(00094412) הסתברות מ' | הרצאה 4

שם: איל

February 8, 2024

נושאי השיעור: משתנים מקריים, וקטורים מקריים, התניה באמצעות משתנים מקריים

נושא ראשון - משתנה מקרי והתפלגות

הגדרה 1. תזכורת - **משתנה מקרי:**

- פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$ תיקרא משתנה מקרה.
- המשמעות האינטואיטיבית היא ש$X\left(\omega\right)$ זה הערך האקראי שנקבע על תוצאות הניסוי ω.
- לכל $B\subseteq R$, הגדרנו $\{X\in B\}=\{\omega\in\Omega\ \ :\ \ X\left(\omega\right)\in B\}$, כלומר ערכו של X יצא בתוך B.

הגדרה 2. התפלגות של משתנה מקרי:

- בהינתן משתנה מקרי X מעל מרחב הסתברות (Ω,P), ההתפלגות של X היא הפונקציה:

$$\Pi_{X}\ \ :\ \ subsets\ of\ \ \mathbb{R}\to[0,1]$$

  – המוגדרת על ידי:

$$\Pi_{X}\left(B\right)=P\left(\{X\in B\}\right)$$

  * לכל $B\subseteq\mathbb{R}$.

הערה:

1. $P\left(\{X\in B\}\right)=P\left(X\in B\right)$

2. המשמעות האינטואיטיבית היא ש-Π_X זו ההסתברות שערכו של X יהיה ב-B .

טענה 3.
Π_X היא מידת הסתברות מעל מרחב מדגם $\Omega=\mathbb{R}$.

- בפרט, $P\left(X\in\mathbb{R}\right)=\Pi_X\left(\mathbb{R}\right)=1$
  - וגם

$$P\left(X\in\bigcup B_n\right)=\Pi_X\left(\bigcup B_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Pi_X\left(B_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X\in B_n\right)$$

* לכל B_n זרים.

<u>הערה:</u>
כל מה שהוכחנו על מידת הסתברות חל גם על Π_X, למשל:

$$\begin{aligned}P\left(X\in B^c\right)&=\Pi_X\left(B^c\right)=1-\Pi_X\left(B\right)\\&=1-\Pi_X\left(X\in B\right)\end{aligned}$$

- התפלגות של משתנה מקרי היא אובייקט מסובך כי היא פונקציה מעל תתי קבוצות.
  - לכן נרצה להשתמש באובייקט פשוט יותר:

הגדרה 4. פונקציית הסתברות של משתנה מקרי

- בהינתן משתנה מקרי X, פונקציית ההסתברות שלו $P_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ מוגדרת על ידי:

$$P_X\left(b\right):=P\left(X=b\right)$$

– ומתקיים:

$$P_X\left(b\right):=P\left(X=b\right)=P\left(x\in\{b\}\right)=\Pi_X\left(\{b\}\right)$$

גם האובייקט P_X נראה מסובך, ולכן נשאל את עצמנו מתי P_X מגדירה את Π_X בצורה שנוח יותר לעבוד איתה.
בשביל למצוא מקרה כזה, נגדיר **משתנה מקרי בדיד** ו**תומך של משתנה מקרי בדיד:**

הגדרה 5. משתנה מקרי בדיד

- משתנה מקרי X ייקרא בדיד אם קיימת קבוצה $D\subseteq\mathbb{R}$ בת מניה או סופית כך ש $P\left(X\in D\right)=1$

הגדרה 6. תומך של משתנה בדיד

- בהינתן משתנה מקרי בדיד X, התומך של X הוא:

$$\underbrace{Supp}_{Support}\left(X\right)=\{b\ :\ P_X\left(b\right)>0\}$$

משפט 7.

- יהא X משתנה מקרי בדיד, אז:

1. $Supp\left(X\right)$ היא קבוצה בת מניה ומתקיים $P\left(X\in Supp\left(X\right)\right)=1$
2. לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\Pi_X\left(B\right)=P\left(X\in B\right)=\sum_{b\in B\cap Supp(X)}P_X\left(b\right)$$

3. בפרט

$$\sum_{b\in Supp(x)}P_X\left(b\right)=1$$

הערה 8. החלק המעניין של המשפט הזה הוא סעיף 2, כלומר אם X בדיד אז פונקציית ההסתברות שלו נותנת את ההתפלגות שלו על ידי סכימה של כל ערכי פונקציית ההסתברות.
כלומר ההתפלגות של X מכילה את כל המידע ההסתברותי (מהצורה $P\left(X\in B\right)$) של X.
במקרה ש-X הוא בדיד, ניתן להסתפק בפונקציית ההסתברות של X תוך שימוש בסעיף 2.

דוגמה 9.

- מטילים מטבע עם הסתברות $p \in (0,1)$ ל"ראש" n פעמים באופן בלתי תלוי.
- נגדיר:
  - X = מספר ה"ראש" שהתקבלו.
  - Y = מספר ה"זנב" שהתקבלו.

צ"ל:

1. הראו כי Y ו-X הם משתנים מקריים בדידים.
2. מצאו את פונקציית ההסתברות של X ו-Y.
3. מצאו את התומך של X ו-Y.
4. השתמשו בפונקציית ההסתברות של X ו-Y לחישוב ההסתברות של המאורעות:
   (א) לפחות שלושה "ראש"
   (ב) פחות משלושה "ראש"
   (ג) מספר זוגי של "זנב"

הוכחה:

1. נראה כי X ו-Y הם משתנים מקריים בדידים.
   - צריך להראות שיש קבוצת ערכים בת מניה שכל הערכים ב-X נופלים בתוכה.
     - נשים לב כי עבור $D = \{0,\ldots,n\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ או $D = \mathbb{Z}$ או $D = \mathbb{Q}$, מתקיים:

$$P(X \in D) = P(X \ will \ get \ a \ value \ in \ D) = P(Number \ of \ "head"s \ will \ be \ in \ D) = 1$$

     - אותה טענה תקפה עבור Y
   - ולכן X ו-Y הם משתנים מקריים בדידים.

2. נמצא את P_X ואת P_Y:
   - עבור X:

$$\begin{aligned} P_X(b) &= P(X=b) = P(X \ gets \ the \ value \ b) \\ &= P(number \ of \ "head" \ is \ b) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \binom{n}{b} p^b (1-p)^{n-b} & b = 0,1,\ldots,n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

– נשים לב שהגדרנו כך את P_X כי $b\in\mathbb{R}$ ולכן צריך להגדיר ב-0 את ההסתברות ש-X יקבל ערך לא שלם.

- עבור Y:

$$P_Y(b)=P(Y=b)=P(b\ \text{"}tail\text{"}s)$$

$$=\begin{cases}\binom{n}{b}(1-p)^n p^{n-b} & b=0,1,\ldots,n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

3. נמצא את התומך של X ואת התומך של Y

- התומך של X הוא :

$$Supp(X)=\{b\ :\ P_X(b)\neq 0\}$$

– נתבונן בP_X כדי לקבל:

$$Supp(X)=\{0,1,\ldots,n\}$$

- באופן דומה, התומך של Y:

$$Supp(Y)=\{b\ :\ P_Y(b)\neq 0\}=\{0,1,\ldots,n\}$$

4.

(א) אנחנו מחפשים את $P(X\geq 3)=P(X\in[3,\infty])$, כלומר $\Pi_X([3,\infty])$.

- לפי המשפט שראינו, צריך לסכום את פונקציית ההסתברות על כל ה-b בקבוצה (בשביל לדאוג שהקבוצה היא בת מנייה, אנחנו צריכים להוסיף את החיתוך עם $Supp(X)$):

$$\Pi_X([3,\infty])=\sum_{b\in[3,\infty]\cap Supp(X)}P_X(b)$$

$$=\sum_{b=3}^{n}\binom{n}{b}\cdot p^b\cdot(1-p)^{n-b}$$

(ב) אנחנו מחפשים את ההסתברות $P\left(X<3\right)$.

- ניתן לכתוב:

$$P\left(X<3\right)=P\left(X\in\left(-\infty,3\right)\right)=1-P\left(x\in\left[3,\infty\right]\right)$$

  – כדי לקבל:

$$P\left(x<3\right)=1-P\left(x\in\left[3,\infty\right]\right)$$

- או שאפשר לכתוב לפי המשפט:

$$P\left(X<3\right)=P\left(X\in\left(-\infty,3\right)\right)=\sum_{b\in\left[-\infty,3\right]\cap Supp\left(X\right)}^{\infty}P_{X}\left(b\right)$$

$$=\sum_{b=0}^{n}\binom{n}{b}\cdot p^{b}\cdot\left(1-p\right)^{n-b}$$

(ג) נמצא את $P\left(Y\ \ is\ \ even\right)$.

- לפי המשפט שראינו:

$$P\left(Y\ \ is\ \ even\right)=\sum_{b\ \ is\ \ even\ \ and\ \ b\in Supp\left(Y\right)}P_{y}\left(b\right)$$

$$\sum_{b=0\ \ and\ \ b\ \ is\ \ even}^{n}\binom{n}{b}\cdot\left(1-p\right)^{n}\cdot p^{n-b}$$

- ניתן לכתוב את אותו דבר בצורה פורמלית יותר:

$$P\left(Y\ \ is\ \ even\right)=P\left(Y\in2\cdot\mathbb{Z}\right)=\sum_{b\in2\cdot\mathbb{Z}\cap Supp\left(Y\right)}P_{y}\left(b\right)$$

<u>הערה:</u> עד החצי השני של הקורס, כל המשתנים המקריים שלנו יהיו בדידים.

<u>הערה:</u> דוגמה למשתנה מקרי לא בדיד - לבחור נקודה ספציפית על ציר המספרים הממשיים.

<u>הערות:</u>

1. מעכשיו, בכל הסכומים נפסיק לכתוב חיתוך עם התומך.
2. עד עכשיו סימנו ב-b את הארגומנט של פונקציית ההסתברות P_{X}.

- מעכשיו נסמן את הארגומנט באות קטנה המתאימה למשתנה המקרי, לדוגמה $P_Y\left(y\right)$ או $P_X\left(x\right)$
- בפרט, המשפט שראינו בתחילת ההרצאה אומר:

$$P\left(X\in B\right)=\sum_{x\in B}P_X\left(x\right)$$

בשיעור הקודם זיהינו מידות הסתברות שימושיות (בינומית, בינומית שלילת, גאומטרית וכו').
כעת נראה התפלגויות נפוצות של משתנים מקריים בדידים:

1. אם X הוא משתנה מקרי בדיד כך שההתפלגות שלו $\overbrace{\Pi_X}^{narrowed\ down\ to\ \{0,...,n\}}=P_{Bin(n,p)}$, אז נאמר כי ל$X$ יש התפלגות בינומית עם פרמטרים n ו-p.
   - נסמן:

$$X\sim Bin\left(n,p\right)$$

   - במקרה כזה יתקיים:

$$P_X\left(x\right)=\begin{cases}\begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}p^x\left(1-p\right)^{n-x} & x=0,1,\ldots,n\\0 & otherwise\end{cases}$$

   - המשמעות היא שX מייצג את מספר ההצלחות בסדרה של n ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם הסתברות p להצלחה.

2. אם מתקיים $\Pi_X=P_{Geo(p)}$ אז נאמר כי לX התפלגות גאומטרית עם פרמטר p.
   - נסמן:

$$X\sim Geo\left(p\right)$$

   - מתקיים:

$$P_X\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-p\right)^{x-1}\cdot p & x=0,1,\ldots,n\\0 & otherwise\end{cases}$$

3. אם $\Pi_X=P_{NB(m,p)}$ אז לX התפלגות בינומית שלילית עם פרמטרים m,p:

$$X\sim NB\left(m,p\right)$$

$$P_X(x)=\begin{cases}\binom{m-1}{x-1}p^m(1-p)^{x-m} & x=m,m+1,\dots\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

4. אם $X\sim HG(N,G,n)$ אז $\Pi_X=P_{HG(N,G,n)}$

5. $X\sim Pois(\lambda)$ אז $\Pi_X=P_{ois}(\lambda)$ ומתקיים:

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x} & x=0,1,\dots\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

נושא שני - וקטורים מקריים (מוכלל ל-$\mathbb{R}^n$)

הגדרה 10. וקטור מקרי n מימדי

- $\underline{X}$ נקרא **וקטור מקרי** n **מימדי** אם הוא פונקציה $\underline{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$
  - כלומר, שולח כל $\omega\in\Omega$ ל-$\underline{X}(\omega)\in\mathbb{R}^n$.
- ניתן להגדיר עבור $B\subseteq\mathbb{R}^n$ באמצעות מאורעות:

$$\{\underline{X}\in B\}=(\omega\in\Omega\ :\ \underline{X}(\omega)\in B)$$

- המשמעות היא שזהו וקטור n מימדי שערכו נקבע לאחר הניסוי להיות $\underline{X}(\omega)$.

הגדרה 11. התפלגות של $\underline{X}$ היא פונקציה $\Pi_{\underline{X}}:subsets\ of\ \mathbb{R}^n\to[0,1]$ ועבור $B\subseteq\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\Pi_{\underline{X}}(B)=P(\{\underline{X}\in B\})=P(\underline{X}\in B)$$

הגדרה 12. $\underline{X}$ייקרא **וקטור מקרי בדיד** אם קיימת קבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^n$ בת מניה או סופית כך ש$P(\underline{X}\in D)=1$

הגדרה 13. פונקציית הסתברות של וקטור מקרי $\underline{X}$ היא :

$$\begin{aligned} P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right) &= P\left(\underline{X}=\underline{x}\right) \\ &= P\left(\underline{X}\in\left\{\underline{x}\right\}\right) \\ &= \Pi_{\underline{X}}\left(\left\{\underline{x}\right\}\right) \end{aligned}$$

הגדרה 14. תומך של $\underline{X}$**:**

$$Supp\left(\underline{X}\right)=\left(\underline{x}\in\mathbb{R}^{n}\quad:\quad P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)>0\right)$$

משפט 15.

- אם $\underline{X}$ וקטורי מקרי בדיד אז :
  1. $Supp\left(\underline{X}\right)$היא קבוצה בת מניה ומתקיים $P\left(Supp\left(\underline{X}\right)\right)=1$
  2. מתקיים :

$$\Pi_{\underline{X}}\left(B\right)=P\left(\underline{X}\in B\right)=\sum_{\underline{x}\in B\cup Supp\left(\underline{X}\right)}^{\infty}P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)$$

  3. בפרט מתקיים :

$$\sum_{\underline{x}\in Supp\left(\underline{X}\right)}P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)=1$$

דוגמה 16.

- מבצעים סדרה של n תתי ניסויים זהים באופן בלתי תלוי
- לכל תת ניסוי יש m תוצאת אפשרויות הממוספרות $1,2,\ldots,m$
  - מתקבלות שהסתברות $P_{1},P_{2},\ldots,P_{m}$
  - כאשר $P_{k}>0$ וגם $\sum_{k=0}^{m}P_{k}=1$
- נגדיר וקטור מקרי m מימדי בשם $\underline{X}$ שהרכיב ה-k שלו X_{k} מציין את מספר הניסויים בהם התקבל התוצאה k, עבור $(k=0,1,\ldots,m)$

- **צ"ל:**

1. הגידור את $\underline{X}$ באופן פורמלי
2. הראו כי $\underline{X}$ וקטור מקרי בדיד
3. מצאו את $P_{\underline{X}}$
4. מצאו את התומך של $\underline{X}$

- **פיתרון:**

1. על מנת להגדיר את $\underline{X}$ באופן פורמלי, עלינו להגדיר קודם את מרחב המדגם:

$$\Omega = \left\{\omega = \left(\overbrace{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n}^{each\ \ one\ \ is\ \ the\ \ result\ \ of\ \ the\ \ i_{th}\ \ test}\right) \ : \ \omega_i \in \{1, \ldots, m\}\right\}$$
$$= \{1, \ldots, m\}^n$$

– מתקיים:

$$P\left(\{(1, 1, \ldots, 1)\}\right) = p_1^n$$

$$P\left(\{(m, m, \ldots, m)\}\right) = p_m^n$$

$$P\left(\{(1, 2, 3, 1 \ldots, 3)\}\right) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots$$

$$P\left(\left\{\overbrace{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)}^{=\omega}\right\}\right) = p_1^{number\ \ of\ \ times\ \ \omega_1\ \ appears} \cdot p_2^{number\ \ of\ \ times\ \ \omega_2\ \ appears} \cdot \ldots$$

– כעת נגדיר וקטור מקרי (פונקציה מ-Ω ל-$\mathbb{R}^m$) מהצורה $\underline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^m$:

$$\underline{X}(\omega) = \left(\overbrace{\#_1(\omega)}^{amount\ \ of\ \ 1\ \ in\ \ \omega}, \#_2(\omega), \ldots, \#_m(\omega)\right)$$
$$= (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_m(\omega))$$

2. נראה כי $\underline{X}$ הוא וקטור מקרי בדיד.

– במקרה החד-מימדי, היינו צריכים למצוא קבוצה בת מנייה שהמשתנה המקרי נופל בתוכה בהסתברות של 1.

- במקרה ה-m מימדי, אפשר לקחת את הקבוצה $D=\{0,\ldots,n\}^m$ או את הקבוצה $D=\mathbb{Z}^m$ ונקבל שהווקטור המקרי בוודאות ייפול בקבוצה:

$$P\left(\underline{X}\in D\right)=P\left(the\ \ result\ \ vector\in D\right)=1$$

* למשל:

$$\underline{X}\left(\left(1,1,\ldots,1\right)\right)=\left(n,0,0\ldots,0\right)\in D$$

$$\underline{X}\left(\left(m,m,\ldots,m\right)\right)=\left(0,0,0\ldots,0,m\right)\in D$$

$$\underline{X}\left(\left(1,2,1,2,\ldots,1,2\right)\right)=\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2},0\ldots,0,0\right)\in D$$

* כלומר קיימת קבוצה בת מנייה כך שהתוצאות של $\underline{X}$ תמיד יפלו בקבוצה הזו ולכן $\underline{X}$ הוא וקטור מקרי בדיד.

3. נמצא את פונקציית ההסתברות של הוקטור המקרי, כלומר את $P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)=P\left(\underline{X}=\underline{x}\right)$.
   - במילים, אנחנו מחפשים את

$$P\left(\underline{X}\ \ resulted\ \ in\ \ the\ \ value\ \ \underline{x}\right)$$

* ולפי הגדרת $\underline{X}$, זה אומר:

$$=P\left(amount\ \ of\ \ results\ \ of\ \ type\ \ k\ \ is\ \ x_k\ \ for\ \ all\ \ k=1,\ldots,m\right)$$

* ובכתיבה פורמלית יותר:

$$=P\left(\left\{\omega:\underline{X}\left(\omega\right)=\underline{x}\right\}\right)$$

· ולפי ההגדרה מתקיים:

$$=P\left(\left\{\omega\ \ :\ \ \#_1\left(\omega\right)=x_1\ \ ,\ \ \#_2\left(\omega\right)=x_2\ \ ,\ldots\right\}\right)$$

– מתקיים:

$$= \sum_{\#_1(\omega)=x_1,\ \#_2(\omega)=x_2,\ \dots} P\left(\{\omega\}\right)$$

$$= \sum_{\#_1(\omega)=x_1,\ \#_2(\omega)=x_2,\ \dots} p_1^{\#_1(\omega)} \cdot p_2^{\#_2(\omega)} \cdot \ldots \cdot p_m^{\#_m(\omega)}$$

* כלומר:

$$= \sum_{\dots} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{x_m}$$

$$= \begin{cases} \overbrace{\frac{n!}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_m!}}^{number\ \ of\ \ series} \cdot \overbrace{p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{x_m}}^{The\ \ probability\ \ to\ \ get\ \ a\ \ series\ \ with\ \ x_k\ \ results\ \ of\ \ type\ \ k} & if\ \ x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \ and\ \ \sum x_k = n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

4. נמצא את התומך של $\underline{X}$:

$$Supp\left(\underline{X}\right) = \left\{\underline{x}\ \ :\ \ P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right) > 0\right\}$$

$$= \left\{\underline{x} : x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \ and\ \ \sum x_k = n\right\}$$

<u>הערה:</u>

- אם $\underline{X}$ הוא וקטור מקרי (כלומר פונקציה $\omega \to \underline{X}\left(\omega\right)$)
- ואם נגדיר את X_k להיות הפונקציה (רכיב k של ω) $\omega \to$
  – כלומר $\underline{X}\left(\omega\right) = \left(X_1\left(\omega\right), \ldots, X_m\left(\omega\right)\right)$
- אז X_k הוא פונקציה מ-Ω ל-$\mathbb{R}$.
  – כלומר X_kהוא משתנה מקרי.
- ובכיוון ההפוך, אם $X_1, X_2, \ldots, X_m$ הם משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב Ω
  – ונגדיר את הפונקציה $\underline{X}$ להיות:

$$\underline{\omega} \to \left(X_1\left(\omega\right), \ldots, X_m\left(\omega\right)\right)$$

* אז $\underline{X}$ הוא פונקציה מ-Ω ל-$\mathbb{R}^m$, כלור הוא וקטור מקרי.

- באופן מקוצר: וקטור מקרי m מימדי = אוסף של m משתנים מקריים המוגדרים על אותו Ω.

– לכן לפעמים נקרא לפונקציית ההסתברות או להתפלגות של וקטור מקרי $\underline{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ **פונקציית ההסתברות המשותפת** או **ההתפלגות המשותפת** של המשתנים המקריים $X_1,X_2,\ldots,X_m$.

– נסמן:

$$\Pi_{\underline{X}}=\Pi_{X_1,X_2,\ldots,X_m}$$

$$P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)=P_{X_1,X_2,\ldots,X_m}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$$

– בפרט, נשים לב שמתקיים:

$$P_{X_1,X_2,\ldots,X_m}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)=P\left(\left(X_1,X_2,\ldots,X_m\right)\right)$$

* או בראייה אחרת:

$$=P\left(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\ldots\cap\{X_m=x_m\}\right)$$

· סימון מקוצר:

$$P\left(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\ldots\cap\{X_m=x_m\}\right)\equiv P\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_m=x_m\right)$$

<u>הערה נוספת:</u>

- לוקטור מקרי $\underline{X}$ n מימדי (או לאוסף משתנים מקריים $X_1,X_2,\ldots,X_n$) עם פונקציית הסתברות

$$P_{X_1,X_2,\ldots,X_m}\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)=\begin{cases}\frac{n!}{x_1!\cdot x_2!\cdot\ldots\cdot x_m!}p_1^{x1}\cdot & p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{x_m}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

– אז נאמר של$\underline{X}$ יש התפלגות מולטינומית (הכללה של "בינומית") עם פרמטרים $n,p_1,\ldots,p_m$ ונסמן $\underline{X}\sim Multi\left(n,p_1,\ldots p_m\right)$

משפט 17.

- יהא $\underline{X}$ וקטור מקרי n מימדי בדיד מעל (Ω, P).
- תהא פונקציה $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- נגדיר פונקציה חדשה $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ על ידי $Y(\omega) = g(X(\omega))$
- אזי:

1. $\underline{Y}$ הוא בעצמו וקטור מקרי m מימדי.
2. אם $\underline{X}$ בדיד אז גם $\underline{Y}$ בדיד.
3. פונקציית ההסתברות של Y על הערך y היא סכום ההסתברות של $\underline{X}$:

$$P_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum_{\underline{x}\ :\ g(\underline{x})=y} P_{\underline{X}}(\underline{x})$$

4. מכיוון ש$\underline{X}$ הוא וקטור מקרי בדיד, אז בפרט X_k הוא משתנה מקרי בדיד ומתקיים:

$$P_{X_k}(x_k) = \sum_{x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_m} P_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_m)$$

   - ניתן גם לכתוב כך:

$$P_{X_k}(\widetilde{x}_k) = \sum_{\underline{x}:x_k=\widetilde{x}_k} P_{\underline{X}}(\underline{x})$$

   - כלומר משאירים את x_k קבוע.

דוגמה 18.

- מטילים קובייה עם 3 פאות וההסתברויות לתוצאות $1,2,3$ הן:
  - $p_1 = \frac{1}{4}$
  - $p_1 = \frac{1}{8}$
  - $p_1 = \frac{5}{8}$
- מטילים את הקובייה 20 פעמים.
- הניחו כי ההטלות בלתי תלויות.
- נסמן:
  - X_1 = מספר התוצאות מסוג "1"
  - X_2 = מספר התוצאות מסוג "2"
  - X_3 = מספר התוצאות מסוג "3"
- **צ"ל:**

1. מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X_1, X_2, X_3
2. מצאו את פונקציית ההסתברות של X_1 בלבד.
3. מצאו את פונקציית ההסתברות של $X_2 + X_3$.

- **פיתרון:**

1. מכיוון שזהו הסיפור של הדוגמה הקודמת בהרצאה הזו, נקבל:

$$\underline{X} \sim Multi\left(n = 20,\ \ p_1 = \frac{1}{4},\ \ p_2 = \frac{1}{8},\ \ p_3 = \frac{5}{8}\right)$$

– כלומר:

$$P_{X_1,X_2,X_3}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} & x_1 + x_2 + x_3 = 20 \ \ and \ \ x_k \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2. מחפשים את $P_{X_1}\left(x_1\right)$, כלומר מה ההסתברות ש$X_1 = x_1$, או במילים אחרות:

$$= P\left(X_1 = x_1\right)$$

$$= P\left(x_1 \ times \ the \ result \ "1" \ in \ die \ rolls\right)$$

– דרך א' - אפשר לפתור לפי הסיפור של התרגיל.
– דרך ב' - לפי הסעיף האחרון במשפט שראינו מתקיים:

$$P_{X_1}\left(x_1\right) = \sum_{x_2,x_3} P_{X_1,X_2,X_3}\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

* בסעיף הראשון של השאלה שם קיבלנו:

$$P_{X_1,X_2,X_3}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} & x_1 + x_2 + x_3 = 20 \ \ and \ \ x_k \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

· נציב ונקבל שאם נשאיר את x_1 קבוע ונשנה רק את x_2, x_3 אז עבור $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ וגם $x_k \geq 0$ מתקיים:

$$P_{X_1}\left(x_1\right) = \sum_{x_2,x_3}\left(\frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3}\right)$$

- נוסיף את הביטויים $\frac{(1-p_1)^{n-x_1}}{(1-p_1)^{n-x_1}}$ ו- $\frac{(n-x_1)!}{(n-x_1)!}$ לביטוי כדי לקבל:

$$= \frac{n!}{x_1! \cdot (n-x_1)!} p_1^{x_1} \cdot (1-p_1)^{n-x_1} \cdot \sum_{x_2,\ x_3=n-x_1-x_2} \frac{(n-x_1)!}{x_2! \cdot x_3!} \cdot \frac{p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3}}{(1-p_1)^{n-x_1}}$$

- נציב $x_3! = (n-x_1-x_2)!$

$$= \frac{n!}{x_1! \cdot (n-x_1)!} p_1^{x_1} \cdot (1-p_1)^{n-x_1} \cdot \sum_{x_2,\ x_3=n-x_1-x_2} \frac{(n-x_1)!}{x_2! \cdot (n-x_1-x_2)!} \cdot \frac{p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3}}{(1-p_1)^{n-x_1}}$$

- נציב $n - x_1 = x_2 + (n-x_1-x_2)$ ונקבל:

$$= \frac{n!}{x_1! \cdot (n-x_1)!} p_1^{x_1} \cdot (1-p_1)^{n-x_1} \cdot \sum_{x_2,\ x_3=n-x_1-x_2} \frac{(n-x_1)!}{x_2! \cdot (n-x_1-x_2)!} \cdot \frac{p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3}}{(1-p_1)^{x_2+(n-x_1-x_2)}}$$

- נפתח את הטור כדי לקבל:

$$\binom{n}{x_1} \cdot p_1^{x_1} \cdot (1-p_1)^{n-x_1} \cdot \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!}{x_2! \cdot (n-x_1-x_2)!} \cdot \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2}$$

- נשים לב כי $\binom{n-x_1}{x_2} = \frac{(n-x_1)!}{x_2! \cdot (n-x_1-x_2)!}$ ואז קיבלנו שהסכום הוא מידת ההסתברות הבינומית:

$$\sum_{x_2=0}^{n-x_1} P_{Bin\left(n-x_1, \frac{p_2}{1-p_1}\right)}\left(\{x_2\}\right)$$

- כלומר מתקיים:

$$\sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!}{x_2! \cdot (n-x_1-x_2)!} \cdot \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2} = 1$$

נושא שלישי - התניה באמצעות משתנים מקריים:

- אם X ו-Y משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב מדגם כ שניתן לדבר על מאורעות מהצורה $\{X=x\}$, $\{Y=y\}$ ולמצוא את ההסתברות שלהן.
- אפשר גם לחשב את ההסתברות המותנית:

$$P\left(\{Y=y\} \mid \{X=x\}\right) = \frac{P\left(\{X=x\} \cap \{Y=y\}\right)}{P\left(\{X=x\}\right)}$$

הגדרה 19.

- לפונקציה $P_{Y|X}:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ המוגדרת על ידי:

$$P_{Y|X}\left(y,x\right)=\begin{cases}P\left(\{Y=y\}\mid\{X=x\}\right) & P\left(\{X=x\}\right)\neq0\\0 & otherwise\end{cases}$$

  – קוראים פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן X.

משפט 20.

יהיו X,Y משתנים מקריים בדידים המוגדרים על אותו מרחב מדגם:

- אזי מתקיים:

1. $P_{Y|X}\left(y,x\right)=\begin{cases}\frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} & p_X\left(x\right)>0\\0 & otherwise\end{cases}$
2. נוסחת הכפל:

$$P_{X,Y}\left(x,y\right)=P_X\left(x\right)\cdot P_{Y|X}\left(y,z\right)$$

3. נוסחת בייס:

$$P_{X|Y}\left(x,y\right)=\begin{cases}P_{Y|X}\left(y,x\right)\cdot\frac{P_Y(y)}{P_X(x)} & p_X\left(x\right)>0\\0 & otherwise\end{cases}$$

4. נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P_Y\left(y\right)=\sum_x P_X\left(x\right)\cdot P_{Y|X}\left(y,x\right)$$