# אינפי 1מ' (104031) | תרגול 13 - יוליה

שם: איל שטיין

December 5, 2022

## נושאי השיעור: חזקות ממשיות, הקדמה לפונקציות

**נושא ראשון - חזקות ממשיות:**

טענה 1. תהי סדרה כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

הוכחה.

- נחלק לשני מקרים:

1. $a_n \in \mathbb{N}$:

   - נוכיח לפי הגדרה:
     - יהי $\varepsilon > 0$.
     - נסמן $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
       - לפי ההגדרה של $e$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} b_n = e$.
         - לכן קיים $N_1$ כך שלכל $n > N_1$ יתקיים $|b_n - e| < \varepsilon$
     - נתון $a_n \in \mathbb{N}$.
     - נתון ש$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,
       - לכן קיים $K_2$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $n > K_2$ יתקיים $a_n > N_1$
         - לכן לכל $n > K$ מתקיים $\left|\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} - e\right| < \varepsilon$

2. מקרה שני - $a_n$ סדרה כללית ששואפת לאינסוף:

   - מכיוון ש-$a_n$ שואפת לאינסוף, ניתן להניח שהחל ממקום מסוים כל $a_n > 1$
     - לכן, החל ממקו מסוים $[a_n] \in \mathbb{N}$.
       - נזכיר את הכלל של עיגול למטה: $[a_n] \le a_n < [a_n] + 1$
     - נבחן את הביטוי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$:

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

* נפצל את אי השוויון ונתמקד בחלק הימני שלו:

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} \cdot \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)$$

· כאשר $n \to \infty$ מתקיים $\overbrace{\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]}}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} e} \cdot \overbrace{\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \to e$

* נפצל שוב את אי השוויון ונתמקד בחלק השמאלי שלו:

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

· באותו אופן, $\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

– לפי משפט הסנדוויץ':

$$e \leftarrow_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

* ולכן מתקיים ש: $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$.

■

טענה 2. תהי $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$.

הוכחה.

- נסמן $b_n = -a_n$
- לפי משפט חשבון גבולות אינסופיים, מתקיים ש-$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
- נבחן את הביטוי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$:

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1-\frac{1}{b_n}\right)^{-b_n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n-1}{b_n}\right)^{-b_n}$$

$$= \left(\frac{b_n}{b_n-1}\right)^{b_n} = \left(\frac{b_n-1+1}{b_n-1}\right)^{b_n} = \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)$$

- כלומר, קיבלנו ש $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{b_{n-1}}\right)^{b_n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{b_{n-1}}\right)$

$$\overbrace{\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1}}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} e} \cdot \overbrace{\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot e = e$$

- ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

■

**טענה 3.** תהי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. יהי קבוע $x \in \mathbb{R}$.
אזי $\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$

**הוכחה.**

- נניח ש-$x \neq 0$.
- ניתן לכתוב את הביטוי $\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n}$ בצורה הזאת:

$$\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{a_n}{x}}\right)^{a_n}$$

- נסמן $b_n = \frac{a_n}{x}$, כלומר $b_n$ מתכנסת במובן הרחב (או ל$\infty$ או ל$-\infty$).
- נציב $b_n$ בביטוי ונקבל:

$$\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\overbrace{\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} e}\right)^x$$

- מכיוון שהחלק שבתוך הסוגרים שואף ל-$e$, מתקיים ש $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$

■

**טענה 4.** אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ ו-$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.
(לא נוכיח עדיין)

**נושא שני - הקדמה לפונקציות:**

**הגדרה 5. פונקציה.**

- יהיו $A,B$ קבוצות לא ריקות (בקורס הזה יהיה מדובר בתת קבוצות של $\mathbb{R}$)
- נגדיר התאמה $f:A\to B$.
- $f$ תיקרא "פונקציה" אם:

1. **לכל** $a\in A$ קיים $b\in B$ **יחיד** כך ש-$f(a)=b$.

**דוגמה 6.** $f(x)=\pm\sqrt{x}$ כאשר $f:[0,\infty)$

- זו לא פונקציה כי לכל $x>0$ יש שתי תשובות.

**הגדרה 7.** תזכורת - **חד חד ערכית**

- אם $f(a_1)=f(a_2)$ אז $a_1=a_2$
- או הגדרה שקולה: אם $a_1\neq a_1$ אז $f(a_1)\neq f(a_2)$.

**הגדרה 8.** תזכורת - **על**

- לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=b$.

**תרגיל 9.** הביאו דוגמא לפונקציה $f:[0,1]\to[0,1]$ כך ש-$f$ חח"ע אבל לא "על".
**פתרון:**

1. $f(x)=\frac{x}{2}$ זו פונקציה שמוגדרת לכל $0\leq x\leq 1$ כי היא מחזירה ערכים $f(x)$ שגם הם מקיימים $0\leq f(x)\leq\frac{1}{2}<1$
   (א) היא מקיימת שאם $x_1\neq x_2$ אז $\frac{x_1}{2}\neq\frac{x_2}{2}$ ולכן $f(x_1)\neq f(x_2)$
2. $f(x)=\sin(x)$ בקטע $[0,1]$ היא

**תרגיל 10.** הביאו דוגמא לפונקציה $f:[0,1]\to[0,1]$ כך ש-$f$ היא על אבל לא חד חד ערכית.
**פתרון:**

- $f(x)=\sin(\pi\cdot x)$ היא "על" אבל היא לא חד חד ערכית.

**תרגיל 11.** הביאו דוגמא לפונקציה $f:[0,1]\to[0,1]$ כך ש-$f$ היא מונוטונית יורדת אבל לא ממש (למשל פונקציה קבועה)
**פתרון:**

- אפשר להביא פונקציה שקבועה בכל התחום או פונקציה שיורדת ממש ואז נהיית קבועה בשאר הקטע.