שם: איל שטיין

February 21, 2024

לוגיקה | תרגול 5

שם: איל שטיין

February 21, 2024

נושא השיעור: משפט הנאותות

תרגיל 1 - תרגיל בסיסי בנאותות

- נקבל מערכת ואנחנו צריכים להגיד האם היא נאותה ואם כן, האם במובן הצר או הרחב.
- נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $WFF_{\{\neg,\vee\}}$
- אקסיומות: $B = \{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in\} WFF_{\{\neg,\vee\}}$

<u>תרגיל 1</u>: נגדיר מערכת הוכחה חדשה עבור $\mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$.

אקסיומות: $B = \left\{\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}\right\}$

כללי היסק: לכל $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$,

- $MV_1(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$
- $MV_2(\alpha, (\neg\alpha) \vee \beta) = \beta$

נסמן ב-$Ded_N(\emptyset)$ את קבוצת הפסוקים היכיחים במערכת החדשה, ואם $\varphi \in Ded_N(\emptyset)$ אז נסמן $\underset{N}{\vdash} \varphi$. באופן דומה נסמן $Ded_N(\Sigma)$ ו-$\Sigma \underset{N}{\vdash} \varphi$ עבור פסוקים היכיחים במערכת החדשה מקבוצת הנחות Σ.

1. הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הצר (כלומר, לכל פסוק $\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\underset{N}{\vdash} \varphi$ אז $\models \varphi$).

2. הוכיחו כי מערכת ההוכחה החדשה נאותה במובן הרחב (כלומר, לכל $\varphi \in \mathrm{WFF}_{\{\neg,\vee\}}$: אם $\Sigma \underset{N}{\vdash} \varphi$ אז $\Sigma \models \varphi$).

- נשים לב שעבור $Con\left(\sum\right)$ אנחנו לא מוסיפים את N, כי זו קבוצה של נביעה לוגית ולכן אנחנו לא נוגעים בה.

סעיף א' - להוכיח שהמערכת נאותה במובן הצר.

- כלומר צריך להוכיח ש $Ded_{N}\left(\emptyset\right)\subseteq Con\left(\emptyset\right)$.
  - כלומר $\vdash_{N}\varphi$
- נעשה זאת בהוכחה של אינדקוציית מבנה.
- **בסיס:**
  - ניקח איבר בבסיס ונראה שהוא טאוטולוגיה.
  - יהיו $\alpha,\beta\in WFF$. נראה כי $\models\alpha\vee\left(\beta\vee\neg\alpha\right)$.
  - נכתוב טבלת אמת עבור α , $\neg\alpha$ ו-β ונראה שכל הפסוק תמיד מקבל ערך 1:

α	β	$\neg\alpha$	$\beta\vee\neg\alpha$	$\alpha\vee\left(\beta\vee\neg\alpha\right)$
0	0	1		
0	1	1		
1	0	0		
1	1	0		

- **צעד:**
  - יהיו α,β כך ש $\models\alpha$ וגם $\models\gamma$.
  - נבדוק מה קורה עם $MV1$ ועם $MV2$:
    - עבור $MV1$:
      - נסמן $\delta=MV1\left(\alpha,\gamma\right)$
      - תהי השמה z. אזי מתקיים:

$$\overline{z}\left(\alpha\right)=1=\overline{z}\left(\gamma\right)$$

$$\Rightarrow\overline{z}\left(\delta\right)=\overline{z}\left(\alpha\vee\gamma\right)\overbrace{=}^{Because\ \ of\ \ TT_{\vee}}1$$

    - עבור $MV2$:
      - נסמן $\delta=MV2\left(\alpha,\left(\neg\alpha\right)\vee\beta\right)$.
      - אם הביאו לנו פסוק שלא מהצורה של $\left(\neg\alpha\right)\vee\beta$ אז הפונקציה תחזיר את α, שהיא טואוטולוגיה.
      - תהי השמה z. אזי:

$$\overline{z}\left(\alpha\right)=1$$

$$\Rightarrow\overline{z}\left(\neg\alpha\right)\overbrace{=}^{TT_{\neg}}0$$

$$\Rightarrow \overline{z}\left(\left(\neg\alpha\right)\vee\beta\right)\overbrace{=}^{TT_{\vee}}1,\quad \overline{z}\left(\neg\alpha\right)=0$$

$$\Rightarrow \overline{z}\left(\beta\right)=1$$

סעיף ב': נאותות במובן הרחב.

- עכשיו צריך להראות שלכל $\varphi\in WFF$, אם $\Sigma\vdash_{N}\varphi$ אז $\Sigma\models\varphi$.
  - כלומר $Ded_{N}\left(\Sigma\right)\subseteq Con\left(\Sigma\right)$.
- הוכחה באינדוקציית מבנה:
- **בסיס:**
  - ניקח $\varphi\in A\cup\Sigma$. צריך להראות ש$\Sigma\models\varphi$.
    * מתקיים:
      - או $\varphi\in A$.
      - או $\varphi\in\Sigma$ ואז הנחנו את המבוקש, כלומר $\Sigma\vdash\varphi$, כי סדרת ההוכחה היא רק φ.
- **צעד:**
  - יהיו α,γ המקיימים $\Sigma\models\alpha$ וגם $\Sigma\models\gamma$.
  - עבור $MV1$:
    * $\delta=MV1\left(\alpha,\gamma\right)=\alpha\vee\gamma$
    * תהי z המספקת את Σ. ואז:

$$\overline{z}\left(\alpha\right)=\overline{z}\left(\gamma\right)=1$$

      - ואז כמו בסעיף הקודם אפשר להמשיך.
  - גם עבור $MV2$, ניקח z שמספקת את Σ ונקבל את אותו תהליך מחשבה.