(104031) אינפי 1מ' | תרגול 12 - יוליה

שם: איל שטיין

November 30, 2022

נושאי השיעור: סדרות קושי, כיסויים, היינה בורל.

נושא ראשון - סדרות קושי:

הגדרה 1. תזכורת - הגדרת סדרת קושי:

- תהי a_n סדרה.
- נאמר ש-a_n היא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n, m \in \mathbb{N}$, כך ש$n, m > N$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$

  הערה 2. שלילת סדרת קושי - קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N קיימים $m, n > N$ כך ש- $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$

  משפט 3. a_n מתכנסת לגבול סופי אם ורק אם a_n סדרת קושי.

הערה 4. דרך שקולה לנסח את משפט קושי היא לומר ש"קיימים $p, n \in \mathbb{N}$ ו-$n > n$ כך שלכל $n, n + p > N$"

תרגיל 5. הוכיחו: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ לא מתכנסת (ואפשר אפילו לומר שהיא שואפת לאינסוף)

פיתרון:

- לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$
  - מכיוון ש$\frac{1}{n+1} > 0$ הסדרה היא מונוטונית עולה ממש.
  - מכיוון שהסדרה מונוטונית עולה, לפי המשפט, a_n מתכנסת במובן הרחב. כלומר או שהיא מתכנסת לגבול סופי או שהיא שואפת לאינסוף.
- נוכיח ש-a_n לא מתכנסת לגבול סופי. על מנת לעשות זאת, נוכיח ש-a_n היא לא סדרת קושי על ידי שימוש בשלילת משפט קושי:
  - יהי N.
  - יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > N$.
  - ניקח $m = 2n > N$.

* נבחן את הביטוי $|a_m - a_n|$:

$$|a_{2n} - a_n| > 0$$

$$a_{2n} - a_n > 0$$

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

· מכיוון שיש סה"כ n מחוברים, ו- $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$.

– הראנו שעבור $\varepsilon > \frac{1}{2} > 0$, לכל N קיים $n = max\{1, [N] + 1\}$ שמקיים $2n, n > N$ כך ש- $|a_{2n} - a_n| > \varepsilon$

* לכן, a_n לא סדרת קושי. לפי המשפט של "אם ורק אם" לסדרות קושי, a_n לא מתכנסת לגבול סופי.

• ומכיוון שאמרנו ש-a_nמתכנסת במובן הרחב, מתקיים ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

תרגיל 6. הראו ש- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ מתכנס לגבול סופי.

פיתרון: מכיוון שאנחנו רוצים להוכיח שהסדרה מתכנסת, נוכיח ש-a_n היא סדרת קושי.

• נכתוב פורמט של פיתרון שייראה כך:

– יהי $\varepsilon > 0$.

– אז עבור $N =$

– לכן, לכל $n, m > n$ מתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$

• ניקח $m > n$ ונקבל ש:

$$|a_m - a_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right|$$

– מכיוון שאמרנו ש-$n < m$ מתקיים:

$$= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)}$$

- נעשה את הפעולה ההופכית הוצאת גורם משותף ונקבל:

$$= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

– נפתח את הסכום ונקבל:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{m-1}} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\
&< \frac{1}{n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

- נמלא את הפורמט שהתחלנו בהתחלה:
  - יהי $\varepsilon > 0$.
  - $N = \frac{1}{\varepsilon}$, כלומר $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon$
  - ולכן, לכל $n, m > N$ כאשר $m > n$ ומתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$
- הסדרה a_n היא סדרת קושי ולכן היא מתכנסת.

תרגיל 7. בדקו בעזרת קושי האם הסדרה הבא מתכנסת:

$a_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \frac{1}{(2n-1)!} - \frac{1}{(2n)!}$

או: $a_n = \sum_{k-1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$

פיתרון:

- יהי $\varepsilon > 0$.
- נחפש N כך שלכל $n > N$ ו-$p \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\sum_{k=1}^{2(n+p)} - \sum_{k=1}^{2n}\right|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{2(n+p)} - \sum_{k=1}^{2n}\right| = \left|\sum_{k=2n+1}^{2n+2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right|$$

– לפי אי שוויון המשולש הראשון, הערך המוחלט יכול להיכנס לכל מחובר. כלומר, אפשר לקחת את הערך המוחלט על כל אחד מהמחוברים ונקבל:

$$\left|\sum_{k=2n+1}^{2n+2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right| \leq \sum_{2n+1}^{2n+2p} \frac{1}{k!}$$

$$\sum_{k=2n+1}^{2n+p} \frac{1}{k!}$$

– הוכחנו בעבר לפי אינדוקציה ש $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{k!}$ ולכן אפשר ליצור אי שוויון:

$$\sum_{k=2n+1}^{2n+2p} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2n+1}^{2n+2p} \frac{1}{2^{k-1}}$$

– נבחן את הביטוי:

$$\sum_{k=2n+1}^{2n+2p} \frac{1}{2^{k-1}}$$

* מספר המחוברים בסכום הוא $(2p-1)+1$.
* לפי הנוסחה של סכום סדרה הנדסית, נקבל:

$$q = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\sum_{k=2n+1}^{2n+2p} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \overbrace{\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}^{<1}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} \cdot \left(1-\frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^{2n-1}} < \varepsilon$$

- נבחן את השוויון $\varepsilon = \frac{1}{2^{2N-1}}$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2^{2N-1}}$$

$$2^{2N-1} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$2N - 1 = log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N = \frac{1}{2} log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)$$

תרגיל 8. תהי a_n סדרה של איברים שלמים.
נתון כי a_n מתכנסת.
צ"ל: הוכיחו כי a_nקבועה החל מ-N מסוים.
פתרון:

- מכיוון ש-a_n מתכנסת, היא גם סדרת קושי.
  - לכן, בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ קיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}$
  - מכיוון ש-a_n ו-a_m הם מספרים שלמים, להתקיים $|a_n - a_m| = 0$ או $|a_n - a_m| \geq 1$.
    * כלומר, $|a_n - a_m|$ לא יכול להיות בין 1 ל-0.
    * לכן, אם $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}$אז $|a_n - a_m| = 0$
      · ולכן, $a_n = a_m$ החל מ-N מסוים.

תרגיל 9. תהי a_n סדרה חיובית של מספרים רציונליים ($\mathbb{Q}$).

- נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ כך ש- $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- נציג את a_n בצורה של $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ כך ש-p_n ו- q_n הם מספרים טבעיים זרים.

צ"ל: הוכיחו כי $p_n \to \infty$ וגם $q \to \infty$.
פתרון: נוכיח בשני שלבים: (1) נוכיח שמספיק להוכיח שרק אחת מהסדרות שואפת לאינסוף ואז גם השנייה תשאף לאינסוף. (2)

1. בלי הגבלת הכלליות, נניח ש-q_n שואפת לאינסוף ונוכיח שגם p_n שואפת לאינסוף:
   - על פי הנתון, $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ ולכן $p_n = a_n \cdot q_n$.
     - נתון ש $a \notin Q$ ולכן מתקיים ש-$a \neq 0$
       * מכיוון שנתון ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, יוצא ש:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \overbrace{a_n}^{\to a\neq 0} \cdot \overbrace{q_n}^{\to\infty}$$

- ולכן לפי חשבון גבולות אינסופיים יוצא שגם $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$

2. נוכיח ש-$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$:

- נניח בשלילה ש-$\lim_{n\to\infty} q_n \neq \infty$.
  - כלומר, לא כל תתי הסדרות של q_n שואפות לאינסוף.
    * מכיוון ש-$a_n > 0$ ולקחנו את q_n מתוך הטבעיים, מתקיים $q_n > 0$
      - לכן, $\lim_{n\to\infty} q_n \neq -\infty$.
      - ולכן קיימת ל-q_n תת סדרה q_{n_k} חסומה.
  - כלומר, q_{n_k} סדרה חסומה. ולכן לפי המסקנות מבולצאנו-ווירשטראס, קיימת ל-q_{n_k} תת סדרה $q_{n_{kj}}$ המתכנסת לגבול סופי.
  - מכיוון ש-$q_{n_{k_j}}$ היא תת סדרה מתכנסת (נסמן את הגבול שלה ב-L) של q_n וגם $q_{n_{k_j}} \in \mathbb{N}$, לפי התרגיל הקודם החל ממקום מסוים $q_{n_{k_j}}$ היא סדרה קבועה.
    * כלומר, קיים K כך שלכל $k > K$ מתקיים $q_{n_{k_j}} = L$.
      - לכן, עבור $k > K$ אפשר לכתוב את $a_{n_{K_j}}$ כך: $a_{n_{k_J}} = \frac{p_{n_{k_j}}}{q_{n_{k_j}}} = \frac{p_{n_{k_j}}}{L}$
      - כלומר $a_{n_{k_J}}$ מתכנסת כי היא תת סדרה של סדרה מתכנסת a_n.
      - ולכן גם $p_{n_{k_j}}$ מתכנסת.
    * מכיוון ש-$p_{n_{k_j}} = q_{n_{k_j}} \cdot a_{n_{k_j}}$ יוצא ש:

$$\lim_{n\to\infty} p_{n_{k_j}} = \lim_{n\to\infty} q_{n_{k_j}} \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n_{k_j}} = \overbrace{L}^{\in\mathbb{N}} \cdot \overbrace{a}^{\notin\mathbb{Q}} \notin \mathbb{Q}$$

  - אפשרות אחרת להגיע לסתירה היא לומר ש-$p_{n_{k_j}}$ מתכנסת לגבול סופי לפי חשבון גבולות ונסמן את הגבול שלה ב-p.
    * כלומר, ממקום מסוים $p_{n_{k_j}} = p$.
      - ולכן מהמקום המסוים הזה מתקיים:

$$a_{n_{k_j}} = \frac{\overbrace{p}^{\in\mathbb{Q}}}{\underbrace{L}_{\in\mathbb{Q}}} \in \mathbb{Q}$$

      - ולכן $a_{n_{k_j}}$ מתכנסת לגבול סופי.
      - סתירה כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a \notin \mathbb{Q}$, וכל תת סדרה של a_n צריכה להתכנס לאותו הגבול (האי-רציונלי).
- לפי סתירה להנחת השלילה קיבלנו ש-$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$

נושא שני - כיסויים והיינה בורל:

הגדרה 10. "כיסוי" -

- תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$.
- תהי $\sum$ מערכת (או "משפחה") של קטעים.

- נאמר ש-$\sum$ היא "כיסוי" של A אם לכל $x \in A$ קיים קטע $I \in \sum$ (לפחות קטע אחד כזה) כך ש: $x \in I$.
  - במילים אחרות: $A \subseteq \left(\bigcup I\right)$ וגם $I \in \sum$

הגדרה 11. <u>**"כיסוי פתוח"**</u> - אם כל הקטעים ב-$\sum$ פתוחים, קוראים ל$\sum$ **"כיסוי פתוח"**

הגדרה 12. <u>**"כיסוי סופי"**</u> **-** אם ב-$\sum$ יש מספר סופי של קטעים, הכיסוי נקרא **"כיסוי סופי"**

הגדרה 13. אם קיימת תת משפחה של $\sum$ (שנסמנה $\sum^*$) כך ש $\sum^*$ היא כיסוי של A, נאמר ש-$\sum^*$ היא תת כיסוי של $\sum$ עבור A

למה 14. הלמה של היינה בורל:
לכל כיסוי פתוח של קטע סגור וחסום ($[a,b]$) קיים תת כיסוי סופי.

תרגיל 15. תהי A קבוצה כך ש- $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
צ"ל:

1. מצאו כיסוי פתוח ל-A שאין לו תת כיסוי סופי.
2. האם ניתן להוסיף קטע בודד ל-$\sum$ כך שלכיסוי החדש שייווצר יהיה תת כיסוי סופי?

פיתרון:

.1

- A אינה קטע אלא קבוצה של איברים מסוימים בתוך הקטע $(0,1]$.
- נוכיח שε סביבה של כל איבר ב-A יכול להיות זר לε סביבה של איבר אחר ב-A. כלומר, כל קטע מסביב מסביב לאיבר ב-A לא מכיל עוד איברים ב-A.:
  - לכל $\frac{1}{n} \in A$ נבנה קטע סביבו: $I_n = \left(\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n\right)$
    - כאשר $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
      - כלומר, $\varepsilon_n = \frac{1}{2n(n+1)}$
  - לכן יוצא שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים רק I_n יחיד עבורו $\frac{1}{n} \in I_n$
    - ולכן לכיסוי $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ לא קיים תת כיסוי בכלל ובפרט לא קיים לו תת כיסוי סופי.

.2

- הבעיה היא בסביבת 0 ולכן נוסיף קטע בודד ל-$\sum$ ונגדיר כיסוי חדש - $\sum_1 = \sum \cup \left(0, \frac{1}{100}\right)$.
  - לכן, לכל $n > 100$ מתקיים $\frac{1}{n} \in (0, 100)$
  - לכן תת המשפחה $\sum_1 = \left\{\bigcup_{n=1}^{100} I_n\right\} \cup \left(0, \frac{1}{100}\right)$ היא תת כיסוי סופי ל-A.

תרגיל 16. הוכיחו בעזרת היינה בורל שבקטע $[0,1]$ קיימים מספרים אי רציונליים.
פיתרון:

- נניח בשלילה שכל האיברים בקטע $[0,1]$ הם רציונליים.
  - כלומר, לכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים ש $x \in \mathbb{Q}$.

- אפשר לתת אינדקס לכל מספר רציונלי ולכן ניתן לסדר אותם לסדרה.
  * נסמן את סדרה הזו r_n.
  * לכל איבר בסדרה r_n נבחר קטע פתוח I_n באורך $\frac{1}{2^n}$ שיכסה אותו.
- לפי הנחת השלילה, משפחת הכיסויים $\sum = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ היא כיסוי (שכל הקטעים בו פתוחים) של $[0,1]$
  * מכיוון ש-$[0,1]$ הוא קטע סגור וחסום ו-$\sum$ הוא כיסוי פתוח, לפי היינה-בורל קיים תת כיסוי סופי ל-$\sum$.
    · נסמן את תת הכיסוי הסופי הזה ב-$\sum^*$:

$$\sum^* = \{I_{n_1}, I_{n_2} \ldots, I_{n_k}\}$$

    · כאשר k הוא סופי.
  * כל קטע I_n הוא באורך $\frac{1}{2^n}$, נסכום חלק מקטעים ב-$\sum^*$ (מi עד k כרצוננו, קצת מזכיר תת סדרה. לדוגמא רק את I_3, I_{40} ואת I_k) ונקבל:

$$\left|\sum^*\right| = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}}$$

    · הסכום הזה של חלק מהקטעים ב$^*\sum$ הוא קטן או שווה לסכום של כל הקטעים ב-$\sum$ ולכן:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}} \leq \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{2^i}$$

  * ולפי נוסחת סכום של סדרה הנדסית נקבל שסכום כל הקטעים ב$\sum$ הוא:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n_k}}{1-\frac{1}{2}}$$

    · נפשט את הביטוי ונקבל:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n_k}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n_k} < 1$$

    · כלומר:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}} \leq \sum^* \leq \sum_{i=1}^{n_k} \frac{1}{2^i} < 1$$

$$\sum^* < 1$$

- הגענו לסתירה:
  - לפי ההגדרה של כיסוי, הוא צריך להיות גדול או שווה לקטע עצמו.
    * וקיבלנו שהקטע $[0,1]$ מכוסה באיחוד של קטעים פתוחים (כלומר מכוסה ב$\sum^*$) אך סכום הכיסוי הזה קטן מ-1.