אינפי 1מ' (104031) | תרגול 1 - ליטל

שם: איל שטיין

October 25, 2022

נתחיל בחזרה על אינדוקציה, אי שוויונים והבינום של ניוטון. בנוסף, הולכים ללמוד לוגיקה וכתיבה מתמטית.

- **אינדוקציה:**
  - נתונה טענה ואנחנו רוצים להוכיח אותה לכל $n \in \mathbb{N}$
  - אינדוקציה מורכבת משני שלבים:
    * בסיס: מוכיחים את הטענה עבור $n = 1$
    * צעד: מניחים שהטענה נכונה עבור $n = k$ ומוכיחים עבור $n = k + 1$
    * המסקנה היא שהטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$

דוגמה 1. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$$

- נוכיח באינדוקציה על n:
  - 1. בסיס: עבור $n = 1$, $1^2 = 1$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

הראינו שהשוויון מתקיים.

  - 2. צעד: נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1)(2k+1)}{6}$$

ונוכיח עבור $n=k+1$

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1)(2k+3)}{6}$$

אסור לעבוד על שני האגפים. נצטרך להשתמש בנתון עבור $n=k$ ולהראות שאגף אחד שווה לאגף השני.
אנחנו יודעים שעבור $n\in\mathbb{N}$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k\cdot(k+1)(2k+1)}{6}$$

ולכן:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2\underbrace{=}_{induction}\frac{k\cdot(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)}{6}\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]$$

$$=\frac{(k+1)}{6}\left(2k^2+7k+6\right)$$

$$=\frac{(k+1)}{6}(k+2)(2k+3)$$

– לכן הטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$

דוגמה 2. נוכיח את אי שוויון ברנולי:
לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $-1<x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$(1+x)^n\geq 1+n\cdot x$$

- **הוכחה:** נוכיח באינדקוציה על n:
  – נתחיל עם בסיס של המספר הטבעי הקטן ביותר $n=1$:

$$(1+x)^1=1+x$$

$$1+1\cdot x=1+x$$

- לאחר שהראינו שהאי שוויון מתקיים על $n = 1$, נניח שהטענה שווה עבור $n = k$

$$(1+x)^k \geq 1 + k \cdot x$$

ונוכיח עבור $n = k+1$ שמתקיים:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot x$$

- נראה את:

$$(1+x)^k \cdot (1+x) = (1+x)^{k+1}$$

- נשתמש בנתון

$$(1+x)^k \geq 1 + k \cdot x$$

- ומכיוון ש $(1+x) > 0$ יוצא ש

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) &\geq (1 + k \cdot x) \cdot (1+x) \\ &= \left(1 + x + kx + kx^2\right)\end{aligned}$$

- מכיוון ש $kx^2 \geq 0$, אפשר לומר ש

$$\left(1 + x + kx + kx^2\right) \geq 1 + x + kx = 1 + x \cdot (k+1)$$

- סיימנו את ההוכחה.

דוגמה 3. אי שוויון הממוצעים:
עבור

$$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$$

ממוצע חשבוני הוא:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

ממוצע הנדסי הוא:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

ממוצע הרמוני:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

אי שוויון הממוצעים טוען ש: חשבוני $\leq$ הנדסי $\leq$הרמוני

הוכחה במבט על:

- עבור $n = 1$ אין מה להוכיח ולכן נוכיח עבור $n = 2$. נראה שעבור $x, y > 0$ מתקיים: $\frac{x+y}{2} \underbrace{\geq}_{1} \sqrt{x+y} \underbrace{\geq}_{2} \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
- נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים שאי שווין #1 $\Leftarrow$אי שוויון #2
- נוכיח את אי שוויון #1 עבור כל $n = k + 1$ והוא יגרור את אי שוויון #2

הוכחה מפורטת: נעשה בשיעור הבא

ח