(104031) אינפי 1מ' - רשימת משפטים מהתרגולים עם יוליה

חורף 22-23

December 6, 2022

הגדרה 1. הגדרת הערך המוחלט

- יהי $x \in \mathbb{R}$.
  - אז $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
  - הגדרה שקולה: $|x| = max\{x, -x\}$

משפט 2. תכונות הערך המוחלט:

תכונות:

- יהיו $y, x \in \mathbb{R}$:

1. $x = 0 \Leftrightarrow |x| \geq 0$
2. $|x - y| = |y - x| \Leftarrow |x| = |-x|$
3. $|-x| \leq x \leq |x|$
4. $|x \cdot y| = |y| \cdot |x|$
5. יהי $B \in \mathbb{R}$.
   $-B \leq x \leq B \Leftrightarrow |x| \leq B$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

משפט 3. אי שוויון הממוצעים: עבור $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

הגדרה 4. אינדוקציה - הוכחה בשלושה שלבים:

1. בסיס - נראה שהטענה נכונה עבור n_0 כלשהו.
2. הנחה - נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו.
3. צעד - בעזרת מספר (2), נוכיח כי הטענה נכונה גם עבור $(n+1)$

משפט 5. אי שוויון ברנולי

- יהי $\alpha < -1$, אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $(1+\alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$

משפט 6. לכל $n \geq 6$ מתקיים $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$

משפט 7. $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ כאשר $1 \leq k \quad k, n \in \mathbb{N},$

משפט 8. משפט הסופרמום:

- תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלמעלה.
- $S \in \mathbb{R}$ הוא $supA$ אם ורק אם:
  1. $\forall a \in A, \ a \leq S$
  2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > S - \varepsilon$

משפט 9. $A \subseteq \mathbb{R}$. A חסומה אם ורק אם קיים $L \geq 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \leq L$

הגדרה 10. עיגול למספר שלם. יהי $x \in \mathbb{R}$. אז $[x] = max\left\{a \in \mathbb{Z}, \ a \leq x\right\}$

משפט 11. A קבוצה של מספרים שלמים החסומה מלמעלה כך ש $A \leq \mathbb{Z}$. קיים מקסימום ל-A.

משפט 12. יהיו A, B קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים. קיים $max\ A$ וקיים $max\ B$. אזי $sup\left(A+B\right) = supA + supB$

הגדרה 13. גבול של סדרה.

- תהי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.
- נאמר כי $L \in \mathbb{R}$ הינו גבול של $\left\{a_n\right\}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N \ : \ n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$

משפט 14. תהי a_n סדרה. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

משפט 15. תהי a_n סדרה.

- קיים N טבעי כך שלכל $\varepsilon > 0$ ולכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.
- מתקיים ש a_n היא קבועה החל מ-$N+1$.
- (לשים לב שהפכנו את סדר הכמתים בהגדרת הגבול!).

משפט 16. תהי a_n מתכנסת ותהי b_n סדרה שלא מתכנסת.

- $a_n + b_n$ לא מתכנסת.
- אם נתון בנוסף ש- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אז גם $a_n \cdot b_n$ לא מתכנסת.

משפט 17. יהיו a_n, b_n שתי סדרות. נתון: $(a_n + b_n)$ ו- $\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ מתכנסות. אזי $a_n \cdot b_n$ מתכנסת.

טענה 18. **כמה גבולות חשובים:**

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. הוכחנו בהרצאה בעזרת אי שוויון הממוצעים.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. כי לפי חוקי החזקות זה שווה ל- $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ ולפי חשבון גבולות זה שווה ל-$\frac{1}{1}$.
3. יהי $c \in \mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

משפט 19. תהי $a_n \geq 0$ סדרה כך שהגבול של $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $L > 0$. אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

משפט 20. יהי מספר $q \in \mathbb{R}$ כך ש $|q| < 1$. אז $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

הגדרה 21. הגדרת גבול אינסופי:

- תהי a_n סדרה.
- נאמר כי גבול של $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם לכל $M > 0$ קיים N כל שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$. (אפשר גם לכתוב רק $M \in \mathbb{R}$ במקום $M > 0$).
  – אותו דבר לגבי סדרה ששואפת ל $-\infty$, רק $a_n < M$ לכל $M \in \mathbb{R}$.

משפט 22. יהי $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. אזי $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

משפט 23. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ וממקום מסוים מתקיים $b_n \geq a_n$ אז גם $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

משפט 24. תהי a_n סדרה המתכנסת במובן הרחב (כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר $L = \pm\infty$ או $L \in \mathbb{R}$)

- אזי $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ כאשר $b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$
- במילים אחרות, הסדרה של הממוצע החשבוני של a_n גם מתכנסת במובן הרחב.

תרגיל 25. תהי a_n סדרה חיובית ($a_n > 0$) כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, כאשר $L \in \mathbb{R}$. אזי:

1. מתקיים גם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = L$
2. ומתקיים גם $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a\,1}+\frac{1}{a\,2}+\ldots+\frac{1}{a\,n}} = L$

משפט 26. מבחן המנה:

- תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי:
  1. אם $0 \leq L < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  2. אם $L > 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
  3. אם $L = 1$ אז המבחן לא נותן מידע

משפט 27. מבחן השורש:

- תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. אזי:
  1. אם $0 \leq L < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  2. אם $L > 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
  3. אם $L = 1$ אז המבחן לא נותן מידע

משפט 28. יהי $c > 0$. אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

משפט 29. תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. אזי $\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$

הגדרה 30. נאמר ש-a_n היא סדרה מונוטונית עולה אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$

הגדרה 31. נאמר ש-a_n היא סדרה מונוטונית יורדת אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$

הערה 32. אם נרצה להגדיר על סדרה עולה/יורדת ממש נחליף את הסימן $\leq$ בסימן $<$

משפט 33. תהי a_n מונוטונית עולה. אז:

1. אם היא חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = supa_n$
2. אם היא לא חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} = \infty$

משפט 34. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ היא סדרה מתכנסת.

משפט 35. תהי a_n סדרה מונוטונית <u>יורדת</u> וחיובית. תהי b_n סדרה מונוטונית <u>עולה</u> וחיובית.

- נתון כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.
- אזי שתי הסדרות מתכנסות לאותו הגבול.

הגדרה 36. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת כך: $e = \lim_{n\to\infty} a_n$

הגדרה 37. $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת כך: $\frac{1}{e} = e^{-1}$

הגדרה 38. לכל $x \in \mathbb{R}$, לכל סדרה $a_n > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$

משפט 39. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$

משפט 40. אם המנות של איברים עוקבים מתכנסת לגבול סופי, אז גם השורש ה-n מתכנס לאותו הגבול

- כלומר, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = L$

משפט 41. יהיו a_n, b_n סדרות ו- $a, b \in \mathbb{R}$.

- אם מתקיים:
  1. $a_n > 0$
  2. $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$
  3. $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
- אז $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

הערה 42. **תזכורת על תתי סדרות:**
תהי a_n סדרה. אם ניקח "תת-סדרה" a_{n_k}, הכוונה היא לקחת חלק מהאיברים של a_n כאשר לא משנים את הסדר של האיברים ב-a_n.
אם נרצה לכתוב a_{m_k} הכוונה ל"תת-סדרה" אחרת.

הגדרה 43. גבול חלקי הוא גבול של תת סדרה.
L נקרא גבול חלקי של a_n אם קיימת תת-סדרה a_{n_k} כך ש $L = \lim_{n\to\infty} a_{n_k}$

משפט 44. תהי a_n סדרה חסומה מלמעלה כך שלא קיים $max\ a_n$.

- אזי $sup\ a_n$ הינו גבול חלקי של a_n.

תרגיל 45. תהי a_n סדרה מונוטונית עולה.

- נתון שקיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = L$.
- אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

משפט 46. תהי a_n סדרה חסומה המקיימת $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

- מכיוון שהיא חסומה, קיימים לה גבולות חלקיים. נסמן:
  - $M = \lim\ sup\ a_n$
  - $m = \lim\ inf\ a_n$
- **אזי** הקטע $[m, M]$ שווה לקבוצת הגבולות החלקיים של a_n.
  - במילים אחרות, כל הגבולות החלקיים נמצאים בקטע וכל איבר $a \in [m, M]$ בקטע הוא גבול חלקי.

משפט 47. תהי a_n סדרה חסומה ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $k \geq n$,$b_n = \ sup\ \{a_k\}$

- אזי $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} sup\ a_n$.

משפט 48. יהיו a_n, b_n סדרות חסומות.
אזי:

1. מתקיים $lim\ sup\,(a_n + b_n) \leq lim\ sup\ a_n + lim\ sup\ b_n$
2. וגם מתקיים: $lim\ inf\,(a_n + b_n) \geq lim\ inf\ a_n + lim\ inf\ b_n$

משפט 49. תהי a_n סדרה מתכנסת. ותהי b_n סדרה חסומה.

- **אזי**

1. $lim\ \ sup\,(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+lim\ \ sup\ \ b_n$
2. $lim\ \ inf\,(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+lim\ \ inf\ \ b_n$

הגדרה 50. סדרת קושי:

- תהי a_n סדרה.
  - נאמר ש-a_n היא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n,m\in\mathbb{N}$, כך ש$n,m>N$ מתקיים $|a_n-a_m|<\varepsilon$

הגדרה 51. דרך שקולה לנסח את משפט קושי היא לומר שלכל $\varepsilon>0$ קיימים $p,n\in\mathbb{N}$ ו-$n>N$ כך שלכל $n,n+p>N$ מתקיים $|a_n-a_m|<\varepsilon$

הערה 52. שלילת ההגדרה של סדרת קושי - קיים $\varepsilon>0$ כל שלכל N קיימים $m,n>N$ כך ש- $|a_n-a_m|\geq\varepsilon$

משפט 53. a_n מתכנסת לגבול סופי אם ורק אם a_n סדרת קושי.

משפט 54. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ לא מתכנסת (היא שואפת לאינסוף)

משפט 55. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ מתכנסת לגבול סופי.

משפט 56. תהי a_n סדרה חיובית של מספרים רציונליים ($\mathbb{Q}$).

- אם $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ כך ש- $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. נציג את a_n בצורה של $a_n=\frac{p_n}{q_n}$ כך ש-p_n ו- q_n הם מספרים טבעיים זרים.
- **אזי**∞ $p_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ וגם $q_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.