אינפי 1מ' (104031) | תרגול 25 - יוליה

שם: איל שטיין

January 23, 2023

נושאי השיעור: טיילור ומקלורן - המשך

תרגיל 1.
חשבו את הגבול: $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x\cdot\cos(x)}-\frac{2}{\sin(2x)}\right)$
פתרון:

- נכתוב את הביטוי:

$$\lim_{x\to0}\left(\overbrace{\frac{1}{\cos(x)}}^{\xrightarrow[x\to0]{}1}\cdot\frac{\sin(2x)-2x\cdot\cos(x)}{x\cdot\sin(2x)}\right)$$

  – מכיוון שפולינום מקלורן של $\sin(x)$ הוא $\sin(t)=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}\ldots$
    * נציב $t=2x$ ונקבל שפולינום מקלורן הוא $\sin(2x)=2x+o(x)$
  – לכן המכנה הוא $x\cdot\sin(2x)=2x^2+o(x)\cdot x$
    * לפי חוקי o (או קטן), מתקיים $o(x)\cdot x=o\left(x^2\right)$
      · ולכן $x\cdot\sin(2x)=2x^2+o\left(x^2\right)$
  – נבחן את המונה: $\sin(2x)-2x\cdot\cos(x)$
    * פולינום מקלורן של $\cos(x)$ הוא $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$
      · ולכן $2x\cdot\cos(x)=2x-x^3+\frac{x^5}{6}-\ldots$
      · נחסיר את $\sin(2x)$ מ-$2x\cdot\cos(x)$ ונקבל:

$$\begin{aligned}\sin(2x)-2x\cdot\cos(x)&=\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}\right)-\left(2x-x^3\right)+o\left(x^3\right)\\&=-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

- מתחבאים פה שני משפטים:
  1. אם מחברים או כופלים פולינום מקלורן עדיין מקבלים טור מקלורן.
  2. יחידות פולינום מקלורן - לכל פונקציה יש פולינום מקלורן אחד.

– נכתוב את הביטוי המקורי:

$$\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{1}{\cos(x)}}^{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{2x^2+o\left(x^2\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{1}{\cos(x)}}^{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\cdot\frac{x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{1}{\cos(x)}}^{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\cdot\frac{x\left(-\frac{1}{3}+\overbrace{\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}^{\xrightarrow[x\to 0]{}0}\right)}{2+\underbrace{\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}}$$

$$\lim_{x\to 0}1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot x=0$$

תרגיל 2. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\tan(x)}{(e^x-1)^3}$

פתרון:

- פולינום מקלורן e^x-1 הוא $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}$

  – ניקח את הפולינום מקלורן הזה מדרגה ראשונה ונעלה בחזקת 3:

$$\left(e^x-1\right)^3=(x)^3+o\left(x^3\right)$$

- פולינום מקלורן של $\tan(x)$ הוא $x+\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{15}$
- פולינום מקלורן של $\sin(x)$ הוא $x-\frac{x^3}{6}$

  – נחסיר את פולינומי המקלורן מדרגה שלישית של $\tan(x)$ ו-$\sin(x)$ ונקבל:

$$\sin(x)-\tan(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+o\left(x^3\right)$$

$$\sin(x) - \tan(x) = -\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$$

- מכאן שהגבול הוא:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{x^3 + o\left(x^3\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{o\left(x^3\right)}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{o\left(x^3\right)}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \overbrace{\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}^{\xrightarrow[x\to 0]{}0}}{1 + \underbrace{\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}} = -\frac{1}{2}$$

הערה 3. **כללים של** o**:**

1. $o\left(x^n\right) + o\left(x^m\right) = o\left(x^m\right)$ כאשר $m \le n$

- הוכחה:
  - נבדוק האם $\frac{o(x^n)+o(x^m)}{x^m} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$\frac{o\left(x^n\right) + o\left(x^m\right)}{x^m} = \overbrace{\frac{o\left(x^n\right)}{x^n \cdot x^{n-m}}}^{\to 0} \cdot \frac{x^{n-m}}{1} + \frac{o\left(x^m\right)}{x^m}$$

* כלומר, כנדרש:

$$\lim_{x\to 0} \frac{o\left(x^n\right) + o\left(x^m\right)}{x^m} = \frac{o\left(x^m\right)}{x^m}$$

תרגיל 4. תהי $f(x)$ גזירה פעמיים ב-$x=0$ כאשר פיתוח מקלורן של f הוא: $f(x) = ax + bx^2 + o\left(x^2\right)$.

- <u>נכון/לא נכון:</u>

1. "אם $a=0$ אז קיים $b\neq 0$ עבורו $\lim_{x\to 0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=1$"

פתרון: הטענה לא נכונה.

– מכיוון שהאיבר החופשי בפולינום מקלורן הוא 0 אז $f\left(0\right)=0$

– מכך ש-f גזירה נובע שהיא רציפה ב$x=0$.

* ומכאן ש- $\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)=0$

· לכן $\lim_{x\to 0}\left(1+f\left(x\right)\right)=1$

· כלומר $1+f\left(x\right)$ חיובי בסביבת $x=0$

– ולכן ניתן לכתוב את הביטוי:

$$\left(1+f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=\left(\left(1+f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{f\left(x\right)}}\right)^{\frac{f\left(x\right)}{x^{2}}}$$

* ולפי משפט מתקיים $\lim_{x\to 0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{f\left(x\right)}}=e$

* נבחן את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x^{2}}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{bx^{2}+o\left(x^{2}\right)}{x^{2}}=b+\overbrace{\frac{o\left(x^{2}\right)}{x^{2}}}^{\xrightarrow[x\to 0]{}0}$$

· נציב ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=e^{b}$$

– השאלה דרשה ש- $\lim_{x\to 0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=1=e^{b}$ עבור $b\neq 0$

* מכיוון ש-e^{b} היא חד חד ערכית מתקיים $1=e^{b}\iff b=0$

· ולכן לא קיים $b\neq 0$ עבורו $\lim_{x\to 0}\left(1+f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=1$

– כלומר הטענה לא נכונה.

2. "הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-ax-bx^{2}}{x^{3}}$ לא קיים"

פתרון: הטענה לא נכונה, כי יש אפשרויות שבהן הוא יכול להיות קיים.

– הגבול על פי הנתון, הוא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{0+o\left(x^{2}\right)}{x^{3}}=\overbrace{\frac{o\left(x^{2}\right)}{x^{2}}}^{\to 0}\cdot\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to\infty}$$

* קיבלנו $0\cdot\infty$ ולכן מפולינום המקלורן הזה לא ניתן לדעת.

– נציג מקרים שבהם הגבול קיים ומקרים שבהם הגבול לא קיים:

* אם $f\left(x\right)=ax+bx^{2}+x^{4}$, אז הגבול יהיה 0

* אם $f(x)=ax+bx^2+x^2\sqrt[3]{x}$ נקבל ש:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}x^{-\frac{2}{3}}$$

· והגבול הזה לא קיים במובן הצר.

* אם $f(x)=ax+bx^2+3x^3$ אז הגבול קיים ושווה ל-3.

3. "נתון בנוסף $a=1$. נגדיר $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$. ואז יתקיים $g'(0)=b$"

פתרון:

– נמצא את הגבול של $g(x)$ ב-$x=0$ לפי הגדרה:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1\cdot x+bx^2+o\left(x^2\right)}{x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot x+bx^2+o\left(x^2\right)-x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{bx^2+o\left(x^2\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left(b+\underbrace{\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}_{\to 0}\right)=b\end{aligned}$$