אינפי 2מ' | תרגול 3 - עם ניקה

שם: איל שטיין

April 4, 2023

נושאי השיעור: אינטגרלים

נושא ראשון - סכומי דרבו וסכומי רימן:

תרגיל 1. בתרגול קודם התחלנו תרגיל:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

- עבור $P=[0,1]$

א. חשבו את $L(f,p)$ ואת $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

ב. חשבו את $U(f,p)$ ואת $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

ג. האם $f(x)$ אינטגרבילית ב $[0,1]$

הוכחה. ב. נתבונן בקטע $[x_{i-1},x_i]$

- אם x_i רציונלי אז $M_i=x_i$
- אם x_i אי-רציונלית אז $M_i=x_i$
  - נוכיח כי $M_i=x_i$ גם במקרה הזה בו x_i נקודה אי רציונלית
    - צריך להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיים x_j כך ש $M_i-\varepsilon<f(x_j)$
      - מכיוון שקיים x_j רציונלי בקטע $(x_i-\varepsilon,x_i)$ כך ש $f(x_j)=x_j>x_i-\varepsilon$,
      - לכן $Sup_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}=f(x)$
  - לכן

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\Delta x_i$$

– ונשים לב כי זהו סכום דרבו עליון של $g(x) = x$ ולכן:

$$U(g,P) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i$$

* ומכיוון שסכום דרבו העליון שלהם שווה, גם הסופרמום שלהם שווה ולכן:

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \overline{\int_0^1} g(x)\,dx$$

· ראינו בהרצאה כי $g(x)$ אינטגרבילית (כי היא רציפה) ושמתקיים:

$$\overline{\int_0^1} x dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

· ולכן מתקיים:

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

- ג. כעת ניתן לראות כי $f(x)$ לא אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ כי סכום דרבו עליון לא שווה לסכום דרבו תחתון בקטע.

■

תרגיל 2.

- תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ חסומה.
- נתון כי f אינטגרבילית בקטע $[x,1]$ לכל $0 < x < 1$
- צ"ל: f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ כולו.

הוכחה.

- נרצה להראות כי f אינטגרבילית על ידי כך שנראה שהיא חסומה ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך שמתקיים: $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$
- יהי $\varepsilon > 0$.
- נתון כי f חסומה
  – ולכן קיים M כך שלכל $x \in [0,1]$ מתקיים $|f(x)| \le M$

- נתבונן בקטע $[x_1,1]$ עבור x_1 כלשהו בקטע $(0,1)$
  - לפי הנתון, f אינטגרבילית ב-$(0,1)$ ולכן קיימת חלוקה $\widetilde{P}=\{x_{1,\dots},x_n=1\}$ כך שמתקיים:

$$U\left(f,\widetilde{P}\right)-L\left(f,\widetilde{P}\right)<\varepsilon$$

  - נגדיר חלוקה P של הקטע $[0,1]$ על ידי כך שניקח את אותן הנקודות של $\widetilde{P}$ ונוסיף להן 0 בהתחלה. נקבל:

$$P=\{0,x_1,\dots,x_n=1\}$$

    * וכעת נקבל:

$$\begin{aligned}U(f,P)-L(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta x_i\\&=(M_i-m_i)\,x_1+\sum_{i=2}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta x_i\\&=(M_i-m_i)\,x_1+\left(U\left(f,\widetilde{P}\right)-L\left(f,\widetilde{P}\right)\right)\end{aligned}$$

      · מכיוון ש $M_1=Sup_{[0,x_1]}\{f(x)\}$ מתקיים $M_1\le M$
      · ומכיוון ש $m_1=Inf_{[0,x_1]}\{f(x)\}$ מתקיים $m_1\ge -M$
      · ולכן מתקיים:

$$(M_i-m_i)\,x_1+\left(U\left(f,\widetilde{P}\right)-L\left(f,\widetilde{P}\right)\right)\le 2M\cdot x_1+\frac{\varepsilon}{2}$$

      · נבחר $x_1=min\left\{\frac{\varepsilon}{8M},\frac{1}{2}\right\}$ ונקבל:

$$2M\cdot x_1+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

- אזי עבור חלוקה P מתקיים:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

  - ולכן f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

■

תרגיל 3.

- חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$
  - רמז: העזרו בכך שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ ומתקיים $\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}$

הוכחה.

- נגדיר $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$ ונחפש לה גבול.
- נשתמש בסכומי רימן:
  - ראינו בהרצאה שבסכומי רימן מותר לבחור כל אוסף נקודות $\{c_i\}$ שאנחנו רוצים, אם יש לנו פונקציה אינטגרבילית אז מתקיים עבור חלקוה רגולרית P_nועבור $c_k=\frac{k}{n}$ כי:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right)$$

* וכעת אנחנו רוצים לחשב את

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{(n+k)^2}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{(n+k)^2}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+k}{n}\right)^2}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\end{aligned}$$

· נשים לב כי זהו סכום הרימן שכתבנו עבור החלוקה P_nעם הנקודות $c_k=\frac{k}{n}$ ועבור $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

· ולכן, מכיוון שלפי הנתון $f(x)$ אינטגרבילית ב$[0,1]$, מתקיים כי סכום רימן מתכנס לערך האינטגרל בקטע $[0,1]$

· ולכן הגבול המבוקש הוא $\frac{1}{2}$.

$\blacksquare$

תרגיל 4.

- תהי $f(x)$ פונקציה אי שלילית ואינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
- **צ"ל:** גם $f^2(x)$ אינטגרבילית באותו קטע.

הוכחה.

- לפי הנתון f אינטגרבילית, לכן חסומה.
  - לכן קיים $0<K$ כך ש $|f\left(\right)|<K$ לכל $x\in[a,b]$.
- יהי $\varepsilon>0$.
  - מכך ש f אינטגרבילית קיימת חלוקה P כך ש $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$
    * $f\left(x\right)$ אי שלילית ולכן בקטע $[x_{i-1},x_i]$של החלוקה P, מתקיים כי:

$$Sup_{[x_{i-1},x_i]}\left\{f^2\left(x\right)\right\}=\left(M_i\right)^2=\left(Sup_{[x_{i-1},x_i]}\left\{f\left(x\right)\right\}\right)^2$$

$$Inf_{[x_{i-1},x_i]}\left\{f^2\left(x\right)\right\}=\left(m_i\right)^2=\left(Inf_{[x_{i-1},x_i]}\left\{f\left(x\right)\right\}\right)^2$$

    * נחשב את סכום דרבו עליון ותחתון:

$$U\left(f^2,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(M_i\right)^2\cdot\Delta x_i\right)$$

$$L\left(f^2,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(m_i\right)^2\cdot\Delta x_i\right)$$

      · כעת ההפרש שלהם הוא:

$$\begin{aligned}U\left(f^2,P\right)-L\left(f^2,P\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(M_i^2-m_i^2\right)\cdot\Delta x_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(M_i-m_i\right)\left(M_i+m_i\right)\cdot\Delta x_i\right)\end{aligned}$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\cdot 2k\cdot\Delta x_i$$

$$=2k\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\cdot\Delta x_i$$

      · ולכן נדרוש $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\frac{\varepsilon}{2k}$ ונקבל:

$$<2k\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\cdot\Delta x_i<2k\cdot\frac{\varepsilon}{2k}=\varepsilon$$

$$U\left(f^2,P\right)-L\left(f^2,P\right)<2\cancel{k}\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{2k}}$$

■

תרגיל 5.

- תהי $f\left(x\right)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ורציפה פרט למספר סופי של נקודות.
- **צ"ל:** f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה.

- לכל נקודת אי רציפות ניקח סביבה שלה. מכיוון ש-f חסומה, אפשר למצוא חסם לערכי f בכל סביבה כזו.
  – ואז נוכל להקטין את הסביבות הללו ולקבל אינטגרל של f.
- יהי $\varepsilon>0$.
- f חסומה ולכן קיים $M>0$ כך ש $\left|f\left(x\right)\right|<M$ לכל $x\in[a,b]$
- נניח כי יש $K\in\mathbb{N}$ נקודות אי רציפות.
  – נכסה אותן בקטעים, שנסמן אותן ב: $\left(u_{1},v_{1}\right),\left(u_{2},v_{2}\right),\ldots,\left(u_{k},v_{k}\right)$
  – נדאג שסכום הקטעים הללו יהיה קטן מ-ε כלשהו:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(v_{i}-u_{i}\right)<\frac{\varepsilon}{?}$$

  – נשארנו עם הקטע:

$$T=[a,b]\setminus\bigcup\left(u_{i},v_{i}\right)$$

    * T הזה הוא איחוד סופי של קטעים סגורים.
      · לפי קנטור היינה, f רציפה בכל קטע סגור ולכן הפונקציה רציפה במ"ש.
      · ולכן לפי רציפות במ"ש, לכל אחד מהקטעים הללו קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_{1},x\in T$, אם $\left|x_{1}-x_{2}\right|<\delta$ מתקיים:

$$\left|f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{2}\right)\right|<\varepsilon$$

    * נבחר חלוקה P של הקטע $[a,b]$ באופן הבא:
      · נבחר את כל הנקודות u_{i},v_{i} לכל $i=1,\ldots,k$ ונוסיף אותן לחלוקה.
      · לא ניקח אף נקודה פנימית מהקטעים $\left(u_{i}v_{i}\right)$.
      · מ-T ניקח מספיק נקודות כך שמרחקן זו מזו יהיה קטן מ-δ.

* אזי מתקיים:

$$U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)=\overbrace{\sum\omega_{i}\Delta x_{i}}^{(u_{i},v_{i})}+\overbrace{\sum\omega_{i}\Delta x_{i}}^{closed\ \ []\ \in\ T}$$

* בכל קטע מסוג ראשון, (u_{i},v_{i}), מתקיים: $\omega_{i}=Sup\left\{ f\right\} -Inf\left\{ f\right\} \leq2M$
  - ולכן:

$$\overbrace{\sum\omega_{i}\Delta x_{i}}^{(u_{i},v_{i})}\leq2M\cdot\sum_{i=1}^{k}v_{i}-u_{i}$$

  - נדרוש:

$$2M\cdot\sum_{i=1}^{k}v_{i}-u_{i}<\frac{\varepsilon}{2}$$

  - ובשביל זה נסמן $\sum_{i=1}^{k}\left(v_{i}-u_{i}\right)<\frac{\varepsilon}{4M}$

* כעת נבחן את $\overbrace{\sum\omega_{i}\Delta x_{i}}^{closed\ \ []\ \in\ T}$
  - נבחר δ (מהרציפות במ"ש) מספיק קטן כדי שיתקיים:
  - עבור קטעים מ-T, מכיוון ש-f רציפה במ"ש בכל אחד מהקטעים הללו, מתקיים שעבור $0<\varepsilon'$:

$$\omega_{i}=Sup\left\{ f\right\} -Inf\left\{ f\right\}$$

  - נסמן $\omega_{i}=Sup\left\{ f\right\} -Inf\left\{ f\right\} <\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$
  - ואז מתקיים:

$$\overbrace{\sum\omega_{i}\Delta x_{i}}^{closed\ \ []\ \in\ T}\ <\varepsilon'\cdot\sum\Delta x_{i}$$

  - נחסום את כל אורכי הקטעים הללו ב$(b-a)$ונקבל:

$$\varepsilon'\cdot\sum\Delta x_{i}<\varepsilon'\left(b-a\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

■

חלק שני - הוכחת אינטגרביליות של פונקציה עם מספר בן מנייה של נקודות אי-רציפות:

תרגיל 6.

- פונקציית פופקורן:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & \frac{p}{q}=x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x=0 \end{cases}$$

- **צ"ל:** f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

הוכחה.

- נשים לב כי סכום דרבו תחתון $L\left(f,P\right)=0$ כי בכל חלוקה יש נקודה אי רציונלית ואז $Inf\left\{ f\right\}$ בכל קטע הוא 0.
- יהי $\varepsilon>0$.
- נראה שקיימת חלוקה P עבורה $U\left(f,P\right)-0<\varepsilon$ ואז יתקיים שהפונקציה אינטגרבילית:
  - קודם כל נראה שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים מספר סופי של נקודות x_i כך ש:

$$f\left(x_{1}\right)>\frac{1}{n}$$

    - * עבור $x=\frac{p}{q}$, יתקיים $f\left(x\right)>\frac{1}{n}$ אם $q<n$:
      - · למשל עבור $n=4$ נקבל $q=1,2,3,4$.
      - · עבור $q=1$ יש לנו את הנקודה $x=1$
      - · עבור $q=2$ יש לנו את: $x=\frac{1}{2},\frac{2}{2}$
      - · עבור $q=3$ יש לנו את הנקודות $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}$
      - · עבור $q=4$ יש לנו את הנקודות $x=\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}$
      - · ולכן עבור $n\in\mathbb{N}$ כללי, כמות הנקודות ה"רעות" הללו הוא $N_{n}\leq1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
    - * נחלק את הקטע $[0,1]$ ל- $\left(N_{n}\right)^{2}$ קטעים שווים, בעזרת $N_{n}+1$ נקודות.
      - · בחלוקה כזו יהיו לכל היותר N_{n} קטעים לא טובים כי זה מספר הנקודות הלא טובות שקיימות בקטע, שבהן יש נקודות ש$x=\frac{p}{q}$ $q\leq n$.
      - · בנקודות הללו $1\geq f\left(x\right)=\frac{1}{q}\geq\frac{1}{n}$.
      - · בשאר הקטעים מתקיים $f\left(x\right)<\frac{1}{n}$
  - סכום דרבו עליון הוא:

$$U\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{\left(N_{n}\right)^{2}}\frac{1}{\left(N_{n}\right)^{2}}\cdot\overbrace{M_{i}}^{\leq1}$$

$$\leq\underbrace{N_{n}\cdot\frac{1}{\left(N_{n}\right)^{2}}}_{Bad}+\underbrace{\frac{\left(N_{n}\right)^{2}-N_{n}}{\left(N_{n}\right)^{2}}}_{\leq1}\cdot\overbrace{\frac{1}{n}}^{Upper\ \ Bound}$$

$$\le \frac{1}{N_n} + \frac{1}{n}$$

* ומכיוון ש $\frac{n(n+1)}{2} \le N_n$, מתקיים:

$$\le \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n}$$

- נדרוש $\frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n} < \varepsilon$.
- אבל מכיוון שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n} = 0\right)$$

■