(104031) אינפי 1מ' | תרגול 16 - יוליה

שם: איל שטיין

December 14, 2022

נושאי השיעור: חישוב גבול של פונקציה, משפט היינה, גבול אינסופי של פוקנציה

נושא ראשון - השלמה מתרגול קודם:

תרגיל 1. נתון כי $\lim_{x\to b}f\left(x\right)=L$.

א. יהי $a\neq0$. **צ"ל:** הוכיחו לפי הגדרה ש-$\lim_{x\to0}f\left(ax+b\right)=L$ - **<u>פתרנו בתרגול הקודם.</u>**

ב. האם הטענה של סעיף א' נכונה עבור $a=0$?

ב. פתרון:

- אי אפשר להשתמש באותה הוכחה של הסעיף הקודם כי חילקנו שם ב-$|a|$.
- נוכיח שהטענה אכן לא נכונה.
  - דוגמא נגדית: $f\left(x\right)=\begin{cases} 2 & ,\ x\neq3\\ 1 & ,\ x=3 \end{cases}$
  - יהי $b=3$, $a=0$.
    - אז $\lim_{x\to3}f\left(x\right)=2$ כי מסתכלים רק על הסביבה המנוקבת של $x=3$ ולא על $x=3$ עצמו.
    - אם נסתכל על $\lim_{x\to0}\left(ax+b\right)=\lim_{x\to0}f\left(b\right)=\lim_{x\to0}f\left(3\right)=1$
  - כלומר, הראינו ש- $\lim_{x\to b}f\left(x\right)\neq\lim_{x\to0}f\left(ax+b\right)$

נושא שני - חישוב גבולות של פונקציה:

- <u>הערה</u> - בפונקציות אין לנו את מבחן המנה ומבחן השורש.

תרגיל 2.

א. חשבו $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x^{3}+x^{2}+x-3}$

א. פתרון:

- נשים לב שכאשר $x\to1$ אז גם המונה וגם המכנה יתאפסו.
- מכיוון ש-1 הוא שורש של הפולינום במכנה, אפשר לעשות חילוק ארוך ב$\left(x-1\right)$ ונקבל תשובה בלי שארית.

– נעשה חילוק ארוך ונקבל שכאשר $x \to 1$ מתקיים:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x^3+x^2+x-3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{x+2}{x^2+2x+3}$$

• ולכן:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x^3+x^2+x-3} = \lim_{x\to 1}\overbrace{\frac{x+2}{x^2+2x+3}}^{Elementary} = \frac{1}{2}$$

– כלומר: מכיוון ש- $\frac{x+2}{x^2+2x+3}$ היא פונקציה אלמנטרית, היא מקיימת שהגבול של הפונקציה בסביבה של 1 שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=1$.

2. ב. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$

2. ב. פתרון:

• נשתמש בגבול מפורסם $\lim_{t\to o}\frac{\sin(t)}{t} = 1$

– זה קורה כי sin של מספר קטן "מתנהג" כמו מספר קטן.

– וגם tan.

• נפתח את ה $\tan(5x) = \frac{\sin(5x)}{\cos(5x)}$ ונקבל: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{1}{\cos(5x)}\cdot\frac{5x}{2x}$

– כאשר $x\to 0$ אז גם $5x\to 0$ ולכן $\frac{\sin(5x)}{5x}\to 1$

* וגם $\frac{2x}{\sin(2x)}\to 1$
* ומכיוון שעבור מספר מאוד קטן נקבל ש-cos מתנהג כמו המספר 1, מתקיים גם $\frac{1}{\cos(5x)}\to 1$
* ולכן:

$$\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{\sin(5x)}{5x}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{2x}{\sin(2x)}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{1}{\cos(5x)}}^{\to 1}\cdot\frac{5\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{5}{2}$$

2. ג. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+7\cdot\sin(x)}{3+x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

2. ג. פתרון:

• מכיוון ש- $\lim_{x\to 0}\frac{3+7\cdot\sin(x)}{3+x} = 1$

• וגם נשתמש בגבול ידוע: $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \xrightarrow[\pm\infty]{} e$

– שאפשר גם לכתוב בצורה: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e$

- לכן:

$$\left(\frac{3+7\cdot\sin(x)}{3+x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}=\left(\frac{(3+x)+7\cdot\sin(x)-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

$$=\left(1+\frac{7\cdot\sin(x)-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

- נסמן $y=\frac{7\cdot\sin(x)-x}{3+x}$ ונקבל:

$$\left((1+y)^{y}\right)^{\frac{y}{\sin(x)}}$$

  – מכיוון ש- $y\to 0$, מתקיים:

$$\left((1+y)^{y}\right)^{\frac{y}{\sin(x)}}\to(e)^{\frac{y}{\sin(x)}}$$

- נבחן את הביטוי $\frac{y}{\sin(x)}$:

$$\begin{aligned}\frac{y}{\sin(x)}&=\frac{7\cdot\sin(x)-x}{3+x}\cdot\frac{1}{\sin(x)}\\&=\frac{\sin(x)\left(7-\frac{x}{\sin(x)}\right)}{3+x}\cdot\frac{1}{\sin(x)}\end{aligned}$$

  – נשתמש בגבול המפורסם $\lim_{t\to o}\frac{\sin(t)}{t}=1$ ונקבל:

$$\frac{\sin(x)\left(7-\frac{x}{\sin(x)}\right)}{3+x}\cdot\frac{1}{\sin(x)}=\frac{7-\frac{x}{\sin(x)}}{3+x}$$

  – ולכן:

$$\frac{7-\frac{x}{\sin(x)}}{3+x}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{7-1}{3}=2$$

- לכן, נקבל שעבור $x\to 0$ מתקיים$\frac{y}{\sin(x)}\to 2$ ולכן:

$$(e)^{\frac{y}{\sin(x)}}\to e^{2}$$

- לסיכום: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+7\cdot\sin(x)}{3+x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}=e^2$

2. ד. $\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(x^2+4x+2\right)}{ln(x^{10}+x^3+x)}$

2. ד. פתרון:

- נבחן את הביטוי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(x^2+4x+2\right)}{ln\left(x^{10}+x^3+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{ln\left(x^{10}\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)\right)}$$

– לפי חוקי ln נקבל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{ln\left(x^{10}\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)\right)}&=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot ln\left(x\right)+ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{10\cdot ln\left(x\right)+ln\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(x\right)\left(2+\frac{ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{ln(x)}\right)}{ln\left(x\right)\left(10+\frac{ln\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)}{ln(x)}\right)}\end{aligned}$$

– כאשר $x\to\infty$ מתקיים $\frac{ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{ln(x)}\to 0$ בגלל חסומה $\left(\frac{1}{ln(x)}\right)$ כפול שואפת לאפס $ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

* וגם מתקיים $\frac{ln\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)}{ln(x)}\to 0$ ולכן:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{ln\left(x\right)}\left(2+\overbrace{\frac{ln\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{ln\left(x\right)}}^{\to 0}\right)}{\cancel{ln\left(x\right)}\left(10+\underbrace{\frac{ln\left(1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)}{ln\left(x\right)}}_{\to 0}\right)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

נושא שלישי - משפט היינה

משפט 3. משפט היינה

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $x=a$.

$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$ אם ורק אם **לכל** סדרה $a\neq x_n\to a$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=L$

הערה 4. אם נצטרך להוכיח גבול בעזרת היינה צריך לקחת סדרה שרירותית.
ואם נרצה לשלול גבול בעזרת היינה מספיק להביא דוגמה אחת לסדרה של מקיימת את התנאי.

תרגיל 5. הראו כי $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n^4}{n^4+1}\right)=\sin(1)$, $n\in\mathbb{N}$
פתרון:

- נגדיר סדרה $a_n=\frac{n^4}{n^4+1}$
  - כאשר $n\to\infty$ הגבול קיים ושווה ל-1.
  - הסדרה הזו לעולם לא שווה ל-1 כי המונה והמכנה שלה לעולם לא יהיו שווים.
- נגדיר $f(x)=\sin(x)$
  - זו פונקציה אלמנטרית, מוגדרת בכל $\mathbb{R}$, ולכן הגבול של 1 $\lim_{x\to1}\sin(x)=1$
- לכן לפי משפט היינה, לכל $1\neq x_n\to1$ מתקיים ש:
  - $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to1}f(x)=\sin(1)$
    - * בפרט זה נכון עבור הסדרה a_n שהגדרנו
      - · ולכן $\lim_{n\to\infty}\sin(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n^4}{n^4+1}\right)=\sin(1)$

תרגיל 6. הראו בעזרת משפט היינה כי $\lim_{x\to\infty}\sin(x-[x])$ לא קיים.
פתרון:

- נצטרך להראות שקיימת סדרה שלא מקיימת את התנאי של משפט היינה.
  - נעשה זאת על ידי שתי סדרות שכל אחת מתכנסת לגבול אחר:
  - $x_n=n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$
  - $y_n=n+\frac{\pi}{6}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$
    - * נסתכל על הערך של $\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\sin(x_n-[x_n])$ ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n-[x_n])=\lim_{n\to\infty}\sin(0)=0$$

    - * נסתכל על הערך של $\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\sin(y_n-[y_n])$ ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n-[y_n])=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

    - * כלומר, מצאנו שעבור שתי סדרות שונות מתקבלים ערכים שונים של הגבול.
      - · לכן לא מתקיים התנאי של משפט היינה.
      - · משפט היינה הוא "אם ורק אם" ולכן לפונקציה $\sin(x-[x])$ אין גבול.

תרגיל 7.
נתון ש $\lim_{x\to b} f(x) = L$
יהי $a \neq 0$
צ"ל: $\lim_{x\to 0} f(ax+b) = L$
פתרון:

- צריך לקחת סדרה כללית ששואפת ל-0 בלי להיות שווה ל-0:
- תהי x_n סדרה כך ש $x_n \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ וגם $x_n \neq 0$
- נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} f(a\cdot x_n + b) = L$:
  - נסמן $z_n = a\cdot x_n + b$
    - * מכיוון ש $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, לפי משפט חשבון גבולות מתקיים:
      1. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
      2. וגם $z_n \neq b$ כי $a, x_n \neq 0$
  - על פי הנתון, $\lim_{x\to b} f(x) = L$.
    - * לכן, לפי משפט היינה לכל סדרה y_n, המקיימת $b \neq y_n \to b$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = L$
      - ובפרט עבור הסדרה z_n שהגדרנו (והראינו ש $b \neq z_n \to b$) מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$.
  - כלומר הראינו שלכל $0 \neq x_n \to 0$ מתקיים ש- $b \neq z_n \to b$ ולכן $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$
    - * נציב בחזרה את $z_n = a\cdot x_n + b$ ונקבל שלכל סדרה $x_n \to 0$ ו- $x_n \neq 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} (a\cdot x_n + b) = L$
      - לכן לפי משפט היינה מתקיים $\lim_{x\to 0} f(a\cdot x + b) = L$

טענה 8.

- תהי $f(x)$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x = 0$.
- נתון:
  - לכל סדרה x_n כך ש $x_n \in \mathbb{Q}$ (מכילה רק מספרים רציונליים), $a \neq x_n \to a$
    ולכל סדרה y_n כך ש $y_n \notin \mathbb{Q}$ (מכילה רק מספרים אי-רציונליים) , $a \neq y_n \to a$
    - * מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = L$

צ"ל: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

הוכחה. להוכיח לבד.

- **רעיון ההוכחה (במילים שלי):**
  - ניקח $a \neq z_n \to a$.
  - יש שלוש אפשרויות לסדרה הזו z_n:
    1. סדרה עם אינסוף איברים רציונליים ומספר סופי של איברים אי-רציונליים.
    2. סדרה עם אינסוף איברים אי-רציונליים ומספר סופי של אברים רציונליים.
    3. סדרה עם אינסוף איברים רציונליים ואינסוף איברים אי-רציונליים.

* לכל מקרה, החל ממקום מסוים, מתקיים:

1. או שהסדרה z_n שואפת ל-a כי החל ממקום מסוים כל איבריה רציונליים ושואפים ל-a.
2. או שהסדרה z_n שואפת ל-a כי החל ממקום מסוים כל איבריה אי-רציונליים ושואפים ל-a.
3. או שהחל ממקום מסוים כל האיברים שלה מתחלקים לשתי תתי-סדרות (x_n הרציונלית ו-y_n האי-רציונלית) שכל אחת שואפת ל-a.

(א) כלומר, החל ממקום מסוים כל איברי z_n נמצאים ב-ε-סביבה של a ולכן z_n גם היא מתכנסת ל-a.

i. יש לציין שמכיוון ש-$a \neq z_n$ מתקיים גם ש-$a \neq x_n$ וגם $a \neq y_n$ כי הן תתי סדרות של z_n (האיברים שלהן נלקחו מתוך z_n).

– כלומר, לכל $a \neq z_n \to a$ מתקיים ש $\lim_{n\to\infty} f\left(z_n\right) = L$

– לכן לפי משפט היינה, $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = L$

■

תרגיל 9. נכון או לא נכון:

1. תהי $a_n \neq 0$ כך ש $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 1$

(א) אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n}$

• **פתרון:** הטענה נכונה.

– נוכיח ש- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$:

* נבחן את הנתון: $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 1$

· לכן החל ממקום מסוים $1 - \frac{1}{2} < n \cdot a_n < 1 + \frac{1}{2}$

$$\overbrace{\frac{1}{2\cdot n}}^{\to 0} < a_n < 1\overbrace{\frac{1}{2n}}^{\to 0} \ \backslash n$$

· ולכן לפי משפט הסנדוויץ' מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

– על פי הנתון $a_n \neq 0$

* נשתמש בגבול הידוע: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

– לפי משפט היינה, לכל סדרה $0 \neq a_n \to 0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(a_n\right)}{a_n} = 1$$

– ובפרט עבור ה-a_n הנתונה.

2. תהי $f\left(x\right) > 0$ כל ש $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = L$

(א) אזי קיים גם הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$

• **פתרון:** הטענה לא נכונה.

– מהתבוננות בביטוי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ ניתן לראות שרק אם $L\neq 0$ אז הגבול קיים ושווה ל-1.

* לכן הטענה לא נכונה עבור $L=0$.

– נביא דוגמא נגדית: $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\cos(\pi\cdot x)+2}{|x|} & , \quad x\neq 0\\ 10 & , \quad x=0\end{cases}$

* הפונקציה הזו תמיד חיובית.

· והיא מקיימת $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$.

* נסמן $g\left(x\right)=\frac{f(x+1)}{f(x)}$

$$g\left(x\right)=\frac{f\left(x+1\right)}{f\left(x\right)}$$

$$\frac{f\left(x+1\right)}{f\left(x\right)}=\frac{\cos\left(\pi x+\pi\right)+2}{x+1}\cdot\frac{x}{\cos\left(\pi\cdot x\right)+2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\cos\left(\pi x+\pi\right)+2}{x+1}\cdot\frac{x}{\cos\left(\pi\cdot x\right)+2} &= \frac{x}{x+1}\cdot\frac{-\cos\left(\pi x\right)+2}{\cos\left(\pi\cdot x\right)+2}\\ &= \frac{x}{x+1}\cdot\frac{2-\cos\left(\pi x\right)}{2+\cos\left(\pi\cdot x\right)}\end{aligned}$$

* ולכן:

$$g\left(x\right)=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{2-\cos\left(\pi x\right)}{2+\cos\left(\pi\cdot x\right)}$$

* תהי $x_n=n\to\infty$

· אזי $g\left(x_n\right)=g\left(n\right)$. כלומר,

$$g\left(x_n\right)=g\left(n\right)=\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1} & n=2k\\ \frac{3}{1}\cdot\frac{n}{n+1} & n=2k+1\end{cases}$$

i. מכיוון ש- $\frac{1}{3}\xrightarrow[k\to\infty]{} g\left(x_{2k}\right)$ וגם $3 \xrightarrow[k\to\infty]{} g\left(x_{2k+1}\right)$

א'. יוצא של- $g\left(x_n\right)$ לא קיים גבול.

ב'. הראינו שקיימת סדרה x_n כך של-$g\left(x_n\right)$ לא קיים גבול,

ג'. לכן לפי משפט היינה אפשר לומר שכאשר $x\to\infty$ גם ל-$g\left(x\right)$ לא קיים גבול.

נושא רביעי - גבול אינסופי של פונקציה:

תרגיל 10. הוכיחו לפי הגדרה ש $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3-x^2}=-\infty$

פתרון:

- ננסח - **צ"ל:** לכל $M<0$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $0<|x-0|<\delta$ אז מתקיים $f(x)<M$
- יהי $0>M\in\mathbb{R}$
  - נוכיח שקיימת δ עבורה אם $0<|x|<\delta$ יתקיים $\frac{1}{x^3-x^2}<M$:
    * נבחן את הביטוי $\frac{1}{x^3-x^2}$

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{1}{|x|^2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

· מכיוון ש-$x\to 0$ הביטוי במנה $x-1$ יהיה שלילי.

· נחסום את הביטוי $\frac{1}{x-1}$ מלמעלה בכך שנדרוש $\delta\leq\frac{1}{2}$:

· אם $|x|<\delta$ אז מתקיים $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ולכן :

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \quad \backslash -1$$

$$-1\frac{1}{2}<x-1<-\frac{1}{2}$$

· נקבל ש :

$$-2<\frac{1}{x-1}<-\frac{2}{3}$$

· כלומר, $\frac{1}{x-1}<-\frac{2}{3}$

* כעת מתקיים $\frac{1}{|x|^2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)<\frac{1}{|x|^2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$
* כאמור אנחנו מניחים ש $|x|<\delta$

· ולכן $\frac{1}{|x|^2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)<\frac{1}{\delta^2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

* ועכשיו אם $\delta^2=-\frac{2}{3M}$ נקבל ש $\frac{1}{\delta^2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)<M$ (חשוב לזכור ש- $M<0$)

– כלומר, לכל $M<0$קיימת $\delta_1=min\left\{\frac{1}{2},\sqrt{-\frac{2}{3\cdot M}}\right\}$, כך שאם $|x|<\delta_1$ אז מתקיים $f(x)<M$

* הראינו שלפי ההגדרה מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3-x^2}=-\infty$.