אינפי 1מ' (104031) | תרגול 19 - יוליה

שם: איל שטיין

January 2, 2023

נושאי השיעור: רציפות, משפט ויירשטראס, רציפות במידה שווה

נושא ראשון - משפט ויירשטראס

תרגיל 1. השלמה מתרגול קודם.

- תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.
- **נתון:** $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}=\infty$

צ"ל: הוכיחו כי ל-f קיים מינימום מוחלט ב-$\mathbb{R}$.
פתרון:

- נסמן $f\left(0\right)=c$
- נתון: $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=\infty$
  - לכן קיימות a,b:
    * $a<0$ כך שלכל $x<a$ מתקיים $f\left(x\right)>c$
    * $b<0$ כך שלכל $x>b$ מתקיים $f\left(x\right)>c$
- נתבונן בקטע $[a,b]$:
  - f רציפה בקטע חסום וסגור $[a,b]$.
    * לכן לפי משפט ויירשטראס, f מקבלת מינימום בקטע.
    * נסמן את נקודת המינימום בקטע כ- $x_{m}\in[a,b]$
    * נסמן $m=f\left(x_{m}\right)$
      · ואז לכל $a\leq x\leq b$ יתקיים $f\left(x_{m}\right)\leq f\left(x\right)$ כי היא מינימום.
      · ולכל $x>b$ או $x<a$ מתקיים:

$$f\left(x\right)>c=f\left(0\right)\geq f\left(x_{m}\right)$$

- ומכיוון ש$0\in[a,b]$ מתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$ ש$f\left(x\right)\geq f\left(x_{m}\right)$ ולכן x_{m} נקודת מינימום גלובלית.

תרגיל 2.
נתון כי הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקבלת כל ערך פעמיים.
צ"ל: הוכיחו כי f לא רציפה בקטע.
פתרון:

- נניח בשלילה שהפונקציה רציפה בקטע $[a,b]$.
  - לכן לפי משפט ויירשטראס היא מקבלת בקטע $[a,b]$ מינימום ומקסימום.
    - נסמן אותם M,m.
- נתבונן בM:
  - על פי הנתון הפונקציה מקבלת כל ערך פעמיים ולכן קיימות שתי נקודות שונות x_{1},x_{2} (שייכות לקטע), $a\leq x_{1}<x_{2}\leq b$ כך ש

$$f\left(x_{1}\right)=f\left(x_{2}\right)=M$$

    - נחלק לשני מקרים:

1. <u>מקרה ראשון</u> - אם x_{2} היא נקודה פנימית בקטע, כלומר $x_{2}<b$
   - נבחר נקודה $x_{1}<c<x_{2}$ כך ש $f\left(c\right)<M$ - נקודה כזו קיימת כי נתון שהפונקציה מקבלת כל ערך בדיוק פעמיים ולא יותר (ולכן אם M מקסימום ויש כבר שתי נקודות $f\left(x_{1}\right)=f\left(x_{2}\right)=M$ אז $f\left(c\right)<M$)
   - נבחר $\varepsilon=\frac{1}{2}min\left\{ M-f\left(c\right),M-f\left(b\right)\right\}$ כך ש $f\left(c\right)<M-\varepsilon$ וגם $f\left(b\right)<M-\varepsilon$
   - נקבל שלושה קטעים $[x_{1},c],[c,x_{2}],[x_{2},b]$ שבהם הפונקציה רציפה (לפי הנחת השלילה):
     (א) לכל אחד מהקטעים הללו יש קצה שערך הפונקציה בו שווה ל-M (שהוא גדול מ- $M-\varepsilon$) וקצה אחר שהוא קטן מ- $M-\varepsilon$
     (ב) לכן לפי משפט ערך הביניים בכל אחד מהקטעים הללו, f מקבלת את הערך $M-\varepsilon$.
       i. זו סתירה לנתון כי הפונקציה מקבלת $M-\varepsilon$ שלוש פעמים ולא פעמיים.
2. <u>מקרה שני</u> - אם $x_{2}=b$
   - באותו אופן שבו הוכחנו שx_{2} לא יכולה להיות נקודה פנימית בקטע ניתן להוכיח שמוכרח להתקיים $x_{1}=a$.
     (א) כלומר $f\left(a\right)=f\left(b\right)=M$
   - ובאותו אופן ניתן להוכיח כי $f\left(a\right)=f\left(b\right)=m$
     (א) (הערה - או שניתן גם להגדיר פונקציה רציפה $g\left(x\right)=-f\left(x\right)$ שמקבלת כל ערך בדיוק פעמיים, והוכחנו שפונקציה כזו מקבלת מקסימום רק ב-a,b
       i. ולכן נקבל $-min_{[a,b]}f=max_{[a,b]}g=g\left(a\right),g\left(b\right)$
       ii. ומכאן שהמינימום של f מתקבל בנקודות a,b. /סוף ההערה)
   - כלומר $f\left(x\right)$ היא קבועה ומקבלת ערך מסוים אינסוף פעמים.
   - זו סתירה לנתון כי נאמר ש-f מקבלת כל ערך בדיוק פעמיים ולא יותר.

נושא שני - רציפות במידה שווה:

הגדרה 3. רציפות במידה שווה:

- תהי f מוגדרת בקטע I.
- נאמר ש-f **רציפה במידה שווה** ב-I אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $x,y\in I$ וגם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

הערה 4. **שלילת רציפות במידה שווה:**

- קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x,y\in I$ כך ש $|x-y|<\delta$ אבל $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$

תרגיל 5. תהי $f(x)=x^2$
צ"ל: הראו לפי הגדרה בלבד:

1. $f(x)$ רציפה במ"ש בכל קטע $[a,b]$
2. $f(x)$ לא רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$

1. פתרון:

- יהי $\varepsilon>0$.
- יהי קטע $[a,b]$
- נחפש $\delta>0$ כך שאם $x,y\in[a,b]$ וגם $|x-y|<\delta$ אז יתקיים $\left|x^2-y^2\right|<\varepsilon$
  - נבחן את הביטוי:

$$\left|x^2-y^2\right|=|x-y|\cdot|x+y|$$

* לפי אי שוויון המשולש מתקיים $|x+y|\leq|x|+|y|$ ולכן:

$$\left|x^2-y^2\right|\leq|x-y|\left(|x|+|y|\right)$$

* ומכיוון ש $|x|,|y|\leq max\left\{|a|,|b|\right\}=M>0$ נקבל:

$$\left|x^2-y^2\right|\leq|x-y|\,2M$$

* נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}>0$ ואז אם $|x-y|<\delta$ יתקיים $\left|x^2-y^2\right|<\varepsilon$ כנדרש.

2. פתרון:

- נרצה לשלול את הגדרת רציפות במ"ש.
- תהי $\delta > 0$.
  - נמצא $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n} < \delta$.
  - נבחר מספר $x_n = n + \frac{1}{n}$ ונבחר מספר $y_n = n$
    - אז $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} < \delta$
      - אבל אם נבחן את הביטוי $\left|x_n^2 - y_n^2\right|$ נקבל:

$$\begin{aligned}\left|x_n^2 - y_n^2\right| &= \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2\right| = 2 \cdot n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2} \\ &= 2 + \frac{1}{n^2} > 2\end{aligned}$$

- כלומר $\left|x_n^2 - y_n^2\right| > 2$ ולכן עבור $\varepsilon = 2$ נקבל שהפונקציה לא רציפה במידה שווה.