הסתברות מ' | הרצאה 11 (00094412)

שם: איל

March 27, 2024

נושאי השיעור: משתנים מקריים רציפים, טרנספורמציות

נושא ראשון - השלמות מהרצאה קודמת:

טענה 1. (ללא הוכחה)

- X,Y ייקראו משתנים מקריים רציפים במשותף (כלומר (X,Y) הוא וקטור מקרי רציף) אם קיימת פונקציה f_{XY} כך ש:

$$P\left(a\leq x\leq b,c\leq y\leq d\right)=\int_{a}^{b}\left(\int_{c}^{d}f_{XY}dy\right)dx$$

  - כלומר מפיק לבדוק את התנאי בהגדרה המקורית ל-$D=[a,b]\times[c,d]$

תזכורת:

- X,Y רציפים הם בלתי תלויים אמ"מ $f_{XY}\left(x,y\right)=f_{X}\left(x\right)\cdot f_{Y}\left(y\right)$ (לכל x,y נקודות רציפות של $f_{X,Y}$).

הערה.

- אם X,Y משתנים מקריים רציפים על אותו (Ω,P), הם לא בהכרח רציפים במשותף.
  - לדוגמה עבור משתנה מקרי רציף X, הוקטור (X,X) הוא לא וקטור מקרי רציף - תרגיל.
- אבל אם X,Y רציפים במשותף אז X רציף וגם Y רציף.

טענה 2.

- אם X,Y משתנים מקריים רציפים (כל אחד בפני עצמו) וגם בלתי תלויים
  - אז הם רציפים במשותף.
    - נשים לב שלפי הטענה הקודמת גם מתקיים $f_{XY}\left(x,y\right)=f_{X}\left(x\right)\cdot f_{Y}\left(y\right)$

טענה 3.

- משתנים מקריים X,Y רציפים הם בלתי תלויים $\iff$ לכל x מתקיים $f_X(x)>0$ וגם $f_{Y|X}(y,x)=f_Y(y)$ עבור x,y נקודות רציפות.
  - ההוכחה (תרגיל) היא לפי הגדרת צפיפות מותנית ונוסחת הכפל.

נושא שני - טרנספורמציות חח"ע של משתנים מקריים רציפים

נתחיל מהמקרה החד מימדי:

- נתונים:

1. משתנה מקרי רציף X, המקבל ערכים בקטע (a,b), עבור $-\infty<a\le b<\infty$.
   - כלומר $P(x\in(a,b))=0$

   (א) פונקציה $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ חח"ע וגזירה (ולכן רציפה).

   (ב) נגדיר $Y=g(x)$.

- נרצה למצוא את ההתפלגות של Y.
  - בעבר, אמרנו שפונקציה של משתנה מקרי היא תמיד משתנה מקרי.
    - אבל נשים לב שהמשתנה המקרי הזה לא בהכרח רציף:
      - לדוגמה $z(X)$ עבור $z(x)=\lceil x\rceil$ הוא משתנה מקרי בדיד.
      - או לדוגמה $h(X)$ עבור $h(x)=0$ הוא משתנה מקרי בדיד.

- מכיוון שהנחנו ש-g חח"ע וגזירה, מתקיימות כמה טענות מאינפי:

1. g עולה ממש או יורדת ממש בקטע (a,b)
2. קיימים $g(a)=\lim_{x\to a^+}g(x)$ ו- $g(b)=\lim_{x\to b^-}$.
   - נשים לב כי $g(a),g(b)\in(-\infty,\infty)$ ואין הגבלה עליהן.
3. g מקבלת ערכים בקטע $g(a)$ ו-$g(b)$.
4. g הפיכה בקטע $g(a)$ ו-$g(b)$, כלומר קיימת לה פונקציה הופכית $g^{-1}:(g(a),g(b))\to(a,b)$ שהיא גזירה ועולה או יורדת ממש בהתאם.
   - מתקיים: $\left(g^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$

הערה. אבחנות על Y:

- מכיוון ש g מקבלת ערכים בקטע $g(a)$ ו-$g(b)$, Y מקבל ערכים רק בין $g(a)$ ובין $g(b)$.
  - לכן:

$$P(Y\notin(g(a),g(b)))=P(X\notin(a,b))=0$$

- Y הוא משתנה מקרי רציף, כי ההסתברות שהוא יקבל נקודה בודדת היא אפס:
  - עבור $y \notin (g(a), g(b))$ מתקיים $P(Y=y) \leq P(y \notin (g(a), g(b))) = 0$
    * ולכן $P(Y=y)=0$
  - עבור $y \in (g(a), g(b))$, נשתמש בהגדרת Y:

$$P(Y=y) = P(g(X)=y)$$

    * ואז נשתמש בפונקציה ההופכית g^{-1} כדי לקבל:

$$P(g(X)=y) = P\left(X = g^{-1}(y)\right)$$

      · ומכיוון ש-X רציף, מתקיים:

$$P\left(X = g^{-1}(y)\right) = 0$$

      · ולכן:

$$P(Y=y)=0$$

  - הראנו שלכל y מתקיים $P(Y=y)=0$, כלומר הוא לא בדיד. בקורס שלנו אם משתנה מקרי הוא לא בדיד אז הוא רציף.

- נניח שהפונקציה g עולה ממש:
  - אזי פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y היא:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & y < g(a) \\ P(Y \leq y) & g(a) \leq y \leq g(b) \\ 1 & y > g(b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & y < g(a) \\ P(g(X) \leq y) & g(a) \leq y \leq g(b) \\ 1 & y > g(b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & y < g(a) \\ P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) & g(a) \leq y \leq g(b) \\ 1 & y > g(b) \end{cases}$$

* כלומר:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<g(a)\\ F_X\left(g^{-1}(y)\right) & g(a)\le y\le g(b)\\ 1 & y>g(b)\end{cases}$$

- אם g יורדת ממש אז:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<g(b)\\ P(g(x)\le y) & g(b)\le y\le g(a)\\ 1 & y>g(a)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y<g(b)\\ 1-F_X\left(g^{-1}(y)\right) & g(b)\le y\le g(a)\\ 1 & y>g(a)\end{cases}$$

- נמצא את הצפיפות של Y על ידי גזירת פונקציית ההתפלגות המצטברת:
  – עבור g עולה:

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{d}{dy}F_X\left(g^{-1}(y)\right) & g(a)\le y\le g(b)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

* נגזור לפי כלל השרשרת:

$$=\begin{cases}F_X'\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left(g^{-1}\right)'(y) & g(a)\le y\le g(b)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left(g^{-1}\right)'(y) & g(a)\le y\le g(b)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

  – עבור g יורדת:

$$\frac{d}{dy}\left(1-F_X\left(g^{-1}(y)\right)\right)$$

$$=-F_X'\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left(g^{-1}\right)'(y)$$

$$= f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left(-\left(g^{-1}\right)'(y)\right)$$

משפט 4. טרנספורמציה /פונקציה חח"ע של משתנה מקרי רציף

- אם X משתנה מקרי המקבל ערכים ב-(a,b) והפונקציה $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ חח"ע וגזירה, נגדיר $Y=g(X)$
  - אז Y משתנה מקרי רציף וצפיפותו היא:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|g^{-1}(y)\right| & y\ is\ in\ interval\ between\ g(a)\ and\ g(b)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הערה. נשים לב שהוספנו ערך מוחלט על $g^{-1}(y)$, כי אם $g(x)$ יורדת אז $\left(g^{-1}\right)'(y)<0$.

דוגמה 5.
יהא $X\sim Exp(\lambda)$. נגדיר $Y=c\cdot X$ עבור $c>0$.
מצאו את ההתפלגות של Y.
פיתרון:

- X משתנה מקרי המקבל ערכים בקטע$(0,\infty)$ ו-$g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת $y=g(x)=c\cdot x$ היא חח"ע וגזירה.
  - תנאי המשפט מתקיימים ולכן $g(X)=c\cdot X=Y$ הוא משתנה רציף.
    * כדי לחשב את הצפיפות שלו נשתמש בכך ש- $f_X(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x} & 0<x\\ 0 & otherwise\end{cases}$ ונמצא את הנגזרת של g^{-1}:
      · מתקיים $g^{-1}(y)=\frac{1}{c}\cdot y$ ולכן $\left(g^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{c}$.
      · בנוסף, $g(a)=\lim_{x\to0^+}c\cdot x=0$ ו-$g(\infty)=\lim_{x\to\infty}c\cdot x=\infty$.
    * ולכן:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(\overbrace{\frac{1}{c}\cdot y}^{=g^{-1}(y)}\right)\cdot\left|\overbrace{\frac{1}{c}}^{=\left(g^{-1}\right)'(y)}\right| & \overbrace{0}^{g(0)}<y<\overbrace{\infty}^{g(\infty)}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{\lambda}{c}\cdot e^{-\frac{\lambda}{c}\cdot y} & 0<y<\infty\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

· כלומר קיבלנו ש $Y\sim Exp\left(\frac{\lambda}{c}\right)$.ד

דוגמה 6.

- יהא $X \sim Uni\left([0,1]\right)$.
- נגדיר $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(x\right)$.
- מצאו את ההתפלגות של Y.

פיתרון:

- ניקח $a = 0$, $b = 1$
- נסמן $g\left(x\right) = \frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(x\right)$ ונשים לב ש-$g\left(x\right)$ היא חח"ע וגזירה בקטע $(0,1)$.
- מתקיים $g\left(0\right) = \infty$ ו-$g\left(1 = 0\right)$
- מתקיים $g^{-1}\left(y\right) = e^{-\lambda y} \iff x = e^{-\lambda y} \iff y = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(x\right)$
  - כלומר $\left(g^{-1}\right)'\left(y\right) = -\lambda\cdot e^{-\lambda y}$
- מתקיים $f_X\left(x\right) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$
- תנאי המשפט מתקיימים ולכן Y משתנה מקרי רציף וצפיפותו היא:

$$f_Y\left(y\right) = \begin{cases} \overbrace{f_X\left(\overbrace{e^{-\lambda y}}^{=g^{-1}(y)}\right)}^{=1}\cdot\left|-\lambda\cdot e^{-\lambda y}\right| & y \in (0,\infty) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  - כלומר:

$$f_Y\left(y\right) = \begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda y} & y \in (0,\infty) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  - קיבלנו ש-$Y \sim Exp\left(\lambda\right)$.

נעבור למקרה הרב-מימדי:

- נתון וקטור מקרי $\underline{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ המקבל ערכים בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- נתונה פונקציה חח"ע ועל (הפיכה) $g : D \to D'$ כאשר $D, D' \subseteq \mathbb{R}^n$.
  - בנוסף, נניח כי ל-g יש נגזרות חלקיות רציפות.
- נגדיר $\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right) = \underline{Y} = g\left(\underline{X}\right)$

- נרצה למצוא את ההתפלגות של Y.
- ניתן לייצא את g על ידי n פונקציות $g_1, g_2, \ldots, g_n : D \to \mathbb{R}$ כך ש:

$$g\left(\underline{x}\right) = \left(g_1\left(\underline{x}\right), g_2\left(\underline{x}\right), \ldots, g_n\left(\underline{x}\right)\right)$$

$$= \left(g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), g_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, g_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right)$$

- באותו אופן ניתן לייצג את h:

$$h\left(\underline{y}\right) = \left(h_1\left(\underline{y}\right), h_2\left(\underline{y}\right), \ldots, h_n\left(\underline{y}\right)\right)$$

$$= \left(h_1\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right), h_2\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \ldots, h_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)\right)$$

משפט 7.

- יהא $\underline{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ וקטור מקרי רציף המקבל ערכים ב-$D \subseteq \mathbb{R}^n$.
- תהא $g : D \to D' \subseteq \mathbb{R}^n$ העתקה חח"ע ועל כך ש $h \triangleq g^{-1}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות.
- נגדיר $\underline{Y} = g\left(\underline{X}\right)$.
- אזי $\underline{Y}$ וקטור מקרי רציף וצפיפות נתונה על ידי:

$$f_{\underline{Y}}\left(\underline{y}\right) = \begin{cases} f_{\underline{X}}\left(h\left(\underline{y}\right)\right) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \underline{h}\left(y\right)\right| & \underline{y} \in D \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

דוגמה 8.

- יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים המפולגים נורמלית סטנדרטית כל אחד.
- יהיו T ו-R המרחק והזוית עם ציר ה-x (נגד כיוון השעון) של הנקודה (X, Y).
- **צ"ל:** מצאו את ההתפלגות המשותפת של Rו-T.

פיתרון:

- נשתמש במשפט 7.
  - הוקטור המקרי הרציף יהיה (X, Y).

– מכיוון ש-X,Y הם בלתי תלויים, מתקיים שהצפיפות המשותפת שלו היא $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(X)$

* ומכיוון ש-X,Y מפולגים נורמלי סטנדרטי, מתקיים:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$$

· כלומר:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}$$

– הסיכוי ש-(X,Y) יקבל את הנקודה $(0,0)$ הוא אפס

* ולכן נגדיר כי (X,Y) מקבל ערכים בתחום $\overbrace{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}^{=D}$

– נסמן פונקציה $g:(x,y)\to(r(x,y),t(x,y))$:

$$g(x,y)=(g_1(x,y),g_2(x,y))$$

$$=(r(x,y),t(x,y))$$

* כאשר $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ו-$t(x,y)$ תהיה הזוית שבין (x,y) ובין ציר ה-x:

$$t(x,y)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & x>0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0,\ \ y\geq0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & x<0\ \ y<0\end{cases}$$

– קיבלנו שהפונקציה $g:\left\{\mathbb{R}^2\setminus(0,0)\right\}\to\{(0,\infty)\times(-\pi,\pi]\}$ היא חח"ע ועל.

– נמצא את $h\triangleq g^{-1}(r,t)\to(x(r,t),y(r,t))$:

$$\begin{cases}r=distance\ \ of\ \ \ (x,y)\\ t=angle\ \ of\ \ \ (x,y)\end{cases}\iff\begin{cases}x=r\cdot\cos(t)\\ y=r\cdot\sin(t)\end{cases}$$

* כלומר $h(r,t)=\left(\overbrace{r\cdot\cos(t)}^{x(r,t)},\overbrace{r\cdot\sin(t)}^{y(r,t)}\right)$.

– מתקיים: $R=r(X,Y)$ ו-$T=t(X,Y)$.

• כעת אפשר להשתמש במשפט ולקבל ש-(R,T) הם רציפים במשותף.

– כדי לכתוב את הצפיפות המשותפת שלהם נחשב את היעקוביאן:

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,t\right)}=det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$$

$$=det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}x\left(r,t\right) & \frac{\partial}{\partial t}x\left(r,t\right)\\ \frac{\partial}{\partial r}y\left(r,t\right) & \frac{\partial}{\partial t}y\left(r,t\right)\end{pmatrix}$$

$$=det\begin{pmatrix}\cos\left(t\right) & -r\cdot\sin\left(t\right)\\ \sin\left(t\right) & r\cdot\cos\left(t\right)\end{pmatrix}$$

$$=r\cdot\cos^{2}\left(t\right)+r\cdot\sin^{2}\left(t\right)$$

$$=r$$

• קיבלנו שפונקציית הצפיפות המשותפת של $\left(R,T\right)$ היא:

$$f_{R,T}\left(r,t\right)=\begin{cases}f_{X,Y}\left(\overbrace{r\cdot\cos\left(t\right)}^{x(r,t)},\overbrace{r\cdot\sin\left(t\right)}^{y(r,t)}\right)\cdot\left|r\right| & ,r>0\ \ t\in\left(-\pi,\pi\right]\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(r^{2}\cos^{2}(t)+r^{2}\sin^{2}(t)\right)}\cdot r & ,r>0\ \ t\in\left(-\pi,\pi\right]\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}r^{2}}\cdot r & ,r>0\ \ t\in\left(-\pi,\pi\right]\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

• נמצא את פונקציית הצפיפות השוליות של R:

$$f_{R}\left(r\right)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}f_{R,T}\left(r,t\right)dt & r>0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\limits_{t=-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}r^{2}}\cdot r\ \ dt$$

$$= e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r \overbrace{\int\limits_{t=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\ dt}^{=1}$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r & r > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

– זו נקראת התפלגות ריילי.

• נמצא את פונקצית הצפיפות השולית של T:

$$f_T\left(t\right) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,T}\left(r,t\right)dr & t \in \left(-\pi,\pi\right] \\ 0 & else \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot rdr$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}r^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$

– כלומר:

$$f_T\left(t\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & t \in \left(-\pi,\pi\right] \\ 0 & else \end{cases}$$

* קיבלנו $T \sim Uni\left(\left[-\pi,\pi\right]\right)$
* ומתקיים:

$$f_T\left(t\right) \cdot f_R\left(r\right) = f_{R,T}\left(r,t\right)$$

· כלומר r,t בלתי תלויים.

נושא שלישי - התפלגות נורמלית רב מימדית:

הגדרה 9. התפלגות נורמלית סטנדרטית.

- יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים (כל אחד) ובלתי תלויים.
- במקרה זה נאמר כי הם מפולגים נורמלית סטנדרטית במשותף (או שהוקטור המקרי $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ מפולג נורמלית/גאוסית n-מימדית).
- הצפיפות המשותפת שלהם במקרה הזה היא:

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overbrace{=}^{\text{סייולת יתלב סלוכ}} f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_2}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

  – בכתיב וקטורי, כל הוקטורים (המקריים או הרגילים הם וקטורי עמודה):

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\overbrace{\underline{x}^T\underline{x}}^{=\|x\|_2^2}}$$

התפלגות נורמלית במקרה הכללי:

- יהיו $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ממשית, ריבועית והפיכה.
  – יהי $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ וקטור כלשהו.
  – נגדיר $\underline{Y} = B\underline{X} + \underline{\mu}$.
  – נשתמש במשפט 7 כדי למצוא את ההתפלגות של Y.
  – נגדיר העתקה $\underline{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$\underline{g}(\underline{x}) = B\underline{x} + \underline{\mu}$$

  * נשים לב כי B הפיכה $\Longleftrightarrow$ g הפיכה ומתקיים:

$$\underline{y} = B\underline{x} + \underline{\mu}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underline{x} = B^{-1}\left(\underline{y} - \underline{\mu}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\overbrace{g^{-1}\left(\underline{y}\right)}^{\triangleq h\left(\underline{y}\right)} = B^{-1}\left(\underline{y} - \underline{\mu}\right)$$

* נחשב את היעקוביאן:
  · אנחנו רוצים להסתכל על מטריצות הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{y}} = det\left(\left(\frac{\partial h_k}{\partial y_j}\right)_{k,j}\right)$$

$$= det\left(\frac{\partial \overbrace{\left(B^{-1}\left(\underline{y} - \underline{\mu}\right)\right)_k}^{k_{th}\ \ element}}{\partial y_j}\right)$$

$$= det\left(B^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{det\left(B\right)}$$

– לכן לפי משפט 7 נקבל כי הוקטור המקרי $\underline{Y} = \underline{g}\left(\underline{X}\right)$ הוא רציף וצפיפותו היא:

$$f_{\underline{Y}}\left(\underline{y}\right) = \begin{cases} f_{\underline{X}}\left(h\left(\underline{y}\right)\right) \cdot \left|\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{y}}\right| & y \in \overbrace{\mathbb{R}^2}^{=D'} \end{cases}$$

$$= \overbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\overbrace{\left(\underline{y} - \underline{\mu}\right)^T \left(B^{-1}\right)^T}^{=\left(h\left(\underline{y}\right)\right)^T}\overbrace{B^{-1}\left(\underline{y} - \underline{\mu}\right)}^{=h\left(\underline{y}\right)}}}^{=f_{\underline{X}}\left(h\left(\underline{y}\right)\right)} \cdot \frac{1}{det\left(B\right)}$$

– נגדיר:

$$\Sigma^{-1} = \left(BB^T\right)^{-1} = \left(B^T\right)^{-1} B^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T B^{-1}$$

* נקבל כי

$$det\left(\Sigma\right)=det\left(BB^{T}\right)=det\left(B\right)\cdot det\left(B^{T}\right)=\left(Det\left(B\right)\right)^{2}$$

· כלומר:

$$\sqrt{det\left(\Sigma\right)}=\left|det\left(B\right)\right|$$

- נציב בנוסחת הצפיפות ונקבל:

$$f_{\underline{Y}}\left(\underline{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{n}\cdot det\left(\Sigma\right)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\underline{y}-\underline{\mu}\right)^{T}\Sigma^{-1}\left(\underline{y}-\underline{\mu}\right)}$$

הגדרה 10.

- לוקטור המקרי $\underline{Y}=\left(Y_{1},Y_{2},\ldots,Y_{n}\right)$ בעל הצפיפות:

$$f_{\underline{Y}}\left(\underline{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{n}\cdot det\left(\Sigma\right)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\underline{y}-\underline{\mu}\right)^{T}\Sigma^{-1}\left(\underline{y}-\underline{\mu}\right)}$$

  – נאמר כי יש התפלגות נורמלית רב מימדית עם פרמטרים $\mu\in\mathbb{R}^{n}$ ו-$\Sigma\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

- סימון $\underline{Y}\sim\mathcal{N}\left(\underline{\mu},\Sigma\right)$.

הערה 11.

- למטריצה $\Sigma\in\mathbb{R}^{n\times n}$ שניתנת לכתיבה כ-$\Sigma=BB^{T}$, עבור $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה, קוראים "מטריצה מוגדרת חיובית".
- בהגדרת ההתפלגות הנורמלית ה-n מימדית נדרוש ש-Σ תהיה מוגדרת חיובית.

נושא רביעי - תוחלת ושונות משותפת של משתנה מקרי המתפלג נורמלי:

- אפשר לנסות לחשב תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי, אבל זו דרך קשה.
- לכן, נזכור ש-$\underline{Y}$ התקבל מ-$\underline{X}$ ולכן:

$$Y_{k}=\left(B\underline{X}+\mu\right)_{k}=\sum_{j=1}^{n}B_{k,j}\cdot X_{j}+\mu_{k}$$

– מלינאריות התוחלת נקבל:

$$E\left[Y_k\right] = E\left[\sum_{j=1}^{n} B_{k,j} \cdot X_j + \mu_k\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E\left[B_{k,j} \cdot X_j\right] + \mu_k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} B_{k,j} \cdot \overbrace{E\left[X_j\right]}^{=0} + \mu_k$$

$$= \mu_k$$

• נחשב את השונות המשותפת:

$$Cov\left(Y_k, Y_{k'}\right) = Cov\left(\sum_{j=1}^{n} B_{k,j} X_j + \mu_k,\ \sum_{j'=1}^{n} B_{k',j'} X_{j'} + \mu_{k'}\right)$$

$$= Cov\left(\sum_{j=1}^{n} B_{k,j} X_j \cancel{+\mu_k},\ \sum_{j'=1}^{n} B_{k',j'} X_{j'} \cancel{+\mu_{k'}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} B_{k,j} B_{k',j'} \cdot Cov\left(X_j, X_{j'}\right)$$

– אם $X_j \neq X_{j'}$ בלתי תלויים אז $Cov\left(X_j, X_{j'}\right) = 0$

– $Var\left(X_j\right) = 1$ אם $j = j'$:

$$= \sum_{j=j'=1}^{n} B_{k,j} B_{k',j'} \cdot 1 + \sum_{j \neq j'} B_{k,j} B_{k',j'} \cdot 0$$

$$= \left(BB^T\right)_{k,k'}$$

$$= \Sigma_{k,k'}$$

- מסקנה:

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} E\left[Y_1\right] \\ E\left[Y_2\right] \\ \vdots \\ E\left[Y_n\right] \end{pmatrix}$$

משפט 12.

- אם:
  - $\underline{Y} \sim \mathcal{N}\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$, n מימדי
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ כך ש $A\Sigma A^T$ מוגדרת חיובית
  - $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$
- ונגדיר: $\underline{Z} = A\underline{Y} + \underline{b}$
- אז:

$$\underline{Z} \sim \mathcal{N}\left(A\underline{\mu} + \underline{b}, A\Sigma A^T\right)$$

מסקנה 13.

- על ידי בחירה של מטריצה $\underline{A}$ לוקטור $\underline{b}$ ניתן להראות:

1. כל תת-וקטור של וקטור מקרי נורמלי הוא נורמלי.
2. אם X ו-Y נורמליים כלשהם ובלתי תלויים אז (X, Y) וקטור מקרי נורמלי.
3. אם X ו-Y משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים אז $X+Y$ נורמלי.
4. אם X, Y נורמליים במשותף והם בלתי מתואמים אז X ו-Y בלתי תלויים.