הסתברות מ' (00094412) | תרגול 10

שם: איל

March 25, 2024

נושא התרגול: צפיפות משותפת של משתנים מקריים רציפים

נושא ראשון - התפלגות משותפת רציפה

הערה: כשדיברנו על משתנים מקריים בדידים, יכולנו לזהות מהסיפור איך המשתנה מתפלג.
במשתנים רציפים אי אפשר לזהות מהסיפור את ההתפלגות.
אפשר לומר שמשתנה רציף מתפלג בצורה מסוימת או אם זה נתון או אם מצאנו את הצפיפות שלו והיא תואמת לפונקציית צפיפות מוכרת.
אבל, ספציפית לגבי התפלגות יוניפורמית הרבה פעמים אפשר לזהות מהסיפור, לדוגמה אם אומרים ש"הנקודה נבחרת באקראי".

שאלה 1

בוחרים מקרית נקודה (X,Y) בתוך עיגול היחידה.
א. רשום את פונקציית הצפיפות המשותפת של (X,Y)
ב. מצא את הצפיפויות השוליות. האם הם ב"ת?
ג. מצא את פונקציית הצפיפות של $R=\sqrt{X^2+Y^2}$.
ד. מהי פונקציית הצפיפות המשותפת של הרדיוס R והזווית θ? האם הרדיוס R והזווית θ הם ב"ת?

פיתרון 1. א.

- כתוב בשאלה שהנקודה נבחרת באופן מקרי ולכן (X,Y) מתפלג יוניפורמית.
- בכל זאת נבחר לפתור לפי הגדרת הגבול כי במקרה הזה הדרך הזו פשוטה יותר:

$$f_{X,Y}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{P\left(X\in[x,x+\Delta x],Y\in[y,y+\Delta y]\right)}{\Delta x\cdot\Delta y}$$

  - נבחן את הביטוי $P\left(X\in[x,x+\Delta x],Y\in[y,y+\Delta y]\right)$:

$$P\left(X\in[x,x+\Delta x],Y\in[y,y+\Delta y]\right)=\frac{S_{[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]}}{S_{unit\ circle}}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\pi}$$

– נציב ונקבל:

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\pi}}{\Delta x\cdot\Delta y}=\frac{1}{\pi}$$

– כלומר:

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^{2}+y^{2}\leq1\\0 & else\end{cases}$$

פיתרון 1. ב.

- רוצים שנמצא את $f_{X}\left(x\right)$ ואת $f_{Y}\left(y\right)$.
- לכאורה יכולנו להשתמש במשפט $f_{X,Y}\left(x,y\right)=g\left(x\right)\cdot h\left(x\right)$ אבל אי אפשר במקרה הזה כי הפונקציות $g\left(x\right),h\left(y\right)$ לא ניתנות להפרדה אצלנו.
  – בשביל להשתמש במשפט הזה, צריך שיתקיים:

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=\overline{g}\left(x\right)\cdot I_{X\in[]}\cdot\overline{h}\left(y\right)\cdot I_{Y\in[]}$$

  * ואצלנו בגלל שמדובר במעגל אז אי אפשר להפריד את האינדיקטורים הללו.

- נעבוד לפי הגדרה:

$$f_{X}\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dy=\int_{-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}}\frac{1}{\pi}dy$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^{2}} & -1\leq x\leq1\\0 & else\end{cases}$$

- באותו אופן, עבור Y נקבל את אותה תשובה:

$$f_{Y}\left(y\right)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^{2}} & -1\leq y\leq1\\0 & else\end{cases}$$

- נשים לב שהם תלויים כי הצפיפות המשותפת לא שווה למכפלת הצפיפויות:

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)\neq f_{X}\left(x\right)\cdot f_{Y}\left(y\right)$$

פיתרון 1. ג.

- מצא את פונקציית הצפיפות של $R=\sqrt{X^2+Y^2}$.
- נשים לב שזו כבר לא צפיפות משותפת, זו טרנספורמציה של וקטור מקרי. לא למדנו עדיין לעשות את זה.
  - לכן נמצא את $F_R\left(r\right)$ ונגזור.
  - אם $0\leq r\leq 1$, את $P\left(R\leq r\right)$ פירושה שהנקודה נפלה בתוך תת-מעגל של מעגל היחידה, כלומר:

$$\frac{S_{small\ \ circle}}{S_{unit\ \ circle}}=\frac{\pi r^2}{\pi}=r^2$$

  - לכן מתקיים:

$$F_R\left(r\right)=\begin{cases}0 & r<0\\ 1 & r>1\\ r^2 & 0\leq r\leq 1\end{cases}$$

  - נגזור ונקבל:

$$f_R\left(r\right)=\begin{cases}2r & 0\leq r\leq 1\\ 0 & else\end{cases}$$

פיתרון 1. ד.

- נחשב את $P\left(1\leq r\leq 0,\ \ 0\leq\alpha\leq 2\pi\right)$:

$$P\left(1\leq r\leq 0,\ \ 0\leq\alpha\leq 2\pi\right)=\frac{S_{slice\ \ of\ \ angle\ \ \alpha\ \ in\ \ small\ \ circle}}{S_{unit\ \ circle}}=\frac{\frac{\pi r^2\alpha}{2\pi}}{\pi}=\frac{r^2}{2\pi}$$

- ולכן ה-CDF המשותפת של R ושל θ:

$$F_{R,\theta}(r,\alpha)=\begin{cases}\frac{r^2}{2\pi} & 1\leq r\leq 0,\ 0\leq\alpha\leq 2\pi\\ P(\theta\leq\alpha)=\frac{S_{slice\ of\ angle\ \alpha\ in\ unit\ circle}}{S_{unit\ circle}}=\frac{\frac{\pi\alpha}{2\pi}}{\pi}=\frac{\alpha}{2\pi} & r>1\ ,0\leq\alpha\leq 2\pi\\ 0 & \alpha<0,\ r<0\\ 1 & 2\pi<\alpha,\ r>1\end{cases}$$

– נגזור את $F_{R,\theta}(r,\alpha)$ פעמיים, פעם אחת לפי R ופעם אחת לפי θ ונקבל:

$$f_{R,\theta}(r,\alpha)=\begin{cases}\frac{r}{\pi} & 1\leq r\leq 0,\ 0\leq\alpha\leq 2\pi\\ 0 & else\end{cases}$$

– במקרה הזה קיבלנו פונקציות $h(r)=r$ ו-$g(\alpha)=\frac{1}{\pi}$ שהתחומים שלהם לא תלויים אחד בשני ולכן להשתמש לפצל ולומר $f_R(r)=r$ ו-$f_\theta(\alpha)=\frac{1}{\pi}$ (עד כדי קבוע).

- לסיכום:

– מצאנו את פונקציית ההתפלגות המשותפת על ידי חלוקה לתחומים וקיבלנו שבגזירה רק תחום אחד שבו הנגזרת לא התאפסה.

– מצאנו את ההסתברויות לפי חישובי שטחים ולכן נצטרך לדעת לשלוט בחישוב שטח.

שאלה 2 - שאלה מוכרת בעולם ההסתברות

- יהיו $X_1,X_2,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $X_i\sim exp(\lambda_i)$.

- נגדיר:

$$X=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$$

$$Y=arg\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$$

א. **צ"ל:** $f_X(x)$

ב. **צ"ל:** $P(Y=k)=\frac{\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$

ג. עבור $n=2$, **צ"ל:** $\{x<X\}$ בלתי תלויים ב-$\{Y=1\}$.

פיתרון 2. א.

- מתקיים:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \le x)$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \ge x)$$

$$= 1 - P(X_1 \ge x, X_2 \ge x, \ldots, X_n \ge x)$$

– המשתנים בלתי תלויים ולכן:

$$= 1 - P(X_1 \ge x) \cdot P(X_2 \ge x) \cdot \ldots \cdot P(X_n \ge x)$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 \cdot x} \cdot e^{-\lambda_n \cdot x} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n \cdot x}$$

$$= 1 - e^{-x \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)}$$

– נגזור לפי x ונקבל:

$$f_X(x) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\, e^{-x \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} & x \ge 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

ב. צ"ל: $P(Y = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}$

- לפי הגדרה מתקיים:

$$P(Y = k) = P(X_k = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\})$$

$$= P\left(\underbrace{X_1 > X_k, X_2 > X_k, \ldots, X_{k-1} > X_k, X_{k+1} > X_k, \ldots, X_n > X_k}_{without \;\; X_k > X_k}\right)$$

• נשתמש בהסתברות השלמה כדי לקבל:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(X_1 > X_k, X_2 > X_k, \ldots, X_{k-1} > X_k, X_{k+1} > X_k, \ldots, X_n > X_k \mid X_k = x\right) \cdot f_{X_k}\left(x\right) dx$$

– כעת, $X_k = x$ ולכן נציב זאת:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_{k-1} > x, X_{k+1} > x, \ldots, X_n > x \mid X_k = x\right) \cdot f_{X_k}\left(x\right) dx$$

– ומכיוון שכל ה-X_i בלתי תלויים, נוכל להוריד את $X_k = x$ מההתניה כי X_k לא מופיע במאורע ולפתוח את המאורע למכפלת הסתברויות:

$$= \int_{0}^{\infty} P\left(X_1 > x\right) \cdot P\left(X_2 > x\right) \cdot P\left(X_{k-1} > x\right) \cdot P\left(X_{k+1} > x\right) \cdot P\left(X_n > x\right) \cdot \lambda_k \cdot e^{-\lambda_k x}\ dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} e^{-\lambda_i \cdot x} \cdot \lambda_k \cdot e^{-\lambda_k x}\ dx$$

* מלינאריות האינטגרל ומחוקי חזקות נקבל:

$$= \lambda_k \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-x \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\ dx$$

* נפתח את האינטגרל ונציב את הגבולות ונקבל:

$$= \lambda_k \cdot \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}$$

• הטריק שהשתמשנו בו פה הוא "לנטרל" (להוריד) משתנה מקרי על ידי התניה עליו בהסתברות השלמה.

– לאחר שהתנינו עליו, אפשר להחליף אותו בערך שהוא היה שווה לו בתנאי ולקבל את ההסתברות בלעדיו.

פיתרון 2. ג.

נניח $n = 2$, **צ"ל:** $\{x < X\}$ בלתי תלויים ב-$\{Y = 1\}$.

• נראה לפי הגדרה:

$$P\left(X > x, Y = 1\right) = P\left(X > x\right) \cdot P\left(Y = 1\right)$$

- נחשב את אגף ימין לפי סעיף ב':

$$P\left(Y=1\right)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P\left(X>x\right)=e^{-x\cdot\left(\lambda_1+\lambda_2\right)}$$

- נחשב את אגף שמאל:
  - מכיוון ש-$Y=1$, זאת אומרת ש-X_1 הוא המינימלי מבין $\{X_1,X_2\}$ולכן:

$$P\left(X>x,Y=1\right)=P\left(X>x,X_1<X_2\right)$$

* שוב, מכיוון ש X_1 הוא המינימלי, נקבל:

$$=P\left(X_1>x,X_1<X_2\right)$$

* בכתיב אחר:

$$=P\left(x<X_1<X_2\right)$$

* מכיוון ש-X_1 מקבל ערכים בין x שהוא מספר ובין ∞ ו-X_2 יכול לקבל ערכים בין x_1 ל-∞, ניתן לכתוב:

$$=\int_x^{\infty}\left(\int_{x_1}^{\infty}f_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right)\ dx_2\right)dx_1$$

· ומכיוון ש-X_1,X_2 בלתי תלויים נוכל לפצל את $f_{X_1}\left(x_1\right)\cdot f_{X_2}\left(x_2\right)=f_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right)$:

$$=\int_x^{\infty}\left(f_{X_1}\left(x_1\right)\cdot\int_{x_1}^{\infty}f_{X_2}\left(x_2\right)\ dx_2\right)dx_1$$

$$=\int_x^{\infty}\left(e^{-x_1\cdot\lambda_1}\cdot\int_{x_1}^{\infty}e^{-x_2\cdot\lambda_2}\ dx_2\right)dx_1$$

· התשובה יוצאת בסוף:

$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot e^{-x\cdot\left(\lambda_1+\lambda_2\right)}$$

נושא שני - צפיפות מותנית וכללי הסתברות נוספים.

- במקרה של משתנה בדיד ראינו:

$$P_{X|Y}\left(x\mid y\right)=\frac{P_{X,Y}\left(x,y\right)}{\underbrace{P_{Y}\left(y\right)}_{>0}}$$

- גם במשתנים רציפים נצטרך לדרוש $P_{Y}\left(y\right)>0$:
  - צפיפות מותנית:

$$f_{X|Y}\left(x\mid y\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_{Y}\left(y\right)}$$

- מתקיים כלל הכפל כרגיל.
- מתקיים:

$$F_{X|Y}\left(x\mid y\right)=P\left(X\leq x\mid Y=y\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}f_{X|Y}\left(t\mid y\right)dt$$

- וגם:

$$P\left(a\leq x\leq b\mid Y=y\right)=\int\limits_{a}^{b}f_{X|Y}\left(x\mid y\right)dx$$

- כדי למצוא פונקציה שולית:

$$f_{X}\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{X|Y}\left(x\mid y\right)\cdot f_{Y}\left(y\right)dy$$

- הסתברות שלמה:

$$P\left(A\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}P\left(A\mid X=x\right)\cdot f_{X}\left(x\right)dx$$

- תוחלת מותנית:

$$g(y)=E[X\mid Y]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{X|Y}(x\mid y)\,dx$$

- נוסחת ההחלקה היא אותו דבר:

$$g(Y)=E[X]=E[E[X\mid Y]]$$

שאלה 3:

- ל-(X,Y) פונקציית צפיפות משותפת:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda x} & ,0<y<x\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

א. חשבו את $f_Y(y)$ ואת $f_X(x)$ ב. מצא את פונקציית הצפיפות המותנית $f_{Y|X}(y\mid x)$. ג. מצא $P(Y<2\mid X=x)$ ומצא $P(Y<2)$

א. פיתרון:

- כפי שראינו, ניתן למצוא את הצפיפות השולית על ידי:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\;\;dy=\int_{0}^{x}\lambda^2e^{-\lambda x}dy$$

$$=\lambda^2\cdot\left(e^{-\lambda y}\cdot y\mid_{y=0}^{y=x}\right)=\begin{cases}\lambda^2\cdot x\cdot e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$$

- באותו אופן מתקיים:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\;\;dx=\int_{0}^{y}\lambda^2e^{-\lambda x}dx$$

$$\begin{cases}\lambda^2\cdot e^{-\lambda y} & y>0\\ 0 & else\end{cases}$$

– נשים לב כי $Y \sim exp\left(\lambda\right)$

פיתרון ב.

- לפי הגדרה, מתקיים:

$$f_{Y|X}\left(y\mid x\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_{X}\left(x\right)}=\frac{\lambda^{2}\cdot e^{-\lambda x}}{\lambda^{2}\cdot x\cdot e^{-\lambda x}}=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<y<x\\ 0 & else\end{cases}$$

– נשים לב ש- $\{Y\mid X=x\}$ מפולג באופן אחיד בתחום בין 0 ל-x, כלומר:

$$\{Y\mid X=x\}\sim Uni\left(0,x\right)$$

פיתרון ג.

- הראנו בסעיף א' שמתקיים $Y\sim exp\left(\lambda\right)$ ולכן מתקיים:

$$P\left(Y<2\right)=1-e^{-2\lambda}$$

- כאמור בסעיף ב':

$$\{Y<2\mid X=x\}\sim Uni\left(0,x\right)$$

– נחשב את $P\left(Y<2\mid X=x\right)$:

$$=\begin{cases}1 & x<2\\ \frac{2}{x} & x\geq 2\end{cases}$$

ד. פיתרון:

- נמצא את $f_{X|Y}\left(x\mid y\right)$ בעזרת נוסחת בייס:

$$f_{X|Y}\left(x\mid y\right)=\frac{f_{Y|X}\left(y\mid x\right)\cdot f_{X}\left(x\right)}{f_{Y}\left(y\right)}$$