

# (104031) אינפי 1מ' | תרגול 1 - עם יוליה

שם: איל שטיין

January 25, 2023

## נושא השיעור: ערך מוחלט, אי-שוויון המשולש, אי-שוויון המשולש

הגדרה 1. הגדרה של ערך מוחלט:

יהי  $x \in \mathbb{R}$   
אז

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

הגדרה שקולה:

$$|x| = \max \{x, -x\}$$

תכונות:

• יהיו  $y, x \in \mathbb{R}$ :

1.  $x = 0 \Leftrightarrow |x| \geq 0$

2.  $|x - y| = |y - x| \Leftrightarrow |x| = |-x|$

3.  $|-x| \leq x \leq |x|$

4.  $|x \cdot y| = |y| \cdot |x|$

5. יהי  $B \in \mathbb{R}$

$-B \leq x \leq B \Leftrightarrow |x| \leq B$

(א) הוכחה:

i. נניח ש  $|x| = B$

- ii.  $\max\{x, -x\} \leq B$  יוצא ש  
 iii.  $-x \leq B$  וגם  $x \leq B$  יוצא ש

**משפט 2.** אי שוויון המשולש

לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$1. |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$2. ||x| - |y|| \leq |x - y| \text{ ובפרט } |x| - |y| \leq |x - y| \text{ (לפי נקודה מספר 3 בהגדרת הערך המוחלט)}$$

הוכחה. נוכיח את מספר (2):

**בעיה.** הוכיחו כי אם  $|x - 3| < 1$  אז

$$\left| \frac{x^2 - 10x + 21}{x + 4} \right| \leq \frac{5}{6}$$

**פתרון 3.** נפשט את הביטוי הנתון במונה

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - 10x + 21}{x + 4} \right| &= \left| \frac{(x - 3)(x - 7)}{x + 4} \right| \\ &= \frac{|(x - 3)| |(x - 7)|}{|x + 4|} < \frac{|(x - 7)|}{|x + 4|} \end{aligned}$$

• לפי הנתון, ידוע לנו ש  $|x - 3| < 1$  ולכן

$$-1 < x - 3 < 1 \quad \setminus \quad -4$$

$$-5 < x - 7 < -3$$

$$-5 < x - 7 < -3$$

$$3 < |x - 7| < 5$$

• ועוד יוצא לנו

$$6 < x + 4 < 8 \quad \setminus \quad +7$$

$$6 < |x + 4| < 8$$

**משפט 4.** אי שוויון הממוצעים:  
עבור

$$x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

ממוצע חשבוני הוא:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

ממוצע הנדסי הוא:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

ממוצע הרמוני:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

אי שוויון הממוצעים טוען ש: חשבוני  $\leq$  הנדסי  $\leq$  הרמוני

בשיעור הבא נוכיח את אי שוויון הממוצעים ונראה שהשוויון מתקבל או "א כל הספרים זהים, כלומר  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$