

– ניקח $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\in U\cup W$

* ונראה שהחיבור הוא:

$$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\notin U\cup W$$

כלומר, החיבור לא נמצא ב-$U\cup W$.

הערה 7. ה-$span$ של W הוא W עצמו. כי תת מרחב הוא "בית סוהר" ל-$span$ כי כל תת מרחב סגור לחיבור ולכפל בסקלאר.

משפט 8. חיבור תתי מרחבים

- $U+W=\{\underline{u}+\underline{w}\ |\underline{u}\in U,\underline{w}\in W\}$
- יהיו U,W תתי מרחבים של המרחב הווקטורי V.
- אזי $U+W$ הוא תת מרחב של V (שמכיל רק את U ואת W ולכן למעשה הוא המינימלי שמכיל את שניהם).

הערה 9. $U+W$ נקרא "סכום תת מרחבים".

הוכחה.

- וקטור האפס

– וקטור האפס נמצא גם ב-U וגם ב-W ולכן $\underline{0}=\underline{0}+\underline{0}\in\cup+W$

- סגירות לחיבור

– ניקח $\underline{u}_2+\underline{w}_2\in U+W$ וניקח $\underline{u}_1+\underline{w}_1\in U+W$. מכיוון ש-$W$ ו- U הם תתי מרחב, מתקיים:

$$(\underline{u}_1+\underline{w}_1)+(\underline{u}_2+\underline{w}_2)=\overbrace{\underline{u}_1+\underline{u}_2}^{\in U}+\overbrace{\underline{w}_1+\underline{w}_2}^{\in W}\in U+W$$

- סגירות לכפל בסקאלר

– ניקח $\underline{u}+\underline{w}\in U+W$ ו-$\lambda\in\mathbb{F}$. אזי:

$$\lambda\left(\underline{u}+\underline{w}\right)=\overbrace{\lambda\underline{u}}^{\in U}+\overbrace{\lambda\underline{w}}^{\in W}\in U+W$$

■

טענה 10. יהיו תתי קבוצות $S,T\subseteq V$ ויהא V תת מרחב וקטורי. אזי: $span\left(S\right)+span\left(T\right)=span\left(S\cup T\right)$

הוכחה.

- דבר ראשון, $span\left(S\right)\subseteq span\left(S\cup T\right)$
- באותו אופן, $span\left(T\right)\subseteq span\left(S\cup T\right)$.
- כל $span$ הוא תת מרחב וקטורי.
  – כיוון ראשון של הכלה: לפי המשפט הקודם (אם V הוא מרחב וקטורי $W,U\subseteq V$ אז $W\cup U$ הוא תת מרחב), $span\left(S\right)+span\left(T\right)\subseteq span\left(S\cup T\right)$
  – כיוון שני של הכלה:
    * $S\subseteq span\left(S\right)+span\left(S\right)$ וגם $T\subseteq span\left(S\right)+span\left(T\right)$
    * ולכן $S\cup T\subseteq span\left(S\right)+span\left(T\right)$
    * אמרנו שאם יש קבוצה שמכילה קבוצה אחרת, הקבוצה הראשונה מכילה את ה$span$ של הקבוצה השנייה ולכן:

$$span\left(S\cup T\right)\subseteq span\left(S\right)+span\left(T\right)$$

- נחבר את שתי ההכלות ונקבל $span\left(S\cup T\right)=span\left(S\right)+span\left(T\right)$

■

הטענה הזו מאפשרת לנו לחבר שני תתי מרחבים. נכתוב את הקבוצה הפורשת של הראשונה ואת הקבוצה הפורשת של השנייה ונחבר אותן.

דוגמה 11.
נתונות קבוצות U ו-W:

$$U=\left\{ \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\ \mid\ a\in\mathbb{R}\right\} ,W=\left\{ \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}\ \mid b\in\mathbb{R}\right\}$$

נתרגם אותן ל-$span$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}, W = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר, מתקיים:

$$U + W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} + span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מהטענה שהוכחנו, מתקבל ש:

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} + span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

$$U + W = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

דוגמה 12.
נתונות קבוצות U ו- W :

$$U = \left\{\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}, W = \left\{\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\right\}$$

נמיר את הקבוצות ל-$span$ ונקבל:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$W = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן:

$$U + W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} + span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולפי הטענה מתקיים:

$$U+W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

דוגמה 13.

נתונות קבוצות U ו- W :

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\ \mid a,b\in\mathbb{R}\right\},W=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}\ \mid c\in\mathbb{R}\right\}$$

נמיר את הקבוצות ל-$span$ ונקבל:

$$U=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$W=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לכן:

$$U+W=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}+span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולפי הטענה מתקיים:

$$U+W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$$

דוגמה 14. נתונות קבוצות U ו- W :

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\ \mid a,b\in\mathbb{R}\right\},W=\left\{\begin{pmatrix}0\\c\\d\end{pmatrix}\ \mid c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

- נמיר את הקבוצות ל-$span$ ונקבל:

$$U=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$W=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

– ולכן:

$$U+W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}+span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- ולפי הטענה:

$$U+W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\cancel{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$$

הגדרה 15.

- יהא V מרחב וקטורי יהיו U,W תתי מרחבים של V.
- $U+W$ נקרא **סכום ישר** (ומסומן $U\oplus W$) אם כל $\underline{v}\in U+W$ ניתן לכתיבה יחידה כ- $\underline{v}=\underline{w}+\underline{u}$ כאשר $\underline{u}\in U$ ו-$\underline{w}\in W$.

משפט 16. יהא V מרחב וקטורי ו-U,W תתי מרחבים של V.

- $U+W$ הוא סכום ישר אם ורק אם $U\cap W=\{0\}$

הוכחה.

– כיוון ראשון:

* נניח ש$U+W$ סכום ישר וניקח $\underline{v} \in U \cap W$. אזי נוכל לכתוב:

$$\underline{v} = \overbrace{\underline{0}}^{\in U} + \overbrace{\underline{v}}^{\in W} = \overbrace{\underline{v}}^{\in U} + \overbrace{\underline{0}}^{\in W}$$

· מכיוון ש $U+W$ הוא סכום ישר, צורת הכתיבה של $\underline{v}$ חייבת להיות יחידה

· ולכן

$$\underline{v} = 0$$

– <u>כיוון שני:</u>

* נניח כי $U \cap W = \{0\}$
* ניקח $\underline{v} \in U+W$
* נניח כי $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1 = \underline{u}_2 + \underline{w}_2$, כלומר שניתן לכתוב את $\underline{v}$ בשתי צורות שונות של חיבור וקטור מ-U עם ווקטור מ-W.

· אזי יתקיים:

$$\underline{u}_1 + \underline{w}_1 = \underline{u}_2 + \underline{w}_2 \quad \backslash - \underline{w}_2 - \underline{u}_1$$

$$\underbrace{\underline{u}_2 - \underline{u}_1}_{\in U} = \underbrace{\underline{w}_1 - \underline{w}_2}_{\in W}$$

· זאת אומרת שגם $\underline{u}_2 - \underline{u}_1 \in U \cap W$ וגם $\underline{w}_1 - \underline{w}_2 \in U \cap W$

· מכיוון שהנחנו ש- $U \cap W = \{0\}$ ולכן מתקיים ש:

$$\underline{u}_2 - \underline{u}_1 = \underline{0}$$

$$\underline{w}_1 - \underline{w}_2 = \underline{0}$$

· נעביר אגפים ונקבל:

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_1$$

$$\underline{w}_1 = \underline{w}_2$$

* כלומר, שתי צורות הכתיבה הן אותה הצורה. לכן, ניתן לכתוב את $\underline{v}$ רק בצורה אחת.

■

הערה על דוגמא 14: נניח שבדוגמא האחרונה ניקח:

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}^{\in U+W}=\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}^{\in U}+\overbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}}^{\in W}=\overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}^{\in U}+\overbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}}^{\in W}$$

- כלומר, $U\cap W=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\neq\{0\}$ ולכן הסכום הזה הוא לא אידיאלי (לא ישר).
  - לעומת זאת, בדוגמא 13 היינו מקבלים סכום אידיאלי (נקרא "סכום ישר").

שאלה:

האם אפשר להכליל את הסכום הישר, למשל לשלושה תתי מרחבים?

ואם כן, מתי $W_1+W_2+W_3$ הוא סכום ישר?

1. ניסיון ראשון:
   - נניח ש $W_1\cap W_2\cap W_3=\{0\}$
   - ניקח $W_1=W_2=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$
   - וניקח $W_3=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$
   - מכיוון שאפשר להחליף בין W_1ובין W_2, אין כתיבה יחידה ולכן הסכום הוא לא ישר.
2. ניסיון שני:
   - נניח שניקח שני תתי מרחבים -$W_i\cap W_j=\{0\}$.
     - גם אלה לא מספיקים כדי שהסכום של שלושה מרחבים יהיה סכום ישר.
       * נראה זאת עם דוגמא נגדית:

$$W_1=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$W_2 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$W_3 = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- בדוגמא הזאת, החיתוך של כולם הוא 0 אבל את וקטור האפס ניתן לכתוב ביותר מצורת כתיבה אחת:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- ולכן אין כתיבה יחידה והסכום לא ישר.

תרגיל 17. הוכיחו שלכל איבר בסכום של תת מרחב יש כתיבה יחידה אם ורק אם ל-$\underline{0}$ יש צורת כתיבה יחידה. - לעשות לבד.

משפט 18. יהא V מרחב וקטורי ו-$W_1, W_2, \ldots, W_n$ תתי מרחבים של V.
הסכום $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ הוא סכום ישר אם ורק אם לכל i מתקיים $W_i \cap \{W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n\} = \{0\}$.

כלומר, החיתוך של כל תת מרחב עם הסכום של שאר תתי המרחבים הוא 0.

הוכחה.

- <u>כיוון ראשון:</u> נניח שהסכום ישר.
  - ניקח $\underline{v} \in W_i \cap \{W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n\}$ (ונוכיח ש $\underline{v} = 0$)
    - לפי הגדרת חיתוך מתקיים ש:

1. גם $\underline{v} \in W_i$, כלומר $\underline{v} = \underline{v}_i$
2. וגם $\underline{v} \in \{W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n\}$ כלומר $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \ldots + \underline{v}_{i-1} + \underline{v}_{i+1} \ldots + \underline{v}_n$

(א) ולכן:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \ldots + \underline{v}_{i-1} + \underline{v}_{i+1} \ldots + \underline{v}_n = \underline{v}_i$$

* נעביר אגפים ונקבל:

$$\underline{0}=\left(\underline{v}_1+\underline{v}_1+\ldots+\underline{v}_{i-1}+\underline{v}_{i+1}\ldots+\underline{v}_n\right)-\underline{v}_i$$

· מכיוון שהנחנו שהסכום ישר, ל$\underline{0}$ חייבת להיות הצגה יחידה.

– ניקח הפעם $\underline{v}$ אחר, כך ש-i יהיה שונה.

* נקבל שגם פה יש צורת כתיבה יחידה של $\underline{0}$ מכיוון שהנחנו שהסכום ישר.

· בגלל שתמיד נקבל את הביטוי הזה: $\underline{0}=\left(\underline{v}_1+\underline{v}_1+\ldots+\underline{v}_{i-1}+\underline{v}_{i+1}\ldots+\underline{v}_n\right)-\underline{v}_i$, כל הוקטורים $\underline{v}$ שניקח צריכים להיות אפסים.

· כלומר, לכל i מתקיים

$$\underline{v}_i=0$$

– הוכחנו שאפס יימצא בכל חיתוך כזה $W_i\cap\{W_1+W_2+\ldots+W_{i-1}+W_{i+1}+\ldots+W_n\}$ שנבחר ולכן החיתוך שווה אפס.

– לסיכום הכיוון הראשון - הנחנו שהסכום ישר והראנו שחיתוך של כל תת מרחב עם הסכום של תתי המרחבים האחרים הוא 0.

• <u>כיוון שני:</u> נניח שלכל i מתקיים $W_i\cap\{W_1+W_2+\ldots+W_{i-1}+W_{i+1}+\ldots+W_n\}=\{0\}$

– נניח שיש איבר $\underline{v}$ כלשהו בסכום $W_1+W_2+\ldots+W_n$ שניתן לכתוב אותו בשתי צורות:

$$\underline{v}=\overbrace{\underline{v}_1+\ldots+\underline{v}_n}=\overbrace{\underline{w}_1+\ldots+\underline{w}_n}\in W_i$$

* ובפרט:

$$\overbrace{\underline{v}_1+\ldots+\underline{v}_i+\ldots+\underline{v}_n}=\overbrace{\underline{w}_1+\ldots+\underline{w}_i+\ldots+\underline{w}_n}$$

– נוכיח שלכל i מתקיים $\underline{v}_i=\underline{w}_i$:

* נרשום את $\underline{v}_i-\underline{w}_i$ לכל i ונקבל:

$$\overbrace{\underline{v}_i-\underline{w}_i}^{\in W_i}=\overbrace{(\underline{w}_1-\underline{v}_1)}^{\in W_1}+\ldots+\overbrace{(\underline{w}_{i-1}-\underline{v}_{i-1})}^{\in W_{i-1}}+\overbrace{(\underline{w}_{i+1}-\underline{v}_{i+1})}^{\in W_{i+1}}+\ldots+\overbrace{(\underline{v}_n-\underline{w}_n)}^{\in W_n}$$

– מתוך ההנחה שלנו ש-$W_i\cap\{W_1+W_2+\ldots+W_{i-1}+W_{i+1}+\ldots+W_n\}=\{0\}$ מתקיים:
שאם איבר $\underline{u}\in W_i$ נמצא גם ב $\{W_1+W_2+\ldots+W_{i-1}+W_{i+1}+\ldots+W_n\}$ אז $\underline{u}=0$

* מכיוון שקיבלנו ש$\underline{v}_i - \underline{w}_i$ (שהוא איבר בW_i) שווה לאיבר בסכום של כל שאר תתי המרחבים יוצא ש:
  · לכל i מתקיים $\underline{v}_i - \underline{w}_i = 0$
  · נעביר אגפים ונקבל שלכל i מתקיים $\underline{v}_i = \underline{w}_i$
* כלומר הנחנו שיש שתי צורות כתיבה לאיבר $\underline{v}$ בסכום $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ וראינו שזו אותה צורה.
* לכן לפי הגדרה, הסכום הוא סכום ישר.

– לסיכום הכיוון השני: אם לכל i מתקיים $W_i \cap \{W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n\} = \{0\}$ אז הסכום $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ הוא סכום ישר.

■

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 12 - יוסי

שם: איל שטיין

December 4, 2022

נושא השיעור: תלות ליניארית ובסיס

נושא ראשון - תלות ליניארית:

- כשדיברנו על קבוצה פורשת, הבאנו בתור דוגמא ש $\mathbb{R}_2 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
  - אבל, אמרנו שגם $\mathbb{R}_2 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$. אבל, בדוגמא הזו יש איבר מיותר.
  - נמחק אותו ונקבל: $\mathbb{R}_2 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\cancel{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}\right\}$, שמורכב משני וקטורים שנקראים **בלתי תלויים ליניארית.**
- ניקח שתי דוגמאות:

דוגמה 1. $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=0$

- נמיר למערכת משוואות ונקבל: $\left[\begin{array}{cc|c}1&3&0\\2&4&0\end{array}\right]$
- בדוגמא הזו, נדרג ונקבל שיש פיתרון יחיד והוא כאשר שני המשתנים שווים 0.
- שני הוקטורים האלה נקראים **"בלתי תלויים ליניארית".**

דוגמה 2. $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=0$

- נמיר למערכת משוואות ונקבל: $\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\2&4&0\end{array}\right]$
  - נדרג ונקבל שבדוגמא הזו יש פתרונות ולכן הוקטורים נקראים **"תלויים ליניארית".**
    - כלומר, אחד מהווקטורים מיותר כי אפשר לייצג אותו בעזרת הוקטור השני וסקאלר.

הגדרה 3. תלות ליניארית.

היא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$.

הוקטורים האלה ייקראו **תלויים ליניארית (ת"ל)** אם קיימים סקאלרים $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם שווים אפס, כך ש-$\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2\ldots+\alpha_n\underline{v}_n=$ $\underline{0}$.

אחרת, הוקטורים האלה ייקראו **בלתי תלויים ליניארית (בת"ל).**

(ניסוח אחר - הם ייקראו "בלתי תלויים ליניארית" אם הצירוף הליניארי היחיד שנותן את וקטור האפס הוא "הצירוף הטריוויאלי")

טענה 4. $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ תלויים ליניארית אם ורק אם אחד הוקטורים הוא צירוף ליניארי של האחרים (לפחות של אחד מהם).

הוכחה.

- כיוון ראשון $\Leftarrow$: נניח כי $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ תלויים ליניארית.
  - אזי לפי ההגדרה, קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפס, כך ש: $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$.
  - נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$\alpha_1 \neq 0$.
    - אזי נקבל:

$$\underline{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{v}_2 \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underline{v}_n = \underline{0}$$

      - כלומר, בלי הגבלת הכלליות מתקיים ש$\underline{v}_1$ הוא צירוף ליניארי של האחרים.

- כיוון שני $\Rightarrow$: נניח שאחד הוקטורים הוא צירוף ליניארי של הוקטורים האחרים (בלי הגבלת הכלליות נניח לגבי $\underline{v}_1 \in \mathbb{F}$)
  - זה גורר שלכל $\lambda_i \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$\underline{v}_1 = \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots \lambda_n\underline{v}_n$$

    - נעביר אגפים ונקבל:

$$\underline{0} = 1\underline{v}_1 - \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 - \ldots \lambda_n\underline{v}_n$$

      - כלומר, קיימים סקאלרים שלא כולם אפס כך שמתקיים $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$
      - ולכן לפי ההגדרה מתקיים ש$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ בלתי תלוי ליניארית.

■

<u>שתי הערות שאנחנו נצטרך בהמשך:</u>

הערה 5. הקבוצה $A = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם קיים וקטור $\underline{v}_i$ שהוא צירוף ליניארי של הבאים אחריו.

הערה 6. הקבוצה $A = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ תלויה ליניארית אם ורק אם קיים וקטור $\underline{v}_i$ שהוא צירוף ליניארי של קודמיו.

משפט 7.

1. קבוצת וקטורים המכילה את וקטור האפס היא תמיד תלויה ליניארית (ת"ל).
2. שני וקטורים תלויים ליניארית (ת"ל) אם ורק אם אחד מהם הוא כפולה של השני בסקאלר.
3. בקבוצה המכילה קבוצה תלויה ליניארית (ת"ל) היא גם תלויה ליניארית (ת"ל).
4. קבוצה המוכלת בקבוצה בלתי תלויה ליניארית (בת"ל) היא גם בלתי תלויה ליניארית (בת"ל).

הוכחה.

1. כבר עשינו כי $1 \cdot \underline{0} + 0 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$
2. נניח כי $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ תלויים ליניארית. אזי קיימים $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ (שלא כולם אפס) כך ש:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

   - נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\alpha_1 \neq 0$
     - ונקבל $\underline{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \underline{v}_2$
3. נסתכל על הקבוצה $A = \left\{ \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \ldots, \underline{v}_n \right\}$.
   - אזי קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ שלא כולם אפס כך שמתקיים:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 \ldots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

     - ולכן נקבל שקיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי כך ש$\alpha_1 + \ldots \alpha_k \underline{v}_k + \ldots \alpha_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \ldots +_n \underline{v}_n = \underline{0}$
       * ולכן נוכל לבחור ש$\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots = \alpha_n = 0$, כי מספיק מקדם אחד שהוא לא אפס.
4. כי הקבוצה המוכלת הייתה תלויה ליניארית אז לפי (3) גם הקבוצה המכילה צריכה להיות תלויה ליניארית.
   - מכיוון שהנחנו שהקבוצה המוכלת היא בלתי תלויה ליניארית, גם הקבוצה המכילה צריכה להיות בלתי תלויה ליניארית.

■

תרגיל 8.
האם $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית?

פתרון:

- ניקח את הביטוי $\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ ונהפוך אותו למטריצת מקדמים:

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&4&7\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&4&7\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

  - לאחר דירוג ניתן לראות שקיבלנו שקיים יותר מפתרון אחד.
    - ולכן הקבוצה היא תלויה ליניארית.

משפט 9.

1. יהיו A, B מטריצות שקולות שורה. השורות של A תלויות ליניאריות (ת"ל) אם ורק השורות של B תלויות ליניארית.
   (א) נגזר מזה שהשורות של A בלתי תלויות ליניאריות (בת"ל) אם ורק אם השורות של B בלתי תלויות ליניאריות.
2. שורות שונות מאפס של מטריצה מדורגת הן בלתי תלויות ליניארית (בת"ל).

הוכחה.

1.

- רעיון ההוכחה: נוכיח שהשורות של A בלתי תלויות ליניארית (בת"ל) אם ורק אם השורות של B בלתי תלויות ליניארית.
  - מספיק להראות זאת עבור C המתקבלת מ-A על ידי פעולה אלמנטרית אחת על השורות.
    - כלומר, להראות שהשורות של A בלתי תלויות ליניארית (בלתי תלויות ליניארית) אם ורק אם השורות של C בלתי תלויות ליניארית.
    - ואז, כל מטריצה שתתקבל מפעולה אלמנטרית על A תהיה בלתי תלויה ליניארית.
- נסמן את השורות של A ב- $R_1, R_2, \ldots, R_n$.
  - אם נחליף שורות, השורות יישארו אותן שורות רק בסדר אחר.
    - ולכן האי-תלות נשמרת.
  - אם נכפיל שורה בסקלאר (שאינו אפס): נבצע $\beta \cdot R_i \to R_i$
    - מכיוון ש-$R_1, R_2, \ldots, R_n$ בלתי תלויים ליניארית, נקבל:

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots \alpha_i \cdot \beta \cdot R_i + \ldots + \alpha_n R_n = \underline{0}$$

    - כלומר, $\alpha_1 = 0$ וגם $\alpha_2 = 0$ וגם $\alpha_i \beta = 0$ וגם $\alpha_n = 0$
      · מכיוון ש$\beta \neq 0$, אבל $\alpha_i \cdot \beta = 0$ יוצא שגם $\alpha_i = 0$.
      · לכן, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
  - נבצע הוספת שורה אחת לשנייה: $R_j + \beta \cdot R_i \to R_{ij}$

* נקבל:

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots \alpha_j \cdot (R_j + \beta \cdot R_i) + \ldots + \alpha_n R_n = \underline{0}$$

· נפתח את הסוגריים ונקבל:

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots + (\alpha_i + \alpha_j \cdot \beta) R_i \ldots + \ldots \alpha_j \cdot R_j + + \ldots + \alpha_n R_n = \underline{0}$$

· וכמו שיצא לנו מקודם, $\alpha_1 = 0$ וגם $(\alpha_i + \alpha_j \cdot \beta)$ וגם $\alpha_n = 0$.

· נקבל ש-$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0$

2. נראה דוגמא למטריצה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & . & c_n & * \end{pmatrix}$$

• אם נהפוך את השורות לעמודות נקבל:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ * \\ \ldots \\ * \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ \ldots \\ * \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ c_3 \\ * \\ * \end{pmatrix} + \ldots \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ c_n \\ * \end{pmatrix} +$$

– נקבל שבשורה הראשונה יש לנו $\alpha_1 c_1$ והוא שווה אפס.

– בשורה השנייה יש לנו $\alpha_2 c_2$ וגם הוא שווה אפס.

* מכיוון שמדובר במטריצה מדורגת, $c \neq 0$ ולכן מתקיים ש$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0$.

■

דוגמה 10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

- נכתוב אותה כ- $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\4\\7\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
  - ונקבל ש$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

דוגמה 11. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

- לאחר דירוג נסתכל על שהורות שלנו ונהפוך אותן לעמודות:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

  - ומכיוון שלאחר דירוג אנחנו מקבלים שוקטור האפס שייך, הוקטורים הללו הם תלויים ליניארית.
  - ולכן, המטריצה לפני דירוג גם היא תלויה ליניארית.

דוגמה 12. המשך מהדוגמא הקודמת: אם ניקח $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ו- $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$ נקבל ש:

- $W=span\left(A\right)$,$U=span\left(B\right)$
- הקבוצה U מוכלת בקבוצה W ו$A\subseteq sapn\left(B\right)$
  - מכיוון שלפי משפט, $span$ הוא תת מרחב, A מוכל בתת מרחב ולכן גם $span\left(A\right)\subseteq span\left(B\right)$
  - ומכיוון שקיבלנו את A מדירוג של B, מתקיים שגם $span\left(B\right)\subseteq span\left(A\right)$
  - מכיוון שמתקיימת הכלה דו-כיוונית, מתקיים ש-$span\left(A\right)=span\left(B\right)$

דוגמה 13. נניח שיש לנו $A=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}\right\}$.

- ניקח את הוקטור הראשון, $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ונכתוב אותו כך:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

  - נכתוב כך את שלושת הוקטורים ונקבל את $span\left(A\right)$.

- אם היינו לוקחים מטריצה גדולה יותר ומדרגים אותה, היינו מקבלים שה-$span$ של הראשונה שווה ל-$span$ של המדורגת, רק שה-$span$ של השנייה הוא מצומצם יותר.

- בהמשך, הקבוצה המצומצמת ביותר תיקרא "הבסיס" של המרחב.

דוגמה 14. אם היינו מקבלים $\left\{x^2+2x+3, 4x^2+5x+6, 7x^2+8x+9\right\}$:

- אפשר לקחת את המקדמים ולהפוך אותם לוקטורים ולבדוק אם הם תלויים ליניארית.
  - ואז אפשר לחזור לפולינומים ולומר האם הם תלויים ליניארית.

טענה 15. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m \in V$.
אזי $span\left\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\right\} \subseteq span\left(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\right)$ אם ורק אם כל $\underline{v}_i$ הוא צירוף ליניארי של ה-$\underline{w}_i$-ים.

הוכחה.

- אם כל $\underline{v}_i$ הוא צירוף ליניארי של ה-$\underline{w}_i$-ים, לפי הגדרת $span$ להיות אוסף כל הצירופים הליניאריים,
  - מתקיים ש-$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in span\left\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\right\}$
    * ולכן לפי הגדרת הכלה מתקיים: $\left\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\right\} \subseteq span\left\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\right\}$

- ולפי משפט ("אם קבוצה מוכלת בתת מרחב וקטורי, גם ה-$span$ של הקבוצה מוכל בתת המרחב הוקטורי"), מתקיים $span\left\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\right\} \subseteq span\left\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\right\}$

■

מסקנה 16. יהיו $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m \in V$.
אזי $span\left(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\right) = span\left(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\right)$ אם ורק אם כל $\underline{v}_i$ הוא צירוף ליניארי של ה-$\underline{w}_j$-ים וכל $\underline{w}_j$ הוא צירוף ליניארי של כל ה-$\underline{v}_i$-ים.

מכאן נובע המשפט:

משפט 17. אם A ו-B מטריצות שקולות שורה $\Leftarrow$ $Row\left(A\right) = Row\left(B\right)$. כלומר, מרחב השורות של A שווה למרחב השורות B.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 13 - יוסי

שם: איל שטיין

December 6, 2022

נושא השיעור: טענה על תלות ליניארית, בסיס ומימד

נושא ראשון - טענה על תלות ליניארית:

טענה 1. למערכת $A\underline{x}=b$ אם ורק אם $b\in col\left(A\right)$. (כאשר $col\left(A\right)$ הוא מרחב העמודות של A)

- מכיוון שלכפול מטריצה בוקטור מייצר צירוף ליניארי של העמודות:
  - לדוגמא, $\underline{b}=A_{m\times n}\cdot\begin{pmatrix}x_{1}\\ \dots\\ \dots\\ x_{n}\end{pmatrix}$ אם ורק אם $x_{1}A_{1}+x_{2}A_{1}+\ldots+x_{n}A_{n}=\underline{b}$

טענה 2. למערכת הומוגנית $A\underline{x}=0$ יש פתרון לא טריוויאלי אם ורק אם העמודות של A תלויות ליניארית (ת"ל).

- כמו בטענה הראשונה: לדוגמא, $\underline{0}=A_{m\times n}\cdot\begin{pmatrix}x_{1}\\ \dots\\ \dots\\ x_{n}\end{pmatrix}$ אם ורק אם $x_{1}A_{1}+x_{2}A_{1}+\ldots+x_{n}A_{n}=\underline{0}$
  - כלומר, הצירוף הליניארי היחיד שנותן את וקטור האפס הוא הצירוף הליניארי.

טענה 3. $span\left\{ \emptyset\right\} =\left\{ \underline{0}\right\}$

טענה 4. עבור קבוצה אינסופית A, נאמר ש-A ת"ל אם קיימת לה תת קבוצה סופית תלויה ליניארית (ת"ל).

נושא שני - בסיס ומימד:

הגדרה 5. בסיס.

יהא V מרחב וקטורי.

קבוצת וקטורים $V\supseteq\underline{v}_{1},\underline{v}_{2},\ldots,\underline{v}_{n}$ נקראת **בסיס** אם:

1. $V=span\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\right\}$ (כלומר $\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\right\}$ פורשת את V)

2. $\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\right\}$ בלתי תלויה ליניארית (בת"ל).

דוגמה 6. $V=\mathbb{R}^3$.

- הקבוצה $\underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ היא בסיס:
  - היא פורשת את V כי $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
  - היא בת"ל כי $\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

דוגמה 7. $V=\mathbb{F}^n$.

- $\underline{l}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix},\underline{l}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\ldots\\0\end{pmatrix},\ldots,\underline{l}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix}$
  - מאוחר יותר ייקרא "**הבסיס הסטנדרטי**"

דוגמה 8. $V=\mathbb{R}^3.$

- קבוצת הוקטורים $\underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ היא בסיס כי אם נעביר לשורות של מטריצה ונדרג נקבל:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

  - מכיוון שהמטריצה המדורגת $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ היא בלתי תלויה ליניארית (בת"ל), אז גם המטריצה הראשונה היא בת"ל לפי משפט.
    * תזכורת - המשפט טוען שהתלות (תכונת ה"תלויה ליניארית" או ה"בלתי תלויה ליניארית") נשמרת גם אחרי הדירוג
  - בנוסף לפי משפט מההרצאה הקודמת, המטריצה המדורגת פורשת את אותו המרחב שהמטריצה הלא-מדורגת פורשת.
    * כלומר, דירוג שומר על הפרישה.

דוגמה 9. $\mathbb{F}_n[x]$ - פולינומים מעל שדה $\mathbb{F}$ שמעלתם קטנה או שווה ל-n.
הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים הללו הוא $1, x, x^2, \ldots, x^n$

דוגמה 10. $M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$ - מרחב המטריצות $m \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$.
דוגמא **לבסיס סטנדרטי** של $M_{2\times 3}^{(\mathbb{F})}$:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\right\}$$

נושא שלישי - קבוצה בת"ל מקסימלית וקבוצה פורשת מינימלית:

הגדרה 11. בלתי תלויה מקסימלית

- יהא V מרחב וקטורי.
- קבוצת וקטורים תיקרא **בלתי תלויה מקסימלית** אם היא בלתי תלויה וכל וקטור שנוסיף לה יהפוך אותה לתלויה ליניארית.

הגדרה 12. פורשת מינימלית.

- יהא V מרחב וקטורי.
- קבוצת וקטורים תיקרא **פורשת מינימלית** אם היא פורשת את V וכל וקטור שנוריד ממנה יגרום לה להפסיק לפרוש את V.

דוגמה 13. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right\}$ היא פורשת אבל לא מינימלית כי אם נוריד ממנה את הוקטורים האלה היא עדיין תפרוש את $\mathbb{R}^2$.

דוגמה 14. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ היא פורשת מינימלית של $\mathbb{R}^2$ והיא גם בת"ל מקסימלית.

דוגמה 15. $V = R^3$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא בת"ל מקסימלית כי כל וקטור שנוסיף לה יהפוך אותה לתלויה ליניארית.

דוגמה 16. $V = R^3$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ זו קבוצה בלתי תלויה ליניארית (בת"ל) אבל לא מקסימלית כי אפשר להוסיף לה וקטור בלי שהיא תהפוך להיות תלויה ליניארית.

משפט 17. יהא V מרחב וקטורי.
התנאים הבאים שקולים:

1. B היא בסיס.
2. B קבוצה בת"ל מקסימלית.
3. B קבוצה פורשת מינימלית.

הוכחה.

- חלק ראשון - $1 \Leftarrow 2$:
  - אם B היא בסיס אז היא בת"ל.
  - מכיוון שהיא גם פורשת, לפי הגדרת פרישה מתקיים שכל איבר בה הוא צירוף ליניארי של האיברים האחרים.
    * לכן כל איבר שנוסיף לה גם יהיה צירוף ליניארי של איבריה.
  - לכן, על פי משפט (קבוצה היא תלויה ליניארית אם ורק אם אחד הוקטורים הוא צירוף ליניארי של האחרים), הקבוצה החדשה תהיה תלויה ליניארית.
    * לכן, לפי הגדרת קבוצה בת"ל מקסימלית, מתקיים ש B היא בת"ל מקסימלית.
- חלק שני - $2 \Leftarrow 3$:
  - נניח ש-B בת"ל מקסימלית.
    * אזי לפי הגדרה, כל איבר שנוסיף לה יהפוך אותה לתלויה ליניארית.
  - נסמן $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ וניקח $w \in V$ כלשהו.
  - אם נוסיף את $\underline{w}$ ל-$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ נקבל שהקבוצה הזו עכשיו היא תלויה ליניארית (לפי הגדרת בת"ל מקסימלי)
    * על פי משפט, קיים בה $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n + \underline{w}$ איבר שהוא צירוף ליניארי של קודמיו.
      · האיבר הזה לא יכול להיות אחד מה$\underline{v}$ כי הקבוצה $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ הייתה בת"ל.
      · לכן $\underline{w}$ מוכרח להיות צירוף ליניארי של שאר האיברים (כלומר כל ה-$\underline{v}$)
  - לכן, B היא פורשת.
  - כל $\underline{v}_i \in B$ הוא לא צירוף ליניארי של האחרים כי הנחנו ש-B בת"ל.
    * לכן, אם נוריד את ה-$\underline{v}_i$ הזה מ-B, הקבוצה החדשה שנקבל כבר לא תפרוש את V, כי לא נוכל ליצור מהקבוצה החדשה את $\underline{v}_i \in V$
  - לכן B היא פורשת מינימלית.
- חלק שלישי - $3 \Leftarrow 1$.
  - נניח ש-B פורשת מינימלית.
    * בפרט, B היא פורשת.
  - נניח בשלילה ש-B תלויה ליניארית (ת"ל).
    * לכן לפי משפט, קיים בה איבר שהוא צירוף ליניארי של האחרים.
      · כלומר גם אם נוריד ממני איבר אחד (האיבר שהוא צ"ל של האחרים) יתקיים ש-B עדיין תפרוש את V.
      · זו סתירה לכך ש-B פורשת מינימלית, כמו שהנחנו.
  - לכן, B בלתי תלויה ליניארית.

■

משפט 18.

- יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית כך ש-$V \neq 0$. אזי קיים ל-V בסיס.

הוכחה.

- אם V מרחב וקטורי נוצר סופי, לפי הגדרה קיימת קבוצה סופית A כך ש$span\left(A\right) = V$.
  - כלומר, A היא קבוצה פורשת של V.
- שני מקרים:

1. אם A פורשת מינימלית אז לפי המשפט הקודם היא גם בסיס.
2. אם A לא פורשת מינימלית - נשמיט ממנה וקטור ונבדוק האם הקבוצה החדשה פורשת מינימלית.
   - נמשיך להוריד וקטורים עד שנקבל קבוצה פורשת מינימלית שהיא בסיס (לפי המשפט הקודם).
     - כלומר, הקבוצה V נוצרה סופית ויש לה בסיס.
     - הערת אגב - לא יכול להיות שממשיכים להוריד איברים עד שמגיעים לקבוצה ריקה כי נתון ש-V נוצרה סופית על ידי A וגם $V \neq 0$.

- בשני המקרים הקבוצה V נוצרה סופית ויש לה בסיס.

■

נושא רביעי - מימד:

למה 19. הלמה של שטייניץ

- יהא V מרחב וקטורי ותהא A קבוצה פורשת של V ו-B קבוצה בת"ל. אזי $|B| \leq |A|$
  - כלומר, מספר האיברים בכל קבוצה פורשת גדול או שווה ממספר האיברים בכל קבוצה בת"ל.

הוכחה. נוכיח עבור מקרה פרטי:

- יהא V מרחב וקטורי.
  - תהא $A = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ קבוצה פורשת.
  - ותהא $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ קבוצה בת"ל.
- נגדיר $A_1 = \{\underline{v}_1, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$:
  - A_1 היא קבוצה פורשת ותלויה ליניארית כי $\underline{v}_1$ הוא צירוף ליניארי של האחרים (כי A פורשת).
    - לכן, יש ב-A_1 איבר שהוא צירוף ליניארי של קודמיו.
    - לא ייתכן שהאיבר הזה הוא $\underline{v}_1$ כי הנחנו ש-$\{\underline{v}_1\}$ בת"ל. הערה - אם יש לנו קבוצה עם איבר אחד שהוא לא אפס, אז היא בת"ל.
    - כלומר, האיבר שהוא צ"ל של קודמיו מוכרח להיות אחד מה-$\underline{w}$.

1. נניח בה"כ כי $\underline{w}_2$ הוא צ"ל של קודמיו.
   (א) נשמיט אותו ונגדיר קבוצה חדשה בלעדיו - $A_2 = \{\underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2\}$

(ב) A_2 היא קבוצה פורשת כי $\underline{w}_2$ היה צירוף ליניארי של קודמיו.

2. נגדיר קבוצה נוספת $A_3 = \{\underline{v}_2, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2\}$.

(א) מכיוון ש$A_2 \subseteq A_3$, גם A_3 היא פורשת.

(ב) הוקטור הנוסף ($\underline{v}_2$) הוא צירוף ליניארי של האחרים כי A_2 פורשת.

i. ולכן A_3 היא תלויה ליניארית.

א׳. ולכן יש ב-A_3 איבר שהוא צירוף ליניארי של קודמיו.

ב׳. האיבר הזה לא יכול להיות $\underline{v}_1$ או $\underline{v}_2$ כי הם חלק מקבוצה B שהיא בת"ל ולכן גם הם בת"ל.

ג׳. לכן האיבר הזה הוא אחד מה-$\underline{w}_i$.

ד׳. נניח בה"כ ש-$\underline{w}_1$ הוא צירוף ליניארי של קודמיו.

ה׳. נשמיט את $\underline{w}_1$

ו׳. נגדיר $A_4 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_3\}$. היא פורשת כי גם A_3 פורשת ומכילה אותה.

ז׳. נגדיר $A_5 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{w}_3\}$. היא פורשת כי היא מכילה את A_4.

ח׳. היא ת"ל כי $\underline{v}_3$ צירוף ליניארי של כל האחרים (כ A_4פורשת)

ט׳. לכן יש בה איבר שהוא צירוף ליניארי של קודמיו.

י׳. האיבר הזה הוא לא $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ כי הם בת"ל.

י״א. לכן האיבר הזה הוא בהכרח $\underline{w}_3$.

י״ב. נשמיט את $\underline{w}_3$ ונקבל $A_6 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$, שהיא פורשת.

י״ג. ובפרט $\underline{v}_4$ היא צ"ל של $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.

י״ד. זו סתירה להנחה ש-B בת"ל.

■

מסקנה 20. אם V נוצר סופית אזי בכל שני בסיסים יש אותו מספר איברים.

הוכחה.

- יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית ויהיו B_1, B_2 שני בסיסים שלו.
- מצד אחד, B_1 הוא פורש ו- B_2 בת"ל ולכן לפי הלמה של שטייניץ מתקיים $|B_2| \leq |B_1|$
- מצד שני, B_2 הוא פורש ו- B_1 בת"ל ולכן לפי הלמה של שטייניץ מתקיים $|B_1| \leq |B_2|$
  - לכן $|B_1| = |B_2|$
    - * כלומר, מספר האיברים בבסיס הראשון שווה למספר האיברים בבסיס השני.

■

הגדרה 21. מימד

מספר האיברים בבסיס נקרא **המימד** של המרחב, ועבור מרחב וקטורי V הוא מסומן $dim\ V$

משפט 22. יהא V מרחב וקטורי ממימד n. (נסמן $dimV = n$). אזי:

1. בכל קבוצה בת"ל יש לכל היותר n איברים.
2. בכל קבוצה פורשת יש לפחות n איברים.

3. כל קבוצה בת"ל עם n איברים היא בסיס.
4. כל קבוצה פורשת עם n איברים היא בסיס.
5. כל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס (ע"י הוספת וקטורים).

מסקנה 23. אם יש קבוצה עם יותר מ-n וקטורים אז היא תלויה ליניארית.

מסקנה 24. אם יש קבוצה עם פחות מ-n וקטורים אז היא לא פורשת.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 14 - יוסי

שם: איל שטיין

December 11, 2022

נושא השיעור:

נושא ראשון - מימד

תזכורת מהשיעור הקודם:

- $dim\left\{0\right\}=0$

משפט 1. יהא V מרחב וקטורי ממימד n. (נסמן $dimV=n$). אזי:

1. בכל קבוצה בת"ל יש לכל היותר n איברים.
2. בכל קבוצה פורשת יש לפחות n איברים.
3. כל קבוצה בת"ל עם n איברים היא בסיס.
4. כל קבוצה פורשת עם n איברים היא בסיס.
5. כל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס (ע"י הוספת וקטורים).

מסקנה 2. אם יש קבוצה עם יותר מ-n וקטורים אז היא תלויה ליניארית.

מסקנה 3. אם יש קבוצה עם פחות מ-n וקטורים אז היא לא פורשת.

הוכחה. **- נוכיח לפי הסדר:** ■

1. **צ"ל:** אם $dim\left(V\right)=n$ אזי בכל קבוצה בת"ל יש לכל היותר n איברים.
   - לפי הגדרת בסיס, הוא גם קבוצה פורשת (תזכורת - ההגדרה של בסיס היא קבוצה פורשת ובת"ל).
   - לכן, על פי למת ההחלפה של שטייניץ (במ"ו, כמות האיברים בכל קבוצה בת"ל קטנה או שווה תמיד לכמות האיברים בקבוצה פורשת):
     - לכל קבוצה בת"ל יש לכל היותר n איברים.
2. **צ"ל:** אם $dim\left(V\right)=n$ אזי בכל קבוצה פורשת יש לפחות n אברים.
   - מכיוון ש- $dim\left(V\right)=n$, קיים ל-V בסיס בן n איברים.

- לפי הגדרת בסיס, הבסיס הזה בגודל n הוא גם קבוצה פורשת וגם בת"ל.
  - שוב על פי הלמה של שטייניץ, בכל קבוצה פורשת יש לכל הפחות n איברים.

3. **צ"ל:** אם $dim\left(V\right)=n$ אזי כל תת-קבוצה בת"ל עם n איברים היא בסיס.
   - תהא B קבוצה פורשת עם n איברים.
     - על פי (1) היא בהכרח בת"ל מקסימלית ולכן בסיס.
4. **צ"ל:** אם $dim\left(V\right)=n$ אזי כל תת-קבוצה בת"ל עם n איברים היא בסיס.
   - תהא B קבוצה פורשת עם n איברים.
   - לפי (2) היא בהכרח קבוצה פורשת מינימלית ולכן היא בסיס.
5. **צ"ל:** אם $dim\left(V\right)=n$ אזי כל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס (ע"י הוספת וקטורים).
   - תהא B קבוצה בת"ל.
     - אם $|B|=n$ סיימנו על פי (3).
     - אם $|B|<n$ אז על פי (1) זה לא בסיס כי כל הבסיסים בגודל n.
   - B זו גם לא קבוצה פורשת, על פי (2), ולכן קיים איבר ב-V שאינו צירוף ליניארי של איברי B.
     - אם קיים איבר כזה, נוסיף אותו ל-B.
       - נבדוק שוב האם $|B|=n$
         - אם $|B|\neq n$ אז נמשיך בתהליך עד שנקבל $|B|=n$.

תרגיל 4. נתונה קבוצת וקטורים בת"ל $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_m\}$.
צ"ל: הראו שאם $\underline{b}$ איננו צ"ל של $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_m$ אזי $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_m,\underline{b}$ בת"ל.

הוכחה.

- נניח כי $\alpha_1\underline{a}_1+\alpha_2\underline{a}_2+\ldots\alpha_m\underline{a}_m+\alpha\cdot\underline{b}=\underline{0}$
  - אם $\alpha\neq 0$ נקבל סתירה להנחה (ש-$\underline{b}$ איננו צ"ל של קבוצת ה-a), שהרי אז:

$$\underline{b}=-\frac{\alpha_1}{\alpha}\underline{a}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha}\underline{a}_2-\ldots-\frac{\alpha_m}{\alpha}\underline{a}_m$$

  - לכן $\alpha=0$.
    - ומכיוון שהנחנו ש-$\alpha_1\underline{a}_1+\alpha_2\underline{a}_2+\ldots\alpha_m\underline{a}_m+\alpha\cdot\underline{b}=\underline{0}$ וגם $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_m\}$ בת"ל
      - נובע כי $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$

■

משפט 5.
יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית ויהא U תת מרחב של V.
אזי $dim\left(U\right)\leq dim\left(V\right)$,
ושוויון $dim\left(U\right)=dim\left(V\right)$ יתרחש אם ורק אם $U=V$.

הוכחה.

- נסמן $n = dim\left(V\right)$.
- יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית.
- תהא $U \subseteq V$ תת מרחב של V.
- **הוכחה של אי השוויון:**
- נניח בשלילה ש-$dim\left(U\right) > n$.
  - נקבל של-U יש בסיס שבו יש מספר איברים גדול מ-n.
  - הבסיס של U הוא בת"ל ומוכל ב-V (לפי הגדרת בסיס).
    - קיבלנו שב-V קיימת קבוצה בת"ל עם יותר מ-n איברים.
      - זו סתירה לסעיף (1) מהמשפט הקודם, שלא יכולה להיות קבוצה בת"ל עם יותר מ-n איברים.
- **הוכחה של השוויון:**
- <u>כיוון ראשון:</u> נניח ש-$dim\left(U\right) = n$.
  - נקבל שהבסיס של U הוא בת"ל עם n איברים.
  - מכיוון שהוא מוכל ב-V, לפי סעיף (3) מהמשפט הקודם, (שכל תת-קבוצה בת"ל עם n איברים היא בסיס), הוא גם בסיס ל-V.
    - אם נסמן את הבסיס הזה ב-B, נקבל ש-$U = span\left(B\right)$ וגם $V = span\left(B\right)$
      - ולכן $U = V$
- <u>כיוון שני:</u> נניח כי $U = V$.
  - נתון ש $dim\left(V\right) = n$
    - ולכן יתקיים $n = dim\left(V\right) = dim\left(U\right)$.

■

מסקנה 6. אם $U \subsetneq V$ (כלומר מוכל ממש) אז $dim\left(U\right) < dim\left(V\right)$

תרגיל 7. יהא V מרחב וקטורי ויהיו $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n, b \in V$.
נסמן $A = \left\{\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{n-1} - \underline{v}_n\right\}$
נסמן $B = \left\{\underline{v}_1 + \underline{b}, \underline{v}_2 + \underline{b}, \ldots, \underline{v}_n + \underline{b}\right\}$
נסמן $C = \left\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\right\}$.
נתון כי C הוא בסיס של V.
צ"ל:
א. A בת"ל.
ב. $span\left(A\right) \subseteq span\left(B\right)$
ג. אם B תלויה ליניארית אזי $span\left(B\right) = span\left(A\right)$

פתרון:

א. - לפתור לבד.

ב.

- ניקח איבר $\underline{v}_i - \underline{v}_{i+1} \in A$
- מכיוון ש$\underline{v}_i - \underline{v}_{i+1} = (\underline{v}_i + \underline{b}) - \left(\underline{v}_{i+1} + b\right) \in span\left(B\right)$
  - האיבר הזה יימצא ב-$span\left(B\right)$,
    - כלומר $A \subseteq span\left(B\right)$
      - ואז $span\left(A\right) \subseteq span\left(B\right)$

ג. נניח $span\left(A\right) \subseteq span\left(B\right)$

- לפי המשפט הקודם, $dim\left(spanA\right) \leq dim\left(spanB\right)$
- מכיוון ש-B תלויה ליניארית ונפרשת על ידי n איברים, לפי המשפט אחד מהאיברים הללו הוא צ"ל של האחרים
  - ולכן הקבוצה $span\left(B\right)$ נפרשת לכל היותר על ידי $n-1$ איברים.
    - כלומר, המימד של B הוא לכל היותר $n-1$.
- כלומר $dim\left(spanA\right) \leq dim\left(spanB\right) \leq n-1$
  - $span\left(A\right)$ הוא תמ"ו שנפרש על ידי A.
    - ומכיוון ש-A בת"ל, אזי A היא בסיס של $span\left(A\right)$ לפי משפט.
      - ולכן $dim\left(spanA\right) = n-1$
- מכיוון שלפי הנתון בשאלה $span\left(A\right) \subseteq span\left(B\right)$,
  - לכן, $span\left(A\right) = span\left(B\right)$

משפט 8. משפט המימדים הראשון.

- יהא V מרחב וקטורי ויהיו U, W תתי מרחבים של V.
  - אזי מתקיים $dim\left(U+W\right) = dim\left(U\right) + dim\left(W\right) - dim\left(U \cap W\right)$

הוכחה.

- נסמן $dim\left(U \cap W\right) = k$.
- נסמן $dim\left(W\right) = m$.
- נסמן $dim\left(U\right) = n$.
- נוכיח ש-$dim\left(U+W\right) = n+m-k$:
  - יהא $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$ בסיס ל-$U \cap W$.

* נשלים אותו לבסיס של U.
  · מותר לעשות זאת כי אם יש קבוצה בת"ל, לפי סעיף (5) במשפט אפשר להשלים אותה לבסיס.
  · נקבל בסיס של U שהוא: $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{u}_{k+1},\underline{u}_{k+2},\ldots\underline{u}_n\}$
* מאידך, באותו האופן נשלים את הבסיס של $U\cap W$ לבסיס של W
  · נקבל בסיס של W שהוא: $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{w}_{k+1},\underline{w}_{k+2},\ldots\underline{w}_n\}$

– נסמן $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{u}_{k+1},\underline{u}_{k+2},\ldots\underline{u}_n,\underline{w}_{k+1},\underline{w}_{k+2},\ldots\underline{w}_n\}$

– נוכיח שהקבוצה B היא בסיס של $U+W$:
* מספר האיברים ב-B הוא $k+(n-k)+(m-k)=m+n-k$
  · ולכן אם נוכיח ש-B הוא בסיס של $U+W$ סיימנו את הוכחת המשפט כי מצאנו את המימד של $U+W$.

1. B פורשת את $U+W$ כי:

(א) אם ניקח $\underline{u}+\underline{w}\in U+W$ נוכל לכתוב:

$$\underline{u}+\underline{w}=\overbrace{\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k+\alpha_{k+1}\underline{u}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\underline{u}_n}^{\in U}+\overbrace{\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k+\alpha_{k+1}\underline{w}_{k+1}+\ldots+\alpha_m\underline{w}_m}^{\in W}$$

2. B בת"ל כי:

הערה 9. שיטה להראות אי תלות היא לקחת צירוף ליניארי ולהשוות ל-0.

(א) נניח ש $\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k+\beta_{k+1}\underline{u}_{k+1}+\ldots+\beta_n\underline{u}_n+\delta_{k+1}\underline{w}_{k+1}+\ldots+\delta_m\underline{w}_m=\underline{0}$

(ב) נעביר את כל ה-$\underline{w}$ אגף ונקבל:

$$\overbrace{\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k+\beta_{k+1}\underline{u}_{k+1}+\ldots+\beta_n\underline{u}_n}^{\in U}=\overbrace{-\delta_{k+1}\underline{w}_{k+1}-\ldots-\delta_m\underline{w}_m}^{\in W}$$

i. לכן, שני האגפים שייכים ל-$U\cap W$.

א׳. מכיוון שלקחנו את $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\}$ להיות הבסיס של $U\cap W$, אפשר לכתוב את הוקטור שהיה ב-W כצ"ל של הבסיס הזה כי גם W ב$U\cap W$:

$$\underbrace{-\delta_{k+1}\underline{w}_{k+1}-\ldots-\delta_m\underline{w}_m}_{\in U\cap W}=\lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\lambda_k\underline{v}_k$$

נעביר אגף ונקבל:

$$\underline{0}=\lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\lambda_k\underline{v}_k+\delta_{k+1}\underline{w}_{k+1}+\ldots+\delta_m\underline{w}_m$$

ב׳. אבל כאמור, הוקטור הוא צ"ל של איברי הבסיס של W, והבסיס הוא בת"ל ולכן:

$$\delta_{k+1}=\ldots=\delta_m=\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0$$

ג׳. נציב את $\delta_{k+1} = \ldots = \delta_m = 0$ ב-(2. א׳) ונקבל:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k \underline{v}_k + \beta_{k+1} \underline{u}_{k+1} + \ldots + \beta_n \underline{u}_n = \underline{0}$$

ד׳. אבל זהו צ״ל של הבסיס של U ולכן:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$$

- הוכחנו ש-B בסיס של $U+W$ והראינו שכמות האיברים ב-B היא $m+n-k$.
  - לכן, $dim\left(U+W\right) = n+m-k$.
  - כלומר:

$$dim\left(U+W\right) = dim\left(U\right) + dim\left(W\right) - dim\left(U \cap W\right)$$

■

תרגיל 10. יהיו $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ויהיו U, W תתי מרחבים של $\mathbb{R}^4$ כך ש:

1. $dim\left(U\right) > dim\left(W\right)$
2. $U \cap W = span\left\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\right\}$
3. $\underline{v}_4 \notin U + W$

צ״ל: מצאו בסיס של W וחשבו את $dim\left(U\right)$

פתרון:

- נחפש בסיס ל-$U \cap W$:
  - נשים את איברי הוקטורים בשורות של מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– נדרג אותה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– ולכן נקבל ש- $U \cap W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

* ולכן $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של $U \cap W$.

· ומכיוון שהקבוצה הזו היא בסיס ויש לה שני איברים, מתקיים $dim\left(U \cap W\right) = 2$

• נשתמש במשפט המימדים הראשון, $dim\left(U + W\right) = dim\left(U\right) + dim\left(W\right) - dim\left(U \cap W\right)$.

– מכיוון ש- $\underline{v}_4 \notin U + W$, מתקיים ש- $dim\left(U + W\right) \leq 3$.

* <u>הסבר:</u> זאת מכיוון שאם נניח בשלילה ש$dim\left(U + W\right) = 4$

· לפי הנתון ש- $U + W \subseteq \mathbb{R}^4$, נקבל ש- $\mathbb{R}^4 - U + W$ וזו תהיה סתירה לכך ש$\underline{v}_4 \notin U + W$.

– כלומר, $dim\left(U \cap W\right) = 2$ וגם $dim\left(U + W\right) \leq 3$.

* ולכן נקבל:

$$dim\left(U\right) + dim\left(W\right) \leq 5$$

* ומכיוון ש- $U, W \supseteq U \cap W$ מתקיים ש- $2 = dim\left(U \cap W\right) \leq dim\left(U\right), dim\left(W\right)$

· ומכיוון ש- $dim\left(U\right) > dim\left(W\right)$ נקבל:

$$dim\left(U\right) = 3$$

$$dim\left(W\right) = 2$$

• כעת נמצא בסיס:

- מכיוון ש-$2 = dim\left(U\cap W\right)=dim\left(W\right)$ וגם $U\cap W\subseteq W$,
  * מתקיים ש $U\cap W=W$
    · לכן יש להם אותו בסיס.

נושא שני - דרגה של מטריצה:

דוגמה 11. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- קיבלנו שהדרגה של המטריצה הזו היא 2
- מרחב השורות של A הוא $span\left\{ \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}\right\}$
  - ומכיוון שדירגנו וקיבלנו 2, נקבל ש $2=dim\left(row\left(A\right)\right)=dim\left(span\left\{ \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\ 8\\ 9\end{pmatrix}\right\} \right)$
- כלומר, $dim\left(row\left(A\right)\right)=r\left(A\right)$

משפט 12. $dim\left(row\left(A\right)\right)=r\left(A\right)$

משפט 13. $r\left(A\right)=r\left(A^{t}\right)$
כלומר, מימד מרחב השורות ולמימד מרחב העמודות ושווה לדרגה של A.

דוגמה 14. למשפט 12:

- $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix}$.
  - אזי $row\left(A\right)=span\left\{ \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 7\\ 8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\ 10\\ 11\\ 12\end{pmatrix}\right\}$
  - וגם $col\left(A\right)=span\left\{ \begin{pmatrix}1\\ 5\\ 9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 6\\ 10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\ 8\\ 12\end{pmatrix}\right\}$
- ויתקיים $dim\left(row\left(A\right)\right)=dim\left(col\left(A\right)\right)$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 15 - יוסי

שם: איל שטיין

December 14, 2022

נושא השיעור:

נושא ראשון - דרגה של מטריצה

הגדרה 1. מספר השורות השונות מ-0 של המטריצה מדורגת של A נקרא **הדרגה** של A ומסומן $r\left(A\right)$ או $rank\left(A\right)$

משפט 2. $dim\left(row\left(A\right)\right)=rank\left(A\right)$
מימד מרחב השורות של A שווה לדרגה של A.

משפט 3. $rank\left(A\right)=rank\left(A^{t}\right)$
כלומר, מימד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות: $dim\left(row\left(A\right)\right)=dim\left(col\left(A\right)\right)=r\left(A\right)=r\left(A^{t}\right)$

הוכחה. ■

- תהא B מטריצה $m\times n$ מדרגה r.
  - אזי המימד של $dim\left(row\left(B\right)\right)=r$
  - לכן יש r שורות $\left\{ s_{1},s_{2},\ldots,s_{r}\right\}$ שהן בסיס ל-$row\left(B\right)$.
    - בפרט כל שורה היא צירוף ליניארי של $\left\{ s_{1},s_{2},\ldots,s_{r}\right\}$
    - נסמן את השורות $\underline{R}_{1},\underline{R}_{2},\ldots,\underline{R}_{m}$ ונקבל שקיימים סקלארים כך ש:

$$\underline{R}_{1}=\alpha_{11}\cdot\underline{s}_{1}+\alpha_{12}\cdot\underline{s}_{2}+\ldots+\alpha_{1r}\cdot\underline{s}_{r}$$

$$\underline{R}_{2}=\alpha_{21}\cdot\underline{s}_{1}+\alpha_{22}\cdot\underline{s}_{2}+\ldots+\alpha_{2r}\cdot\underline{s}_{r}$$

$$\ldots$$

$$\underline{R}_m = \alpha_{m1} \cdot \underline{s}_1 + \alpha_{m2} \cdot \underline{s}_2 + \ldots + \alpha_{mr} \cdot \underline{s}_r$$

* נסמן את השורות על פי איברי השורה של המטריצה לפני דירוג:

$$\begin{cases} R_1 = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}) \\ \ldots \\ \underline{R}_m = (b_{m1}, b_{m2}, \ldots, b_{mn}) \end{cases}$$

* ונסמן

$$\underline{s}_1 = (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n})$$

$$\ldots$$

$$\underline{s}_r = (s_{r1}, s_{r2}, \ldots, s_{rn})$$

· נציב ונקבל:

$$(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}) = \alpha_{11} \cdot (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n}) + \ldots + \alpha_{1r} \cdot (s_{r1}, s_{r2}, \ldots, s_{rn})$$

$$\ldots$$

$$(b_{m1}, b_{m2}, \ldots, b_{mn}) = \alpha_{m1} \cdot (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1n}) + \ldots + \alpha_{mr} \cdot (s_{r1}, s_{r2}, \ldots, s_{rn})$$

– נקבל ש c_1, שנראה כך: $c_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = s_{11} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + s_{21} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + s_{r1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \ldots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix}$ הוא צירוף ליניארי של העמודות

– וכן $c_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \ldots \\ b_{m2} \end{pmatrix} = s_{12} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + s_{22} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + s_{r2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \ldots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix}$

– עד $c_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \ldots \\ b_{mi} \end{pmatrix} = s_{1i} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + s_{2i} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + s_{ri} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \ldots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix}$

- נסמן ב- $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \cdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}$ עד $\underline{v}_r = \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \cdots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix}$
  - קיבלנו שמרחב העמודות נפרש על יד $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r\}$
    - כלומר, $dim\,(col\,(B)) \leq r = dim\,(row\,(B))$
    - הראינו כי $dim\,(B) \leq dim\,(row\,(B))$
      - נפעיל את התוצאה על B^t ונקבל ש$dim\,(col\,(B^t)) \leq dim\,(row\,(B^t))$
      - ומכיוון ש- $dim\,(col\,(B^t)) = dim\,(row\,(B))$ וגם $dim\,(row\,(B^t)) = dim\,(col\,(B))$
- קיבלנו ש $dim\,(col\,(B)) \leq dim\,(row\,(B))$ וגם $dim\,(col\,(B)) \geq dim\,(row\,(B))$
  - ולכן $dim\,(col\,(B)) = dim\,(row\,(B))$

מסקנה 4. תהא מטריצה $A \in M_{m\times n}\,(\mathbb{F})$.
אזי $r\,(A) \leq min\,\{m, n\}$.

מסקנה 5. נניח שיש לנו שתי מטריצות, Aו-B שהמכפלה שלהן מוגדרת.
אזי:

1. $col\,(AB) \subseteq col\,(A)$
2. $row\,(AB) \subseteq row\,(B)$

וזה גורר:

1. $dim\,(col\,(AB)) \leq dim\,(col\,(A))$
2. $dim\,(col\,(AB)) \leq dim\,(row\,(B))$

ולכן:

1. $r\,(AB) \leq r\,(A)$
2. $r\,(AB) \leq r\,(B)$

משפט 6. משני אי השוויונות הללו נובע המשפט: $r\,(AB) \leq min\,\{r\,(A)\,, r\,(B)\}$

משפט 7. מספר דרגות החופש הוא בדיוק מימד הפתרונים של מערכת הומוגנית $A\underline{x} = 0$.

הוכחה.

-

■

משפט 8. תהא $A\underline{x}=\underline{0}$ מערכת משוואות הומוגנית עם n נעלמים.
מימד מרחב הפתרונים הוא $n-r\left(A\right)$

סימון - לפעמים מסמנים $dim\left(P\left(A\right)\right)=n-r\left(A\right)$

הוכחה.

- נסמן $k=n-r\left(A\right)$. כלומר k זו דרגת החופש.
  - מכיוון שיש k דרגות חופש, זאת אומרת שיש k נעלמים שאפשר לבחור אותם.
  - נסמן אותם ב-$y_{1},y_{2},\ldots,y_{k}$ ואת היתר ב-$y_{k+1},y_{k+2},\ldots,y_{n}$.
    * נקבל $\begin{pmatrix}y_{1}\\ y_{2}\\ \ldots\\ y_{k}\\ \sum y_{i}\\ \ldots\\ \sum y_{*}\end{pmatrix}$
    · נוציא את כל ה-y ונקבל: $\begin{pmatrix}y_{1}\\ y_{2}\\ \ldots\\ y_{k}\\ \sum y_{i}\\ \ldots\\ \sum y_{*}\end{pmatrix}=y_{1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \ldots\\ 0\\ *\\ \ldots\\ *\end{pmatrix}+y_{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \ldots\\ 0\\ *\\ \ldots\\ *\end{pmatrix}+\ldots+y_{k}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ 1\\ *\\ \ldots\\ *\end{pmatrix}$
    · אם נשים את כל הוקטורים הללו בשורות של מטריצה נקבל מטריצה שכבר מדורגת ולכן הוקטורים הללו הם בת"ל.
    · לכן, מימד מרחב הפתרונים שווה ל-k.

■

מסקנה 9. תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.
אם $A\underline{v}=\underline{0}$ לכל $\underline{v}\in\mathbb{F}^{n}$ אזי $A=0$

הוכחה.

- אם כל $\underline{v}\in\mathbb{F}^{n}$ הוא פיתרון של $A\underline{v}=\underline{0}$
  - אז $dim\left(P\left(A\right)\right)$, (שהוא מימד מרחב הפתרונים של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$) שווה ל-$n-r\left(A\right)$
  - ומכייון ש-$dim\left(P\left(A\right)\right)=n$, נקבל $r\left(A\right)=0$ ולכן $A=\underline{0}$

■

מסקנה 10. יהיו $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$
אם $A\underline{v} = B\underline{v}$ לכל $\underline{v} \in \mathbb{F}^n$ אז $A = B$

הוכחה.

- אם $A\underline{v} = B\underline{v}$
  - אז $(A - B)\underline{v} = \underline{0}$
    * זאת אומרת ש-$A - B = 0$ ולכן $A = B$

■

נושא שני - וקטורי קוארדינטות:

- לוקחים בסיס סטנדרטי E, ומוצאים דרך לייצג את המטריצות/פולינומים בצורה פשוטה בשל וקטור ב-$\mathbb{F}^n$.
- מעבירים למטריצה, מדרגים ומקבלים בסיס.
  - צריך להוכיח משפט שכל וקטור ניתן לכתיבה בצורה יחידה בעזרת הבסיס.
  - דבר שני שנצטרך להוכיח הוא שאם קבוצה היא בת"ל במרחב המטריצות אז היא בת"ל גם ב$\mathbb{F}^n$ ואם היא פורשת במרחב המטריצות אז היא פורשת גם ב-$\mathbb{F}^n$.

משפט 11. יהא V מרחב וקטורי ויהא B בסיס ל-V.
אזי כל איבר ב-V ניתן לכתיבה יחידה כצירוף ליניארי של איברי B.

הוכחה.

- נסמן $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$.
- יהא $\underline{v} \in V$
- נניח כי $\underline{v} = \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n$ וגם $\underline{v} = \beta_1 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \cdot \underline{v}_n$
- אזי $\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \underline{v}_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \underline{v}_n$
  - מכיוון שהבסיס בת"ל, מתקיים שיש ייצוג יחיד.

■

הגדרה 12. קוארדינטות:
יהא V מרחב וקטורי ו-$B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ בסיס שלו.
יהא $\underline{v} \in V$.
נציג אותו כצ"ל של איברי הבסיס: $\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n$
אזי $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ נקראים **הקוארדינטות** של $\underline{v}$ בבסיס B.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 16 - יוסי

שם: איל שטיין

December 18, 2022

נושא השיעור: וקטורי קוארדינטות, מטריצות הפיכות

נושא ראשון - וקטורי קוארדינטות

$B = v_1, v_2, \ldots, v_n$

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots \alpha_n \underline{v}_n$

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

טענה 1. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס B.

אזי:

1. לכל $\underline{v}_2, \underline{v}_1 \in V$ מתקיים $[\underline{v}_1 + \underline{v}_2]_B = [\underline{v}_1]_B + [\underline{v}_2]_B$
2. $[\alpha \underline{v}]_B = \alpha [\underline{v}]_B$
3. $\underline{v} = \underline{0}$ אם ורק אם $[\underline{v}]_B = 0$

משפט 2. יהא V מרחב וקטורי ממימד n ויהא B בסיס שלו.

- $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\} \subseteq V$ בת"ל אם ורק אם $\{[\underline{v}]_{B\,1}, [\underline{v}]_{B\,2}, \ldots, [\underline{v}]_{B\,k}\}$ בת"ל ב-$\mathbb{F}^n$
- וגם $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$ פורשות את W אם ורק אם $\{[\underline{v}]_{B\,1}, [\underline{v}]_{B\,2}, \ldots, [\underline{v}]_{B\,k}\}$ את $[W]_B$
  - כאשר $[W]_B = span\{[\underline{v}_1]_B, [\underline{v}_2]_B, \ldots, [\underline{v}_k]_B\}$ אם ורק אם $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$

הוכחה.

- <u>כיוון ראשון: $\Leftarrow$</u>
- נניח כל $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\} \subseteq V$ בת"ל.

– ניקח צירוף ליניארי ונשווה לאפס. נקבל:

$$\alpha_1\left[\underline{v}_1\right]_B+\alpha_2\left[\underline{v}_2\right]_B+\ldots+\alpha_k\left[\underline{v}_k\right]_B=0$$

* לפי הטענה $[\alpha\underline{v}]_B=\alpha\,[\underline{v}]_B$ והטענה $[\underline{v}_1+\underline{v}_2]_B=[\underline{v}_1]_B+[\underline{v}_2]_B$ מתקיים:

$$\left[\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k\right]_B=0$$

· ועל פי הסעיף השלישי בטענה, מתקיים:

$$\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots\alpha_k\underline{v}_k=\underline{0}$$

· ולכן $\alpha_1=\alpha_2=\ldots\alpha_k=0$

- <u>כיוון שני: $\Rightarrow$</u>
- נניח כי $\left\{[\underline{v}]_{B\,1},[\underline{v}]_{B\,2},\ldots,[\underline{v}]_{B\,k}\right\}$ בת"ל ב-$\mathbb{F}^n$
- נניח כי $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots\alpha_k\underline{v}_k=\underline{0}$
- נקבל ש $[\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots\alpha_k\underline{v}_k]=[\underline{0}]_B=\underline{0}$

– ולכן $\alpha_1\left[\underline{v}_1\right]+\alpha_2\left[\underline{v}_2\right]+\ldots+\alpha_k\left[\underline{v}_k\right]=\underline{0}$

* ומכיוון ש $[\underline{v}_1]_B,[\underline{v}_2]_B,\ldots,[\underline{v}_k]_B$ אז מתקיים $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$

■

תרגיל 3. נתון ב$\mathbb{R}_3[x]$

1. $U=span\left\{x^3+2x^2+4x-1,x^3-x^2+3x+2,x^3+11x^2+7x-2\right\}$
2. $W=span\left\{x^3+5x^2+5x,x^2+x+1,x^3+x^2+x-4\right\}$

צ"ל: מצאו בסיס ל:

1. U
2. W
3. $U+W$
4. $U\cap W$

פתרון:

- ניקח ל- $\mathbb{R}_3[x]$ בסיס סטנדרטי $E=\begin{pmatrix}x^3, & x^2, & x, & 1\end{pmatrix}$

- $[U]_E = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\11\\7\\-2\end{pmatrix}\right\}$
- נכתוב בסיס ל-U: **הערה:** כשיש מערכת משוואות, נשים את הוקטורים כעמודות. כשרוצים למצוא בסיס לתת-מרחב שמים את הוקטורים בשורות.

$$\begin{pmatrix}1&2&4&1\\1&-1&3&2\\1&11&7&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-3&-1&1\\0&9&3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&3&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

  – הבסיס שקיבלנו ל-$[U]_E$ הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$
  – נתרגם אותו חזרה ל- $\mathbb{R}_3[x]$ ונקבל $\left\{x^3+2x^2+4x+1,3x^2+x-1\right\}$
- $[W]_E = span\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-4\end{pmatrix}\right\}$
- נכתוב בסיס ל-W ונקבל:

$$\begin{pmatrix}1&5&5&0\\0&1&1&1\\1&1&1&-4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&5&5&0\\0&1&1&1\\0&-4&-4&-4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&5&5&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

  – קיבלנו בסיס ל-$[W]_E$ והוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
    * נתרגם אותו בחזרה ונקבל: $\left\{x^3+5x^2+5x,x^2+x+1\right\}$
- $[U+W]_E=[U]_E+[W]_E=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}+span\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
  – ומכיוון ש-$span(S)+span(T)=span(S\cup T)$ נקבל ש: $[U+W]_E=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\5\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
    * כלומר, מצאנו קבוצה פורשת של $[U+W]_E$

* נשים אותה בתוך מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&3&1&-1\\1&5&5&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&3&1&-1\\0&3&1&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&1&1&1\\0&3&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

· כעת, אפשר לכתוב את הבסיס כ- $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

· נתרגם חזרה ונקבל: $\left\{x^3+2x^2+4x+1,\ \ x^2+x+1,\ \ x+2\right\}$

- כעת אנחנו רוצים למצוא את $U\cap W$.

– כשרוצים למצוא חיתוך בין שני מרחבים, תמיד כדאי למצוא קודם את הסכום שלהם כדי שנוכל

* להשתמש במשפט המימדים לפיו $\overbrace{dim\left(U+W\right)}^{=3}=\overbrace{dim\left(U\right)}^{=2}+\overbrace{dim\left(W\right)}^{=2}-dim\left(U\cap W\right)$

· קיבלנו ש$dim\left(U\cap W\right)=1$

– $\left[U\right]_E=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

– $\left[W\right]_E=span\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

– נחפש וקטור שהוא בחיתוך של שניהם, כלומר $\underline{v}\in\left[W\right]_E\cap\left[U\right]_E$

* קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ כך ש $\underline{v}=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}=\alpha_3\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\5\\0\end{pmatrix}+\alpha_4\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

· נעביר אגפים ונקבל: $\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\-5\\-5\\0\end{pmatrix}+\alpha_4\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

· נכניס לעמודות של מטריצה (כי זו מערכת משוואות) ונקבל:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\2&3&-5&-1&0\\4&1&-5&-1&0\\1&-1&0&-1&0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&3&-3&-1&0\\0&-1&1&-1&0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

- קיבלנו ש $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_3$ ו- $\alpha_4 = 0$
- נסמן $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = t$ ו-$\alpha_4 = 0$
- נציב בחזרה ב-$\underline{v}$ ונקבל: $\underline{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- לכן בסיס של $[U \cap W]_E$ הוא $span \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
- נתרגם בחזרה לפולינומים ונקבל בסיס ל-$U \cap W$ שהוא $span \left\{ x^3 + 5x^2 + 5x \right\}$

תרגיל 4.

1. יהיו $A \in M^{\mathbb{R}}_{m\times n}, B \in M^{\mathbb{R}}_{n\times m}$ כך ש $AB = I$
   (א) הוכיחו כי $rank\,(A) = rank$
2. יהיו $A \in M^{\mathbb{R}}_{m\times n}, B \in M^{\mathbb{R}}_{n\times m}$ כך ש $AB = 0$
   (א) הוכיחו כי $rank\,(A) + rank\,(B) \leq n$

פתרון:

1.

- נסמן $m = rank\,(I_m) = rank\,(AB)$
- לפי משפט מההרצאה הקודמת: $rank\,(AB) \leq min\left\{rank\,(A)\,, rank\,(B)\right\}$
  - ולכן בפרט, $rank\,(AB) \leq rank\,(A)$
- ומכיוון ש-$rank\,(A) \leq mix\left\{m, n\right\}$
  - מתקיים בפרט $rank\,(A) \leq n$
- ולכן $m \leq rank\,(A) \leq m$ וקיבלנו $rank\,(A) = m$
- באותו אופן נקבל שגם $rank\,(B) = m$
- ולכן $rank\,(A) = rank\,(B)$

2.

$$A\underline{v}_1 = \underline{0}$$

$$A\underline{v}_2 = \underline{0}$$

$$\dots$$

$$A\underline{v}_m = \underline{0}$$

- כאשר $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \in P(A)$ כאשר $P(A)$ הוא מרחב הפתרונות המוגדר כ- $P(A) = \{\underline{v} \in \mathbb{F}^n \mid A\underline{x} = 0\}$
- כלומר, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m\} \subseteq P(A)$
  - ולפי משפט $span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m\} \subseteq P(A)$
  - ולפי משפט ש אם $A_{m\times m}$ אז $dimP(A) = n - rank(A)$, מתקיים:
    * $dim\ span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m\} \leq dimP(A) = n - rank(A) = rank(B)$

נושא שני - מטריצות הפיכות:

הגדרה 5. מטריצה ריבועית A נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה ריבועית B כך ש- $AB = I$
המטריצה B נקראת המטריצה ההופכית ומסומנת A^{-1}.

דוגמה 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ואז $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
נכפול אותן ונקבל: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(נקבל אותו דבר גם אם נכפול AA^{-1})

דוגמה 7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ היא לא מטריצה הפיכה.

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix}$
- נשווה אותה למטריצת היחידה ונקבל:
  - $a + c = 1$
  - $b + d = 0$
  - $2a + 2c = 0$
  - $2b + 2d = 1$
- אין למערכת המשוואות הזו פתרון.

משפט 8. יהיו $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש $AB = I_n$ (כלומר, A הפיכה - B ההופכית שלה)
אזי:

1. $rank(A) = n$

2. $BA=I_n$
3. B יחידה (כלומר אם $AC=I$ אז $B=C$)

הוכחה.

1.

- $n=rank\left(I_n\right)=rank\left(AB\right)\leq min\left\{rank\left(A\right),rank\left(B\right)\right\}$
- ולכן $n\leq rank\left(A\right)$
- אבל הדרגה של מטריצה צריכה תמיד להיות שטנה או שווה למספר השורות שלה ולכן $rank\left(A\right)\leq n$
- ולכן $rank\left(A\right)=$

2.

- לפי משפט $rank\left(A\right)=n$ אם ורק אם A שקולת שורה ל-I_n
- לפי משפט אחר, מטריצה היא שקולת שורות למטריצת היחידה אם ורק אם קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,E_2,\ldots,E_k$ כך ש $I=E_k-E_iA$
- נסמן $C:=E_k\ldots E_1$
  - כלומר מצאנו C כך ש- $C\cdot A=I$
    * נסתכל על השוויון $AB=I$ ונכפול משמאל ב-C. נקבל:

$$CAB=C$$

$$\left(CA\right)B=C$$

$$B=C$$

· ולכן $BA=I$

3.

- אם $AB=AD=I$
  - אזי על פי סעיף 2 שהוכחנו עכשיו, נקבל:

$$D\backslash AB=I$$

$$DAB=D$$

$$\left(DA\right)B=D$$

$$B = D$$

■

מסקנה 9.

1. המטריצה A^{-1} גם היא הפיכה ומתקיים $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. אם A הפיכה אזי $AB = AC \Leftarrow B = C$
   (א) הסבר: אם $AB = AC$ אז $AB - AC = 0$ ואז $A^{-1}(AB - AC) = 0$ ולכן $B = C$

הערה 10. יכול להיות שמכפלה של שתי מטריצות נותנת אפס ואף אחת מהמטריצות הן לא מטריצת האפס.

הערה 11. אבל, אם $AB = 0$ ו-A הפיכה אז $B = 0$

משפט 12.

1. אם A, B הפיכות אזי AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   (א) ולהפך, כלומר אם AB הפיכה אז A ו- B הפיכות
2. אם A הפיכה אזי גם A^t הפיכה ומתקיים $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

הוכחה.

1.
   - $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$
     (א) הכיוון ההפוך ל-1:
       - $(AB)\,C = I$
       - $A\,(BC) = I$

2.
   - $A^t \cdot \left(A^{-1}\right)^t = \left(AA^{-1}\right)^t = I^t = I$
     - ולכן $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$
     (א) הכיוון ההפוך ל-2:
       - $C\,(AB) = I$
       - $(CA)\,B = I$

■

טענה 13. מטריצה אלמנטרית היא הפיכה ההופכית שלה היא מטריצה אלמנטרית מאותו סוג.

משפט 14.
תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ריבועית. התנאים הבאים מתקיימים:

1. A הפיכה
2. $rank(A) = n$
3. A שקולת שורות ל-I
4. לכל $\underline{b} \in \mathbb{F}^n$ (כולל $\underline{b} = \underline{0}$) למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ קיים פתרון יחיד.
5. A מכפלת מטריצות אלמנטריות.
6. העמודות שלה בת"ל ופורשות את $\mathbb{F}^n$ (למעשה בסיס) והשורות שלה בת"ל ופורשות את $\mathbb{F}^n$ (למעשה בסיס).

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 17 - יוסי

שם: איל שטיין

December 19, 2022

נושא השיעור: מטריצות הפיכות והעתקות ליניאריות

נושא ראשון - מטריצות הפיכות:

הערה 1. אם $AB=I$ אז A הופכית של B ו-B הופכית של A

הערה 2. $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$

תזכורת - מטריצה אלמנטרית היא מטריצת יחידה שבוצעה עליה פעולה אלמנטרית אחת.

טענה 3. מטריצה אלמנטרית היא הפיכה וההופכית שלה היא מטריצה אלמנטרית מאותו סוג.

משפט 4. תהא $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ריבועית. התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה
2. $rank(A)=n$
3. A שקולת שורות ל-I
4. לכל $\underline{b}\in\mathbb{F}^n$ (כולל $\underline{b}=\underline{0}$) למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ קיים פתרון יחיד.
5. A מכפלת מטריצות אלמנטריות.
6. העמודות של A בת"ל ופורשות את $\mathbb{F}^n$ (למעשה בסיס) וגם השורות של A בת"ל ופורשות את $\mathbb{F}^n$ (למעשה בסיס).

הוכחה.

1. גורר את 2 (ראינו בהרצאה שעברה)

2. גורר את 3 (ראינו בעבר)

3. גורר את 1:

- נניח כי A שקולת שורות ל-I
  - אזי קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, E_2, \ldots, E_k$ כך ש $E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$
  - לכן A הפיכה וההופכית שלה היא $E_k \cdot \ldots \cdot E_1$

4. 2 גורר 4 (ראינו בעבר).

(א) נוכיח ש(4) גורר את (1):

- נניח שלכל $\underline{b} \in \mathbb{F}^n$ (כולל $\underline{b} = \underline{0}$) למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ קיים פתרון יחיד.
  - בפרט למערכות הבאות: (כאשר e_1 עד e_n בסיסים סטנדרטיים):
    * $A\underline{x} = e_1$. נסמן אותו ב- $\underline{x}_1$ונקבל $A\underline{x}_1 = e_1$. נמשיך כך ונקבל:

$$A\underline{x}_1 = e_1$$

$$A\underline{x}_2 = e_2$$

$$\ldots$$

$$A\underline{x}_n = e_n$$

    * נשים את כל הוקטורים הללו למטריצה: $\begin{pmatrix} A\underline{x}_1 & A\underline{x}_2 & \ldots & A\underline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix}$
      · ונקבל $A\overbrace{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)}^{=B} = I$

5.

- גורר את 5:
  - נניח ש A שקולת שורות ל-I,
    * אז קיימות מטריצות אלמנטריות כך ש $E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I$
      · לפי משפט שראינו בהרצאה הקודמת, מתקיים $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$
      · לפי הטענה שפתחנו איתה את ההרצאה, כל מטריצה הופכית של אלמנטרית היא גם אלמנטרית ולכן המכפלה $E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$ היא אלמנטרית
      · לכן מתקיים ש-A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.
- (5) גורר את (1):
  - כלומר: אם A מכפלת מטריצות אלמנטריות, אז A הפיכה.
    * כי מטריצה אלמנטרית היא הפיכה ולכן אפשר להפוך את כל המטריצות במכפלה ונקבל הופכית ל-A.

6. (2) שקול ל-(6).

$\blacksquare$

הערה 5. החלק הכי שימושי במשפט הוא סעיף 4.

- אם מטריצה הפיכה אז למערכת $A\underline{x}=b$ יש פתרון יחיד.

דוגמה 6. בדיקת הופכיות מטריצה ומציאת ההופכי שלה:

- $AB=I$ ורוצים למצוא את B.
  - נכפול את A במטריצות אלמנטריות מצד שמאל ונקבל:

$$E_k\dots E_1\cdot\backslash AB=I$$

$$B=E_k\dots E_1\cdot I$$

    * כלומר, אותו דירוג שעשינו על A בשביל להביא אותה ל-I יביא את I ל-B
- לכן השיטה היא לכתוב את מטריצת היחידה בצד ימין של מטריצה ואת A בצד שמאל כך:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right]$$

  - ועכשיו, אותו דירוג שנעשה על A כדי להביא אותו ל-I, יביא את I (בצד הימני) ל-B

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

משפט 7. A,B שקולות שורה אם ורק אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $A=PB$

הוכחה.

- <u>כיוון ראשון:</u> A,B שקולות שורה $\Leftarrow$ קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $A=PB$
  - A,B שקולות שורה אם ורק אם קיימות $E_k\dots E_1$ אלמנטריות כך ש $A=E_k\dots E_1B$
    * נסמן $P=E_k\dots E_1$
    * ומכיוון שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות, היא הפיכה לפי המשפט הקודם.
- <u>כיוון שני:</u> A,B שקולות שורה $\Rightarrow$ קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $A=PB$

- נניח שקיימת מטריצה P הפיכה כך ש $A = PB$
  * לפי המשפט שראינו בתחילת ההרצאה, כל מטריצה הפיכה ניתנת לכתיבה כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.
    · ולכן $P = E_k \dots E_1$
  * ואם ניתן לכתוב את $A = E_k \dots E_1 B$ אז A, B שקולות שורה.

■

משפט 8. (מסקנה מהמשפט הקודם)

- תהא P הפיכה.
  - אז לכל A מתקיים:
    * גם $rank\left(PA\right) = rank\left(A\right)$
    * וגם $rank\left(AP\right) = rank\left(A\right)$

הוכחה.

- חלק ראשון:
  - אם P הפיכה, אזי על פי המשפט הקודם נקבל שA, PA שקולות שורה.
    * לכן יש להן אותה דרגה, $rank\left(A\right) = rank\left(PA\right)$
- החלק השני:
  - אם מכפילים מטריצה במטריצות אלמנטריות מימין, זה בעצם לבצע דירוג על העמודות שלה.
    * לכן כדי להוכיח כי $rank\left(AP\right) = rank\left(A\right)$ קודם נוכיח משפט דומה למשפט הקודם, כלומר: "AB שקולות עמודה אם ורק אם קיימת מטריצה P כך ש $A = BP$".
    * נקבל את החלק השני של המשפט.

■

תרגיל 9.

נתונה A מטריצה 3×3 כך ש:

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} \quad (3)$$

מצאו את A.

פתרון:

- נשים במטריצה:

$$\left(A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&1\\0&3&2\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&1\\0&3&2\end{pmatrix}$$

- אם המטריצה הזו $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ הפיכה, נכפול בה מימין ונקבל את המטריצה ההופכית של A.
  - אם היא לא הפיכה, נצטרך לקחת את A ולפרק אותו לרכיבים וליצור שלוש מערכות משוואות.
- נמצא את ההופכית של המטריצה $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ על ידי דירוג במקביל למטריצת היחידה:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&-1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]$$

  - קיבלנו ש:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&1\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-2&2&4\\-1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

תרגיל 10. יהיו A,B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$ כך שמתקיים $AB=I+A$

הוכיחו:

א. A הפיכה ומתחלפת עם B

ב. נניח בנוסף כי A סימטרית. הראו כי גם B סימטרית.

א. פתרון:

- נתון: $AB = I + A$
- נעביר את A אגף ונקבל:

$$AB - A = I$$

$$A(B - I) = I$$

  - ולכן A הפיכה.

- מכיוון ש-A הפיכה, נכפול בהופכי שלו משמאל:

$$A^{-1} \backslash AB = I + A$$

$$B = A^{-1}(I + A) \quad \backslash A$$

$$BA = \left(A^{-1} + I\right) A$$

$$BA = I + A$$

  - ולכן $BA = AB$

ב. פתרון:

- כשרוצים לבדוק סימטריות עושים טרנספוז.
  - לפי משפט מההרצאה הקודמת, $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$
    - * ומכיוון ש- A סימטרית, מתקיים $A^t = A$
      - · ולכן $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1} = A^{-1}$
      - · כלומר גם המטריצה ההופכית של A היא סימטרית.
- נכפול משמאל בהפוכי של A ונקבל: $\backslash A^{-1} \quad BA = I + A$
  - כלומר, $B = (I + A) A^{-1}$
  - קיבלנו ש B מכפלת מטריצות סימטריות וקומוטטיביות,
    - * במילים אחרות מתקיים $(I + A) A^{-1} = A^{-1} + I$ וגם $A^{-1}(I + A) = A^{-1} + I$
      - · ולכן גם B סימטרית.

נושא שני - העתקות ליניאריות (טרנספורמציות):

- העתקה היא פונקציה שמעבירה תת מרחב לתת מרחב.
- התמונה של העתקה תמיד תהיה תת מרחב ש"חיה" בטווח.
- מושג חדש - **הגרעין**.
  - הוא חי בתחום וההגדרה שלו היא שההעתקה שולחת את כל האיברים בגרעין לאיבר האפס בטווח.

הגדרה 11. העתקות ליניאריות:

- יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$ (שני המרחבים מעל אותו שדה).
- פונקציה T היא העתקה ליניארית (או טרנספורמציה ליניארית - ט"ל) אם:

1. היא שומרת על חיבור - כלומר לכל $\underline{v}_1,\underline{v}_2\in V$ מתקיים $T\left(\underline{v}_1+\underline{v}_2\right)=T\left(\underline{v}_1\right)+T\left(\underline{v}_2\right)$
2. שומרת על כפל בסקאלר - לכל $\underline{v}\in V$ ו-$\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $T\left(\alpha\underline{v}\right)=\alpha T\left(\underline{v}\right)$

דוגמה 12.

- תהי פונקציה $T:V\to W$ כך שלכל $\underline{v}\in V$ מתקיים $T\left(\underline{v}\right)=\underline{0}_w$
  - נָראה שT היא טרנספורמציה ליניארית (ט"ל):
    - ניקח $\underline{v}_1,\underline{v}_2\in V$.
      - אזי $T\left(\underline{v}_1+\underline{v}_2\right)=T\left(\underline{v}_1\right)+T\left(\underline{v}_2\right)$
    - ניקח $\underline{v}\in V$ וניקח $\alpha\in\mathbb{F}$.
      - אזי $\overbrace{T\left(\lambda\underline{v}\right)}^{=\underline{0}}=\lambda\overbrace{T\left(\underline{v}\right)}^{=0}$

דוגמה 13.

- תהי פונקציה $T:V\to V$ כך שלכל $\underline{v}\in V$ מתקיים $T\left(\underline{v}\right)=\underline{v}$
  - נָראה שT היא טרנספורמציה ליניארית (ט"ל):
    - ניקח $\underline{v}_1,\underline{v}_2\in V$.
      - ואז לפי הגדרת T מתקיים $T\left(\underline{v}_1+\underline{v}_2\right)=T\left(\underline{v}_1\right)+T\left(\underline{v}_2\right)=\underline{v}_1+\underline{v}_2$
    - ניקח $\underline{v}\in V$ וניקח $\lambda\in\mathbb{F}$.
      - ואז לפי הגדרת T יתקיים $T\left(\lambda\underline{v}\right)=\lambda T\left(\underline{v}\right)$

דוגמה 14. העתקת הטלה

- תהי פונקציה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$. כלומר, $T\left(x,y,z\right)=\left(x,y\right)$
  - נָראה שT היא טרנספורמציה ליניארית (ט"ל):
    - ניקח $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$ וניקח $\left(x_1,x_2,x_3\right),\left(y_1,y_2,y_3\right)\in\mathbb{R}^3$

• ואז

$$
\begin{aligned}
T\left(\lambda_1\left(x_1, x_2, x_3\right)+\lambda_2\left(y_1, y_2, y_3\right)\right) &= T\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 y_1, \lambda_1 x_2+\lambda_2 y_2, \lambda_1 x_3+\lambda_2 y_3\right) \\
&= \left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 y_1, \lambda_1 x_2+\lambda_2 y_2\right) \\
&= \lambda_1\left(x_1, x_2\right)+\lambda_2\left(y_1, y_2\right) \\
&= \lambda_1 T\left(x_1, x_2, x_3\right)+\lambda_2 T\left(y_1, y_2, y_3\right)
\end{aligned}
$$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 18 - יוסי

שם: איל שטיין

December 25, 2022

נושא השיעור: העתקות ליניאריות

נושא ראשון - העתקה ליניארית

זו פונקציה מ-V ל-W השומרת על החיבור ועל הכפל בסקלאר.
כלומר, $T:V\to W$ היא ט"ל אם:

1. $T\left(\underline{v}_1+\underline{v}_2\right)=T\left(\underline{v}_1\right)+T\left(\underline{v}_2\right)$
2. $T\left(\lambda\underline{v}_1\right)=\lambda T\left(\underline{v}_1\right)$

דוגמה 1.

- תהי ט"ל T כך ש- $T\left(\underline{v}\right)=A\underline{v}$
  - כאשר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
  - $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
- אזי לפי הגדרת T וחוקי מטריצות מתקיים:
  - גם $T\left(\underline{v}_1+\underline{v}_2\right)=A\left(\underline{v}_1+\underline{v}_2\right)=A\underline{v}_1+A\underline{v}_2=T\left(\underline{v}_1\right)+T\left(\underline{v}_2\right)$ לכל $\underline{v}_1,\underline{v}_2\in\mathbb{R}^2$
  - וגם $T\left(\lambda\underline{v}\right)=A\left(\lambda\underline{v}\right)=\lambda T\left(\underline{v}\right)$ לכל $\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$

דוגמה 2. ניקח את הדוגמא הקודמת ונכליל אותה למקרה כללי:
עבור $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ועבור $A\in M_{m\times n}^{(\mathbb{R})}$ מתקיים שהפונקציה $T\left(\underline{v}\right)=A\underline{v}$ היא העתקה ליניארית.
ההוכחה היא אותו דבר כמו הדוגמא הקודמת.

הערה 3. בהמשך נראה שכל העתקה ליניארית היא מטריצה.

דוגמה 4.

- תהי הפונקציה $T\left(x,y,z\right)=\left(x,y,1-z\right)$ המוגדרת $T:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{3}$
- הפונקציה הזו היא לא ט"ל. נביא דוגמא נגדית:
  - $T\left(1,1,1\right)=\left(1,1,0\right)$
  - $T\left(2,2,2\right)=\left(2,2,-1\right)$
  - $T\left(3,3,3\right)=\left(3,3,-2\right)$
    * ומכיוון ש $T\left(1,1,1\right)+T\left(2,2,2\right)\neq T\left(3,3,3\right)$ הפונקציה הזו היא לא ט"ל.
- באותו מידה יכולנו להביא דוגמא נגדית $T\left(0,0,0\right)=\left(0,0,1\right)$
  - ולהראות ש $0\cdot T\left(\underline{v}\right)=\left(0,0,0\right)$ אבל $T\left(0,0,0\right)\neq\left(0,0,0\right)$

דוגמה 5.

- יהיו:
  - $\underline{v}_{1}=\mathbb{R}_{3}\left[x\right]$
  - $\underline{v}_{2}=\mathbb{R}_{2}\left[x\right]$
  - $T:\mathbb{R}_{2}\left[x\right]\to\mathbb{R}_{3}\left[x\right]$
- נגדיר את הפונקציה כך: $T\left(p\left(x\right)\right)=p'\left(x\right)$ ונוכיח שהיא העתקה ליניארית:
  - נוכיח סגירות לחיבור:

$$T\left(p\left(x\right)+q\left(x\right)\right)=\left(p\left(x\right)+q\left(x\right)\right)'$$

* ולפי חוקי גזירה מתקיים:

$$=p'\left(x\right)+q'\left(x\right)$$

* ולפי הגדרת T מתקיים:

$$=T\left(p\left(x\right)\right)+T\left(q\left(x\right)\right)$$

  - נוכיח סגירות לכפל בסקאלר:

$$T\left(\lambda\underline{v}\right)=\left(\lambda p\left(x\right)\right)'$$

* ולפי חוקי גזירה והגדרת T מתקיים:

$$= \lambda\left(p\left(x\right)\right)' = \lambda T\left(p\left(x\right)\right)$$

- כלומר כל פונקציה שמקבלת פולינום ומחזירה נגזרת היא ט"ל.

משפט 6. תהא $T: V \to W$ ט"ל.

- אזי:

1. $T\left(\underline{0}_V\right) = \underline{0}_W$
2. $T\left(-\underline{v}\right) = -T\left(\underline{v}\right)$
3. $T\left(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n\right) = \lambda_1 T\left(\underline{v}_1\right) + \ldots + \lambda_n T\left(\underline{v}_n\right)$

הוכחה.

1. הראנו בדוגמא (4).
2. $T\left(\lambda \underline{v}\right) = \lambda T\left(\underline{v}\right)$
   - נבחר $\lambda = -1$ ונקבל את הנדרש.
3. לא הוכחנו בשיעור.

■

נושא שני - גרעין ותמונה:

- הקדמה - אם יש לנו פונקציה $T: V \to W$
  - הגרעין נקרא קר-T (Ker, מלשון $Kernel$) והוא תת מרחב בפני עצמו. הוא כולל את כל האיברים בתחום שהולכים לוקטור האפס.
  - התמונה היא כל האיברים בטווח שיש איבר מהתחום שהולך אליהם.

הגדרה 7. גרעין ותמונה:

- תהא $T: V \to W$
- אזי:
  - **הגרעין** של T מוגדר להיות $Ker\ T := \{\underline{v} \in V \mid T\left(\underline{v}\right) = \underline{0}_W\}$
  - **התמונה** של T מוגדר להיות $Im\ T := \{T\left(\underline{v}\right) \mid \underline{v} \in V\}$

דוגמה 8. העתקת האפס:

- $T:V\to W$ כאשר $T\left(\underline{v}\right)=\underline{0}_W$
  - אזי $ker\ T=V$
  - וגם $Im\ T=\left\{ \underline{0}_W\right\}$

הערה 9.

- המימד של $Ker\ T$ הוא אותו המימד של V כי הם שווים זה לזה.
- המימד של Im הוא אפס.
  - בהמשך נראה משפט על הסכום שלהם.

דוגמה 10.

- $T:V\to V$ כך ש $T\left(\underline{v}\right)=\underline{v}$
  - אזי $Ker\ T=\left\{ \underline{0}_V\right\}$ ו- $Im\ T=V$

דוגמה 11.

- $T\left(\left(x,y,z\right)\right)=\left(x,y\right)$
  - נמצא את $Ker\ T$
    - נחפש $\left(x,y,z\right)$ כך ש $T\left(x,y,z\right)=\left(0,0\right)$
    - נשים לב שזה יקרה כאשר $x=y=0$
      - ולכן $Ker\ t=\left\{ \left(0,0,t\right)\right\} =sp\left\{ \left(0,0,1\right)\right\}$
  - נמצא את $Im\ T$
    - $Im\ T=\left\{ \left(x,y\right)\ \mid\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$
      - זה שווה ל- $\left\{ x\cdot\left(1,0\right)+y\cdot\left(0,1\right)\ \mid\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$
      - וזה שווה ל $span\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\right\} =\mathbb{R}^2$

הערה 12. נשים לב שוב, ש $dim\left(Ker\ T\right)=1$ ו- $dim\left(Im\ T\right)=2$ כי בהמשך נראה משפט על הסכום שלהם.

דוגמה 13.

- תהי ט"ל $T=A\underline{v}$ עבור $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$ המוגדרת $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
- כדי למצוא את $Ker\ T$ נחפש $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ כך ש $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ או לפי הגדרת T יתקיים $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
  - מכיוון ש-A מדורגת, הדרגה שלה היא 2
    - לכן A הפיכה
      - נתבונן ונראה ש $x=y=0$

- כדי למצוא את $Im\ T$ נחפש את כל ה $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ כך שיש פיתרון $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ למשוואה $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  - נקבל מערכת משוואות:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & z \\ 0 & -1 & w \end{array}\right]$$

* יש פתרון לכל $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ שניקח ולכן התמונה היא $\mathbb{R}^2$.

· הערת אגב - יכולנו לכפול את שתי המטריצות $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ולקבל שזה שווה ל- $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, כלומר שווה ל-$\mathbb{R}^2$

דוגמה 14.

- תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ט"ל המוגדרת $T(\underline{v}) = A\underline{v}$ ו- $A = M^{\mathbb{R}}_{m\times n}$
  - אזי $Ker\ T = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$
  - מרחב העמודות של $Im\ T = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n :\ A\underline{v} = \underline{w}\} = col(A) = A$
- במקרה הזה, $dim(Ker\ T) + dim(Im\ T) = n$
  - במקרה שלנו $dim(Ker\ T)$ הוא המימד של מרחב הפתרונים של מערכת הומוגנית, שמסומן $\underline{p}(A)$ ומוגדר להיות $\underline{p}(A) = \{\underline{x} \in \mathbb{F}^n \mid A\underline{x} = 0\}$
  - וגם $dim(Im\ T)$ שווה לדרגה של A

דוגמה 15. ניקח ט"ל המוגדרת $T(p(x)) = p'(x)$ על $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

- $T\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$
  - הפולינום הזה יהיה שווה אפס כאשר $a = b = c = 0$
    * ולכן $Ker\ T = span\{1\}$
- ומכיוון ש $T\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$ אז מתקיים $Im\ T = \mathbb{R}_2[x]$

משפט 16.

- תהא $T : V \to W$ ט"ל. אזי:
  1. $Ker\ T$ הוא תת מרחב של V
  2. $Im\ T$ הוא תת מרחב של W
  3. T חד חד ערכית אם ורק אם $Ker\ T = \{\underline{0}_V\}$
  4. T "על" אם ורק אם $Im\ T = W$
  5. אם $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ פורשים את V אז $\{T(\underline{v}_1), T(\underline{v}_2), \ldots T(\underline{v}_n)\}$ פורשים את $Im\ T \subseteq W$

הוכחה.

1. **צ"ל:** $Ker\ T$ הוא תת מרחב של V

- ראשית, הגרעין לא ריק כי $\underline{0}_V$ תמיד יימצא בגרעין.
- ניקח $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in Ker\ T$ וניקח $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$
  - אזי נקבל $T(\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2) = \lambda_1 T(\underline{v}_1) + \lambda_2 T(\underline{v}_2)$
    * ומכיוון ש-$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in Ker\ T$ מתקיים ש $T(\underline{v}_1) = T(\underline{v}_2) = \underline{0}_W$
    * ולכן $\lambda_1 T(\underline{v}_1) + \lambda_2 T(\underline{v}_2) = \lambda_1 \underline{0}_W + \lambda_2 \underline{0}_W$
      · כלומר, $T(\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2) = \underline{0}_W$
      · ולכן T סגורה לחיבור בגרעין.

2. **צ"ל:** $Im\ T$ הוא תת מרחב של W

- מהגדרת $Im\ T$ מתקיים $\underline{0}_W \in Im\ T$, כלומר $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$
  - ניקח $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in Im\ T$ וניקח $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$
    * נוכיח ש $\lambda_1\underline{w}_1 + \lambda_2\underline{w}_2 \in Im\ T$
      · זאת אומרת שקיימים $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ כך ש $T(\underline{v}_1) = \underline{w}_1$ וגם $T(\underline{v}_2) = \underline{w}_2$
      · ומכיוון ש-T ט"ל, מתקיים:

$$\begin{aligned} T(\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2) &= \lambda_1 T(\underline{v}_1) + \lambda_2 T(\underline{v}_2) \\ &= \lambda_1\underline{w}_1 + \lambda_2\underline{w}_2 \end{aligned}$$

      · כלומר, קיבלנו $T(\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2) = \lambda_1\underline{w}_1 + \lambda_2\underline{w}_2 \in im\ T$

3. **צ"ל:** T חד חד ערכית אם ורק אם $Ker\ T = \{\underline{0}_V\}$

- <u>כיוון ראשון $\Leftarrow$</u>:
  - נניח כי T חד חד ערכית.
    * מכיוון ש $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ נובע ש $Ker\ T = \{\underline{0}_v\}$
- <u>כיוון שני $\Rightarrow$</u>:
  - נניח כי $Ker\ T = \{\underline{0}_V\}$
  - ניקח $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ כך ש $T(\underline{v}_1) = T(\underline{v}_2)$
    * נקבל ש $T(\underline{v}_1) - T(\underline{v}_2) = \underline{0}_W$
      · ולכן $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0}_W$
      · אבל הנחנו ש $Ker\ T = \{\underline{0}_W\}$
      · זאת אומרת ש $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}_W$
      · כלומר $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$

4. **צ"ל:** T "על" אם ורק אם $Im\ T = W$

- לא הוכחנו בהרצאה.

5. **צ"ל:** אם $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ פורשים את V אז $\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots T(\underline{v}_n)\}$ פורשים את $Im\ T\subseteq W$

- יהא $\underline{w}\in Im\ T$.
  - אזי קיים $\underline{v}\in V$ ש $T(\underline{v})=\underline{w}$
    - * מכיוון ש $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ פורשים את $\underline{v}$ נקבל שקיימים סקלארים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש- $\underline{v}=\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n$
      - · ולכן:

$$\underline{w}=T(\underline{v})=T(\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n)$$

$$=\alpha_1T(\underline{v}_1)+\alpha_2T(\underline{v}_2)+\ldots+\alpha_nT(\underline{v}_n)$$

- · מכיוון שאפשר לכתוב כל איבר בתמונה כצ"ל של איברים מסוימים, יוצא שכל איבר בתמונה הוא ב-$span$ שלהם:
- · כלומר, $\underline{w}\in span\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$

- מכיוון שכל $\underline{w}\in Im\ T$ הוא צירוף ליניארי של האיברים $\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$, מתקיים ש $Im\ T=span\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$

■

דוגמה 17. ניקח ט"ל: $T(x,y,z)=(x,y)$ המוגדרת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

- ניקח קבוצה פורשת ל-$\mathbb{R}^3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
  - ולפי סעיף 5 במשפט נקבל ש $\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}$ פורשת את $Im\ T$
    - * כלומר נקבל ש: $Im\ T=span\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

משפט 18. משפט המימדים השני (לפעמים נקרא משפט המימדים לת"ל):

- תהא $T:V\to W$ ט"ל.
  - אזי $dim(V)=dim(Ker\ T)+dim(Im\ T)$

הוכחה.

- נסמן $dim(V)=n$
- נסמן $dim(Ket\ T)=k$
- נוכיח ש $dim(Im\ T)=n-k$:
  - יהא $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\}$ בסיס ל $Ker\ T$
    - * נשלים אותו להיות בסיס ל-V ונקבל $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{v}_{k+1},\ldots,\underline{v}_n\}$

* בפרט זוהי קבוצה פורשת של V
  · ולכן לפי סעיף 5 מהמשפט הקודם מתקיים:

$$\left\{\overbrace{T\left(\underline{v}_1\right)}^{=\underline{0}},\overbrace{T\left(\underline{v}_2\right)}^{=\underline{0}},\ldots,\overbrace{T\left(\underline{v}_k\right)}^{=\underline{0}},T\left(\underline{v}_{k+1}\right),\ldots,T\left(\underline{v}_n\right)\right\}=\left\{T\left(\underline{v}_{k+1}\right),\ldots,T\left(\underline{v}_n\right)\right\}$$

– נוכיח שהקבוצה $\left\{T\left(\underline{v}_{k+1}\right),\ldots,T\left(\underline{v}_n\right)\right\}$ בת"ל:
* ניקח צירוף ליניארי ונשווה לאפס.
* כלומר נניח כי $\alpha_{k+1}T\left(\underline{v}_{k+1}\right)+\ldots+\alpha_nT\left(\underline{v}_n\right)=\underline{0}_W$
  · ולכן $\alpha_{k+1}\underline{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n\in Ker\ T$, כלומר הוא איבר בגרעין.
  · כלומר קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ כך שעבור בסיס $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\}$ של $Ker\ T$ מתקיים:

$$\overbrace{\alpha_{k+1}\underline{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n}^{\in Ker\ T}=\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k$$

  · נעביר אגפים ונקבל:

$$\alpha_{k+1}\underline{v}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n-\alpha_1\underline{v}_1-\ldots-\alpha_k\underline{v}_k=\underline{0}$$

  · ומכיוון ש $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$, מתקיים שגם $\alpha_{k+1}=\ldots=\alpha_n=0$ מכיוון ש $\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k,\underline{v}_{k+1},\ldots,\underline{v}_n\right\}$ בסיס של V.
* ולכן $\left\{T\left(\underline{v}_{k+1}\right),\ldots,T\left(\underline{v}_n\right)\right\}$ קבוצה בת"ל.
* ומכיוון שהם פורשים ובת"ל הם גם בסיס.

• קיבלנו ש $dim\left(Im\right)=n-(k+1)+1=n-k$ כנדרש.

■

אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 19 - יוסי (104166)

שם: איל שטיין

December 27, 2022

נושא השיעור: העתקות ליניאריות

נושא ראשון - העתקות ליניאריות

בהרצאה הקודמת דיברנו על משפט המימדים השני (או משפט המימדים להעתקות), לפיו אם $T:V\to W$ אז $dim\left(V\right)=dim\left(Im\ T\right)+dim\left(Ker\ T\right)$

מסקנה 1. תהא $T:V\to W$ ט"ל. אזי:

1. אם T חח"ע אז $dim\left(V\right)\leq dim\left(W\right)$
2. אם T "על" אז $dim\left(W\right)\leq dim\left(V\right)$
3. אם T חד חד ערכית ו"על" אז $dim\left(V\right)=dim\left(W\right)$
4. אם $dim\left(V\right)=dim\left(W\right)$ אז T היא חד חד ערכית $\leftrightarrow$ T היא "על"

הוכחה.

1. אם T חד חד ערכית אז $dim\left(Ker\ T\right)=0$
   (א) ולכן $dim\left(V\right)=dim\left(Im\ T\right)+\overbrace{dim\left(Ker\ T\right)}^{=0}\leq dim\left(W\right)$
      i. כי $Im\ T\subseteq W$
2. $dim\left(V\right)=dim\left(Im\ T\right)+dim\left(Ket\ T\right)$
   (א) אם T "על" אז $Im\ T=W$ ולכן $dim\left(Im\ T\right)=dim\left(W\right)$
      i. כלומר:

$$dim\left(V\right)=dim\left(W\right)+dim\left(Ker\ T\right)$$

ii. מכיוון שמימד תמיד גדול או שווה ל-0, מתקיים ש$dim\left(Ker\ T\right)\geq0$

iii. ולכן:

$$dim\left(V\right)=dim\left(W\right)+dim\left(Ker\ T\right)\geq dim\left(W\right)+0$$

iv. ונקבל:

$$dim\left(V\right)\geq dim\left(W\right)$$

3. נובע ישירות מ-1 כי מתקבל $dim\left(V\right)\leq dim\left(W\right)$ ומ-2 כי מתקבל גם $dim\left(W\right)\leq dim\left(V\right)$

4. נניח כי $dim\left(V\right)=dim\left(W\right)$.

(א) נקבל ש $dim\left(V\right)=dim\left(Im\ T\right)+dim\left(Ker\ T\right)=dim\left(W\right)$

i. T חד חד ערכית אז $dim\left(Ker\ T\right)=0$

- כלומר $dim\left(Im\ T\right)=dim\left(W\right)$
- ואז נקבל: $Im\ T=W$
  - ולכן T על.

ii. אם T "על" אז $dim\left(Im\ T\right)=dim\left(W\right)$

- ואז נקבל ש $dim\left(W\right)+dim\left(Ker\ T\right)=dim\left(W\right)$, כלומר $dim\left(Ker\ T\right)=0$
  - כלומר $Ker\ T=\{0\}$
  - ולכן T "על".

■

הגדרה 2. דרגה של העתקה

- תהא T ט"ל.
  - **הדרגה** של T מוגדרת כ-$r\left(T\right)=dim\left(Im\ T\right)$

הגדרה 3. אפסיות של העתקה

- תהא T ט"ל.
  - **האפסיות** של T מוגדרת כ- $null\left(T\right)=dim\left(Ker\ T\right)$

משפט 4. - הקשר בין העתקה ליניארית למטריצה

- יהא $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A\in M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$

- נגדיר העתקה $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ על ידי $T\left(\underline{v}\right)=A\underline{v}$
- אזי:

1. T ט"ל
2. $Im\ T$ הוא מרחב העמודות של A, כלומר $Im\ T=col\left(A\right)$
3. $r\left(A\right)=\left(T\right)$
4. $Ker\ T$ הוא מרחב הפתרונים של $A\underline{x}=0$, כלומר $\left(P\left(A\right)\right)$
5. $null\left(T\right)$ הוא מימד מרחב הפתרונים של $A\underline{x}=0$

הוכחה.

1. ראינו בהרצאה הקודמת.
2. ניקח בסיס סטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ - $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\dots\\0\end{pmatrix},\dots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\1\end{pmatrix}$

- על פי משפט שראינו, $\left\{T\left(e_1\right),T\left(e_2\right),\dots,T\left(e_n\right)\right\}$ פורשים את $Im\ T$.
  – המשפט אומר שאם יש לנו $T:V\to W$ וגם $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ פורשים את A אז $T\left(\underline{v}_1\right),T\left(\underline{v}_2\right),\dots,T\left(\underline{v}_n\right)$ פורשים את $Im\ T$
- נקבל ש:

$$T\left(e_1\right)=Ae_1=A\downarrow_1$$

$$T\left(e_2\right)=Ae_2=A\downarrow_2$$

$$\dots$$

$$T\left(e_n\right)=Ae_n=A\downarrow_n$$

  – זאת מכיוון שאם ניקח $\begin{pmatrix}A\downarrow_1 & A\downarrow_2 & \dots & A\downarrow_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\\\dots\\\alpha_n\end{pmatrix}$ נקבל צירוף ליניארי של $\begin{pmatrix}A\downarrow_1 & A\downarrow_2 & \dots & A\downarrow_n\end{pmatrix}$

- תזכורת - <u>משפט</u>: אם לוקחים קבוצה פורשת של התחום ומפעילים עליה את T מקבלים קבוצה פורשת של התמונה
  – לכן לפי המשפט קיבלנו $Im\ T=span\left\{T\left(e_1\right),T\left(e_2\right),\dots,T\left(e_n\right)\right\}$
    * ולכן $col\left(A\right)=span\left\{A\downarrow_1,A\downarrow_2,\dots,A\downarrow_n\right\}=Im\ T$

3. $r\left(T\right)=dim\left(Im\ T\right)=dim\left(col\left(A\right)\right)=dim\left(row\left(A\right)\right)=r\left(a\right)$

4. $\underline{v}\in Ker\ T \leftrightarrow T\left(\underline{v}\right)=0 \leftrightarrow A\underline{v}=0 \leftrightarrow$ $\underline{v}$ הוא פתרון של $A\underline{x}=0 \leftrightarrow \underline{v}\in \underline{p}\left(A\right)$

5. אם $Ker\ T$ הוא מרחב הפתרונים של $A\underline{x}=\underline{0}$ אז המימד שלו שווה למימד מרחב הפתרונים.

   (א) ולפי הגדרה, $null\left(T\right)=dim\left(Ker\ T\right)$

■

משפט 5.

- יהיו V,W מ"ו מעל אותו שדה.
- יהא $V=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ בסיס ל-V
- תהא $A=\{\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_n\}$ תת קבוצה כלשהי של W.
- לכל $\underline{v}\in V$ נגדיר $T:V\to W$ כך ש $T\left(\underline{v}\right)=T\left(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots\alpha_n\underline{v}_n\right)=\alpha_1T\left(\underline{v}_1\right)+\alpha_2T\left(\underline{v}_2\right)+\ldots+\alpha_nT\left(\underline{v}_n\right)=\alpha_1\underline{w}_1+\alpha_2\underline{w}_2+\ldots+\alpha_n\underline{w}_n$
  - כאשר $\left[\underline{v}\right]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$
  - (נשים לב שלא דרשנו ש-T תהיה העתקה ליניארית אלא הגדרנו את T כדי שנוכל להוציא את הסקלארים החוצה, כלומר היא ליניארית מהגדרתה)
- **אזי:**
  1. T ט"ל
  2. T הט"ל היחידה המקיימת $T\left(\underline{v}_i\right)=\underline{w}_i$ לכל i
  3. אם A בסיס ל-W אז T חח"ע ו"על".

הוכחה.

1. **צ"ל:** T ט"ל
   - **שמירה על חיבור:**
     - יהיו $\underline{u}_1,\underline{u}_2\in V$.
     - קיימים סקלארים יחידים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n$ כך ש $\underline{u}_1=\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n$ ו- $\underline{u}_2=\beta_1\cdot\underline{v}_1+\ldots+\beta_n\underline{v}_n$
       * ולכן $T\left(\underline{u}_1+\underline{u}_2\right)=T\left(\overbrace{\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n}^{\underline{u}_1}+\overbrace{\beta_1\cdot\underline{v}_1+\ldots+\beta_n\underline{v}_n}^{\underline{u}_2}\right)$

- נצמצם את הוקטורים לגורמים משותפים ונקבל:

$$T\left(\underline{u}_1+\underline{u}_2\right)=T\left(\left(\alpha_1+\beta_1\right)\underline{v}_1+\ldots+\left(\alpha_n+\beta_n\right)\underline{v}_n\right)$$

- ומהגדרת T מתקיים:

$$=\left(\alpha_1+\beta_1\right)\underline{w}_1+\left(\alpha_2+\beta_2\right)\underline{w}_2+\ldots+\left(\alpha_n+\beta_n\right)\underline{w}_n$$

- ושוב מהגדרת T:

$$\left(\alpha_1+\beta_1\right)\underline{w}_1+\left(\alpha_2+\beta_2\right)\underline{w}_2+\ldots+\left(\alpha_n+\beta_n\right)\underline{w}_n=T\left(\underline{u}_1\right)+T\left(\underline{u}_2\right)$$

- לסיכום קיבלנו:

$$T\left(\underline{u}_1+\underline{u}_2\right)=T\left(\underline{u}_1\right)+T\left(\underline{u}_2\right)$$

- **שמירה על כפל בסקלאר:**
  - אם $\underline{v}\in V$ ו- $\beta\in\mathbb{F}$ אז קיימים סקאלרים יחידים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ כך ש $\underline{v}=\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n$
  - נציב את $\underline{v}$ ב-$T\left(\underline{v}\right)$ ונקבל:

$$\begin{aligned}T\left(\beta\cdot\underline{v}\right)&=T\left(\beta\left(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n\right)\right)\\&=T\left(\beta\cdot\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\beta\cdot\alpha_n\underline{v}_n\right)\end{aligned}$$

  - מהגדרת T נובע:

$$\begin{aligned}&=\beta\alpha_1\underline{w}_1+\beta\alpha_2\underline{w}_2+\ldots+\beta\alpha_n\underline{w}_n\\&=\beta\cdot T\left(\underline{v}\right)\end{aligned}$$

    * ולכן

$$T\left(\beta\cdot\underline{v}\right)=\beta\cdot T\left(\underline{v}\right)$$

- T מקיימת שמירה על חיבור ושמירה על כפל בסקלאר ולכן T היא ט"ל.

2. **צ"ל:** T הט"ל היחידה המקיימת $T\left(\underline{v}_i\right)=\underline{w}_i$ לכל i

- $T\left(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n\right)=\alpha_1\underline{w}_1+\ldots\alpha_n\underline{w}_n$
- נגדיר:

$$T\left(\underline{v}_1\right)=\underline{w}_1$$

  – ונגדיר

$$T\left(\underline{v}_2\right)=\underline{w}_2$$

  – עד

$$T\left(\underline{v}_n\right)=\underline{w}_n$$

- נניח שגם הפונקציה S מקיימת זאת ו-S היא ט"ל.
- יהא $\underline{v}\in V$ (וקטור כללי ב-V).
  – קיימים סקלארים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ כך ש $\underline{v}=\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n$
  – ואז נקבל:

$$S\left(\underline{v}\right)=S\left(\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n\right)$$

  * ומכיוון ש-S היא טרנספורמציה <u>ליניארית</u>, מתקיים:

$$S\left(\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n\right)=\alpha_1S\left(\underline{v}_1\right)+\alpha_2S\left(\underline{v}_2\right)+\ldots+\alpha_nS\left(\underline{v}_n\right)$$

  · ומהגדרת S מתקיים לכל $\underline{v}\in V$:

$$S\left(\underline{v}\right)=\alpha_1\underline{w}_1+\alpha_2\underline{w}_2+\ldots+\alpha_n\underline{w}_n$$

  · אבל הגדרנו את $T\left(\underline{v}\right)$ כך שלכל $\underline{v}\in V$ מתקיים:

$$T\left(\underline{v}\right)=\alpha_1\underline{w}_1+\alpha_2\underline{w}_2+\ldots+\alpha_n\underline{w}_n$$

  · ולכן T ו-S הן אותה הפונקציה.

3. **נניח**: A בסיס ל-W. **צ"ל:** T חח"ע ו"על".

- אם A בסיס ל-W אז $A=\{\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_n\}$

- תחילה נוכיח ש-T חד חד ערכית:
  - יהא $\underline{v}\in Ker\ T$
  - אזי קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ יחידים כך ש $\underline{v}=\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n$
    * לכן $T(\underline{v})=\underline{0}$ כי הוא בגרעין
    * נחבר את $T(\underline{v})=\underline{0}$ להגדרת T ומתקיים $T(\underline{v})=T(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n)=\alpha_1\underline{w}_1+\alpha_2\underline{w}_2+\ldots+\alpha_n\underline{w}_n=\underline{0}$
      · הנחנו ש $\{\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_n\}$ בסיס ל-W ולכן $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$
      · לכן $\underline{v}=\underline{0}$
      · כלומר לכל $\underline{v}\in Ker\ T$ מתקיים $\underline{v}=\underline{0}$
      · לכן$Ker\ T=\{\underline{0}\}$
      · ומכאן נובע כי T חד חד ערכית.

- נוכיח שT "על":
  - כל $\underline{w}\in W$ ניתן להצגה יחידה בצורה $\underline{w}=\alpha_1\underline{w}_1+\ldots+\alpha_n\underline{w}_n$ (כי A בסיס)
    * ולכן:

$$T(\alpha_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n)=\alpha_1\underline{w}_1+\ldots+\alpha_n\underline{w}_n=\underline{w}$$

      · ומזה יוצא שלכל $\underline{w}\in W$ מתקיים $\underline{w}\in Im\ T$, כלומר $W\subseteq Im\ T$
      · לפי הגדרת תמונה, $Im\ T\subseteq W$
      · מכיוון ש$Im\ T=W$ יוצא ש-T היא "על".

■

מסקנה 6. מהמשפט נסיק כי ט"ל נקבעת ביחידות על פי תמונות פעולתה על איברי הבסיס.

מסקנה 7. מסעיף (3) נובע:

- אם $T:V\to W$ פונקציה המוגדרת כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $T(\underline{v}_i)=\underline{w}_i$
  - וגם $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ בסיס ל-V
  - וגם $\{\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_n\}$ בסיס ל-W
    * **אז** T חד חד ערכית ו"על".

דוגמה 8.

תהי ט"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך ש- $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

- נקבל ש:

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=T\left(a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=a\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+4b\\2a+5b\\3a+6b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

  – כלומר, T מוגדרת להיות $\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

משפט 9.
כל ט"ל $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ היא מהצורה $T\left(\underline{v}\right)=A\underline{v}$ עבור איזושהי $A\in M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$ (יחידה).

הוכחה.

- רעיון ההוכחה:
  – לוקחים $T\left(\underline{v}\right)$
  – כותבים את $\underline{v}$להיות צ"ל של איברי הבסיס כלומר $\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_n\cdot e_n$
    * מקבלים $T\left(\underline{v}\right)=T\left(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_n\cdot e_n\right)$
  – מכיוון ש-T היא ט"ל, נקבל:

$$T\left(\underline{v}\right)=T\left(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_n\cdot e_n\right)=\alpha_1T\left(e_1\right)+\ldots+\alpha_nT\left(e_n\right)$$

  – ולפי הגדרת T מתקיים:

$$\alpha_1T\left(e_1\right)+\ldots+\alpha_nT\left(e_n\right)=\alpha_1\underline{w}_1+\ldots+\alpha_n\underline{w}_n$$

    * כלומר אפשר לכתוב:

$$=\begin{pmatrix}\underline{w}_1&\underline{w}_2&\ldots&\underline{w}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\ldots\\\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{w}_1&\underline{w}_2&\ldots&\underline{w}_n\end{pmatrix}\underline{v}$$

■

אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 20 - יוסי (104166)

שם: איל שטיין

January 1, 2023

נושא השיעור: העתקות ליניאריות, איזומורפיזם, פעולות בין העתקות ליניאריות, ט"ל הופכי

נושא ראשון - העתקות ליניאריות

משפט 1.

- כל ט"ל $T:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ היא מהצורה $T\left(\underline{v}\right)=A\underline{v}$
  - (עבור איזושהי $A\in M_{m\times n}^{\left(\mathbb{F}\right)}$)

הוכחה.

- תהי $T:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ ט"ל.
- תהא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^{n}$.
- נסמן $\underline{w}_{i}=T\left(e_{u}\right)$
- יהא $\underline{v}=\begin{pmatrix}\alpha_{1}\\ \dots\\ \alpha_{n}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n}$
  - אזי ניתן לכתוב את $\underline{v}$ בצירוף ליניארי של הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^{n}$:

$$\begin{aligned}T\left(\underline{v}\right) & =T\left(\alpha_{1}e_{1}+\alpha_{2}e_{2}+\ldots+\alpha_{n}e_{n}\right)\\ & =\alpha_{1}T\left(e_{1}\right)+\alpha_{2}T\left(e_{2}\right)+\ldots+\alpha_{n}T\left(e_{n}\right)\\ & =\alpha_{1}\underline{w}_{1}+\alpha_{2}\underline{w}_{2}+\ldots+\alpha_{n}\underline{w}_{n}\end{aligned}$$

– מכיוון ש $\underline{w}_i \in \mathbb{F}^m$, הוא וקטור עם עמודה אחת ו-m שורות. ולכן אם נשים את כל הוקטורים $\underline{w}$ במטריצה נקבל מטריצה A עם m שורות ו-n עמודות:

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{w}_1 & \underline{w}_2 & \dots & \underline{w}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}^{=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overbrace{(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n)}^{=A} \underline{v}$$

■

הערה 2.

- נניח שקיימת ט"ל $T : V \to V$.
- ניקח בסיס ל-V ונסמנו $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$
  – כלומר לכל $\underline{v} \in V$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$
- ניקח וקטור קואורדינטות $[T(\underline{v})]_B$ והוא יהיה שווה ל $[T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n)]_B$
  – <u>תזכורת:</u>
    * לוקטור קואורדינטות יש שתי תכונות ליניאריות:
      1. $[\underline{v}_1 + \underline{v}_2]_B = [\underline{v}_1]_B + [\underline{v}_2]_B$
      2. $[\lambda \cdot \underline{v}]_B = \lambda \cdot [\underline{v}]_B$
  – לפי תכונות של וקטור קואורדינטות וחוקי טרנספורמציה ליניארית יתקיים:

$$[T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n)]_B = \alpha_1 [T(\underline{v}_1)]_B + \alpha_2 [T(\underline{v}_2)]_B + \dots + \alpha_n [T(\underline{v}_n)]_B$$

* אפשר לכתוב את הביטוי $\alpha_1 [T(\underline{v}_1)]_B + \alpha_2 [T(\underline{v}_2)]_B + \dots + \alpha_n [T(\underline{v}_n)]_B$ ככפולה של עמודה בשורה:

$$= \begin{pmatrix} [T(\underline{v}_1)]_B & [T(\underline{v}_2)]_B & \dots & [T(\underline{v}_n)]_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

· ומכיוון ש $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ הוא וקטור קואורדינטות ל-$\underline{v}$ אז יתקיים:

$$\begin{pmatrix} [T(\underline{v}_1)]_B & [T(\underline{v}_2)]_B & \dots & [T(\underline{v}_n)]_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [T(\underline{v}_1)]_B & [T(\underline{v}_2)]_B & \dots & [T(\underline{v}_n)]_B \end{pmatrix} ([\underline{v}]_B)$$

* בכתיב מתמטי כותבים את $\left([T(\underline{v}_1)]_B \quad [T(\underline{v}_2)]_B \quad \dots \quad [T(\underline{v}_n)]_B\right)$ בצורה $[T]_B$

- קיבלנו **משפט**:

$$[T(\underline{v})]_B = [T]_B [\underline{v}]_B$$

- <u>הערה נוספת:</u> אם ניקח ט"ל $T : V \to W$ אז:
  - ניקח $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ בסיס של V ואז $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$
  - ניקח $C = (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m)$ בסיס של W
  - נקבל:

$$[T(\underline{v})]_C = [T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n)]_C$$

* לפי תכונות של וקטור קואורדינטות ומכך שT היא ט"ל נקבל:

$$= \alpha_1 [T(\underline{v}_1)]_C + \dots + \alpha_n [T(\underline{v}_n)]_C$$

* נעביר לייצוג של כפל שורה בעמודה ונקבל:

$$= \left([T(\underline{v}_1)]_C \quad \dots \quad [T(\underline{v}_n)]_C\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

* ומכיוון שהתמונה של T מוגדרת להיות W אז קיבלנו **משפט:**

$$[T(\underline{v})]_C = [T]_B^C [\underline{v}]_B$$

נושא שני - איזומורפיזם:

הגדרה 3. איזומורפיזם:

- יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה.

- אם קיימת ט"ל $T : V \to W$ חד חד ערכית ו"על" אזי T נקראת **איזומורפיזם.**
  - במקרה זה, V ו-W נקראים **איזומורפיזם** ומסמנים $V \cong W$

דוגמה 4. $T:\mathbb{R}^4\to M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}$

- כלומר $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$
  - T היא ט"ל חד חד ערכית ו"על" ולכן $\mathbb{R}^4\cong M_{2\times2}^{\mathbb{R}}$
    - * (יכולנו גם להגדיר $T:M_{2\times2}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^4$ לפי וקטורי קוארדינטות וגם לקבל איזומורפיזם)

דוגמה 5. $T:M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}\to\mathbb{R}_3[x]$

- כלומר $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ax^3+bx^2+cx+d$
  - יש פה העתקה חד חד ערכית ו"על" ולכן $\mathbb{R}^4\cong M_{2\times2}^{\mathbb{R}}$

הערה 6. **איזומורפיזם הוא יחס שקילות**

1. **רפלקסיביות:**
   (א) לכל מרחב וקטורי V מתקיים $V\cong V$
2. **סימטריות:**
   (א) אם $V\cong W$ אז גם $V\cong W$
3. **טרנזיטיביות:**
   (א) אם $U\cong V$ וגם $V\cong W$ אז מתקיים גם $U\cong W$

הערה 7. לא קיים איזומורפיזם בין $\mathbb{R}^3$ למטריצות $M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}$

- כי על פי משפט שראינו, קיום ט"ל שהיא חד חד ערכית ו"על" גורר שוויון שני מימדי המרחב הוקטורי.

משפט 8. יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$.

- $V\cong W$ אם ורק אם $dim(V)=dim(W)$

הוכחה.

- כיוון ראשון $\Leftarrow$:
  - * אם $V\cong W$ אז יש העתקה חד חד ערכית ו"על" ביניהם ואז המימדים שלהם שווים לפי משפט.
- כיוון שני $\Rightarrow$:

* יהא $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ בסיס ל-V
* יהא $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_r\}$ בסיס ל-W.
* נגדיר העתקה $T : V \to W$ על ידי: $T(\underline{v}) = T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n) = \alpha_1 \underline{w}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{w}_n$
  · ועל פי משפט שראינו נקבל כי t חד חד ערכית ו"על".
  · ולכן $V \cong W$

■

מסקנה 9.

• כל מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$ איזומורפי ל-$\mathbb{F}^n$.
  – ולכן ניתן להסתכל על כל וקטור $\underline{v} \in V$ כווקטור ב-$\mathbb{F}^n$
    * זה נכון רק עבור מרחבים וקטוריים נוצרים סופית.

נושא שלישי - פעולות בין העתקות ליניאריות:

הגדרה 10.

• יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
• יהיו $T, S : V \to W$
• יהי $\alpha \in \mathbb{F}$

1. נגדיר **סכום ט"ל** להיות $(T + S)(\underline{v}) = T(\underline{v}) + S(\underline{v})$ לכל $\underline{v} \in V$
2. נגדיר **כפל ט"ל בסקלאר** להיות $(\alpha T)(\underline{v}) = \alpha \cdot T(\underline{v}) =$ לכל $\underline{v} \in B$

טענה 11. $T + S$ היא ט"ל:

הוכחה.

– שלב ראשון: נוכיח שמתקיים $(T + S)(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = (T + S)(\underline{v}_1) + (T + S)(\underline{v}_2)$
  * לפי הגדרת $T + S$ מתקיים:

$$(T + S)(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + S(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$$

  * ומכך ש- T, S ליניאריות מתקיים:

$$= T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2) + S(\underline{v}_1) + S(\underline{v}_2)$$

· ולפי הגדרת $T+S$ מתקיים ש:

$$=(T+S)(\underline{v}_1)+(T+S)(\underline{v}_2)$$

– <u>שלב שני</u>:

* לפי הגדרת $T+S$ מתקיים:

$$(T+S)(\alpha\underline{v})=T(\alpha\underline{v})+S(\alpha\underline{v})$$

· ומכך שT,S היא ט"ל מתקיים:

$$=\alpha T(\underline{v})+\alpha S(\underline{v})$$

· לפי תכונות של כפל סקלאר בוקטור מתקיים:

$$=\alpha(T(\underline{v})+S(\underline{v}))$$

· ולפי הגדרת הסכום $T+S$ מתקיים:

$$=\alpha(T+S)(\underline{v})$$

■

תרגיל 12. הראו כי αT היא ת"ל.

דוגמה 13.

- יהי $T(a,b)=(a+2ab,-b)$
- יהי $S(a,b)=(3b,a-b)$
  - ולכן $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
  - וגם $S\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

- נקבל $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} S + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} T = (T+S)(a,b)$, כלומר:

$$\begin{aligned}(T+S)(a,b) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

הגדרה 14. הרכבה של ט"ל (כפל)

- יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$.
- יהיו שתי ט"ל $S:V\to W$ ו- $T:W\to U$.
- נגדיר **כפל (הרכבת) ט"ל** על ידי: $(TS)(\underline{v}) = T(S(\underline{v}))$ לכל $\underline{v}\in V$

  הערה 15. צריך שהטווח של S יהיה מוכל בתחום של T.

טענה 16. הכפל TS הוא ט"ל:

הוכחה.

- נוכיח שתי תכונות:

1. **חיבור**

   – לפי הגדרת TS מתקיים:

$$TS(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = T(S(\underline{v}_1+\underline{v}_2))$$

*	מכך ש-S ליניארית מתקיים:

$$= T(S(\underline{v}_1)+S(\underline{v}_2))$$

·	מכך ש-T ליניארית מתקיים:

$$TS(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = T(S(\underline{v}_1)) + T(S(\underline{v}_2))$$

2. **כפל בסקלאר:**

- לפי הגדרת הרכבה מתקיים:

$$TS\left(\alpha\underline{v}\right)=T\left(S\left(\alpha\underline{v}\right)\right)$$

* ומכך ש-S ליניארית מתקיים:

$$=T\left(\alpha S\left(\underline{v}\right)\right)$$

* ומכך ש T ליניארית מתקיים:

$$=\alpha T\left(S\left(\underline{v}\right)\right)$$

· ולפי הגדרת הרכבה מתקיים:

$$TS\left(\alpha\underline{v}\right)=\alpha\left(TS\left(\underline{v}\right)\right)$$

$\blacksquare$

דוגמה 17.

- יהיו:
  - $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
  - $S\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
- נקבל $\left(TS\right)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=T\left(S\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$
  - נציב את הגדרת S ונקבל: $=T\left(\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$
    * נציב את הגדרת T ונקבל: $=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
      · לפי כפל מטריצות מתקיים:

$$\left(TS\right)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

- אם נבדוק את ST נקבל:

$$ST\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

- קיבלנו ש $ST\neq TS$

נושא רביעי - ט"ל הופכי:

הגדרה 18.

- תהא $T:V\to V$ ט"ל חד חד ערכית ו"על".
  - T היא פונקציה חד חד ערכית ו"על" ולכן קיימת לה פונקציה הפוכה הנקראת **העתקה הפוכה** ומקיימת $T^{-1}T=TT^{-1}=I$

טענה 19.

- תהא $T:V\to V$ ט"ל חד חד ערכית ו"על".
  - אזי גם T^{-1} ט"ל.

הוכחה.

1. **חיבור:**
   - נסמן $\underline{v}_1=T(\underline{w}_1)$ ו-$\underline{v}_2=T(\underline{w}_2)$
   - לפי הגדרת T כט"ל מתקיים:

$$T^{-1}(\underline{v}_1+\underline{v}_2)=T^{-1}(T(\underline{w}_1)+T(\underline{w}_2))$$

   - נפתח את הסוגריים ונקבל:

$$=T^{-1}T(\underline{w}_1+\underline{w}_2)$$

   * לפי הסימון שלנו נקבל:

$$=\underline{w}_1+\underline{w}_2=T^{-1}(\underline{v}_1)+T^{-1}(\underline{v}_2)$$

   - כלומר מתקיים: $T^{-1}(\underline{v}_1+\underline{v}_2)=T^{-1}(\underline{v}_1)+T^{-1}(\underline{v}_2)$

2. **כפל בסקלאר:**

- נסמן $\underline{v} = T\left(\underline{w}\right)$
  - $T^{-1}\left(\alpha\underline{v}\right) = T^{-1}\left(\alpha T\left(\underline{w}\right)\right)$
    - ומכיון ש-T ליניארית מתקיים: $= T^{-1}\left(T\left(\alpha\underline{w}\right)\right) = \alpha\underline{w}$
      - ולפי הסימון מתקיים: $\alpha\underline{w} = \alpha T^{-1}\left(\underline{v}\right)$
- כלומר מתקיים: $T^{-1}\left(\alpha\underline{v}\right) = \alpha T^{-1}\left(\underline{v}\right)$

■

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 21 - יוסי

שם: איל שטיין

January 3, 2023

נושא השיעור: הערות על העתקה הפוכה, מטריצה מייצגת

נושא ראשון - העתקה הפוכה

- בהרצאה הקודמת דיברנו על העתקה הפוכה של ט"ל $T:V\to V$.

הערה 1. ניתן להגדיר T^{-1} גם באופן כללי כאשר $T:V\to W$ ט"ל חד חד ערכית ו"על". וגם אז T^{-1} חד דח ערכית ו"על". (כזכור זה איזומורפיזם)

הערה 2. תהא $T:V\to W$ ט"ל. אם קיימת העתקה ליניארית $S:W\to V$ המקיימת $ST=I_V$ וגם $TS=I_W$ אזי T איזומורפיזם על W ומתקיים $S=T^{-1}$

הערה 3. אם $T:V\to W$ ו- $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ ת"ל ב-V

- אז לפי הגדרת תלות ליניארית, קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ לא כולם אפס כך ש $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n=0$
- אם נפעיל את T על שני האגפים נקבל:

$$\alpha_1T\left(\underline{v}_1\right)+\alpha_2T\left(\underline{v}_2\right)+\ldots+\alpha_nT\left(\underline{v}_n\right)=T\left(0\right)=\underline{0}_W$$

  - זאת אומרת ש $T\left(\underline{v}_1\right),T\left(\underline{v}_2\right),\ldots,T\left(\underline{v}_n\right)$ ת"ל עם אותם הסקלארים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$

הערה 4. אם $T\left(\underline{v}_1\right),T\left(\underline{v}_2\right),\ldots,T\left(\underline{v}_n\right)$ וקטורים ת"ל ו-T חד חד ערכית.

- אז קיימים סקלארים לא כולם אפס כך ש

$$\alpha_1 T\left(\underline{v}_1\right)+\alpha_2 T\left(\underline{v}_2\right)+\ldots+\alpha_n T\left(\underline{v}_n\right)=T(0)=\underline{0}_W$$

  – מכיוון ש-T ט"ל מתקיים:

$$T\left(\alpha_1 \underline{v}_1+\alpha_2 \underline{v}_2+\ldots+\alpha_n \underline{v}_n\right)=\underline{0}_W$$

  – ומכיוון ש-T היא חד חד ערכית, אז הוקטור היחיד שנשלח לאפס הוא וקטור האפס. ולכן:

$$\alpha_1 \underline{v}_1+\alpha_2 \underline{v}_2+\ldots+\alpha_n \underline{v}_n=\underline{0}_V$$

    * כלומר $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ ת"ל.

נושא שני - מטריצה מייצגת

דוגמה 5. תהי ט"ל $T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת $T(p(x))=p'(x)$

- ניקח $[T(p(x))]_E$ כאשר $p(x)=ax^3+bx+cx+d$
  – נציב את $p(x)$:

$$[T(p(x))]_E=\left[T\left(a \cdot x^3+b \cdot x^2+c \cdot x+d \cdot 1\right)\right]_E$$

    * מכיוון ש-T ט"ל מתקיים:

$$=\left[T\left(a \cdot x^3+b \cdot x^2+c \cdot x+d \cdot 1\right)\right]_E=\left[a \cdot T\left(x^3\right)+b \cdot T\left(x^2\right)+c \cdot T(x)+d \cdot T(1)\right]_E$$

    * לפי תכונות של וקטור קואורדינטות נקבל:

$$=a \cdot\left[T\left(x^3\right)\right]_E+b \cdot\left[T\left(x^2\right)\right]_E+c \cdot[T(x)]_E+d \cdot[T(1)]_E$$

* נוציא החוצה את המקדמים לכפל של שורה בוקטורי קואורדינטות (לפי הגדרה של וקטור קואורדינטות הוא תמיד וקטור עמודה ולכן נציין שכל אחד הוא עמודה במטריצה):

$$= \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left[T\left(x^3\right)\right]_E & \left[T\left(x^2\right)\right] & \left[T\left(x\right)\right]_E & \left[T\left(1\right)\right]_E \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

· ואם נגזור (כי לפי הגדרת T מתקיים$T\left(p\left(x\right)\right) = p'\left(x\right)$) נקבל:

$$= \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left[3x^2\right]_E & \left[2x\right]_E & \left[1\right]_E & \left[0\right]_E \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

· נתרגם את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3\left[x\right]$ לוקטור ונקבל:

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

· וקיבלנו מטריצה מייצגת של T:

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

תזכורת מההרצאה הקודמת:

• ניקח $T : V \to W$ ונבחר שני בסיסים:

1. $B = \left(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\right)$
2. $C = \left(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\right)$

• ניקח $\underline{v} \in V$

– נניח ש $\left[\underline{v}\right] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

* ואז $\left[T\left(\underline{v}\right)\right]_C = \left[T\left(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n\right)\right]$

* ומכיון ש-T ט"ל יתקיים:

$$[T(\underline{v})]_C = [\alpha_1 \cdot T(\underline{v}_1) + \alpha_2 \cdot T(\underline{v}_2) + \ldots + \alpha_n \cdot T(\underline{v}_n)]_C$$

* ולפי חוקי וקטורי קואורדינטות מתקיים:

$$= \alpha_1 \cdot [T(\underline{v}_1)]_C + \alpha_2 \cdot [T(\underline{v}_2)]_C + \ldots + \alpha_n \cdot [T(\underline{v}_n)]_C$$

· ואז נקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(\underline{v}_1)]_C & [T(\underline{v}_2)]_C & \ldots & [T(\underline{v}_n)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{=[T]_B^C} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

· וקיבלנו מטריצה מייצגת לפי הבסיס של B ו-C המסומנת ב- $[T]_B^C$

· כלומר $[T(\underline{v})]_C = [T]_B^C [\underline{v}]_B$

הגדרה 6. מטריצה מייצגת:

- תהא $T: V \to W$ העתקה ליניארית ממרחב n מימדי V למרחב m מימדי W.
- יהיו $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ ו- $C = (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m)$ בסיסים סדורים של המרחבים V ו-W בהתאמה.
- המטריצה מסדר $m \times n$ שעמודותיה הן וקטורי קואורדינטות $[T(\underline{v}_1)]_C, [T(\underline{v}_2)]_C, \ldots, [T(\underline{v}_n)]_C$ נקראת **המטריצה המייצגת** את ההעתקה הליניארית T לפי הבסיסים B ו-C.
  - המטריצה המייצגת מסומנת $[T]_B^C$.

הערה 7. אם $B = C$ אז נסמן את המטריצה המייצגת ב- $[T]_B$

משפט 8. $[T(\underline{v})]_C = [T]_B^C [\underline{v}]_B$

דוגמה 9. $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$

- ניקח בסיס סדור $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

- וניקח בסיס סדור $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

  – נקבל:

$$[T]_B^C = \left(\left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_C \quad \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_C \quad \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C \right)$$
$$= \left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_C \quad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C \quad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_C \right)$$

  * נבצע המרה באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  * קיבלנו שהמטריצה המייצגת היא:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 10.

- יהיו $T, S : V \to W$ ט"ל.
- יהיו: B בסיס ל-V ו-C בסיס ל-W.
- אזי:
  1. $[T + S]_B^C = [T]_B^C + [S]_B^C$
  2. $[\alpha \cdot T]_B^C = \alpha \cdot [T]_B^C$

הוכחה.

1. **צ"ל:** $[T + S]_B^C = [T]_B^C + [S]_B^C$

- נזכיר משפט מהרצאות קודמות: אם לכל $\underline{v} \in V$ מתקיים $A\underline{v} = B\underline{v}$ אז $A = B$
- ולכן לפי המשפט ש $[T(\underline{v})]_C = [T]_B^C [\underline{v}]_B$, מתקיים:

$$[T+S]_B^C [\underline{v}]_B = [(T+S)(\underline{v})]_C$$

  – ולפי הגדרת סכום ט"ל מתקיים:

$$[(T+S)(\underline{v})]_C = [T(\underline{v}) + S(\underline{v})]_C$$

    * ולפי חוקי וקטורי קואורדינטות מתקיים:

$$= [T(\underline{v})]_C + [S(\underline{v})]_C$$

      · ושוב לפי המשפט ש $[T(\underline{v})]_C = [T]_B^C [\underline{v}]_B$, מתקיים:

$$= [T]_B^C [\underline{v}]_B + [S]_B^C [\underline{v}]_B$$

      · ולכן אם נוציא את $[\underline{v}]_B$ כגורם משותף מצד שמאל נקבל:

$$[T]_B^C [\underline{v}]_B + [S]_B^C [\underline{v}]_B = \left([T]_B^C + [S]_B^C\right) [\underline{v}]_B$$

      · ולפי המשפט "אם לכל $\underline{v} \in V$ מתקיים $A\underline{v} = B\underline{v}$ אז $A = B$", מכיוון שלכל $\underline{v} \in V$ מתקיים $\left([T]_B^C + [S]_B^C\right) [\underline{v}]_B = [T+S]_B^C [\underline{v}]_B$ אז מתקיים:

$$[T+S]_B^C = [T]_B^C + [S]_B^C$$

2. **צ"ל:** $[\alpha \cdot T]_B^C = \alpha \cdot [T]_B^C$
- ניקח

$$[\alpha \cdot T]_B^C [\underline{v}]_B =$$

$$[(\alpha T)(\underline{v})]_C = [\alpha T(\underline{v})]_C$$

$$= \alpha \left[T\left(\underline{v}\right)\right]_C$$

$$= \alpha \left[T\right]_B^C \left[\underline{v}\right]_B$$

- ולכן מתקיים $\left[\alpha \cdot T\right]_B^C = \alpha \cdot \left[T\right]_B^C$

■

הגדרה 11. $Hom\left(V,W\right)$ - מרחב הט"ל מ-V ל-W

- יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
- אוסף כל ההעתקות הליניאריות $T:V\to W$ מסומן $Hom\left(V,W\right)$

משפט 12.
$Hom\left(V,W\right)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (מעל אותו שדה של-V ושל-W)

הוכחה. **בקווים כלליים:**

- **סגירות לחיבור:** כי אם יש לנו T_1+T_2 אז זו ט"ל לפי מה המשפט הקודם.
- **סגירות לכפל בסקלאר:** ואם יש לנו αT אז זו ט"ל לפי המשפט הקודם.
- **הכלת איבר האפס:** $Hom\left(V,W\right)$ מכיל את טרנספורמציית האפס.
- **זהות:** מכילה את טרנספורמציית הזהות.
- וכו' - (לא הוכחנו הכל בהרצאה)

■

הערה 13.

- יהיו V,W מרחבים וקטוריים.
- $dim\left(W\right)=m$
- $dim\left(V\right)=n$
- B בסיס ל-V
- C בסיס ל-W
- נגדיר העתקה: $\phi:Hom\left(V,W\right)\to M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$ על ידי $T\to\left[T\right]_B^C$

- כלומר נתאים לכל T ט"ל את המטריצה המייצגת $[T]_B^C$
  * למעשה קיימת העתקה ϕ כך ש $\phi(T) = [T]_B^C$
    · ההעתקה הזו ליניארית מכיוון ש:

1. **שומרת על חיבור:**
   (א) $\phi(T_1+T_2) = [T_1+T_2]_B^C = [T_1]_B^C + [T_2]_B^C = \phi(T_1)+\phi(T_2)$
2. **שומרת על כפל בסקלאר:**
   (א) $\phi(\alpha\cdot T) = [\alpha\cdot T]_B^C = \alpha\cdot[T]_B^C = \alpha\cdot\phi(T)$

נָרְאה שההעתקה ϕ הזו היא איזומורפיזם:

משפט 14. $Hom(V,W) \cong M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$ - (כלומר ϕ איזומורפיזם)

- ובפרט $dim\ \ Hom(V,W) = \underbrace{dim(V)}_{=n}\cdot\underbrace{dim(W)}_{=m}$

הוכחה.

- יהא $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ בסיס ל-V.
- יהא $C = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_m)$ בסיס ל-W.
  - נגדיר העתקה ϕ כפי שהובאה בהערה:

$$\phi : Hom(V,W) \to M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$$

$$\phi(T) = [T]_B^C$$

- ראינו ש-ϕ ט"ל.

- נוכיח ש-ϕ היא חד חד ערכית:
  - ניקח $T \in Ker\ \phi$.
    * כלומר $\phi(T) = 0$
      · זאת אומרת $[T]_B^C = 0$
      · ולפי הגדרת ϕ זה יקרה אם ורק אם $T = 0$

הערה 15. $[T]_B^C = 0$ אם ורק אם $T = 0$ כי:

1. אם $[T]_B^C = \begin{pmatrix}[T(\underline{v}_1)]_C & [T(\underline{v}_2)]_C & \ldots & [T(\underline{v}_n)]_C\end{pmatrix} = 0$ אז גם $[T(\underline{v}_1)]_C = 0$ וגם $[T(\underline{v}_2)]_C = 0$
2. ואם $T = 0$ אז $[T]_B^C = \begin{pmatrix}[T(\underline{v}_1)]_C & [T(\underline{v}_2)]_C & \ldots & [T(\underline{v}_n)]_C\end{pmatrix}$ גם הוא צריך להיות שווה 0.

- נוכיח ש-ϕ "על":

- תהא $A\in M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$.
  * נחפש $T\in Hom\left(V,W\right)$ כך ש- $\phi\left(T\right)=A$, כלומר $\left[T\right]_{B}^{C}=A$:
  * יהיו a_{ij} רכיבי A.
  * נגדיר את ההעתקה כך:

$$T\left(\underline{b}_{1}\right)=a_{11}\underline{c}_{1}+a_{21}\underline{c}_{2}+\ldots+a_{m1}\underline{c}_{m}\ \Rightarrow\ \left[T\left(\underline{b}_{1}\right)\right]_{C}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}$$

$$T\left(\underline{b}_{2}\right)=a_{12}\underline{c}_{1}+a_{22}\underline{c}_{2}+\ldots+a_{m2}\underline{c}_{m}\ \Rightarrow\ \left[T\left(\underline{b}_{2}\right)\right]_{C}=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$T\left(\underline{b}_{n}\right)=a_{1n}\underline{c}_{1}+a_{2n}\underline{c}_{2}+\ldots+a_{mn}\underline{c}_{m}\ \Rightarrow\ \left[T\left(\underline{b}_{n}\right)\right]_{C}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}$$

- מכיוון שהגדרת T על איברי הבסיס קובעת את ההעתקה, קיבלנו את ההעתקה הנדרשת $\phi\left(T\right)=A$.
- כלומר:

$$\left[T\right]_{B}^{C}=\begin{pmatrix}\left[T\left(\underline{b}_{1}\right)\right]_{C} & \left[T\left(\underline{b}_{2}\right)\right]_{C} & \ldots & \left[T\left(\underline{b}_{n}\right)\right]_{C}\end{pmatrix}=A$$

■

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 22 - יוסי

שם: איל שטיין

January 8, 2023

נושא השיעור: מטריצות מייצגות, מטריצות מעבר בין בסיסים

נושא ראשון - מטריצה מייצגת וכפל

- תזכורת - מטריצה מייצגת:
  - אם יש לנו $T:V\to W$
  - ויש לנו בסיס סדור $B=\left(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\right)$ ל-V
  - וגם ובסיס סדור $C=\left(\underline{w}_1,\underline{w}_2,\ldots,\underline{w}_m\right)$
  - אז אם נפעיל את T על איברי הבסיס B נקבל: $[T]_B^C=\left(\left[T\left(\underline{v}_1\right)\right]_C\ \ldots\ \left[T\left(\underline{v}_n\right)\right]_C\right)$ שזה מטריצה שכל עמודה שלה היא וקטור קואורדינטות.
  - ואז $\left[T\left(\underline{v}\right)\right]_C=[T]_B^C\left[\underline{v}\right]_B$
    * והמטריצה המייצגת תהיה $[T]_B^C$.

משפט 1.

- תהיינה שתי העתקות:
  1. העתקה $S:V\to U$
  2. והעתקה $T:U\to W$
- כאשר:
  - B בסיס ל-V
  - C בסיס ל-U
  - D בסיס ל-W
- אזי: $[TS]_B^D=[T]_C^D[S]_B^D$

הערה 2.

- נניח ש $U=V=W$
  - נקבל $[TS]_B=[T]_B\,[S]_B$

הערה 3. מסקנה מההערה הקודמת:

- נניח ש $T=S$
  - נקבל $\left[T^2\right]_B=[T]_B^2$

הערה 4. מסקנה (על ידי אינדוקציה) מההערה הקודמת:

- $\left[T^K\right]_B=[T]_K^B$

הוכחה. של המשפט.

- מכיוון ש $S:V\to U$ ו- $T:U\to W$ אז $TS:V\to W$
- תזכורת של משפט מההרצאה הקודמת: $[T\left(\underline{v}\right)]_C=[T]_B^C\,[\underline{v}]_B$
  - ואז נקבל שלכל $\underline{v}_B$ מתקיים:

$$[TS]_B^D\,[\underline{v}]_B=[TS\left(\underline{v}\right)]_D$$

    * ולפי הגדרת הרכבה נקבל:

$$[TS\left(\underline{v}\right)]_D=[T\left(S\left(\underline{v}\right)\right)]_D$$

  - ולכן לפי המשפט מההרצאה הקודמת, עבור T והווקטור $S\left(\underline{v}\right)$ ונקבל:

$$[T\left(S\left(\underline{v}\right)\right)]_D=[T]_C^D\,[S\left(\underline{v}\right)]_C$$

    * ולפי המשפט מההרצאה הקודמת, עבור S והווקטור $\underline{v}$ נקבל:

$$[T]_C^D\left([S]_B^C\,[\underline{v}]_B\right)$$

    * לפי אסוציאטיביות של מטריצות נקבל:

$$\left([T]_C^D\,[S]_B^C\right)[\underline{v}]_B$$

- ולכן:

$$[TS]_B^D = [T]_C^D \, [S]_B^C$$

■

טענה 5. תהא $I : V \to V$ העתקת הזהות ויהא B בסיס של V. אזי $IB = I$.

הוכחה. לעשות לבד כתרגיל:

- נקבל $[I]_B = ([I(\underline{v}_1)]_B \;\; [I(\underline{v}_2)]_B \;\; \ldots \;\; [I(\underline{v}_n)]_B)$
  - ואז מכיוון ש I היא העתקת הזהות נקבל:

$$([I(\underline{v}_1)]_B \;\; [I(\underline{v}_2)]_B \;\; \ldots \;\; [I(\underline{v}_n)]_B) = ([\underline{v}_1] \;\; [\underline{v}_2] \;\; \ldots \;\; [\underline{v}_n])$$

    * וזה שווה ל:

$$(e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_n) = I$$

■

טענה 6.

- תהא $T : V \to V$ ט"ל הפיכה ויהא B בסיס ל-V.
- אזי $[T]_B$ הפיכה ומתקיים $\left[T^{-1}\right]_B = [T]_B^{-1}$

הוכחה.

- אם T הפיכה אזי בעבור בסיס $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ יתקיים $T(\underline{b}_1), \ldots, T(\underline{b}_n)$ בת"ל (לפי משפט מההרצאות הקודמות לפיו אם $T[\underline{b}_1], \ldots, T[\underline{b}_n]$ ת"ל אז גם $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ ת"ל).
  - ולכן $[T(\underline{b}_1)]_B, \ldots, [T(\underline{b}_n)]_B$ גם בת"ל.
    * ואם העמודות בת"ל אז המטריצה הפיכה, כלומר $[T]_B$ הפיכה.
- כמו כן $\left[T \cdot T^{-1}\right]_B = [I]_B = I$
  - ולכן $[T]_B \cdot \left[T^{-1}\right]_B = I$
    * כלומר $[T]_B^{-1} = \left[T^{-1}\right]_b$

■

טענה 7. הכיוון ההפוך של הטענה הקודמת:

- אם T ט"ל ו-$[T]_B$ הפיכה אזי גם T הפיכה ומתקיים $\left[T^{-1}\right]_B = [T]_B^{-1}$

הוכחה.

- אם $[T]_B$ הפיכה אז בעבור $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ נקבל ש $[T(\underline{b}_1)]_B, \ldots, [T(\underline{b}_n)]_B$ בת"ל.
  - ולכן $T(\underline{b}_1), \ldots, T(\underline{b}_n)$ בת"ל כי אם וקטורי קואורדינטות בת"ל אז גם הוקטורים עצמם בת"ל.
    - ולכן T חד חד ערכית ו"על" לפי משפט.
- ומכאן, אם T הפיכה ומתקיים כמקודם $\left[T^{-1}\right]_B = [T]_B^{-1}$

■

הערה 8.

- אם יש לנו העתקה $T : V \to W$
- ויש לנו מטריצה מייצגת $[T]_B^C$.
  - אז $dim\,(Im\ T) = rank\left([T]_B^C\right)$
- **הוכחה:**
  - $[T]_B^C = ([T(\underline{v}_1)]\ \ \ldots\ \ [T(\underline{v}_n)])$
  - וגם $dim\,(Im\ T) = dim\ \ (span\,\{T(\underline{v}_1), T(\underline{v}_2), \ldots, T(\underline{v}_n)\})$
  - ולכן $r\left([T]_B^C\right) = dim\,(span\,\{[T(\underline{v}_1)]_C\ \ \ldots\ \ [T(\underline{v}_n)]_C\})$

הערה 9.

- אם יש לנו $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ וגם $T(\underline{v}) = A\underline{v}$
- אז אם ניקח בסיס סטנדרטי $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$
  - נקבל $[T]_E = ([T(e_1)]_E\ \ [T(e_2)]_E\ \ \ldots\ \ [T(e_n)]_E)$
    - ולפי הנתון נקבל:

$$([T(e_1)]_E\ \ [T(e_2)]_E\ \ \ldots\ \ [T(e_n)]_E) = ([Ae_1]_E\ \ [Ae_2]_E\ \ \ldots\ \ [Ae_n]_E)$$

- ולפי כפל של מטריצות נקבל כפל של A בעמודה:

$$([A\downarrow_1]_E\ \ [A\downarrow_2]_E\ \ \ldots\ \ [A\downarrow_n]_E) = (A\downarrow_1\ \ \ A\downarrow_2\ \ \ \ldots\ \ A\downarrow_n) = A$$

נושא שני - מטריצות מעבר בין בסיסים:

הגדרה 10. מטריצת מעבר:

- יהא V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{F}$.
- ויהיו $B=(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n)$ ו- $C=(\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n)$ בסיסים ל-V.
- נכתוב את $\underline{c}_1$ כצירוף ליניארי של איברי הבסיס B ונקבל: $\underline{c}_1=a_{11}\cdot\underline{b}_1+a_{21}\cdot\underline{b}_2+\ldots+a_{n1}\cdot\underline{b}_n$
  - נכתוב את $\underline{c}_2$ כצירוף ליניארי של איברי הבסיס B ונקבל: $\underline{c}_2=a_{12}\cdot\underline{b}_1+a_{22}\cdot\underline{b}_2+\ldots+a_{n2}\cdot\underline{b}_n$
  - ונכתוב את $\underline{c}_n$ כצירוף ליניארי של איברי הבסיס B ונקבל: $\underline{c}_m=a_{mn}\cdot\underline{b}_1+a_{mn}\cdot\underline{b}_2+\ldots+a_{nn}\cdot\underline{b}_n$
  - אזי:

$$\underline{p}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{mn}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&\ldots\\\vdots&\vdots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

* נקראת **מטריצת המעבר** B לבסיס C ומסומנת $\underline{p}_{B\to C}$

הערה 11.

- העמודה הראשונה של $\underline{p}$ היא $[\underline{c}_1]_B$, העמודה השנייה היא $[\underline{c}_2]_B$ והעמודה האחרונה היא $[\underline{c}_n]_B$.
  - כלומר:

$$\underline{p}_{B\to C}=\left([\underline{c}_1]_B\ \ [\underline{c}_2]_B\ \ \ldots\ \ [\underline{c}_n]_B\right)$$

* ולפי הגדרת $[I]_C^B$, כלומר ש $I(\underline{c}_1)=\underline{c}_1$

$$=[I]_C^B=\left(\overbrace{[I(\underline{c}_1)]_B}^{=\underline{c}_1}\ \overbrace{[I(\underline{c}_2)]_B}^{=\underline{c}_2}\ \ldots\ \overbrace{[I(\underline{c}_n)]_B}^{=\underline{c}_n}\right)$$

משפט 12. $\underline{p}_{B\to C}[\underline{v}]_C=[\underline{v}]_B$

הוכחה.

- $\underline{p}_{B\to C}=[I]_C^B$
  - ואז לפי משפט: $[I(\underline{v})]_B=[I]_C^B[\underline{v}]_C$
    * ומכיוון ש-$I(\underline{v})=\underline{v}$ קיבלנו ש: $[\underline{v}]_B=\underbrace{[I]_C^B}_{=\underline{p}_{B\to C}}[\underline{v}]_C$

■

משפט 13. $\underline{p}$ הפיכה ו- $[\underline{v}]_C = \underline{p}^{-1}_{B\to C}[\underline{v}]_B$

הוכחה.

- נסמן את מטריצת המעבר מ$B \to C$ ב-$Q_{C\to B}$.
- נוכיח ש $Q = \underline{P}^{-1}$:
  - על פי המשפט הקודם, Q מקיימת:

$$Q[\underline{v}]_b = [\underline{v}]_C$$

* כזכור: $Q = Q_{C\to B}$ ו- $\underline{P} =$
  · נכפול את שני הצדדים ב-P (כלומר נפעיל את P על שני הצדדים) ונקבל:

$$PQ[\underline{v}]_B = P[\underline{v}]_C$$

  · ולפי המשפט הקודם מתקיים:

$$PQ[\underline{v}]_B = P[\underline{v}]_C = [\underline{v}]_B$$

  · כלומר $PQ[\underline{v}]_B = I[\underline{v}]_B$
  · ולכן $PQ = I$
  · זאת אומרת ש$P = Q^{-1}$.

■

דוגמה 14.

- נרשום שני בסיסים סדורים ל-$\mathbb{R}^3$:
  1. $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$
  2. $E = (e_1, e_2, e_3)$
- נמצא את מטריצת המעבר $\underline{P}_{E\to B}$ (שזה למעשה $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, [I]^E_B$) :
  - לפי הגדרת I נקבל:

$$I(\underline{b}_1) = \underline{b}_1 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$

$$I\left(\underline{b}_2\right)=\underline{b}_2=0\cdot e_1+1\cdot e_2+1\cdot e_3$$

$$I\left(\underline{b}_3\right)=\underline{b}_3=0\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3$$

* ולכן:

$$\underline{P}_{E\to B}=[I]_B^E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

· כלומר קיבלנו ש $P_{E\to B}=\left(\left[\underline{b}_1\right]_E\ \left[\underline{b}_2\right]_E\ \left[\underline{b}_3\right]_E\right)$

· היינו רוצים למצוא את $P_{B\to W}$ נצטרך לקחת את $\left([e_1]_B\ [e_2]_B\ [e_3]_B\right)$ או למצוא את $\left(P_{E\to B}\right)^{-1}$

- נמשיך בדוגמא ונגדיר העתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ על ידי $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}$

  – על ידי חישוב (שלא עשינו בהרצאה) נקבל ש:

  * $[T]_E=\left(\left[T\left(e_1\right)\right]_E\ \left[T\left(e_2\right)\right]_E\ \left[T\left(e_3\right)\right]_E\right)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

  * $[T]_B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&0\\-2&-1&0\end{pmatrix}$

· וגילינו שיש קשר בין מטריצות מייצגות של אותה העתקה כי מתקיים:

$$[T]_B=P_{E\to B}^{-1}\,[T]_E\,P_{E\to B}$$

· ואם נוסיף $[\underline{v}]_B$ מימין לשני הצדדים של המשוואה נקבל שלכל $[\underline{v}]_B$ מתקיים:

$$[T]_B\,[\underline{v}]_B=\underbrace{P_{E\to B}^{-1}\underbrace{[T]_E\,\underbrace{P_{E\to B}\,[\underline{v}]_B}_{=[\underline{v}]_E}}_{=[T(\underline{v})]_E}}_{=[T(\underline{v})]_B}$$

· ולפי משפט $\left[T\left(\underline{v}\right)\right]_B=[T]_B\,[\underline{v}]_B$

- בהרצאה הבאה נדבר על כך ששתי מטריצות מייצגות של אותה העתקה הן דומות.

משפט 15.

- תהי העתקה $T : V \to V$ ושני בסיסים B, C
- בסימונים שראינו בדוגמא, $[T]_B = P^{-1} [T]_C P_{C \to B}$

הערה 16. לזכור - שכל שתי מטריצות מייצגות הן דומות.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 23 - יוסי

שם: איל שטיין

January 10, 2023

נושא השיעור: דמיון מטריצות, דטרמיננטים

נושא ראשון - דמיון מטריצות:

הגדרה 1. דמיון מטריצות

- מטריצות ריבועיות מאותו סדר, A,B נקראות **דומות** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $B=P^{-1}AP$
- סימון: $A\sim B$.

הערה 2. דמיון מטריצות הוא יחס שקילות:

- רפלקסיביות - $A\sim A$
  - כי $A=I^{-1}AI$
- סימטריות - אם $A\sim B$ אז $B\sim A$
  - כי $B=P^{-1}AP$
    * ולכן אם נכפול ב-P^{-1} מימין וב-$\left(P^{-1}\right)^{-1}$ משמאל
      · נקבל: $A=\left(P^{-1}\right)^{-1}BP^{-1}$
- טרנזיטיביות - אם $A\sim B$ וגם $B\sim C$ אז $A\sim C$
  - כי $B=P^{-1}AP$ וגם $C=Q^{-1}BQ$
    * ולכן $C=Q^{-1}\left(\overbrace{P^{-1}AP}^{=B}\right)Q$
      · וזה שווה ל- $C=\left(PQ\right)^{-1}A\left(PQ\right)$

הערה 3. **תזכורת - משפט מהרצאה קודמת:**

- $[T]_B = P_{C\to B}^{-1}[T]_C P_{C\to B}$

משפט 4.

- על פי המשפט שראינו בהרצאה הקודמת מתקיים $[T]_B \sim [T]_C$ לכל שני בסיסים B ו-C.
  - כלומר כל שתי מטריצות מייצגות של אותה טרנספורמציה הן דומות.
- וגם להפך: אם שתי מטריצות דומות אזי הן מייצגות אותה העתקה ליניארית (על פי בסיסים שונים).

משפט 5.

- אם $A\sim B$ אז $r(A)=r(B)$

הוכחה.

- ראינו שאם P הפיכה אז $r(A)=r(AP)=r(PA)$
- מכאן שאם $B=P^{-1}AP$ אז $r(B)=r\left(P^{-1}AP\right)=r\left(P^{-1}A\right)=r(A)$

■

הגדרה 6. עקבה - trace

- סכום איברי האלכסון הראשי של מטריצה ריבועית A נקרא **העקבה** של A ומסומן $trace(A)$ או $tr(A)$.
- $trace(A)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$

טענה 7. הוכחנו בתרגיל בית - $trace(AB)=trace(BA)$

משפט 8.

- אם $A\sim B$ אז $trace(A)=trace(B)$

הוכחה.

- מכיוון ש-$A\sim B$ מתקיים $B=P^{-1}AP$
- ולכן $trace(B)=trace\left(P^{-1}AP\right)$
  - ולפי הטענה ש$trace(AB)=trace(BA)$ נקבל:
    - $trace\left(\left(P^{-1}A\right)(P)\right)=trace\left((P)\left(P^{-1}A\right)\right)$
      - ומכיוון ש- $PP^{-1}A=IA$
      - קיבלנו ש- $trace(A)=trace(B)$

■

נושא שני - דטרמיננטים:

- זו פונקציה ממרחב המטריצות לשדה, $D:M_{m\times n}^{(\mathbb{F})}\to\mathbb{F}$

דוגמה 9.

- נניח שיש לנו מטריצה $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.
  - נכפול $\begin{pmatrix}a_{11} & & a_{12}\\ & \swarrow\searrow & \\ a_{21} & & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$
  - לדוגמא: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=-2$
- נניח שיש לנו מטריצה 3×3:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

  - ניקח איבר משורה או עמודה מסויימת ונכפול אותו במטריצה 2×2 שנמצאת באלכסון מתחתיו.
  - המטריצה הזו נקראת **המינור.**
  - לדוגמא:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{pmatrix}$$

$$=1\left(5\cdot9-6\cdot8\right)-2\cdot\left(4\cdot9-6\cdot7\right)+3\left(4\cdot8-5\cdot7\right)=0$$

- הסימון נקבע לפי המיקום:
  - כלומר אם 2 נמצא במיקום a_{12} אז הסימון שלו יהיה $(-1)^{1+2}$
    * ואם 5 נמצא במיקום a_{22} אז הסימון שלו יהיה $(-1)^{2+2}$
    * ואם 8 נמצא במיקום a_{32} אז הסימון שלו יהיה $(-1)^{3+2}$
      · כלומר ניתן גם לכתוב:

$$(-1)^{1+2}\cdot2\cdot\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{pmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot5\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot8\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

הגדרה 10. נגדיר **דטרמיננט** באופן אינדוקטיבי:

- אם $n=1$ אז $A=(a)$.
  - נגדיר $det\left(A\right)=|A|=a$
- אם $n=2$ אז $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$
  - נגדיר $det\left(A\right)=|A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$
- אם $n=3$ אז $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$
  - נגדיר $det\left(A\right)=|A|=a_{11}\cdot\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}-a_{12}\cdot\begin{pmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}+a_{13}\cdot\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$
    - * ויוצא $det\left(A\right)=|A|=\overbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}^{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}-\overbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}^{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}}-\overbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}^{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}}+\overbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}^{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}}+\overbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}^{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}}-\overbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}^{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}}$

הגדרה 11. מינור

- לדרמיננטה של המטריצה הנוצרת על ידי מחיקת שורה i ועמודה j קוראים המינור ה-i,j ומסמנים $M_{i,j}$.

הערה 12. אם נשתמש בסימון $M_{i,j}$ קיבלנו בהגדרה ש:

- כאשר $n=2$ נקבל $|A|=a_{11}\cdot M_{11}-a_{12}\cdot M_{12}$
- כאשר $n=3$ נקבל $|A|=a_{11}\cdot M_{11}-a_{12}\cdot M_{12}+a_{13}\cdot M_{13}$

הגדרה 13. עבור $A_{m\times n}^{(\mathbb{F})}$ נגדיר את הדטרמיננטה של מטריצה A ע"י:

- $|(a)|=a$ אם $n=1$
- אחרת, $|A|=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$

הגדרה 14. ניתן להגדיר את הדרמיננט בדרך דומה עבור שורה i כלשהי:

$$|A|=\left(-1\right)^{i+1}\cdot a_{ii}\cdot M_{ii}+\left(-1\right)^{i+2}\cdot a_{i2}\cdot M_{i2}+\ldots+\left(-1\right)^{i+n}\cdot a_{in}\cdot M_{in}$$

משפט 15. ניתן להגדיר את הדטרמיננט גם על פי עמודות המטריצה:

$$|A| = (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot M_{1j} + (-1)^{j+2} \cdot a_{2j} \cdot M_{2j} + \ldots + (-1)^{j+n} \cdot a_{nj} \cdot M_{nj}$$

נושא שלישי - חישוב דטרמיננות:

משפט 16. אם אחת מהשורות או העמודות אפס אז הדטרמיננט אפס.

דוגמה 17. הדטרמיננט של המטריצה המשולשת (העליונה או התחתונה) היא מכפלת איברי האלכסון (בפרט מטריצה אלכסונית).

דוגמה 18.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10$$

משפט 19.

- אם מחליפים שתי שורות/עמודות זו בזו, סימן הדטרמיננט מתהפך.

משפט 20.

- אם יש שתי שורות/עמודות זהות, הדטרמיננט אפס.

הוכחה.

- אם נחליף את השורות אז לפי המשפט הקודם הסימן של הדטרמיננט מתהפך.
  - נקבל $|A| = -|A|$, וכל עוד אנחנו לא מעל Z_2 יתקיים $|A| = 0$.

■

משפט 21. אפשר להוציא גורם משותף משורה או עמודה של המטריצה.

דוגמה 22.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \overbrace{2}^{Second\ \ row} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- הסיבה לכך היא שאם נפתח לפי השורה השנייה אז נקבל שאפשר להוציא גורם משותף 2 מחוץ לכל הסכום.

מסקנה 23. $|\alpha A| = \alpha^n \cdot |A|$ כאשר A מסדר $n \times n$

משפט 24. אם יש שתי שורות או עמודות שאחת מהן כפולה של השנייה אז הדטרמיננט הוא אפס.

הוכחה.

- נניח ששורה R_i כפולה ב-α בשורה R_j או שעמודה C_i היא כפולה ב-α של C_j.
  - נוציא סקלאר מחוץ לדטרמיננט ונקבל דרמיננט עם שתי שורות זהות.
    * לפי משפט קודם, דטרמיננט עם שתי שורות זהות שוה לאפס.

■

משפט 25.

- אם A, B, C מטריצות זהות פרט לשורה i והשורה i ב-C היא סכום השורות מ-A ו-B
  - אזי $|C| = |A| + |B|$

משפט 26. אותו משפט אבל עם "עמודות" במקום "שורות":

- אם A, B, C מטריצות זהות פרט לעמודה i והעמודה i ב-C היא סכום העמודה מ-A ו-B
  - אזי $|C| = |A| + |B|$

משפט 27.

- אם מוסיפים לשורה/עמודה כפולה של שורה/עמודה אחרת, הדטרמיננט לא משתנה.

הוכחה.

- תהא A מטריצה.
  - ניצור מטריצה C בכך שנוסיף כפולת α של שורה j לשורה i שלה.
    * נרכיב מטריצה B שכל שורותיה זהות לאלו של A, למעט השורה ה-i שתהיה שווה לכפולה של השורה j ב-α.
      · מתוך המשפט שאם שתי שורות הן כפולה בסקלאר אחת של השנייה אז $|B| = 0$
      · ומכיוון ש-A, B, C דומות, קיבלנו $|C| = |A| + |B|$
      · ומכיוון ש- $|B| = 0$ מתקיים: $|C| = |A|$

■

מסקנה 28.

- יהיו A, B מטריצות ריבועיות שקולות שורה.
  - אזי $|A| = 0$ אם ורק אם $|B| = 0$
- כלומר דירוג לא משפיע על האפסיות של הדטרמיננט.

מסקנה 29.

- אם נחליף שורות אז הסימן של הדטרמיננט יתהפך
- אם נוסיף כפולה של שורה אחת לשורה אחרת אז הדרמיננט לא ישתנה
- אם נכפול שורה בסקלאר, נצטרך לכפול בהופכי מחוץ לדטרמיננט.

משפט 30.

- התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה
2. $|A| \neq 0$
3. שורות/עמודות A בת"ל (ולכן גם פורשת וגם בסיס)
4. $r(A) =$
5. A מכפלת מטריצות אלמנטריות
6. המדורגת הקנונית של A היא I
7. לכל $\underline{b} \in \mathbb{F}^n$ יש פיתרון יחדי ל-$A\underline{x} = \underline{b}$
8. A מייצגת ט"ל הפיכה, כלומר: $T(\underline{v}) = A\underline{v}$

תרגיל 31.

- נתון: $\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{pmatrix}\right| = 4$
- עבור אילו ערכי t מתקיים:

$$\left|\begin{pmatrix} e-tb & d-ta & f-tc \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l+te & k+td & m+tf \end{pmatrix}\right| = 36$$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 24 - יוסי

שם: איל שטיין

January 24, 2023

נושאי השיעור: תרגיל הפיכת ט"ל, לכסון מטריצות, ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

נושא ראשון - תרגיל הפיכת ט"ל:

תרגיל 1.

- תהי ט"ל $T\left(x,y,z\right)=\left(x+z,x-z,y\right)$

צ"ל: האם T הפיכה? אם כן, מצאו את T^{-1}?
פתרון:

- על מנת להראות כי T הפיכה, יש להראות שהיא חד חד ערכית ו"על".
  - נוכיח כי T חח"ע, כלומר $Ker\ T=\{0\}$:
    * ניקח $\left(x_{0},y_{0},z_{0}\right)\in Ker\ T$
    * אזי: $T\left(x_{0},y_{0},z_{0}\right)=\underline{0}=\left(x_{0}+z_{0},x_{0}-z_{0},y_{0}\right)$

1.
$$x_{0}+z_{0}=0$$

2.
$$x_{0}-z_{0}=0$$

3.
$$y_{0}=0$$

* כלומר $x_0=y_0=z_0=0$
· ולכן $Ker\ T=\{0\}$

– דרך ראשונה:

* נכתוב את המטריצה:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=(x+z,x-z,y)$$

* נהפוך ונקבל:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{array}\right]$$

· כלומר $T^{-1}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{2},z,\frac{x-y}{2}\right)$

– דרך שנייה:

* $T/T^{-1}(x,y,z)=(r,s,t)$
* כלומר $(x,y,z)=T(r,s,t)$:

1.

$$x=r+t$$

2.

$$y=r-t$$

3.

$$z=s$$

· ונקבל:

$$t=\frac{x-y}{2}$$

$$r=\frac{x+y}{2}$$

$$s = z$$

תרגיל 2.

- נתון: $\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{pmatrix}\right| = 4$
- עבור אילו ערכי t מתקיים:

$$\left|\begin{pmatrix} e-tb & d-ta & f-tc \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l+te & k+td & m+tf \end{pmatrix}\right| = 36$$

פתרון:

- נשתמש בתכונה של "אדטיביות" כדי לכתוב:

$$\left|\begin{pmatrix} e-tb & d-ta & f-tc \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l+te & k+td & m+tf \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} e & d & f \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l+te & k+td & m+tf \end{pmatrix}\right| + \overbrace{\left|\begin{pmatrix} -tb & -ta & -tc \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l+te & k+td & m+tf \end{pmatrix}\right|}^{=0}$$

– נשתמש בה שוב:

$$\left|\begin{pmatrix} e & d & f \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l+te & k+td & m+tf \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} e & d & f \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l & k & m \end{pmatrix}\right| + \overbrace{\left|\begin{pmatrix} e & d & f \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ te & td & tf \end{pmatrix}\right|}^{=0}$$
$$= \left|\begin{pmatrix} e & d & f \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ l & k & m \end{pmatrix}\right|$$

– נוציא t^2 ונקבל:

$$t^2 = \left|\begin{pmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ l & k & m \end{pmatrix}\right| = 4t^2 = 36$$

$$4t^2 = 36$$

$$t = \pm 3$$

משפט 3.

- התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה
2. $|A| \neq 0$
3. שורות/עמודות A בת"ל (ולכן גם פורשות וגם בסיס)
4. $r(A) = n$
5. A מכפלה של מטריצות אלמנטריות
6. המדורגת הקנונית של A היא I
7. לכל $\underline{b} \in \mathbb{F}^n$ יש פיתרון יחיד ל-$A\underline{x} = \underline{b}$
8. A מייצגת ט"ל הפיכה, כלומר: $T(\underline{v}) = A\underline{v}$

הוכחה. **נוכיח את מספר 2 -** $|A| \neq 0$

- נסמן ב-B את המטריצה המדורגת הקנונית של A.
- כיוון ראשון $\Leftarrow$:
  - אם A הפיכה אז $B = I$ ולכן $|B| = |I| \neq 0$
    * אבל קיבלנו כמסקנה שאם A, B שקולות שורה אז $|A| = 0$ אם ורק אם $|B| = 0$
      · ולכן $|A| \neq 0$
- כיוון שני $\Rightarrow$:
  - אם A לא הפיכה אזי $r(A) < n$ ולכן ב-B יש לפחות שורת אפסים אחת.
    * לפי משפט, אם ב-B יש שורת אפסים אז $|B| = 0$
      · ושוב, על פי המסקנה היא ש-$|A| = 0$.

■

משפט 4. כפליות של דטרמיננטים

- יהיו $A, B \in M_{n \times n}^{(\mathbb{F})}$.
- אזי $|AB| = |A| \cdot |B|$.

הוכחה. באינדוקציה על K.

- <u>מקרה ראשון:</u> אם אחת מבין המטריצות A,B לא הפיכה אזי גם AB לא הפיכה ונקבל כי $|AB|=0=|A|\cdot|B|$
- <u>מקרה שני:</u> לכן נניח ש-A,B הפיכות.
- אזי A ניתנת להצגה כמכפלה של מטריצות אלמנטריות:

$$A=E_K\dots E_1$$

  – נוכיח באינדוקציה על K כי $\left|\overbrace{E_k\dots E_1}^{A}\right||B|=\left|\overbrace{E_k\dots E_1}^{A}B\right|$:

  – **בסיס:**

    * נוודא שמתקיים $|E_1B|=|E_1||B|$ עבור שלושת הסוגים של מטריצות אלמנטריות כאשר $A=E_1$:

      1. אם E_1 היא הוספת כפולה של שורה בסקלאר לשורה אחרת, כלומר $E_1:R_i+\alpha R_j\to R_i$

         (א) אז לפי משפט הדטרמיננט $|E_1B|$ לא משתנה: $\overbrace{|E_1B|}^{=|B|}=\overbrace{|E_1|}^{=1}\cdot|B|$

      2. אם E_1 היא החלפה בין שתי שורות אז: $E_1:R_i\leftrightarrow R_j$

$$\overbrace{|E_1B|}^{=-|B|}=\overbrace{|E_1|}^{=-1}\cdot|B|$$

      3. אם E_1 היא הכפלת שורה בסקלאר אז: $E_1:R_i\to\alpha R_i$

$$\overbrace{|E_1B|}^{=\alpha\cdot|B|}=\overbrace{|E_1|}^{\alpha}\cdot|B|$$

  – **הנחה:** נניח שהטענה $|E_{k-1}\dots E_1|\cdot|B|=|E_{k-1}\dots E_1B|$ נכונה

  – **צעד:** ניקח $|AB|=|E_K\dots E_1B|$ ונכתוב את הביטוי כך:

$$|E_k\dots E_1B|=|E_K\left(E_{K-1}\dots E_1B\right)|$$

    * ולפי הנחת האינדוקציה מתקיים $|E_K\left(E_{K-1}\dots E_1B\right)|=|E_k|\cdot|E_{K-1}\dots E_1B|$

      · נבצע את הפעולה שוב עד שנגיע ל: $|E_kE_{K-1}\dots E_1|\cdot|B|$

      · נציב $A=E_kE_{K-1}\dots E_1$ ונקבל:

$$|AB|=|A|\,|B|$$

■

מסקנה 5. אם A הפיכה אז $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

הוכחה.

- $\left|A^{-1}\right| \cdot |A| = \left|A^{-1}A\right| = |I| = 1$
  - ולכן $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$
    * הערה - ניתן להוסיף ש- $\frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

■

מסקנה 6. $\left|A^k\right| = |A|^k$

מסקנה 7. אם $A \sim B$ אז מתקיים $|A| = |B|$ (הכיוון ההפוך לא בהכרח נכון)

הוכחה.

- אם $A \sim B$ אז קיימת הפיכה P כך ש $B = P^{-1}AP$
  - ולכן $|B| = \left|P^{-1}AP\right|$
    * ולפי כפליות מתקיים:

$$= \left|P^{-1}\right| \cdot |A| \cdot |P|$$

· ומכיוון ש $\left|P^{-1}\right| = |P|^{-1}$ נקבל:

$$= |A| \cdot |P| \cdot \left|P^{-1}\right| = |A|$$

· כלומר $|B| = |A|$

■

נושא שני - לכסון מטריצות:

הקדמה:

- נניח שנתונה מטריצה A ורוצים לחשב את A^{1000}.
  - נניח כי A הייתה דומה למטריצה אלכסונית D.
    * זאת אומרת שקיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = D$
    * כלומר $A = PDP^{-1}$

– כעת ניתן לכתוב את הביטוי A^{1000} בצורה: $A^{1000}=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\ldots\left(PDP^{-1}\right)$

* נוריד את הסוגריים ונקבל:

$$=PD\overbrace{P^{-1}P}^{=I}D\overbrace{P^{-1}P}^{=I}D\overbrace{P^{-1}P}^{=I}DP^{-1}\ldots PDP^{-1}$$

* כלומר:

$$A^{1000}=PD^{1000}P^{-1}$$

· ומכיוון ש-D אלכסונית מתקיים:

$$PD^{1000}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{1000} & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ddots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \lambda_n^{1000}\end{pmatrix}P^{-1}$$

הגדרה 8. מטריצה לכסינה

- $A\in M_{n\times n}^{(\mathbb{F})}$ נקראת <u>לכסינה</u> אם היא דומה למטריצה אלכסונית.
  – כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}^{(\mathbb{F})}$ ומטריצה אלכסונית $D=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\in M_{n\times n}^{(\mathbb{F})}$ כך שמתקיים $P^{-1}AP=D$

בניסוח אחר:

- נניח כי A מטריצה לכסינה.
  – אזי קיימות מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$
  * נכפול ב-P משמאל ונקבל (אם ורק אם):

$$AP=PD$$

· וזה יקרה (אם ורק אם) קיימים סקאלרים $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{F}$ ווקטורים $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ בת"ל כך ש:

$$A\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\ldots\underline{v}_n\right)=\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\ldots\underline{v}_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ddots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

- וזה קורה (אם ורק אם) קיימים $\lambda_1,\ldots\lambda_n \in \mathbb{F}$ ו- $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ בת"ל כל ש:

$$\left(A\underline{v}_1\ \ A\underline{v}_2\ \ \ldots\ \ A\underline{v}_n\right)=\left(\lambda_1\underline{v}_1\ \ \lambda_2\underline{v}_2\ \ \ldots\ \ \lambda_n\underline{v}_n\right)$$

- וזה יקרה (אם ורק אם) קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{F}$ ו-$\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ בת"ל כך ש:

$$A\underline{v}_i=\lambda_i\underline{v}_i\ ,\quad i=1,\ldots,n$$

מסקנה 9.

- כלומר מצאנו תנאי כדי שמטריצה תהיה לכסינה:
  - A לכסינה אם ורק אם קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{F}$ ו-$\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ בת"ל כך שמתקיים $A\underline{v}_i=\lambda_i\underline{v}_i$ כאשר $i=1,2,\ldots n$
  - במקרה הזה מתקיים ש $P^{-1}AP=D$ כאשר $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ הן עמודות של P ו-$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ הם איברי האלכסון של המטריצה האלכסונית D.

הגדרה 10. ערך עצמי

- סקלאר $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא <u>ערך עצמי</u> של $A \in M_{n\times n}^{(\mathbb{F})}$ אם קיים וקטור $\underline{0}\neq\underline{v}\in\mathbb{F}^n$ כך ש $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$
  - במקרה זה נאמר ש-$\underline{v}$ הוא <u>וקטור עצמי</u> המתאים לערך עצמי λ
    - ולהפך, כלומר λ הוא <u>ערך עצמי</u> המתאים לוקטור עצמי $\underline{v}$.

מסקנה 11. מטריצה היא לכסינה אם יש למטריצה n וקטורים עצמיים בת"ל.

נושא שלישי - מציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים:

- לפי ההגדרה שראינו: $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של $A \in M_{n\times n}^{(\mathbb{F})}$ אם ורק אם קיים $0\neq\underline{v}\in\mathbb{F}^n$ כך ש $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$
  - נעביר את $A\underline{v}$ אגף ונקבל את אותו ביטוי אבל "כך ש: $\lambda\underline{v}-A\underline{v}=\underline{0}$"
  - נוציא גורם משותף $\underline{v}$ מימין ונקבל את אותו ביטוי אבל "כך ש: $(A-\lambda)\,\underline{v}=\underline{0}$"
    - כלומר למערכת $(A-\lambda)\,\underline{x}=\underline{0}$ יש פיתרון לא טרויוויאלי כי $\underline{v}\neq 0$
      - ולכן $\lambda I-A$ לא הפיכה.
      - $\lambda I-A$ לא הפיכה אם ורק אם $|\lambda I-A|=0$.

הגדרה 12. פולינום אופייני, ריבוי אלגברי

- $\lambda I - A$ נקרא פולינום אופייני של המטריצה A.
  - שורשי הפולינום האופייני הם הערכים העצמיים.
    - מספר הפעמים ששורש חוזר על עצמו נקרא ריבוי אלגברי.
- כדי למצוא וקטורים עצמיים, מציבים את השורשים של הפולינום האופייני בהגדרה של ערך עצמי שפיתחנו למעלה:
  - "$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי אם ורק אם קיים $0 \neq \underline{v} \in \mathbb{F}^n$ כך ש $(A-\lambda)\,\underline{v} = \underline{0}$".
  - ואז פותרים מערכת משוואות.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 25 - יוסי

שם: איל שטיין

January 17, 2023

נושאי השיעור: המשך לכסון, לכסון ט"ל

נושא ראשון - המשך לכסון:

הגדרה 1.

- לכל ערך עצמי λ_i נגדיר

$$\underline{v}_{\lambda_i} = \{\underline{x} \in \mathbb{F}^n \quad | \quad (\lambda_i I - A)\,\underline{x} = \underline{0}\}$$

  – ונקרא לו **המרחב העצמי** של הערך העצמי λ_i.

    * **הערה:** הוספנו את וקטור האפס למרחב אפילו ש$\underline{v} \neq \underline{0}$

      · כלומר, המרחב הזה הוא הפתרונות של המערכת $(\lambda_i I - A)\,\underline{v}_{\lambda_i} = \underline{0}$ בתוספת וקטור האפס.

הגדרה 2. ריבוי גאומטרי

- $dim\,(V_{\lambda_i})$ נקרא ה**ריבוי הגאומטרי** של הערך העצמי λ_i.

תזכורת: $dim\,(V_{\lambda_i}) = n - rank\,(\lambda_i I - A)$

תזכורת: $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ = פולינום עצמי, כאשר r_i הוא ריבוי אלגברי של הערך העצמי λ_i.

משפט 3. מטריצה A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם ורק אם:

1. הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$
2. לכל ערך עצמי מתקיים: ריבוי אלגברי = ריבוי גאומטרי.

דוגמה 4.

- $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-3&5&-3\\-1&1&1\end{pmatrix}$ - בדקו האם A לכסינה ומצאו P הפיכה (נקרא גם רגולרית) ו-D אלכסונית כך ש $PAP^{-1}=D$

פתרון:

- בהרצאה הקודמת אמרנו ש- $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$ ו-$(\lambda I-A)=\underline{0}$
- נמצא את השורשים של הפולינום האופייני של A.
  - כמו שאמרנו בהרצאה הקודמת, הפולינום האופייני הוא ממעלה n.
  - ניקח את הדטרמיננט של הפולינום האופייני:

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&1&-1\\3&\lambda-5&3\\1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$$

  * אם נפתח את הדטרמיננט אז נקבל פולינום ממעלה 3 שהוא לא בהכרח פתיר.
  * לכן קודם נדרג את המטריצה הזו והדטרמיננט לא תשתנה, לפי משפט. ונקבל מטריצה משולשת:

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-3&1&-1\\3&\lambda-5&3\\1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|\overset{R_1+R_3\to R_1}{\Rightarrow}\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&\lambda-2\\3&\lambda-5&3\\1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$$

    · אפשר להוציא החוצה את $\lambda-2$ ולקבל $=(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&\lambda-2\\3&\lambda-5&3\\1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$
    · אבל נמשיך לדרג כדי לפשט את הביטוי:

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&\lambda-2\\3&\lambda-5&3\\1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|\overset{c_3-c_1\to c_3}{\Rightarrow}\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\3&\lambda-5&0\\1&-1&\lambda--2\end{pmatrix}\right|$$

    · קיבלנו מטריצה משולשת עליונה, ולפי משפט הדטרמיננט שלה הוא מכפלת איברי האלכסון, כלומר:

$$|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-5)$$

- ולכן הערכים העצמיים של A הם: 2,2,5.
  - כאשר 2 הוא שורש מריבוי אלגברי 2 ו-5 הוא שורש מריבוי אלגברי 1.

- לכל ערך עצמי נמצא את המרחבים העצמיים:

1. עבור $\lambda_1 = 5$ נפתור את המערכת $(5I - A)\,\underline{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 5-3 & 1 & -1 \\ 3 & 5-5 & 3 \\ 1 & -1 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- לשים לב שלקחנו $P = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ היא מטריצה הפיכה, כלומר הדרגה שלה מלאה וכל הוקטורים שלה בת"ל. לכן $\underline{v} \neq 0$.
- קיבלנו ש:

$$x_1 = -x_3$$

$$x_2 = 3 \cdot x_3$$

$$x_3 = t$$

* ולכן $v_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

· כלומר $dim\left(V_{\lambda_1}\right) = 1$ = ריבוי גאומטרי = ריבוי אלגברי

2. עבור $\lambda_2 = 2$ נפתור את המערכת $(2I - A)\,\underline{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & -1 \\ 3 & 2-5 & 3 \\ 1 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- קיבלנו ש:

$$x_1 = x_2 - x_3$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = t$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

* כלומר קיבלנו שני וקטורים עצמיים בת"ל ולכן $dim\left(V_{\lambda_2}\right) = 2$ = ריבוי גאומטרי = ריבוי אלגברי.

- כלומר הראנו שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים וגם לכל ערך עצמי מתקיים ריבוי גאומטרי = ריבוי אלגברי.
  - לכן לפי המשפט שראינו, A לכסינה מעל $\mathbb{F}$.
- אפשרות אחרת הייתה להראות שמצאנו שלושה וקטורים עצמיים $\underline{v}$ שהם בת"ל ופורשים את $\mathbb{R}^3$ ולכן A לכסינה.
- נכניס את הוקטורים העצמיים למטריצה ונמצא את $P = \left(\underline{v}_5, \underline{v}_{1_{\lambda_2}}, \underline{v}_{2_{\lambda_2}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ובאותו סדר משמאל לימין נכניס את הערכים העצמיים למטריצה באופן הבא, כדי לקבל את $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

מסקנה 5.

- ריבוי אלגברי $\leq$ ריבוי גאומטרי $\leq$ 1
  - לכן אם הריבוי האלגברי = 1 אז: "ריבוי אלגברי = ריבוי גאומטרי = 1".

נושא שני - לכסון ט"ל:

הגדרה 6. ערך עצמי ווקטור עצמי של ט"ל.

- $T: V \to V$ ט"ל.
- סקלאר $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא **ערך עצמי של** T אם קיים וקטור $\underline{0} \neq \underline{v} \in V$ כך ש $T\left(\underline{v}\right) = \lambda \underline{v}$
  - במקרה זה, $\underline{v}$ נקרא **וקטור עצמי של** T המתאים לערך עצמי λ
  - וכן הפוך: λ נקרא **ערך עצמי** המתאים לוקטור עצמי $\underline{v}$

הערה 7. איך למצוא ערכים ווקטורים עצמיים של ט"ל T:

- ניקח $T\left(\underline{v}\right) = \lambda \underline{v}$.

– נפעיל וקטור קוארדינטות לפי בסיס B כלשהו על שני האגפים ונקבל $[T(\underline{v})]_B = [\lambda\underline{v}]_B$.

– לפי משפט $[T(\underline{v})]_B = [T]_B [\underline{v}]_B$

* ולכן:

$$[T]_B [\underline{v}]_B = \lambda \cdot [\underline{v}]_B$$

* כלומר:

1. λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם λ ערך עצמי של $[T]_B$

2. הוקטור העצמי של $[T]_B$ הוא $[\underline{v}]_B$ וצריך להשתמש בקואורדינטות כדי לתרגם חזרה ולמצוא את $\underline{v}$ שהוא וקטור עצמי של הט"ל T.

הגדרה 8. ט"ל לכסינה

- יהא V מרחב וקטורי.
- העתקה ליניארית $T: V \to V$ נקראת **לכסינה** אם קיים בסיס B של V כך ש-$[T]_B$ אלכסונית.

משפט 9. איך למצוא בסיס B

- יהא V מרחב וקטורי.
- $T: V \to V$ ט"ל
- $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ בסיס של V
- אזי $[T]_B$ אלכסונית אם ורק אם קיימים סקלארים λ_j כך שלכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים $T(\underline{v}_j) = \lambda_j \underline{v}_j$

מסקנה 10.

- ט"ל $T: V \to V$ לכסינה אם קיים בסיס ל-V המורכב מווקטורים עצמיים שלה.
  – המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הזה היא מטריצה אלכסונית, כאשר הערכים העצמיים מופיעים באיברי האלכסון שלה.
- כלומר $[T]_B$ לכסינה אם ורק אם קיים בסיס B שמורכב מווקטורים עצמיים.

תרגיל 11.

- תהא $T: M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})} \to M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}$ המוגדרת ע"י $T(A) = A^t$
- מצאו בסיס B של $M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}$ כך ש $[T]_B$ אלכסונית.

פתרון:

- נבחר את הבסיס הסטנדרטי:
$$E=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{=e_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{=e_2},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{=e_3},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{=e_4}\right\}$$

- נמצא את $[T]_E$:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ [T(e_1)]_E&[T(e_2)]_E&[T(e_3)]_E&[T(e_4)]_E\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}$$

  – לפי הגדרת T (שהיא עושה טרנספוז למטריצה) נקבל:

$$\begin{aligned}[T]_E&=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ [e_1]_E&[e_3]_E&[e_2]_E&[e_4]_E\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- נמצא ערכים עצמיים:

$$\begin{aligned}|\lambda I-[T]_E|&=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&0\\0&0&0&\lambda-1\end{pmatrix}\right|\\ &=(\lambda-1)^3(\lambda+1)\end{aligned}$$

  – לכן הערכים העצמיים הם: 1,1,1-1 .

- נמצא מרחב עצמי לכל ערך עצמי:

  – עבור $\lambda_1=1$ יתקיים

$$|1\cdot I-[T]_E|=\left|\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right|\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right|$$

$$x_2=x_3=r$$

$$x_1=s$$

$$x_4=t$$

$$[V_{\lambda_1}]_E=\left\{\begin{pmatrix}s\\r\\r\\t\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

– עבור ערך עצמי $\lambda_2=-1$ נמצא את המרחב העצמי:

$$|(-1)\cdot I-[T]_E|=\left|\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\right|\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right|$$

$$x_1=0$$

$$x_2=-x_3=-t$$

$$x_4=0$$

$$[V_{\lambda_2}]_E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- נתרגם את הבסיסים של המרחבים העצמיים בחזרה לוקטורים ב-$M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}$ לפי הבסיס הסטנדרטי:

$$V_{\lambda_1} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_2} = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- לכן $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
  - ו-$[T]_B$ תהיה מטריצה עם הערכים העצמיים לפי סדר ההופעה ב-B, משמאל לימין:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* לסיכום, מצאנו בסיס B של $M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}$ עבורו $[T]_B$ מטריצה אלכסונית.

מסקנה 12. אם T לכסינה אז קיים בסיס B כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

- לכן כל $[T]_C$ תהיה דומה ל-$[T]_B$ כי כל שתי מטריצות מייצגות הן דומות.
  - ולכן $[T]_C$ בהכרח לכסינה.
- הכיוון ההפוך גם עובד - אם נמצא $[T]_C$שהיא לכסינה, אז יש n וקטורים עצמיים בת"ל ולכן T לכסינה.

אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 26 - יוסי (104166)

שם: איל שטיין

January 22, 2023

נושאי השיעור: המשך לכסון, ערך עצמי של ט"ל, וקטור עצמי של ט"ל

נושא ראשון - המשך לכסון:

משפט 1.

- יהיו:
  - V מרחב וקטורי
  - $T: V \to V$ העתקה ליניארית
  - $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ בסיס של V.
- אזי: $[T]_B$ אלכסונית אם ורק אם קיימים סקלארים λ_j כל שלכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים $T\left(\underline{v}_j\right) = \lambda_j \underline{v}_j$

הוכחה.

- <u>כיוון ראשון $\Rightarrow$:</u>
  - נניח כי קיימים סקלארים $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ כך שלכל j מתקיים $T\left(\underline{v}_j\right) = \lambda_j \underline{v}_j$
    * אזי לכל j מתקיים $T\left(\underline{v}_j\right) = 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_j \underline{v}_j + \ldots + 0 \cdot \underline{v}_n$
    * אזי על פי הגדרת מטריצה מייצגת:

$$[T]_B = \left([T(\underline{v}_1)]_B \quad [T(\underline{v}_2)]_B \quad \ldots \quad [T(\underline{v}_n)]_B\right)$$

$$[T]_b = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

· כלומר $[T]_B$ אלכסונית.

- <u>כיוון שני $\Leftarrow$</u>:
  - נניח כי $[T]_B$ אלכסונית:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = \left([T(\underline{v}_1)]_B \quad [T(\underline{v}_2)]_B \quad \ldots \quad [T(\underline{v}_n)]_B \right)$$

  - אזי על פי הגדרת מטריצה מייצגת:

$$T\left(\underline{v}_j\right) = 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_j \underline{v}_j + \ldots + 0 \cdot \underline{v}_n$$

    * כלומר $T\left(\underline{v}_j\right) = \lambda_j \underline{v}_j$

$\blacksquare$

מסקנה 2.

- ט"ל $T: V \to V$ לכסינה אם קיים בסיס ל-V המורכב מווקטור עצמי שלה.
- המטריצה המייצגת של V לפי הבסיס הזה היא מטריצה אלכסונית כאשר הערכים העצמיים מופיעים באיברי האלכסון שלה.

מסקנה 3.

- תהא $T: V \to V$ ט"ל.
- T לכסינה אם ורק אם קיים בסיס של V כך ש-$[T]_B$ לכסינה
  - (למעשה אם ורק אם לכל בסיס B של V מתקיים ש-$[T]_B$ לכסינה).

הערה 4. איך למצוא אם T לכסינה:

- עבור העתקה $T: V \to V$ כאשר V ממימד n,
  - מחפשים n וקטורים עצמיים של T,
    * כלומר מחפשים בסיס $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ כך שיתקיים $T\left(\underline{v}_j\right) = \lambda \underline{v}_j$
  - בפועל לוקחים מטריצה מייצגת $[T]_B$ (עדיף לקחת בסיס סטנדרטי):
    * אם $[T]_B$לכסינה אז T לכסינה.

* ו- $[T]_C$ אלכסונית (כאשר C האו בסיס המורכב מווקטורים עצמיים).

דוגמה 5.

- נתונה $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ט"ל.
- המוגדרת על ידי $T\left(ax^2+bx+c\right)=(a+b)\,x^2+(b+c)\,x+b+c$
- האם T לכסינה?

פתרון:

- ניקח בסיס סטנדרטי $E=\left(x^2,x,1\right)$ ונבנה את $[T]_E$

$$T\left(x_2\right)=x^2=1\cdot\left(x^2\right)+0\cdot(x)+0\cdot(1)$$

$$T(x)=x^2+x+1=1\cdot\left(x^2\right)+1\cdot(x)+1\cdot(1)$$

$$T(1)=x+1=0\cdot\left(x^2\right)+1\cdot(x)+1\cdot(1)$$

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

– נבחן את הערכים העצמיים שקיבלנו:

משפט 6. אם סכום האיברים בשתי שורות שווה, אז סכום השורה הוא ערך עצמי.

* במקרה שלנו, יש שלוש שורות עם סכום של 2 ולכן 2 הוא ערך עצמי.
* ומכיוון שהמטריצה לא הפיכה, גם 0 הוא ערך עצמי.

– נמצא את שאר הערכים:

$$|\lambda I-[T]_E|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-\\0&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$$

$$\begin{aligned}|\lambda I-[T]_E|&=(t-1)\left((t-1)^2-1\right)\\&=(t-1)\cdot t\cdot(t-2)\end{aligned}$$

– כלומר $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, λ_3-2

- לפי משפט מההרצאה הקודמת, מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם ורק אם:

  1. הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$
  2. לכל הריבוי האלגברי

- נמצא נרחב עצמי עבור ערך עצמי $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

  - נסמן $x_2 = t$ ונקבל:

$$\left[\underline{v}_{\lambda_1=0}\right]_E = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- נמצא מרחב עצמי עבור $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$\left[\underline{v}_{\lambda_2=1}\right]_E = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- נמצא מרחב עצמי עבור $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2-1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

  – נדרג את המטריצה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = t$$

$$\left[\underline{v}_{\lambda_3=2}\right]_E = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

- קיבלנו ש- $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, כאשר $B = \left(-x^2 + x - 1, x^2, x^2 + x + 1\right)$
- קיבלנו ש:
  – עבור $\lambda_1 = 0$ הוקטור העצמי הוא $span\left\{-x^2 + x - 1\right\} = \underline{v}_{\lambda_1}$
  – עבור $\lambda_2 = 1$ הוקטור העצמי הוא $span\left\{x^2\right\} = \underline{v}_{\lambda_2}$
  – עבור $\lambda_3 = 2$ הוקטור העצמי הוא $span\left\{x^2 + x + 1\right\} = \underline{v}_{\lambda_3}$
- לפי המשפט שהוכחנו בתחילת ההרצאה, T לכסינה.

דוגמה 7.

- האם המטריצה הזו לכסינה $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$?
- $|\lambda\cdot I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^2+1=0$
  – ומעל $\mathbb{R}$ אין ערכים עצמיים ולכן המטריצה לא לכסינה.

נושא שני - פירמול של המשפטים שראינו לגבי ט"ל:

הגדרה 8. דטרמיננטה של העתקה

- תהא $T:V\to V$ ט"ל.
  – נגדיר את הדטרמיננטה של T להיות: $|T|=|[T]_B|$ כאשר B בסיס כלשהו של V.
    * מכיוון שכל מטריצה מייצגת $[T]_B$ דומה למטריצה מייצגת אחרת, הדטרמיננטות שלהן שוות.

הגדרה 9. פולינום אופייני של העתקה

- תהא $T:V\to V$ ט"ל.
- $|\lambda I-T|$ נקרא הפולינום האופייני של T
  – זאת מכיוון ש:

$$|\lambda I-T|=|[\lambda I-T]_B|=|[\lambda I]_B-[T]_B|=|\lambda I-[T]_B|$$

הערה 10. כמו במטריצות, מעלת הפולינום האופייני של הט"ל היא n.

משפט 11.

- הערכים העצמיים של T הם השורשים של הפולינום האופייני $|\lambda I-T|$

הוכחה.

- ניקח $T(\underline{v})=\lambda\underline{v}$, כלומר λ ערך עצמי של T ו-$\underline{v}$ הוקטור עצמי המתאים לו.
  – לפי משפט: $[T]_B[\underline{v}]_B=[T(\underline{v})]_B$
    * אזי $[T(\underline{v})]_B=[\lambda\underline{v}]_B=\lambda[\underline{v}]_B$
- ומצד שני ידוע כי $(\lambda I-[T]_B)[\underline{v}]_B=0$, כאשר $\underline{v}\neq\underline{0}$

- אם ורק אם $|\lambda I - [T]_B| = 0$ (כי $\underline{v} \neq 0$)
  * אם ורק אם $|[\lambda I - T]_B| = 0$
    · אם ורק אם $|\lambda I - T| = 0$

■

משפט 12.

- אם λ ערך עצמי של T
  - אז: $\underline{v}$ הוא וקטור עצמי שמתאים לו אם ורק אם $\underline{0} \neq \underline{v} \in Ker\left(\lambda I - T\right)$

הוכחה.

- נתחיל מלקחת ערך עצמי λ ווקטור עצמי $\underline{v}$המתאים לו

$$T\left(\underline{v}\right) = \lambda \underline{v}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$T\left(\underline{v}\right) - \lambda \underline{v} = \underline{0}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(T - \lambda I\right)\underline{v} = \underline{0}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underline{v} \in Ker\left(T - \lambda I\right)$$

■

משפט 13.

- המרחב $V_\lambda = Ker\left(\lambda I - T\right)$ הוא תת-מרחב של T והוא נקרא "המרחב עצמי של λ".

הוכחה.

- $V_\lambda = Ker\left(T-\lambda I\right)$ תת מרחב מכיוון שהוא גרעין של ט"ל.

■

משפט 14.

- וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל
  - (המשפט נכון גם עבור מטריצות כי כל מטריצה היא גם העתקה ליניארית).

הוכחה.

- יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ערכים עצמיים שונים והיו $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ וקטורים עצמיים מתאימים.
- **צ"ל:** $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ בת"ל.
- **הוכחה באינדוקציה על k:**
  - בסיס: $k=1$.
    * מהגדרת וקטור עצמי מתקיים $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ ולכן הוא בת"ל.
  - הנחה: נניח כי לכל $k-1$ ערכים עצמיים מתקיים $\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{k-1}\underline{v}_{k-1} = \underline{0}$ כך ש $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$
  - צעד:

$$\underline{0} = T\left(\underline{0}\right) = T\left(\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k\underline{v}_k\right)$$

$$= \alpha_1 T\left(\underline{v}_1\right) + \ldots + \alpha_k T\left(\underline{v}_k\right)$$

$$= \alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\underline{v}_k = \underline{0}$$

* נשווה לאפס על מנת לבדוק אי-תלות, כלומר נניח שמתקיים $\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}$.
  · נכפול את המשוואה הזו ב-λ_1 ונקבל:

$$\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_1\underline{v}_k = \underline{0}$$

  · נעשה חיסור משוואות ונקבל:

$$\left(\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\underline{v}_k\right) - \left(\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_1\underline{v}_k\right) = \underline{0}$$

$$\alpha_2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_k\left(\lambda_k - \lambda_1\right)\underline{v}_k = \underline{0}$$

- על פי הנחת האינדוקציה מתקיים $\alpha_2\overbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}^{\neq 0}=\ldots=\alpha_k\overbrace{(\lambda_k-\lambda_1)}^{\neq 0}=0$
- מכיוון שכל ה-λ_i שונים, נקבל כי:

$$\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$$

- נציב במשוואה $\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1+\ldots+\alpha_k\lambda_1\underline{v}_k=\underline{0}$ ונקבל:

$$\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1=\underline{0}$$

$$\alpha_1=0$$

- כלומר $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ בת"ל.

■

הגדרה 15. ריבוי אלגברי וריבוי גאומטרי.

- יהא λ ערך עצמי (של ט"ל או מטריצה).
- אזי:
  - הריבוי האלגברי של λ הוא מספר הפעמים ש-λ מופיע בפולינום האופייני.
  - הריבוי הגאומטרי של λ הוא מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל השייכים ל-λ (וגם המימד של המרחב העצמי).

משפט 16.

- לכל ערך עצמי מתקיים: ריבוי אלגברי $\geq$ ריבוי גאומטרי ≥ 1.

מסקנה 17.

- אם הריבוי האלגברי = 1, אז שניהם שווים ל-1.

משפט 18.

- מטריצה לכסינה $\Longleftrightarrow$:

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$
2. לכל ערך עצמי מתקיים שהריבוי האלגברי = ריבוי גאומטרי.

תרגיל 19.

- תהא $A\in M_{4\times4}^{(\mathbb{R})}$ מטריצה סינגולרית המקיימת:

1. $det\left(A-2I\right)=0$
2. $r\left(3I-A\right)=2$

צ"ל:

א. מצאו את הפולינום האופייני של A

ב. האם המטריצה $I-A^{2}$ הפיכה או לכסינה?

ג. חשבו את הדטרמיננטה ואת העקבה של $I-A^{2}$.

א. פתרון:

- מטריצה סינגולרית היא לא הפיכה, כלומר 0 הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי של לפחות 1, כי:

$$|\lambda I-A|=0$$

$$|0I-A|=|-A|=0$$

- מכיוון ש $|A-2I|=0\iff|2I-A|=0$, מתקיים ש-2 הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי של לפחות 1.
- נתון $r\left(3I-A\right)=2$ ולכן $|3I-A|=0$
  - כלומר 3 הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי של לפחות 2 (כי הריבוי הגאומטרי הוא 2 והריבוי האלגברי תמיד גדול או שווה לו)
- קיבלנו ערכים עצמיים:
  - 0 עם ריבוי אלגברי של לפחות 1
  - 2 עם ריבוי אלגברי של לפחות 1
  - 3 עם ריבוי אלגברי של לפחות 2.
- ומכיוון שהסדר של A הוא 4×4, נקבל:
  - הריבוי האלגברי של 0 צריך להיות שווה לריבוי הגאומטרי = 1.
  - הריבוי האלגברי של 2 צריך להיות שווה לריבוי הגאומטרי = 1.
  - הריבוי האלגברי של 3 צריך להיות שווה לריבוי הגאומטרי = 2.
- לכן A לכסינה.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | הרצאה 27 - יוסי

שם: איל שטיין

January 24, 2023

נושאי השיעור: הוכחת משפטי לכסון, משפט קיילי-המילטון

נושא ראשון - הוכחת משפטי לכסון

משפט 1. לכל ערך עצמי מתקיים "ריבוי אלגברי $\leq$ ריבוי גאומטרי ≤ 1"

הוכחה.

- נוכיח "ריבוי גאומטרי ≤ 1":
  - אם λ_0 ערך עצמי, אזי קיים $\underline{v}_0$ שהוא וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ_0 ולכן המרחב העצמי השייך ל-λ_0 (נסמנו V_{λ_0}) הוא לפחות ממימד 1.
- נוכיח "ריבוי אלגברי $\leq$ ריבוי גאומטרי" עבור λ_0:
  - נסמן את הריבוי הגאומטרי של λ_0 ב-k.
    * יהיו $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ וקטורים עצמיים בת"ל המתאימים לערך עצמי λ_0, כלומר $T\left(\underline{v}_i\right) = \lambda_0 \underline{v}_i$ לכל $1 \leq i \leq k$
    * נשלים את כל הוקטורים $\underline{v}_i$ לבסיס של V כך:

$$B = \left(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \ldots, \underline{v}_n\right)$$

· נחשב את $[T]_B$ בעזרת חישוב T על איברי בסיס B:

$$T\left(\underline{v}_1\right) = \lambda_0 \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + 0 \cdot \underline{v}_n$$

$$T\left(\underline{v}_2\right) = 0 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_0 \underline{v}_2 + \ldots + 0 \cdot \underline{v}_n$$

$$\vdots$$

$$T\left(\underline{v}_k\right) = 0 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_0 \underline{v}_k$$

צירוף ליניארי כלשהו של איברי $T\left(\underline{v}_{k+1}\right) = B$

$$\vdots$$

צירוף ליניארי כלשהו של איברי $T\left(\underline{v}_n\right) = B$

- ולכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & * & * & * \\ & \lambda_0 & & * & * & * \\ & & \lambda_0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

- כאשר $*$ אלה צירופים ליניאריים כלשהם של בסיס B.
- ואז נקבל שהדטרמיננטה של $\lambda I - [T]_B$ היא:

$$|\lambda I - [T]_B| = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_0 & & & & & \\ & \lambda - \lambda_0 & & & & \\ & & \lambda - \lambda_0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

- אם נפתח לפי עמודה ראשונה נקבל (מטריצה כלשהי)$\cdot \left(\lambda - \lambda_0\right)^k = |\lambda I - [T]_B|$

- ולכן הריבוי האלגברי של λ_0 הוא לכל הפחות k (וכאמור, k הוא הריבוי הגאומטרי של λ_0).

$\blacksquare$

משפט 2. מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{F}$ $\iff$:

1. הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ערך עצמי מתקיים "ריבוי אלגברי = ריבוי גאומטרי".

הוכחה.

- <u>כיוון ראשון $\Leftarrow$</u>

- נניח כי מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{F}$.
- כל ערך עצמי תורם מספר וקטורים עצמים בת"ל לפי הריבוי הגאומטרי.
  - וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.
    - לכן תמיד נוכל למצוא קבוצת וקטורים בת"ל שמספרה כסכום כל הריבויים הגאומטריים.
      - אם כל ריבוי גאומטרי שווה לריבוי האלגברי אז "סכום הריבויים הגאומטריים = ריבוי סכום האלגבריים".
      - זוהי בדיוק מעלת הפולינום האופייני כי הנחנו שהוא מתפרק לגורמים ליניאריים.
      - ולכן יש n וקטורים עצמיים בת"ל.

- <u>כיוון שני</u> $\Rightarrow$:
- אם לפולינום או:

1. או אין n שורשים
2. או ש"ריבוי אלגברי $>$ ריבוי גאומטרי" עבור אחד הערכים עצמיים

- אזי לא נוכל למצוא קבוצה של n וקטורים עצמיים בת"ל ולכן המטריצה אינה לכסינה.

$\blacksquare$

משפט 3.

- אם:
  - B_1 בסיס של V_{λ_1} (כלומר המרחב העצמי של λ_1)
  - B_2 בסיס של V_{λ_2} (כלומר המרחב העצמי של λ_2)
  - $\vdots$
  - B_k בסיס של V_{λ_k} (כלומר המרחב העצמי של λ_k)
- אז הקבוצה $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ בת"ל.

מסקנה 4.

- אם למטריצה $A \in M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}$ או העתקה $T : V \to V$ יש n ערכים עצמיים שונים אז היא לכסינה.

טענה 5.

- המקדם החופשי של הפולינום האופייני הוא $(-1)^n \cdot |A|$

הוכחה.

- האיבר החופשי הוא $P(0)$

* ולכן $P\left(0\right)=\left|\overbrace{\lambda}^{=0}I-A\right|=\left|-A\right|=\left(-1\right)^{n}\cdot\left|A\right|$

■

הערה 6. מטענה זו נסיק שמטריצה A הפיכה אם ורק אם המקדם החופשי של הפולינום האופייני שונה מאפס.

- כי אז $\left|A\right|\neq0$

טענה 7.

- המקדם של x^{n} בפולינום האופייני הוא 1.

הוכחה.

– מכיוון ש $$\left|\lambda I-A\right|=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11}\\ & \lambda-a_{22}\\ & & \lambda-a_{33}\\ & & & \ddots\\ & & & & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$

* נקבל:

$$\left(\lambda-\lambda_{1}\right)\cdot\left(\lambda-\lambda_{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\lambda-\lambda_{n}\right)=\lambda^{n}+a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+\ldots+\lambda_{0}$$

■

טענה 8.

- המקדם של x^{n-1} בפולינום האופייני הוא $-trace\left(A\right)$

טענה 9.

- אם A לכסינה אז:

1. מכפלת הערכים העצמיים היא $\left|A\right|$
2. סכום הערכים העצמיים הוא $trace\left(A\right)$

הערה 10. באמצעות וייטה ניתן להוכיח את הטענה לכל פולינום אופייני שמתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה.

– אם A לכסינה אז A דומה ל-D אלכסונית כך ש:

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

* מכיוון שהם דומות, יש להן אותה דטרמיננטה ואותה עקבה.
* לכן: (תזכורת - Π זוהי מכפלה)

$$|A|=|D|=\Pi_{i=1}\lambda_i$$

$$trace\left(A\right)=trace\left(D\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

■

נושא שני - משפט קיילי-המילטון:

- תהא A מטריצה ריבועית ויהא $P\left(\lambda\right)$ פולינום אופייני שלה.
- אזי $P\left(A\right)=0$

דוגמה 11.

- עבור $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ הפולינום האופייני הוא $\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-3\right)$
  – לכן ניתן לכתוב:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-I\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-3I\right)$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

מסקנה 12. אם A הפיכה אז A^{-1} ניתנת להצגה כפולינום ב-A.

הוכחה.

- יהא $P(\lambda)$ פולינום אופייני של מטריצה הפיכה A.
- על משפט קיילי-המילטון, $P(A) = A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$
  - נכפול ב-A^{-1} מימין (כי הנחנו ש-A הפיכה):

$$= A^{n-1} + \ldots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0$$

* ראינו ש: $a_0 = (-1)^n |A|$, ואם A הפיכה אז $|A| \neq 0$ ולכן $a_0 \neq 0$
  · מכיוון שמותר לחלק ב-a_0, נעביר אגפים ונקבל שמתקיים:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} A^{n-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_0} I$$

  · לסיכום - הנחנו ש-A הפיכה והצגנו את A^{-1} כפולינום ב-A.

■

נושא שלישי - דמיון וערך עצמי:

משפט 13.

- אם A, B דומות אזי:

1. יש להן אותו פולינום עצמי,

(א) ולכן יש להן אותם ערכים עצמיים ואותו ריבוי אלגברי.

הוכחה.

- מכיוון ש: $A \sim B$ אז $A = P^{-1} B P$
- נסמן $q_A(\lambda)$ = פולינום אופייני של A לפי λ.
  - ולכן $q_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\lambda I - P^{-1} B P\right|$

* נציב $I=P^{-1}P$ ונקבל:

$$\begin{aligned}q_A(\lambda) &= \left|\lambda I-P^{-1}BP\right| = \left|\lambda\cdot P^{-1}P-P^{-1}BP\right| \\ &= \left|P^{-1}\cdot\lambda\cdot P-P^{-1}BP\right| \\ &= \left|P^{-1}(\lambda I-B)P\right| \\ &= \overbrace{\left|P^{-1}\right|}^{=|P|^{-1}}\left|(\lambda I-B)\right||P| \\ &= |\lambda I-B|\cdot\frac{|P|}{|P|} \\ &= |\lambda I-B|\cdot 1 \\ &= q_B(\lambda)\end{aligned}$$

· ולכן $q_A(\lambda)=q_B(\lambda)$,

· כלומר הפולינום האופייני של A לפי λ שווה לפולינום האופייני של B לפי λ.

■

הערה 14. ל-A ו- B אין בהכרח את אותם הוקטורים העצמיים, אבל בהכרח יש להם אותו ריבוי גאומטרי.

הוכחה.

- נניח כי $k=n-rank(\lambda I-A)$ = ריבוי גאומטרי של λ
- מכיוון ש-A,B דומות, גם המטריצות $\lambda I-A$ ו-$\lambda I-B$ דומות (כלומר יש להן אותה דרגה).
  - ולכן $rank(\lambda I-A)=rank(\lambda I-B)$
    * ומכאן ש:

$$n-rank(\lambda I-A)=n-rank(\lambda I-B)=k$$

· ולכן הריבוי הגאומטרי של λ שווה בשניהם.

■

סיכום:

מסקנה 15.

- למטריצות דומות יש אותה:
  - עקבה
  - דרגה

- דטרמיננטה
- פולינום אופייני
- ערכים עצמיים
- ריבוי גאומטרי וריבוי אלגברי (לכל ערך עצמי).

- אבל הכיוון ההפוך לא נכון.

- עם זאת, אם יש שתי מטריצות לכסינות עם אותם ערכים עצמיים אזי הן דומות.

הערה 16.

- יהיו A,B מטריצות ריבועיות. אזי:
  - ל-AB ו-BA יש אותם ערכים עצמיים.

הוכחה. נחלק לשני מקרים:

1. נניח כי $\lambda=0$ ערך עצמי של AB.
   - אזי AB לא הפיכה ולכן A או B לא הפיכות ולכן BA לא הפיכה.
     - ולכן 0 ערך עצמי של BA.

2. נניח כי $\lambda\neq0$ ערך עצמי של AB
   - אזי קיים $\underline{v}\neq\underline{0}$ כך ש $AB\underline{v}=\lambda\underline{v}$.
     - נכפול ב-B משמאל ונקבל:

$$(BA)\,B\underline{v}=\lambda\,(B\underline{v})$$

* קיבלנו ש-λ ערך עצמי של BA עם וקטורי עצמי $B\underline{v}$ אלא אם כן $B\underline{v}=\underline{0}$
  - אבל אם $B\underline{v}=\underline{0}$ אז $AB\underline{v}=\underline{0}$
  - אבל $\underline{v}$ הנוכחי הוא וקטור עצמי של ערך עצמי $\lambda\neq0$.
* ולכן λ הוא ערך עצמי של BA עם וקטור עצמי $B\underline{v}$.

■

הערה 17.

- יהיו A,B מטריצות ריבועיות. אזי:
  - ל-A ו-A^t יש אותם ערכים עצמיים.

הערה 18.

- יהיו A,B מטריצות ריבועיות. אזי:
  - אם λ ערך עצמי של A אז $P\left(\lambda\right)$ ערך עצמי של $P\left(A\right)$, כאשר $P\left(x\right)$ הוא פולינום כלשהו.

הערה 19.

- יהיו A,B מטריצות ריבועיות. אזי:
  - אם A הפיכה ו-λ ערך עצמי של A, אז λ^{-1} ערך עצמי של A^{-1}.

תרגיל 20.

- $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.
  - האם A לכסינה? ואם כן, מצאו את P ו-D כך ש $P^{-1}AP=D$.

פתרון:

- אנחנו יודעים שאם סכום כל שורה הוא קבוע אז הקבוע הזה הוא ערך עצמי.
  - ולכן 15 הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי לפחות 1.
- מכיון שהשורות תלויות המטריצה לא הפיכה,
  - לכן 0 הוא ערך עצמי.
    * $r\left(A\right)=1$
      · ולכן 0 הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי לפחות $5-r\left(A\right)=4$.
- ולכן $D=\begin{pmatrix}15 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

תרגיל 21.

- יהיו $A,B\in M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}$.

הוכיחו/הפריכו:

1. אם A רגולרית (הפיכה) אזי היא דומה ל-I.
2. אם A סינגולרית (לא הפיכה) אזי היא דומה למטריצה עם עמודת אפסים.
3. אם A,B דומות אזי A^t ו-B^t דומות.
4. אם A סינגולרית (הפיכה) אזי היא דומה למטריצה עם שורת אפסים.

פתרון:

1. הטענה לא נכונה.

- נביא דוגמא נגדית: $A=2I$
  - $P^{-1}IP=I$
  - וגם $P^{-1}\underline{0}P=\underline{0}$

2. הטענה נכונה.

- אם $A\in M_{n\times n}^{(\mathbb{F})}$ לא הפיכה
  - אז קיים $\underline{0}\neq\underline{v}_1\in\mathbb{R}^n$ המקיים $A\underline{v}_1=\underline{0}$.
  - נשלים את $\underline{v}_1$ לבסיס של $\mathbb{R}^n$, $B=(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n)$
- נתבונן ב-ט"ל $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי $T_A(\underline{v})=A\underline{v}$
  - אזי $[T_A]_E=A$
- מצד שני:

$$[T_A]_B=\Big([T(\underline{v}_1)]_B\quad [T(\underline{v}_2)]_B\quad \ldots\quad [T(\underline{v}_n)]_B\Big)$$

$$[T_A]_B=\Big([A\underline{v}_1=0]_B\quad [T(\underline{v}_2)]_B\quad \ldots\quad [T(\underline{v}_n)]_B\Big)$$

$$=\begin{pmatrix}0&*&*&*\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&*&*&*\end{pmatrix}$$

- ולכן A דומה למטריצה עם עמודת אפסים.