הסתברות מ' (00094412) | תרגול 9

שם: איל

March 14, 2024

נושא התרגול: תוחלת ושונות של משתנה מקרי רציף, התפלגות נורמלית ומעריכית

נושא ראשון - תוחלת ושונות של משתנה מקרי רציף

דגש: $E\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{X}\left(x\right)dx$, התוחלת היא מספר.

שאלה 1 - תרגיל טכני על תוחלת ושונות

יהא X משתנה מקרי רציף עם פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_{X}\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{2} & 0\leq x\leq1\\ \frac{x}{3} & 1\leq x\leq2\\ 0 & otherwise \end{cases}$$

חשבו:

א. התוחלת והשונות של X.

ב. התוחלת של e^{X}.

1. א. פיתרון:

- נחשב לפי הגדרה:

$$E\left[X\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{X}\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{2}xdx+\int\limits_{1}^{2}\frac{x}{3}xdx=\frac{37}{36}$$

- נחשב את השונות:

$$Var\left(X\right)=E\left[X^{2}\right]-\left(E\left[X\right]\right)^{2}$$

– נחשב את $E\left[X^2\right]$:

$$E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X\left(x\right)dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx+\int_1^2\frac{x}{3}x^2dx=\frac{17}{12}$$

1. ב. פיתרון:

- התוחלת של e^x היא תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי.
- נחשב לפי הגדרה, כאשר הפונקציה $f_X\left(x\right)$ תקבע לנו את תחומי האינטגרציה:

$$E\left[e^x\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^x\cdot f_X\left(x\right)dx=\int_0^1\frac{1}{2}e^xdx+\int_1^2\frac{x}{3}e^xdx$$

נושא שני - התפלגות נורמלית והתפלגות מעריכית:

דגש: מתקיים $\Phi\left(-a\right)=1-\Phi\left(a\right)$.

נרמול: ניקח משתנה מקרי מתפלג נורמלי כללי $X\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma\right)$, וננרמל על ידי $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}\left(0,1\right)$ כדי לקבל מ"מ מפולג נורמלי סטדנרטי.

התפלגות מעריכית:

קצת דומה להתפלגות גאומטרית, שמחכים עד שמאורע יקרה, רק באופן רציף.

מקיים את תכונת חוסר הזיכרון.

שאלה 2

סיוון ובעלה דורון הם זוג צעיר.

הם שכרו את שירותיו של קבלן כדי שיבנה את ביתם הראשון.

משך בניית הדירה מתפלג אקספוננציאלית עם תוחלת של 10 חודשים.

א. מה ההסתברות שדורון וסיוון ימתינו יותר מ-10 חודשים עד שבניית ביתם תושלם?

ב. מה ההסתברות שדורון וסיוון ימתינו בין 10 ל- 20 חודשים עד שבניית ביתם תושלם?

ג. אם ידוע שעברו 5 חודשים מאז תחילת הבנייה והיא טרם הסתיימה, מה ההסתברות שעדיין נשאר להם לחכות לפחות 10 חודשים עד שבניית ביתם תושלם?

ד. אם ידוע שהבנייה ארכה פחות מ-15 חודשים, מה ההסתברות שהיא ארכה יותר מ-5 חודשים?

2. א. פיתרון: מה ההסתברות שדורון וסיוון ימתינו יותר מ-10 חודשים עד שבניית ביתם תושלם?

- נסמן ב-T את משך בניית הדירה.
- נתון כי $T\sim Exp\left(\lambda\right)$ ומתקיים $E\left[T\right]=10$ (הגיוני שמשתנה כזה יהיה מפולג מעריכית כי מחכים שמאורע יקרה)
- נמצא את λ בעזרת התוחלת:
  – אנחנו יודעים ש$E\left[T\right]=\frac{1}{\lambda}$ ולכן $\lambda=\frac{1}{10}$

- **צ"ל:** $P\left(T>10\right)$
- נחשב לפי הגדרה:

$$P\left(T>10\right)=\int\limits_{10}^{\infty}f_{T}\left(t\right)dt=1-F_{T}\left(10\right)$$

$$=1-P\left(T\leq10\right)$$

$$=1-\left(1-e^{-\frac{1}{10}\cdot10}\right)$$

$$=e^{-1}$$

פיתרון 2. ב. מה ההסתברות שדורון וסיוון ימתינו בין 10 ל- 20 חודשים עד שבניית ביתם תושלם?

- **צ"ל:** $P\left(10\leq T\leq20\right)$
- ראינו שמתקיים:

$$P\left(10\leq T\leq20\right)=F_{T}\left(20\right)-F_{T}\left(10\right)$$

  - ולכן נקבל:

$$=1-e^{-\frac{1}{10}\cdot20}-\left(1-e^{-\frac{1}{10}\cdot10}\right)$$

$$=e^{-1}-e^{-2}$$

פיתרון 2. ג. אם ידוע שעברו 5 חודשים מאז תחילת הבנייה והיא טרם הסתיימה, מה ההסתברות שעדיין נשאר להם לחכות לפחות 10 חודשים עד שבניית ביתם תושלם?

- **צ"ל:** $P\left(T>10+5\mid T>5\right)$
- נשתמש בתכונת חוסר הזיכרון כדי לקבל $P\left(T>10\right)$.
  - חישבנו את ההסתברות הזו בסעיף א'.

פיתרון 2. ד. אם ידוע שהבנייה ארכה פחות מ-15 חודשים, מה ההסתברות שהיא ארכה יותר מ-5 חודשים?

- **צ"ל:** $P\left(T>5\mid T<15\right)$
- נשתמש בנוסחת בייס כדי לשנות את ההתנייה:

$$P\left(T>5\mid T<15\right)=\frac{P\left(T<15\mid T>5\right)\cdot P\left(T>5\right)}{P\left(T<15\right)}$$

  - כמו בסעיף א', נחשב: $P\left(T>5\right)=e^{-\frac{1}{2}}$ וגם $P\left(T<15\right)=1-e^{\frac{1}{10}\cdot 15}$
  - על מנת לחשב את $P\left(T<15\mid T>5\right)$, נשתמש במשלים:

$$P\left(T<15\mid T>5\right)=1-P\left(T\geq 15\mid T>5\right)$$

$$=1-P\left(T\geq 15\mid T>5\right)$$

    * את הביטוי $P\left(T\geq 15\mid T>5\right)$ חישבנו כבר וקיבלנו $P\left(T>10\right)$
  - נציב את כל הביטויים הללו ונקבל את התשובה.

שאלה 3:

ליוסי יש אוסף גדול מאוד של כדורים.
קוטר כדור הנבחר באקראי מאוסף הכדורים של יוסי מפולג בקירוב נורמלית עם תוחלת של 20 ס"מ.
ידוע גם כי לרבע מהכדורים יש קוטר העולה על 20.1 ס"מ.

א. חשבו את סטיית התקן של ההתפלגות של קוטר הכדור.
ב. חשבו את אחוז הכדורים שקוטרם גדול או קטן מהתוחלת בלא יותר מ-0.2 ס"מ.
ג. חשבו את הקוטר, אשר ל-$\frac{2}{3}$ מהכדורים קוטר הגדול ממנו.
הערה: כאשר נדרשים לחשב את הביטוי ל- $\Phi\left(\cdot\right)$ או את הביטוי ההופכי ניתן להשתמש בטבלה/מחשבון/אינטרנט.

פיתרון 3. א.

- נסמן ב-X את קוטר הכדור שנבחר.
  - נתון שמתקיים $X\sim\mathcal{N}\left(20,\sigma^2\right)$.
- <u>הערה:</u> יש בעיה פיזיקלית עם השאלה הזו כי אם לא היו אומרים לנו ש-X מתפלג נורמלי, אז היינו חושבים ש-X חייב להיות אי שלילי.
  - לעומת זאת, השאלה דורשת $-\infty\leq X\leq\infty$.
- **צ"ל:** $Var\left(X\right)$, כלומר את σ.
- לפי הנתון מתקיים $P\left(X>20.1\right)=\frac{1}{4}$.

– בשלב הראשון ננרמל את ההסתברות הזו:

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{20.1-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{4}$$

* נתון $\mu=20$ ולכן:

$$=P\left(\overbrace{\frac{X-20}{\sigma}}^{\sim\mathcal{N}(0,1)}>\frac{20.1-20}{\sigma}\right)$$

$$\frac{1}{4}=1-P\left(\frac{X-20}{\sigma}\leq\frac{20.1-20}{\sigma}\right)$$

* נעביר אגפים ונקבל:

$$P\left(\frac{X-20}{\sigma}\leq\frac{0.1}{\sigma}\right)=\frac{3}{4}$$

· מתקיים:

$$=\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow\sigma=\frac{0.1}{\Phi^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow\sigma=0.148$$

· בפועל בשביל לחשב את הביטוי הזה צריך לחשב את $\Phi^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$. מחפשים בטבלה ומוצאים את התשובה.

פיתרון 3. ב. חשבו את אחוז הכדורים שקוטרם גדול או קטן מהתוחלת בלא יותר מ-0.2 ס"מ.

- התוחלת של X היא $\mu=20$.
- **צ"ל:** $P\left(19.2\leq X\leq20.2\right)$.
- ננרמל כדי לקבל:

$$P\left(19.2\leq X\leq20.2\right)=P\left(\frac{19.2-\mu}{\sigma}\leq\overbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}^{\sim\mathcal{N}(0,1)}\leq\frac{20.2-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{20.2-20}{0.148}\right) - \Phi\left(\frac{19.2-20}{0.148}\right)$$

$$= \Phi(1.35) - \Phi(-1.35)$$

– אנחנו לא רוצים להשאיר תשובה עם Φ שלילי ולכן נשתמש בזהות על מנת לפשט את הביטוי

$$= \Phi(1.35) - (1 - \Phi(-1.35))$$

$$= 2 \cdot \Phi(1.35) - 1$$

3. ג. פיתרון: חשבו את הקוטר, אשר ל-$\frac{2}{3}$ מהכדורים קוטר הגדול ממנו.

- **צ"ל:** $P(X > m) = \frac{2}{3}$, מחפשים את m
- נבצע משלים:

$$P(X > m) = 1 - P(X \le m) = \frac{2}{3}$$

$$P(X \le m) = \frac{1}{3}$$

– ננרמל:

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{m-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{X-20}{\sigma} \le \frac{m-20}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{m-20}{\sigma}\right) = \frac{1}{3}$$

* נפעיל Φ^{-1}, נעביר אגפים ונקבל:

$$m = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \sigma + 20$$

$$= 19.936$$

שאלה 4:

ארגון מסויים מקבל אליו בעלי IQ הנמצאים בשני האחוזים העליונים של האוכלוסיה. מבחני IQ בנויים כך שציונם מתפלג $\mathcal{N}\left(100, 15^2\right)$.

א. מהו הציון שמעליו ניתן להתקבל לארגון?

ב. מה ההסתברות שלפחות שני אנשים מתוך 30 יתקבלו לארגון? (נניח שיש חוסר תלות בין המועמדים השונים)

ג. מהי סטיית התקן של מ"מ Y שמתאר את מספר המתקבלים בקבוצה בת 30 איש? (נניח שיש חוסר תלות בין המועמדים השונים)

פיתרון 4. א. מהו הציון שמעליו ניתן להתקבל לארגון?

- נסמן משתנה מקרי X - ציון IQ.
  - נתון $X \sim \mathcal{N}\left(100, 15^2\right)$.
- נסמן ב-a את הציון שמעליו אפשר להתקבל לארגון.
  - נתון כי $P\left(X > a\right) = 0.02$, כי רק 2% מהאוכולסיה מקבלת ציון מעל a.
    * כלומר $P\left(X \leq a\right) = 0.98$
- ננרמל את $P\left(X > a\right)$:

$$P\left(X > a\right) = P\left(\overbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}^{\sim\mathcal{N}(0,1)} > \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{X-100}{15} > \frac{a-100}{15}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) = 0.98$$

$$\Rightarrow a = 15 \cdot \Phi^{-1}\left(0.98\right) + 100$$

פיתרון 4. ב. מה ההסתברות שלפחות שני אנשים מתוך 30 יתקבלו לארגון? (נניח שיש חוסר תלות בין המועמדים השונים)

- נסמן משתנה מקרי Y - מספר האנשים שהתקבלו מתוך ה-30.
  - רוצים לחשב את $P\left(Y \geq 2\right)$.

– נשים לב ש-Y מתפלג בינומי, כי כל מועמד הוא ניסוי ברנולי ב"ת (התקבל/לא התקבל) שהסיכוי להתקבל הוא 0.02:

$$Y \sim Bin\left(30, \overbrace{0.02}^{chances\ \ to\ \ get\ \ accepted}\right)$$

$$P_Y\left(y\right) = \binom{30}{y} \cdot 0.02^y \cdot 0.98^{30-y}$$

* נשתמש במשלים כדי לקבל:

$$P\left(Y \geq 2\right) = 1 - P\left(Y < 2\right)$$

$$= 1 - P\left(Y = 0 \cap Y = 1\right)$$

· נתון כי המועמדים בלתי תלויים, ולכן:

$$= 1 - P\left(Y = 0\right) - P\left(Y = 1\right)$$

$$= 1 - 0.98^{30} - \binom{30}{1} \cdot 0.02^1 \cdot 0.98^{29}$$

$$= 0.12$$

פיתרון 4. ג. מהי סטיית התקן של מ"מ Y שמתאר את מספר המתקבלים בקבוצה בת 30 איש?

- סטיית התקן של משתנה המתפלג בינומי הוא:

$$Var\left(Y\right) = n \cdot p \cdot q$$

$$\Rightarrow SD\left(Y\right) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

$$\Rightarrow SD\left(Y\right) = \sqrt{30 \cdot 0.02 \cdot 0.98}$$