(104166) אלגברה ליניארית אמ' |

תרגול 1 - אפרת ואז ניקה

שם: איל שטיין

November 5, 2022

שיעור פולינומים:

נושאים: שדות

הגדרה 1. שדה - קבוצה של מספרים בעלת פעולות חיבור וכפל באיברים ששונים מ-0.

דוגמה 2. דוגמאות לשדות: (כלומר גם אם מבצעים בהן פעולה כגון חיבור וכפל אז עדיין נשארים בתוך הקבוצה)
$\mathbb{R}$ - המספרים הממשיים
$\mathbb{Q}$ - המספרים הרציונליים
$\mathbb{C}$ - המספרים המרוכבים
דוגמאות ללא שדות:
$\mathbb{N}$ - המספרים הטבעיים
$\mathbb{Z}$ - המספרים השלמים

הגדרה 3. פולינום **מעל** שדה $\mathbb{F}$ הוא ביטוי מהצורה $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, x הוא סמל, מופיע בחזקות טבעיות (n הוא מספר טבעי).

הגדרה 4. פולינומים - $a_n,a_{n-1},...a_2,a_1\in\mathbb{F}$ נקראים מקדמי הפולינום

הגדרה 5. מעלת הפולינום (דרגת הפולינום) הוא ה-n המקסימלי עבורו $a_n\neq 0$

הגדרה 6. אם כל המקדמים שווים לאפס, אז הפולינום נקרא " פולינום האפס" ומעלתו היא מינוס אינסוף

הגדרה 7. מקדם מוביל - אם פולינום הוא ממעלה n, אז המקדם המוביל שלו הוא המקדם של x^n, כלומר a_n =

הגדרה 8. פולינום שמקדם המוביל שלו הוא 1, נקרא פולינום <u>מתוקן</u>

הגדרה 9. מקדם חופשי = a_0

הגדרה 10. קבוצת הפולינומים מעל שדה $\mathbb{F}$ מסומנת ב$\mathbb{F}[x]$

דוגמה 11. דוגמא:

$$p(x)=1x^2-2x+4$$

המעלה היא 2
המקדם המוביל $a_2 = 1$
ולכן $p\left(x\right)$ הוא פולינום מתוקן.
המקדם החופשי $a_0 = 4$

דוגמה 12. דוגמא:

$$q\left(x\right)=2x^{25}+3x^{7}-10x-9$$

המעלה היא 25
המקדם המוביל $a_{25} = 2$
המקדם החופשי $a_0 = -9$

דוגמה 13. דוגמא:

$$r\left(x\right)=7$$

המעלה היא אפס:

$$deg\left(r\left(x\right)\right)=0$$

במקרה הזה המקדם המוביל = המקדם החופשי, כלומר $a_0 = 7$

פעולות על פולינומים:

- חיבור וחיסור מתבצעים "כרגיל".

דוגמה 14. חיבור וחיסור:

$$p\left(x\right)=x^{2}-2x+5$$

$$q\left(x\right)=5x^{3}+8x-9$$

$$p\left(x\right)+q\left(x\right)=5x^{3}+x^{2}+6x-4$$

טענה 15. מה אפשר לומר על $deg\left(p\left(x\right)+q\left(x\right)\right)$?
אפשר לומר ש $deg\left(p\left(x\right)+q\left(x\right)\right)\leq max\left\{ deg\left(p\left(x\right)\right),deg\left(q\left(x\right)\right)\right\}$. לא נוכיח את זה בשיעור.

- כפל של פולינומים מתבצע כרגיל:
  - לדוגמא:

$$p\left(x\right)=x-1$$

$$q\left(x\right)=2x^{2}+5x$$

$$\begin{aligned}p\left(x\right)\cdot q\left(x\right) & =\left(x-1\right)\cdot\left(2x^{2}+5x\right)\\ & =2x^{3}+3x^{2}-5x\end{aligned}$$

בדוגמא הזו המעלה היא 3

טענה 16. $deg\left(p\left(x\right)\cdot q\left(x\right)\right)=deg\left(p\left(x\right)\right)+deg\left(q\left(x\right)\right)$

- חלוקה של פולינומים:
  - ניתן לחלק שני פולינומים $\frac{p(x)}{q(x)}$ אם $q\left(x\right)\neq0$

משפט 17. בהינתן שני פולינומים: $f\left(x\right),h\left(x\right)\in\mathbb{F}$ כך ש $h\left(x\right)\neq0$ אז מתקיימים שני פולינומים יחידים $q\left(x\right),r\left(x\right)\in\mathbb{F}$ עבורים מתקיים:

$$f\left(x\right)=\underbrace{q\left(x\right)}_{mana}\cdot h\left(x\right)+\underbrace{r\left(x\right)}_{she'erit}$$

משפט 18. וגם

$$deg\left(r\left(x\right)\right)<deg\left(h\left(x\right)\right)$$

דוגמה 19. חלוקה של פולינומים

$$f(x) = 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x - 1$$

לחלק ל: $h(x) = x^2 - 1$
עושים חילוק, כפל ואז חיסור.

הערה 20. נאמר ש $q(x)$ מחלק את הפולינום $p(x)$ אם קיים פולינום $d(x)$ כך ש:

$$p(x) = q(x) \cdot d(x)$$

הסימון הוא $q(x) \mid p(x)$
לדוגמא $x - 1 \mid x^2 - 1$
או $2 \nmid 7$ כדי לומר "לא מחלק".

הגדרה 21. עבור

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$$

ועבור $\alpha \in \mathbb{F}$
הצבה של α בפולינום היא:

$$p(x) = a_n \alpha^n \ldots + a_1 \alpha + a_0$$

משפט 22. עבור פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ נאמר ש-α הוא שורש של $p(x)$ אם α פותר את המשוואה:

$$p(x) = 0$$

דוגמה 23. אם $p(x) = x + 5$ אז -5 הוא שורש כי

$$p(5) = -5 + 5 = 0$$

דוגמה 24. $q\left(x\right)=x^{2}+6x-7=\left(x+7\right)\left(x-1\right)$, בדוגמא הזו השורשים הם $-7,1$

דוגמה 25. $r\left(x\right)=x^{2}-2=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$, בדוגמא הזו השורשים הם $\sqrt{2},-\sqrt{2}$

דוגמה 26. $s\left(x\right)=x^{2}+1$, אין שורשים ממשיים אלא השורשים הם מרוכבים

$i,-i$

טענה 27. מהמשפט על חלוקת פולינומים, מתקיים שאם נחלק פולינום $f\left(x\right)$ בפולינמום $h\left(x\right)=x-\alpha$ אז נקבל שהשארית היא $f\left(\alpha\right)$.

הוכחה. נחלק

$$f\left(x\right)=q\left(x\right)\cdot\underbrace{\left(x-\alpha\right)}_{h\left(x\right)}+r\left(x\right)$$

כאשר אנחנו יודעים ש:

$$deg\left(r\left(x\right)\right)<deg\left(h\left(x\right)\right)=1$$

ומכיוון שמעלה של פולינום צריכה להיות מספר טבעי, יוצא שאין עוד מספרים טבעיים מתחת ל-1 ולכן מוכרח:

$$deg\left(r\left(x\right)\right)=-infinity$$

או

$$deg\left(r\left(x\right)\right)=0$$

כלומר, המעלה של השארית $r\left(x\right)$ היא 0.

[ההמשך שלי ולא של המתרגלת: נציב את α במקום x בתוך $f\left(x\right)$ ונקבל:

$$f\left(\alpha\right)=q\left(\alpha\right)\cdot\underbrace{\left(\alpha-\alpha\right)}_{=0}+r\left(\alpha\right)$$

$$f(\alpha)=r(\alpha)$$

כלומר, השארית שהתקבלה היא $f(\alpha)$.]

$\blacksquare$

הערה 28. α הוא שורש של $p(x)$ אם ורק אם $(x-\alpha)\mid p(x)$

(על מנת להוכיח צריך להציב $\leftarrow$ ואז לנסות $\rightarrow$)

[אני אנסה להוכיח לבד:

הוכחה.

- α שורש של $p(x)$ $\Leftarrow$ $(x-\alpha)\mid p(x)$
  - נתון כי $p(\alpha)=0$
  - אם נחלק את $p(x)$ ב $(x-\alpha)$ נקבל:

$$p(x)=q(x)\cdot(x-\alpha)+r(x)$$

  - לפי המשפט הקודם, שארית החלוקה שווה ל- $p(\alpha)$, כלומר 0
  - אם השארית מהחלוקה היא 0, אז $(x-\alpha)\ \mid\ p(x)$

- α שורש של $p(x)$ $\Rightarrow$ $(x-\alpha)\mid p(x)$
  - נתון שהשארית מהחלוקה היא 0 ולכן $r(x)=0$
  - לכן בחלוקה יוצא ש

$$p(x)=q(x)\cdot(x-\alpha)+0$$

  - אם נציב במקום x את α נקבל ש $p(\alpha)=0$ ולכן αהוא שורש של $p(x)$.

$\blacksquare$

]

ההגדרה של ניקה לפולינום:

הגדרה 29. יהי $\mathbb{F}$ שדה.

פולינום בסמל x עם מקדמים ב-$\mathbb{F}$ הוא ביטוי פורמלי מהצורה:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

כאשר $a_i\in\mathbb{F}$ (a_i נקראים מקדמי הפולינום) ו-$a_i\neq 0$ רק עבור מספר סופי של מקדמים.

- פולינום שכל המקדמים שלו הם אפסים נקרא פולינום האפס.
- $\mathbb{F}[x]$ - קבוצה של כל הפולינומים עם מקדמים ב$\mathbb{F}$.
- ה'מעלה' של הפולינום $p(x)$ זו החזקה הגדולה ביותר של x שהמקדם שלו אינו 0.
- הסימון ל'מעלה' של פולינום הוא $deg(p(x))$.
- פולינום האפס הוא $q(0)=0$ והמעלה שלו מוגדרת להיות מינוס אינסוף.
- a_n נקרא <u>מקדם מוביל</u> וa_0 נקרא <u>מקדם חופשי</u> עבור פולינום $p(x)$ ממעלה n.
- אם $a_n=1$ אז הפולינום נקרא פולינום מתוקן.

פעולות עם פולינומים:

- חיבור פולינומים:
  - אם k הוא המעלה של הפולינום $p(x)$ אז $p(x)=\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$
  - אם t הוא המעלה של הפולינום $q(x)$ אז $q(x)=\sum_{n=0}^{t} a_n x^n$
  - אם נרצה לחבר את שני הפולינומים האלה נקבל:

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x)+q(x)\\ &= p(x)+q(x)=\sum_{n=0}^{max(t,\ k)}(a_n+b_n)x^n\end{aligned}$$

- כפל פולינומים:

$$\begin{aligned}p\cdot q(x) &= p(x)\cdot q(x)\\ &= p(x)\cdot q(x)=\left(\sum_{n=0}^{k}a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{t}a_n x^n\right)\end{aligned}$$

  - וגם יוצא לנו: $deg(p\cdot q(x))=k+t$

- חילוק פולינומים:
  - עושים חילוק ארוך עם שארית.
  - משפט חילוק פולינומים:
    * יהיו $p(x),q(x)\in\mathbb{F}[x]$

* אזי קיימים $r(x), m(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיימים

$$p(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x)$$

כאשר $deg(r(x)) < deg(q(x))$

* ו- $m(x)$ ו- $r(x)$ נקבעים באופן יחיד, כלומר יש רק זוג אחד של הפולינומים שמקיימים את האמירה למעלה

תרגיל 30. הראו ש$q(x) = x^2 + x + 1$ אינו מחלק את $p(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2$

פתרון 31. יוצא ש $m(x) = x - 2$, $r(x) = 3x + 4$

* שורשים של פולינום:
  - α נקרא שורש של פולינום $p(x)$ אם $p(\alpha) = 0$. צורת הכתיבה הזו של $p(\alpha)$ נקראת הצבה.

אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 2 - אפרת (104166)

שם: איל שטיין

November 5, 2022

נושא השיעור: פולינומים - המשך

משפט 1. משפט הניחוש האינטיליגנטי:
יהי $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום עם מקדמים שלמים.
אם ל$f(x)$ יש שורש רציונלי מצומצם: $\alpha = \frac{p}{q}$ אז:

1. $p|a_0$
2. $q|a_n$

הוכחה. לא נוכיח כרגע בשיעור. ■

מסקנה 2. המשפט הזה נותן לנו לנחש מספרים רציונליים שמקיימים רק את שני התנאים האלה כדי למצוא שורש של פולינום.

תרגיל 3. מצאו את השורשים של:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$$

פתרון 4. שלב ראשון - המקדמים של $f(x)$שלמים ולכן ניתן להשתמש במשפט הניחוש.

- נניח שיש לנו שורש רציונלי מהצורה $\alpha = \frac{p}{q}$
  - אז לפי המשפט יוצא ש

$$p|a_0 = 2$$

$$q|a_n = 1$$

- המספרים שמחלקים את 2 הם: 2-,+-1,+. לכן p שייך לקבוצה $\{2,1,-2,-1\}$
  - ככה הורדנו את מספר האפשרויות של p לארבע אפשרויות בלבד.
- המספרים q שמחלקים את 1 ללא שארית הם האיברים בקבוצה $\{1,-1\}$
- השורשים יכולים להיות:

$$\alpha=\frac{p}{q}\in\left\{+-\frac{2}{1},+-\frac{1}{1}\right\}$$

  - יצאו לנו ארבע אפשרויות, אבל מכיוון שהפולינום הוא ממעלה שלישית אנחנו נגלה מאוחר יותר שבפועל יש רק שלוש אפשרויות.
- נתחיל לבדוק אם האפשרויות של α שהתקבלו הן שורשים של $f\left(x\right)$:
  - $\alpha=1 \Leftarrow f\left(1\right)=1^{3}-1^{2}-2+2=0$
    - לכן 1 הוא שורש של $f\left(x\right)$
  - אנחנו לא נמשיך להציב את האפשרויות אחת אחת אלא ניקח את הפולינום שלנו אלא נחלק אותו ב$x-1$ כי כמו שאמרנו שתרגול הקודם, $x-1\mid f\left(x\right)$
    - נבצע חלוקת פולינומים:
    - נחלק את $f\left(x\right)$ ב $x-1$ ונקבל שהתוצאה היא $d\left(x\right)=x^{2}-2$
    - במילים אחרות, $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x^{2}-2\right)$
    - המשוואה יכולה להתאפס אם $x^{2}=2$
    - כלומר, השורשים הם בקבוצה $\left\{1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

מסקנה 5. אם סכום המקדמים של הפולינום הוא 0, אז 1 הוא שורש של הפולינום.

הגדרה 6. כעבור פולינום $p\left(x\right)$ ו-α שורש שלו ה-k המקסימלי כך ש $p\left(x\right)\mid\left(x-\alpha\right)^{k}$ נקרא הריבוי של α

דוגמה 7. $\left(x-7\right)^{4}\cdot\left(x+5\right)^{3}$
כלומר 7 הוא שורש מריבוי 4, ו- $\left(-5\right)$ הוא שורש מריבוי 3.

משפט 8. αהוא שורש מריבוי k של $p\left(x\right)$ אם ורק אם

$$p\left(\alpha\right)=0,\ p'\left(\alpha\right)=0,\ p''\left(\alpha\right)=0\ldots$$

וגם הנגזרת מסדר k (אם נגזור k פעמים) לא שווה אפס:

$$p^{'k}\left(a\right)\neq0$$

תרגיל 9. פרוק את הפולינום הבא למכפלות של גורמים ליניאריים (גורם ליניארי הוא $ax+b$ אבל יכול להיות גם מרוכב):

$$p\left(x\right)=x^{4}-2x^{3}+2x^{2}-2x+1$$

כדי לעשות זאת אנחנו משתמשים במשפט שאפשר לחלק כל פולינום לגורמים ליניאריים, הוא נקרא המפשט היסודי של האלגברה.

פתרון 10. קודם כל נראה שסכום המקדמים הוא 0 ולכן 1 הוא שורש של $p\left(x\right)$.

- נבדוק את הריבוי של 1 לפי המשפט הקודם. אנחנו צריכים לגזור ולהציב ולראות אם נקבל 0:
  - $p'\left(x\right)=4x^{3}-6x^{2}+2x-2$

$$p'\left(1\right)=41^{3}-61^{2}+2\left(1\right)-2=0$$

$$p''\left(x\right)=12x^{2}-12x+4$$

$$p''\left(1\right)=12\cdot1^{2}-12\cdot1+4\neq0$$

  - * לא קיבלנו 0 בנגזרת השנייה ולכן 1 הוא שורש מריבוי 2.
  - מכייון ש1- הוא שורש אנחנו יודעים ש

$$p\left(x\right)=\left(x-1\right)^{2}\cdot d\left(x\right)$$

  - צריך לעשות חלוקת פולינומים ולחלק את $\frac{p(x)}{(x-1)^{2}}=d\left(x\right)$ ואנחנו נקבל $x^{2}+1$
    - * כלומר,

$$p\left(x\right)=\left(x-1\right)^{2}\cdot\left(x^{2}+1\right)=\left(x-1\right)^{2}\cdot\left(x+i\right)\cdot\left(x-i\right)$$

$$p\left(x\right)=\left(x-1\right)^{2}\cdot\left(x+i\right)\cdot\left(x-i\right)$$

תרגיל 11. מצאו שורשים ואת ריבויים עבור

$$g\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}+\frac{5}{3}x^{2}+\frac{7}{3}x+1$$

פתרון 12. קודם כל נבדוק האם 1 הוא שורש לפי סכום המקדמים. במקרה הזה זה לא יעבוד ולכן נשתמש במשפט הניחוש.

- בשביל להשתמש במשפט הניחוש אנחנו צריכים שהמקדמים יהיו שלמים ולכן אי אפשר להשתמש במשפט הזה עבור $g\left(x\right)$
- למעשה אנחנו רוצים למצוא פיתרון למשוואה

$$\frac{1}{3}x^{3}+\frac{5}{3}x^{2}+\frac{7}{3}x+1=0$$

- ולכן אנחנו יכולים לכפול ב 3:

$$\frac{1}{3}x^{3}+\frac{5}{3}x^{2}+\frac{7}{3}x+1=0\ \backslash\cdot3$$

$$x^{3}+5x^{2}+7x+3=0$$

- נקרא לפולינום החדש $f\left(x\right)$.
  - לשני הפולינומים יש את אותם השורשים כי מה שמאפס משוואה אחת מאפס גם את השנייה.
- נשתמש במשפט הניחוש עבור $f\left(x\right)$:
  - אם $\frac{p}{q}$ הוא שורש שמצומצם של $f\left(x\right)$ אז

$$p|a_{0}=3$$

$$q|a_{n}=1$$

  - מזה יוצא ש $\frac{p}{q}\in\left\{ \pm1,\pm3\right\}$
  - כעת אפשר להציב את השורשים ולראות.
- **נבדוק** את הריבוי של -1 ונקבל ש:

$$f'\left(-1\right)=0$$

$$f''\left(-1\right)\neq0$$

  - ולכן הריבוי של -1 הוא 2 כי גזרנו פעמיים עד שהנגזרת בנקודה כבר לא שווה אפס.

- **נמשיך** על ידי חלוקת פולינומים:

$$\frac{f\left(x\right)}{\left(x+1\right)\cdot\left(x+1\right)}=x+3$$

  – מזה יוצא ש:

$$f\left(x\right)=\left(x+1\right)^{2}\cdot\left(x+3\right)$$

  – המסקנה היא שהריבוי של -3 הוא ממעלה 1 כי אם נגזור את $f\left(x\right)$ עכשיו

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 2 - ניקה

שם: איל שטיין

November 5, 2022

<u>נושאי השיעור: פולינומים ושדות.</u>

<u>נושא ראשון: פולינומים</u>

בשיעור הקודם אמרנו ששארית החלוקה $f\left(x\right)$ בפולינום $\left(x-a\right)$ היא $f\left(a\right)$

דוגמה 1.

$$f\left(x\right)=x^{3}+2x^{2}-3x+1$$

נחלק את $f\left(x\right)$ ב $\left(x+1\right)$ ונקבל ששארית החלוקה היא 5 ולכן אמור לצאת $f\left(-1\right)=5$. נציב $x=-1$ ונראה שאכן יוצא 5.

משפט 2.

$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\cdot q\left(x\right)+r\left(x\right)$ כאשר $deg\left(r\left(x\right)\right)<1$, כלומר $r\left(x\right)=r$ סקאלר.

הוכחה.

$$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\cdot q\left(x\right)+r$$

$$f\left(a\right)=\underbrace{\left(a-a\right)\cdot q\left(a\right)}_{=0}+r$$

$$f\left(a\right)=r$$

■

משפט 3. אם α הוא השורש של פולינום $p(x)$ אזי קיים $q(x)$ כך ש $p(x) = (x-\alpha)\cdot q(x)$

טריקים למצוא שורשים של פולינום:

1. אם סכום המקדמים שווה ל-0 אז 1 הוא השורש.
2. אם סכום המקדמים של החזקות הזוגיות שווה לסכום המקדמים של החזקות האי-זוגיות אז השורש הוא -1
3. שיטת הניחוש האינטיליגנטי של שורש רציונלי:

טענה 4. יהי $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום עם מקדמים שלמים. אם יש לו שורש רציונלי מהצורה $\frac{p}{q}$ שהוא שבר מצומצם (כלומר שני האיברים זרים זה לזה), אזי p מחלק את a_0 ו-q מחלק את a_n.

הוכחה. ■

- נתון:
  - $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$
  - $\frac{p}{q}$ שורש של $p(x)$
- נציב את $\frac{p}{q}$ונקבל:

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 \backslash \cdot q^n$$

המשוואה שווה 0 כי $\frac{p}{q}$ הוא שורש.

  - נכפיל את שני הצדדים בq^n ונקבל:

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n (p)^n + \ldots + a_1 (p) + a_0 \cdot q^n$$

  - נעביר את האיבר החופשי אגף:

$$a_0 \cdot q^n = -a_n (p)^n - \ldots - a_1 (p)$$

  - נוציא את p גורם משותף ונקבל:

$$a_0 \cdot q^n = p\left(-a_n (p)^{n-1} - \ldots - a_1\right)$$

  - נחלק ב-p ונקבל:

$$\frac{a_0 \cdot q^n}{p} = -a_n (p)^{n-1} - a_n (p)^{n-2} \ldots - a_1$$

- p ו-q זרים זה לזה, כלומר המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1.

- יוצא ש-p מחלק את a_0.

הגדרה 5. <u>ריבוי:</u>
α הוא שורש של פולינום $p\left(x\right)$ בעל ריבוי k אם $\left(x-\alpha\right)^{k}$ מחלק את $p\left(x\right)$, אבל $\left(x-\alpha\right)^{k+1}$ אינו מחלק את $p\left(x\right)$

כדי למצוא ריבוי של שורש, אפשר לחלק כמה פעמים אבל זה מעצבן. במקום זה, נגזור את הפולינום.

משפט 6. אם α הוא שורש של $p\left(x\right)$ מריבוי k אזי כל הנגזרות עד סדר $k-1$ מתאפסות ב α
כלומר, $p\left(\alpha\right)=p'\left(\alpha\right)=\ldots=p'^{k-1}\left(\alpha\right)=0$
אבל $p'^{k}\left(\alpha\right)\neq0$

דוגמה 7. מצאו את כל השורשים של:

$$p\left(x\right)=x^{4}-x^{3}-3x^{2}+5x-2$$

פיתרון:

- קודם כל נבדוק האם סכום המקדמים שווה ל-0:

$$1-1-3+5-2=0$$

- כלומר, 1 הוא שורש.
- נבדוק מה הריבוי של 1. בשביל זה, נגזור את הפולינום ונבדוק מתי הנגזרת מפסיקה להתאפס:

$$p'\left(x\right)=4x^{3}-3x^{2}-6x+5$$

$$p'\left(1\right)=4\cdot1^{3}-3\cdot1^{2}-6\cdot1+5=0$$

- כלומר, 1 הוא שורש של שלפחות ריבוי 2. נגזור פעמיים ונבדוק:
-

$$p''\left(x\right)=12x^{2}-6x-6$$

$$p''\left(1\right)=12\cdot1^{2}-6\cdot1-6=0$$

- יצא ש-1 הוא שורש מריבוי לפחות 3. נגזור שוב:
-

$$p'''(x) = 24x - 6$$

$$p'''(1) = 24 \cdot 1 - 6 \neq 0$$

- מצאנו שלושה שורשים (1). נרצה למצוא את השורש הרביעי. אפשר לחלק את הפולינום בחילוק ארוך, אבל הרבה יותר יפה לחלק את הפולינום:
-

$$p(x) = (x-1)(x-1)(x-1) \cdot (x-\alpha)$$

וגם:

$$p(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

- בפולינום יש רק (-2) בתור איבר חופשי. הדרך היחידה להגיע אליו היא לפתוח את הסוגריים רק בגורמים החופשיים:

$$-2 = (-1)(-1)(-1)(-\alpha)$$

$$-2 = \alpha$$

נושא שני: שדות

הגדרה 8. תהי $\mathbb{F}$ קבוצה בה מוגדרות שתי פעולות - חיבור (+) וכפל (·).
$\mathbb{F}$ נקרא שדה אם מתקיימות התכונות הבאות לכל שלושה מספרים a, b, c:

1. יש סגירות לחיבור: $a + b \in \mathbb{F}$
2. קומוטטיביות (חוק החילוף) לחיבור: $a + b = b + a$
3. אסוציאטיביות (חוק הקיבוץ) לחיבור: $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. קיום איבר אדיש חיבורי (נסמנו "0"): $a + "0" = a$

5. לכל מספר קיים נגדי שבעזרתו מגיעים לאדיש החיבורי: $a+(-a)=0$
6. יש סגירות לכפל: $a\cdot b\in\mathbb{F}$
7. קמוטטיביות (חוק החילוף) לכפל: $a\cdot b=b\cdot a$
8. אסוציאטיביות (חוק הקיבוץ) לכפל: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
9. קיום איבר אדיש כפלי (נסמנו 1): $1\cdot a=a$
10. לכל מספר קיים הופכי שבעזרתו מגיעים לאדיש הכפלי (לכל מספר שונה מ-0): $a\cdot a^{-1}=1,\ \ a\neq 0$
11. דסירטיבוטיביות (חוק הפילוג): $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

דוגמה 9. נוכיח שהנגדי הוא יחיד.
פיתרון: יהי $a\in\mathbb{F}$.

- מכיוון ש-$\mathbb{F}$ שדה קיים $-a$ שהוא הנגדי שלי a כך ש:

$$a+(-a)="0"$$

- נניח שיש איבר נגדי נוסף ונראה שהם שווים:
  - קיים $c\in\mathbb{F}$ כך ש- $a+c="0"$
  - ידוע ש- $a+(-a)="0"$
  - נוסיף לשני האגפים את הנגדי, כלומר את $(-a)$ ונקבל:

$$"-a"+a+c=a+(-a)+(-a)="0"$$

$$(-a)=c$$

דוגמה 10. הוכיחו כי $(-a)(-b)=a\cdot b$

פיתרון:

- נוכיח קודם תכונת עזר: $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$
  - נוסיף $a\cdot b$ לשני האגפים ונקבל: (אם ורק אם)

$$\underbrace{-(a\cdot b)+a\cdot b}_{0}=(-a)\cdot b+ab=0$$

נוציא את b גורם משותף:

$$b\left(\underbrace{(-a)+a}_{=0}\right)=0$$

זה נכון (באם ורק אם) כי $0=(-a)+a$

* הערה שלי: בכתיבת תשובה במבחן עדיף להתחיל מ- $0=(-a)+a$ ומשם להגיע לתכונה שרצינו להוכיח.

- צ"ל: $(-a)(-b)=a\cdot b$
- נוסיף לשני האגפים את הנגדי של $a\cdot b$ ונקבל:

$$(-a)(-b)+(-a\cdot b)=0$$

– לפי טענת העזר שהוכחנו:

$$(-a)(-b)+(-a\cdot b)=0$$

$$(-a)\underbrace{(-b+b)}_{=0}=0$$

* שזה נכון כי אחד מהאיברים שווה 0.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 3 - הילה

שם: איל שטיין

November 5, 2022

בשיעור שעבר דיברנו על יצירת שדה שמורכב מאיברים של קבוצה כך שכל איבר הוא צמד של מספרים (a,b) ששניהם ב-$\mathbb{R}$.
פעולת החיבור הייתה מוגדרת כך:

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$$

כפל הייתה מוגדרת כך:

$$(a,b)\odot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot+b\cdot c)$$

התחלנו לעבור על התנאים לקיום של שדה.

עצרנו האיבר נגדי. קיבלנו שמועמד אפשרי לאיבר הנגדי של $(0,0)\neq(a,b)$ הוא $\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.
כעת נראה שההופכי של ש- $(0,0)\neq(a,b)$ הוא $\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$:

- נבחן את הביטוי:

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{(-b^2)}{a^2+b^2},\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)$$
$$=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},0\right)=(1,0)$$

  – כלומר, הגענו לאיבר היחידה $(1,0)$.

תנאי אחרון - חוק הפילוג:

- נשאר לנו לבדוק האם חוק הפילוג (דיסטיריוטיביות) מתקיים על הקבוצה שלנו. נבחן את הביטוי:

$$(a,c)\odot((c,d)+(e,f))$$

$$=(a,c)\odot(c+e,d+f)$$

$$=(a\left(c+e\right)-b\left(d+f\right),a\left(d+f\right)+b\left(c+e\right))$$

$$=(a\left(c+e\right)-b\left(d+f\right),a\left(d+f\right)+b\left(c+e\right))$$

- נבחן את הביטוי:

$$(a,b)\odot(c,d)\oplus(a,b)\odot(e,f)$$

  – נראה שהוא שווה לביטוי:

$$(a,c)\odot((c,d)+(e,f))$$

  – קיבלנו שמתקיים חוק הפילוג.

מסקנה: למעשה, הוכחנו שהמרוכבים הם שדה:

$$(a,b)=a+ib$$

כי:

$$(a+ib)+(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$$

בכל פעם שנוכיח שקבוצה מסוימת היא שדה נקבל שיש כמה תכונות שנובעות מכך ולא צריך להוכיח במבן. לדוגמא: שהאיבר האדיש הוא יחיד. התכונות הנוספות השימושיות הן: (נפסיק לסמן את הפעולות בעיגול)

1. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a\cdot 0=0$

2. $(-1)\cdot a=-a$. כלומר, אם כופלים את הנגדי של האדיש הכפלי באיבר כלשהו, מקבלים את הנגדי החיבורי של האיבר הזה.
3. לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים $-a\left(a\cdot b\right)=\left(-a\right)\cdot b=a\left(-b\right)$
4. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $-\left(-a\right)=a$
5. לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $\left(-a\right)\left(-b\right)=ab$
6. $\left(-a+b\right)=\left(-a\right)+\left(-b\right)$
7. $a\left(b-c\right)=ab-ac$
8. $\left(b+c\right)a=ba+ca$
9. לכל $0\neq a\in\mathbb{F}$ מתקיים $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$
10. $\left(a\cdot b\right)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$
11. אם $a+c=b+c$ אז $a=b$
12. $ac=bc$ וגם $c\neq 0$ גורר $a=b$
13. $a\cdot b=0$ גורר או $a=0$ או $b=0$
14. האיבר האדיש החיבורי הוא יחיד.
15. האיבר האדיש הכפלי הוא יחיד.

בתור דוגמאות, נוכיח כמה תכונות מהרשימה.

דוגמה 1. תכונה מספר 14: (ונדבר בכללי על איך מוכיחים "יחידות" במתמטיקה)

הוכחה. שתי אפשרויות להוכחה: (1) נניח בשלילה שיש שתי אפשרויות ונקבל סתירה (2) להניח שיש שתי אפשרויות ולהראות שהן שוות זו לזו ■

- נניח שיש שני אדישים חיבוריים - "e","0":

$$0=\underbrace{e}_{adish}+\underbrace{0}_{adish}=e$$

- הנחנו שיש שני אדישים והראינו שהם שווים אחד לשני, כלומר יש אדיש יחיד.

דוגמה 2. תכונה מספר 2: $\left(-1\right)\cdot a=-a$

הוכחה. נשתמש בעובדה ידועה על $\left(-a\right)$.

- ידוע לנו ש: $a+\left(-a\right)=0$
- ידוע לנו ש: $1+\left(-1\right)=0$

• מהביטוי:

$$0 = a \cdot 0$$

– נשתמש בעובדה ש- $1 + (-1) = 0$

$$0 = a \cdot (1 + (-1))$$

– נוסיף את ההופכי החיבורי של $a \cdot (-1)$ לשני הצדדים:

$$0 = a \cdot 1 + a \cdot (-1) \quad \backslash + (-a \cdot 1)$$

– נקבל:

$$-a \cdot 1 = +a \cdot (-1)$$

■

הגדרה 3. תת שדה
תת קבוצה G, של שדה $\mathbb{F}$, נקראת תת שדה של $\mathbb{F}$ אם היא:

1. מכילה את האיבר האדיש החיבורי (0) והאיבר האדיש הכפלי (1)
2. היא מהווה בעצמה שדה ביחס לפעולת החיבור והכפל המוגדרות על $\mathbb{F}$.

דוגמה 4. הקבוצה $\mathbb{Q}$ היא תת שדה של $\mathbb{R}$.

הערה 5. לא צריך לבדוק את כל התנאים אבל צריך לבדוק שמתקיימים סגירות לחיבור ולכפל. כלומר צריך לבדוק שביצוע הפעולות הללו לא מוציא את התוצאה מ-G.

משפט 6. יהי $\mathbb{F}$ שדה ו-G תת קבוצה שלו (מוכלת ב-$\mathbb{F}$). G היא תת שדה של $\mathbb{F}$ אם:

1. G סגורה לחיבור ולכפל עם אותן הפעולות של $\mathbb{F}$
2. G מכילה את ההופכי והנגדי של כל איבר בה השונה מ-0 (כי אין הופכי לאיבר שהוא 0).

דוגמה 7. $\mathbb{R}$ תת שדה של $\mathbb{C}$.

דוגמה 8. $\underbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}_{irrationals}$ לא תת שדה של $\mathbb{R}$ (כי הם לא מקיימים סגירות וגם כי $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ לא מכיל את "1")

דוגמה 9. $\mathbb{Z}$ לא תת שדה של $\mathbb{R}$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 4 - הילה

שם: איל שטיין

November 7, 2022

נושאי השיעור:

1. שדות - המשך

2. פולינומים והוכחות נוסחאות וייטה

חלק ראשון: שדות - המשך

בשיעור הקודם דיברנו על המושג תת-שדה.
תזכורת:

הגדרה 1. תת שדה

תת קבוצה G, של שדה $\mathbb{F}$, נקראת תת שדה של $\mathbb{F}$ אם היא:

1. מכילה את האיבר האדיש החיבורי (0) והאיבר האדיש הכפלי (1)

2. היא מהווה בעצמה שדה ביחס לפעולת החיבור והכפל המוגדרות על $\mathbb{F}$.

נדבר היום על הקבוצה Z_n. היא נקראת "קבוצה" ולא "שדה" כי היא לא שדה לכל n. הגדרה של חיבור וחיסור בקבוצה:

$$a+b\equiv_{n}(a+b)\,(mod\ n)$$

$$a\cdot b\equiv_{n}(a\cdot b)\,(mod\ n)$$

דוגמה 2. ב-Z_6:

$$5+4\equiv_{6}9\equiv_{6}3$$

$$5 \cdot 4 \equiv_6 20 \equiv_6 2$$

מתי Z_n שדה?

- ראינו בעבר שאם $\mathbb{F}$ שדה $\Leftarrow$ $a \cdot b = 0$ אם ורק אם $a = 0$ או $b = 0$)
  - אם n לא ראשוני, לדוגמא $n = 6$, מתקיים: $2 \cdot 3 \equiv_6 0$ אבל $2 \not\equiv_6 0$ וגם $3 \not\equiv_6 0$
- נהוג לסמן שעבור n ראשוני (מסומן p) מתקיים Z_pשדה.

דוגמה 3. פתרו את המשוואות הבאות מעל Z_5:

1. $x + 3 = 2$

(א) $x + 3 = 2 \ \backslash + (-3) \ mod \ 5$

$$x + 3 = 2 \ \backslash + (-3) \ mod \ 5 \equiv_5 2$$

$$x + 3 = 2 \ \backslash + 2$$

$$x = 4$$

2. $3x = 3$

$$3x = 3 \ \backslash \cdot (-3) \ mod \ 5$$

$$3x = 3 \ \backslash \cdot \left(3^{-1}\right) mod \ 5 \equiv_5 2$$

$$3x = 3 \ \backslash \cdot 2$$

$$x = 6$$

3. $x^2 = 1$ יוצא לפי הטבלה למטה ש-$x = 1$ או $x = 4$.

טבלה של כפל (מודולו 5) ב Z_5:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

4. ל $x^2 = 3$ אין פיתרון.

דוגמה 4. חשבו מעל Z_5:

1. $3 + (4+2) \cdot 4$

$$3 + (4+2) \cdot 4 \equiv_5 3 + 1 \cdot 4 \equiv_5 7 \equiv_5 2$$

(א) עדיף שלא, אבל אפשר גם לעשות את החשבון ב-$\mathbb{R}$ ולהמיר בסוף: $3 + (4+2) \cdot 4 \equiv_5 27 \equiv_5 2$

2. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \equiv_5 3 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 3^{-1} \equiv_5 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \equiv_5 2 + 4 \equiv_5 1$$

דוגמה 5. מערכות משוואת של יותר מנעלם אחד ב-Z_p. פתור את המשוואת הבאות מעל Z_3:

1. $2x + y = 0$, $x + y = 1$

(א) נחבר את שתי המשוואת ביחד:

$$1 + 0 = 2x + y + x + y$$

$$1 + 0 = 3x + 2y$$

(ב) נמצא את y

$$1 = 2y \quad \backslash \cdot 2^{-1} \equiv_3 2$$

$$2 = y$$

(ג) נציב את y במשוואה כדי לקבל את x:

$$x+2=1 \quad \backslash+(-2) \equiv_3 1$$

$$x=2$$

תרגיל 6. יהי הפולינום $p(x)=x^3-1$.

(א) מצא שורשים מעל $\mathbb{R}$.

(ב) מצא שורשים ב-$\mathbb{Z}$

(ג) מצא שורשים מעל Z_5

(ד) מצא שדה שבו לפולינום יש שורש נוסף שהוא לא 1 (לא שדה $\mathbb{C}$). ופרקו את הפולינום לגורמים לינארים מעל השדה הזה.

פתרון 7.

(א) יש כמה דרכים: אפשר לעשות ניחוש אינטליגנטי או אפשר לעשות על פי נוסחת כפל מקוצר ל-a^3-b^3 ונקבל:

$$p(x)=x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

מעל $\mathbb{R}$, x^2+x+1 הוא לא פריק ולכן השורש היחיד הוא 1.

(ב) אם בכל $\mathbb{R}$ אין עוד שורשים חוץ מ-1, גם ב-$\mathbb{Z}$ לא יהיו עוד שורשים מכיוון ש-$\mathbb{Z}$ היא תת קבוצה של $\mathbb{R}$.

(ג) השיטה למצוא שורשים בZ_p היא להציב את כל האפשרויות אחת אחת:

- ניצור טבלה של כל הערכים האפשריים של x^3 בשדה Z_5 ונקבל:

איברי Z_5 =	1	2	3	4	0
$x^3=$	1	3	2	4	0

- לכן, הפיתרון היחיד למשוואה $x^3-1=0$ הוא $x=1$
- אפשר גם לפרק את הפולינום ב-$\mathbb{R}$ כמו שעשינו ואז להיצב את כל האפשרויות אחד אחד.

(ד) ננסה את Z_7. נציב מספרים ונגלה ש-1 הוא שורש, גם 2 הוא שורש. מכיוון שהמעלה היא 3, יש שלושה שורשים ולכן ניתן לסמן את הורש השלישי ב-a ולייצג את $p(x)$ כך (האפשרות הראשונה היא כתיבה לא נכונה אך היא נועדה רק בשביל ההבנה):

$$p(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$$

$$p(x)\equiv_7(x+6)(x+5)(x+(a \ mod \ 7))$$

אפשר לעשות חילוק ארוך מעל Z_7 אך אנחנו נציב עוד מספרים ונגלה ש-4 הוא השורש האחרון.

נושא שני: פולינומים והוכחות נוסחאות וייטה

משפט 8. עבור פולינום $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, אם השורשים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ אז מתקיים:

1. $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\frac{-a_{n-1}}{a_n}$
2. $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n=(-1)\frac{a_0}{a_n}$

הוכחה. עבור $n=3$

- נסמן $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ והשורישם יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$
- אם הפולינום מתפרק, הוא שווה:

$$p(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$$

$$p(x)=a(x-\alpha_1)\left(x^2-(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_2\cdot\alpha_3\right)$$

- נפתח סוגריים שוב ונקבל:

$$=ax^3-a(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+a(\alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_3+\alpha_2\cdot\alpha_3)x-a\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3$$

- קיבלנו שני פולינומים שווים אחד לשני, כלומר שכל המקדמים שלהם שווים זה לזה:
  - $a=a$
  - $b=-a(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$
  - $c=a(\alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_3+\alpha_2\cdot\alpha_3)$
  - $d=-a\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3$
- יוצא ש- $-\frac{b}{a}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$
- וגם יוצא ש- $(-1)^3\frac{d}{a}=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3$
  - $a\neq 0$ כי המקדם המוביל לא יכול להיות 0.

■

הערה. הערה: יש גם נוסחאות וייטה מורחבות.

הוכחה. ההוכחה עבור המקרה הכללי משתמשת בקומבינטוריקה:

- יהי הפולינום:

$$p\left(x\right)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_{1}x+a_{0}$$

– עם השורשים

$$\alpha_{1},\alpha_{2},\ldots,\alpha_{n}$$

- לפי המשפט היסודי של האלגברה, אפשר לכתוב את הפולינום כך ואז להשתמש בקומבינטוריקה כדי לקבל:

$$\begin{aligned}p\left(x\right)&=a_{n}\cdot\left(x-\alpha_{1}\right)\cdot\left(x-\alpha_{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\alpha_{n}\right)\\&=a_{n}\cdot x^{n}-a_{n}\left(\alpha_{1}+\alpha_{2}+\ldots\alpha_{n}\right)\cdot x^{n-1}+\ldots a_{n}\left(-1\right)^{n}\cdot\alpha_{1}\cdot\alpha_{2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n}\end{aligned}$$

נשוואה מקדמים ונקבל:

$$a_{n-1}=-a_{n}\left(\alpha_{1}+\alpha_{2}+\ldots+\alpha_{n}\right)$$

$$a_{0}=\left(-1\right)^{n}\cdot a_{n}\cdot\left(\alpha_{1}\cdot\alpha_{2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n}\right)$$

■

דוגמה 9. תרגיל שהיה במבחן (שילוב של מרוכבים ופולינומים)

- יהי $p\left(x\right)=x^{5}+a_{3}x^{3}+a_{2}x^{2}+ax+a_{0}$ פולינום עם מקדמים ממשיים.
  – נתון ש- $1+i$ הוא שורש מריבוי 2.
- **צ"ל:** מצאו את:
  1. a_{0}
  2. את a_{1},a_{2},a_{3}

פתרון 10.

- נתון שהמקדמים ממשיים. לכן אם $1+i$ שורש מריבוי 2, אז גם $1+\left(-i\right)$ הוא שורש מריבוי 2 לפי משפט.
- (הערה: כשמסתכלים על מקדמים של פולינום, חשוב להסתכל על a_{n},a_{n-1},a_{0}. בתרגיל הזה $a_{n-1}=0$ וזה לא במקרה)
- לפי וייטה מתקיים:

$$\left(1+i\right)+\left(1+i\right)+\left(1-i\right)+\left(1-i\right)+\alpha=-\frac{a_{4}}{a_{5}}=-\frac{0}{1}$$

$$4+\alpha=0$$

$$\alpha=-4$$

- בנוסף:

$$(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)\cdot\alpha=(-1)^5\cdot\frac{a_0}{a_n}$$

$$2\cdot2\cdot(-4)=-\frac{a_0}{1}$$

$$16=a_0$$

- כדי למצוא את a_1,a_2,a_3, צריך לכתוב את הפולינום כך:

$$p(x)=1\cdot\underbrace{(x-(1+i))(x-(1+i))}_{=(x^2-2x+2)}\underbrace{(x-(1-i))(x-(1-i))}_{=(x^2-2x+2)}(x+4)$$

$$\begin{aligned}p(x)&=\left(x^4-2x^3+2x^2-2x^3+4x^2-4x+2x^2-4x+4\right)(x+4)\\&=x^5-8x^3+24x^2-28x+16\end{aligned}$$

תרגיל 11.

מצאו את השורשים של $p(z)=z^6+4z^4+16iz^2+64i$

פתרון 12.

אפשר להוציא גורם משותף כך ש:

$$z^4\left(z^2+4\right)+16i\left(z^2+4\right)$$

$$\left(z^4+16i\right)\quad\underbrace{\left(z^2+4\right)}_{=(z+2i)(z-2i)}$$

מעבירים לייצוג טריגונומטרי:

$$z^4 = -16i = 16cis\left(270\right)$$

$$z^4 = \sqrt[4]{16}cis\left(\frac{270+360k}{4}\right)$$

ומקבלים $z^4 = 2\cdot cis\left(\frac{270}{4}+90k\right)$ עבור $k=0,1,2,3$

תרגיל 13. מצאו את סכום ומכפלת השורשים מסדר 5 של $4+5i$.

פתרון 14.

- דרך א' - נמצא את שורש $\sqrt[5]{4+5i}$. מקבלים $r=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$ ויוצא ש- $tan\left(\beta\right)=\frac{5}{4}$. זו לא דרך טובה.
- דרך ב' - השורשים מסדר 5 הם הפתרונות של המשוואה $z^5=4+5i$ שהם גם הפתרונות של $z^5-\left(4+5i\right)=0$ שהם גם שורשי הפולינום $p\left(z\right)=z^5-\left(4+5i\right)$.
  - נסמן את השורשים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$
  - לפי וייטה מתקיים:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_5 = -\frac{a_4}{a_5} = 0$$

  - וגם מתקיים:

$$\begin{aligned}\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_5 &= \left(-1\right)^5\frac{a_0}{a_5}\\ &= \left(-1\right)^5\frac{\left(-\left(4+5i\right)\right)}{1}\end{aligned}$$

מסקנה 15. אם לוקחים מספר מרוכב ומוצאים את השורשים שלו מסדר n, סכום השורשים שלו תמיד שווה 0.
מכפלת השורשים שלו a אם n אי זוגי, והיא תהיה $-a$ אם n זוגי.
במילים אחרות: יהי a מספר מרוכב ו- $n\geq 2$. סכום השורשים מסדר n של a הוא 0.
מכפת השורשים מסדר n של a היא $a\cdot\left(-1\right)^{n+1}$

מומלץ לעשות את ההוכחה לבד, כמו שעשינו בתרגיל הקודם ולכתוב a במקום $\left(4+5i\right)$ ולכתוב n במקום 5 בחזקה.

שורשי היחידה מסדר n:
השורשים מסדר n של 1.
כלומר, $\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{1cis\left(0\right)}=1cis\left(\frac{0+360k}{n}\right)$
סכום n השורשים = 0.
מכפלת n השורשים שווה $\left(-1\right)^{n+1}\cdot 1$

אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 5 - הילה (104166)

שם: איל שטיין

November 14, 2022

נושא השיעור: מטריצות

- אפשר לחבר מטריצות רק אם הן מאותו הסדר.
- כפל בסקאלר פירושו לכפול את כל האיברים במטריצה בסקאלר.
- מטריצה שכל האיברים שלה '0' נקראת מטריצת האפס.
- A מטריצה סימטרית אם היא מטריצה ריבועית ששווה לA^t. או לכל ij מתקיים $a_{ij} = a_{ji}$.
- A ריבועית תיקרא אנטי סימטרית אם $A^t = -A$. או לכל i, j מתקיים $a_{ij} = -a_{ji}$. האלכסון צריך להיות אפס (אלא אם כן מדברים על Z_2 שבו כל מספר שווה למינוס שלו - כלומר 1 שווה -1).
- A ריבועית תיקרא משולשת עליונה אם לכל $i > j$ מתקיים $a_{ij} = 0$.

דוגמה 1. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} = 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} = 0 & a_{32} = 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ - . a_{ii} הוא איבר באלכסון. כאשר $i > j$ אנחנו מתחת לאלכסון. החלק ה"מעניין" הוא מעל האלכסון כי כל מה שמתחת לאלכסון הוא אפס. לכן המטריצה הזו נקראת מטריצה עליונה.

למה 2. הוכח או הפרך: A, b סימטריות מאותו סדר.

א. $A + B$ סימטרית

ב. $A - B$ סימטרית

ג. אם A, B אנטי סימטריות מאותו דבר, האם $A + B$ או $A - B$ אנטי סימטריות? (צריך להפריד למקרה של Z_2).

הוכחה. **א.**

- נסמן $C = A + B$. **צ"ל:** לכל i, j מתקיים $c_{ij} = c_{ji}$
- לפי הגדרת החיבור, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- מכיוון ש-A סימטרית, $a_{ij} = a_{ji}$ מכיוון ש-B סימטרית, $b_{ij} = b_{ji}$
  - כלומר, $a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$
- בגלל הגדרת החיבור: $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$

– נציב ונקבל: $c_{ij}=c_{ji}$. יוצא ש-C סימטרית.

■

הוכחה. **ב.**

- ההוכחה היא בדיוק אותו הדבר כמו סעיף א' רק נסמן $C=A-B$.

■

תרגיל 3. נניח ש-A,B משולשות עליונות מאותו דבר. האם $A+B$ משולשת עליונה?

הוכחה. נוכיח שהטענה נכונה:

- נסמן $C=A+B$. צ"ל: לכל $i>j$ מתקיים $c_{ij}=0$
- לפי הגדרת החיבור, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.
  – מכיוון שA,B משולשת עליונה, $a_{ij}=0$ וגם $b_{ij}=0$
- לכן C היא משולשת עליונה.

■

תזכורת:

חוקי חיבור מטריצות:

1. $A+B=B+A$ קומוטטיביות בחיבור
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ אסוציאטיביות בחיבור
3. $A+'0'=A$ (כאשר '0' היא מטריצת האפס) קיום אדיש חיבורי
4. $A+(-A)='0'$ קיום נגדי

חוקי כפל בסקאלר:

1. $\alpha(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$
2. $(\alpha+\beta)A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
3. $(\alpha\cdot\beta)A=\alpha(\beta\cdot A)=\beta(\alpha\cdot A)$
4. $1\cdot A+A$

חוקי טרנספוז:

1. $(A+B)^t=A^t+B^t$
2. $(\alpha A)^t=\alpha\cdot A^t$
3. $(A^t)^t=A$
4. $(AB)^t=B^tA^t$

תרגיל 4. הוכיחו שכל מטריצה ריבועית ניתן לכתוב (באופן יחיד) כסכום של מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי סימטרית.

הוכחה. ■

- ניקח מטריצה A ונכתוב אותה $A=\overbrace{\frac{1}{2}\left(A+A^{t}\right)}^{=B}+\overbrace{\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)}^{=C}$
- נוכיח ש$B=A+A^{t}$ היא תמיד סימטרית:
  - נעשה טרנספוז לשני הצדדים:

$$B^{t}=\left(\frac{1}{2}\left(A+A^{t}\right)\right)^{t}$$

$$B^{t}=\frac{1}{2}\left(A+A^{t}\right)^{t}$$

$$B^{t}=\frac{1}{2}\left(A^{t}+A^{t^{t}}\right)$$

$$B^{t}=\frac{1}{2}\left(A^{t}+A\right)$$

$$B^{t}=\frac{1}{2}\left(A^{t}+A\right)=B$$

$$B^{t}=B$$

- נוכיח ש$C=\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)$ היא תמיד אנטי סימטרית:
  - נעשה רנספוז לשני הצדדים באותה צורה:

$$C=\left(\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)\right)^{t}$$

$$C=\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)^{t}$$

$$C=\frac{1}{2}\left(A^{t}-A^{t^{t}}\right)$$

$$C=\frac{1}{2}\left(A^{t}-A\right)$$

$$C=-\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)$$

* מכיוון $C^t=-C$ הוכחנו ש-C היא אנטי סימטרית.

- הוכחנו שכל מטריצה ניתנת לכתיבה כסכום של מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי סימטרית.
- נוכיח את היחידות של צורת הכתיבה. נניח שיש שתי דרכים לכתוב את B (סימטרית) ואת C (אנטי סימטרית) ונראה שהן אותה הדרך:
  - כלומר, ניתן לכתוב $A=B_1+C_1=B_2+C_2$
    * $B_1-B_2=C_1+C_2$
      · אם אנחנו לא ב-Z_2, B_1-B_2 היא סימטרית ו-C_1+C_2 היא אנטי סימטרית לפי הטענות שהוכחנו בתחילת השאלה.
      · B_1-B_2 היא גם אנטי סימטרית כי יש שוויון בינה ובין המטריצה C_1+C_2 שהיא אנטי סימטרית.
      · C_1+C_2 היא גם סימטרית כי יש שוויון בינה ובין המטריצה B_1-B_2 שהיא סימטרית.
- טענת עזר: המטריצה היחידה שהיא גם סימרטית היא 0. כלומר, $A\in\mathbb{F}$ $(\mathbb{F}\neq Z_2)$ אם A סימטרית וגם אנטי סימטרית אז $A=0$.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 6 - הילה

שם: איל שטיין | ת"ז: 208622142

November 14, 2022

נושאי השיעור: הגדרת כפל מטריצות, פעולות דירוג

נושא ראשון: הגדרת כפל מטריצות

הגדרה 1. יהי A,B כך שמספר העמודות של A שווה למספר השורות של B. כלומר, $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$ מתקיים.
הסדר הכללי של C הוא $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

דוגמה 2. נניח $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\4&0&0&2\\1&5&3&6\end{pmatrix}$ ניתן לכפול AB ולקבל את $C_{2\times4}$.

- $C_{12}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot5\end{pmatrix}=16$
- $C_{23}=\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=(4\cdot2+5\cdot0+3\cdot6)=26$
- הסבר על למה משתמשים בסיגמא:

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1}&a_{i2}&a_{i3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\b_{3j}\end{pmatrix}=(a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

תרגיל 3. הוכח/הפרך: אם $A\cdot B=0$, האם בהכרח $A=0$ או $B=0$?

- הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{AB}$
  * מתקיים $AB \neq 0$ אבל $A \neq 0$ וגם $B \neq 0$.

- נביא דוגמא נוספת כדי להראות שלא צריך אפסים במטריצה בשביל שהכפל שלהן יצא 0:
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$
  - $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

תרגיל 4. אם A^2 היא מטריצת האפס, האם זה אומר ש$A = 0$?

פתרון 5.

- הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
    * $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- נביא דוגמא נוספת:
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

הערה 6. I היא מטריצת היחידה. האלכסון שלה מורכב רק מ-1 וכל שאר האיברים שלה הם 0.

מתקיים בה:

1. $IA = AI = A$
2. $A_{m\times n} \cdot I_{n\times n} = A$
3. $I_{m\times m} \cdot A = A$

תרגיל 7. אם $AB = AC$, גם $A, B, C \neq 0$ וגם $A \neq I$. האם זה אומר ש-$B = C$?
פיתרון:

- הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
  - דוגמא נוספת:
    * נתון ש- $AB = AC$ ולכן $AB - AC = 0$. כלומר, $A(B - C) = 0$

* עכשיו אפשר לבחור את A באופן אקראי, לחפש מטריצה שמאפסת אותה ואז ליצור את B ואת C על ידי חיבור מטריצות.
  · לדוגמא, $A=\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}$

משפט 8. חוקי כפל מטריצות:

1. $A\left(B+C\right)=AB+AC$
2. $\left(B+C\right)A=BA+CA$
3. $\left(AB\right)C=A\left(BC\right)=ABC$
4. $I\cdot A=A\cdot I=A$

תרגיל 9. האם $BA=AB$?

פיתרון: (כשמקבלים שאלה כזו צריך לקחת דוגמא כללית ולא דוגמא של 1 ו-0, לדוגמא $\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$. בשאלה הזו לא צריך לחשב את כל האיברים אלא רק את הראשון בשביל לקבל אינטואיציה)

- מבחינת ההגדרה:
  - יכול להיות ש-$A_{2\times3},B_{3\times5}$ ואז במקרה הזה AB מוגדר אך BA לא מוגדר.
  - עוד מבחינת ההגדרה, יכול להיות $A_{2\times3},B_{3\times2}$ ואז במקרה הזה $\left(AB\right)_{2\times2}$ ו-$\left(BA\right)_{3\times3}$
  - המקרה היחיד בו ייתכן שמתקיים $AB=BA$ הוא אם שתיהן ריבועיות מאותו הסדר.

הגדרה 10. אם $AB=BA$ אז B ו-A נקראות <u>מתחלפות בכפל</u>.

תרגיל 11. אם A,B סימטריות מאותו סדר, האם גם AB סימטרית?
פיתרון:

- התשובה היא לא. נביא דוגמא נגדית:
  - $\underbrace{\begin{pmatrix}X&57\\44&X\end{pmatrix}}_{AB}=\underbrace{\begin{pmatrix}5&3\\3&9\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}7&4\\4&8\end{pmatrix}}_{A}$. נסמן X באלכסון כי בשביל לדעת האם מטריצה היא סימטרית לא מעניין אותנו מה יש באלכסון.
  - קיבלנו A סימטרית ו-B סימטרית אבל AB לא סימטרית.

תרגיל 12. אם A סימטרית, האם A^2 סימטרית?
פיתרון:

- הטענה נכונה. ברגע ש-A^2 מוגדר, זה אומר ש-A ריבועית.
- הוכחה: לפי חוקי טרנספוז, $\left(A^2\right)^t=\left(A\cdot A\right)^t=A^t\cdot A^t$ ומכיוון שמטריצה סימטרית נתון ש-$A^t=A$.

- יוצא ש $A^2 = A \cdot A = A^t \cdot A^t = (A \cdot A)^t = \left(A^2\right)^t$. כלומר, $\left(A^2\right)^t = A^2$ ולכן גם A^2 היא סימטרית.

טיפ: אם יש $((AB)\,C)^t = C^t \cdot (AB)^t = C^t \cdot B^t \cdot A^t$

תרגיל 13. אם A, B משולשות עליונות מאותו סדר, האם AB גם היא משולשת עליונה?

פיתרון:

- הטענה נכונה. אינטואיציה: $C = \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & \end{pmatrix}$. לדוגמא, יוצא ש $c_{21} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. מומלץ לעבור על הדוגמא בבית כדי לקבל אינטואיציה.
- נוכיח (אפשר גם להוכיח לפי חוקי טרנספוז):
  - A, B משולשות עליונות מסדר $n \times n$.
  - נסמן $C = AB$
  - **צ"ל:** לכל $i > j$ מתקיים $c_{ij} = 0$
  - הגדרת הכפל: לכל $\boldsymbol{i > j}$ מתקיים:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

  - מכיוון שלקחנו $i > j$, וגם $j > k$יוצא ש $i > k$
  - מכיוון שB משולשת עליונה, $b_{kj} = 0$ כי הוא איבר מתחת לאלכסון של B.
  - בגלל ש-A מטריצה משולשת עליונה, כאשר $1 \leq k \leq i-1$ (כלומר $k < i$) מתקיים ש $a_{ik} = 0$ (כי זה איבר מתחת לאלכסון של A).
  - לכן, אפשר להציב $a_{ik} = 0$ וגם $b_{kj} = 0$ בהגדרת הכפל ונקבל:
  -

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

  - קיבלנו שכל איבר שמתחת לאלכסון יהיה שווה אפס.

מסקנה 14. שתי מסקנות מהתרגיל:

1. אם A, B משולשות תחתונות מאותו סדר, זה אומר $A \cdot B$ היא גם משולשת תחתונה.
2. אם A, B אלכסוניות אז גם AB אלכסונית (חיבור של משולשת עליונה ומשולשת תחתונה).

תרגיל 15. להוכיח בבית.

נתונות מטריצות אלכסוניות:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$

א. צ"ל: $D_1 \cdot D_2 = D_2 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$

ב. צ"ל (נובע באינדוקציה מ-א'): $(D_1)^m = \begin{pmatrix} \alpha_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n^m \end{pmatrix}$

הגדרה 16. אם A מטריצה ריבועית אז$trace\,(A)$הוא סכום איברי האלכסון של A. נסמן כך: $tr\,(A) = trace\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

תרגיל 17. הוכיחו $trace\,(AB) = trace\,(BA)$

פיתרון:

- ניקח בתור דוגמא שתי מטריצות ריבועיות: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$
  - $trace\,(AB) = AB_{11} + AB_{22}$
    - $\sum_{i=1}^{3} a_{1k}b_{k1} = AB_{11} = (b_{11} \cdot a_{11} + b_{21} \cdot a_{12} + b_{31} \cdot a_{13})$
    - $\sum_{i=1}^{3} a_{2k}b_{k2} = AB_{22} = (b_{12} \cdot a_{21} + b_{22} \cdot a_{22} + b_{32} \cdot a_{23})$
    - $trace\,(AB) = \sum_{m=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{3} a_{mk}b_{km} \right)$
  - $trace\,(BA) = BA_{11} + BA_{22} + BA_{33}$
    - נעשה אותו דבר גם בצד הזה ונקבל שוויון (בגלל תכונה של סכומים, שהם קומוטטיביים)

- **הוכחה:**
  - $trace\,(AB) = \sum_{m=1}^{n} (AB)_{m\times m}$
    - $\sum_{m=1}^{n} (AB)_{m\times m} = \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{km} \right)$
  - $trace\,(BA) = \sum_{m=1}^{n} (BA)_{m\times m}$
    - $\sum_{m=1}^{n} (BA)_{m\times m} = \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{km}a_{mk} \right)$
  - מכיוון שחיבור וכפל של מספרים $\mathbb{R}$ הוא קומוטטיבי, אפשר להחליף את $b_{km}a_{mk}$ ב-$a_{mk}b_{km}$ ונקבל ששני הביטויים שווים.

הוכחה דומה היא ההוכחה ל $(AB)^t = B^tA^t$

נושא שני - פעולות דירוג:

הגדרה 18. מטריצה מדורגת - A נקראת מדורגת אם מספר האפסים משמאל משורה לשורה הולך וגדל.

הגדרה 19. איבר מוביל - האיבר הראשון בשורה שהוא לא 0 נקרא "איבר מוביל" (אפשר גם לקרוא לו איבר פותח)

דוגמה 20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

הגדרה 21. מטריצה קנונית - A נקראת מטריצה קנונית אם:

1. A מטריצה מדורגת
2. כל איבר מוביל ב-A הוא 1.
3. מעל ומתחת כל איבר מוביל יש רק אפסים (אם יש איברים מעל או מתחת).

דוגמה 22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - זוהי מטריצה מדורגת. 1 הוא האיבר המוביל היחיד שלה ומתחתיו ומעליו יש רק אפסים.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 7 - הילה

שם: איל שטיין

November 16, 2022

נושא השיעור: דירוג מטריצות, פעולות אלמנטריות ומערכות משוואות

בשיעור הקודם דיברנו על כפל מטריצות. בסוף השיעור הקודם הגדרנו מטריצה מדורגת ומטריצה קנונית

חלק ראשון - דירוג מטריצות:

בשביל לדרג יש שלוש פעולות אלמנטריות:

1. החלפת שורה i בשורה j מסומנת כך: $\overset{Swap\,R_i,R_i}{\Rightarrow}$
2. כפולה של שורה i בסקלאר α מסומנת כך: $\overset{\alpha R_i \to RIj}{\Rightarrow}$
   (א) יש לשים לב ש-α לא יכולה להיות שווה אפס.
3. הוספה של כפולב של שוה jב-β לשורה i מסומנת כך: $\overset{R_i+\beta R_j\to R_i}{\Rightarrow}$

<u>שיטת דירוג המטריצות (יש אינסוף מטריצות מדורגות):</u>

1. יוצרים איבר ראשון שהוא איבר מוביל (כלומר שונה מ-0)
2. מאפסים את כל האיברים שמתחתיו.
3. עוברים לשורה הבאה, מסדרים איבר מוביל ומאפסים את כל מה שמתחתיו.
4. עוברים לשורה הבאה ומסדרים איבר מוביל. מאפסים את כל מה שמתחתיו.

תרגיל 1. דרגו את $A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&3&4&5\\&1&3&4\end{pmatrix}$

פיתרון:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&4&6&5\\2&1&3&4\end{pmatrix}\overset{Swap\,R_2,R_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}2&4&6&5\\0&1&2&3\\2&1&3&4\end{pmatrix}\overset{R_3-R_1\to R_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}2&4&6&5\\0&1&2&3\\0&-3&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&4&6&5\\0&1&2&3\\0&-3&-3&-1\end{pmatrix} \overset{R_3+3R_2\to R_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}2&4&64&5\\0&1&2&3\\0&-3&-3&-1\end{pmatrix} \overset{R_3+3R_2\to R_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}2&4&6&5\\0&1&2&3\\0&0&3&8\end{pmatrix}$$

כעת המטריצה מדורגת.

נהפוך אותה למטריצה קנונית, כלומר נהפוך כל איבר מוביל ל-1 ונאפס את כל מה שבעמודה שלו:

$$\begin{pmatrix}2&4&6&5\\0&1&2&3\\0&0&3&8\end{pmatrix} \overset{\begin{cases}\frac{1}{2}R_1\to R_1\\ \frac{1}{3}R_3\to R_3\end{cases}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&2&3&\frac{5}{2}\\0&1&2&3\\0&0&1&\frac{8}{3}\end{pmatrix} \overset{R_1-2R_2\to R_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&0&-1&-\frac{7}{2}\\0&1&2&3\\0&0&1&\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-\frac{7}{2}\\0&1&2&3\\0&0&1&\frac{8}{3}\end{pmatrix} \overset{\begin{cases}R_1+R_3\to R_1\\ R_2-2R_3\to R_2\end{cases}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{6}\\0&1&0&-\frac{7}{3}\\0&0&1&\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

זו מטריצה קנונית כי בכל עמודה שיש איבר מוביל יש רק אפסים (חוץ מהאיבר המוביל).

מטריצה קנונית לא צריכה להיות מורכבת כולה מ-1 או 0.

תרגיל 2. $A = \begin{pmatrix}0&2&2\\1&4&1\\2&6&3\\3&5&4\end{pmatrix}$

נסתכל על האיבר הראשון. הוא לא איבר מוביל ולכן נחליף שורות כדי שהאיבר המוביל בעמודה בראשונה יהיה 1:

$$\begin{pmatrix}0&2&2\\1&4&1\\2&6&3\\3&5&4\end{pmatrix} \overset{Swap\, R_1,\, R_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&4&1\\0&2&2\\2&6&3\\3&5&4\end{pmatrix} \overset{\begin{cases}R_3-2R_1\to R_3\\ R_4-3R_1\to R_4\end{cases}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&4&1\\0&2&2\\0&-2&1\\0&-7&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&1\\0&2&2\\0&-2&1\\0&-7&1\end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_2\to R_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&1\\0&-2&1\\0&-7&1\end{pmatrix} \overset{\begin{cases}R_1-4R_2\to R_1\\ R_3+2R_2\to R_3\\ R_4+7R_2\to R_4\end{cases}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&3\\0&0&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&3\\0&0&8\end{pmatrix}\overset{\frac{1}{3}R_3\to R_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&8\end{pmatrix}\overset{\begin{cases}R_1+3R_3\to R_1\\R_2-R_3\to R_2\\R_4-8R_3\to R_4\end{cases}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

חלק שני - הקשר בין דירוג ובין מערכות משוואות ליניאריות:

תרגיל 3. פתרו:

1. $x_1+x_2+x_3=7$
2. $2x_2+4x_3=2$
3. $x_1+x_3=5$

- ניצור מטריצה שהיא מטריצת המקדמים:

$$\begin{pmatrix}(x_1)&(x_2)&(x_2)\\1&1&1\\0&2&4\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}$$

- נכתוב את המטריצה בתור מטריצה מורחבת:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\0&2&4&2\\1&0&1&5\end{array}\right]$$

- נדרג:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\0&1&2&1\\0&0&2&-1\end{array}\right]$$

- כלומר, קיבלנו

$$2x_3=-1 \qquad (1)$$

$$x_1+x_2+x_3=7 \qquad (2)$$

$$x_2 + 2x_3 = 1 \tag{3}$$

- – ממשוואה (1) נובע ש $x_3 = -\frac{1}{2}$
- – נציב את x_3 ב(3) ונקבל $x_2 = 2$
- – נציב את שניהם ב(1) ונקבל $x_1 = 5\frac{1}{2}$

- נכתוב את התשובות בתור וקטור: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

הערה 4. כשפותרים מערכת משוואת, צריך לוודא שאין סתירה בין המשוואות. כשנדרג את המטריצה נגלה אם יש סתירה. נעשה דוגמה שבה נגיע לסתירה:

דוגמה 5. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right]$

- דירגנו את המטריצה וקיבלנו $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$
  - – נסתכל על השורה השלישית. אין אף ביטוי $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4$ ששווה למספר -1 ולכן יש סתירה במערכת.

הערה 6. כשפותרים מערכת, השלב הראשון הוא לוודא שאין סתירה.

דוגמה 7. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$

- דירגנו את המטריצה וקיבלנו: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right]$
- שלב ראשון - נבדוק אם יש סתירה, ולא נראה שיש.
- שלב שני - נבדוק כמה מקדמים מובילים יש. יש לנו שלושה מקדמים מובילים. מכיוון שיש ארבע נעלמים (x_1, x_2, x_3, x_4) נגיד שמספר המקדמים החופשיים שלנו הוא $4 - 3 = 1$
- שלב שלישי - נבחר את האיבר החופשי להיות t. במקרה שלנו, $x_4 = t$
  - – נחפש את x_3:

$$-x_3 + 4t = 2$$

$$4t - 2 = x_3$$

- נציב ונקבל:

$$x_2 = 4t + 2$$

$$x_1 = -t$$

לכן אפשר לכתוב:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- זה אומר שלמערכת הזו יש אינסוף פתרונות.

• לסיכום:

- דירגנו וראינו שאין סתירה.
- בדקנו מה הקשר בין מספר המובילים למקדמים החופשיים.
- מכיוון שיש יותר נעלמים ממספר המקדמים המובילים לפי משפט למטריצה הזו יש אינסוף פתרונות.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 8 - הילה

שם: איל שטיין

November 21, 2022

נושא השיעור: מערכות משוואות ליניאריות, שאלות הבנה, קשר בין הומוגנית ללא הומוגנית.

נושא ראשון - מערכות משוואות ליניאריות - המשך

דוגמה 1. דוגמא נוספת למערכת משוואות עם אינסוף פתרונות:

- ניקח מערכת ונדרג אותה:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 5 & 3 & 19 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

- נסמן $x_2 = t$, $x_4 = s$ ונקבל:

$$3x_3 + s = 9$$

$$x_3 = 3 - \frac{1}{3}s$$

  – וגם:

$$x_1 + t + 3 - \frac{1}{3}s + s = 5$$

$$x_1 = +t - \frac{2}{3}s + 2$$

– נכתוב את הפתרונות כך

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -t-\frac{2}{3}s+2 \\ t \\ 3-\frac{1}{3}s \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; t,s\in\mathbb{F} \right\}$$

הגדרה 2. דרגת החופש = (מספר המקדמים המובילים) ו- (מספר הנעלמים).

סימון ו- $rank\left(A\right)=r\left(A\right)$ היא מספר השורות השונות מ-0 לאחר דירוג.

הערה 3. $r\left(A\right)$ = מספר המקדמים המובילים.

מסקנה 4. סיכום ו- מערכת משוואות לא הומוגנית, מהצורה $A\underline{x}=\underline{b}$ (כאשר $b\neq0$):

1. מדרגים את המערכת המורחבת לצורה מדורגת.
2. בודקים אם יש סתירה במערכת המדורגת (כלומר אם יש שורת אפסים שיש לה פיתרון שונה מאפס)
3. אם במערכת אין סתירה, או שיש פיתרון יחיד או שיש אינסוף פתרונות:
   (א) אם מספר המקדמים המובילים ($r\left(A\right)$) = מספר הנעלמים $\Leftarrow$ יש פיתרון יחיד.
   (ב) אם מספר המקדמים המובילים ($r\left(A\right)$) < מספר הנעלמים $\Leftarrow$ יש יותר מפתרון אחד (ואם השדה אינסופי אז יש אינסוף פתרונות).

מסקנה 5. סיכום ו- במערכת הומוגנית מהצורה $A\underline{x}=0$:

- מכיוון שהשורה b תמיד תהיה 0 לא משנה איזה פעולה נעשה עליה, לא תהיה סתירה במערכת הזו.
  – בנוסף, תמיד יהיה לה לפחות פיתרון אחד שהוא $\underline{x}=0$ ולכן למערכת כזו אין סתירה אף פעם.

1. מדרגים את המערכת המורחבת לצורה מדורגת.
2. אם מספר הנעלמים $=r\left(A\right)\Leftarrow$ יש פיתרון יחיד.
3. אם מספר הנעלמים $>r\left(A\right)\Leftarrow$ יש לה אינסוף פתרונות (בשדה אינסופי).

דוגמה 6. מערכת הומוגנית עם פיתרון יחיד:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right]$$

דוגמה 7. מערכת הומוגנית עם אינסוף פתרונות:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- מספר הנעלמים = 3
- מספר האיברים המובילים = $r(A) = 2$
  - מכיוון שמספר הנעלמים גדול ממספר האיברים המובילים, יש אינסוף פתרונות.
- נכתוב את הפיתרון הכללי כך:

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{F} \right\}$$

הערה 8. אם מדרגים מערכת מורחבת ומקבלים שורת אפסים, השורה הזו לא מועילה לנו בכלל:

דוגמה 9. נניח שדירגנו מטריצה וקיבלנו: $\left[\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ו- לא לומדים מזה שום דבר.

מסקנה 10. אם יש מערכת שיש בה דרגת חופש, זה אומר שאין בה סתירה ויש בה יותר נעלמים מאשר מקדמים מובילים.

תרגיל 11. קבעו לכל ערך של k מתי למערכת הבאה:

1. אינסוף פתרונות
2. פתרון יחיד
3. סתירה (כלומר אין פיתרון)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right]$$

פיתרון:

- ניקח את המערכת ונדרג אותה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right]$$

- יש אפשרות לחלק למקרים (של מה קורה אם $k=0$ ומה קורה אם $k \neq 0$) אבל עדיף שלא לחלק למקרים אם זה אפשרי ולכן נחליף את שורות 2 ו-3 כדי ליצור איבר מוביל בשורה 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right] \overset{R_3-kR_2 \to R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 5-\frac{k(k+3)}{2} & 4-2k \end{array}\right]$$

– נבחן את המטריצה שיצאה לנו:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5-\frac{k(k+3)}{2}} & 4-2k \end{array}\right]$$

* כאשר הביטוי $5-\frac{k(k+3)}{2}=0$ ייתכן שיש סתירה במערכת:

$$5-\frac{k(k+3)}{2}=0$$

$$5=\frac{k(k+3)}{2}$$

$$k=-5 \ OR \ k=2$$

· כלומר, אם $k \neq -5, 2$ אז אין סתירה במערכת.

· במקרה כזה מספר הנעלמים = 3 = $r(A)$ ⇐ פיתרון יחיד

- כאשר $k=-5$ יוצא שיש סתירה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right]$$

• כאשר $k=2$ יוצא שאין סתירה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

– ויוצא שמספר הנעלמים הוא 3 ו-$r\left(A\right)=2$, לכן יש אינסוף פתרונות.

מסקנה 12. ננסח את צורת המחשבה שלנו בתרגיל הזה: נדרג את המטריצה ונבדוק מתי האיברים המובילים לא שווים ל-0. ככה נדע

תרגיל 13. קבעו לכל ערך של a האם למערכת:

1. פיתרון יחיד
2. אינסוף פתרונות
   (א) קבעו מה היא דרגת החופש
3. סתירה
4. פתרו עבור מקרה שבו דרגת החופש היא 2

נתונה המערכת:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 1 & 0 & a-1 & a+1 & a+3 \\ 2 & a^2-a & a^2+a-2 & 2a+2 & 3a+6 \end{array}\right]$$

פתרון:

• נדרג:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 1 & 0 & a-1 & a+1 & a+3 \\ 2 & a^2-a & a^2+a-2 & 2a+2 & 3a+6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & a^2-a & a^2+a+2 & 2a-2 & 3a-2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & a^2-a & a^2+a+2 & 2a-2 & 3a-2 \end{array}\right] \overset{R_4-R_2\to R_4}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 2a-2 & 2a-2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & a^2-a & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 2a-2 & 2a-2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \boldsymbol{a^2-a} & a^2-a & 0 & a \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a-1} & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- נבדוק מתי המקדמים המובילים הם לא 0:

$$a^2 - a = 0$$

$$a = 0, 1$$

  – כלומר, כאשר $a \neq 1, 0$ המקדמים המובילים הם לא 0.
  – יוצא שמספר הנעלמים =4 ו$r(A) = 3$ ולכן יש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

- אם $a = 1$ יש סתירה כי:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a-1} & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- אם $a = 0$ נקבל:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  – צריך לדרג שוב כדי לקבל:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  – קיבלנו שמספר הנעלמים הוא 4 ו-$r(A) = 2$ ולכן יש אינסוף פתרונות עם שתי דרגות חופש.

– נכתוב את הפיתרון הכללי עבור דרגת החופש = 2:

$$x_2 = t$$

$$x_4 = s$$

$$x_3 = 1 - s$$

$$x_1 = 4 - 2s$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2s \\ t \\ 1-s \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{F} \right\}$$

תרגיל 14. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2)(a-3) \end{array}\right]$

קבעו מתי יש: פיתרון יחיד, אינסוף פתרונות, סתירה.

פיתרון:

- עבור $a \neq 1, 2, 3$ יש סתירה.

- עבור $a=1,2,3$:

$a=1$	$a=2$	$a=3$
נקבל מטריצה לא מדורגת ונצטרך לדרג אותה שוב:	יש סתירה בשורה השלישית	אין סתירה
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$		מספר הנעלמים $= r(A)$
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$		
הצבנו את הפרמטר, דירגנו שוב וראינו שיש סתירה.		

תרגיל 15.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha^2+\alpha+7 & \alpha\beta+\alpha+7 & \alpha^2+\beta-3 \\ \alpha+\beta & \alpha^2+\alpha b & \alpha\beta+\beta^2+\beta-3 & \alpha^2+\alpha\beta+\alpha+3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha^2+\alpha+7 & \alpha\beta+\alpha+7 & \alpha^2+\beta-3 \\ \alpha+\beta & \alpha^2+\alpha b & \alpha\beta+\beta^2+\beta-3 & \alpha^2+\alpha\beta+\alpha+3 \end{array}\right] \underset{R_3-(\alpha+\beta)R_1\to R_3}{\overset{R_2-\alpha R_1\to R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & \alpha+7 & \alpha+7 & \beta-3 \\ 0 & 0 & \beta-3 & \alpha-3 \end{array}\right]$$

- נבדוק מה קורה כאשר $\beta=3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & \alpha+7 & \alpha+7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \end{array}\right]$$

  - אם $\alpha=3$ אין סתירה ותהיה דרגת חופש אחת.
  - אם $\alpha\neq 3$ יש סתירה

- נבדוק מה קורה אם $\beta\neq 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & * & \alpha \\ 0 & \alpha+7 & \alpha+7 & \beta-3 \\ 0 & 0 & * & \alpha-3 \end{array}\right]$$

  - אם $\alpha=-7$ נקבל סתירה.
  - אם $\alpha\neq -7$ אין סתירה, מספר הנעלמים$=3=r(A)$. לכן יש פיתרון יחיד.

- לסיכום:

1. יש פיתרון יחיד כאשר: $\{(\alpha,\beta) \mid \alpha \neq -7,\ \beta \neq 3\}$
2. יש סתירה כאשר $\{(\alpha,3) \mid \alpha \neq 3\} \cup \{(-7,\beta) \mid \beta \neq 3\}$
3. יש אינסוף פתרונות כאשר $\alpha = 3, \beta = 3$ ויש בו דרגת חופש אחת.

נושא שני - שאלות הבנה:

תרגיל 16.

א.כמה פתרונות יש למערכת $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$?

ב.האם התשובה תהיה זהה אם $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$?

א. פיתרון:

- בשביל שיתקיים הכפל, A צריך להיות מסדר 2×3.
  - מדובר במערכת הומוגנית ולכן למערכת יש או פיתרון יחיד או אינסוף פתרונות.
- הדרגה של A היא לכל היותר 2 כי יש לו רק 2 שורות.
- מספר הנעלמים הוא 3.
  - יוצא שמספר הנעלמים $= 3 > 2 \geq r(A)$.
- לכן, למערכת יש אינסוף פתרונות.

ב. פיתרון:

- המערכת כבר לא הומוגנית ולכן ייתכן שיש בה סתירה.
- לכן, התשובה יכולה להשתנות מסעיף א', תלוי מה האיברים של A.
  - לדוגמא, $A = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right]$

תרגיל 17.

כמה פתרונות יש למערכת $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ כאשר נתון: כי $\begin{pmatrix}-\pi\\8\\3\\19\end{pmatrix}$ מקיים

$$A\begin{pmatrix}-\pi\\8\\3\\19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

פיתרון:

- בשביל שהכפל יהיה מוגדר, A צריכה להיות מסדר 3×4.
- נתון שיש וקטור כלשהו שמקיים את המערכת ולכן אין סתירה במערכת. כלומר, יש לפחות פיתרון אחד.
- $r(A) \leq 3$ כי ל-A יש 3 שורות.
- יש 4 נעלמים.
- מכיוון שמספר הנעלמים $= 4 > 3 \geq r(A)$, מתקיים שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

נושא שלישי - הקשר בין מערכת הומוגנית למערכת לא הומוגנית:

דוגמה 18. נקח את המערכת ההומוגנית $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ ואת המערכת $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

- נרשום את הפיתרון הכללי של המערכת ההומוגנית:

$$x_2 = t$$

$$x_3 = 0$$

$$x_1 + 2t + 0 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = -2t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \middle| \; t \in \mathbb{F} \right\}$$

- והפיתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית יהיה:

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;\; \middle| \; t \in \mathbb{F} \right\}$$

משפט 19. המשפט שראינו בהרצאה.
הפיתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית = פיתרון כללי של המערכת ההומוגנית + פיתרון פרטי כלשהו של המערכת הלא הומוגנית.

טענה 20. אם $\overline{y}$ הוא פיתרון של $Ax = 0$ אז לכל $t \in \mathbb{F}$ גם $t\overline{y}$ הוא פיתרון של $Ax = 0$

הוכחה.

- $A\cdot(t\overline{y})=t\cdot A\overline{y}$
  - ומכיוון ש $A\overline{y}=0$ מתקיים ש $A\cdot(t\overline{y})=0$

■

טענה 21. אם $\overline{y}_1,\overline{y}_2$ הם פתרונות של הלא הומוגנית, אז $\overline{y}_1-\overline{y}_2$ הוא גם פיתרון של המערכת הלא הומוגנית.

הוכחה.

- $A\left(\overline{y}_1-\overline{y}_2\right)=\overbrace{A\overline{y}_1}^{=b}-\overbrace{A\overline{y}_2}^{=b}=b-b=0$

■

תרגיל 22. נתונה המערכת:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & a_1-2c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2-2c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3-2c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_4-2c_4 \end{array}\right]$$

א. נתון: $r\left(A\right)=2$ ו- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא פיתרון שלה
מצאו את הפיתרון הכללי של המערכת.

פיתרון:

- אם A היא מערכת הומוגנית, דרגת החופש היא 1 כי $r\left(A\right)-3=1$
- נסתכל במערכת ונראה ש- $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ הוא פיתרון של המערכת A.
- וגם נתון ש- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא פיתרון ל-A
- לכן, פיתרון אחד של המערכת הלא הומוגנית יהיה:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

- הפיתרון הכללי יהיה:

$$t\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ \mid t\in\mathbb{F}$$

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | תרגול 9 - הילה

שם: איל שטיין

November 23, 2022

נושא השיעור: מערכת משוואות מעל שדה סופי, מרחבים וקטורים

נושא ראשון - דוגמא למערכת משוואות מעל שדה סופי:

דוגמה 1. פתור מעל Z_7"

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 8 & 2 \end{array}\right]$$

- דבר ראשון. מעל Z_7, $1 = 8$. (חשוב שהתשובה הסופית תהיה על Z_7 ונשים לב שאסור לכפול או לחלק בכפולות של 7):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_3-3\cdot R_1\to R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

– נכתוב את המשוואות של x_1 עד x_4כדי לקבל את הפיתרון הכללי של המערכת מעל Z_7:

$$x_4 = t \tag{1}$$

$$4x_3 + 2t = 6 \tag{2}$$

$$4x_3 = 6 + 5t \ \backslash \cdot 2$$

$$x_3 = 5 + 3t \ \backslash 2$$

$$2x_2 + 4(5 + 3t) + 3t = 6 \tag{3}$$

$$2x_2 = 6t \ \backslash \cdot 4$$

$$x_2 = 3t$$

$$x_1 + 2 \cdot 3t + 3(5 + 3t) + 4t = 1 \tag{4}$$

$$x_1 + 6t + 1 + 2t + 4t = 1$$

$$x_1 = 2t$$

– הפיתרון הכללי של המערכת יהיה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \ \mid t \in Z_7 \right\} \tag{5}$$

– מכיוון שיש דרגת חופש אחת, מספר הפתרונות הוא $7^1 = 7$. (אם היינו מדברים על Z_p אז היו $p^{dargot\ hofesh}$ פתרונות)

תרגיל 2. מתוך בוחן אמצע:

- המערכת היא מעל Z_5:

1.

$$x_1 + x_3 = 0$$

.2

$$x_1 + (a+4)\,x_2 + a^2 x_3 = 2b$$

.3

$$x_1 + a^2 x_3 = a + 1 + 4b$$

- א. עבור אלו ערכי $a, b \in Z_5$ למערכת יש:
  - פתרון יחיד
  - יותר מפתרון אחד (בכל מקרה ציינו כמה פתרונות למערכת)
  - סתירה
- ב. הציבו במערכת $b = 0$ ומצאו את כל ערכי $a \in Z_5$ שלהם למערכת פתריון יחיד המקיים $x_3 = 1$. רשמו פתרון אחד כזה.

פתרון:
סעיף א':

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+4 & a^2 & 2b \\ 1 & 0 & a^2 & a+1+4b \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+4 & a^2 & 2b \\ 1 & 0 & a^2 & a+1+4b \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{a+4} & a^2+4 & 2b \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2+4} & a+1+4b \end{array}\right]$$

- נתחיל בשורה האחרונה ונשאל מתי $a+4$ מתאפס ומתי a^2+4 מתאפס.
  - קיבלנו שהמקדמים המובילים מתאפסים ב$a = 1$ וב$a = 4$. כלומר, כאשר $a \neq 1$ וגם $a \neq 4$. במקרה כזה מספר הנעלמים$= 3 = r(A)$ ולכן יהיה פתרון יחיד.
- נבדוק מה קורה כאשר $a = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 4b \end{array}\right]$$

  - אם $b \neq 0$ יש סתירה.

- נשים לב שאם $b=0$ אז יש פתרון. במקרה כזה, $r\left(A\right)=2$. מספר הנעלמים הוא 3 ולכן יש דרגת חופש אחת. מספר הפתרונות הוא $5^{1}=5$

- נבדוק מה קורה כאשר $a=1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2b\\
0 & 0 & \mathbf{0} & 2+4b
\end{array}\right]$$

  - אפשר לראות שלכל b יש סתירה.

- סיכום:
  - פתרון יחיד: רק כאשר $a\neq1$ וגם $a\neq4$, כלומר $a=2,3$ לכל b.
  - יותר מפתרון אחד: כאשר $a=4$ ו$b=0$. במקרה כזה יש דרגת חופש אחת ולכן יש 5 פתרונות.
  - סתירה: או כאשר $a=4$ ו-$b\neq0$ או כאשר $a=1$ לכל b

סעיף ב':

- נציב $b=0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 0\\
0 & \boldsymbol{a+4} & a^{2}+4 & 0\\
0 & 0 & \boldsymbol{a^{2}+4} & a+1
\end{array}\right]$$

  - נבדוק מתי $x_{3}=1$:
    * בסעיף א' אמרנו שאם $b=0$ אז יש סתירה $a=1$ ולכן לא נבדוק את $a=1$
    * נציב $a=0$ במערכת:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 0\\
0 & \mathbf{0+4} & 0+4 & 0\\
0 & 0 & \mathbf{0+4} & 0+1
\end{array}\right]$$

      · קיבלנו:

$$4x_{3}=1\ \backslash\cdot4$$

$$x_{3}=4$$

      · כלומר, $a=0$ לא מקיים.

* נציב $a=2$ במערכת:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{2+4} & 4+4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{4+4} & 2+1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \end{array}\right]$$

- קיבלנו ש$3x_3=3$, כלומר $x_3=1$.
- נמצא פיתרון אפשרי של המערכת:

$$x_2=2$$

$$x_1=4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* נציב $a=3$ בשורה השלישית במערכת:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & \mathbf{4+4} & 3+1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

- נקבל $3x_3=4$, כלומר $x_3=3$. זה לא עובד ולכן נשתמש ב$a=2$.

נושא שני - מרחבים וקטוריים:

נסמן ארבעה מושגים:

- V = קבוצה של איברים
- $\mathbb{F}$ = שדה

- $\oplus$ = פעולת חיבור של שני איברים בV
- $\odot$ = פעולה של כפל בסקלאר מ$\mathbb{F}$, באיבר מ-V

בשביל ש-V תיקרא **"מרחב וקטורי מעל** $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות $\oplus$ ו- $\odot$", יש 10 תנאים שצריכים להתקיים.

תרגיל 3. נתונה הרביעייה הבאה:

- קבוצה - $V=\{(a,b) \quad a,b,\in\mathbb{R}\}$
- שדה - $\mathbb{F}=\mathbb{R}$
- פעולת החיבור $\oplus$ מוגדרת: $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2)$
- פעולת כפל בסקלאר מוגדרת: פעולת החיבור $\oplus$ מוגדרת $\alpha\,(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\alpha y)$

פתרון:

1. **סגירות לחיבור:**
   - יהי $(x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\in V$.
   - לפי הגדרת החיבור: $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=\left(\overbrace{x_1+x_2-1}^{\in\mathbb{R}},\overbrace{y_1+y_2}^{\in\mathbb{R}}\right)$
2. **קומוטטיביות לחיבור:** לכל $a,b\in V$ מתקיים $a\oplus b=b\oplus a$ - להוכיח לבד
   - יהי $(x_{1,}y_{,1})\,,(x_{2,}y_2)\in V$
3. **אסוציאטיביות לחיבור:** לכל $a,b,c\in V$ מתקיים $a\oplus(b\oplus c)=a\oplus b\oplus c$ - להוכיח לבד
   - לכל $(x_{1,}y_{,1})\,,(x_{2,}y_2)\,,(x_3,y_3)\in V$

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | תרגול 10 - הילה

שם: איל שטיין

November 28, 2022

נושא השיעור: עשרת התנאים של מרחב וקטורי, מרחבים וקטורים ידועים, תתי-מרחב וקטוריים

נושא ראשון - עשרת התנאים לקיום של מרחב וקטורי:

בשיעור הקודם דיברנו על מרחבים וקטוריים והגדרנו ארבעה דברים ("רביעיה"):
אמרנו שצריך לבדוק עשר תכונות.

תרגיל 1. תרגיל משיעור קודם - נתונה הרביעייה הבאה:

- קבוצה - $V=\{(a,b)\ \ a,b,\in\mathbb{R}\}$
- שדה - $\mathbb{F}=\mathbb{R}$
- פעולת החיבור $\oplus$ מוגדרת: $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2)$
- פעולת כפל בסקלאר מוגדרת: פעולת החיבור $\oplus$ מוגדרת $\alpha(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\alpha y)$

פיתרון:

1. **סגירות לחיבור:**
   - יהי $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in V$.
   - לפי הגדרת החיבור: $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=\left(\overbrace{x_1+x_2-1}^{\in\mathbb{R}},\overbrace{y_1+y_2}^{\in\mathbb{R}}\right)$
2. **קומוטטיביות לחיבור:** לכל $a,b\in V$ מתקיים $a\oplus b=b\oplus a$ -
   - יהי $(x_{1,}y_{,1}),(x_{2,}y_2)\in V$
   - $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2)$
   - $(x_2,y_2)\oplus(x_1,y_1)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2)$
3. **אסוציאטיביות לחיבור:** לכל $a,b,c\in V$ מתקיים $a\oplus(b\oplus c)=a\oplus b\oplus c$ - להוכיח לבד
   - יהיו $(x_{1,}y_{,1}),(x_{2,}y_2),(x_3,y_3)\in V$

– צ"ל: $(x_1,y_{,1}) \oplus ((x_2,y_2) \oplus (x_3,y_3)) = (x_1,y_{,1}) \oplus (x_2,y_2) \oplus (x_3,y_3)$

$$
\begin{aligned}
(x_1,y_{,1}) \oplus ((x_2,y_2) \oplus (x_3,y_3)) &= (x_1,y_{,1}) \oplus (x_2+x_3-1, y_2+y_3) = (x_2+x_3-1+x_1-1, y_2+y_3+y_1) \\
&= (x_1+x_2+x_3-2, y_1+y_2+y_3)
\end{aligned}
$$

4. **קיום איבר אדיש לחיבור:** לכל $a \in V$ מתקיים $a +' 0' = a$
   - נוכיח ש-$(1,0) \in V$ הוא האדיש:
     – $(x_1,y_1) \oplus (1,0) = (x_1+1-1, y_1+0) = (x_1,y_1)$
5. **קיום איבר נגדי לחיבור:** לכל $a \in V$ קיים $-a'$ כך ש $a \oplus' -a' =' 0'$
   - יהי $(x,y) \in V$. נוכיח ש$(2-x,-y)$ הוא הנגדי שלו:
     – $(x,y) \oplus (2-x,-y) = (1,0)$
     – טיוטה: נדרוש ש-(x',y') יקיים $(x,y) \oplus (x',y') = (1,0)$ ואז נקבל $x + x' - 1 = 1$ וגם $y + y' = 0$. נפתור את המשוואות כדי למצוא את (x',y').
6. **סגירות לכפל בסקאלר:** לכל $a \in V$ וכל $\alpha \in \mathbb{F}$ צריך שיתקיים $\alpha \odot a \in V$
   - יהי $(x,y) \in V$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$.
     – מתקיים: $\alpha \odot (x,y) = \left(\overbrace{\alpha x - \alpha - 1}^{\in\mathbb{R}}, \overbrace{\alpha y}^{\in\mathbb{R}}\right) \in V$
7. **דיסטריבוטיביות:** לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ וכל $a,b \in V$ מתקיים $\alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot a \oplus \alpha \odot b$
   - יהיו $\alpha \in \mathbb{R}$ ו- $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in V$
   - נבחן את:

$$\alpha \odot ((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2))$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \odot ((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) &= \alpha \odot (x_1+x_2-1, y_1+y_2) \\
&= (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 - 2\alpha + 1, \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2)
\end{aligned}
$$

   - נבחן את:

$$\alpha \odot (x_1,y_1) \oplus \alpha \odot (x_2,y_2)$$

     – נקבל:

$$\alpha \odot (x_1,y_1) \oplus \alpha \odot (x_2,y_2) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 - 2\alpha + 1, \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2)$$

8. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $a\in V$ צריך להתקיים $(\alpha+\beta)\odot a=(\alpha\odot a)\oplus(\beta\odot a)$ - להוכיח לבד
   - יהי $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ויהי $(x,y)\in V$.
   - צ"ל: $(\alpha+\beta)\odot(x,y)=(\alpha\odot(x,y))\oplus(\beta\odot(x,y))$
9. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $a\in V$ מתקיים $(\alpha\cdot\beta)\odot a=\alpha\odot(\beta\odot a)=\beta\odot(\alpha\odot a)$ - להוכיח לבד
   - יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ויהיה $(x,y)\in V$
   - צ"ל: $(\alpha\cdot\beta)\odot(x,y)=\alpha\odot(\beta\odot(x,y))=\beta\odot(\alpha\odot(x,y))$
10. לכל $a\in V$ ולכל $1_{\mathbb{F}}\in\mathbb{F}$ (איבר היחידה של השדה $\mathbb{F}$) צריך שיתקיים $1_{\mathbb{F}}\odot a=a$
    - יהי $(x,y)\in V$ ו-$1\in\mathbb{R}$.
    - $1\odot(x,y)=(1\cdot x-1+1,1\cdot y)=(x,y)$

- **לסיכום התרגיל:** כל עשר התכונות מתקיימות ולכן V מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות $\odot$ ו-$\oplus$.

הערה. בתרגילים, לפעמים יקחו את פעולת החיבור הרגילה אך משנים את פעולת הכפל. במקרה כזה, חמשת התכונות מתקיימות וצריך לבדוק את חמשת התכונות האחרונות (לדוגמא סגירות לכפל בסקאלר)

תרגיל 2. נתון:

- $V=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$.
- $\mathbb{F}=\mathbb{R}$
- פעולת הכפל $\oplus$ מוגדרת כך: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$
- פעולת הכפל בסקלאר מוגדר כך: $\alpha\odot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2a\\\alpha b\end{pmatrix}$

צ"ל: האם V מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות?
פיתרון:

- נתחיל בלבדוק את תכונות 8-9. ונתחיל לבדוק עם מספרים שהם לא 1 או 0.
  - $\alpha=3$, $\beta=7$, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$
  - $(\alpha+\beta)\odot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=10\odot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\50\end{pmatrix}$
  - $\alpha\odot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\oplus\beta\odot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}116\\50\end{pmatrix}$

  * קיבלנו שאין שוויון ולכן תכונה מספר 8 לא מתקיימת. כלומר, V הוא לא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עם הפעולות הנ"ל.

תרגיל 3.

נתון:

- $V=\mathbb{R}_2[x]$ - אוסף כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים שהמעלה שלהם היא 2
- $\mathbb{F}=\mathbb{R}$
- חיבור יוגדר כרגיל: $\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)+\left(b_2x^2+b_1x+b_0\right)=\left(a_2+b_2\right)x^2+\left(a_1+b_1\right)x+b_0+a_0$
- אך הכפל בסקאלר יוגדר אחרת: $\alpha\cdot\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)=a_2x^2+\alpha\cdot a_1x+a_0$

צ"ל: האם V מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הללו?

פיתרון:

- מכיוון שהחיבור מוגדר כרגיל, ככל הנראה חמשת התכונות הראשונות יתקיימו.
  - לכן, נתחיל לבדוק מחמשת התכונות האחרונות:
    * ניקח $p(x)=3x^2+5x-1$ וניקח $\alpha=2$, $\beta=3$.
    * נבדוק מה הערך של $(\alpha+\beta)p(x)$ ונקבל $3x^2+25x-1$.
    * נבדוק מה הערך ל$\alpha\cdot p(x)+\beta\cdot p(x)$ ונקבל $6x^2+25x^2-2$.
    * מכיוון שאין שוויון, תכונה מספר 8 לא מתקיימת.

נושא שני - מרחבים וקטורים ידועים:

- מרחב וקטורי ידוע ראשון:
  - $V=\mathbb{F}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}\mid x_j\in\mathbb{F}\right\}$ והשדה הוא או $\mathbb{F}$ או תת שדה של $\mathbb{F}$ (כדי שהסגירות לא תיפגע).
  - מעכשיו, פעולות החיבור וכפל בסקלאר הן כמו של וקטורים רגילים.
    * דוגמא: נניח שניקח $V=\mathbb{R}^n$ אך $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. במקרה כזה לא תתקיים סגירות.
    * אך אפשר לקחת $V=\mathbb{C}^n$ ו- $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ כי עדיין תתקיים סגירות.
- מרחב וקטורי ידוע שני:
  - $V=\mathbb{F}_n[x]$ - כלומר אוסף כל הפולינומים ממעלה n עם מקדמים ב-$\mathbb{F}$ או בתת שדה של $\mathbb{F}$.
  - אפשר גם לדבר על $V=\mathbb{F}[x]$, ללא הגבלה במעלה n
- מרחב וקטורי ידוע שלישי:
  - $V=M_{m\times n}(\mathbb{F})$ - אוסף כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם איברים ב-$\mathbb{F}$. השדה הוא $\mathbb{F}$ הוא תת שדה של $\mathbb{F}$.
  - הפעולות הן הפעולות הרגילות של מטריצות.
- מרחב וקטורי ידוע רביעי - <u>פונקציות ממשיות</u>:
  - (פונקציות ממשיות רציפות $V=(f:R\to R$ כאשר השדה יהיה $\mathbb{R}$.
  - הפעולות חיבור וכפל בסקלאר הן חיבור פונקציות רגיל: $\left(f(x)+g(x)=(f+g)(x)\right)$ וכפל בסקלאר רגיל.

נושא שלישי - תתי מרחבים וקטוריים:

- תת קבוצה של מרחב וקטורי היא לאו דווקא תת מרחב וקטורי בפני עצמה עם אותן הפעולות.

דוגמה 4. $V = M^{2\times2}(\mathbb{R})$ כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

– ניקח $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in V \right\} \subseteq V$.

  * זוהי תת קבוצה של V.

– מכיוון ש: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \notin V$

  * יוצא שהיא לא מקיימת סגירות לחיבור ולכן היא לא תת מרחב וקטורי.

הגדרה 5.

- יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ידוע (כלומר עם פעולות ידועות).
- יהי $W \subseteq V$ תת קבוצה.
- W נקרא **תת-מרחב וקטורי** של V אם W מרחב וקטורי בפני עצמו עם אותן הפעולות של V

משפט 6.

- יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ידוע.
- $W \subseteq V$ מהוו תת מרחב וקטורי של V אם מתקיימים:

1. $0 \in W$
2. לכל $w_1, w_2 \in W$ מתקיים $w_1 + w_2 \in W$
3. לכל $w_1 \in W$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים $\alpha \cdot w_1 \in W$

הערה 7. יש הגדרות שקולות נוספות:

- לדוגמא, במקום הסעיף הראשון אפשר לומר $W \neq \emptyset$. היתרון בהגדרה הזו היא שכשהפעולות חיבור וכפל בסקלאר רגילים קל למצוא את איבר האפס. אם מדובר בפעולות שהן לא רגילות אז ההגדרה
- או לדוגמא, אפשר לומר במקום שני התנאים האחרונים: לכל $u, v \in W$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in W$

הערה 8. לפעמים יבקשו מאיתנו להוכיח שקבוצה מסוימת היא תת מרחב. צריך לשים לב להתייחס לפעולות שעליו הוא מוגדר ולא סתם לומר שהוא מרחב וקטורי או תת מרחב וקטורי.

הגדרה 9. רכיבים של מרחב וקטורי נקראים **"וקטורים"**

תרגיל 10.

- **נתון:** יהי $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ עם פעולות חיבור וכפל רגילים של מטריצות.
- **צ"ל:** מי מהבאים הוא תת מרחב וקטורי של V?

1. $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 2a+3b-4c=0 \right\}$ - כלומר, כל המטריצות ב-V כך שפעמיים האיבר השמאלי למעלה ועוד שלוש פעמים הרכיב השני פחות ארבע פעמים האיבר השלישי שווה 0.
2. $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 2a+3b-4c=1 \right\}$
3. $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 2a+3b-4c<0 \right\}$
4. $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 2a+3b-4c\leq 0 \right\}$
5. $W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a\cdot b=0 \right\}$
6. $W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a^2+b^2=0 \right\}$
7. $W_7 = (A \in V \mid A = A^t)$

1. **הוכחה:**

(א) התשובה היא כן, W_1הוא אכן תת מרחב וקטורי של V מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות חיבור מטריצות וכפל בסקלאר.

i. מטריצת האפס $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$ כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ii. נוכיח שלכל $A, B \in W_1$ מתקיים $A+B \in W_1$

א'. נניח ש-$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in W$ וש- $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in W$ - הילה המליצה לכתוב את המטריצות Aו- B במלואן ולא רק לציין ש$A \in W$.

ב'. נוכיח ש: $A+B \in W$ כי:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1+}a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$$

ג'. לפי הגדרת הקבוצה: a, b, c מקיימים $2a+3b-4c=0$

ד'. ולכן:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{1+}a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \in W_1$$

iii. נוכיח שלכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $A \in W_1$ מתקיים $\alpha A \in W_1$:

א׳. נניח ש- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1$ $A =$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נוכיח ש-$\alpha A \in W_1$:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot c \\ \alpha \cdot b & \alpha \cdot d \end{pmatrix}$$

ב׳. לפי הגדרת הקבוצה: a, b, c מקיימים $2a + 3b - 4c = 0$ ולכן הם מקיימים גם $\alpha (2a + 3b - 4c) = 0$.

ג׳. כלומר, $\alpha \cdot A \in W_1$

(ב) נסכם: הראינו את שלושת התנאים של המשפט.

2. $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 2a + 3b - 4c = 1 \right\}$ לא תת מרחב וקטורי כי מטריצת האפס לא נמצאת בקבוצה.

3. $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 2a + 3b - 4c < 0 \right\}$ גם היא לא תת מרחב וקטורי כי מטריצת האפס לא נמצאת בקבוצה.

4. $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 2a + 3b - 4c \leq 0 \right\}$ - לא תת מרחב וקטורי.

(א) דוגמא נגדית: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in W_4$.

i. נכפיל בסקלאר $\alpha = -2$ ונקבל:

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \notin W_4$$

א׳. כלומר, אין סגירות לכפל בסקאלר ולכן אחד התנאים לא מתקיים.

5. $W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a \cdot b = 0 \right\}$ הוא לא תת מרחב.

(א) דוגמא נגדית:

i. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in W_5$ ו- $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in W_5$

ii. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \notin W_5$

iii. כלומר, לא מתקיימת סגירות לחיבור ולכן W_5 הוא לא תת מרחב וקטורי.

6. $W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a^2 + b^2 = 0 \right\}$ הוא כן תת מרחב מעל $\mathbb{R}$.

(א) להוכיח לבד שמטריצת האפס מתקיימת, יש סגירות לחיבור ולכפל בסקלאר.

i. לשים לב שמעל $\mathbb{C}$, W_6 הוא לא תת מרחב וקטורי כי $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in W_6$ וגם $B=\begin{pmatrix}i & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in W_6$ אבל $A+B\in W_6$.

7. הקבוצה $W_7=\left(A\in V\mid A=A^t\right)$ היא כן תת מרחב כי $W_7=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mid b-c=0\right\}$.

הוכחה. אם $V=M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ו-$W=\{A\in V\mid A=A^t\}$ אז W היא תת מרחב וקטורי של V

- $0\in W$
- נניח ש-$A,B\in W$ (כלומר $A=A^t$ וגם $B=B^t$)
  - נוכיח ש$A+B\in W$:
    * $\left(A+B\right)^t=A^t+B^t=A+B$ ולכן $A+B\in W$
- נניח $A\in W$ ו- $\alpha\in F$.
  - נוכיח ש$\alpha A\in W$
    * לפי חוקי טרנספוז: $\left(\alpha A\right)^t=\alpha A^t$
    * ומכיוון ש-$A=A^t$ מתקיים ש$\left(\alpha A\right)^t=\alpha A^t=\alpha A$
      · ולכן $\alpha A\in W$

■

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 11 - הילה

שם: איל שטיין

November 30, 2022

נושא השיעור: תתי-מרחבים וקטוריים, פעולות בין מרחבים וקטוריים.

בשיעור הקודם אמרנו שמספיק לבדוק שלוש תכונות בשביל שקבוצה תהיה תת מרחב של מרחב וקטורי: קיום וקטור האפס, סגירות לחיבור וסגירות לכפל בסקאלר.

הערה 1. תזכורת - קשר ליניארי הוא ביטוי מהצורה $3a+6b-9c=0$. המקדמים יכולים להיות כל מספר ממשי ולאו דווקא המספרים האלה.

נושא ראשון - תתי מרחב וקטוריים:

דוגמה 2. ניקח $V=R_2\left[x\right]$ מעל $\mathbb{R}$. כלומר, פולינומים.

1. אם $W_1=\left\{ ax^2+bx+c\ \ :\ \ 2a+3b-4c=0\right\}$ אז W_1 יהיה תת מרחב וקטורי

הוכחה. • פולינום האפס שייך ל-W_1 כי אם $a=b=c=0$ אז המשוואה מתקיימת.

- סגירות לחיבור -
  - ניקח $p\left(x\right)=a_2x^2+a_1x+a_0$ וניקח $q\left(x\right)=b_2x^2+b_1x+b_0$.
    - נחבר את $p\left(x\right)$ ואת $q\left(x\right)$ ונקבל:

$$p\left(x\right)+q\left(x\right)=\left(a_2+b_2\right)x^2+\left(a_1+b_1\right)x+\left(a_0+b_0\right)$$

· נבדוק האם המקדמים מקיימים את התנאי של W_1:

$$2\left(a_2+b_2\right)+3\left(a_1+b_1\right)+-4\left(a_0+b_0\right)$$

$$2a_2+2b_2+3a_1+3b_1-4a_0-4b_0$$

$$\underbrace{2a_2+3a_1-4a_0}_{\in W_1}+\underbrace{2b_2+3b_1-4b_0}_{\in W_1}$$

$$\underbrace{2a_2+3a_1-4a_0}_{\in W_1}+\underbrace{2b_2+3b_1-4b_0}_{\in W_1}=0+0$$

- סגירות לכפל בסקלאר:
  - נניח ש- $a_2x^2+a_1x+a_0\in W_1$.
  - נוכיח ש-$\alpha\cdot p(x)\in W_1$ על ידי כך שנכפיל ב-α ונראה שהתנאי של W_1 מתקיים.

■

2. אם $W_1=\left\{ax^2+bx+c\ :\ 2a+3b-4c=1\right\}$ אז W_1 לא יהיה תת מרחב וקטורי כי וקטור האפס לא נמצא
3. אם $W_1=\left\{ax^2+bx+c\ :\ a\cdot b\leq 0\right\}$ אז W_1 לא יהיה תת מרחב וקטורי

הערה 3. בשביל שקבוצה של פולינומים (או מטריצה) יהיו מרחב וקטורי צריך קשר ליניארי בין המקדמים (או האיברים במטריצה). אין הבדל בין פולינומים למטריצות, כי במטריצות מתמקדים רק במקדמים של הפולינום.

דוגמה 4. דוגמא לקשר ליניארי חבוי:

- $W_2=\{p(x)\in V\ \mid\ p(2)=p'(3)\}$
  - מכיוון ש-$p'(x)=2ax+b$ יוצא ש:
    * במילים אחרות אם מציבים $p(2)$ואם מציבים $p'(3)$ מקבלים: $W_2=\left\{ax^2+bx+c\ \mid\ 4a+2b+2c=6a+b\right\}$
      · ויש פה קשר ליניארי בין המקדמים. לכן נוכל להוכיח ש-W_2 הוא תת מרחב וקטורי.
- נוכיח שאם $V=\mathbb{F}_n[x]$ ו-$W=\{p(x):p(2)=p'(3)\}$
  1. פולינום האפס מקיימים $p(0)=p'(0)$
  2. נניח ש- $p(x)=W_2$ וש-$q(x)=W_2$.
     (א) נוכיח ש-$(p+q)(x)\in W_2$:

$$(p+q)(2)=p(2)+p(2)=p'(3)+q'(3)=(p+q)'(3)$$

  3. נניח ש-$p(x)\in W_2$. ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$.
     (א) בגלל חוקי פונקציות מתקיים: $(\alpha p)(2)=\alpha\cdot p(2)\overbrace{=}^{p\in W_2}\alpha\cdot p'(3)=(\alpha p')(3)$
     (ב) ולכן $(\alpha p)(x)\in W_2$

תרגיל 5. היה במבחן - $W=\{p(x)\in V:p(x)=p(x+1)\}$

- בטיוטה, ניקח דוגמא ממעלה 2 כדי לראות לפי האינטואיציה אם הקבוצה הזו היא תת מרחב:

– ניקח את

$$p\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$$

ואת

$$p\left(x+1\right)=a\left(x+1\right)^{2}+b\left(x+1\right)+c$$

– אם נפתח סוגריים, נקבל שהשוויון בין שני הפולינומים מתקיים כאשר:

$$a=a$$

$$b=2a+b$$

$$c=a+b+c$$

– יש פה קשר ליניארי ולכן לפי האינטואיציה מדובר בתת מרחב.

– נשאר להראות קיום פולינום האפס, סגירות לחיבור וסגירות כפל בסקאלר.

תרגיל 6. גם היה במבחן - $p\left(x\right)\in V=p'\left(x+1\right)$

• הדרך לפתור את התרגילים האלה היא לקחת פולינום ממעלה 2 ולראות אינטואיטיבית אם הקבוצה היא תת מרחב או לא.

נושא שני - פעולות בין תתי מרחבים:

• תזכורת: יהיו V מרחב וקטורי ו- U,W תתי מרחב וקטוריים שלו.

– איחוד - $U\cup W$ כל האיברים שנמצאים לפחות באחת מהקבוצות.

– חיתוך - $U\cap W$ כל האיברים שנמצאים גם בקבוצה הראשונה וגם בקבוצה השניה.

ראינו בהרצאה ש:

1. איחוד של מרחבים וקטוריים לרוב לא מרחב וקטורי (אלא אם כן הן מוכלות אחת בשנייה)

משפט 7. הוכחנו בהרצאה: כל חיתוך של תתי מרחבים וקטוריים הוא תמיד מרחב וקטורי.

• גם הקבוצה $\{0\}$ היא תמיד תת מרחב.

דוגמה 8. $V=\mathbb{R}^4$. ניקח את $U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}|x=y\right\}$ ואת $W=\left\{\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}|y=z\right\}\right\}$.

- בדוגמא הזו, האיחוד $U\cup W$ הוא לא תת מרחב וקטורי:
  - ניקח איבר שהוא נמצא ב-U ולא ב-W (הוא קיים בגלל הגדרת הקבוצות):
    * לדוגמא, $U \ni \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \underline{u}_1$ ו-$\underline{u}_1\notin W$.
  - ניקח איבר ב-W שלא נמצא ב-U:
    * $W \ni \begin{pmatrix}4\\5\\5\\0\end{pmatrix} = \underline{w}_1$ ו-$\underline{w}_1\notin U$.
  - נחבר ביניהם ונקבל:

$$\underline{u}_1+\underline{w}_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\5\\0\end{pmatrix}\notin U\cup W$$

    * כלומר, האיחוד לא סגור לחיבור.

משפט 9. $U\cup W$ איננו תת מרחב וקטורי של V אלא אם כן, $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.
(יש ניסוח פורמלי יותר למשפט, אך הניסוח הזה טוב יותר בשביל לזכור את הכלל של המשפט)

הגדרה 10. סכום של תתי מרחבים: $U+W=\{u_1+w_1 \mid w_1\in W, u_1\in U\}$.

מסקנה 11. הקבוצה של הסכום מכילה את כל האיברים ב-U מכיוון ש-W מכילה את איבר האפס

- לכן $U+W$ מכילה את $\underline{u}_1+\underline{0}$, כלומר מכילה את U
- ולכן $U+W$ מכילה את $\underline{w}_1+\underline{0}$, כלומר מכילה את W

משפט 12. $U+W$ תמיד תת מרחב וקטורי של V.

- המשפט נכון כי קבוצת הסכום מכילה את איבר האפס, היא סגורה לחיבור וסגורה לכפל בסקאלר.

בשיעור הבא נדבר על התכונה "סכום ישר".

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 12 - הילה

שם: איל שטיין

December 5, 2022

נושא השיעור: תתי מרחבים וקטוריים: סכום ישר, קומבינציה ליניארית, תת מרחב נפרש, תלות ואי תלות

נושא ראשון - סכום ישר:

דוגמה 1. בסוף השיעור הקודם הבאנו את הדוגמא:

- $V=\mathbb{R}^4$. ניקח את $U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}\middle|x=y\right\}$ ואת $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}\middle|y=z\right\}$.
- ראינו ש-$U\cup W$ הוא לא תת מרחב וקטורי.
- ראינו משפט לפיו סכום של תתי מרחבים הוא תת מרחב וקטורי של V.

טענה 2. $U+W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$

הוכחה. נראה הכלה דו כיוונית:

- <u>כיוון ראשון - צ"ל:</u> $U+W\subseteq\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$
  - ניקח איבר כללי ב-W, לדוגמא $\begin{pmatrix}x\\x\\y\\0\end{pmatrix}$ ואיבר כללי ב-U, לדוגמא $\begin{pmatrix}c\\d\\d\\0\end{pmatrix}$

* נקבל $U+W=\begin{pmatrix}x+c\\x+d\\y+d\\0\end{pmatrix}$ ומכיוון שהאיבר הזה (הכללי של $U+W$) מוכל בקבוצה, מתקיימת ההכלה הראשונה.

• <u>כיוון שני - צ"ל</u>: $U+W\subseteq\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$

– יהי $A=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\0\end{pmatrix}$.

* $$A=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\c-b+a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b-a\\c-a\\0\end{pmatrix}\in U+W$$

– הראנו את הכיוון השני של ההכלה.

■

הגדרה 3. סכום ישר

• יהא V מרחב וקטורי יהיו U,W תתי מרחבים של V.

• $U+W$ נקרא <u>**סכום ישר**</u> (ומסומן $U\oplus W$) אם כל $\underline{v}\in U+W$ ניתן לכתיבה <u>יחידה</u> כ- $\underline{v}=\underline{w}+\underline{u}$ כאשר $\underline{u}\in U$ ו-$\underline{w}\in W$.

משפט 4. $U+W$ הוא סכום ישר אם ורק אם $U\cap W=\{0\}$.
(המשפט הזה שימושי למקרה שבו אנחנו לא יודעים מה הסכום)

טענה 5. בתרגיל שלנו, $U+W$ הוא לא סכום ישר.

1. <u>דרך ראשונה - לפי הגדרה:</u>

• ניקח איבר בסכום ונכתוב את הסכום בשתי דרכים שונות כאיבר מ-U ואיבר מ-W.

• לדוגמא:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\8\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-5\\-5\\0\end{pmatrix}$$

- כלומר, כתבנו את $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$ בשתי דרכים שונות ולכן הסכום הוא לא ישר.

2. <u>דרך שנייה - לפי המשפט</u>:

- מכיוון ש- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ נמצא גם ב-U וגם ב-W, החיתוך הוא לא אפס ולכן הסכום הוא לא סכום ישר.

הערה 6. **סכום ישר של יותר שני תתי מרחבים:**

- יהי $U+W+S$ תת מרחב של V (שלושתם תתי מרחבים של V)
- אזי $U+W+S$ הוא סכום ישר אם ורק אם החיתוך בין כל וקטור לסכום של כל האחרים הוא $\{0\}$. כלומר מתקיימים שלושה ביטויים:
  - גם $U\cap(W+S)=\{0\}$
  - וגם $W\cap(U+S)=\{0\}$
  - וגם $S\cap(W+U)=\{0\}$

תרגיל 7. לתרגול עצמי: נסו לחשוב למה התנאי להערה לא יכול להיות שהחיתוך בין כל תת מרחב לתת מרחב אחר הוא אפס. כלומר למה התנאי לא יכול להיות:

- $U\cup S=\{0\}$ וגם $W\cup S=\{0\}$ וגם $U\cup W=\{0\}$

נושא שני - קומבינציה ליניארית (ק"ל):

תרגיל 8. האם הוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא קומבינציה ליניארית של $\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$?

פתרון:

- התשובה תהיה כן רק אם קיימים α,β כך שניתן לכתוב לכתוב את $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
  - נפתח את הביטוי למערכת משוואות ונקבל:

$$\begin{cases}1=4\alpha+7\beta\\2=3\alpha+8\beta\end{cases}$$

– נעביר למטריצה ונקבל: $\left[\begin{array}{cc|c}4 & 7 & 1\\ 3 & 8 & 2\end{array}\right]$.

* נדרג כדי להראות שקיים פיתרון למערכת (כדי להראות שצורת הכתיבה עובדת).
* נקבל במקרה הזה שאין סתירה ולכן הוקטור $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ הוא קומבינציה ליניארית של שני הוקטורים האחרים.

הערה 9. לפעמים יבקשו מאיתנו לפתור את מערכת המשוואות כדי להראות איך לכתוב את הקומבינציה הליניארית ולא רק שאפשר לכתוב אותה.

- במקרה שלנו אם נפתור את המערכת, נקבל ש- $\alpha=-\frac{6}{11}$, $\beta=\frac{5}{11}$.

תרגיל 10. קומבינציה ליניארית עם פולינומים:

- האם $p\left(x\right)=x^{2}+3x+4$ הוא ק"ל של $p_{1}\left(x\right)=x^{2}+x+1$, $p_{2}\left(x\right)=4x+8$, $p_{3}\left(x\right)=7x+3$?
- פתרון: בעצם שואלים אותנו האם קיימים α,β,δ כך שאם נשווה את שלושת הפולינומים כק"ל נקבל סקלארים שמקיימים את החיבור.
- נקבל שלוש מערכות משוואות עם α,β,δ, נעביר אותה למטריצה ונדרג כדי למצוא את הערכים של הסקאלרים.

תרגיל 11. ק"ל עם מטריצות:

- האם המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ היא ק"ל של המטריצות $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$?
  – בעצם שואלים האם קיימים סקלארים α,β כך ש $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\beta+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\alpha$?
- **פתרון:** ניצור מהמטריצות מערכת משוואות ונבדוק האם קיים לה פתרון.
  – אם קיים פתרון, זאת אומרת שA היא ק"ל.
  – אם לא קיים פתרון התשובה היא לא.

נושא שלישי - תת מרחב נפרש:

תזכורת מההרצאה:

הגדרה 12. קבוצה פורשת - $span$

- יהי V מרחב וקטורי ותהי קבוצה S קבוצת האיברים ב-V כך: $S=\{\underline{v}_{1},\underline{v}_{2},\ldots,\underline{v}_{k}\}\subseteq V$.
- אזי $span\left(S\right)=span\left\{ \underline{v}_{1},\underline{v}_{2},\ldots,\underline{v}_{k}\right\}$
  – כלומר, $span\left(S\right)=\left\{ \alpha_{1}\underline{v}_{1},\alpha_{2}\underline{v}_{2}\ldots,\alpha_{k}\underline{v}_{k}\mid\alpha_{1},\alpha_{2},\ldots,\alpha_{k}\in\mathbb{F}\right\}$
- במילים אחרות, $span$ הוא כל הצירופים הליניאריים של איברי S

משפט 13. $span\left(S\right)$ הוא תת מרחב וקטורי של V ו-$span\left(S\right)$ הוא תת המרחב הקטן ביותר שמכיל את S

תרגיל 14.

א. האם $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\in span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\}$?

- התשובה היא כן.

ב. האם $span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right\}^{=U}\subseteq span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\}^{=W}$?

$$\overbrace{span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right\}}^{=U}\subseteq \overbrace{span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\}}^{=W}$$

- ברמת העיקרון בשביל לומר שכן, נצטרך לקחת איבר כללי מהקבוצה השמאלית ולהראות שהוא תמיד נמצא בקבוצה הימנית.
  - אבל, בגלל המשפט ש$span\left(S\right)$ הוא תת המרחב הוקטורי הקטן ביותר שמכיל את S נאמר ש:
    - W הוא תת מרחב שמכיל את $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
      - לכן, לפי המשפט הוא מכיל גם את ה$span$ שלהם (שגם הוא תת מרחב)

ג. האם $\overbrace{span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right\}}^{=U}=\overbrace{span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\}}^{=W}$?

- התשובה היא שכן. נוכיח זאת על ידי הכלה דו כיוונית:
  - כיוון ראשון הראנו כבר בסעיף ב', שם ראינו -$U\subseteq W$.
  - <u>כיוון שני - $W\subseteq U$</u>:
    - נראה ש$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
      - נדרג ונראה שאין סתירה:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&4&1\\3&2&0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&4&1\\0&-10&-2\end{array}\right]$$

    - נראה ש $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\delta\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
      - נדרג ונראה שאין סתירה.
    - נראה ש$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\rho\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
      - שוב נדרג ונראה שאין סתירה.
    - כלומר, הוקטורים ב- W הם צ"ל של U.
      - מכיוון ש-$span$ מכיל את כל הצ"ל של הוקטורים שבו, מתקיים ש-$W\subseteq U$.

נושא רביעי - אי תלות ליניארית:

הגדרה 15. נאמר כי הקבוצה $\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\right\}$ בלתי תלוי ליניארית אם לכל $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ המקיימים $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_k\underline{v}_k=0$ מתקיים בהכרח $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$

אחרת, נאמר שהוקטורים (הקבוצה) היא בלתי תלויה ליניארית (בת"ל).

כלומר: אם יש עוד דרך לכתוב את 0 כצירוף ליניארי חוץ ממקרה בו כל המקדמים $\alpha = 0$, אז הקבוצה בלתי תלויה ליניארית.

תרגיל 16. לפי הגדרה:

סעיף א': האם הוקטורים $\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ תלויים ליניארית?

- נניח כי $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
  - אם הפיתרון היחיד הוא כאשר $\alpha=\beta=\delta=0$ אז הם תלויים.
  - אחרת, הם בת"ל.
- נכתוב את מערכות המשוואות:

$$\begin{cases}\alpha + 0\cdot\beta + 4\delta = 0\\ 2\alpha+\beta+\delta = 0\\ 3\alpha+2\beta+7\delta\end{cases}$$

- נעביר למטריצה כדי לדרג ולבדוק כמה פתרונות יש למערכת:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&0\\2&1&1&0\\3&2&7&0\end{array}\right]$$

  - נדרג ונקבל שיש פיתרון יחיד:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&0\\2&1&1&0\\3&2&7&0\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&4&0\\2&1&1&0\\3&2&7&0\end{array}\right]$$

  - לכן הוקטורים ת"ל.

סעיף ב - האם הוקטורים $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ת"ל?

פתרון:

- נסתכל בעיניים על הוקטורים ונראה שיש פיתרון נוסף שהוא לא הפיתרון הטריוויאלי: $(-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

- כלומר, המקדמים שלנו הם $1,1,-1$.
- ולכן הוקטורים הללו הם בת"ל.

סעיף ג': הפולינומים x^2+3x+1 **ו-** $4x^2+5$ ת"ל?
פתרון:

- נבדוק:
  - נניח ש $\alpha\cdot\left(x^2+3x+1\right)+\beta\cdot\left(4x^2+5\right)=0\cdot x^2+0\cdot x+0$
    - נפתח ונקבל:

$$\alpha\cdot x^2+\alpha\cdot 3x+\alpha\cdot 1+\beta\cdot 4x^2+\beta\cdot 5=0\cdot x^2+0\cdot x+0$$

$$x^2\left(\alpha+\beta\cdot 4\right)+\left(\alpha\cdot 3\right)x+\left(\alpha\cdot 1+\beta\cdot 5\right)=0\cdot x^2+0\cdot x+0$$

    - מערכת המשוואות היא:

$$\begin{cases}(\alpha+\beta\cdot 4)=0\\(\alpha\cdot 3)=0\\(\alpha+\beta\cdot 5)=0\end{cases}$$

      · קיבלנו ש-$\alpha=0$ וגם $\beta=0$ ולכן לפי ההגדרה הפולינומים הללו הם תלויים ליניארית.

משפטים שימושיים:

1. כל קבוצה שמכילה את וקטור האפס היא קבוצה תלויה ליניארית.

   דוגמה 17. נניח שיש לנו קבוצה עם שלושה וקטורים $\{V_1,V_2,0\}$.

   - לקבוצה הזו יהיה צירוף ליניארי יחיד של 0 מכיוון שאפשר לכתוב את 0 כצירוף ליניארי של

$$0\cdot V_1+0\cdot V_2+7\cdot 0=0$$

2. קבוצה שיש בה רק איבר אחד - $\{V_1\}$ היא תלויה ליניארית אם ורק אם $V_1=0$.
3. (תקף רק לשני וקטורים) - <u>**שני**</u> וקטורים V_1 ו-V_2 תלויים ליניארית אם ורק אם $V_1=\alpha\cdot V_2$ (כלומר אם ורק אם הם פרופורציונליים).

   הוכחה.

   - כיוון ראשון $\Leftarrow$:
     - נניח ש$V_1=\alpha V_2$.

* לכן, נעביר אגף ונקבל: $1\cdot V_1-\alpha V_2=0$. ולכן הם צירוף ליניארי של 0 בלבד
* לכן הם תלויים ליניארית.

- כיוון שני $\Leftarrow$:
  - נניח ש-V_1,V_2תלויים ליניארית.
    * כלומר, קיימים α_1,β_1 שלא שניהם אפס, כך שמתקיים $\alpha_1V_1+\beta_1V_2=0$
    * נניח בה"כ ש$\alpha_1\neq0$ ולכן נחלק ב-α_1 ונקבל:

$$V_1=-\frac{\beta_1}{\alpha_1}V_2$$

· כלומר, אם הוקטורים תלויים ליניארית, אז אחד מהם הוא פרופורציונלי לשני.

- הוכחנו את השני הכיוונים ולכן **"שני** וקטורים תלויים ליניארית $\iff$ אחד מהם פרופורציונלי לשני".

■

4. כל קבוצה שמכילה תת-קבוצה תלויה ליניארית היא תלויה ליניארית.

5. קבוצה היא תלויה ליניארית $\iff$ קיים לפחות איבר אחד בקבוצה שהוא צירוף ליניארי של האחרים. (המשפט הכי חשוב מבין החמישה)

דוגמה 18. $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. מכיוון ש $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot 1+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot 1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

המשפטים הללו נותנים לנו "דרך טכנית" להוכיח אי תלות:

תרגיל 19. נניח שיש לנו שלושה וקטורים: $\begin{pmatrix}4\\5\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

- נשים את הוקטורים הללו בתוך שורות של מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\4&5&9\end{pmatrix}$$

  - אם התאפסה שורה, זה אומר שהם תלויים ליניארית.
  - אם לא התאפסה שורה זה אומר שהם בלתי תלויים ליניארית.
    * (את ההסבר לשיטה הזו נלמד אחרי בסיס ומימד).

תרגיל 20. שימוש בשיטה הם פולינומים:

$$x^2+3x+1$$

$$0x^2+4x+5$$

$$2x^2+0\cdot x+1$$

- נעבר את המקדמים לשורות של מטריצה:

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&4&5\\2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$$

- לא התאפסה שורה ולכן הן בת"ל.

תרגיל 21. האם המטריצות $\begin{pmatrix}4&1\\3&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ תלויות ליניארית?

- נעביר לשורות של מטריצה ונקבל:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&5\\4&1&3&6\end{pmatrix}$$

- צריך לדרג ולראות אם התאפסה שורה.

תרגיל 22. מתוך מבחן:

נתון: V_1,V_2,V_3,V_4 תלויות ליניארית.

הוכח/הפרך:

א. $V_1-V_2,V_2-V_3,V_3-V_4,V_4-V_1$ בת"ל?

ב. $V_1+2v_2+3v_3,V_2+V_4,V_1+V_3,V_2$ בת"ל?

פתרון:

- אי אפשר לשים במטריצה ולדרג כי אין לנו פה מטריצות מסוימות.
  - צריך לפתור לפי ההגדרה.

סעיף ב. נניח $\alpha\cdot(V_1+2v_2+3v_3)+\beta\left(V_2+V_4\right)+\delta\left(V_1+V_3\right)+\sigma\left(V_2\right)=0$

- נרצה לבדוק כמה אפשרויות יש למקדמים הללו:

$$\alpha\cdot V_1+\alpha\cdot2v_2+\alpha\cdot3v_3+\beta\cdot V_2+\beta\cdot V_4+\delta\cdot V_1+\delta\cdot V_3+\sigma\cdot V_2=0$$

$$V_1\underbrace{(\alpha+\delta)}_{=c_1}+V_2\underbrace{(\alpha\cdot2+\sigma+\beta)}_{=c_2}+V_3\underbrace{(\alpha\cdot3+\delta)}_{=c_3}+\underbrace{\beta}_{=c_4}\cdot V_4=0$$

– כלומר, צריך לבדוק מתי $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ ונקבל:

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \alpha \cdot 2 + \sigma + \beta = 0 \\ \alpha \cdot 3 + \delta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

– נעבר למטריצה ונקבל:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

סעיף א. הטענה לא נכונה כי $1\left(V_1 - V_2\right) + 1 \cdot \left(V_2 - V_3\right) + 1 \cdot \left(V_3 - V_4\right) + 1 \cdot \left(V_4 - V_1\right) = 0$ ולכן יש אפשרות נוספת חוץ מהטריוויאלית.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 13 - הילה

שם: איל שטיין

December 7, 2022

נושא השיעור: אי תלות ליניארית - תרגילי בדיקה ותרגילי הוכחה לפי הגדרה

הערה 1. מכמות של שלושה וקטורים ומעלה, צריך להוכיח שהווקטורים תלויים ליניארית.

- אפשר להוכיח או לפי הגדרה או לשים בשורות של מטריצה ולבדוק אם מתאפסת שורה.
  - אפשר לשים אותן במטריצה כי הוכחנו שאם שלושה וקטורים תלויים ליניארית, אז אחד מהם הוא צ"ל של האחרים ולכן אם נדרג נקבל שורת אפסים במקומו.

נושא ראשון - תרגילי בדיקת אי-תלות:

תרגיל 2. האם הוקטורים הבאים תלויים ליניארית:

1. x^2+3x+7
2. $4x+5$
3. $3x^2+1$

פתרון: ניקח את המקדמים ונשים בשורות של מטריצה

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 4 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & \frac{5}{4}\\ 0 & 0 & *\end{pmatrix}$$

- מכיוון שלא התאפסה שורה, קיבלנו שהפולינומים בלתי תלויים ליניארית.

תרגיל 3. האם המטריצות הבאות תלויות ליניארית? (לומר "מטריצות" זה כמו לומר וקטורים, כרכיבים של מרחב וקטורי)
$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 8 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

מותר לנו לבחור את הסדר שבו אנחנו מכניסים אותן כשורות של מטריצה ולכן נקבל

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 8 & 5\\0 & 0 & 8 & 3\end{pmatrix}$$

- קיבלנו מטריצה מדורגת.
- אף שורה לא התאפסה ולכן המטריצות בת"ל.

תרגיל 4. נניח שיש לנו ארבעה פולינומים:

(1) $$4x^3+7x^2+8x+1$$

(2) $$8x^2+3x+1$$

(3) $$4x+17$$

(4) $$5$$

אלה פולינומים ממעלות שונות ולכן אם נשים אותן במטריצה בסדר הנכון נקבל מטריצה מדורגת.
לכן, ניתן לומר (גם במבחן) שכולם בת"ל מכיוון שכל הפולינומים ממעלות שונות.

תרגיל 5. האם $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 17\end{pmatrix}$ ת"ל?
אוטומטית אפשר לומר שכן, כי אם נשים אותן במטריצה נוכל להשתמש במשפט:

משפט 6. $r\left(A_{m\times n}\right)\leq min\left\{m,n\right\}$

ונדע שאם נדרג את המטריצה שבה השורות הן שלושת הוקטורים, הדרגה תמיד תהיה קטנה או שווה ל-2 ולכן תמיד תתאפס לנו שורה ולכן הם תמיד יהיו תלויים ליניארית.

נושא שני - שאלות הוכחה:

תרגיל 7. הוכח/הפרך

1. $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$,$\{\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$,$\{\underline{v}_3,\underline{v}_1\}$ הם בת"ל. האם בהכרח $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ גם בת"ל?
2. נתון $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4\}$ בת"ל,

(א) עבור איזה ערך של k הקבוצה הבאה בת"ל?

$\{\underline{v}_1+\underline{v}_2-\underline{v}_4, k\cdot\underline{v}_1-\underline{v}_3+\underline{v}_4, \underline{v}_2+k\cdot\underline{v}_3-2\cdot\underline{v}_4\}$

1. פתרון:

- התשובה היא לא.
- דוגמא נגדית: $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ - הקבוצה תלויה ליניארית כי אחד הוא צ"ל של האחרים של הזוגות האחרים $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$
  - אבל כל זוג בפני עצמו הוא בת"ל כי הזוגות לא פרופורציונליים.
- המסקנה היא שממידע "מלמטה" אי אפשר להוכיח אי תלות. כלומר, גם אם כל תת קבוצה היא בת"ל, זה לא אומר שהקבוצה היא בת"ל.

2. פתרון:

- נניח ש $\alpha\cdot(\underline{v}_1+\underline{v}_2-\underline{v}_4)+\beta\cdot(k\cdot\underline{v}_1-\underline{v}_3+\underline{v}_4)+\delta(\underline{v}_2+k\cdot\underline{v}_3-2\cdot\underline{v}_4)=0$.
  - המטרה שלנו היא להראות שלמשוואה הזו יש פתרון יחיד שהוא $\alpha=\beta=\delta=0$
  -

$$\alpha\cdot\underline{v}_1+\alpha\cdot\underline{v}_2-\alpha\cdot\underline{v}_4+\beta\cdot k\cdot\underline{v}_1-\beta\cdot\underline{v}_3+\beta\cdot\underline{v}_4+\delta\cdot\underline{v}_2+\delta\cdot k\cdot\underline{v}_3-2\cdot\delta\cdot\underline{v}_4=0$$

$$\alpha\cdot\underline{v}_1+\beta\cdot k\cdot\underline{v}_1+\alpha\cdot\underline{v}_2+\delta\cdot\underline{v}_2+-\beta\cdot\underline{v}_3+\delta\cdot k\cdot\underline{v}_3+\beta\cdot\underline{v}_4-2\cdot\delta\cdot\underline{v}_4-\alpha\cdot\underline{v}_4=0$$

$$\underline{v}_1(\alpha+\beta\cdot k)+\underline{v}_2\cdot(\alpha+\delta)+(-\beta\cdot+\delta\cdot k)\underline{v}_3+\cdot\underline{v}_4(-\alpha+\beta-2\cdot\delta)=0$$

- כלומר, $\begin{cases}\alpha+\beta k=0\\ \alpha+\delta=0\\ -\beta+k\delta=0\\ -\alpha+\beta-2\delta=0\end{cases}$
- נשים אותם בשורות מטריצה ונקבל: $\left[\begin{array}{ccc|c}\boldsymbol{\underline{\alpha}} & \boldsymbol{\underline{\beta}} & \boldsymbol{\underline{\delta}} & \\ 1 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & k & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right]$
- נחליף שורות ונדרג ונקבל:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\underline{\alpha} & \underline{\beta} & \underline{\delta} & \\ 1 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & k & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & k & 0 & 0\\ 0 & 1 & -k & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & k & 0 & 0\\ 0 & 1 & -k & 0\\ 0 & 0 & 1-k^2 & 0\\ 0 & 0 & -2+k(1+k) & 0\end{array}\right]$$

– כדי שיהיה פתרון יחיד, הדרגה צריכה להיות שווה ל-3 (למספר הנעלמים).

* כלומר צריך ששתיים מהשורות במטריצה המדורגת תתאפס.

· או ש$\left(1-k^{2}\right)=0$ או ש $-2+k\left(1+k\right)=0$

1. כלומר או ש$k=-1$ ואז $r\left(A|b\right)=3$
2. או ש$k=1$ ואז $r\left(A|b\right)=2$.

(א) מכיוון שמדובר במערכת הומוגנית, הוקטורים יהיו ת"ל כאשר $k=1$

3. או ש$k=-2$ ואז $r\left(A|b\right)=3$

* כלומר, רק עבור $k=1$ הוקטורים יהיו ת"ל.
* לכל k אחר הוקטורים יהיו בת"ל (לדוגמא ב$k=5$ יתקיים $r\left(A|b\right)=3$)

תרגיל 8. הוכח/הפרך: אם $\{A,A^{t}\}$ ת"ל אזי A סימטרית או אנטי סימטרית.

פתרון:

• הטענה נכונה.

• נניח ש-A^{t},A תלויות ליניארית.

– מכיוון שמדובר בשני איברים ת"ל, אחד מהם פרופורציונלי לשני.

– כלומר קיים α כך ש $A=\alpha\cdot A^{t}$

* מותר לעשות טרנספוז על שני האגפים ולכן:

$$A=\alpha\cdot A^{t}\quad\backslash^{t}$$

$$A^{t}=\left(\alpha\cdot A^{t}\right)^{t}$$

$$A^{t}=\alpha\cdot A$$

* נציב $A=\alpha\cdot A^{t}$ ונקבל:

$$A^{t}=\alpha\cdot\alpha\cdot A^{t}$$

$$A^{t}=\alpha^{2}\cdot A^{t}\quad\backslash-A^{t}$$

* נעביר אגף ונקבל:

$$0=\alpha^{2}\cdot A^{t}-A^{t}$$

$$0=\left(\alpha^{2}-1\right)A^{t}$$

* או שהסקלר הוא אפס או שהמטריצה היא מטריצת האפס.
  · או ש-$\alpha=1$ ואז $A=1\cdot A^{t}$ - סימטרית. או ש $\alpha=-1$ ואז $A=-1\cdot A^{t}$ - אנטי סימטרית.
  · או שA היא מטריצת האפס ואז היא גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית.

תרגיל 9. $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ ת"ל. כך ש $n-1$ מתוכם בת"ל.

הוכיחו: קיימים סקאלרים שכולם שונים מ-0 כך ש $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n=0$

פתרון:

- נניח בשלילה שלכל הסקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ המקיימים $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n=0$, קיים בהכרח לפחות $\alpha_j=0$ אחד.
  – אם נעביר אותו אגף נקבל ש: $\alpha_j\underline{v}_j=(-1)\cdot\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n$
    * כלומר, קיבלנו וקטור אחד שהוא צירוף ליניארי של האחרים, בסתירה לנתון (להמשיך לבד).

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 14 - הילה

שם: איל שטיין

December 12, 2022

נושא השיעור: בסיס ומימד

הגדרה 1. בסיס

יהי V מרחב וקטורי ותהי B קבוצה של איברים $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ ב-V.

נאמר ש-B הוא **בסיס** של V אם:

1. B היא קבוצה פורשת של V מעל $\mathbb{F}$.
   - כלומר $V=span\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$
2. B היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית (בת"ל) מעל $\mathbb{F}$.

הערה 2. למרחב וקטורי יכולים להיות מספר גדול מאוד (ואפילו אינסוף) בסיסים.

- לדוגמא, כמה בסיסים של $\mathbb{R}^2$ הם $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ וגם $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ וגם $\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\e\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$
- לדוגמא, $\left\{\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}\right\}$ הוא לא בסיס כי הקבוצה הזו לא פורשת.
  - היא לא פורשת כי לא ניתן לייצג את $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ בעזרת סקלאר כפול $\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

הגדרה 3. מימד.

יהי V מרחב וקטורי.

מספר האיברים בבסיס כלשהו של V נקרא **ה**מימד של V ומסומן $dim\left(V\right)$

משפט 4.

יהי V מרחב וקטורי ממימד n.

אזי:

1. בכל בסיס של v יש בדיוק n איברים.

2. כל קבוצה ב-V שמכילה יותר מ-n איברים, בהכרח תלויה ליניארית (ת"ל).

3. כל קבוצה ב-V עם פחות מ-n איברים היא בהכרח לא קבוצה שפורשת את V.

4. כל קבוצה פורשת ב-V עם בדיוק n איברים היא גם בת"ל (ובפרט בסיס).

5. כל קבוצה בת"ל ב-V עם בדיוק n איברים היא גם פורשת (ובפרט בת"ל).

הערה 5. **תזכורת - מימדים ידועים:**

- $V=\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$ אז המימד הוא n, כלומר $dim\left(V\right)=n$
- מטריצות:
  - $V=M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מעל $\mathbb{F}$ אז המימד הוא $m\cdot n$, כלומר $dim\left(V\right)=m\cdot n$
- פולינומים:
  - $V=\mathbb{F}_n\left[x\right]$ מעל $\mathbb{F}$ אז המימד הוא $dim\left(V\right)=n+1$
    - לדוגמא, $B_{R_2[x]}=\left\{1,x,x^2\right\}$ המימד יהיה 3.

הערה 6. נניח שניקח את $V=\mathbb{C}^2$.

- אם הסקלארים הם מ-$\mathbb{C}$ אז המימד מעל $\mathbb{C}$ יהיה $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2=2$
- ואם הסקלארים הם רק מ-$\mathbb{R}$ אז הבסיס יצטרך להיות גדול יותר כדי להכיל גם את הוקטורים $\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$ ואז המימד יהיה $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2=4$

תרגיל 7.

יהי $V=\mathbb{R}_2\left[x\right]$.

א. האם $\left\{\overbrace{x^2+3x+7}^{p_1},\overbrace{4x^2+1}^{p_2}\right\}$ היא בסיס?

תשובה: לא. המימד של $dim\left(\mathbb{R}_2\left[x\right]\right)=3$. ולפי המשפט, קבוצה עם פחות מ-3 איברים לא יכולה להיות פורשת. לפי ההגדרה, בסיס צריך להיות בת"ל ופורש.

לכן הקבוצה לא בסיס.

ב. נוסיף לקבוצה את $5x^2+3x+8$. האם שלושת הפולינומים הללו הם בסיס של V?

תשובה: לא. נוכיח שהם תלויים ליניארית ולכן לא בסיס:

יש שתי שיטות לבדוק תלות ליניארית:

1. או שנשים את המקדמים במטריצה, נדרג ונבדוק אם מתאפסת שורה.

2. או שנראה שהם פרופורציונליים.

במקרה שלנו, $5x^2+3x+8=1\cdot\overbrace{\left(x^2+3x+7\right)}^{p_3}+1\cdot\overbrace{\left(4x^2+1\right)}^{p_2}$ ולכן אחד מהם צ"ל של האחרים. לכן הם תלויים ליניארית.

ג. האם ניתן להשלים את $\{p_1, p_2\}$ לבסיס?

תשובה: כל קבצה בלתי תלויה ליניארית (בת"ל) ניתנת להשלמה לבסיס.

- מכיוון ש-p_1, p_2 לא פרופורציונליים אז הם גם לא תלויים ליניארית.
- לכן לפי המשפט אפשר להשלים אותם לבסיס.
  - נרצה למצוא p_3 כך ש-p_1, p_2, p_3 בלתי תלויים ליניארית.
    * ומכיוון ש-$dim\left(V\right) = 3$ נקבל קבוצה בת"ל עם 3 איברים ולכן לפי המשפט הקבוצה הזו תהיה בסיס.
- כדי למצוא וקטור שלישי, נשים את השתיים הראשונות במטריצה ונדרג. נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -12 & -27 \end{pmatrix}$$

  - לכן, אם נוסיף את $p_3\left(x\right) = 7$ נקבל ש-p_1, p_2, p_3 בלתי תלויים ליניארית כי נשים אותן במטריצה ולא תתאפס שורה.

ד. האם קיים p_4 ממעלה 2 כך ש-$\{p_1, p_2, p_4\}$ בסיס של V?

תשובה: כן, ויש אינסוף אפשרויות כאלה.

- ניקח את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ נוכל לבחור כל מטריצה שתגרום שלא תתאפס שורה בדירוג:
  - לדוגמא, אפשר להוסיף את $p_4\left(x\right) = 1 \cdot x^2 + 3x + 8$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

  - גם אם נדרג, לא תתאפס שורה.

ה. מצאו בסיס של V שבו לכל פולינום בבסיס מקיים $p\left(1\right) = 2$. אם לא קיים, הסבירו.

תשובה:

- המטרה היא למצוא שלושה פולינומים ($dim\left(V\right) = 3$) שהם בלתי תלויים ליניארית (בת"ל)ומקיימים $p\left(1\right) = 2$.
  - $p\left(1\right)$ הוא בעצם סכום המקדמים.
    * כלומר אנחנו רוצים למצוא שלושה פולינומים בת"ל שסכום שורה שלהם במטריצה הוא 2.
    * לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נהפוך את המקדמים חזרה לפולינומים ונקבל שלושה פולינומים שהם בסיס של V ומקיימים את התנאי:

$$p(x) = x^2 + 1$$

$$q(x) = 2x$$

$$w(x) = 2$$

ו. מצאו בסיס כלשהו של V שבו כל הפולינומים ממעלה 2 ומקיימים $p(1) = 6$.

תשובה:

- ניקח שלושה פולינומים ממעלה 2 שהם בלתי תלויים ליניארית, כלומר לא פרופורציונליים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  - דירגנו ולא התאפסה שורה, ולכן הראינו ששלושתם בלתי תלויים ליניארית (בת"ל).

- נפכול את הפולינומים בסקלארים כך שנקבל שסכום המקדמים יהיה 6 ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\begin{cases} R_1 \cdot 2 \to R_1 \\ R_2 \cdot \frac{6}{4} \to R_2 \\ R_3 \cdot \frac{6}{9} \to R_3 \end{cases}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \frac{6}{4} & 3 & \frac{6}{4} \\ \frac{12}{9} & \frac{18}{9} & \frac{24}{9} \end{pmatrix}$$

ז. נניח $V = \mathbb{R}_4[x]$. (כלומר בבסיס יש חמישה פולינומים)
מצאו בסיס של V שבו 4 פולינומים ממעלה 2 וכל הפולינומים בבסיס (חמשתם) מקיימים $p(1) = 2$.

תשובה:

- לדרוש שכל האיברים בבסיס מקיימים $p(1) = 2$ זה אפשרי וראינו את זה בבסיס הקודם.
- אבל, ארבעה פולינומים ממעלה 2 תמיד יימצאו ב-$\mathbb{R}_2[x]$ (שהמימד שלו הוא 3) ולכן הם יהיו תלויים ליניארית.
  - לכן הקבוצה הזו לא תהיה בסיס (כי לפי הגדרה בסיס צריך להיות בת"ל).
- כלומר, לא קיימת קבוצה כזו.

משפט 8. יהי V מרחב וקטורי ו-W תת מרחב של V.
אזי: $dim\left(W\right)\leq dim\left(V\right)$.
ואם $dim\left(W\right)=dim\left(V\right)$ אז $W=V$.

תרגיל 9.
יהי $V=M_{2\times2}\left(\mathbb{R}\right)$.
נגדיר שני תתי מרחבים $U=\left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ :\ a+2b=0\right\}$, $W=\left\{ A\in V\ :\ A=A^{t}\right\}$
צ"ל:
א. מצאו בסיס ומימד ל-U,W
ב. מצאו בסיס ומימד ל $U+W$
ג. מצאו בסיס ומימד ל-$U\cap W$
ד. האם $U\oplus W=V$ (האם הסכום הוא סכום ישר)?
ה. מצאו $\underline{u}_{1}$ תת מרחב של V כך ש$W\oplus\underline{u}_{1}=V$

פתרון:
א.

- נחפש בסיס של $U=\left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}:a+2b=0\right\}$
  - נרצה לייצג את U בעזרת $span$:
  - נשים את התנאי בתוך המטריצה ונקבל: $U=\left\{ \begin{pmatrix}-2b & b\\ c & d\end{pmatrix}:b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$
  - נכתוב את המטריצה כך: $U=\left\{ b\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}:b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$
    * נכתוב אותה בצורת $span$ ונקבל:

$$U=span\left\{ \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

    * כלומר, $\left\{ \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה פורשת של U
      · נבדוק אם המטריצות הללו בלתי תלויות.
      · אם הן תלויות, נוריד אחת מהן ונחליף אותה במטריצה בלתי תלויה עד שנקבל בסיס של U.
    * נבדוק אי תלות: $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ - הם בלתי תלויים כי המטריצה מודרגת ולא התאפסה שורה.
      · לכן היא פורשת ובת"ל והיא בסיס ל-U.

- בסיס של U הוא $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- ולכן $dim\left(U\right) = 3$

- נחפש בסיס של W:
  - הגדרנו את W להיות $W = \{A \in V \ : \ A = A^t\}$
    * כלומר, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$
      · ולכן $W = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$
      · נשים במטריצה על מנת לבדוק אי תלות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

      · הן בלתי תלויות.
- ולכן $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- ולכן $dim\left(W\right) = 3$

ב.

- נשתמש במשפט:

משפט 10. יהי V מרחב וקטורי, ו-U, W תתי מרחבים של V.

אם $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ קבוצה פורשת של U ו- $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ קבוצה פורשת של W

אזי $A \cup B = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ היא קבוצה פורשת ל-$U + W$

הערה 11. מה קורה אם הקבוצות הפורשות הן גם בסיסים:

אם $B_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ היא בסיס של U ו-$B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ היא בסיס של W אז האיחוד הוא פורש ולא בהכרח בסיס.

- לפי המשפט, $U \cup W$ קבוצה פורשת של $U + W$
  - ולכן:

$$U + W = span\left\{B_U \cup B_W\right\}$$

$$U + W = span\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

* ולכן $U \subseteq U+W \subseteq V$

– מכיוון ש$dim\left(U\right)=3$ ו-$dim\left(V\right)=4$ אז לפי המשפט על אי שוויון גדלי המימדים מתקיים $3 \le dim\left(U+W\right) \le 4$

– ניקח את הוקטורים של הקבוצה הפורשת: $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}$ ונשים במטריצה:

$$\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

– בהרצאה הוכחנו שמרחב העמודות או השורות (ה-$span$ של השורות או עמודות) לא משתנה בדירוג.

* כלומר, ניקח את הוקטורים מהמטריצה המדורגת ונקבל קבוצה בת"ל (כי היא מדורגת) ופורשת.

* לכן הקבוצה הזו תהיה בסיס של $U+W$

· במקרה שלנו, בסיס יהיה $B_{U+W}\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

· ולכן המימד $dim\left(U+W\right)=4$

ג. $U \cap W$**:**

• $U \cap W \subseteq U$ ולכן $dim\left(U\cap W\right) \le dim\left(U\right)=3$

• נמצא איבר כללי בחיתוך:

– במקרה שלנו, $U \cap W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}: a+2b=0 \; and \; b=c\right\}$

* כלומר: $U \cap W=\left\{\begin{pmatrix}-2b&b\\b&d\end{pmatrix}: b,d\in\mathbb{R}\right\}$

· נוציא סקלארים החוצה ונקבל:

$$\begin{aligned}U\cap W&=\left\{b\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}: b,d\in\mathbb{R}\right\}\\&=span\left\{\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

· ומכיוון ששני הוקטורים בקבוצה הפורשת הם לא פרופורציונליים, הם בת"ל.

• לכן, $B_{U\cap W}=\left\{\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

ד.

- כששואלים האם $U \oplus W = V$ (כלומר האם הסכום הוא סכום ישר), שואלים האם:
  1. $U + W = V$
  2. וגם $U \cap W = \{0\}$
- ולכן נוכל להראות ש-$U \cap W \ni \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$
  – כלומר, הסכום הוא לא סכום ישר.
- אך בכל זאת, נמשיך לשאול - האם $U + W = V$?
  – התשובה היא כן.
    * מכיוון ש$U + W \subseteq V$ תת מרחב וקטורי.
    * הראינו שהמימדים שלהם שווים (שניהם 4)
      · ולכן לפי משפט המימדים הראשון, מתקיים $U + W = V$.

ה. - לעשות לבד.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 16 - הילה

שם: איל שטיין

December 28, 2022

נושא השיעור: בסיס ומימד

בסוף השיעור הקודם דיברנו על בסיס ומימד.

נושא ראשון - בסיס ומימד:

תרגיל 1.

- $U=span\left\{ \left(1,2,3,4\right),\left(01,2,4\right),\left(3,4,5,7\right)\right\}$
- $W=span\left\{ \left(0,1,2,3\right),\left(1,3,5,7\right),\left(0,1,0,0\right)\right\}$

צ"ל: מצאו בסיס ומימד ל$U\cap W$.

פתרון:

- נמצא את המימד של U (צריך לדרג לקנונית)

$$U:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  – כלומר $dim\left(U\right)=3$

- נמצא את המימד של W (לא חייב לדרג לקנונית אבל עדיף):

$$W:\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

  – כלומר $dim\left(W\right)=3$

- אם נשים במטריצה את הוקטורים שפורשים את שני תתי המרחב U,W נקבל שהבסיס של $U+W$ מכיל רק ארבעה וקטורים.

- ולכן $dim\left(U+W\right)=4$

- נמצא את המימד של החיתוך על ידי שימוש במשפט המימדים הראשון: $dim\left(U+W\right)=dim\left(U\right)+dim\left(W\right)-dim\left(U\cap W\right)$
  - כלומר $4=3+3-dim\left(U\cap W\right)$
    - ולכן $dim\left(U\cap W\right)=2$
- ניקח את הוקטורים בבסיס של U לאחר דירוג ונקבל ש- $U=span\left\{ \left(1,0,-1,0\right),\left(0,1,2,0\right),\left(0,0,0,1\right)\right\}$
  - נכתוב איבר כללי $\underline{u}\in U$ כצ"ל של איברי הבסיס $\underline{u}=\left\{ \alpha\cdot\left(1,0,-1,0\right)+\beta\cdot\left(0,1,2,0\right)+\delta\cdot\left(0,0,0,1\right)\ \mid\ \alpha,\beta,\delta\in\mathbb{F}\right\}$
    - נכניס את הסקלארים לתוך הסוגריים ונקבל איבר כללי:

$$\underline{u}=\left\{ \left(\alpha,\beta,-\alpha+2\beta,\delta\right)\ \mid\ \alpha,\beta,\delta\in\mathbb{F}\right\}$$

$$\underline{u}=\left\{ \left(x,y,z,w\right)\ \mid\ z=-x+2y\right\}$$

· הערה: היינו צריכים לדרג את המטריצות לקנוניות כדי שנוכל לכתוב איבר כללי ונקבל שבכל עמודה שיש בה איבר מוביל אין תנאים.

- כדי למצוא את $U\cap W$ יש שתי דרכים:

1. לקחת איבר כללי בV ולשים עליו את התנאים של U ואת התנאים של W.
2. לקחת איבר כללי ב-W ולשים עליו את התנאים של U.

- נרשום איבר כללי $\underline{w}\in W$:

$$\underline{w}=\left\{ \alpha\left(1,0,0,-\frac{1}{2}\right)+\beta\left(0,1,0,0\right)+\delta\left(0,0,1,\frac{3}{2}\right)\ \mid\ \alpha,\beta,\delta\in\mathbb{F}\right\}$$

$$\underline{w}=\left\{ \left(\alpha,\beta,\delta,-\frac{1}{2}\alpha+\delta\frac{3}{2}\right)\ \mid\ \alpha,\beta,\delta\in\mathbb{F}\right\}$$

- ניקח איבר בחיתוך $U\cap W$:

$$U\cap W=\left\{ \left(\alpha,\beta,,\delta,-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\delta\right)\ :\ \delta=-\alpha+2\beta\right\}$$

$$=\left\{ \left(\alpha,\beta,,-\alpha+2\beta,-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\left(-\alpha+2\beta\right)\right)\ :\ \alpha,\beta\in\mathbb{F}\right\}$$

$$=\left\{ \left(\alpha,\beta,,-\alpha+2\beta,-2\alpha+3\beta\right)\ :\ \alpha,\beta\in\mathbb{F}\right\}$$

$$=\left\{ \alpha\left(1,0,-1,-2\right)+\beta\left(0,1,2,3\right)\ :\ \alpha,\beta\in\mathbb{F}\right\}$$

– יוצא ש: $U\cap W=span\left\{ \left(1,0,-1,-2\right),\left(0,1,2,3\right)\right\}$

* ומכיוון ששני הוקטורים הללו בת"ל יוצא שבסיס ל$U\cap W$ הוא $B_{U\cap W}=\left\{ \left(1,0,-1,-2\right),\left(0,1,2,3\right)\right\}$

שאלות הבנה - בסיס ומימד:

תרגיל 2.

- נתון כי $U\cap W$ הינו מרחב הפתרונות של המערכת

(1) $$2\cdot x_{1}+4\cdot x_{2}+x_{3}-x_{4}+5\cdot x_{5}=0$$

(2) $$x_{1}+2\cdot x_{2}+x_{3}+4\cdot x_{5}=0$$

(3) $$x_{3}+x_{4}+3\cdot x_{5}=0$$

- נתון $\left(-3,1,0,0,1\right)\notin W$
- נתון $dim\left(U\right)<dim\left(W\right)$
- צ"ל: מצאו בסיס ומימד ל-U.

פתרון:

- בתרגיל הזה נשים לב לחשיבות של מציאת מימדים.
- לכן נתחיל לחפש מהו המימד של מרחב הפתרונות:
  – נעביר את המערכת למטריצה ונדרג:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
2 & 4 & 1 & -1 & 5 & 0\\
1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0
\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

* מכיוון ש$r\left(A\right)=2$ ודרגת החופש היא 3
* לכן מתקבל $dim\left(U\cap W\right)=3$

- כלומר, $3\leq dim\left(U\right)\leq5$ וגם $3\leq dim\left(W\right)\leq5$ כי V הוא $\mathbb{R}^{5}$ ו-U,W תתי מרחב של V.
  – אך נתון ש $dim\left(U\right)<dim\left(W\right)$
  * ולכן $dim\left(U\right)=3\ OR\ 4$ וגם $dim\left(W\right)=4\ OR\ 5$

- וגם נתון $(-3,1,0,0,1)\notin W$
  * ולכן המימד של $W<5$ כי הוא לא מכיל את כל הוקטורים שהם כפולה בסקלאר של $(-3,1,0,0,1)$.
- לכן מוכרח להתקיים ש $dim\left(W\right)=4$. ואז נקבל לפי הנתון ש $dim\left(U\right)=3$
- ומכיוון ש $U\cap W\subseteq U$ וגם $dim\left(U\cap W\right)=dim\left(U\right)=3$ אז לפי משפט מתקיים $U=U\cap W$
- נשאר למצוא בסיס ל-U (שהוא גם בסיס ל$U\cap W$):
  - נסמן $x_2=t,\ \ x_4=s,\ \ x_5=r$
  - ונמצא איבר כללי.

תרגיל 3. נתון $AB=I_m$ כאשר $B\in M_{n\times m}^{(\mathbb{R})}$, $A\in M_{m\times n}^{(\mathbb{R})}$
א. מצאו את מימד מרחב הפתרונות של $B\underline{x}=0$
ב. מצאו את מרחב העמודה של A
ג. מצאו את מימד מרחב הפתרונות של $BA\underline{x}=0$
פתרון:

- הערות לעצמנו:
  - מרחב העמודות של $A_{m\times n}$ נמצא ב$\mathbb{R}^m$
  - מרחב השורות של $A_{m\times n}$ נמצא ב $\mathbb{R}^n$
  - מכיוון ש $B_{n\times m}$ מרחב הפתרונות של $Bx=0$ נמצא ב $\mathbb{R}^m$
  - מכיוון ש$(BA)^{n\times n}$, מרחב הפתרונות של $BAx=0$ נמצא ב $\mathbb{R}^n$
  - משפט - $r\left(AB\right)\leq min\left\{r\left(A\right),r\left(B\right)\right\}$
  - משפט - $r\left(A_{m\times n}\right)\leq min\left\{m,n\right\}$

א. צ"ל: מצאו את מימד מרחב הפתרונות של $B\underline{x}=0$

- דרך ראשונה:
  - נרצה למצוא את הדרגה של B כי מימד מרחב הפתרונות של $Bx=0$ שווה ל- $m-r\left(B\right)$
  - לכל היותר המימד של $Bx=0$ הוא m.
  - לפי הנתון, $AB=I_m$ ולכן $r\left(AB\right)=m$
    * ולפי המשפט $m=r\left(AB\right)\leq min\left\{r\left(A\right),r\left(B\right)\right\}$
      · כלומר $m\leq r\left(B\right)$
  - מצד שני, $B_{n\times m}$ ולכן $r\left(B_{n\times m}\right)\leq min\left\{m,n\right\}$, כלומר $r\left(B\right)\leq m$
  - מכיוון ש- $m\leq r\left(B\right)$ וגם $r\left(B\right)\leq m$, מתקיים $r\left(B\right)=m$
  - ולכן מימד מרחב הפתרונות של $Bx=0$ הוא $m-m=0$
- דרך שנייה:
  - יהי $\underline{x}_0$ פיתרון של המערכת $B\underline{x}=0$

* נכפול משמאל ב-A ונקבל:

$$AB\underline{x}_0 = A \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

· ואז נקבל $AB\underline{x}_0 = I\underline{x}_0 = \underline{0}$
· $I\underline{x}_0 = \underline{0}$ יקרה רק כאשר $\underline{x}_0 = \underline{0}$

– ולכן הפיתרון היחיד הוא הפיתרון הטריוויאלי.

* במילים אחרות, מימד מרחב הפתרונות הוא 0.

ב. צ"ל: מצאו את מרחב העמודה של A

- נרצה למצוא את $r(A)$ כי מימד מרחב העמודות של A שווה ל$r(A)$ לפי משפט.
  – ראינו ש $r(AB) = m$ ולפי משפט $m = r(AB) \leq r(A)$
  – מצד שני, $r(A) \leq min\{m, n\} \leq m$
    * ולכן $r(A) = m$
  – ולכן מרחב העמודה של A הוא $\mathbb{F}^m$
- ניקח בסיס סטנדרטי למרחב העמודה של A: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ג. צ"ל: מצאו את מימד מרחב הפתרונות של $BA\underline{x} = 0$

- כאמור, $(BA)_{n\times n}$.
- ומכיוון שהראנו ש $r(AB) = m$
  – וגם לפי משפט $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\} \leq min\{m, n\}$
    * אז מתקיים $m \leq n$
- לפי משפט, מימד מרחב הפתרונות של $BA\underline{x} = 0$ הוא $n - r(BA)$
- נוכיח שמרחב הפתרונות של $A\underline{x} = 0$ הוא שווה למרחב הפתרונות של $BA\underline{x} = 0$ (ואז נקבל שהמימדים שלהם שווים):
  – אנחנו רוצים להראות שוויון של תתי מרחבים, ולכן צריך להראות הכלה דו-כיוונית:
  – <u>כיוון ראשון:</u> $Ax = 0 \subseteq BAx = 0$
    * נניח ש$\underline{x}_0$ פיתרון של $A\underline{x} = 0$, כלומר $A\underline{x}_0 = 0$
      · נכפול ש-B משמאל ונקבל $BA\underline{x}_0 = B\underline{0} = \underline{0}$
  – <u>כיוון שני:</u> $BAx = 0 \subseteq Ax = 0$
    * נניח ש $\underline{x}_0$ הוא פיתרון של $BA\underline{x} = 0$, כלומר $BA\underline{x}_0 = 0$
      · מכיוון שהראנו בסעיף א' ש$B\underline{x} = 0$ מכיל רק את הפיתרון הטריוויאלי
      · אז מתקיים ש $BA\underline{x}_0 = 0 \Leftarrow A\underline{x}_0 = 0$

* דרך נוספת היא לכפול ב A משמאל ונקבל: $\underline{0} = A\underline{0} = \overbrace{AB}^{I}A\underline{x}_0$, כלומר $A\underline{x}_0 = 0$

- לכן קיבלנו שמימד מרחב הפתרונות של $A\underline{x} = 0$ שווה למימד מרחב הפתרונות של $BA\underline{x} = 0$
  - ומכיוון שמספר הנעלמים ב-A הוא n, מתקיים שהמימדים הללו שוות ל: $n - r(A)$
  - בסעיף ב' הראנו שהדרגה של A היא $r(A) = m$
  - ולכן מימד מרחב הפתרונות של $BA\underline{x} = 0$ הוא $n - m$

תרגיל 4.

- $U = \left\{ A \in M_{2\times3}^{(\mathbb{R})} \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} A = 0 \right\}$
- **צ"ל:** הוכיחו $dim(U) \geq 2$

פתרון:

- כדי להראות שהמימד של U הוא לפחות 2, צריך להראות שיש ב-U לפחות שתי מטריצות בת"ל.
- ניקח $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - לדוגמא: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- וניקח $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - לדוגמא: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- כלומר, קיימים $U \ni A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ וגם $A_2 \in \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ שהם לא פרופורציונליים (ולכן בת"ל).
- ולכן המימד של U הוא לכל הפחות 2

תרגיל 5. $U = \left\{ A \in M_{n\times n}^{(\mathbb{R})} : AB = BA \right\}$ עבור B נתונה כלשהי, $n > 1$
צ"ל: הוכיחו $dim(U) \geq 2$
פתרון:

- שוב, נרצה למצוא שתי מטריצות בת"ל ב-U.
- נשים לב ש- $I \in U$ וגם $B \in U$.

- נפריד למקרים:

1. אם I ו-B לא פרופורציונליות
   (א) אז I, B בת"ל ואז $dim\left(U\right)\geq2$ כנדרש.
2. אם I, B כן פרופורציונליות
   (א) אז B היא סקלרית והוכחנו בעבר שמטריצה סקלרית מתחלפת בכפל עם כל מטריצה בכפל
   (ב) ואז $U=\mathbb{F}^{n\times n}$
   (ג) והמימד של $\mathbb{F}^{n\times n}$ הוא $n^{2}\geq2$ (כי נתון $n>1$)

משפט 6. <u>(אלא אם כן מבקשים במפורש להוכיח את התרגיל הזה, אפשר להשתמש בו כמשפט)</u>

- נניח $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$
- ונתון $AB=\underline{0}$

צ"ל: $r\left(A\right)+r\left(B\right)\leq n$
הוכחה:

- $AB=0$ ולכן

$$A\overbrace{(b_{1},b_{2},b_{3}\ldots b_{k})}^{colB}=(0,0,\ldots0)$$

– כלומר כל עמודה של B היא פיתרון של המערכת ההומוגנית $A\underline{x}=0$
  * במילים אחרות, כל העמודות של B מוכלות במרחב הפתרונות $A\underline{x}=0$
  * זה אומר שמרחב העמודות של B מוכל במרחב הפתרונות של $A\underline{x}=0$
    · (כי לפי משפט, אם $\left\{ b_{11},b_{12}\ldots,b_{1k}\right\} \subseteq U$ ו-U הוא תת מרחב אז גם $span\left\{ b_{11},b_{12}\ldots,b_{1k}\right\} \subseteq U$)

– נקבל שמימד מרחב העמודות של B $\geq$ מימד מרחב העמודות של $A\underline{x}=0$
  * ומכיוון ש:
    1. $r\left(B\right)$ = מימד מרחב העמודות של B (לפי משפט שמימד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות שווה לדרגה)
    2. $n-r\left(A\right)$ = מרחב הפתרונות של $A\underline{x}=0$
    · קיבלנו: $n-r\left(A\right)\geq r\left(B\right)$
    · נעביר אגף ונקבל:

$$n\geq r\left(A\right)+r\left(B\right)$$

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | תרגול 17 - הילה

שם: איל שטיין

December 28, 2022

נושא השיעור: מטריצות הפיכות

נושא ראשון - מטריצות הפיכות:

הגדרה 1. מטריצה הפיכה:

$A^{n\times n}$ נקראת **הפיכה** אם קיימת $B^{n\times n}$ כך ש $AB=BA=I$

הערה 2. מוכיחים שאם קיימת B כזו אז היא יחידה וניתן לקרוא לה **ה**הופכית של A. היא מסומנת $B=A^{-1}$.

דוגמה 3. נניח ש $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ונרצה למצוא את ההופכית שלה.

- ניקח $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ונפתור את מערכת המשוואות:

$$a+2c=0$$

$$b+2d=0$$

$$0\cdot a+0\cdot c=0$$

$$0\cdot b+0\cdot d=1$$

  - אם למערכת הזו יש פיתרון אז המטריצה הפיכה.
    * ואם (כמו בדוגמא הזו) יש שורת סתירה במערכת המשוואות אז המטריצה לא הפיכה.

דוגמה 4. ניקח $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$. אם ננסה למצוא הופכית לפי הגדרה, נקבל מערכת עם שש עשרה משוואות.

- לכן נצטרך להשתמש במשפט מההרצאה.

משפט 5. משפט השקולים:

- התנאים הבאים על $A^{n\times n}$ שקולים:

1. A הפיכה
2. A שקולת שורות ל-I
3. $r\left(A\right)=n$
4. למערכת $A\underline{x}=0$ יש רק את הפיתרון הטריוויאלי
5. למערכת $A\underline{x}=b$ יש פיתרון לכל b
6. שורות A בת"ל
7. עמודות A בת"ל
8. שורות A פורשות את $\mathbb{F}^{n}$
9. עמודות A פורשות את $\mathbb{F}^{n}$
10. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות
11.
12.

תכונות של מטריצות הפיכות:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
2. $\left(A^{t}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{t}$
3. $\left(A^{n}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{n}$
4. אם A ו-B ריבועיות אז מתקיים:
   (א) AB הפיכה $\Longleftrightarrow$ גם A וגם B הפיכות. (לשים לב שהכיוון $\Leftarrow$ תמיד נכון אבל הכיוון $\Rightarrow$ לא תמיד נכון)
5. אם A,B ריבועיות אז: $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

תרגיל 6. הוכח/הפרך: A,B הפיכות. האם $A+B$ הפיכה?

- הטענה לא נכונה.
  - נביא דוגמא נגדית בעזרת תנאי מספר (3) במשפט: $r(A)=n$
    - נביא שתי מטריצות שבה $r(B)=r(A)=n$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

      · A,B הפיכות כי הדרגה שלהן היא 2.
      · $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
      · מכיוון ש$r(A+B)\neq n$ קיבלנו לפי המשפט ש$A+B$ לא הפיכה.

תרגיל 7. הוכח/הפרך: אם $A+B$ הפיכה, האם A,B הפיכות?

- הטענה לא נכונה.
  - נביא דוגמא נגדית בעזרת תנאי מספר (3) במשפט: $r(A)=n$
    - $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
    - $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
    - $A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
    - קיבלנו ש $r(A)=r(B)=1$, כלומר לא הפיכות
    - אבל $r(A+B)=2$ ולכן היא כן הפיכה.

תרגיל 8. הוכח/הפרך: אם A,B הפיכות אז מתקיים $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

- הטענה לא נכונה. נביא דוגמא נגדית:
  - $A=B=I$ הפיכות אז $A+B=2I$
  - $A^{-1}+B^{-1}=I+I=2I$
  - אבל $(A+B)^{-1}=\frac{1}{2}I$

תרגיל 9. הוכח/הפרך: A הפיכה אז למערכת $A^6\underline{x}=0$ יש רק את הפיתרון הטריוויאלי?

- הטענה נכונה:

- A הפיכה ולכן A^6הפיכה (כי לפי תכונה (4), מכפלת מטריצות הפיכות היא גם הפיכה).
- אם A^6 הפיכה, לפי סעיף (4) במשפט השקולים, למערכת $A^6\underline{x}=0$ יש רק את הפיתרון הטריוויאלי.

תרגיל 10. הוכח/הפרך: אם AB הפיכה אז BA הפיכה.

- הטענה לא נכונה. נביא דוגמא נגדית שבה A,B לא ריבועיות:
  - $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
  - $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$
    - * $AB=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
      - · אבל $BA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
      - · ומכיוון ש $r\left(BA\right)\neq n$ המטריצה BA לא הפיכה.

תרגיל 11. הוכח/הפרך: אם AB הפיכה ו-A,B ריבועיות אז BA הפיכה.

- הטענה נכונה.
- לפי משפט, אם AB הפיכה ושתיהן ריבועיות אז A,B שתיהן הפיכות.
  - מכיוון שמכפלת מטריצות הפיכות היא גם הפיכה, מתקיים שBA הפיכה.

תרגיל 12. הוכח/הפרך: אם $A_{m\times n}$ ו-$B_{n\times m}$ ו-$m<n$ אז BA לא הפיכה.

- הטענה נכונה.
- מכפל המטריצות נקבל $\left(AB\right)_{m\times m}$ ו$\left(BA\right)_{n\times n}$
  - נתבונן ב$\left(BA\right)_{n\times n}$
- לפי משפט $r\left(BA\right)\leq min\left\{ r\left(A\right),r\left(B\right)\right\}$
  - ומכיוון ש $r\left(A\right)\leq m$ מתקיים $r\left(BA\right)\leq min\left\{ r\left(A\right),r\left(B\right)\right\}\leq m<n$
    - * ולכן BA מסדר $n\times n$ היא עם דרגה קטנה ממש מ-n
      - · ולכן לפי סעיף (3) במשפט השקילות, BA היא לא הפיכה.

תרגיל 13. תהי A לא ריבועית. אז לפחות אחת מן המטריצות $A\cdot A^t$ או A^tA איננה הפיכה.

פתרון:

- אם $A_{m\times n}$ ו-A לא ריבועית אז בה"כ אם $n<m$
  - ואז כמו בתרגיל הקודם הדרגה של המכפלה AA^{t} קטנה או שווה מהדרגה המינימלית מבין $r\left(A\right)$ ו-$R\left(A^{t}\right)$
    - ואז נקבל $r\left(AA^{t}\right)\leq n<m$ ולפי משפט השקילות היא לא הפיכה.

תרגיל 14. הוכח/הפרך: אם $AB=\underline{0}$ ו-A הפיכה אז $B=\underline{0}$

- הטענה נכונה. נפתור בשלוש דרכים:

1. $AB=0\Leftarrow A\begin{pmatrix}* & * & * & *\\ b_{1} & b_{2} & b_{3} & \dots\\ * & * & * & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & *\end{pmatrix}$
   - כלומר כל עמודה b_{j} של B מקיימת $Ab_{j}=0$
     - ולכן כל עמודה של B היא פתרון של המערכת $A\underline{x}=0$
     - מכיוון שנתון שA הפיכה אז לפי משפט השקילות למערכת $A\underline{x}=0$ יש רק את הפיתרון הטריוויאלי
       - כלומר כל עמודה של B היא 0
       - לכן $B=\underline{0}$
2. נתון $A_{n\times n}B_{n\times k}=\underline{0}$
   - לפי משפט, $r\left(A\right)+r\left(B\right)\leq n$
   - מכיוון ש-A הפיכה מתקיים לפי משפט השקילות ש $r\left(A\right)=n$
   - ולכן $r\left(B\right)\leq0$
     - כלומר $r\left(B\right)=0$
       - ולכן B היא מטריצת האפס.
3. לפי הנתון $AB=\underline{0}$ ו-A הפיכה.
   - לכן נכפול משמאל בA^{-1} ונקבל:

$$\overbrace{A^{-1}A}^{=I}B=A^{-1}\underline{0}=\underline{0}$$

$$IB=A^{-1}\underline{0}=\underline{0}$$

$$B=\underline{0}$$

תרגיל 15. הוכח/הפרך: אם $AB=AC$ ו-A הפיכה אז $B=C$

- הטענה נכונה:

– נכפול משמאל ב-A^{-1} ונקבל:

$$\overbrace{A^{-1}A}^{=I}B=\overbrace{A^{-1}A}^{=I}C$$

$$IB=IC$$

$$B=C$$

תרגיל 16. הוכח/הפרך: A,B ריבועיות מסדר $n\times n$. אם $A+B=0$ אז $r\left(A\right)+r\left(B\right)<2n$

- הטענה לא נכונה.
  - נביא דוגמא נגדית של מטריצות סקלאריות: $A=I$, $B=-I$
    - $A+B=\underline{0}$, כלומר לא הפיכה.

תרגיל 17. הוכח/הפרך: A,B ריבועיות מסדר $n\times n$. אם $A\cdot B$ לא הפיכה אז $r\left(A\right)+r\left(B\right)<2n$

- הטענה נכונה.
- אם AB לא הפיכה ו-A,B ריבועיות אז לפחות אחת מהמטריצות לא הפיכה.
  - לפי משפט השקילות, לפחות לאחת המטריצות יש דרגה קטנה מ-n ולכן סכום הדרגות בהכרח קטן מ-$2n$.

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | תרגול 18 - הילה

שם: איל שטיין

January 2, 2023

נושא השיעור: טרנספורמציות ליניאריות - הוכחת ליניאריות, ט"ל מוכרות, משפט המימדים לט"ל

נושא ראשון - ט"ל:

- טרנספורמציה זו מילה נרדפת לפונקציה.
- בשביל שהיא תיקרא "ליניארית" היא צריכה לקיים שתי תכונות:

הגדרה 1. טרנספורמציה ליניארית

- יהי V,W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$.
- פונקציה $T:V\to W$ נקראת ט"ל אם:

1. לכל $\underline{v}_1,\underline{v}_2\in V$ מתקיים $T\left(\underline{v}_1+\underline{v}_2\right)=T\left(\underline{v}_1\right)+T\left(\underline{v}_2\right)$
2. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $\underline{v}\in V$ מתקיים $T\left(\alpha\underline{v}\right)=\alpha T\left(\underline{v}\right)$

הערה 2. אם T ט"ל אז מתקיים $T\left(\underline{0}_v\right)=0$.

- ולכן אם $T\left(\underline{0}_v\right)\neq0$ אז זו לא ט"ל.

תרגיל 3. קבעו עבור הטרנספורמציה הבאות האם היא ליניאריות:

- $T:R_2\left[x\right]\to M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}$ כך ש $T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}2a+c & b\\ 2c & a\end{pmatrix}$

פתרון:

1. נבדוק ש-T שומרת על חיבור (לא לקרוא לזה סגירות לחיבור)

(א) כלומר האם $T\left(\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)+\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)\right)=T\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)+T\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)$

- נבחר את הפולינומים ונקבל:

$$T\left(\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)+\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)\right)=T\left(\left(a_1+a_2\right)x^2+\left(b_1+b_2\right)x+\left(c_1+c_2\right)\right)$$

– נציב את הגדרת הפונקציה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 2\cdot(a_1+a_2)+(c_1+c_2) & (b_1+b_2) \\ 2\cdot(c_1+c_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2\cdot(a_1+a_2)+(c_1+c_2) & (b_1+b_2) \\ 2\cdot(c_1+c_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a_1+c_1 & b_1 \\ 2c_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+c_2 & b_2 \\ 2c_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= T\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)+T\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right) \end{aligned}$$

* כלומר קיבלנו ש $T\left(\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)+\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)\right)=T\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)+T\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)$
  · ולכן T שומרת על החיבור.

i. נבדוק ש-T שומרת על הכפל בסקלאר (לא לומר "T סגורה לכפל בסקלאר"):
- ניקח $T\left(\alpha\left(ax^2+bx+c\right)\right)$
  – נקבל: $=T\left(\alpha\cdot ax^2+\alpha\cdot bx+\alpha\cdot c\right)=\begin{pmatrix} \alpha\cdot 2a+\alpha\cdot c & \alpha\cdot b \\ \alpha\cdot 2c & \alpha\cdot a \end{pmatrix}$
  * נוציא את הסקלאר מהמטריצה ונציב את הגדרת הפונקציה:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} 2a+c & b \\ 2c & a \end{pmatrix}=\alpha\cdot T\left(ax^2+bx+c\right)$$

* כלומר קיבלנו ש-T שומרת על הכפל בסקלאר.

תרגיל 4. קבעו עבור הטרנספורמציה הבאות האם היא ליניארית:

- $T:R_3[x]\to R_2[x]$ כך ש $T(p(x))=p'(x)$

פתרון:

- נבחן את הגדרת הפונקציה ונקבל:

$$T\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=3x^2+bx+c$$

– אם היינו מנסים להוכיח ככה עבור פולינום ממעלה n היינו מקבלים ביטוי ארוך. לכן נוכיח בדרך אחר.

- ניקח שני פולינומים ממעלה 3 ונקבל:

$$T(p(x)+q(x))=(p+q)'(x)$$

– ולפי חוקי גזירה נקבל:

$$= p'(x) + q'(x)$$

* כלומר $T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$

• ניקח $\alpha \in \mathbb{F}$ ונקבל שלפי חוקי גזירה מתקיים:

$$T(\alpha \cdot p(x)) = (\alpha p)'(x) = \alpha \cdot p'(x) = \alpha T(p(x))$$

תרגיל 5. קבעו עבור הטרנספורמציה הבאות האם היא ליניארית:

• $T : M_{2\times2}^{(\mathbb{R})} \to R_2[x]$ כך ש $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b+1)x + c$

פתרון:

• הטרנספורמציה היא לא ליניארית. נביא דוגמא נגדית:

– ניקח שתי מטריצות: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

* וכעת לפי הגדרת הפונקציה מתקיים: $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}\right) = 6x^2 + 9x + 10$

* נבחן את $T\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ונקבל לפי הגדרת הפונקציה ש: $= 6x^2 + 10x + 10$

• מתקיים $T\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq T\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\right)$ ולכן היא לא ליניארית.

תרגיל 6. קבעו עבור הטרנספורמציה הבאות האם היא ליניארית:

• $T : R_2[x] \to R_2[x]$ כך ש $T(p(x)) = p(x+1)$

– בטויטה נציב מקדמים כדי לראות האם הפונקציה ט"ל:

$$\begin{aligned} T\left(ax^2 + bx + c\right) &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c \\ &= ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) \end{aligned}$$

• **תרגיל להוכיח לבד:** $(p+q)(x+1) = p(x+1) + q(x+1)$ וגם $(\alpha \cdot p)(x+1) = \alpha(p)(x+1)$

טרנספורמציות ליניאריות מוכרות:

1. $T\equiv 0$ היא "טרנספורמציית האפס".
2. $T:M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}\to\mathbb{R}_2[x]$ - זו דוגמא נגדית להרבה טענות.
3. $T:V\to V$ כך שלכל $\underline{v}\in V$ מתקיים $T(\underline{x})=\underline{x}$
   (א) הטרנספורמציה נקראת "טרנספורמציית הזהות".

תרגיל 7.

- תהי $T:M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}\to\mathbb{R}_2[x]$ כך ש $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=ax^2+(b+c)x+d$
- **צ"ל:** מצאו:

1. את $Ker\ T$ (כולל בסיס ומימד)
2. את $Im\ T$ (כולל בסיס ומימד)
3. האם T חד חד ערכית?
4. האם T "על"?

פתרון:

1. **תזכורת להגדרת גרעין -** $Ker\ T=\{\underline{v}\in V\ \mid T(\underline{v})=\underline{0}\}$
   - ואצלנו

$$=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ \mid T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\underline{0}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ \mid ax^2+(b+c)x+d=0x^2+0x+0\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ \mid a=0,b+c=0,d=0\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\ \mid b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\ \mid b\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

   - ולכן $B_{Ker\ T}=\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$
     - כלומר $dim\,(Ker\ T)=1$

2. **תזכורת להגדרת תמונה -** $Im\ T=\{\underline{w}\in W\ \mid\ \exists\,\underline{v}\in V,\ T(\underline{v})=\underline{w}\}$

- מהגדרת הטרנספורמציה ניקח איבר כללי של התמונה:

$$\left\{ax^2+(b+c)x+d \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

– מכיוון שנתנון לנו האיבר הכללי בהגדרת הפונקציה, נמצא קבוצה פורשת של האיבר הכללי ונקבל:

$$= span\left\{x^2,x,1\right\}$$

* מכיוון שהאיברים הפורשים הם שלושה פולינומים ממעלה שונה, הם בת"ל.
* ולכן $B_{Im\ T}=\left\{1,x,x^2\right\}$
* כלומר $dim\left(Im\ T\right)=3$

3. **תזכורת** - פונקציה T נקראת חד חד ערכית אם $T\left(\underline{x}\right)=T\left(\underline{y}\right)$ גורר $\underline{x}=\underline{y}$.

- במקרה שלנו יש משפט: T חד חד ערכית אם ורק אם בגרעין יש רק את וקטור האפס.
  – **משפט:** T חד חד ערכית $\iff Ker\ T=\{0\} \iff dim\left(Ker\ T\right)=0$.
- ראינו בסעיף (1) ש $dim\left(Ker\ T\right)=1$ ולכן לפי המשפט T לא חד חד ערכית.

4. **תזכורת -** T "על" אם $Im\ T=W$

- **משפט מההרצאה:** T "על" $\iff Im\ T=W \iff dim\left(Im\ T\right)=dim\left(W\right)$
  – ומכיוון שהראנו ש $dim\left(Im\ T\right)=3$ וגם המימד של $\mathbb{R}_2\left[x\right]$ הוא 3, קיבלנו לפי המשפט ש-T "על".

משפט 8. תזכורת מההרצאה: משפט המימדים לט"ל - אם $T:V\to W$ ט"ל אז $dim\left(Ker\ T\right)+dim\left(Im\ T\right)=dim\left(V\right)$

- נוודא את התשובות שלנו בתרגיל הזה:

$$\overbrace{dim\left(Ker\ T\right)}^{=1}+\overbrace{dim\left(Im\ T\right)}^{=3}=\overbrace{dim\left(V\right)}^{=dim(M_{2\times2})=4}$$

דוגמה 9. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_1\left[x\right]$ ט"ל.

- נשים לב שהט"ל הזו לא חד חד ערכית כי $\overbrace{dim\left(\mathbb{R}^3\right)}^{=3}>\overbrace{dim\left(\mathbb{R}_1\left[x\right]\right)}^{=2}$

דוגמה 10. תהי $T:\mathbb{R}_4\left[x\right]\to\mathbb{R}^3$ ט"ל.

- נשים לב שהט"ל הזו היא לא "על" כי המימד של V גדול מזה של W.

מסקנה 11. אם $T:V\to W$ ט"ל ו-$dim\left(V\right)=n$ וגם $dim\left(W\right)=m$

1. אם $n>m$ אז T לא חד חד ערכית
2. אם $m>n$ אז T לא על
3. אם $n=m$ אז T חד חד ערכית $\Longleftrightarrow$ T "על".

הוכחה.

1.

- נניח ש $n>m$
- לפי משפט המימדים לט"ל: $dim\left(Ker\ T\right)=dim\left(V\right)-\overbrace{dim\left(Im\ T\right)}^{\geq m}\geq n-m>0$
  - ומכיוון ש $dim\left(Ker\ T\right)>0$ יוצא ש T לא חד חד ערכית.

2.

- אם $m>n=dim\left(V\right)$
  - לפי משפט המימדים לט"ל מתקיים $dim\left(Im\ T\right)=dim\left(V\right)-dim\left(Ker\ T\right)\leq dim\left(V\right)$
    - ולכן $dim\left(Im\ T\right)\leq m=dim\left(W\right)$
      - מכיוון ש $dim\left(Im\ T\right)\leq dim\left(W\right)$ מתקיים ש-T לא "על".

3.

- נסמן $dim\left(V\right)=dim\left(W\right)=n$
- לפי משפט המימדים לט"ל, מתקיים $dim\left(Im\ T\right)+\overbrace{dim\left(Ker\ T\right)}^{=0}=dim\left(V\right)=n$
  - לפי הסעיפים שהראנו, T חד חד ערכית אם ורק אם $dim\left(Ker\ T\right)=0$ אם ורק אם $dim\left(Im\ T\right)=n$ אם ורק אם $dim\left(Im\ T\right)=dim\left(W\right)$
    - ולכן T "על".

■

הגדרה 12. הרכבה של ט"ל

- יהיו:
  - $T:V\to W$ ט"ל
  - $S:W\to U$ ט"ל.

- נגדיר $S \circ T$ באופן הבא:

$$S \circ T : V \to U$$

  - כך ש:

$$(S \circ T)(\underline{v}) : S(T(\underline{v}))$$

  - ובפרט, אם $T : V \to V$ ט"ל אז מתקיים T^2 באופן הבא:

$$T^2(\underline{v}) = T(T(\underline{v}))$$

תרגיל 13.

תהי $T : V \to V$ ט"ל.

א. הוכיחו $ker\ T \subseteq Ker\ T^2$

ב. הוכיחו $Im\ T^2 \subseteq Im\ T$

ג. אם $Ker\ T = Ker\ T^2$ אז $Ker\ T\ \ \oplus Im\ T = V$

א. פתרון:

- ניקח איבר כלשהו ב$Ker\ T$ ונוכיח שהוא נמצא גם ב$Ker\ T^2$:
  - יהי $\underline{x} \in Ker\ T$
  - אזי $T(\underline{x}) = \underline{0}$
    - ולכן $T(T(\underline{x})) = T(\underline{0}) = \underline{0}$
      - כלומר $T^2(\underline{x}) = \underline{0}$
      - ולכן $\underline{x} \in Ker\ T^2$
- הראנו הכלה ולכן $Ker\ T \subseteq Ker\ T^2$

ב. פתרון:

- יהי $y \in Im\ T^2$
  - כלומר קיים $\underline{z} \in V$ כך ש $T^2(\underline{z}) = y$
    - ולכן $T(T(\underline{z})) = y$
      - נסמן $T(\underline{z}) = \underline{x}$
      - ונקבל ש $T(\underline{x}) = y$
      - קיבלנו שקיים איבר $\underline{x} \in V$ כך ש $T(\underline{x}) = y$

- ולכן $y \in Im\ T$

- הראנו הכלה ולכן $Im\ T^2 \subseteq Im\ T$

ג. פיתרון:

- **צ"ל:** $Ker\ T + Im\ T = V$ וגם $Ker\ T \cap Im\ T = \{0\}$ (אפשר לשים לב שאם יש לנו את אחד מהם אז השני נובע ממש המימדים)
- ראשית נוכיח ש $Ker\ T \cap Im\ T = \{0\}$ על ידי לקיחת וקטור כללי בחיתוך והוכחה שהוא בהכרח שווה אפס:
  - יהי $\underline{x} \in Ker\ T \cap Im\ T$.
    - כלומר בפרט $\underline{x} \in Im\ T$.
      - ולכן קיים $\underline{v} \in v$ כך ש $T(\underline{v}) = \underline{x}$
      - $T^2(\underline{v}) = T(T(\underline{v})) = T(\underline{x})$
      - ומכיוון ש $\underline{x} \in Ker\ T$ אז $T(\underline{x}) = \underline{0}$
      - ולכן גם $T^2(\underline{v}) = \underline{0}$
      - כלומר $\underline{v} \in Ker\ T^2$
      - ומכיוון שנתון $Ker\ T^2 = Ker\ T$ נקבל ש- $\underline{v} \in Ker\ T$
      - $\underline{x} = T(\underline{v}) = \underline{0}$, כלומר $\underline{x} = 0$
    - ולכן $Ker\ T \cap Im\ T = \{0\}$.
- ידוע ש $Ker\ T + Im\ T \subseteq V$.
  - לפי משפט המימדים הראשון: $dim(Ker\ T + Im\ T) = dim(Ker\ T) + dim(Im\ T) - \overbrace{dim(Ker\ T \cap Im\ T)}^{=0}$
    - ולכן $dim(Ker\ T + Im\ T) = dim(Ker\ T) + dim(Im\ T)$
      - ולפי משפט המימדים השני, $dim(Ker\ T) + dim(Im\ T) = dim(V)$
      - נציב ונקבל: $dim(Ker\ T + Im\ T) = dim(V)$
      - ולכן $Ker\ T + Im\ T = V$
- הראנו ש$Ker\ T + Im\ T = V$ וגם $Ker\ T \cap Im\ T = \{0\}$ ולכן לפי הגדרה הסכום הוא סכום ישר:

$$Ker\ T \ \oplus Im\ T = V$$

דוגמה 14.

- $B_V = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$
- $\begin{cases} T(\underline{v}_1) = 0 \\ T(\underline{v}_2) = \underline{v}_1 \\ T(\underline{v}_3) = \underline{v}_2 \end{cases}$
  - נקבל ש:

1. $T^2(\underline{v}_1) = T(T(\underline{v}_1)) = T(\underline{0}) = \underline{0}$
2. $T^2(\underline{v}_2) = T(T(\underline{v}_2)) = T(\underline{v}_1) = \underline{0}$
3. $T^2(\underline{v}_3) = T(T(\underline{v}_3)) = T(\underline{v}_2) = \underline{v}_1$
4. $T^3(\underline{v}_1) = \underline{0}$
5. $T^3(\underline{v}_2) = \underline{0}$
6. $T^3(\underline{v}_3) = \underline{0}$

- קיבלנו דוגמא בה הגרעין הולך וגדל ככל שמרכיבים את הט"ל יותר פעמים.

דוגמה 15. תהי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ כך ש $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

- עבור $x=0$ נקבל $\underline{0} = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- אבל אם $x \neq 0$ אז נקבל $T^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

תרגיל 16. להוכיח לבד:

- יהיו:
  - $T:V\to W$ ט"ל.
  - $S:W\to U$ ט"ל.
  - $S\circ T:V\to U$
- **צ"ל:**
  1. $Ker\ T \subseteq Ker\ (S\circ T)$
  2. $Im\,(S\circ T) \subseteq Im\ S$

תרגיל 17. הוכח/הפרך: קיימת ט"ל $T:M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})} \to \mathbb{R}_1[x]$ כך ש $Ker\ T = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

- הטענה לא נכונה.
  - אם המימד של הגרעין הוא 1 ו- $Im\ T \subseteq \mathbb{R}_1[x]$ אז נקבל ש$Im\ T \leq 2$
  - ואז לפי משפט המימדים לט"ל נקבל $4 = dim\left(M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}\right) = \overbrace{dim\,(Im\ T)}^{\leq 2} + \overbrace{dim\,(Ker\ T)}^{=1}$
  - קיבלנו ש$4 = 3$ וזו סתירה.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 19 - הילה

שם: איל שטיין

January 4, 2023

נושא השיעור: טרנספורמציות ליניאריות - בנייה ושאלות הבנה

נושא ראשון - בניית ט"ל:

דוגמה 1. הגדרת ט"ל על בסיס:

- $T:\mathbb{R}^{3}\to M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}$
- $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$
  - אם T הוגדרה על איברי בסיס אז מכיוון שבסיס היא קבוצה פורשת אפשר לכתוב את הוקטור שמפעילים עליו את T בתור צירוף ליניארי של איברי הבסיס:

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} & =T\left(a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
 & =a\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+cT\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

    * ובמקרה שלנו נקבל:

$$a\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

- ולכן קיבלנו ט"ל:

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c & 2a+3b+c\\3a+b+c & 4a+c\end{pmatrix}$$

דוגמה 2. דוגמא שבה הוקטורים בתמונה הם ת"ל
$T:\mathbb{R}^2\to M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}$

- $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$
- נכתוב את האיבר הכללי כצ"ל של איברי הבסיס ונקבל ש:

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=T\left(b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(a-b)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

– מכיוון שT ט"ל מתקיים:

$$=b\cdot\underbrace{T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}+(a-b)\underbrace{T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}}$$

* כלומר $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-b&2a-b\\2a-b&2a-b\end{pmatrix}$

מסקנה 3. ברגע שהגדרנו ט"ל על איברי בסיס, היא הוגדרה לכל המרחב ואפשר להגדיר את התמונה להיות כל דבר.

משפט 4.

- יהיו:
  – U,V מרחבים וקטוריים.
  – $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\}$ בסיס של V.
  – $S=\{\underline{w}_1,\underline{w}_2,\dots,\underline{w}_n\}$ קבוצה כלשהי של איברים ב-W.

- אז קיימת ט"ל יחידה $T:V\to W$ כך ש $T\left(\underline{v}_i\right)=\underline{w}_i$.

תרגיל 5. מצאו ט"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_1\left[x\right]$ כך ש $Ker\ T=span\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ו- $Im\ T=span\left\{1+x,3+2x\right\}$

פתרון:

- לפני שמתחילים לבנות ט"ל, צריך לבדוק עם משפט המימדים לט"ל שאפשר לבנות כזו ט"ל.
  - במקרה הזה רוצים שנבנה ט"ל שבה $dim\left(Ker\ T\right)=1$ ו $dim\left(Im\ T\right)=2$ (כי שני הוקטורים בקבוצה הפורשת הם לא פרופורציונליים)
    * במקרה הזה זה אפשרי כי $2+1=3=dim\left(\mathbb{R}^3\right)$
- ניקח בסיס לגרעין, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, ונגדיר ש $T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0+0x$
  - נשלים את $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ לבסיס ונקבל בסיס לכל $\mathbb{R}^3$ - $B=\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
  - נסיים להגדיר את הט"ל על שאר החלקים של בסיס של כל מרחב $\mathbb{R}^3$ ונגדיר:
    * $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1+x$
    * $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=3+2x$
- בגלל המשפט, קיימת כזו ט"ל כי $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל-V ו-$\left\{1+x,3+2x\right\}$ היא קבוצה כלשהי ב-W.
  - בנוסף, ניזכר בעוד משפט:

  משפט 6. תמונות של איברי בסיס הם קבוצה פורשת של $Im\ T$.

    * ולכן נקבל שתמונות של איברי בסיס הם $Im\ T$, לכן $Im\ T=span\left\{0,1+x,3+2x\right\}$
      · בגלל הגדרת $span$ אפשר להורי את 0 מהקבוצה הפורשת ונקבל $Im\ T=span\left\{1+x,3+2x\right\}$
- לפי משפט המימדים, $\overbrace{dim\left(Im\ T\right)}^{=2}-\overbrace{dim\left(V\right)}^{=3}=dim\left(Ker\ T\right)$ לכן $dim\left(Ker\ T\right)=1$
  - מכיוון שהוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in Ker\ T$ וגם $dim\left(Ker\ T\right)=1$ אז נקבל ש $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ הוא בסיס של הגרעין.
    * אם הוקטור הוא בסיס לגרעין אז לפי הגדרה הוא גם קבוצה פורשת של הגרעין.
      · לכן $Ker\ T=span\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

- נמצא את T על איבר כללי:

– $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=T\left(a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(b-2a)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(c-3a)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ - (אם לא רואים ישר את האיבר הכללי אפשר גם לכתוב מערכת משוואות)

* ונקבל:

$$\begin{aligned}
&= a\cdot T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(b-2a)\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(c-3a)\cdot T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= a\cdot(0+0x)+(b-2a)\cdot(1+x)+(c-3a)\cdot(3+2x)\\
&= b+bx-2a-2ax+3c+2cx-9a-6ax\\
&= (b-8a+2c)\,x+(b-11a+3c)
\end{aligned}$$

תרגיל 7. מצאו ט"ל $T:M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}\to\mathbb{R}^3$ כך ש $Ker\ T=span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ ו- $Im\ T=span\left\{\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

- קודם כל נבדוק לפי משפט המימדים השני אם אפשר לבנות כזו ט"ל:
  – המימד של הגרעין הוא 2 כי $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה פורשת עם וקטורים בת"ל.
  – המימד של התמונה הוא 2 כי הקבוצה הפורשת היא קבוצה בת"ל.
  * ולכן נקבל ש $\overbrace{dim\,(Im\ T)}^{=2}+\overbrace{dim\,(Ker\ T)}^{=2}=4=dim\left(M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}\right)$, כנדרש.
- ניקח בסיס של הגרעין: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ ונשלח אותם לאיברי האפס:
  – $T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
  – $T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
  – נשלים לבסיס של $M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}$ ונגדיר:
  * $T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$

      * $T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$

- נסביר למה קיימת כזו העתקה, למה היא ט"ל ולמה היא עונה על הדרישות:
   - קיימת כזו ט"ל כי:
      * $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל-V ו-$\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה בתוך W ולכן לפי משפט קיימת ט"ל יחידה $T:V\to W$
   - לפי משפט, תמונות של איברי בסיס הם קבוצה פורשת ל-$Im\ T$ ולכן:

$$span\left(Im\ T\right)=span\left\{\cancel{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}},\cancel{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}},\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}\right\}$$
$$=span\left\{\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}\right\}$$

      * ובפרט קיבלנו $dim\left(Im\ T\right)=2$
   - לפי משפט המימדים: $\overbrace{dim\left(V\right)}^{=4}-\overbrace{dim\left(Im\ T\right)}^{=2}=dim\left(Ker\ T\right)=2$
      * בנוסף, $Ker\ T\ni\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
         · ולכן הם בסיס.
         · כלומר, $Ker\ T=span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

תרגיל 8. מצאו ט"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $ker\ T\subseteq Im\ T=\left\{\begin{pmatrix}a & b & b\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}$

פתרון:

- נרצה ש-$Im\ T=\left\{\begin{pmatrix}a & b & b\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}$
   - כלומר $Im\ T=span\left\{\left(1,0,0\right),\left(0,1,1\right)\right\}$
      * בפרט נרצה ש $2=dim\left(Im\ T\right)$
         · ולכן צריך שיתקיים $dim\left(Ker\ T\right)=1$ וגם $Ker\ T\subseteq Im\ T$
         · לכן נבחר, לדוגמא, $Ker\ T=span\left\{\left(1,0,0\right)\right\}$ ואז נקבל $Ker\ T\subseteq Im\ T$ גם $dim\left(Ker\ T\right)=1$
- כלומר נמצא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש $Ker\ T=span\left\{\left(1,0,0\right)\right\}$ ו-$Im\ T=span\left\{\left(1,0,0\right),\left(0,1,1\right)\right\}$
   - נגדיר $T\left(1,0,0\right)=\left(0,0,0\right)$
      * ונשלים לבסיס של $\mathbb{R}^3$ כך:

- $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

- קיימת כזו ט"ל כי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-V ו-$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה ב-W ולכן לפי משפט קיימת כזו ט"ל יחידה $T:V\to W$
- לפי משפט, תמונות של איברי בסיס הם קבוצה פורשת של $Im\ T$
  - לכן $Im\ T=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
    * כלומר $Im\ T=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
      - כלומר $Im\ T=\{(a,b,b):a,b\in\mathbb{R}\}$, כנדרש.
- לפי משפט המימדים, $dim\,(Ker\ T)=\overbrace{dim\,(V)}^{4=3}-\overbrace{dim\,(Im\ T)}^{=2}=1$
  - מכיוון שהגדרנו את T כך ש $(1,0,0)\in Ker\ T$ קיבלנו ש $\{(1,0,0)\}$ בסיס ל-$Ker\ T$
    * בסיס היא קבוצה פורשת ולכן $Ker\ T=span\{(1,0,0)\}$
      - ולכן $Ker\ T\subseteq Im\ T$, כנדרש.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 20 - הילה

שם: איל שטיין

January 9, 2023

נושא השיעור: ט"ל, מטריצה מייצגת

נושא ראשון - ט"ל:

תרגיל 1. האם קיימת ט"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש:

$$T\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8 & 8\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 9 & 9\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7 & 7\end{pmatrix}$$

פתרון:

- אם שלושת הוקטורים שעליהם היינו מפעילים את T היו בסיס אז התשובה הייתה כן.
- אבל התשובה במקרה הזה היא שלא קיימת ט"ל כזו:
  - כי כשיש תלות במקור היא מעבירה את התלות לתמונה.
    - כלומר אם הייתה קיימת כזו ט"ל אז היא הייתה צריכה לקיים:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

· אבל אצלנו זה לא מתקיים כי:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\9\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\17\\17\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}$$

ולכן לא קיימת כזו ט"ל.

תרגיל 2.

א. אם $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ בת"ל, האם זה אומר ש $\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$ בת"ל?

ב.אם $\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$ בת"ל, האם זה אומר ש$\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ בת"ל?

א. פתרון:

- הטענה לא נכונה.
  - דוגמא נגדית: טרנספורמצית האפס.
    - * במקרה כזה מתקיים $T(\underline{v}_1)=T(\underline{v}_2)=\ldots=T(\underline{v}_n)=\underline{0}$ ולכן $\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$ ת"ל.

ב. פתרון:

- הטענה נכונה.
- נניח כי $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n=0$
  - ואז נקבל:

$$T(\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_n\underline{v}_n)=T(0)=\underline{0}$$

  - ומכיוון ש-T היא ט"ל מתקיים:

$$\alpha_1T(\underline{v}_1)+\alpha_2T(\underline{v}_2)+\ldots+\alpha_nT(\underline{v}_n)=0$$

    - * ומכיוון שהנחנו ש $\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$ בת"ל קיבלנו:

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$$

הערה 3. לגבי סעיף א':

- אם היה נתון $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$בת"ל וגם ש-$T$ חד חד ערכית אז כן היה מתקיים ש $\{T(\underline{v}_1),T(\underline{v}_2),\ldots,T(\underline{v}_n)\}$ בת"ל.
- **הוכחה:**

– נניח כי

$$\alpha_1 T(\underline{v}_1) + \alpha_2 T(\underline{v}_2) + \ldots + \alpha_n T(\underline{v}_n) = \underline{0}$$

$$T(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n) = \underline{0}$$

– מכיוון ש-T חח"ע ומצאנו וקטור שנשלח ל-$\underline{0}$ כשמפעילים עליו את T, קיבלנו ש:

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n \in Ker\ T$$

* כלומר מכיוון ש-T חד חד ערכית אז $Ker\ T = \{0\}$. ולכן:

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = 0$$

· ומכיוון ש $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ בת"ל, יוצא שכל הסקלארים שווים אפס:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

· ולכן $\{T(\underline{v}_1), T(\underline{v}_2), \ldots, T(\underline{v}_n)\}$ בת"ל.

תרגיל 4.

- נתון:
  - $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  - $T\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$
  - $T\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$
- **צ"ל:** הוכיחו שקיימת T^{-1} ומצאו אותה.

פתרון:

- כדי להוכיח שקיימת הופכית, צריך להראות ש-T חד חד ערכית ועל:
- ראשית, $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ הם בסיס ל-$\mathbb{R}^2$
  - לפי משפט, תמונות של איברי בסיס הם קבוצה פורשת ל-$Im\ T$.
    * ומכיון ש-$\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל, הם בסיס ל-$Im\ T$
      · ומכיוון ש-$dim\,(Im\ T) = 2$ מתקיים ש-T היא "על".

- לפי משפט המימדים,

$$dim\,(Ker\ \ T) = \overbrace{dim\,(V)}^{=2} - \overbrace{dim\,(Im\ \ T)}^{=2}$$

$$dim\,(Ker\ \ T) = 0$$

  - ולכן T חד חד ערכית.
    - כלומר T חד חד ערכית ועל ולכן קיימת T^{-1}

- מהגדרת פונקציה הפיכה נשים לב ש:

$$T^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

  - מכיוון ש-$\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^2$ אז T^{-1} מוגדרת על איברי בסיס.

- ואם נרצה למצוא איבר כללי של T^{-1} נקבל:

$$\begin{aligned} T^{-1}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} &= T\left(\alpha \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right) \\ &= T^{-1}\left((b-a)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} + (2a-b)\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

  - וזה שווה ל:

$$T^{-1}\left((b-a)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\right) + T^{-1}\left((2a-b)\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= (b-a)\cdot\underbrace{T^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}} + (2a-b)\cdot{}^{-1}\underbrace{T\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} &= (b-a)\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + (2a-b)\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \\ &= ((b-a), (2a-b)) \end{aligned}$$

תרגיל 5. התרגיל הזה לא הסתדר בשיעור:

- יהי V מרחב וקטור מעל שדה אינסופי, $dim\left(V\right)\geq 2$
- יהי $\underline{v}\in V$ כלשהו.

צ"ל: קיימים אינסוף אופרטורים שגרעינם נפרש על ידי $\underline{v}$.
פתרון:

- רעיון ההוכחה: אנחנו רוצים ש $Ker\ T=span\left(\underline{v}\right)$
  - ניקח את $\underline{v}$ ונשלח אותו לאפס. כלומר $T\left(\underline{v}\right)=\underline{0}$.
    - נכתוב את $\underline{v}$ כצ"ל של איברי הבסיס ונרצה לשלוח את הצ"ל למרחב ממימד $n-1$.
  - מכיוון $dim\left(V\right)\geq 2$, קיימים $\underline{v},\underline{u}\in V$ שהם בת"ל.
  - נשלח את $\underline{v}\rightarrow 0$
  - ונשלח כל $\underline{u}\notin span\left(\underline{v}\right)$ כך: $\underline{u}\rightarrow\underline{v}+\alpha\cdot\underline{u}$

- **הוכחה:**
  - נוכיח שקיימות אינסוף ט"ל $\left\{T_{\alpha}\right\}$ כאשר $\alpha\in\mathbb{F}$, שהן שונות אחת מהשנייה ו- $Ker\ T=span\left\{\underline{v}\right\}$
  - נגדיר T_{α} (כאשר $\alpha\in\mathbb{F}$) באופן הבא:
    1. הגדרת $T_{\alpha}:V\rightarrow V$
    2. $T_{\alpha}\left(\underline{v}\right)=\underline{0}$
    3. לכל $\underline{u}\notin span\left\{\underline{v}\right\}$ מתקיים: $T\left(\underline{u}\right)=\alpha\cdot\underline{u}$
       - T מוגדרת לכל $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$ כי $u\notin span\left\{\underline{v}\right\}$
         - במבחן היינו צריכים להוכיח ש-T הזו היא ט"ל, כלומר מקיימת שמירה על חיבור ועל כפל בסקלאר.
       - אחרי שהגדרנו את T_{α} כאשר $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$ נשאר לנו להוכיח ש:
         1. T היא ט"ל.
         2. $Ker\ T_{\alpha}=span\left(\underline{v}\right)$ - כלומר הגרעין של T_{α} נפרש על ידי $\underline{v}$
         3. לכל $\alpha\neq\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים $T_{\alpha}\neq T_{\beta}$ - כלומר שיש אינסוף העתקות כאלה.
- נוכיח את (1) - כלומר T ט"ל
  - **שומרת על חיבור:**
    - יהי $\underline{x},\underline{y}\in V$. **צ"ל:** $T\left(\underline{x}+\underline{y}\right)=T\left(\underline{x}\right)+T\left(\underline{y}\right)$
    - נחלק לשלושה מקרים:
      1. אם $\underline{x},\underline{y}\in span\left(\underline{v}\right)$
      2. אם $\underline{x}\in span\left\{\underline{v}\right\}$ וגם $y\notin span\left\{\underline{v}\right\}$
         (א) במקרה הזה מכיוון ש $\underline{x}\in span\left\{\underline{v}\right\}$ נקבל: $\underline{x}=m\cdot\underline{v}$
            i. ולכן $\left(\underline{x}+\underline{y}\right)\notin span\left\{\underline{v}\right\}$

ii. נבחן את $T\left(\underline{x}+\underline{y}\right)$ ונראה שיש פה בעיה כי זו לא ט"ל

3. אם $x,y,\notin span\left\{ \underline{v}\right\}$

(א) במקרה הזה נקבל $T\left(\underline{x}+\underline{y}\right)=\alpha\left(\underline{x}+\underline{y}\right)=\alpha\cdot\underline{x}+\alpha\cdot\underline{y}=T\left(\underline{x}\right)+T\left(\underline{y}\right)$

תרגיל 6.

- כמה ט"ל $T:Z_{5}^{2}\to Z_{5}$ יש?
  - וכמה ט"ל כאלה יש שהן חד חד ערכיות?

פתרון:

- השאלה היא כמה אפשרויות יש להגדיר על איברי בסיס.
- נרצה להגדיר את $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ואת $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ כך שהן יהיו שונות:
  - $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ כך שלכל b יש 5 אפשרויות ולכל a יש 5 אפשרויות.
  - $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ כך שלכל c יש 5 אפשרויות ולכל d יש 5 אפשרויות.
    - סה"כ 5^{4} אפשרויות = 625 אפשרויות.
- כמות הט"ל שהן חד ערכיות היא:
  - $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ - ומכיוון שאסור לשלוח ל- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (אחרת T לא תהיה חח"ע) יש 24 אפשרויות.
  - $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ - צריך לדרוש ש $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ ולכן נשארו 20 אפשרויות.
    - סה"כ יש $20\cdot24$ אפשרויות.

תרגיל 7. הוכח/הפרך:

- נניח שיש ט"ל $T:V\to V$.
- $\left\{ \underline{v}_{1},\underline{v}_{2},\underline{v}_{3},\underline{v}_{4}\right\}$ בסיס של V

א. אם $T\left(\underline{v}_{1}\right),T\left(\underline{v}_{2}\right)$ בסיס ל-$Im\ T$, האם $\underline{v}_{3},\underline{v}_{4}$ בסיס לגרעין?

ב. אם $\underline{v}_{3},\underline{v}_{4}$ בסיס ל-$Ker\ T$, האם $T\left(\underline{v}_{1}\right),T\left(\underline{v}_{2}\right)$ בסיס ל-$Im\ T$?

א. פתרון:

- הטענה לא נכונה.
  - נביא דוגמא נגדית:

* נגדיר ט"ל על איברי בסיס (ולכן היא קיימת):

$$T\left(\underline{v}_1\right)=\underline{v}_1$$

$$T\left(\underline{v}_2\right)=\underline{v}_2$$

$$T\left(\underline{v}_3\right)=\underline{v}_1$$

$$T\left(\underline{v}_4\right)=\underline{v}_2$$

· במקרה הזה, תמונות של איברי בסיס הם קבוצה פורשת ל-$Im\ T$:

$$\begin{aligned}Im\ T&=span\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_1,\underline{v}_2\right\}\\&=span\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\right\}=span\left\{T\left(\underline{v}_1\right),T\left(\underline{v}_2\right)\right\}\end{aligned}$$

· אבל $\underline{v}_4,\underline{v}_3\notin Ker\ T$ ולכן הם בפרט לא בסיס של $Ker\ T$.

ב. פתרון:

- אם $\underline{v}_3,\underline{v}_4$ בסיס ל-$Ker\ T$ מתקיים לפי הגדרה $T\left(\underline{v}_3\right)=T\left(\underline{v}_4\right)=\underline{0}$
- לפי הנתון, לפי משפט המימדים לט"ל מתקיים: $dim\left(Ker\ T\right)=2 \Leftarrow dim\left(Im\ T\right)=2$
- דרך א':
  – מכיוון שתמונות של איברי בסיס הם קבוצה פורשת לתמונה מתקיים:

$$\begin{aligned}Im\ T&=span\left\{0,0,T\left(\underline{v}_1\right),T\left(\underline{v}_2\right)\right\}\\&=span\left\{T\left(\underline{v}_1\right),T\left(\underline{v}_2\right)\right\}\end{aligned}$$

* ומכיוון ש $dim\left(Im\ T\right)=2$ קיבלנו ש- $\left\{T\left(\underline{v}_1\right),T\left(\underline{v}_2\right)\right\}$ בסיס של $Im\ T$.

- דרך ב':
  – נניח ש- $\alpha\cdot T\left(\underline{v}_1\right)+\beta\cdot T\left(\underline{v}_2\right)=0$
    * מכיוון ש-T ט"ל מתקיים $T\left(\alpha\underline{v}_1+\beta\underline{v}_2\right)=0$
      · כלומר $\alpha\underline{v}_1+\beta\underline{v}_2\in Ker\ T=span\left\{\underline{v}_3,\underline{v}_4\right\}$
      · לכן קיימים δ,λ כך ש $\alpha\cdot\underline{v}_1+\beta\cdot\underline{v}_2=\delta\cdot\underline{v}_3+\lambda\cdot\underline{v}_4$

- נעביר אגפים ונקבל:

$$\alpha \cdot \underline{v}_1 + \beta \cdot \underline{v}_2 - \delta \cdot \underline{v}_3 - \lambda \cdot \underline{v}_4 = 0$$

- ומכיוון ש $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ בת"ל, כל הסקלארים שווים אפס.
- ולכן $T(\underline{v}_1), T(\underline{v}_2)$ בת"ל.
- ולכן הם בסיס של $Im\ T$.

נושא שני - מטריצות מייצגות:

הערה 8. דוגמא לט"ל חשובה:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{m\times n}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

דוגמה 9.

$$\begin{cases} T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Ker\ T &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

- כלומר קיבלנו ש-$Ker\ T$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\underline{x} = 0$

– נדרג את המערכת ונקבל:

$$Ker\ T = span\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

* הערה חשובה: $dim\left(Ker\ T\right) =$ מימד מרחב הפתרונות $= 3 - r\left(A\right) = 2$

- $Im\ T$ שווה למרחב העמודות של המטריצה A.
  – $dim\left(Im\ T\right) =$ מימד מרחב העמודות $= r\left(A\right)$

סיכום:

- עבור $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $T\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
  – ידוע ש $Ker\ T$ = מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\underline{x} = 0$
  – וגם ידוע ש $Im\ T$ = מימד מרחב העמודות של A.

הגדרה 10. מטריצה מייצגת $T : V \to W$

- יהיו:
  – $T : V \to W$ ט"ל.
  – $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ בסיס של V
  – $C = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_m\}$ בסיס של W.
- אזי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים B, C היא:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \left[T\left(\underline{v}_1\right)\right]_C & \left[T\left(\underline{v}_2\right)\right]_C & \ldots & \left[T\left(\underline{v}_n\right)\right]_C\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}_{m\times n}$$

משפט 11. לכל $\underline{v} \in V$ מתקיים: $\left[T\left(\underline{v}\right)\right]_C = [T]_B^C\left[\underline{v}\right]_B$

דוגמה 12.

- ניקח $T : \mathbb{R}_2\left[x\right] \to M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}$

– המוגדרת $T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}a & 2b\\ 3c & a+b+c\end{pmatrix}$

– נתון $B=\left\{1,1+x,1+x+x^2\right\}$ בסיס של V

– נתון $C=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של W.

צ"ל:

א. מצאו את $[T]_B^C$

ב. חשבו $T\left(1+2x+x^2\right)$ בעזרת T ובעזרת $[T]_B^C$

א. פתרון:

- נרצה לחשב את $T\left(\underline{v}_1\right)=T\left(1\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

– נכתוב את $\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right]_C$ בצורה הבאה: $\overbrace{\alpha}^{=0}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\overbrace{\beta}^{=0}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\overbrace{\delta}^{=3}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\overbrace{\lambda}^{=1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

* ולכן $\left[T\left(\underline{v}_1\right)\right]_C=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$

- נרצה לחשב את $T\left(\underline{v}_2\right)=T\left(1+x\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

– ונקבל $\left[T\left(\underline{v}_2\right)\right]_C=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$

- נרצה לחשב את $T\left(\underline{v}_3\right)=T\left(1+x+x^2\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

– קיבלנו ש $\left[T\left(\underline{v}_3\right)\right]_C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$

- ולכן $[T]_B^C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

ב. פתרון:

- <u>דרך א':</u>

– $T\left(1+2x+x^2\right)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

• <u>דרך ב':</u>

– $$\left[T\left(1+2x+x^2\right)\right]_C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&2\\3&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}\left[\left(1+2x+x^2\right)\right]_B$$

* נשים את $\left(1+2x+x^2\right)$ במערכת משוואת כדי לקבל וקטור קוארדינטות לפי בסיס B ונקבל: $\left[\left(1+2x+x^2\right)\right]_B=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

* כלומר:

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&2\\3&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\\4\end{pmatrix}$$

· ולכן:

$$\left[T\left(1+2x+x^2\right)\right]_C=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | תרגול 21 - הילה

שם: איל שטיין

January 11, 2023

נושא השיעור: מטריצה מייצגת

- תזכורת על תרגיל משיעור שעבר:
  - יהי V מרחב וקטורי ו-$dim\left(V\right)\geq2$, V ממימד סופי.
  - יהי $\underline{v}\in V$ כלשהו.
  - **צ"ל:** קיימים אינסוף אופרטורים ליניאריים שגרעינם נפרש על ידי $\underline{v}$.
  - **פתרון:**
    - נשלח את $\underline{v}\to0$
    - את $\underline{v}_{2}\to\alpha\cdot\underline{v}_{2}$ ואת $\underline{v}_{3}\to\alpha\underline{v}_{3}$ וכן הלאה.

נושא ראשון - מטריצה מייצגת $T:V\to V$

- נקרא גם "אופרטור ליניארי".

הגדרה 1. מטריצה מייצגת $T:V\to V$

- יהי $B=\left\{ \underline{v}_{1},\underline{v}_{2},\ldots,\underline{v}_{n}\right\}$ בסיס ל-V
- אז המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B היא:

$$\left[T\right]_{B}=\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\left[T\left(\underline{v}_{1}\right)\right]_{B} & \left[T\left(\underline{v}_{2}\right)\right]_{B} & \ldots & \left[T\left(\underline{v}_{n}\right)\right]_{B}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}$$

משפט 2.

- לכל $\underline{v}\in V$ מתקיים:

$$\left[T\left(\underline{v}_{1}\right)\right]_{B}=\left[T\right]_{B}\cdot\left[\underline{v}_{1}\right]_{B}$$

תרגיל 3.

- נתונה ט"ל $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת $T(p(x))=p(0)\cdot x^2+2p(1)x$
- $B=\left\{2,1+x,3x^2\right\}$

א. מצאו את $[T]_B$
ב. מצאו את $T\left(3+x+x^2\right)$
פתרון:
א.

- $$[T]_B=\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [T(2)]_B & [T(1+x)]_B & \dots & \left[T\left(3x^2\right)\right]_B\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$
- נסמן $p(x)=0x^2+0x+2$
- $T(2)=2x^2+2\cdot2\cdot x=2x^2+4x$
  - ולכן $[T(2)]_B=\left[2x^2+4x\right]_B$
    * כדי למצוא את וקטור הקוארדינטות של $2x^2+4x$ נשים במערכת:

$$2x^2+4x=\alpha\cdot(x)+\beta(1+x)+\delta\left(3x^2\right)$$

$$\delta=\frac{2}{3}$$

$$\beta=4$$

$$\alpha=-2$$

· כלומר $\left[2x^2+4x\right]_B=\begin{pmatrix}-2\\4\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

- $T(1+x)=1\cdot x^2+2\cdot2\cdot x=x^2+4x$
  - $\left[x^2+4x\right]_B=\begin{pmatrix}-2\\4\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
- $T\left(3x^2\right)=0\cdot x^2+2\cdot3\cdot x=6x$

- $[6x]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

- כלומר:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 6 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ב. פתרון:

- <u>דרך א':</u> בעזרת T
  - $T\left(3+x+3x^2\right) = 3x^2 + 2\cdot 7x$
  - $T\left(3+x+3x^2\right) = 3x^2 + 14x$
- <u>דרך ב':</u> בלי T
  - לפי המשפט, $\left[T\left(3+x+3x^2\right)\right]_B = [T]_B\left[3+x+3x^2\right]_B$
    * כלומר מקבלים:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 6 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

· ולכן: $\left[T\left(3+x+3x^2\right)\right]_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$

· נכפול את וקטור הקוארדינטות באיברי הבסיס כדי למצוא את $T\left(3+x+3x^2\right)$:

$$T\left(3+x+3x^2\right) = -7\cdot(2) + 14\cdot(1+x) + \left(3x^2\right) = 3x^2 + 14$$

תרגיל 4.

- נתונה ט"ל $T: M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})} \to M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}$
- נתון $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל-V
- נתונה מטריצה מייצגת: $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

א. מצאו את $T\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

ב. מצאו את $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

ג. האם T חד חד ערכית?

ד. האם T על?

ה. מצאו בסיס ל-$Ker\ T$

ו. מצאו בסיס ל-$Im\ T$

א. פתרון:

- לפי המשפט: $\left[T\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_B=(T)\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_B$

  – ולכן $\left[T\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&2&1&4\\1&3&2&1\\0&4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$

  * נכפול את הבסיס בוקטור הקואורדינטות כדי למצוא את $T\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ ונקבל:

$$T\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6\\3&1\end{pmatrix}$$

ב. פתרון: לא פתרנו בשיעור.

- <u>דרך א':</u>

  – כדי למצוא את T, צריך למצוא מה הערכים של T על איברי בסיס.

  * באותו אופן שבו מצאנו את ערכי T בתרגילים הקודמים, נמצא את:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&8\\7&3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-5\\-6&-4\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3\\2&1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-4\\-2&0\end{pmatrix}$$

· ואז נקבל:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=T\left(a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

– <u>דרך ב':</u>

* אנחנו יודעים ש:

$$\left[T\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}3\\4\\1\\5\end{pmatrix}$$

* ועכשיו צריך למצוא את

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=T\left(\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

ג. פתרון:

- לא כדאי למצוא את $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ בשביל למצוא את הגרעין והתמונה כי זה לוקח הרבה זמן.

- במקום לעשות את זה, ניזכר במשפט משיעור קודם:
  - אם ניקח $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ וגם $T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$
    * מרחב הפתרונות של $A\underline{x}=0$ הוא $Ker\ T$
      · ולכן $dim\left(Ker\ T\right)=n-r\left(A\right)$
    * מרחב העמודות של A הוא $Im\ T$
      · ולכן $r\left(A\right)=dim\left(Im\ T\right)$

- **תזכורת:**
  - $dim\left(Ker\ T\right)=\overbrace{n}^{=dim(V)}-r\left(\left[T\right]_B\right)$
  - $dim\left(Im\ T\right)=r\left(\left[T\right]_B\right)$

- ניקח את המטריצה המייצגת ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&2&1&4\\1&3&2&1\\0&4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&2&1&4\\0&0&1&-6\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

  - קיבלנו ש $r\left(\left[T\right]_B\right)=4$ ולכן $dim\left(Im\ T\right)=4=dim\left(V\right)$
    * ולכן T "על"
  - בנוסף קיבלנו ש $dim\left(Ker\ T\right)=0$
    * ולכן T חד חד ערכית.

ה. פתרון: $Ker\ T=\{0\}$ ולכן אין לו בסיס

ו. פתרון:

- $Im\ T=M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}$ כי T "על"
  - לכן ניתן לבחור כל בסיס של מרחב המטריצות 2×2 - לדוגמא הבסיס הנתון או בסיס סטנדרטי.

תרגיל 5.

- נתון $T:\mathbb{R}_2\left[x\right]\to\mathbb{R}_2\left[x\right]$
- בסיס $B=\left\{1,1+x,1+x+x^2\right\}$
- המטריצה המייצגת היא $\left[T\right]_B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

צ"ל:

א. האם T חד חד ערכית?

ב. האם T "על"? לא.

ג. מצאו בסיס ל-$Ker\ T$

ד. מצאו בסיס ל-$Im\ T$

א. פתרון:

- $dim\left(Im\ T\right)=2$ ולכן התשובה היא לא.

ב. פתרון:

- $dim\left(Ker\ T\right)=1$ ולכן התשובה היא לא.

ג. פתרון:

- ניקח את הקוארדינטות של $Im\ T$ ונקבל:

$$span\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} =span\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_{[Im\ T]}=\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_{Im\ T}=\{1,3+x\}$$

ד. פתרון:

- $Ker\ T$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית, כלומר פתרון כללי של המערכת ההומוגנית.
  - אם נפתור את המערכת ההומוגנית, נקבל (לדוגמא) שהפתרון הכללי הוא $span\left\{ \begin{pmatrix}7\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$ - (לא היה זמן בשיעור אז זה לא הפיתרון האמתי אלא וקטור כלשהו)
    - ולכן נקבל ש: $B_{Ker\ T}=\left\{ 7\cdot(1)+1\cdot(1+x)+5\cdot\left(1+x+x^{2}\right)\right\}$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 22 - הילה

שם: איל שטיין

January 16, 2023

נושא השיעור: מטריצה מייצגת (שאלות הבנה), דטרמיננטים

נושא ראשון - שאלות הבנה על מטריצה מייצגת:

תרגיל 1.

- נתון:
  - $B=(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3)$ בסיס ל-V
  - $C=(2\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_3)$ בסיס נוסף ל-V
  - נתונה T:

$$T(\underline{v}_1)=\underline{v}_1-\underline{v}_2$$

$$T(\underline{v}_2)=\underline{v}_1-\underline{v}_3$$

$$T(\underline{v}_3)=\underline{v}_2+\underline{v}_3$$

צ"ל:

1. $[T]_E$
2. $[T]_C$
3. $T^{-1}(\underline{v}_1)$

1. פתרון:

- $[T]_B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(\underline{v}_1)]_B & [T(\underline{v}_2)]_B & [T(\underline{v}_3)]_B \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
  – ומכיוון ש: $T(\underline{v}_1) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$
    * נקבל $[T(\underline{v}_1)] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- כלומר $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. פתרון:

1. דרך ראשונה: בלי מטריצות מעבר
   - $[T]_C = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(c_1)]_C & [T(c_2)]_C & [T(c_3)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
   - $T(c_1) = T(2\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = 2T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2) = 3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3$
     – נפתור מערכת משוואות:

$$3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \alpha(2\underline{v}_1 + \underline{v}_1) + \beta(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \delta\underline{v}_3$$

$$3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3 = \alpha \cdot 2\underline{v}_1 + \alpha \cdot \underline{v}_1 + \beta \cdot \underline{v}_1 + \beta \cdot \underline{v}_2 + \delta \cdot \underline{v}_3$$

$$(3 - 2\alpha - \beta)\underline{v}_1 + (-2 - \alpha - \beta)\underline{v}_2 + (-1 - \delta)\underline{v}_3 = 0$$

$$(3 - 2\alpha - \beta) = 0 \qquad (1)$$

$$(-2 - \alpha - \beta) = 0 \qquad (2)$$

$$(-1 - \delta) = 0 \qquad (3)$$

* נפתור את את המערכת ונקבל: $\alpha = 5,\ \beta = -7,\ \delta = -1$
* כלומר $[T(c_1)] = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

- נחפש את $[T(c_2)]$ ונקבל $T(c_2) = T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \ldots = 3(2\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + 4(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \underline{v}_3$
  - כלומר $[T(c_2)] = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$
- נחפש את $T(c_3) = T(\underline{v}_3) = \ldots = -1 \cdot (2\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + 2(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3$
  - כלומר $[T(c_3)] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. דרך שנייה: עם מטריצות מעבר

- לפי משפט: $[T]_C = P_{C\to B}[T]_B P_{B\to C}$
  - $P_{B\to C} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ [c_1]_B & [c_2]_B & [c_3]_B \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $P_{C\to B} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ [b_1]_C & [b_2]_C & [b_3]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ וגם $P_{C\to B} = P_{B\to C}^{-1}$
    * לכן נמצא את ההופכית של $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ונקבל:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- כלומר $[T]_C = P_{C\to B}[T]_B P_{B\to C}$
- נכפול את שלושת המטריצות זו בזו ונקבל:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -7 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

- נחשב את הדרגה של המטריצות המייצגות של $[T]_C$ או של $[T]_B$ (מה שיותר נוח לדרג).
  - נקבל ש $rank([T]_B) = 3$
    * ולכן T חד חד ערכית ועל.

- נחשב את $T^{-1}\left(\underline{v}_1\right)$ בשתי דרכים:

1. <u>דרך ראשונה:</u>
   - נחפש וקטור $\underline{x}$ שעבורו $T\left(\underline{x}\right)=\underline{v}_1$.
   - נכתוב את $\underline{v}_1$ כצירוף ליניארי של:

$$\alpha\cdot\left(\underline{v}_1-\underline{v}_2\right)+\beta\left(\underline{v}_1-\underline{v}_3\right)+\delta\left(\underline{v}_2+\underline{v}_3\right)=\underline{v}_1$$

$$\alpha\cdot T\left(\underline{v}_1\right)+\beta T\left(\underline{v}_2\right)+\delta T\left(\underline{v}_3\right)=\underline{v}_1$$

$$T\left(\alpha\underline{v}_1+\beta\underline{v}_2+\delta\underline{v}_3\right)=\underline{v}_1$$

   * נקבל $\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{2},\delta=\frac{1}{2}$
     · כלומר $T^{-1}\left(\underline{v}_1\right)=\frac{1}{2}\underline{v}_1+\frac{1}{2}\underline{v}_2+\frac{1}{2}\underline{v}_3$

2. <u>דרך שנייה:</u>
   - לפי משפט, $[T]_B^{-1}=\left[T^{-1}\right]_B$
   - כלומר $\left[T^{-1}\right]_B=[T]_B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$
     * נמצא לה הופכית ונקבל:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

   - כדי למצוא את $T^{-1}\left(\underline{v}_1\right)$ נשתמש במשפט: $\left[T^{-1}\left(\underline{v}_1\right)\right]=\left[T^{-1}\right]_B\left[\underline{v}_1\right]_B$
     * ומכיוון ש $\left[\underline{v}_1\right]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, אם נכפול את המטריצות $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ נקבל:

$$T^{-1}\left(\underline{v}_1\right)=\frac{1}{2}\underline{v}_1+\frac{1}{2}\underline{v}_2+\frac{1}{2}\underline{v}_3$$

תרגיל 2.

- נתון:
  - $[T]_B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1-a \\ 1-a & 0 & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$
  - $B = \{(0,1,2),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.
  - נתון כי $dim\,(Ker\ T) > dim\,(Im\ T)$

צ"ל: מצאו את $a, b, Ker\ T, Im\ T$

פתרון:

- לפי הנתון, $dim\,(Ker\ T) + dim\,(Im\ T) = 3$
  - וגם נתון $dim\,(Ker\ T) > dim\,(Im\ T)$
  - וגם נתון כי T היא לא טרנספורמציית האפס כי המטריצה המייצגת שלה היא לא אפס.
  - לכן האפשרות היחידה היא $dim\,(Ker\ T) = 2$ ואז נקבל $dim\,(Im\ T) = 1$
    * ולכן $rank\,([T]_B) = dim\,(Im\ T) = 1$
- ניקח את המטריצה $\begin{pmatrix} a & 1 & 1-a \\ 1-a & 0 & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$ ונדרג כך שהדרגה תהיה שווה 1.
  - אפשר לדרג שורות או עמודות כי $dim\,(row\ A) = dim\,(col\ A) = r\,(A)$
  - <u>דרך א' - נדרג שורות</u>
    * נדרג ונפריד למקרה שבו $a = 0$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1-a \\ 1-a & 0 & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \overset{a=0}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

      · קיבלנו שאם $a = 0$ אז $rank = 2$
    * נדרג במקרה שבו $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1-a \\ 1-a & 0 & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1-a}{a} \\ 1-a & 0 & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$$

      · בשביל שהדרגה תהיה 1 אז נצטרך ש $a = 1$ ו-$b = 0$.
  - <u>דרך ב' - נדרג עמודות</u>:
    * $r\,([T]_B) = 1$, כלומר כל השורות הן כפולות של השורה הראשונה
      · ולכן $(1-a, 0, b) = \alpha\,(a, 1, 1-a)$
      · כלומר $\alpha = 0$ ולכן $a = 1$ ו-$b = 0$

· כלומר $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

· כלומר $Im\ T$ בקואורדינטות הוא $span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

· ולכן $B_{Im\ T\ Coordinatot} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

· נתרגם חזרה לוקטורים ונקבל:

$$B_{Im\ T} = \{(0,1,2)\}$$

* לפי משפט, וקטור הקואורדינטות של $Ker\ T$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

* לכן בסיס לוקטור הקואורדינטות של $Ker\ T$ הוא $span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

· נתרגם חזרה לוקטורים ונקבל ש:

$$B_{Ker\ T} = \{(1,-2,3), (1,1,1)\}$$

תרגיל 3.

• נתון:

– $T : V \to V$

– $dim\,(V) = 4$

– $dim\,(Im\ T) = 2$

צ"ל:

א. הוכיחו כי קיים בסיס של V לפיו במטריצה המייצגת יש 2 שורות אפסים

ב. הוכיחו כי קיים בסיס של V לפיו במטריצה המייצגת יש 2 עמודות אפסים

ג. האם קיים בסיס של V עבורו יש 2 שורות אפסים ו-2 עמודות אפסים?

א. פתרון:

• לפי הנתון ולפי משפט המימדים לט"ל נובע ש $dim\,(Ker\ T) = 2$

• ניקח בסיס לתמונה $B_{Im\ T} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$.

– נשלים את B להיות בסיס של V על ידי הוספת $\underline{w}_3, \underline{w}_4$.

* נקבל

$$T\left(\underline{w}_1\right)=\alpha_1\cdot\underline{w}_1+\beta_1\underline{w}_2$$

$$T\left(\underline{w}_2\right)=\alpha_2\cdot\underline{w}_1+\beta_2\underline{w}_2$$

$$T\left(\underline{w}_3\right)=\alpha_3\cdot\underline{w}_1+\beta_3\underline{w}_2$$

$$T\left(\underline{w}_4\right)=\alpha_4\cdot\underline{w}_1+\beta_4\underline{w}_2$$

* כלומר $[T]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

ב. פתרון:

- ניקח $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$ בסיס לגרעין.
  - נשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת $\underline{v}_3,\underline{v}_4$
    * נקבל $[T]_B=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \left[T\left(\underline{v}_1\right)\right]_B&\left[T\left(\underline{v}_2\right)\right]_B&\left[T\left(\underline{v}_3\right)\right]_B&\left[T\left(\underline{v}_4\right)\right]_B\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}$
    * מכיוון ש $\left[T\left(\underline{v}_1\right)\right]_B=\left[T\left(\underline{v}_2\right)\right]_B=0$, נקבל שיש שתי עמודות אפסים.

ג. פתרון:

- ניקח בסיס לגרעין $B\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\right\}$ ונשלים אותו לבסיס ל-V על ידי הוספת $\underline{v}_3,\underline{v}_4$
  - נסמן $T\left(\underline{v}_3\right)=\underline{w}_1$ וגם $T\left(\underline{v}_4\right)=\underline{w}_2$
    * הערה: אם $B=\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{w}_1,\underline{w}_2\right\}$ הוא בסיס של V- אז נקבל:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\alpha_1&\alpha_2\\0&0&\beta_1&\beta_2\end{pmatrix}$$

  - נשים לב ש

$$T\left(\underline{v}_1\right)=0$$

$$T\left(\underline{v}_2\right)=0$$

$$T\left(\underline{v}_3\right)=\underline{w}_1$$

$$T\left(\underline{v}_4\right)=\underline{w}_2$$

* ומכיוון שתמונות של איברי בסיס הם קבוצה פורשת ל-$Im\ T$, נקבל: $Im\ T=span\left\{0,0,\underline{w}_1,\underline{w}_2\right\}$
  · כלומר $B_{Im\ T}=\left\{\underline{w}_1,\underline{w}_2\right\}$.
* נוכיח ש-$\left\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{w}_1,\underline{w}_2\right\}$ בת"ל לפי הגדרה:
  · נניח $\alpha\underline{v}_1+\beta\underline{v}_2+\delta\underline{w}_1+\lambda\underline{w}_2=0$
  · נפעיל T על שני האגפים ונקבל:

$$T\left(\alpha\underline{v}_1+\beta\underline{v}_2+\delta\underline{w}_1+\lambda\underline{w}_2\right)=T\left(0\right)$$

$$\alpha\underbrace{T\left(\underline{v}_1\right)}_{=0}+\beta\underbrace{T\left(\underline{v}_2\right)}_{=0}+\delta T\left(\underline{w}_1\right)+\lambda T\left(\underline{w}_2\right)=0$$

$$\delta T\left(\underline{w}_1\right)+\lambda T\left(\underline{w}_2\right)=0$$

$$T\left(\delta\underline{w}_1+\lambda\underline{w}_2\right)=0$$

– לא הצלחנו להוכיח בדרך הזו ש-$\underline{w}_1,\underline{w}_2$ בת"ל כי יש דוגמא נגדית שבה $Ker\ T=Im\ T$.

תרגיל 4.

• נתון:
– ט"ל $T:W\to W$, כאשר $W=\left\{A\in M_{2\times2}^{(\mathbb{R})}\ \middle|\ A=A^t\right\}$, כלומר כל המטריצות הסימטריות.
– בסיס ל-W הוא $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\right\}$
– $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\1&3&1\end{pmatrix}$

צ"ל: $T\begin{pmatrix}5&2\\2&9\end{pmatrix}$

פתרון:

- לפי משפט: $[T(\underline{w})]_B=[T]_B[\underline{w}]_B$
  - ולכן נמצא את $[\underline{w}]_B$ עבור $\begin{pmatrix}5&2\\2&9\end{pmatrix}$ ונכפול ב $\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\1&3&1\end{pmatrix}$ כדי למצוא את וקטור הקוארדינטות של $[T(\underline{w})]_B$
    - * נמיר בחזרה למטריצה סימטרית.

תרגיל 5. $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\}$ בסיס של V, $T:V\to V$

- נתון:
  - $T(\underline{v}_1)=\underline{v}_2$
  - $T(\underline{v}_2)=\underline{v}_1$
  - $T(\underline{v}_3)=-\underline{v}_3$
  - $T(\underline{v}_4)=-\underline{v}_4$
  - $\ldots$
  - $T(\underline{v}_n)=-\underline{v}_n$

צ"ל: הוכיחו כי לכל זוג בסיסים C,D מתקיים במטריצה $[T+I]_C^D$ כל העמודות הן כפולות של עמודה אחת.
פתרון:

- אם נצליח להראות ש $rank\left([T+I]_B^B\right)=1$ נסיים
  - כי לכל C,D המטריצות $[T+I]_C^D$ ו-$[T+I]_B^B$ דומות.
    - * ולכן יש להן את אותה הדרגה, שהיא מימד מרחב העמודות.
- $(T+I)(\underline{v}_1)=T(\underline{v}_1)+I(\underline{v}_1)=\underline{v}_2+\underline{v}_1$
- $(T+I)(\underline{v}_2)=T(\underline{v}_2)+I(\underline{v}_2)=\underline{v}_1+\underline{v}_2$
- $(T+I)(\underline{v}_k)=T(\underline{v}_k)+\underline{v}_k=-\underline{v}_k+\underline{v}_k=0$

הגדרה 6. מטריצות דומות (ריבועיות)

- A נקראת דומה ל-B אם קיימת P הפיכה כך ש: $P^{-1}AP=B$

הערה 7. אם A דומה ל-B אז B דומה ל-A כי אפשר לכפול משמאל ב-P ומימין ב-P^{-1}.

הערה 8. אם A ו-B דומות וגם B ו-C דומות אז גם A,C דומות.

הוכחה.

- $P^{-1}AP=B$

– וגם $Q^{-1}BQ=C$

* נציב ונקבל $\left(Q^{-1}P^{-1}\right)A\left(PQ\right)=C$

$\blacksquare$

משפט 9.

- תהי $T:V\to V$ ט"ל.
- B,C בסיסים של V.
- אזי $[T]_B$ ו- $[T]_C$דומות.

משפט 10.

- אם A,B דומות אז:

1. $r\left(A\right)=r\left(B\right)$
2. $trace\left(A\right)=trace\left(B\right)$
3. $|A|=|B|$

נושא שני - דטרמיננטים:

הגדרה 11. דטרמיננטה (עבור ריבועיות)

- אם $n=1$
  – אז $A=\left(a\right)$
    * ואז $|A|=a$
- אם $n=2$
  – אז $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$
    * ואז $|A|=ad-bc$
- אם $n\geq3$
  – אז $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+\ldots+a_{1n}\cdot A_{1n}$ כאשר A_{ij} היא המינור ה-i,j
    * כלומר $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot|M_{ij}|$

תרגיל 12. חשבו $|A|$ עבור $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 5 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$

פתרון:

- $|A| = \overbrace{a_{11}}^{=4} \cdot A_{11} + \overbrace{a_{12}}^{=0} \cdot A_{12} + \overbrace{a_{13}}^{=8} \cdot A_{13}$
- $A_{11} = 60$
- $A_{12} = -50$
- $A_{13} = 0$
- קיבלנו $|A| = 240$

הערה 13. במציאת $|A|$ תמיד כדאי למצוא שורות או עמודות שיש בהם כמה שיותר אפסים.

אלגברה ליניארית אמ' (104166) | תרגול 23 - הילה

שם: איל שטיין

January 18, 2023

נושא השיעור: תרגיל מטריצה מייצגת משיעור שעבר, דטרמיננטים

נושא ראשון - תרגיל משיעור שעבר

תרגיל 1. תרגיל משיעור שעבר:

- נתונה $T:V\to W$ כך ש $dim\left(V\right)=4$ ו-$dim\left(W\right)=4$
- $dim\left(Im\ T\right)=2$

צ"ל:

א. מצאו בסיס B של V ו-C של W כך ש: $[T]_B^C=\begin{pmatrix}0&0&*&*\\0&0&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

ב. מצאו בסיס B_1 של V ו-C_1 של W כך ש: $[T]_{B_1}^{C_1}=\begin{pmatrix}0&0&1&3\\0&0&2&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

ג. מצאו בסיס B_1 של V ו-C_1 של W כך ש: $[T]_{B_2}^{C_2}=\begin{pmatrix}0&0&a&c\\0&0&b&d\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ כאשר $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה כלשהי.

פתרון:

- לפי משפט המימדים, $dim\left(Ker\ T\right)=2$
- יהי $\underline{v}_1,\underline{v}_2$בסיס ל-$Ker\ T$.
  - נשלים אותו לבסיס של V ע"י $\underline{v}_3,\underline{v}_4$
- ויהי $B_{Im\ T}=\{\underline{w}_1,\underline{w}_2\}$.

– נשלים אותו לבסיס של W על ידי $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$

- לכן קיבלנו ש:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(\underline{v}_1)]_C & [T(\underline{v}_2)]_C & [T(\underline{v}_3)]_C & [T(\underline{v}_4)]_C \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

– כאשר

$$\underline{v}_1 \to 0$$

$$\underline{v}_2 \to 0$$

$$\underline{v}_3 \to \alpha \cdot \underline{w}_1 + \beta \cdot \underline{w}_2$$

$$\underline{v}_4 \to \sigma \cdot \underline{w}_1 + \delta \cdot \underline{w}_2$$

* ולכן:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. פתרון:

- רוצים למצוא וקטורים $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ כך ש $span\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\} = span\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

– צריך להסביר למה קיימים $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ שהם בסיס שונה מ-B ל-$Im\ T$

$$1 \cdot \underline{u}_1 + 2 \cdot \underline{u}_2 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2$$

$$3 \cdot \underline{u}_1 + 4 \cdot \underline{u}_2 = \beta_1 \underline{w}_1 + \beta_2 \underline{w}_2$$

* ואם קיימים כאלה אז נשלים אותם לבסיס של W ונקבל:

$$B_1 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$$

$$C_1 = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$$

$$[T]_{B_1}^{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_1 \to 0$$

$$\underline{v}_2 \to 0$$

$$\underline{v}_3 \to \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 = 1 \cdot \underline{u}_1 + 2 \cdot \underline{u}_2$$

$$\underline{v}_4 \to \beta_1 \underline{w}_1 + \beta_2 \underline{w}_2 = 3 \cdot \underline{u}_1 + 4 \cdot \underline{u}_2$$

– נוכיח שקיימים $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ כאלה. נפתור את שתי מערכות המשוואות:

$$\begin{cases} 1 \cdot \underline{u}_1 + 2 \cdot \underline{u}_2 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 \\ 3 \cdot \underline{u}_1 + 4 \cdot \underline{u}_2 = \beta_1 \underline{w}_1 + \beta_2 \underline{w}_2 \end{cases}$$

$$(3\alpha_1 - \beta_1)\, \underline{w}_1 + (3\alpha_2 - \beta_2)\, \underline{w}_2 = 2 \cdot \underline{u}_2 \quad \backslash 2$$

$$\left(\frac{3\alpha_1 - \beta_1}{2}\right) \underline{w}_1 + \left(\frac{3\alpha_2 - \beta_2}{2}\right) \underline{w}_2 = \underline{u}_2$$

* נציב את $\underline{u}_2$ שקיבלנו כדי למצוא את $\underline{u}_1$ ונקבל:

$$\underline{u}_1 = (-2\alpha_1 + \beta_1)\, \underline{w}_1 + (-2\alpha_2 + \beta_2)\, \underline{w}_2$$

– הראנו שקיימים $\underline{u}_1$ ו-$\underline{u}_2$ כאלה.

* הם לא פרופורציונליים ולכן הם בת"ל (אפשר להראות זאת על ידי הנחה בשלילה שהם כן פרופורציונליים)
  · הם שני וקטורים בת"ל ב-$Im\ T$ ולכן הם בסיס ל-$Im\ T$.
  · נשלים אותם לבסיס ל-W כמו שאמרנו ונקבל:

$$[T]_{B_1}^{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ג. פתרון:

• נשתמש במה שעשינו בסעיף ב' ונקבל:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_1 \end{pmatrix}$$

– מכיון ש-$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ מדרגה מלאה, כלומר השורות בת"ל, אז מתקיים ש-A הפיכה:

$$\overbrace{A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}}^{=P} \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_1 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_1 \end{pmatrix}$$

* כלומר קיבלנו ש-A הפיכה.

נושא שני - דטרמיננטים:

• נניח שנרצה לחשב את $|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \right|$

– מכיוון שבשורה השלישית יש שני אפסים, אז אפשר לפתוח ממנה ונקבל:

$$|A| = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + 0 + 0 - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

* זה לוקח הרבה זמן כדי לקבל $|A| = 0$.

- לעשות פעולות דירוג משנה את הדטרמיננט אבל אם עוקבים אחרי הפעולות אז אפשר לחשב את הדטרמיננט מהר יותר.

הערה 2. איך פעולות הדירוג משפיעות על הדטרמיננט:

- אם B מתקבלת מ-A על ידי:

1. החלפת שורה i בשורה j (או החלפת עמודה i בעמודה j)
   (א) אז $|B| = (-1) \cdot |A|$
2. כפל של שורה i בסקלאר $\alpha \neq 0$ (או כפל של עמודה i בסקלאר $\alpha \neq 0$)
   (א) אז $|B| = \alpha \cdot |A|$
3. הוספה של כפולה של שורה j לשורה i בסקלאר β (או הוספה של כפולה של עמודה j לעמודה i בסקלאר β)
   (א) אז $|B| = |A|$

- כלומר בכל מקרה, דירוג משנה את הדטרמיננט בצורה של כפל (או ב- (-1) או בסקלאר).

דוגמה 3.

- $det\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&0&4&2\\0&3&2&1\\1&3&2&4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&0&4&2\\0&3&2&1\\1&3&2&4\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot\begin{pmatrix}1&3&2&0\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\0&3&2&1\\1&3&2&4\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot 3\begin{pmatrix}1&\mathbf{1}&2&0\\1&\mathbf{0}&2&1\\0&\mathbf{1}&2&1\\1&\mathbf{1}&2&4\end{pmatrix} \Rightarrow 2\cdot 3\cdot 2\begin{pmatrix}1&1&\mathbf{1}&0\\1&0&\mathbf{1}&1\\0&1&\mathbf{1}&1\\1&1&\mathbf{1}&4\end{pmatrix}$$

$$12\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

– קיבלנו מטריצה משולשת עליונה.

– לפי משפט, דטרמיננט של משולשת עליונה הוא מכפלת איברי האלכסון.

   * לכן הדטרמיננט הוא $12\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)\cdot 4 = -48$

משפט 4.

- $|A| \neq 0$ אם ורק אם A הפיכה.

תרגיל 5.

- נתון: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ וגם $|A| = 2$
- חשבו את $\left|\begin{pmatrix} k-4c & f & 2k+f \\ g-4a & d & 2g+d \\ h-4b & 3 & 2h+e \end{pmatrix}\right|$

פתרון:

- נדרג את המטריצה:

$$\left|\begin{pmatrix} k-4c & f & 2k+f \\ g-4a & d & 2g+d \\ h-4b & e & 2h+e \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} k-4c & f & 2k+f \\ g-4a & d & 2g+d \\ h-4b & e & 2h+e \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} k-4c & f & 2k \\ g-4a & d & 2g \\ h-4b & e & 2h \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} k-4c & f & \boldsymbol{k} \\ g-4a & d & \boldsymbol{g} \\ h-4b & e & \boldsymbol{h} \end{pmatrix}\right|$$

$$\to 2\left|\begin{pmatrix} -4c & f & k \\ -4a & d & g \\ -4b & e & h \end{pmatrix}\right| \Rightarrow 2\cdot(-4)\left|\begin{pmatrix} c & f & k \\ a & d & g \\ b & e & h \end{pmatrix}\right|$$

  – נעשה טרנספוז ונקבל שהדטרמיננטה היא -16.

משפט 6. עבור A מסדר $n \times n$

- $|A| = |A^t|$
- $|\alpha A| = \alpha\,|A|$

משפט 7. אם A ו-B ריבועיות

- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- $|A^m| = |A|^m$

משפט 8. אם A הפיכה:

- $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

משפט 9. אם A משולשת עליונה/תחתונה/אלכסונית

- $|A| =$ מכפלת איברי האלכסון

תרגיל 10.

- נתונה מטריצה הפיכה $A \in M_{6\times n}^{(\mathbb{R})}$.
- מתקיים $A^4 + 2A = 0$

צ"ל: $|A|$.

פתרון:

- נעביר אגף ונקבל:

$$A^4 = -2A$$

  - ולכן $\left|A^4\right| = |-2A|$
    - ולפי המשפטים שראינו, מכיוון ש-A הפיכה אז $|A| \neq 0$:

$$|A|^4 = (-2)^6\,|A| \quad \backslash |A|$$

$$|A|^3 = (-2)^6$$

      - מכיו שנתון ש-A ממשית אז:

$$|A| = \sqrt[3]{(-2)^6}$$

$$|A| = \sqrt[3]{64}$$

$$|A| = 4$$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 24 - הילה

שם: איל שטיין

January 23, 2023

נושא השיעור: דטרמיננטים - שאלות הבנה, לכסון

נושא ראשון - דטרמיננטים:

תרגיל 1. - תרגיל ממבחן:

- נתונות מטריצות ממשיות A,B מסדר $n\times n$ כאשר n אי זוגי ו-$AB^{t}A=-B$

הוכיחו: למערכת $B\underline{x}=0$ יש פיתרון לא טריוויאלי.

פתרון:

- נרצה להראות את אחד מהתנאים במשפט השקולים.
  - במשוואה שיש בה כפל כדאי לנסות דטרמיננטים.
- נתון: $AB^{t}A=-B$
  - ולכן

$$\left|AB^{t}A\right|=\left|-B\right|$$

$$\left|AB^{t}A\right|=-\left(1\right)^{n}\left|B\right|$$

$$\left|A\right|\overbrace{\left|B^{t}\right|}^{=\left|B\right|}\left|A\right|=\left(-1\right)\left|B\right|$$

$$\left|A\right|^{2}\overbrace{\left|B^{t}\right|}^{=\left|B\right|}+\left|B\right|=0$$

$$|B|\left(|A|^2+1\right)=0$$

* מכיוון ש-A ממשית, $|A|^2+1>0$
  - ולכן $|B|=0$
  - לכן B לא הפיכה
  - ולפי משפט השקולים יש פיתרון לא טריוויאלי למערכת $B\underline{x}=0$

תרגיל 2. הוכח/הפרך: אם A אנטי-סימטרית, ממשית ומסדר זוגי $\Leftarrow$ A לא הפיכה.

פתרון:

- הטענה נכונה.
- אם A אנטי סימטרית אז $A=-A^t$
  - ולכן

$$|A|=\left|-A^t\right|$$

$$|A|=(-1)^n\left|A^t\right|$$

$$|A|=(-1)^n|A|$$

$$|A|=(-1)|A|$$

* מכיוון ש-A ממשית ולא ב-Z_2, $|A|=-|A|$ ולכן $|A|=0$
  - לכן A לא הפיכה.

נושא שני - לכסון:

הגדרה 3. לכסון

- A ריבועית נקראת "לכסינה" אם היא דומה למטריצה אלכסונית.
  - כלומר אם קיימת P הפיכה ו-D אלכסונית כך ש-$P^{-1}AP=D$.

הגדרה 4. ערך עצמי, וקטור עצמי

- תהי A מסדר $n \times n$.
  - $\underline{v} \neq \underline{0}$ נקרא וקטור עצמי של A אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$.
    * λ נקרא **ערך עצמי** של A.
    * $\underline{v}$ נקרא **וקטור עצמי** של A המתאים לערך עצמי λ.

משפט 5.

- A לכסינה אם ורק אם:
  - ל-A יש n ערכים עצמיים (לאו דווקא שונים)
  - לכל ערך עצמי של A מתקיים "ריבוי אלגברי = ריבוי גאומטרי"

תרגיל 6.

- נתונה: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

צ"ל:

א. האם A לכסינה?

ב. אם כן, מצאו P, D כך ש $P^{-1}AP = D$.

א. פתרון:

- נמצא ל-A ערכים עצמיים.
  - הערכים העצמיים הם השורשים של הפולינום האופייני של A, שהוא $P_\lambda(A) = |\lambda I - A|$
    * $P_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \right|$

$$P_\lambda(A) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{pmatrix} \right|$$

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda+2 \end{pmatrix} \right|$$

· נחבר עמודה שנייה לעמודה הראשונה ונקבל:

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{pmatrix} \right| \Rightarrow (\lambda+2) \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{pmatrix} \right|$$

- נחבר עמודה שנייה לשלישית ונקבל:

$$(\lambda+2)\left|\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & \lambda-5 & 1\\ 0 & -6 & \lambda+2\end{pmatrix}\right| = (\lambda+2)\left|\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-5 & \lambda-4\\ 0 & -6 & \lambda-4\end{pmatrix}\right|$$

$$(\lambda+2)\left|\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-5 & \lambda-4\\ 0 & -6 & \lambda-4\end{pmatrix}\right| = (\lambda+2)(\lambda-4)\left|\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-5 & 1\\ 0 & -6 & 1\end{pmatrix}\right|$$

- נפתח את הדטרמיננטה לפי עמודה ראשונה ונקבל בסוף:

$$= (\lambda+2)(\lambda-4)\left|\begin{pmatrix}\lambda-4 & 1\\ -6 & 1\end{pmatrix}\right|$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-4)((\lambda-4)\cdot 1+6)$$

$$= (\lambda+2)\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda+2)$$

- לכן השורשים הם $-2, 4, -2$.

– נבנה טבלה שקובעת אם המטריצה לכסינה או לא:

ערכים עצמיים	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
2-	2	?
4	1	?
2-	2	?

* נשאר לבדוק מהו הריבוי הגאומטרי עבור כל ערך עצמי שמצאנו:

- תזכורת - ריבוי גאומטרי של ערך עצמי λ = המימד של מרחב הפתרונות $|\lambda I - A|\underline{x}=0$ = $dim\left(V_\lambda\right)$
- <u>עבור $\lambda_1=-2$:</u>
- נפתור את המערכת $(-2I-A)\underline{x}=0$

$$\begin{pmatrix}-2+3 & -1 & 1\\ 7 & -2-5 & 1\\ 6 & -6 & -2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = 0$$

$$x_1 - t = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = t$$

$$V_{-2} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

- עבור $\underline{\lambda_2 = 4}$ נמצא את V_4:
- נפתור את המערכת $(4I - A)\,\underline{x} = 0$

$$\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 7 & -1 & 1\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 7 & -1 & 1\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = t$$

$$V_4 = \left\{\begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$dim\,(V_4) = 1$$

- קיבלנו:

ערכים עצמיים	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
2-	2	1
4	1	1
2-	2	1

– מכיוון שעבור ערך עצמי -2 לא מתקיים "ריבוי גאומטרי = ריבוי אלגברי", נקבל ש-A לא לכסינה.

ב. הראנו ש-A לא לכסינה.

תרגיל 7.

• $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$

צ"ל: האם A לכסינה? אם כן, מצאו D,P כך ש $P^{-1}AP=D$.

פתרון:

• נכתוב את הפולינום האופייני:

$$P_{\lambda}\left(A\right)=\left|\lambda I-A\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1&-1\\0&-1&\lambda-1&-1\\0&-1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$$

– נפתח את הדטרמיננטה לפי עמודה ראשונה:

$$\left(\lambda-1\right)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|$$

* נחשב ונקבל: $=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-3\right)\cdot\lambda^{2}$

· ניצור טבלה:

ערכים עצמיים	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
0	2	?
1	1	?
3	1	?

• כעת, נמצא את V_0, V_1, V_3:

– על מנת למצוא את V_0, נפתור את המערכת $\left(0I-A\right)\underline{x}=0$

– ונקבל:

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1&0\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$V_0 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

–

$$V_1 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_3 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

* נסיים למלא את הטבלה:

ערכים עצמיים	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
0	2	2
1	1	1
3	1	1

* עבור כל ערך עצמי מתקיים "ריבוי אלגברי = ריבוי גאומטרי" ולכן A לכסינה.

- נמצא P, D:

– D היא מטריצה שבה באלכסון שלה יש ערכים עצמיים של A, כלומר במקרה שלנו אפשר לכתוב D:

$$D = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & 0 & 0 & 0\\0 & \mathbf{0} & 0 & 0\\0 & 0 & \mathbf{1} & 0\\0 & 0 & 0 & \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

– P היא המטריצה שנשים בכל עמודה לפי הסדר את הוקטורים העצמיים של הערכים העצמיים ששמנו באלכסון של D:

* ומכיוון שווקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל, נשים בכל עמודה בסיס למרחב העצמי שקיבלנו:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\-1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

לסיכום:

1. מצאנו ערכים עצמיים של A ומצאנו את הריבוי האלגברי שלהם.
2. מצאנו עבור כל אחד מהערכים העצמיים את המרחב העצמי שלו ואת מימד המרחב העצמי (שזה הריבוי הגאומטרי).
3. כדי לדעת אם A לכסינה, בדקנו בטבלה האם עבור כל ערך עצמי מתקיים "ריבוי אלגברי = ריבוי גאומטרי"
4. התשובה הייתה ש-A לכסינה, ולכן הצבנו את הערכים העצמיים של A באלכסון של D
   (א) יצרנו את P על ידי הכנסת וקטור עצמי בכל עמודה לפי הסדר שבה שמנו את הערכים העצמיים ב-D.

נושא שלישי - קיצורי דרך למצוא ערכים או וקטורים עצמיים:

- תהי A מסדר $n \times n$.
  1. ל-A יש תמיד n ערכים עצמיים ב-$\mathbb{C}$.
     (א) הערה: מעל שדה סופי לא תמיד יהיו n ערכים עצמיים.
  2. סכום n הערכים העצמיים של A = $trace\left(A\right)$
  3. מכפלת n הערכים העצמיים של A = $|A|$
     (א) מזה נובע ש: A לא הפיכה $\Longleftrightarrow |A|=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda=0$ הוא ערך עצמי של A
     הערה 8. אפשר להוסיף למשפט השקולים: "A הפיכה $\Longleftrightarrow \lambda=0$ לא ערך עצמי של A"
  4. אם סכום כל שורה = t, אז t ערך עצמי של A.
  5. אם A משולשת עליונה או תחתונה אז הערכים העצמיים הם איברי האלכסון.

דוגמה 9.

- $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$
  - כלומר $rank\left(A\right)=1$
  - מכיוון ש-A לא הפיכה, אז 0 הוא ערך עצמי של A.
    * נחשב את הריבוי הגאומטרי והאלגברי של 0:

$$=n-rank\left(\lambda\cdot I-A\right)$$

$$=3-rank\left(0\cdot I-A\right)$$

$$=3-\overbrace{rank\left(A\right)}^{=1}=2$$

- $trace\left(A\right)=0+0+k=1+4+9=14$
  - ולכן הערך העצמי השלישי הוא 14 מריבוי אלגברי 1.
    - נחשב את הריבוי הגאומטרי שלו ונקבל 1.
- לכל ערך עצמי של A מתקיים "ריבוי גאומטרי = ריבוי אלגברי" ולכן A לכסינה.

דוגמה 10.

- $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
  - נשים לב ש- $rank\left(A\right)=2$
    - ולכן A לא הפיכה, ולכן 0 הוא ערך עצמי.
    - הריבוי הגאומטרי של 0 הוא $n-r\left(A\right)=4-2=2$
  - סכום כל שורה =3 ולכן 3 הוא ערך עצמי של A.
  - נמצא את הערך העצמי האחרון על ידי חישוב $trace\left(A\right)=1+1+1+1=4$
    - ונציב: $trace\left(A\right)=0+0+3+k$
      - ונקבל $k=1$.
- כלומר:

ערכים עצמיים	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
0	2	2
3	1	1
1	1	1

  - לכל ערך עצמי של Aמתקיים "ריבוי גאומטרי = ריבוי אלגברי" ולכן A לכסינה.

דוגמה 11.

- $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
  - המטריצה הזו משולשת עליונה ולכן הערכים העצמיים הם איברי האלכסון.
    - הריבוי הגאומטרי של 1 = $n-r\left(\lambda I-A\right)$
      - כלומר: ריבוי גאומטרי =2 $4-2$
  - קיבלנו ש:

ערכים עצמיים	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
1	4	2

  - ולכן B לא לכסינה.

טענה 12. קשה לתת דוגמאות למטריצות לא לכסינות ולכן נשתמש בטענה:

- אם ל-A יש ערך עצמי יחיד אז:
  - A לכסינה $\iff$ A סקלרית

הוכחה.

- נניח כי ל-A יש ערך עצמי יחיד.
  - לכן:

ערכים עצמיים	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
λ	n	?

  * כלומר A לכסינה $\iff$ הריבוי הגאומטרי של λ =n $\iff n=n-r\left(\lambda I-A\right)\iff r\left(\lambda I-A\right)=0\iff\lambda I=A$
  * כלומר אם ורק אם A סקלרית.

■

דוגמה 13. $\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ לא לכסינה כי יש לה ערך עצמי יחיד (2), אבל היא לא סקלרית.

טענה 14.

- אם ל-A מסדר $n\times n$ יש n ערכים עצמיים <u>שונים</u> $\Leftarrow$ A לכסינה.

תרגיל 15. תנו דוגמא ל-A כך ש:

1. A לכסינה והפיכה
   (א) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ - היא לכסינה כי היא אלכסונית והיא הפיכה כי 0 הוא לא ערך עצמי שלה.
2. A לכסינה ולא הפיכה
   (א) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ - היא לכסינה כי היא אלכסונית והיא לא הפיכה כי 0 הוא ערך עצמי.
3. A לא לכסינה והפיכה
   (א) $A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ - היא לא לכסינה כי יש לה ערך עצמי יחיד אבל היא לא סקלרית, היא הפיכה כי 0 לא ערך עצמי.
4. A לא לכסינה ולא הפיכה
   (א) $A=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ - היא לא לכסינה כי יש לה ערך עצמי יחיד והיא לא סקלרית, היא לא הפיכה כי 0 ערך עצמי.

הערה 16. אם מבקשים מטריצה לכסינה אבל לא אלכסונית, ניקח משולשת עליונה: $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ - היא לכסינה כי יש לה שני ערכים עצמיים שונים.

נושא רביעי - לכסון אופרטורים:

הגדרה 17.

- יהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי.
- T נקרא **לכסין** אם קיים בסיס B של V כך ש-$[T]_B$ אלכסונית.

משפט 18.

- T לכסין $\iff$ $[T]_C$ לכסינה כאשר C בסיס כלשהו של V (חשוב לזכור שכל מטריצה מייצגת דומה לשנייה).

משפט 19.

- אם B בסיס שמורכב כולו מווקטורים עצמיים של T אז $[T]_B$ לכסין.

הערה 20. איך מוצאים ערכים ווקטורים עצמיים של אופרטור T?

1. ניקח $T:V\to V$
2. נמצא ל-T מטריצה מייצגת לפי בסיס כלשהו C.
   (א) בדרך כלל ניקח את הבסיס הסטנדרטי E, אלא אם כן נתונה כבר מטריצה מייצגת
   (ב) נסמן את המטריצה המייצגת ב-A
3. נמצא ל-A ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.
   (א) אם A לא לכסינה אז T לא לכסין ולא קיים בסיס B של V כך ש-$[T]_B$ לכסין.
   (ב) אם A כן לכסינה אז: הערכים עצמיים של T הם אותן הערכים העצמיים של A עם אותם הריבויים.
      i. הוקטורים העצמיים של A הם וקטורי הקוארדינטות של הוקטורים העצמיים של T לפי הבסיס שלקחנו (C).

דוגמה 21.

- $T:M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}\to M_{2\times 2}^{(\mathbb{R})}$
- $T(A)=5A+3A^t$

צ"ל: מצאו האם T לכסין? אם כן, מצאו בסיס B כך ש-$[T]_B$ אלכסונית.
פתרון:

- ראשית נמצא ל-T מטריצה מייצגת:
  – ניקח בסיס סטנדרטי $E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

– ניקח T על איברי בסיס ונקבל:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = A$$

* נשים לב כי סכום כל שורה הוא 8. לכן 8 הוא ערך עצמי.
  · הריבוי הגאומטרי של 8 הוא: $4 - rank\left(8I - A\right)$.
  · נדרג את המטריצה $8I - A$ ונקבל $rank\left(8I - A\right) = 1$ ולכן הריבוי הגאומטרי של 8 הוא 3.
* נחשב את העקבה ונקבל $trace\left(A\right) = 26 = 8 + 8 + 8 + k$
  · ולכן $k = 2$
* נייצר טבלה ונקבל ש-A לכסינה.
* ולכן לפי משפט, T לכסין.

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 25 - הילה

שם: איל שטיין

January 25, 2023

נושא השיעור: ערכים ווקטורים עצמיים

נושא ראשון - ערכים ווקטורים עצמיים

הערה 1. אם יש $T:V\to V$ וגם $Dim\left(V\right)=n$

- אם מצאנו n וקטורים עצמיים בת"ל, אז מצאנו את כולם.
- לדוגמא:

דוגמה 2. $T:M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}\to M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}$ המוגדרת $T\left(A\right)=5A+3A^{t}$

– אם ניקח A סימטרית אז $T\left(A\right)=5A+3A=8A$, כלומר A וקטור עצמי עבור ערך עצמי 8.

* נקבל שמימד מרחב המטריצות הסימטריות הוא $n+\frac{n^{2}-n}{2}$ (כלומר כמות האיברים באלכסון ועוד חצי מכמות האיברים שלא באלכסון)

– ואם ניקח A אנטי-סימטרית אז $T\left(A\right)=5A-3A=2A$, כלומר A וקטור עצמי עבור ערך עצמי 2.

* נקבל שמימד מרחב המטריצות האנטי סימטריות הוא $\frac{n^{2}-n}{2}$, כלומר חצי מכמות האיברים שלא באלכסון של המטריצה.

– בסה"כ קיבלנו שריבוי הגאומטרי של 8 הוא $n+\frac{n^{2}-n}{2}$ והריבוי הגאומטרי של 2 הוא $\frac{n^{2}-n}{2}$

* אם נחבר את שני הריבויים הגאומטריים, נקבל:

$$n+\frac{n^{2}-n}{2}+\frac{n^{2}-n}{2}=n^{2}=dim\left(V\right)$$

· אם היה יוצא שסכום המימדים הוא קטן מ-n^{2} אז או שהמטריצה לא לכסינה או שלא מצאנו את כל הוקטורים וצריך למצוא מייצגת.

דוגמה 3.

- תהי ט"ל $T:M_{3\times3}^{(\mathbb{R})}\to M_{3\times3}^{(\mathbb{R})}$ המוגדרת $T\left(A\right)=E_{1\leftrightarrow2}A$ - כלומר הט"ל מחליפה שורה ראשונה ושנייה במטריצה.
  - המטריצה המייצגת תהיה מסדר 9×9 ולכן למצוא אותה ייקח יותר מדי זמן.
  - נייצר תשעה וקטורים עצמיים בת"ל וכך נמצא האם המטריצה לכסינה או לא:
    * מכיוון שהט"ל לא משנה את השורה השלישית של המטריצה, אם ניקח מטריצה שבה שתי הראשונות הן אפסים (או שתי השורות הראשונות הן זהות) אז הט"ל לא תשנה את המטריצה:

$$T\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ * & * & *\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ * & * & *\end{pmatrix}$$

      · באופן הזה ניתן לייצר שישה וקטורים עצמיים.
      · ולכן 1 הוא ערך עצמי עם ריבוי גאומטרי לפחות 6.
    * אם ניקח מטריצות:

$$T\begin{pmatrix}a & b & a\\ -a & -b & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -b & -a\\ a & b & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}a & b & a\\ -a & -b & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

      · כלומר -1 הוא וקטור עצמי עם ריבוי אלגברי של לפחות 3.
    * מצאנו ערכים עצמיים עם סכום ריבויים גאומטריים של $9=dim\left(M_{3\times3}^{(\mathbb{R})}\right)$.

תרגיל 4.

- תהי $T:M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}\to M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}$ המוגדרת $T\left(A\right)=E_{1\leftrightarrow2}A$ - כלומר הט"ל מחליפה שורה ראשונה ושנייה במטריצה.

צ"ל: האם T לכסין? אם כן, מצאו B כך ש $\left[T\right]_{B}$ אלכסונית.
פתרון:

- נשים לב שכל A שבה השורה הראשונה שווה לשורה השנייה, כלומר כל מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n}\\ a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ מקיימת $T\left(A\right)=1\cdot A$
  - כלומר 1 ערך עצמי עם ריבוי גאומטרי של $n+\left(n-2\right)\cdot n$.
    * שזה יוצא לפחות $\left(n-1\right)\cdot n$
- בנוסף נשים לב שכל A מהצורה $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n}\\ -a_{11} & -a_{12} & \dots & \dots & -a_{1n}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ מקיימת $T\left(A\right)=-A$.

- כלומר -1 הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי של n לפחות.

- מכיוון ש $(n-1)\cdot n+n=n^2$, מצאנו n^2 וקטורים עצמיים בת"ל.
  - לכן T לכסין ואם נבחר וקטורים עצמיים מתאימים נקבל:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&\ddots&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

הערה 5. **משפט קיילי המילטון לא יהיה במבחן.**

טענה 6.

- אם λ ערך עצמי של A אז $f(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $f(A)$.

שימושים של הטענה:

דוגמה 7.

- $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&5\end{pmatrix}$.
  - נסתכל על הפונקציה $f(x)=x^2+3x+1$
    - אזי $f(A)=A^2+3A+2I$.
  - אם נסמן את $f(A)$ להיות המטריצה B אז הערכים העצמיים של A הם $1,5$ (כי היא משולשת עליונה)
    - ולפי הטענה, הערכים העצמיים של B הם $f(1)$ ו-$f(5)$:

$$f(1)=1+3+2=6$$

$$f(5)=25+15+2=42$$

תרגיל 8.

- נתון $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&5\end{pmatrix}$.

- האם $B=A^2+3A+2I$ הפיכה?

פתרון:

- אם נגדיר $f(x)=x^2+3x+2$, מתקיים $B=f(A)$.
  - לכן הערכים העצמיים של B הם $f(1)$ ו-$f(5)$ כי 1 ו-5 הם הערכים העצמיים של A (רואים את זה מכך שהיא משולשת עליונה).
- מכיוון ש-0 הוא לא ערך עצמי של B אז B הפיכה.
- כעת:
  - אם נרצה לחשב את $trace\left(B\right)$ אז ניקח את סכום הערכים העצמיים
  - ואם נרצה לחשב את $|B|$ אז ניקח את מכפלת הערכים העצמיים.

רעיון ההוכחה של הטענה:

- יהי λ ערך עצמי של A עם וקטור עצמי $\underline{v}$. כלומר $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$.
  - אזי

$$\begin{aligned}B\underline{v} &= \left(A^2+3A+2I\right)\underline{v}\\ &= A^2\underline{v}+3A\underline{v}+2I\underline{v}\\ &= AA\underline{v}+3A\underline{v}+2I\underline{v}\end{aligned}$$

* נציב $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$ ונקבל:

$$=A\lambda\underline{v}+3\lambda\underline{v}+2\underline{v}$$

$$=\lambda^2\underline{v}+3\lambda\underline{v}+2\underline{v}$$

$$B\underline{v}=\overbrace{\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)}^{=f(\lambda)}\underline{v}$$

(104166) אלגברה ליניארית אמ' | תרגול 26 - הילה

שם: איל שטיין

January 25, 2023

נושא השיעור: שאלות הבנה ושאלות ממבחנים

נושא ראשון - שאלות הבנתיות בערכים עצמיים:

תרגיל 1.

- תהא T ט"ל $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ לא לכסינה כך ש:
  1. $T\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\end{pmatrix}$
  2. $T\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\end{pmatrix}$
  3. $T\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a & 1-a & 1\end{pmatrix}$

פתרון:

- נוודא כי הערכים עליהם T מוגדרת הם בת"ל.
  – ואז נגדיר בסיס B ל-$\mathbb{R}^3$ כך ש $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$
- נחפש את $\left[T\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\end{pmatrix}\right]_B$ ונקבל $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$
- נחפש את $\left[T\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}\right]_B$ ונקבל $\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}$
- נחפש את $\left[T\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\right]_B$ ונקבל $\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$

- נכתוב את $[T]_B$ ונקבל:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

  - מכיוון ש-$[T]_B$ משולשת עליונה אם $a \neq 3, -2$ יתקיים ש-T לכסינה
  - ומכיוון שנתון כי T לא לכסינה, מתקיים $a = 2, -3$
  - נבנה את המטריצה עבור $a = -2$ כדי לבדוק האם המטריצה לא לכסינה (כנדרש) ונקבל:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

    * נבחן את הריבוי הגאומטרי של -2 ונקבל:

$$= 3 - rank\,(2I - A)$$

$$= 3 - rank\left(\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

    * כלומר:

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
-2	2	1
3	1	1

      · ואכן המטריצה הזו לא לכסינה כאשר $a = -2$

  - נבנה את המטריצה עבור $a = 3$ כדי לבדוק אם המטריצה לא לכסינה (כנדרש) ונקבל:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

    * נקבל:

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי
-2	1	1
3	2	2

      · המטריצה הזו לכסינה ולכן $a \neq 3$.

תרגיל 2.

- $A=\begin{pmatrix}4&1&-1\\0&2&2\\4&1&-1\end{pmatrix}$.

צ"ל: מצאו B כך ש: $B^2=A$

פתרון:

- אם A לכסינה אז קיים $P^{-1}AP=D$
  - ולכן $A=PDP^{-1}$
  - נציב $D=C^2$ ונקבל:

$$\begin{aligned}A&=PC^2P^{-1}\\&=\left(PCP^{-1}\right)\left(PCP^{-1}\right)\\&=PCICP^{-1}=\left(PCP^{-1}\right)^2\end{aligned}$$

- נבדוק האם A לכסינה:
  - סכום כל שורה הוא 4 אז 4 הוא ערך עצמי.
    - ולכן $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי.
  - השורות תלויות ליניארית ולכן 0 ערך עצמי.
  - נחשב את העקבה ונקבל: $5=trace\left(A\right)=0+4+x$, כלומר 1 הוא ערך עצמי.
  - מכיוון שמצאנו שלושה ערכים עצמיים שונים, מתקיים לפי משפט שהריבוי הגיאומטרי של כולם הוא 1.
- קיבלנו: $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ וגם $P=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&1\\\underline{v}_{\lambda=0}&\underline{v}_{\lambda=1}&1\\\vdots&\vdots&1\end{pmatrix}$
  - נמצא:

$$P\ \backslash P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\ \backslash P^{-1}$$

$$A=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 P^{-1}$$

$$= \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^2$$

* נבחר $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$
  · ונקבל: $A = B^2$.

תרגיל 3. הוכח/הפרך:

1. אם A, B לכסינות, האם $A + B$ לכסינה?
2. אם A, B לכסינות, האם AB לכסינה?
3. אם $A^3 = A$ ונתון כי A לכסינה, האם $rank\left(A\right) = trace\left(A\right)$?
4. אם $A^3 = A$ ונתון כי A לכסינה, האם $rank\left(A\right) = trace\left(A^2\right)$?

1. פתרון:

- הטענה לא נכונה:
  - נמצא $A + B$ עם ערך עצמי יחיד ולא סקלארית.
  - לדוגמא: $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
    * A, B לכסינות כי הן משולשות עליונות ויש להן שני ערכים עצמיים שונים.
      · זאת כי לפי טענה, מטריצה סדר $n \times n$ עם n ערכים עצמיים שונים היא לכסינה.
    * $A + B$ לא לכסינה כי היא משולשת עליונה ולכן הערכים העצמיים שלה הם $1, 1$.
      · מכיוון שהיא לא סקלארית, לפי טענה מתקיים שהיא לא לכסינה.

2. פתרון:

- הטענה לא נכונה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - A, B לכסינות כי הן אלכסוניות/משולשות עליונות עם ערכים עצמיים שונים.
  - AB לא לכסינה לפי הטענה.

3. **פתרון**:

- הטענה לא נכונה.
- נביא דוגמא נגדית:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$trace\left(A\right)=0$$

$$rank\left(A\right)=2\neq trace\left(A\right)$$

4. **פתרון:**

- הטענה נכונה.
- $A=A^3$, פירושו שלכל ערך עצמי λ של A מתקיים $\lambda=\lambda^3$, כלומר $\lambda\in\{0,1,-1\}$.
  - A לכסינה ולכן A דומה למטריצה אלכסונית D.
    - ואם A דומה ל-D אז $rank\left(A\right)=rank\left(D\right)$ וגם $trace\left(A\right)=trace\left(D\right)$.
    - ואם A דומה ל-D אז A^2 דומה ל-D^2 (צריך להוכיח אבל אם אין זמן במבחן כדאי לכתוב ולנמק רק אם יש זמן).
      - ולכן $trace\left(A^2\right)=trace\left(D^2\right)$
- כלומר **צ"ל**: $rank\left(D\right)=trace\left(D^2\right)$.
- כאמור, הערכים העצמיים הם $1,-1,0$ ולכן הערכים העצמיים של D הם D^2 הם $1,0$
  - זאת מכיון שלפי משפט: אם $f\left(x\right)=x^2$ וגם λ הוא ערך עצמי של D אז $f\left(\lambda\right)$ הוא ערך עצמי של $f\left(D\right)=D^2$
- לכן נכתוב:

$$D=\begin{pmatrix}1 &&&&&\\ & 1 &&&&\\ && -1 &&&\\ &&& -1 &&\\ &&&& \ddots &\\ &&&&& 0\end{pmatrix}$$

$$D^2=\begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0\end{pmatrix}$$

– כלומר מתקיים ש-$trace\left(D^2\right)$ הוא סכום כמות האיברים שהם 1, כלומר הריבוי הגאומטרי של 1 ושל -1

* וסכום הריבויים הגאומטריים הללו שווה ל-$rank\left(D\right)$.

תרגיל 4.

- נתונה ט"ל $T:M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}\to M_{n\times n}^{(\mathbb{R})}$ כך ש- $T\left(A\right)=B\cdot A$, עבור מטריצה B נתונה כלשהי.

צ"ל:

א. כל ערך עצמי של B הוא ערך עצמי של T.

ב. כל ערך עצמי של T הוא ערך עצמי של B.

ג. כל ערך עצמי של B הוא מריבוי גאומטרי לפחות n אצל T.

א. פתרון:

- נניח כי λ ערך עצמי של B.

– כלומר קיים $\underline{v}\neq0$ כך ש $B\underline{v}=\lambda\underline{v}$

* ניקח את המטריצה $A_1=\begin{pmatrix}\vdots & 0 & \dots & 0\\ \underline{v} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

· ונקבל: $T\begin{pmatrix}\vdots & 0 & \dots & 0\\ \underline{v} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\vdots & 0 & \dots & 0\\ \underline{v} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

– המטריצה A_1 היא וקטור עצמי של T עבור הערך עצמי λ כי:

$$\begin{aligned}T\left(A_1\right)=B\cdot A_1=B\begin{pmatrix}\vdots & 0 & \dots & 0\\ \underline{v} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\vdots & 0 & \dots & 0\\ \lambda\cdot\underline{v} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\\ &=\lambda\cdot A_1\end{aligned}$$

* כלומר קיבלנו ש λ (ערך עצמי כללי של B) הוא ערך עצמי של T.

ב. פתרון:

- נניח כי λ ערך עצמי של T
  - אזי קיימת $A \neq \underline{0}$ כך ש $T(A) = \lambda A$.
    * זאת אומרת $BA = \lambda \cdot A$
      · ומכיוון ש-$A \neq \underline{0}$, ל-A יש לפחות עמודה אחת שאינה אפס, נסמנה $\underline{w}$.
      · ולכן $B\underline{w} = \lambda \underline{w}$, כאשר $\underline{w} \neq 0$.
  - כלומר $\underline{w}$ ווקטור עצמי של B מתקים לערך עצמי λ.
  - ולכן λ (ערך עצמי כללי של T) הוא ערך עצמי של B.

ג. פתרון:

- מסעיפים א' ו-ב' נובע שהערכים העצמיים של B הם הערכים העצמיים של T.
- יהי λ ערך עצמי של B, עבור $\underline{v} \neq 0$ מתקיים $B\underline{v} = \lambda \underline{v}$
- הראנו בסעיף א' ש-λ הוא גם ערך עצמי של T.
- נוכיח שהריבוי הגאומטרי של λ ב-T הוא לפחות n:
  - נבנה $A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \underline{v} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ כאשר $1 \leq j \leq n$
  - ולכל j מתקיים $T(A_j) = \lambda \cdot A_j$.
    * מכיון ש-A_j בת"ל, אז מתקיים ש-λ הוא ערך עצמי מריבוי גאומטרי לפחות n.

תרגיל 5.

- נתון:
  - $A_{3\times 3}$
  - $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $r(A+I) < r(A-2I)$

צ"ל: מצאו את $|A|$.

פתרון:

- נתון כי $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
  - ולכן 2 ערך עצמי של A.
- <u>באופן כללי</u>: "λ ערך עצמי של A"

$$\Longleftrightarrow$$

$$rank\left(\lambda I-A\right)<n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$rank\left(A-\lambda I\right)<n$$

- ולכן 2 ערך עצמי ולכן $rank\left(A-2I\right)<3$
  - נבדוק את האפשרויות:

$rank\left(A+I\right)$	$rank\left(A-2I\right)$
1	2
0	2
0	1

    * אם $rank\left(A+1\right)=0$ אז $A+I=0$
      · אבל $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}=-I\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
    * ולכן בהכרח $rank\left(A+I\right)=1$
      · ולפי הטבלה נראה ש $rank\left(A-2I\right)=2$.
- ריבוי גאומטרי של λ = $3-rank\left(\lambda I-A\right)$
  - ולכן הריבוי הגאומטרי של 2 הוא $3-2=1$
  - והריבוי הגאומטרי של -1 הוא $3-1=2$
    * מכיוון שסכום הריבויים הגאומטריים הוא $n=3$ אז:
      · הריבוי האלגברי של 2 הוא 1
      · הריבוי האלגברי של -1 הוא 2
      · (למרות שלא שאלו, ניתן לשים לב ש-A לכסינה)
- הדטרמיננטה של A שווה למכפלת הערכים העצמיים של A
  - ולכן $|A|=2\cdot(-1)\cdot(-1)=2$

מסקנה 6.

- אם במהלך התרגיל ראינו ש $A-\lambda I$ היא לא הפיכה, אז λ הוא ערך עצמי של A.

נושא שני - שאלות ממבחנים:

תרגיל 7. שאלה מ-2022
נתונה מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $A^3=A$
א. האם קיימת מטריצה $A\neq B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הדומה ל-A כך ש $B^3\neq B$
ב. מהם הערכים האפשריים של A?

א. פתרון:

- לא קיימת B כזו.
- נניח B דומה ל-A אבל $B\neq A$.
  - כלומר קיימת P הפיכה כך שמתקיים $P^{-1}BP=A$
    - ולכן $B=PAP^{-1}$
    - וגם $A^3=\left(P^{-1}BP\right)^3=P^{-1}B^3P$
      - כלומר $B^3=PA^3P^{-1}$
      - נציב $A^3=A$ ונקבל:

$$B^3=B=PAP^{-1}=PA^3P^{-1}$$

- ולכן $B^3=B$

ב. פתרון:

- לכל ערך עצמי של A מתקים $\lambda^3=\lambda$ ולכן $\lambda\in\{0,1-,1\}$.

תרגיל 8.

- נתונות שתי מטריצות מסדר 3×3 ב-Z_7:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2a\\1&3&3a\\5&1&a\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

א. האם לכל $a \in Z_7$ קיים b כך ש A ו-B דומות?