הסתברות מ' | הרצאה 8 (00094412)

שם: איל

March 6, 2024

נושאי השיעור: משתנים מקריים רציפים

נושא ראשון - הגדרת משתנים מקריים רציפים.

דוגמה 1. מוטיבציה.

בוחרים נקודה באקראי בקטע $[c,d]$ ב"סיכוי שווה לכל נקודה".

צ"ל: הגדירו מרחב הסתברות מתאים.

פיתרון:

- דרך אחרת לדבר על "סיכוי שווה לכל נקודה" היא להגיד שלכל a,b המקיימים $c\le a<b\le d$, הסיכוי ליפול בתת-מקטע $[a,b]$ כלשהו הוא אורך תת המקטע חלקי אורך המקטע השלם:

$$\frac{length\ \ of\ \ desired\ \ interval}{length\ \ of\ \ total\ \ interval}=\frac{b-a}{d-c}$$

  – במקרה כזה, נקבל כי Ω תהיה:

$$\Omega=\{\omega\ \ :\ \ \omega\in[c,d]\}=[c,d]$$

  – ומידת ההסתברות תהיה פונקציה $P:\{sub\ \ intervals\ \ of\ \ \ [c,d]\}\to[0,1]$, כלומר פונקציה מתתי-קבוצות של $[c,d]$ ל-$[0,1]$

    * שמקיימת:

      1. גם $P\left([c,d]\right)=1$

      2. וגם אדטיביות, כלומר שלכל $A_1,A_2\subseteq[c,d]$ זרים בזוגות מתקיים:

$$P\left(\bigcup_k A_k\right)=\sum_k P\left(A_k\right)$$

3. ובנוסף:

$$P\left([a,b]\right)=P\left(\{\omega\in[c,d]:\omega\in[a,b]\}\right)=\frac{b-a}{d-c}$$

- נחשב את $P=\frac{b-a}{d-c}$ שמצאנו על כמה תתי קבוצות $B\subseteq[e,d]$ עבור $c<a<b<e<f<d$:

$$P\left([a,b]\cup[e,f]\right)=P\left([a,b]\right)+P\left([e,f]\right)=\frac{b-a}{d-c}-\frac{f-e}{d-c}$$

  – בנוסף, יתקיים:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k-a_k}{d-c}$$

- מה הסיכוי שעבור $c\le a\le d$ יתקיים $P\left(\{a\}\right)$? נראה שהתשובה היא 0.
  – יהי $\varepsilon>0$.
  – ניקח קטע $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ ונקבל $\{a\}\subseteq[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$.
    * ולכן לפי תכונות P, ההסתברויות של מאורעות מוכלים הן מונוטוניות, כלומר:

$$P\left(\{a\}\right)\le P\left([a-\varepsilon,a+\varepsilon]\right)=\frac{2\cdot\varepsilon}{d-c}$$

      · נשים לב שזה מתקיים לכל $\varepsilon>0$ (אינטואיטיבית אפשר להשאיף את $\varepsilon\to 0$)
      · ולכן מתקיים כי $P\left(\{a\}\right)\le 0$.
    * מכיוון ש-P מידת הסתברות, היא תמיד אי שלילית ולכן מתקיים $0\le P\left(\{a\}\right)$
  – קיבלנו:

$$0\le P\left(\{a\}\right)\le 0$$

$$\Rightarrow P\left(\{a\}\right)=0$$

הערה 2. איך יכול להיות שמצד אחד הסיכוי לכל נקודה הוא 0 ומצד שני בסוף תיבחר נקודה אחת?

- מבחינת ההגדרות המתמטיות זה מסתדר.
  – מהגדרת P כמידת הסתברות מתקיים:

$$P\left([c,d]\right)=1$$

– ובנוסף מתקיים:

$$\bigcup_{a\in[c,d]}\{a\}=[c,d]$$

* ולכן:

$$P\left(\bigcup_{a\in[c,d]}\{a\}\right)=P\left([c,d]\right)=1$$

· אבל האדטיביות לא מתקיימת במקרה הזה, כי האיחוד הוא לא בן מנייה ולכן:

$$P\left(\bigcup_{a\in[c,d]}\{a\}\right)\neq\sum_{a\in[c,d]}P\left(\{a\}\right)=0$$

· כלומר:

$$P\left([c,d]\right)=1\neq\sum_{a\in[c,d]}P\left(\{a\}\right)=0$$

- לעומת זאת, לכל תת קבוצה $B\subseteq[c,d]$ עם מספר בן מנייה של נקודות, ניתן להשתמש באדטיביות ולקבל שההסתברות שהנקודה תיפול ב-B היא אפס:

$$P\left(B\right)=P\left(\bigcup_{a\in B}\{a\}\right)=\sum_{a\in B}P\left(\{a\}\right)=0$$

- בפרט, הסיכוי שהנקודה תהיה רציונלית היא אפס.

  – כלומר עבור $B=\mathbb{Q}\cap[c,d]$:

$$P\left(\mathbb{Q}\cap[c,d]\right)=0$$

- וההסתברות לכך שהנקודה שתיבחר תהיה אי-רציונלית היא אחד:

$$P\left(Q^{c}\cap[c,d]\right)=P\left([c,d]\setminus\mathbb{Q}\cap[c,d]\right)$$

– מכיוון שמתקיים $\{[c,d] \setminus \mathbb{Q} \cap [c,d]\} \subseteq \mathbb{Q} \cap [c,d]$, אז:

$$= P([c,d]) - P(\mathbb{Q} \cap [c,d])$$

$$= 1 - 0 = 1$$

- אפשר אפילו למצוא קבוצות בתוך הקטע $[c,d]$ שיש להן את אותה עוצמה כמו של $[c,d]$ שגם עבורן ההסתברות היא אפס.
- לכן נרצה למצוא דרך בהינתן קבוצת נקודות כלשהי $B \subseteq [c,d]$, נוכל לחשב את $P(B)$.
  – אי אפשר להגדיר את $P(B)$ באופן מפורש לכל תת קבוצה $B \subseteq [c,d]$ כמו שעשינו בעבר.
    * אך אפשר לנסות להגדיר את P כפונקציה שמקיימת את שלושת הדרישות שהזכרנו:
      1. $P([c,d]) = 1$
      2. אדטיביות, כלומר שלכל $A_1, A_2 \subseteq [c,d]$ זרים בזוגות מתקיים:

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

      3. וגם:

$$P([a,b]) = P(\{\omega \in [c,d] : \omega \in [a,b]\}) = \frac{b-a}{d-c}$$

    * ובשביל ש-P תהיה פונקציה, היא צריכה לקיים "קיום" ו-"יחידות", כלומר נצטרך לענות על שתי שאלות:
      1. "קיום" - האם קיימת פונקציה P כזו המקיימת את שלושת הדרישות?
      2. "יחידות" - האם קיימת רק פונקציה אחת כזו? לא נרצה מצב בו $P(B) = 0.2$ וגם $P(B) = 0.3$.
    * אם דורשים שהפונקציה P הזו תהיה מוגדרת על כל תתי הקבוצות של $[c,d]$ אז התשובה היא שאין כזו פונקציה P. אם ננסה להגדיר כזו בהכרח נגיע לסתירה (ההוכחה לא בחומר).
  – הפיתרון הוא לצמצם את P כך שתוכל לקבל איברים רק מתת-אוסף כלשהו של תתי הקבוצות של $[c,d]$ (תת-אוסף לא מלא, אך מספיק עשיר בשביל רוב היישומים. לא הגדרנו בהרצאה מהו תת האוסף הזה)
    * ואז לפי משפט קארתיאודורי (לא בחומר) התשובה היא שאפשר למצוא P כזו שמקיימת "קיום" ו-"יחידות".
- לסיכום:
  – ראינו שאם מנסים להגדיר את P כפונקציה מכל תתי הקבוצות של $[c,d]$ ל-$[0,1]$ אז לא קיימת P כזו.
  – אבל אם נצמצם את P כך שהיא תהיה מאוסף תתי-קבוצות של $[c,d]$ ל-$[0,1]$ אז קיימת פונקציה כזו שמספיק טובה לרוב השימושים.
- מעכשיו נניח שה-P שלנו מוגדרת על האוסף המצומצם הזה שמאפשר לה להיות קיימת.

דוגמה 3. מוטיבציה נוספת.

- בהמשך לדוגמה הראשונה, נגדיר:
  - משתנה מקרי X - ערך הנקודה שנבחרה.
- **צ"ל:**

1. מצאו את ההתפלגות של X.
2. מצאו את פונקציית ההסתברות של X.
3. האם X הוא משתנה מקרי בדיד?

פיתרון:

נגדיר את X באופן פורמלי:

- נגדיר כי X תהיה פונקציה המוגדרת $X:[c,d]\to\mathbb{R}$.
  - והיא תקיים $X(\omega)$ = הערך של הנקודה המיוצגת על ידי ω
    - כלומר $X=\omega$

1. נמצא את ההתפלגות של X.

- אנחנו מחפשים את $[0,1]\to$תתי-קבוצות של $[c,d]\ :\ \Pi_X$
  - עבור $B\subseteq\mathbb{R}$, מתקיים $\Pi_X(B)=P(X=B)$.
- כאמור, הנחנו כי P מוגדרת על האוסף המצומצם שמאפשר את הקיום שלה.
- ולכן מתקיים שזו ההסתברות שערך הנקודה ייפול ב-B:

$$P(X=B)=P(the\ \ value\ \ is\ \ in\ \ B)$$

- נכתוב זאת באופן הבא:

$$=P\left(\left\{\omega\in[c,d]:\ \overbrace{X(\omega)}^{=\omega}\in B\right\}\right)$$

$$=P([c,d]\cap B)=\Pi_X(B)$$

- למשל עבור $[a,b]\subseteq[c,d]$ מתקיים:

$$\Pi_X([a,b])=P(X\in[a,b])$$

- כלומר זו ההסתברות שהנקודה הנבחרת תימצא בקטע $[a,b]$:

$$=P(\omega\in[a,b])=P([c,d]\cap[a,b])$$

– ולפי הגדרת P מתקיים:

$$=\frac{length\ \ of\ \ \ [c,d]\cap[a,b]}{d-c}$$

2. נמצא את פונקציית ההסתברות של X.

- בהרצאות הקודמות אמרנו שהתפלגות זה אובייקט שלא נוח לעבוד אתו ולכן נרצה לחשב את פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X:

$$P_X\left(x\right)=P\left(X=x\right)=P\left(the\ \ value\ \ is\ \ x\right)$$

$$=\Pi_X\left(x\right)$$

$$=P\left(\{x\}\cap[c,d]\right)$$

– ולפי הטענה שהראנו בדוגמה הקודמת, ההסתברות לנקודה בודדת או לקבוצה ריקה היא 0, ולכן:

$$P_X\left(x\right)=P\left(\{x\}\cap[c,d]\right)=0$$

- קיבלנו שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $P_X\left(x\right)=0$.
  – הערה: זו לא סתירה כי ההגדרה $\sum_{x\in R_X}P_X\left(x\right)=1$ היא רק למשתנים מקריים בדידים.

3. נבחן האם X הוא משתנה מקרי בדיד.

- המשתנה המקרי X הוא לא בדיד, מכיוון שלכל תת קבוצה בת מנייה $B\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\sum_{x}P\left(X\in B\right)=P\left(value\ \ is\ \ in\ \ B\right)=0$$

$$=\Pi_X\left(B\right)=P\left(B\cap[c,d]\right)=0$$

- ואילו אצלנו מתקיים כי $\Pi_X\left([c,d]\right)=1$

הגדרה 4. משתנה מקרי רציף.

- משתנה מקרי X מעל מרחב הסתברות (Ω, P) ייקרא רציף (לחלוטין) אם קיימת פונקציה $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ רציפה למקוטעין כך שמתקיים:

$$P\left(X \in [a, b]\right) = \int\limits_a^b f_X\left(x\right) dx$$

- הפונקציה f_X תיקרא **פונקציית הצפיפות של** X**.**

תזכורות:

הגדרה 5. פונקציה רציפה למקוטעין.

- עבור $-\infty \leq a < b \leq \infty$, פונקציה $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ תיקרא **רציפה למקוטעין** אם קיימים $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ ופונקציות $g_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ רציפות כך ש:

$$f\left(x\right) = g_k\left(x\right) \quad , for\ \ all\ \ x \in \left(x_{k-1}, x_k\right)$$

הגדרה 6. הגדרה שקולה - פונקציה רציפה למקוטעין.

- f רציפה על $[a, b]$ למעט במספר סופי של נקודות אבל תמיד בעלת גבולות חד צדדיים בכל נקודה.

משפט 7. אם $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה עבור $-\infty < a < b < \infty$ אז f אינטגרבילית, כלומר $\int_a^b f\left(x\right) dx$ קיים.

משפט 8. אינטגרל מוכלל
אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה אז מתקיים

$$\int\limits_a^\infty f\left(x\right) dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_a^b f\left(x\right) dx$$

- בהנחה שהגבול קיים.
- אם הגבול קיים עבור $\left|f\left(x\right)\right|$במקום עבור $f\left(x\right)$ אז נאמר כי הפונקציה אינטגרבילית <u>בהחלט</u> על $[a, \infty)$.
- בקורס שלנו, קיום $\int_a^b f\left(x\right) dx$ קורה אם ורק אם $\int_a^b \left|f\left(x\right)\right| dx$.

משפט 9. פונקציה רציפה למקוטעין היא אינטגרבילית.

- אם $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין אז היא אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g_k\left(x\right) dx$$

- עבור $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ו-$g_1, g_2, \ldots, g_n$ מההגדרה הראשונה לפונקציה רציפה למקוטעין

הערה 10. סימון:

- עבור $a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n$ מתקיים:

$$\int\limits_{\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,b_k]} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx$$

משפט 11.

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ו- $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא פונקציה ששווה ל-f פרט למספר סופי של נקודות ב-$[a,b]$ אז גם h רציפה למקוטעין ומתקיים:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} h(x)\,dx$$

דוגמה 12.

- נחזור לדוגמה הקודמת.
- **צ"ל:** הרו כי X מהדוגמה הקודמת הוא משתמה מקרי רציף ומצאו את צפיפותו.

פיתרון:

- אנחנו מחפשים פונקציה $f_X:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ רציפה למקוטעין כך שלכל $a<b$ מתקיים:

$$P(X\in[a,b]) = \int\limits_{a}^{b} f_X(x)\,dx$$

- נבחן את הביטוי $P(X\in[a,b])$, ההסתברות שהנקודה תיפול בקטע $[a,b]$:

$$P(value\ \ is\ \ in\ \ [a,b]) = \Pi_X([a,b])$$

$$= P([a,b]\cap[c,d]) = \frac{length\ \ of\ \ [a,b]\cap[c,d]}{d-c}$$

- נבחן את הביטוי $\int_a^b f_X(x)\,dx$:

– נשים לב כי האינטגרל מייצג את השטח מתחת לפונקציה.

* כלומר אנחנו רוצים שגודל השטח מתחת לאינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{length\ \ of\ \ [a,b]\cap[c,d]}{d-c}$.

• נבחר את הפונקציה:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{d-c} & c\le x\le d\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

– נשים לב שהיא אכן פונקציה רציפה למקוטעין.

• מתקיים:

$$\int\limits_a^b f_X(x)\,dx=\int\limits_{[a,b]} f_X(x)\,dx$$

– ואת הקטע $[a,b]$ ניתן לכתוב $[a,b]=\{[a,b]\cap[c,d]\}\cup\{[a,b]\cap[c,d]^c\}$, ולפי ליניאריות האינטגרל מתקיים:

$$=\int\limits_{[a,b]\cap[c,d]} f_X(x)\,d+\int\limits_{[a,b]\cap[c,d]^c} f_X(x)\,dx$$

* ומהגדרת $f_X(x)$ מתקיים $\int_{[a,b]\cap[c,d]^c} f_X(x)\,dx=0$ וגם

$$\int\limits_{[a,b]\cap[c,d]} f_X(x)\,dx=\int\limits_{[a,b]\cap[c,d]}\frac{1}{d-c}dx$$

$$=\frac{1}{d-c}\cdot|[a,b]\cap[c,d]|=\frac{length\ \ of\ \ [a,b]\cap[c,d]}{d-c}$$

• קיבלנו כי X משתנה מקרי רציף והצפיפות שלו היא $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{d-c} & c\le x\le d\\ 0 & otherwise\end{cases}$.

משפט 13. תכונות בסיסיות של משתנים מקריים רציפים.

• יהא X משתנה מקרי רציף עם צפיפות f_X.

– מתקיים:

1. $P(X=x)=P_X(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
2. $P(X\in[a,b])=P(X\in(a,b))=P(X\in(a,b])=P(X\in[a,b))=\int_a^b f_X(x)\,dx$
3. $P\left(X\in\bigcup_{k=1}^n[a_k,b_k]\right)=\int_{\bigcup_{k=1}^n} f_X(x)\,dx$ לכל $a_1<b_1<a_2<\ldots<b_n$
4. $P(X\in[a,\infty))=\int_a^\infty f_X(x)\,dx$ לכל a ו-$P(X\in(-\infty,b])=\int_{-\infty}^b f_X(x)\,dx$ לכל b.
5. $\int_{-\infty}^\infty f_X(x)\,dx=P(X\in(-\infty,\infty))$

הוכחה.

1. נוכיח כי $P\left(X=x\right)=P_{X}\left(x\right)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$

- כמו שעשינו בעבר, לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $P\left(X=x\right)\leq P\left(X\in\left[x-\varepsilon,x+\varepsilon\right]\right)$
- בנוסף, מתקיים:

$$P\left(X\in\left[x-\varepsilon,x+\varepsilon\right]\right)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f_{X}\left(x\right)dx\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0$$

- כלומר קיבלנו $0\leq P\left(X=x\right)\leq0$
  - ולכן $P\left(X=x\right)=0$

2. נוכיח $P\left(X\in\left[a,b\right]\right)=P\left(X\in\left(a,b\right)\right)=P\left(X\in\left(a,b\right]\right)=P\left(X\in\left[a,b\right)\right)=\int_{a}^{b}f_{X}\left(x\right)dx$:

- נראה כי $P\left(X\in\left(a,b\right]\right)=P\left(X\in\left[a,b\right]\right)$ ושאר השוויונות יתקבלו באופן דומה.
- מתקיים:

$$P\left(X\in\left[a,b\right]\right)=P\left(X\in\left[a,b\right]\setminus\left\{ a\right\} \right)$$

$$=P\left(X\in\left[a,b\right]\right)-\overbrace{P\left(X=a\right)}^{=0}$$

3. נוכיח כי $P\left(X\in\bigcup_{k=1}^{n}\left[a_{k},b_{k}\right]\right)=\int_{\bigcup_{k=1}^{n}}f_{X}\left(x\right)dx$ לכל $a_{1}<b_{1}<a_{2}<\ldots<b_{n}$.

- מאדטיביות, מתקיים:

$$P\left(X\in\bigcup_{k=1}^{n}\left[a_{k},b_{k}\right]\right)=\sum_{k=1}^{n}P\left(X\in\left[a_{k},b_{k}\right]\right)$$

  - ומהגדרת משתנה מקרי רציף, מתקיים:

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{a_{k}}^{b_{k}}f_{X}\left(x\right)dx$$

  - ומההערות שהזכרנו קודם מתקיים:

$$=\int\limits_{\bigcup_{k=1}^{n}\left[a_{k},b_{k}\right]}f_{X}\left(x\right)dx$$

4. נוכיח כי $P\left(X\in\left[a,\infty\right)\right)=\int_{a}^{\infty}f_{X}\left(x\right)dx$ לכל a.

- לא בחומר של הקורס שלנו, אבל מתקיים:

$$P\left(X\in\left[a,\infty\right)\right)=\lim_{b\to\infty}P\left(\left[a,b\right]\right)$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}f_{X}\left(x\right)dx=\int_{a}^{\infty}f_{X}\left(x\right)dx$$

- ההוכחה עבור b היא באותו אופן.

5. נוכיח כי $P\left(X\in\left(-\infty,\infty\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X}\left(x\right)dx$.

- מתקיים $P\left(X\in\left(-\infty,\infty\right)\right)=1$
- נחלק את הקטע $\left(-\infty,\infty\right)$ ל-$\left(-\infty,0\right]\cup\left[0,\infty\right)$ ונקבל:

$$P\left(X\in\left(-\infty,\infty\right)\right)=P\left(X\in\left(-\infty,0\right]\cup\left[0,\infty\right)\right)$$

$$=P\left(X\in\left(-\infty,0\right]\right)+P\left(X\in\left[0,\infty\right)\right)$$

- ומכאן נציב $P\left(X\in\left[0,\infty\right)\right)=\int_{0}^{\infty}f_{X}\left(x\right)$.

■

נושא שני - מציאת $f_{X}\left(x\right)$

איך נדע שמשתנה מקרי X הוא רציף ונמצא את צפיפותו?

<u>דרך א':</u>

הגדרה 14. פונקציית התפלגות מצטברת.

- יהא X משתנה מקרי.
- הפונקציה $F_{X}:\mathbb{R}\to\left[0,1\right]$ המוגדרת $F_{X}\left(a\right)=P\left(X\leq a\right)$ לכל $a\in\mathbb{R}$, נקראת **פונקציית ההתפלגות המצטברת** של X.

הערה 15. בניגוד לפונקציית צפיפות, פונקציית ההתפלגות המצטברת שימושית גם למשתנים מקריים בדידים וגם לרציפים.

טענה 16. תכונות בסיסיות של F_{X}.

- יהא X משתנה מקרי ותהא F_{X}פונקציית ההתפלגות המצטברת שלו.

1. $P\left(X\in\left(a,b\right]\right)=P\left(a<X<b\right)=F_{X}\left(b\right)=F_{X}\left(a\right)$

2. $1-F_X(a)=P(X\in\{(-\infty,b]\setminus(-\infty,a)\})$

הוכחה.

1. נוכיח כי $P(X\in(a,b])=P(a<X<b)=F_X(b)=F_X(a)$
   - מכיוון ש-$(a,b]=\{(-\infty,b]\setminus(-\infty,a)\}$, מתקיים:

$$P(X\in(a,b])=P(X\in(-\infty,b]\setminus(-\infty,a))$$

   - ולפי תכונות של P מתקיים:

$$=P(X\in(-\infty,b])-P(X\in(-\infty,a))$$

   - כלומר:

$$=F_X(b)-F_X(a)$$

2. נוכיח כי $1-F_X(a)=P(X\in\{(-\infty,b]\setminus(-\infty,a)\})$
   - מתקיים:

$$P(X\in(a,\infty))=P(x\in(-\infty,a]^c)=1-P(X\in(-\infty,a]^c)=1-F_X(a)$$

■

משפט 17.

1. X משתנה מקרי רציף $\Longleftrightarrow$ קיימת פונקציה $f_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ רציפה למקוטעין כך ש:

$$F_X(a)=\int\limits_{-\infty}^{a}f_X(x)\,dx$$

2. אם X משתנה מקרי רציף אז:
   - לכל x נקודת רציפות של f_X מתקיים:

$$f_X(x)=\overbrace{\frac{d}{da}F_X(a)\mid_{a=x}}^{=F'_X(x)}$$

הוכחה.

.1

- <u>כיוון ראשון $\Leftarrow$</u>
  - נניח כי X הוא משתנה מקרי רציף.
  - לכן קיימת f_x כך ש- $P\left(X\in[a,b]\right)=\int_a^b f_X\left(x\right)dx$
    - ראינו במשפט שמתקיים גם:

$$\overbrace{P\left(X\in(-\infty,a]\right)}^{F_X(a)}=\int\limits_{-\infty}^{a}f_X\left(x\right)dx$$

- <u>כיוון שני $\Rightarrow$</u>
  - נניח כי קיימת פונקציה $f_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ רציפה למקוטעין כך ש $F_X\left(a\right)=\int_{-\infty}^{a}f_X\left(x\right)dx$
  - לפי הטענה הראשונה מתקיים:

$$P\left(X\in(-\infty,a]\right)=F_X\left(b\right)-F_X\left(a\right)$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{b}f_X\left(x\right)dx-\int\limits_{-\infty}^{a}f_X\left(x\right)dx$$

$$=\int\limits_{a}^{b}f_X\left(x\right)dx$$

  - ניתן להראות שאפשר להחליף את $(-\infty,a]$ ב- $[-\infty,a)$.
- ולכן X רציף.

2. נראה כי אם X משתנה מקרי רציף אז לכל x נקודת רציפות של f_X מתקיים $f_X\left(x\right)=\frac{d}{da}F_X\left(a\right)|_{a=x}$
   - לפי המשפט היסודי של החדו"א ולפי החלק הראשון של המשפט מתקיים:

$$\frac{d}{da}F_X\left(a\right)=\frac{d}{da}\int\limits_{-\infty}^{a}f_X\left(x\right)dx$$

   - אם f_X רציפה בסביבה של a אז:

$$=f_X\left(a\right)$$

– f_X אכן רציפה ב-a אז f_X רציפה למקוטעין.

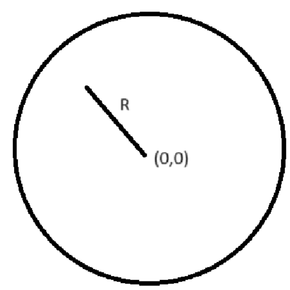
■

הערה 18. פונקציית צפיפות של משתנה מקרי היא לא יחידה.

- אם X הוא משתנה מקרי רציף עם צפיפות f_X ו-$\widetilde{f}_X$ היא פונקציה רציפה למקוטעין השונה מ-f_X רק במספר סופי של נקודות
  – אז $\widetilde{f}_X$ היא גם הצפיפות של X
    * זאת כי מתקיים $\int_a^b \widetilde{f}_X(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
- אם $\widetilde{f}_X, f_X$ צפיפויות של אותו משתנה מקרי רציף X, אז f_X שונה מ-$\widetilde{f}_X$ רק במספר סופי של נקודות.

דוגמה 19.

- בוחרים נקודה באקראי בדיסק היחידה.
- יש סיכוי שווה לכל נקודה.
- נסמן ב-R את מרחק הנקודה שנבחרה מהראשית.



צ"ל:

1. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של R.
2. הראו כי R משתנה מקרי רציף ומצאו את צפיפותו.

פיתרון:

1. נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של R.

- נגדיר מרחב הסתברות Ω - כל הנקודות בתוך המעגל:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

- נגדיר P כמו בדוגמה הראשונה, כפונקציה על תתי קבוצות של Ω שמקיימת:
  – סכום כל ה-P הוא 1

– אדטיביות
– ההסתברות לנקודה ליפול בקבוצה B כלשהי בעיגול (שאפשר לדבר על השטח שלה), מתקיים $P\left(B\right)=\frac{S_{B}}{S_{disc}}=\frac{S_{B}}{\pi\cdot1^{2}}$

- כאמור, הגדרנו את R להיות מרחק הנקודה מהראשית.
- פונקציית ההתפלגות המצטברת היא:

$$F_{R}\left(a\right)=P\left(R\leq a\right)$$

$$=P\left(distance\ of\ point\ from\ \ (0,0)\ \ \leq a\right)$$

$$=P\left(point\ was\ chosen\ from\ disc\ with\ radius\ a\right)$$

– כעת אם $a<0$ אז התשובה היא אפס כי אין דיסק ברדיוס כזה.
– אם $0\leq a\leq1$ אז נקבל לפי הגדרת P שמתקיים:

$$P\left(point\ was\ chosen\ from\ disc\ with\ radius\ a\right)=\frac{S_{disc\ with\ radius\ a}}{S_{unit\ disc}}=\frac{\pi a^{2}}{\pi\cdot1^{2}}=a^{2}$$

– אם $a>1$ אז התשובה היא תמיד 1 כי במקרה כזה דיסקת היחידה מוכלת בדיסקה שרדיוסה a.

- קיבלנו:

$$F_{R}\left(a\right)=\begin{cases}0 & a<0\\ a^{2} & 0\leq a\leq1\\ 1 & a>1\end{cases}$$

2. נראה כי R משתנה מקרי רציף ומצאו את צפיפותו.

- נניח לרגע כי R באמת רציף ונמצא את צפיפותו.
- לפי משפט שראינו בהרצאה, הצפיפות של R מקיימת:

$$f_{R}\left(r\right)=F_{R}'\left(r\right)$$

- נגזור את $F_{R}\left(r\right)$ ונקבל כי בכל נקודת רציפות מתקיים:

$$\frac{d}{da}F_{R}\left(a\right)=\begin{cases}0 & ,r<0\\ \frac{d}{da}a^{2}\mid_{a=r}=2\cdot r & ,0\leq r\leq1\\ \frac{d}{da}1=0 & ,r>1\end{cases}$$

– כלומר בכל נקודות הרציפות מתקיים:

$$f_R\left(r\right)=\begin{cases}2\cdot r & r\in\left[0,1\right]\\0 & otherwise\end{cases}$$

* בנקודות אי-הרציפות זה לא מתקיים, אך גם ככה הצפיפות מוגדרת עד כדי מספר סופי של נקודות.
* ולכן f_R הזו היא הצפיפות של R.

• נשאר לבדוק ש-R היא באמת רציפה, כלומר ש $F_R\left(a\right)=\int_{-\infty}^{a}f_R\left(r\right)dr$, כלומר:

$$\begin{cases}0 & a<0\\1 & a>1\\a^2 & a\in\left[0,1\right]\end{cases}=\int\limits_{-\infty}^{a}\begin{cases}2\cdot r & r\in\left[0,1\right]\\0 & otherise\end{cases}dr$$

המשך - איך נדע שמשתנה מקרי X הוא רציף ונמצא את צפיפותו?

<u>דרך ב':</u>

• על ידי שימוש במשפט:

משפט 20.

• יהא X משתנה מקרי רציף.

• אזי מתקיים:

$$f_X\left(x\right)=\lim_{\Delta\to0}\frac{P\left(X\in\left[x,x+\Delta\right]\right)}{\Delta}$$

– בכל נקודות הרציפות x של $f_X\left(x\right)$.

הוכחה.

• מהמשפט הראשון שראינו ומהטענה השנייה, מתקיים:

$$\lim_{\Delta\to0}\frac{P\left(X\in\left[x,x+\Delta\right]\right)}{\Delta}=\lim_{\Delta\to0}\frac{F_X\left(x+\Delta\right)-F_X\left(x\right)}{\Delta}$$

• ולפי הגדרה, מתקיים:

$$=F_X'\left(x\right)$$

- ומהמשפט השני שראינו מתקיים:

$$= f_X\left(x\right)$$

■