אינפי 2מ' | תרגול 9 - עם ניקה

שם: איל שטיין

May 30, 2023

נושא השיעור: סדרות של פונקציות

תרגיל 1:

נגדיר סדרה של פונקציות:

$$f_n\left(x\right):\left[0,\infty\right)\to\mathbb{R}$$

$$f_n\left(x\right)=\frac{1}{n}arctan\left(x^n\right)$$

א. הוכיחו כי $f_n\left(x\right)$ מתכנסת נקודתית ומצאו את גבולה.
ב. האם ההתכנסות היא במ"ש?
ג. חשבו $f_n'\left(x\right)$ בתחום ומצאו את גבולה.
ד. האם ההתכנסות היא במ"ש?

פתרון:

א.

- התכנסות נקודתית עבור סדרה של פונקציה היא כשאר מקבעים את הx ואז בודקים גבול:

$$f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}arc\tan\left(x^n\right)\right)=0$$

ב.

- על מנת לבדוק התכנסות במ"ש נשתמש בקריטריון הסופרמום, כלומר נבחן את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(Sup_{\left[0,\infty\right)}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(Sup_{[0,\infty)}\left|\frac{1}{n}arc\tan\left(x^{n}\right)-0\right|\right)\leq\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\to 0$$

– ולכן לפי משפט הסנדוויץ', ההתכנסות היא במ"ש.

ג.

• נשים לב שצריך לגזור לפי x:

$$f_n'(x)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+x^{2n}}\cdot n\cdot x^{n-1}$$
$$=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

– ועכשיו אנחנו רוצים לחפש ערכים של x שעבורם הפונקציה מתנהגת באותה צורה לכל n.

– במקרה שלנו, עבור $x=1$ ועבור $x=0$ נקבל כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f_n'(0)=0$$

$$f_n'(1)=\frac{1}{2}$$

– נסמן פונקציה g שהיא תהיה הפונקציה הגבולית של $f_n'(x)$, כלומר

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

$$g(0)=0$$

$$g(1)=\frac{1}{2}$$

* נקבל שלכל $x\neq 0,1$ מתקיים:

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{1-n}+x^{n+1}}$$

· נחלק למקרים.

· עבור $x>1$ נקבל כי $g(x)=0$

- עבור $x<1$ מתקיים $g(x)=0$
  - כלומר קיבלנו:

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0 & ,x\neq1\\ \frac{1}{2} & ,x=1\end{cases}$$

- קיבלנו ש$f'_n(x)$ מתכנסת ל-g.

ד.

- לפי משפט, אם יש לנו סדרת פונקציות רציפות אז:
  - אם היא מתכנסת לפונקציה לא רציפה, זאת אומרת שההתכנסות היא לא במ"ש.
- ובמקרה שלנו, $f'_n(x)$ אמנם סדרה של פונקציות רציפות, אבל $g(x)$ היא פונקציה גבולית לא רציפה שלה ולכן ההתכנסות היא לא במ"ש.

תרגיל 2:

עבור הפונקציות הבאות, מצאו פונקציה גבולית ובדקו התכנסות במ"ש:

א. $f_n(x)=\sqrt[n]{\sin(x)}$ בקטע $[0,1]$

פתרון:

- מכיוון שלכל מספר חיובי, שורש n שואף ל-1, אז לכל $x\neq0$ מתקיים כי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin(x)}=1$$

  - ולכן הפונקציה הגבולית תהיה:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,x\neq0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

- ההתכנסות היא לא במ"ש כי $f_n(x)$ סדרה של פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה גבולית $f(x)$ לא רציפה.

ב. $f_n(x)=\sqrt{n}x\cdot e^{-nx}$ בקרן $[0,\infty)$

- תמיד נבדוק עבור אלו ערכי x הסדרה היא קבוע.
  - במקרה שלנו, עבור $x=0$ הסדרה $f_n(x)$ היא זהותית 0
  - ועבור $x>0$ מתקיים כי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}x\cdot e^{-nx}=0$$

* אפשר לראות זאת לפי מבחן המנה או לופיטל אבל אפשר לנמק שאקספוננט חזק יותר מפונקציה פולינומיאלית.
– כלומר קיבלנו:

$$f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)=0$$

• במקרה שלנו הפונקציה הגבולית רציפה ולכן אם נרצה לבדוק רציפות במ"ש נצטרך להשתמש בסופרמום:

$$Sup\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=Sup_{x\geq0}\left(\sqrt{n}x\cdot e^{-nx}-0\right)$$

– מתקיים:

$$f_{n}\left(x\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}f_{n}\left(x\right)=0$$

* ומכיוון ש$f_{n}\left(x\right)$ אינה זהותית אפס והיא תמיד חיובית, היא מקבל מקסימום גלובלי בנקודה פנימית, כלומר $x\neq0$.
· נגזור בשביל לקבל את נקודת המקסימום שלה:

$$f_{n}'\left(x\right)=\sqrt{n}e^{-nx}-n\sqrt{n}x\cdot e^{-nx}$$

$$f_{n}'\left(x\right)=\sqrt{n}\cdot e^{-nx}\left(1-n\cdot x\right)$$

$$f_{n}'\left(x\right)=0\ When\ x=\frac{1}{n}$$

· כלומר:

$$Sup_{x\geq0}\sqrt{n}xe^{-nx}\to0$$

· ולכן ההתכנסות במ"ש.

ג. $f_{n}\left(x\right)=\frac{n^{2}x^{2}}{1+n^{3}x^{3}}$ בקטע $\left[0,1\right]$

פתרון:

- כאשר n שואף לאינסוף מתקיים כי:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

- נצטרך למצוא את סדרת הסופרמומים:

$$Sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}-0\right| = Sup_{x\in[0,1]}\frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$$

– $f_n(x)$ היא סדרה של פונקציות רציפות ולכן קיים מקסימום גלובלי בקטע $[0,1]$. נגזור את $f_n(x)$ לפי x ונקבל:

$$f_n'(x) = \frac{n^2x\left(2-n^3x^3\right)}{\left(1+n^3x^3\right)^2}$$

* כלומר הנגזרת מתאפסת עבור $x = 0, \frac{\sqrt[3]{2}}{n}$

· ולכן הנקודות החשודות לקיצון הן $0, 1, \frac{\sqrt[3]{2}}{n}$:

$$f_n(0) = 0$$

$$f_n(1) = \frac{n^2}{1+n^3}$$

$$f_n\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{n}\right) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}$$

· ולכן הגבול של סדרת הסופרמומים:

$$\lim_{n\to\infty} Sup_{[0,1]}\frac{n^2x^2}{1+n^3x^3} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} \neq 0$$

· ולכן אין התכנסות במ"ש.

תרגיל 3:

תהי $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר:

$$f_n(x) = x^n \cdot \varphi(x)$$

הוכיחו: הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש בתחום $\Longleftrightarrow$ $\varphi(1)=0$.
פתרון:

- כיוון ראשון $\Leftarrow$:
  - מכיוון שנתון $\varphi(x)$ רציפה ב$[0,1]$ אז היא מקבלת מקסימום לפי ויירשטראס.
    * נסמן $\varphi(x) \le M$ לכל $x \in [0,1]$
      · ולכן נקבל לכל $0 \le x < 1$ שמתקיים:

$$0 \le |f_n(x)| \le M \cdot x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

      · עבור $x=1$ מתקיים כי:

$$f_n(x) = \varphi(1)$$

    * ולכן הפונקציה הגבולית היא:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ \varphi(1) & x = 1 \end{cases}$$

    * מכיוון ש$f_n(x)$ סדרה של פונקציות רציפות וגם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש אז לפי משפט הפונקציה הגבולית צריכה להיות רציפה
      · כלומר צריך להתקיים $\varphi(1) =$

- כיוון שני $\Rightarrow$:
  - נניח כי $\varphi(1)=0$.
  - נראה כי $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש לפי הגדרה.
    * **תזכורת:** סדרת פונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש בתחום I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כל שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  - יהי $\varepsilon > 0$.
  - לפי הנתון $\varphi(x)$ רציפה ב$x=1$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (1-\delta, 1]$ מתקיים

$$|\varphi(x) - \varphi(1)| = |\varphi(x)| < \varepsilon$$

* ומכיוון שלכל $x \in (1-\delta, 1]$ מתקיים $x^n \leq 1$ נקבל ש:

$$\left|f_n\left(x\right)\right| = \left|x^n \cdot \varphi\left(x\right)\right| = x^n\left|\varphi\left(x\right)\right| < \varepsilon$$

* בקטע $[0, 1-\delta]$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|f_n\left(x\right)\right| &\leq x^n \cdot Sup\left|\varphi\left(x\right)\right| \\ &\leq \left(1-\delta\right)^n \cdot \overbrace{Sup\left|\varphi\left(x\right)\right|}^{constant} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

· בשביל להבין את זה, נדמיין שקיבענו את n ו-$x \in [0, 1-\delta]$.

* ולכן קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים שלכל $x \in [0, 1-\delta]$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)\right| < \varepsilon$
– ומכיוון שעבור $x \in (1-\delta, 1]$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)\right| < \varepsilon$ לכל n, בפרט זה מתקיים עבור $n > N$.
– ולכן קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)\right| < \varepsilon$.

תרגיל 4:

- נחזור לתרגיל $f_n\left(x\right) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$.
- **תזכורת - טענה:** תהי $f_n\left(x\right)$ סדרת פונקציות המתכנסות לפונקציה גבולית $f\left(x\right)$ בתחום I ונניח שקיימת סדרה x_n ב-I שעבורה מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(x_n\right) - f\left(x_n\right)\right| \neq 0$. אזי ההתכנסות אינה במ"ש.
- לפי הטענה הזו, עבור $x_n = \frac{1}{n}$, שנמצאת בתחום $I = [0, 1]$, מתקיים כי:

$$\left|f_n\left(x_n\right) - \overbrace{f\left(x_n\right)}^{=0}\right| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

תרגיל 5:

נתונה פונקציה $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה ואינה קבועה.
נגדיר סדרה $f_n\left(x\right) = \frac{[f(x) \cdot n]}{n}$ לכל $x \in [a, b]$.

צ"ל: הראו כי $f_n\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש ל-$f\left(x\right)$ ב$[a, b]$.

פתרון:

- כשאנחנו מקבלים ערך שלם, נשתמש בסנדוויץ' כדי להיפטר ממנו:
  – לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $t - 1 < [t] \leq t$

* ולכן $n\cdot f\left(x\right)-1<\left[n\cdot f\left(x\right)\right]\leq n\cdot f\left(x\right)$

– כלומר נקבל:

$$f\left(x\right)-\frac{1}{n}<f_{n}\left(x\right)=\frac{\left[n\cdot f\left(x\right)\right]}{n}\leq f\left(x\right)$$

* ואם נשאיף את n לאינסוף, אז לפי משפט הסנדוויץ' מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)=f\left(x\right)$$

- כלומר קיבלנו ש$f_{n}\left(x\right)$ מתכנסת נקודתית ל$f\left(x\right)$.
- כעת נבדוק התכנסות במ"ש של $f_{n}\left(x\right)$:

– כאמור מתקיים:

$$f\left(x\right)-\frac{1}{n}\leq f_{n}\left(x\right)\leq f\left(x\right)$$

* נעביר אגפים על מנת לקבל:

$$f\left(x\right)-f_{n}\left(x\right)\leq\frac{1}{n}$$

* ולפי משפט הסנדוויץ' מתקיים:

$$0\leq\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

– ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=\frac{1}{\varepsilon}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים:

$$\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

– ולכן מתקיים כי $f_{n}\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש לפי הגדרה.

תרגיל 6:

תהי $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f_{n}\left(x\right)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$

א. הראו כי f_{n} מתכנסת במ"ש בכל קטע סגור וחסום $\left[a,b\right]$

ב. האם f_n מתכנסת במ"ש בכל $\mathbb{R}$?

פתרון:

א. נשתמש בתנאי קושי להתכנסות של סדרת פונקציות.

- יהי קטע $[a,b]$.
- נוכיח התכנסות במ"ש על $f_n\left(x\right)$ בקטע $[a,b]$ בעזרת תנאי קושי:
  - יהי $\varepsilon>0$.
  - אנחנו רוצים לחפש N כך שלכל $m,n>N$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon$ לכל $x\in[a,b]$.
  - לפי הנתון מתקיים:

$$\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|=\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{1}{m}\right)\right|$$

  - מכיוון ש$f\left(x\right)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$, לפי משפט קנטור-היינה היא רציפה במ"ש ב$[a,b]$.
  - ולכן מהרציפות במ"ש, עבור ה-$\varepsilon>0$ שבחרנו, קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x_0,y_0\in[a,b]$ המקיימים $\left|x_0-y_0\right|<\delta$ מתקיים:

$$\left|f\left(x_0\right)-f\left(y_0\right)\right|<\varepsilon$$

  - נניח בה"כ כי $m>n$.
    - אזי נקבל ש:

$$\left|x_0-y_0\right|=\left|\overbrace{\left(x+\frac{1}{n}\right)}^{x_0}-\overbrace{\left(x+\frac{1}{m}\right)}^{y_0}\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}\ \backslash<\delta$$

    - ולכן עבור $N=\frac{1}{\delta}$ יתקיים שלכל $n,m>N$ מתקיים:

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

ב. הטענה לא נכונה, נביא דוגמה נגדית:

- ניקח $f\left(x\right)=x^2$, שהיא פונקציה לא רציפה במ"ש בכל $\mathbb{R}$.
- מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|&=\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{1}{m}\right)\right|\\&=\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^2-\left(x+\frac{1}{m}\right)^2\right|\end{aligned}$$

– ועבור $m=2n$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right| &= \left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2n}\right)^2\right| \\ &= \left|\frac{x}{n}+\frac{3}{4n^2}\right| > \frac{|x|}{n}\end{aligned}$$

– ולכן עבור $\varepsilon_0=1$, לכל N ולכל $n>N$ קיים $n<x\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right| > \frac{|x|}{n}=\frac{x}{n}>1=\varepsilon_0$$

תרגיל 7:

נניח שקיימת סדרת פונקציות $f_n\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש ל-$f\left(x\right)$בקטע I.

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

צ"ל: סדרת הפונקציות $g\left(f_n\left(n\right)\right)$ מתכנסת במ"ש ב-$\mathbb{R}$ לפונקציה $g\left(f\left(x\right)\right)$.

פתרון: נפתור לפי הגדרה

- יהי $\varepsilon>0$.
- g רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$
  – לכן קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|g\left(x\right)-g\left(y\right)|<\varepsilon$
- נתון כי $f_n\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש ל$f\left(x\right)$
  – ולכן קיים N כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ וכלל $n>N$ מתקיים:

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\delta$$

- ולכן עבור אותו n מתקיים:

$$\left|g\left(f_n\left(x\right)\right)-g\left(f\left(x\right)\right)\right|<\varepsilon$$