(104031) אינפי 1מ' | תרגול 4 - יוליה

שם: איל שטיין

November 8, 2022

נושאי השיעור:

1. קבוצות חסומות (המשך)
2. גבול הסדרה (לפי הגדרה)

בשיעור הקודם דיברנו על הסימון של הערך השלם ואמרנו שמתמשים ב-$[y]$ כדי לסמן את המספר השלם שמתחת ל-y.

הגדרה 1. יהי $x \in \mathbb{R}$. אז $[x] = max\left\{a \in \mathbb{Z},\ a \le x\right\}$
הקבוצה שהגדרנו חסומה למעלה ולכן יש לה sup. לא חייב להיות לה max.
נוכיח שלקבוצה הזו יש מקסימום:

תרגיל 2. תהי A קבוצה של מספרים שלמים החסומה מלמעלה כך: $A \le \mathbb{Z}$.
צ"ל: קיים מקסימום ל-A.

הוכחה.

- מכיוון ש-A חסומה מלמעלה, לפי אקסיומת השלמות קיים $supA$. נסמנו M.
- נניח בשלילה כי לא קיים $maxA$. לפי הנחת השלילה הזו $supA$ לא שייך לקבוצה ($M \notin A$).
- מכיוון ש-M= $supA$ מתקיים (באם ורק אם):
  1. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך שמתקיים $a > M - \varepsilon$.
  - הביטוי נכון עבור כל ε אבל אנחנו נבחר ε מסוים. כלומר, נגיד שבפרט הביטוי הזה נכון עבור $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$
  - ולכן קיים $a_1 \in A$ כך שמתקיים $a_1 > M - \frac{1}{2}$
- מכיוון שהנחנו ש-$M \notin A$, מתקיים ש- $a_1 < M$ כי $a_1 \in A$
  - מכיוון ש- $a_1 < M$, אפשר לקחת ε_2 כך שיתקיים: $\varepsilon_2 = M - a_1 > 0$
- לפי הנחת השלילה שלא קיים $maxA$, קיים $a_2 \in A$ שגם הוא מקיים $a_2 < M$

- מכיוון ש- M הוא סופרמום, לכל $\varepsilon_2 > 0$ קיים $a_2 \in A$ כך שמתקיים:

$$M - \varepsilon_2 < a_2$$

* נציב $\varepsilon_2 = M - a_1 > 0$ ונקבל:

$$M - \frac{1}{2} < a_1 = M - \varepsilon_2 < a_2 < M$$

- יוצא שהמרחק בין שני מספרים שלמים הוא קטן מ-1 וזה לא יכול להיות:
  - מכיוון ש$a_1 < a_2$ מתקיים כי:

$$|a_2 - a_1| = a_2 - a_1$$

* בנוסף, ידוע לנו ש:
  - $a_2 < M$
  - $M - \frac{1}{2} < a_1$

- נחבר את שלושת הביטויים הללו ונקבל:

$$a_2 - a_1 < M - \left(M - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

- קיבלנו שהמרחק בין שני מספרים שלמים שונים a_2 ו-a_1 שווה למספר קטן מ1. זה לא יכול להיות ולכן הגענו לסתירה.
- הנחת השלילה "ל-A אין מקסימום" שגויה ולכן ל-A יש מקסימום.

$\blacksquare$

תרגיל 3. נגדיר קבוצה $A = \left\{a_n \mid a_n = \frac{[n \cdot b]}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ כאשר $b \in \mathbb{R}$ קבוע.
צ"ל: הוכיחו כי A חסומה מלמעלה ומצאו את $supA$.

פיתרון:

- תזכורת:
  - $x \leq [x]$ כי $[x]$ לא יכול להיות גדול מ-x אבל הוא יכול להיות קטן ממנו.
  - $(x-1) < [x]$ לפי ההגדרה של $[]$
  - כלומר, $(x-1) < [x] \leq x$

- לכל $b\in\mathbb{R}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ אפשר להסיק כי:

$$n\cdot b-1<[n\cdot b]\le n\cdot b \quad \backslash\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}$$

  - נכפיל את שני האגפים ב- $\frac{1}{n}$ ונקבל:

$$b-\frac{1}{n}=\frac{n\cdot b-1}{n}<\frac{[n\cdot b]}{n}\le b$$

  - מכאן נובע שלכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה A חסומה מלמעלה על ידי b. לכן לפי אקסיומת השלמות יש לה $supA$.

- הראינו שלכל $a\in A$ מתקיים כי $a\le b$, שזה התנאי הראשון להיותו של מספר מסוים סופרמום.

- כעת נוכיח כי b הוא $supA$ על ידי כך שנראה שהתנאי השני מתקיים גם הוא.
כלומר נוכיח ש- b מקיים שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $a_n\in A$ ו- $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n>b-\varepsilon$:

  - אנחנו יודעים ש- $a_n>b-\frac{1}{n}$ ולכן נבחר $n_0\in\mathbb{N}$ שמקיים $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$, למשל $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$ (יוליה כתבה רק n ואני הוספתי את הסימון n_0 כדי להבהיר שבחרנו $n>\frac{1}{\varepsilon}$)
    * אז מתקיים ש- $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$
      · ולכן מתקיים גם:

$$b-\varepsilon<b-\frac{1}{n_0}$$

      · נוסיף את אי השוויון $a_n>b-\frac{1}{n}$ שמתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$. נקבל:

$$b-\varepsilon<b-\frac{1}{n_0}<a_n$$

      · נבודד את אי השוויון הימני ואת אי השוויון השמאלי ונקבל:

$$b-\varepsilon<a_n$$

כמו שרצינו להראות.

- גם התנאי השני מתקיים ולכן b הוא $supA$.

תרגיל 4. יהיו A,B קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים.
נגדיר שתי קבוצות נוספות:

$$A+B=\{a+b\ \mid\ a\in A,\ \ b\in B\}$$

$$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A,\ \ b \in B\}$$

נניח בנוסף שקיימים $maxA, maxB$.

(א) הוכיחו או הפריכו שגם קיים:

$$max\left(A+B\right) = maxA + maxB$$

פיתרון:

- נסמן $\alpha = maxA$, $\beta = maxB$.
  - $\alpha \in A$, $\beta \in B$
    - * לכן, $\alpha + \beta \in A + B$
- נוכיח כי $\alpha + \beta = sup\left(A+B\right)$:
  - יהי איבר $c \in \left(A+B\right)$. אז קיימים $a \in A$ ו- $b \in B$ כך ש- $c = a + b$.
  - ומתקיים $a < \alpha$ וגם $b \leq \beta$ לפי הגדרת $maxA$ ו- $maxB$
    - * לכן, מתקיים כי:

$$c = a + b \leq \alpha + \beta$$

- · כלומר, $\alpha + \beta$ חסם מלמעלה של $\left(A+B\right)$
  - לכל $\delta < \alpha + \beta$ לא יכול להיות חסם מלמעלה כי $\alpha + \beta \in \left(A+B\right)$ וגם $\alpha + b > \delta$
    - * לכן $\alpha + \beta$ היא החסם מלמעלה הקטן ביותר
    - * כלומר, $\alpha + \beta = sup\left(A+B\right)$ והוא גם הmax כי $\alpha + \beta \in \left(A+b\right)$

(ב) (להוכיח בבית) הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענה:

$$max\left(A \cdot B\right) = maxA \cdot maxB$$

(ג) הוכיחו או הפריכו:

$$sup\left(A+B\right) = supA + supB$$

פתרון 5. (ג)
נסמן $\alpha = supA$,$\beta = supB$
בסעיף א' הראינו ש-$\alpha + \beta$ הוא האיבר המקסימלי בקבוצה $(A+B)$.
עכשיו נוכיח ש- $\alpha + \beta$ הוא חסם מלמעלה של $A+B$:

- מכיוון שנתון שיש לשתי הקבוצות מקסימלי יוצא ש: $\alpha \in A$, $\beta \in B$
  - לכן $(\alpha + \beta) \in (A+B)$
  - מכיוון שהוא מקס' חייב להתקיים שלכל $d \in (A+B)$ מתקיים $d \leq (\alpha + \beta)$
- נוכיח כי $\alpha + \beta = sup\,(A+B)$, או במילים אחרות $(\alpha + \beta)$ הוא החסם מלמעלה הכי קטן:
  - יהי איבר $c \in (A+B)$
  - נוכיח שקיימים $a \in A$ ו- $b \in B$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $c > (\alpha + \beta) - \varepsilon$ כי משפט הסופרמום הוא "אם ורק אם":
    * יהי $\varepsilon > 0$.
    * לפי המשפט על sup, לכל $\varepsilon > 0$ (שכולל גם עבור $\frac{\varepsilon}{2}$) קיימים:
      1. $a \in A$ כך ש $a > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$
      2. $b \in B$ כך ש $b > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$
    * נסמן $c = (a+b) \in (A+B)$ ולכן:

$$c = a + b > \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \alpha + \beta - \varepsilon$$

    * הראינו שקיימים $a \in A$ ו- $b \in B$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$(a+b) = c > (\alpha + \beta) - \varepsilon$$

    * כלומר, $\alpha + \beta$ מקיים את שני התנאים של סופרמום ולכן הוא סופרמום של $(a+b)$.

נושא שני - גבול של סדרה

הגדרה 6. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.
נאמר כי $L \in \mathbb{R}$ הינו גבול של $\{a_n\}$אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N\ :\ n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

הערה 7. (מהי סדרה? סידור של מספרים שלכל אחד יש אינדקס, שמתחיל לרוב ב-1. המספרים הללו יכולים לחזור על עצמם. הסדרה לא יכולה להכיל את ∞ או את $-\infty$.)

תרגיל 8. תהי סדרה $a_n = \frac{n+6}{n+4}$. הוכיחו בשימוש בהגדרת הגבול בלבד ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

פתרון 9.

- יהי $\varepsilon > 0$.
- **צ"ל:** קיים N כך של n טבעי שמקיים $n > N$ מתקיים: $\left|\frac{n+6}{n+4} - 1\right| > \varepsilon$
- נבחן את הביטוי:

$$\left|\frac{n+6}{n+4} - 1\right|$$

$$= \left|\frac{n+6-n-4}{n+4}\right|$$

$$= \left|\frac{2}{n+4}\right|$$

  - מכיוון שהמספר בערך המוחלט הוא חיובי, יוצא ש

$$= \left|\frac{2}{n+4}\right| = \frac{2}{n+4}$$

  - נמצא ביטוי אחר שגדול מ- $\frac{2}{n+4}$:

$$\frac{2}{n} > \frac{2}{n+4}$$

  - נדרוש ש- $\varepsilon > \frac{2}{n}$.
  - עבור $N = \frac{2}{\varepsilon}$ יוצא ש- $n > N = \frac{2}{\varepsilon}$.
    * ומכיוון שהראינו ש-$\left|\frac{2}{n+4}\right| > \frac{2}{\varepsilon}$, מתקיים:

$$\left|\frac{n+6}{n+4} - 1\right| < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

תרגיל 10. נוכיח בעזרת הגדרת הגבול כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+6}{n+4} \neq 2$$

פתרון 11.

הערה 12. איך שוללים גבול? מראים שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N מתקיים $n \in \mathbb{N}, n > N$ כך ש- $|a_n - L| \geq \varepsilon$

- כלומר, **צ"ל:** קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכלN קים $n > N$ עבורו $\left|\frac{n+6}{n+4} - 2\right| \geq \varepsilon_0$
- נתבונן בביטוי:

$$\left|\frac{n+6}{n+4} - 2\right|$$

$$= \left|\frac{n+6-2n-8}{n+4}\right|$$
$$= \left|\frac{-n-2}{n+4}\right| = \frac{|-n-2|}{n+4}$$
$$= \frac{n+2}{n+4}$$

- נמצא ביטוי קטן מ- $\frac{n+2}{n+4}$:

$$\frac{n}{n+4} < \frac{n+2}{n+4}$$

  - עבור $n \geq 4$ מתקיים : $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} = \frac{4}{4+4} \leq \frac{n}{n+4}$
  - לכן, לכל N קיים $n = max\left\{[N]+1, 5\right\}$
    - * יוצא ש $n \geq N$ ומתקיים:

$$|a_n - 2| \geq \varepsilon_o$$

- שללנו ש-2 הוא הגבול של הסדרה a_n.

תרגיל 13. $a_n = \frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}$. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

פתרון 14.

- יהי $\varepsilon > 0$.
- **צ"ל:** קיים N כך של n טבעי שמקיים $n > N$ מתקיים: $|a_n - 2| < \varepsilon$
- נבחן את הביטוי:

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9} - 2\right|$$

$$= \left| \frac{2n^2 - 7n + 8 - 2n^2 - 6n - 18}{(n+3)^2} \right|$$
$$= \left| \frac{-13n - 10}{(n+3)^2} \right|$$

אפשר להוריד את הערך המוחלט כי המכנה חיובי והמונה בערך מוחלט שווה ל $13n + 10$:

$$\frac{13n + 10}{(n+3)^2}$$

– נמצא ביטוי שגדול מ-$\frac{13n+10}{(n+3)^2}$:

$$\frac{13n + 10}{n^2 + 3n + 9} < \frac{13n + 10n}{n^2}$$
$$= \frac{23}{n}$$

– נדרוש ש-$\frac{23}{n} < \varepsilon$ כל עוד $n > \frac{23}{\varepsilon}$.

- לכן, ניתן לכתוב שעבור $N = \frac{23}{\varepsilon}$ לכל $n > M$ מתקיים:

$$a_n = \frac{13n + 10}{n^2 + 3n + 9} < \frac{23}{n} < \varepsilon$$

משפט 15. תהי a_n סדרה. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

הוכחה.

- **צ"ל:** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$
  – $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $||a_n| - 0| < \varepsilon$
    * אפשר להתעלם מה-0 ונקבל: (אם ורק אם)

$$||a_n|| < \varepsilon$$

    * פעמיים ערך מוחלט שווה (אם ורק אם) לפעם אחת ערך מוחלט. נוסיף 0 ונקבל:

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

    * $|a_n - 0| < \varepsilon$ נכון "אם ורק אם" הביטוי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ נכון.

- לכן, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

■

תרגיל 16. תהי a_n סדרה. קיים N טבעי כך שלכל $\varepsilon > 0$ ולכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

הוכיחו כי a_n היא קבועה החל מ-$N+1$.
(לשים לב שהפכנו את סדר הכמתים בהגדרת הגבול).

פתרון 17.

- נניח בשלילה שa_n אינה קבועה החל מ-$N+1$. כלומר, קיים $n > N+1$ כך ש$a_{N+1} \neq a_n$.
- (נמשיך מכאן ביום שני הבא).