אינפי 1מ' (104031) | תרגול 15 - יוליה

שם: איל שטיין

December 12, 2022

נושאי השיעור: גבול של פונקציה

נושא ראשון - גבול של פונקציה בנקודה:

הגדרה 1. גבול של פונקציה בנקודה:

- תהי f המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x=a$.
- נאמר ש $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $0<\left|x-a\right|<\delta$ אז $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$

תרגיל 2. הוכיחו לפי הגדרה ש $\lim_{x\to0}\frac{x^{2}-8}{x-8}=1$

פתרון:

- יהי $\varepsilon>0$.
- **צ"ל:** נחפש מתי לכל $\varepsilon>0$ קיימת δ (ובסוף נראה שהיא $\delta\leq\frac{1}{2}$), כך שאם $0<\left|x-0\right|<\delta$ אז מתקיים $\left|\frac{x^{2}-8}{x-8}-1\right|<\varepsilon$
- נבחן את הביטוי: $\left|\frac{x^{2}-8}{x-8}-1\right|$

$$\left|\frac{x^{2}-8}{x-8}-1\right|=\left|\frac{x^{2}-8-x+8}{x-8}\right|$$

$$=\frac{\left|x^{2}-x\right|}{\left|x-8\right|}=\frac{\left|x\right|\left|x-1\right|}{\left|x-8\right|}$$

  - מכיוון שקיבלנו במונה $\left|x\right|$, נכתוב את הביטוי בצורה הזאת: $\frac{\left|x-1\right|}{\left|x-8\right|}\cdot\left|x\right|$.
  - אנחנו נרצה לחסום את $\frac{\left|x-1\right|}{\left|x-8\right|}$ וה-δ תוגדר לפי $\left|x\right|$.
    - <u>שלב ראשון:</u> נמצא איך לחסום את הביטוי $\frac{\left|x-1\right|}{\left|x-8\right|}$:
      - נדרוש $\delta\leq\frac{1}{2}$

- ואז נקבל שאת הביטוי $|x-0|<\delta$ אפשר לכתוב גם כך:

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\quad \backslash -1$$

$$-1\frac{1}{2}<x-1<-\frac{1}{2}$$

$$|x-1|<1\frac{1}{2}$$ (1)

- עבור $\delta\leq\frac{1}{2}$ נקבל

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\quad \backslash -8$$

$$-8\frac{1}{2}<x-8<-7\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\frac{15}{2}<|x-8|$$ (2)

- נאחד את שני האי-שוויונות ונקבל שעבור $\delta\leq\frac{1}{2}$ מתקיים:

$$\frac{|x-1|}{|x-8|}<\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{15}{2}\right)}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{|x-1|}{|x-8|}<\frac{1}{5}$$

- <u>שלב שני:</u> נציב את $\frac{|x-1|}{|x-8|}<\frac{1}{5}$ ב- $\frac{|x||x-1|}{|x-8|}$
- נקבל שעבור $\delta\leq\frac{1}{2}$, אם $0<|x|<\delta$ אז:

$$\frac{|x|\,|x-1|}{|x-8|}<\frac{1}{5}\cdot|x|<\frac{1}{5}\cdot\delta$$

- ולכן לכל $\varepsilon>0$ ניתן למצוא $0<\delta\leq\frac{1}{2}$ כך ש:

$$\frac{|x|\,|x-1|}{|x-8|}<\frac{1}{5}\cdot|x|<\frac{1}{5}\cdot\delta<\varepsilon$$

- כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta \le \frac{1}{2}$ כך שאם $0 < |x - 0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$

תרגיל 3.
צ"ל: יהי $a > 0$, אז $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
פתרון:

- יהי $\varepsilon > 0$.
- **צ"ל:** נחפש מתי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת איזושהי δ, כך שאם $0 < |x - a| < \delta$ אז יתקיים $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$
- נבחן את הביטוי: $|\sqrt{x} - \sqrt{a}|$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \quad \backslash \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

– מכיוון שהמחוברים במכנה חיוביים, אם נוריד את $\sqrt{x}$ נקבל ביטוי גדול יותר:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$$

* כעת, אם $0 < |x - a| < \delta$ נקבל:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \le \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \delta$$

* לכל $\varepsilon > 0$ ניתן למצוא $\delta > 0$ שתקיים את המשוואה הבאה:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \delta \le \varepsilon$$

* ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיימת δ כך שאם $0 < |x - a| < \delta$ אז יתקיים:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x - a| < \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \delta \le \varepsilon$$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \delta$$

– נמצא את ה-δ שיקיים את אי השוויון למעלה וגם תשאיר את הפוקנציה $\sqrt{x}$ מוגדרת (x לא שלילי):

* ניקח $\delta = min\left\{ \varepsilon\cdot\sqrt{a},\ a\right\}$ ואז יתקיים $\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\delta<\varepsilon$
* במילים אחרות: אם $0<\left|x-a\right|<\delta=min\left\{ \sqrt{a}\cdot\varepsilon,a\right\}$
  · אז או:

$$\left|x-a\right|<\sqrt{a}\cdot\varepsilon\leq a\ \backslash\sqrt{a}$$

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\frac{\left|x-a\right|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$$

$$AND:\quad0=a-a<x$$

  · או:

$$\left|x-a\right|<a\leq\sqrt{a}\cdot\varepsilon$$

$$0<x<2\cdot a$$

* בשני המקרים מתקיים $x\geq0$ ולכן ערכי x יהיו בתחום ההגדרה של הפונקציה, כלומר $0\leq\sqrt{x}$.
  – ואז עבור $\delta=min\left\{ \varepsilon\cdot\sqrt{a},\ a\right\}$, אם $\left|x-a\right|<\delta$ אז יתקיים $0<\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$.
  – כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta=min\left\{ \sqrt{a}\cdot\varepsilon,a\right\}$ כך שאם $0<\left|x-a\right|<\delta$ אז מתקיים $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$

תרגיל 4. הוכיחו לפי הגדרה ש$\lim_{x\to0}\frac{1-2x}{1+\sin(x)}=1$
פיתרון:

* יהי $\varepsilon>0$.
* **צ"ל:** לכל $\varepsilon>0$ קיים δ, כך שאם $0<\left|x-0\right|<\delta$ אז מתקיים $\left|\frac{1-2x}{1+\sin(x)}-1\right|<\varepsilon$
* נבחן את הביטוי $\left|\frac{1-2x}{1+\sin(x)}-1\right|$
  – מכיוון ש-$\frac{\pi}{2}$ רחוק מאוד מ-0, אפשר להתעלם מכך שהפונקציה לא מוגדרת ב-$\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-2x}{1+\sin\left(x\right)}-1\right| & =\frac{\left|1-2x-1-\sin\left(x\right)\right|}{1+\sin\left(x\right)}\\ & =\frac{\left|-2x-\sin\left(x\right)\right|}{1+\sin\left(x\right)}\end{aligned}$$

  – לפי אי שוויון המשולש מתקיים:

$$\frac{\left|-2x-\sin\left(x\right)\right|}{1+\sin\left(x\right)}\leq\frac{2\cdot\left|x\right|+\left|\sin\left(x\right)\right|}{1+\sin\left(x\right)}$$

* ננסה לחסום את $|x|$ ואת $|\sin(x)|$ באופן הבא:

· מכיוון ש$|\sin(x)| \le |x|$(הוכח בהרצאה), מתקיים:

$$\frac{2\cdot|x|+|\sin(x)|}{1+\sin(x)} \le \frac{2\cdot|x|+|x|}{1+\sin(x)} = \frac{3\cdot|x|}{1+\sin(x)}$$

$$\frac{2\cdot|x|+|\sin(x)|}{1+\sin(x)} \le \frac{3\cdot|x|}{1+\sin(x)}$$

· ניתן לדרוש ש-$\delta \le \frac{\pi}{6}$ ואז נקבל שאם $|x| < \delta$ זה אותו דבר כמו לומר $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$. ולכן:

$$-\frac{1}{2} < \sin(x) < \frac{1}{2} \quad \backslash +1$$

$$\frac{1}{2} < \sin(x)+1 < 1\frac{1}{2}$$

· נציב את אי השוויון הזה ב-$\frac{3\cdot|x|}{1+\sin(x)}$ ונקבל אז:

$$\frac{3\cdot|x|}{1+\sin(x)} < \frac{3\cdot|x|}{\frac{1}{2}} = 6\cdot|x|$$

$$\frac{3\cdot|x|}{1+\sin(x)} < 6\cdot|x|$$

- ולכן אם $\delta \le \frac{\pi}{6}$ ו-$|x-0| < \delta$נקבל:

$$\left|\frac{1-2x}{1+\sin(x)}-1\right| < 6\cdot|x| < 6\cdot\delta$$

- ולכן לכל $\varepsilon > 0$ ניתן למצוא $\delta > 0$ שתקיים $6\cdot\delta \le \varepsilon$, כלומר:

$$\left|\frac{1-2x}{1+\sin(x)}-1\right| < 6\cdot|x| < 6\cdot\delta \le \varepsilon$$

$$\left|\frac{1-2x}{1+\sin(x)}-1\right| < \varepsilon$$

- **לסיכום:** לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta \le \frac{\pi}{6}$ כך שאם $0 < |x-0| < \delta$ אז מתקיים $\left|\frac{1-2x}{1+\sin(x)}-1\right| < \varepsilon$.

תרגיל 5.
נגדיר $D\left(x\right)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ (פונקצית דיריכלה)
צ"ל: לא קיים $\lim_{x\to a}D\left(x\right)$ לכל $a\in\mathbb{R}$.
פתרון:

- ניקח נקודה $a\in\mathbb{R}$.
  - בכל סביבה של a יש גם מספרים רציונליים וגם מספרים אי רציונליים.
    - כלומר, הערכים של הפונקציה בסביבה הזו יהיו לפחות פעם אחת 1 ולפחות פעם אחת 0.
- לכן ננסח את שלילת הגדרת הגבול של פונקציה:
  - **צ"ל:** לכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x עבורו כך ש$0<\left|x-a\right|<\delta$ כך ש $\left|D\left(x\right)-L\right|\geq\varepsilon$
- נניח בשלילה שקיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו כן מתקיימת הגדרת הגבול.
  - אז לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל x_{1},x_{2} אם $0<\left|x_{1}-a\right|<\delta$ וגם $0<\left|x_{2}-a\right|<\delta$, אז מתקיים $\left|D\left(x_{1}\right)-L\right|<\varepsilon$ וגם מתקיים $\left|D\left(x_{2}\right)-L\right|<\varepsilon$
    - כלומר גם:

$$L-\varepsilon<D\left(x_{1}\right)<L+\varepsilon$$

- וגם

$$L-\varepsilon<D\left(x_{2}\right)<L+\varepsilon$$

- ולכן:

$$\left(L-\varepsilon\right)-\left(L+\varepsilon\right)<D\left(x_{1}\right)-D\left(x_{2}\right)<\left(L+\varepsilon\right)-\left(L-\varepsilon\right)$$

$$\left|D\left(x_{1}\right)-D\left(x_{2}\right)\right|<2\cdot\varepsilon$$

  - עבור $\varepsilon=\frac{1}{4}$, בגלל צפיפיות הממשיים, בקטע $\left(a-\delta,a+\delta\right)$ קיימים (בלי הגבלת הכלליות) x_{1}רציונלי ו-x_{2} אי רציונלי.
    - נסמן - $a\neq x_{1}\in\mathbb{Q}$ ו-$a\neq x_{2}\notin\mathbb{Q}$.
      - ואז לפי הגדרת הפונקציה $D\left(x_{1}\right)=1$ ו-$D\left(x_{2}\right)=0$
      - ולכן $\left|D\left(x_{1}\right)-D\left(x_{2}\right)\right|=\left|1-0\right|=1<2\cdot\varepsilon=\frac{1}{2}$

$$1<\frac{1}{2}$$

- סתירה.

- לכן, לא קיים $L \in \mathbb{R}$ עבורו מתקיימת הגדרת הגבול.

תרגיל 6. נתון כי $\lim_{x\to b} f\left(x\right)=L$.

א. יהי $a\neq 0$. **צ"ל:** הוכיחו לפי הגדרה ש-$\lim_{x\to 0} f\left(ax+b\right)=L$

ב. האם הטענה של סעיף א' נכונה עבור $a=0$?

א. פתרון:

- יהי $\varepsilon>0$.

- **צ"ל:** לכל $\varepsilon>0$, צריך למצוא עבור איזו $\delta>0$, אם $0<\left|x-0\right|<\delta$ אז יתקיים $\left|f\left(ax+b\right)-L\right|<\varepsilon$

- הערה - בהגדרת הגבול שבנתון נשתמש ב-z במקום x בשביל לא לבלבל בין שתי הגדרות הגבול השונות.

  - נתון כי $\lim_{z\to b} f\left(z\right)=L$.

    * ולכן עבור $\varepsilon>0$ (שכבר בחרנו), קיימת $\delta_1>0$ כך שאם $0<\left|z-b\right|<\delta_1$ אז מתקיים $\left|f\left(z\right)-L\right|<\varepsilon$.

    * הביטוי הזה נכון לכל z שמקיים $b-\delta_1<z<b+\delta_1$

      · ובפרט ל-$z=ax+b$, כלומר $x=\frac{z-b}{a}$

      · נציב את $z=ax+b$ ב- $0<\left|z-b\right|<\delta_1$ ונקבל:

      · שאם $0<\left|\overbrace{ax+b}^{z}-b\right|<\delta_1$ אז מתקיים $\left|f\left(ax+b\right)-L\right|$

$$0<\left|ax+\cancel{b-b}\right|<\delta_1$$

$$0<\left|a\right|\cdot\left|x\right|<\delta_1$$

$$0<\left|a\right|\cdot\left|x\right|<\delta_1 \ \ \backslash\left|a\right|$$

      · מכיוון ש- $\left|a\right|>0$ וגם $a\neq 0$, מותר לחלק $\left|a\right|$ומבלי להפוך את הסימן:

$$\left|x\right|<\frac{\delta_1}{\left|a\right|}$$

      · ולכן קיבלנו שלכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta_1>0$ כך שאם $0<\left|x\right|<\frac{\delta_1}{\left|a\right|}$ אז מתקיים $\left|f\left(ax+b\right)-L\right|<\varepsilon$

- נבחר $\delta_2=\frac{\delta_1}{\left|a\right|}>0$ ונקבל:

  - לכל $\varepsilon>0$ קיימת $0<\delta_2=\frac{\delta_1}{\left|a\right|}$ כך שאם $0<\left|x-0\right|<\delta_2$ אז מתקיים $\left|f\left(ax+b\right)-L\right|$.