שם: איל שטיין

March 6, 2024

[

לוגיקה | תרגול 7

שם: איל שטיין

March 6, 2024

נושא השיעור: שלמות, גדירות

- כשדיברנו על תרגילי נאותות, היו לנו שלושה סוגי תרגילים:

1. מערכת שהיא נאותה במובן הרחב
2. מערכת שהיא נאותה במובן הצר אבל לא הרחב
3. מערכת שלא נאותו בכלל, כלומר שאפשר למצוא פסוק שהואל אטאוטולוגיה שאפשר להוכיח אותו (עושים את זה בעזרת סדרת יצירה).

- גם בשלמות, יש שלושה סוגים של תרגילים:

1. מערכת שלמה שמוכיחה הכל (ראינו כזה בתרגול הקודם)
   - היא לא נאותה כי הוא מוכיחה גם סתירות ופסוקים שהם לא טאוטולוגיות.
2. מערכת שהיא גם שלמה וגם נאותה.
   - כדי להראות את זה, צריך להראות ש$Con\left(\Sigma\right)\subseteq Ded\left(\Sigma\right)$. זו לא אינדוקציית מבנה רגילה כי זה להראות שקבוצה אינדוקטיבית מקיימת תכונה
   - זו לא הוכחה פשוטה ולכן אנחנו נקבל מערכת שלמה אחרת שממה את המערכת שלנו.
3. מערכת לא שלמה.
   - ניקח טאוטולוגיה, ונראה שהיא לא נמצאת בקבוצה האינדוקטיבית.

תרגיל 1:

<u>תרגיל 1</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור תחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$:

- אקסיומות: לכל $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$

$$\mathrm{A1}:\quad \alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$$

$$\mathrm{A2}:\quad (\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$$

- כללי היסק: לכל $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$

$$\mathrm{MP1}:\quad \frac{\alpha,\alpha\rightarrow\beta}{\beta}$$

$$\mathrm{MP2}:\quad \frac{\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)}{((\neg\alpha)\rightarrow(\neg\beta))\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)}$$

עבור קבוצת פסוקים $\Sigma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ ופסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ נסמן ב־$Ded_{\mathrm{N}}(\Sigma)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים מ־Σ במערכת החדשה ונסמן ב־$\Sigma\underset{\mathrm{N}}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח מתוך Σ במערכת החדשה.

הוכיחו/ הפריכו: המערכת החדשה שלמה.

כלומר, לכל קבוצת פסוקים $\Sigma\subseteq\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$ ולכל פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\rightarrow\}}$, אם $\Sigma\vDash\alpha$ אז $\Sigma\underset{N}{\vdash}\alpha$.

פיתרון 1.

משפט 1. תזכורת למשפט השלמות:

- לכל פסוק חוקי α וקבוצת פסוקים Σ, אם $\Sigma\models\alpha$ אז $\Sigma\vdash\alpha$, או $Con(\Sigma)\subseteq Ded(\Sigma)$.

- נשים לב כי $MP2$ פירושו לקחת פסוק מ-A_1 ולקבל פסוק מהצורה A_3.
  - כלומר אנחנו בתרגיל מהסוג השני של התרגילים. כלומר יש לנו מערכת שלמה ש"מדמה" את המערכת, כלומר $Ded(\Sigma)$ דומה ל$Ded_N(\Sigma)$.
    - אנחנו צריכים להראות ש $Con(\Sigma)\subseteq Ded_N(\Sigma)$, אבל זה קשה להוכיח את זה.
    - אבל ממשפט השלמות אנחנו יודעים ש-$Con(\Sigma)\subseteq Ded(\Sigma)$ (עבור המערכת הרגילה שלנו).
      - ולכן נשאר לנו להוכיח שמתקיים $Ded(\Sigma)\subseteq Ded_N(\Sigma)$.

- נראה כי $Ded(\Sigma)\subseteq Ded_N(\Sigma)$ באינדוקציית מבנה (כלומר הקבוצה האינדוקטיבית היא של המערכת הרגילה והתכונה היא להיות שייכים ל-Ded במערכת החדשה)
  - **בסיס:**
    - יהי φ אקסיומה במערכת הרגילה.
    - מקרה 1 - אם $\varphi\in A_1,A_2$ אז $\varphi\in Ded_N(\Sigma)$.
    - מקרה 2 - אם $\varphi\in A_3$ אז נראה סדרת הוכחה ל-φ:
      1. φ מהצורה A_3 ולכן מתקיים:

$$\varphi=(((\neg\alpha)\rightarrow(\neg\beta))\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha))$$

2. $\alpha\to(\beta\to\alpha)$ כי זה פסוק ב-A_1.
3. φ, לפי $MP_2(1)$.

* קיבלנו כי $\varphi\in\Sigma$ ולכן $\Sigma\in Ded_N(\Sigma)$.

– **סגור:**

* יהיו $\alpha,\alpha\to\beta\in Ded_N(\Sigma)$.
* הנחת האינדוקציה היא ששני הפסוקים יכיחים במערכת החדשה.
  · לכן אנחנו צריכים להוכיח סגור ביחס לפעולות של הקבוצה הרגילה, כלומר ביחס ל-MP (שהיא הפעולה של הקבוצה האינדוקטיבית $Ded(\Sigma)$).
  · אז מתקיים $MP(\alpha,\alpha\to\beta)=\beta$.
  · כעת צריך להוכיח $\beta\in Ded_N(\Sigma)$, כלומר ש-β יכיח במערכת החדשה. לכן ניצר סדרת הוכחה ל-β :

1. לפי הנחת האינדוקציה, $\alpha,\alpha\to\beta$ הם יכיחים בקבוצה החדשה ולכן נוכל לכתוב את סדרת ההוכחה עבור שניהם ולקבל:
2. .... (סדרת יצירה עבור α)
3. ....
4. α
5. .... (סדרת יצירה עבור $\alpha\to\beta$)
6. ....
7. $\alpha\to\beta$
8. $MP_1(\alpha,\alpha\to\beta)=\beta$.

• הראנו שהקבוצה $Ded_N(\Sigma)$ מכילה את הבסיס של $Ded(\Sigma)$ וסגורה ביחס לפעולה שלה MP, ולכן מתקיים $Ded(\Sigma)\subseteq Ded_N(\Sigma)$.

תרגיל 2:

תרגיל 2: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור תחשיב הפסוקים מעל $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\wedge\}}$:

• אקסיומות: לכל $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\wedge\}}$

$$\text{A:}\quad \neg(\alpha\wedge(\beta\wedge\neg\alpha))$$

• כללי היסק: לכל $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\wedge\}}$

$$\text{MV:}\quad \frac{\alpha,\neg(\alpha\wedge\beta)}{\neg\beta}$$

עבור פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}_{\{\neg,\wedge\}}$ נסמן ב־$\underset{N}{\vdash}\alpha$ את הטענה שפסוק α יכיח ללא הנחות במערכת החדשה.

הוכיחו/ הפריכו: אם $\models\alpha$, אז $\underset{N}{\vdash}\alpha$.

• רוצים שנוכיח או נפריך האם זה ש-α טאוטולוגיה גורר שהוא יכיח במערכת החדשה.

- ננסה להבין מאיזה אחד משלושת סוגי השאלות זו:
  - מכיוון שזו לא מערכת שנראית כמו המערכת WFF שלנו, ולכן זה כנראה לא שאלה מהסוג השני.
  - לכן או שהיא לא שלמה או שהיא מוכיחה הכל.
    - נשים לב שהקשר הראשי הוא תמיד $\neg$.
      - כלומר נראה שהמערכת לא מוכיחה הכל.
  - כלומר, אנחנו בסוג השלישי של מערכות - מערכות לא שלמות.
- ניקח טאוטולוגיה שהקשר הראשי שלה הוא לא $\neg$, לדוגמה $\wedge$, ונראה שאי אפשר להוכיח את הפסוק הזה.

פיתרון 2.

- הטענה לא נכונה. נראה דוגמה נגדית:
- ניקח טאוטולוגיה α שהקשר הראשי שלו הוא לא $\neg$:

$$\alpha=(\neg(p_0\wedge(\neg p_0)))\wedge(\neg(p_0\wedge(\neg p_0)))$$

- נשים לב כי $\models\alpha$.
- נראה כי $\not\vdash_N\alpha$.
- ניקח תכונה T שתכיל את כל הפסוקים ב-WFF שבהם הקשר המרכזי הוא $\neg$.
  - מתקיים $\alpha\notin T$ כי הקשר המרכזי הוא $\wedge$.
- נוכיח כי $Ded_N(\emptyset)\subseteq T$.
  - **בסיס:**
    - ניקח $\varphi\in A$ ונראה כי $\varphi\in T$.
    - זה מתקיים כי לכל פסוק ב-A הקשר המרכזי הוא $\neg$.
  - **סגור:**
    - יהיו $\alpha,\neg(\alpha\wedge\beta)\in T$
    - נשים לב כי $MV(\alpha,\neg(\alpha\wedge\beta))=\neg\beta\in T$.
    - לפי הגדרת T הטענה מתקיימת.
- $\alpha\notin T$ ולכן מתקיים גם $\alpha\notin Ded_N(\emptyset)$.

נושא שני - גדירות.

- אפשר לחשוב על קבוצת המודלים של Σ כפונקציה שמחזירה קבוצת השמות.
- כלומר $M:P(WFF)\to P(Ass)$.
- נשים לב שהיא לא חד חד ערכית, כי לדוגמה לקבוצה הריקה יש המון מקורות.

- משיקולי עוצמות היא לא "על":

$$|Ass| = 2^{\aleph_0}$$

$$|WFF| = \aleph_0$$

  – כלומר יש קבוצות של השמות שאין להן מקור (קבוצת פסוקים שקבוצת ההשמות הזו היא בדיוק כל ההשמות שמספקות את הפסוקים הללו).

- לכן:

הגדרה 2. גדירות.
קבוצה K נקראת **גדירה** אם קיימת קבוצת פסוקים Σ כך ש $M\left(\Sigma\right)=K$.

תרגיל 3:

תרגיל 3: נגדיר: $K_{even} = \{z \in \text{Ass} \mid z(p_i) = 1 \text{ לכל } i \text{ זוגי}\}$. הוכיחו כי K_{even} גדירה.

- הסוג הקל של תרגילי גדירות הוא להוכיח שקבוצה היא גדירה. הסוג הקשה יהיה כשהקבוצה תהיה לא גדירה. זה תרגיל מהסוג הקל (במיוחד כי תמיד יהיה כתוב "הוכח/הפרך").
- נרצה למצוא קבוצת פסוקים Σ ונראה ש$M\left(\Sigma\right)=K_{evem}$.
- ניקח $\Sigma=\left\{p_i \mid i\ is\ even\right\}$.
- בעיקרון צריך הכלה דו כיוונית, אבל במקרה שלנו אנחנו משתמשים רק בהגדרות ולכן נשתמש במעברי אמ"מ.
- נראה כי $M\left(\Sigma\right)=K$. מראים את זה על ידי כך שניקח השמה z ומראים ש-$z\in M\left(\Sigma\right)$ אמ"מ $z\in K$.
- תהא השמה z.
  – נניח כי $z\in M\left(\Sigma\right)$.
    * מהגדרת $M\left(\Sigma\right)$ זה מתקיים אם ורק אם $z\left(p_i\right)=1$ לכל i זוגי.
    * ולכן לפי הגדרת K_{evem}, זה קורה אמ"מ $z\in K_{evem}$.