הסתברות מ' (00094412) | תרגול 11

שם: איל

March 28, 2024

נושא התרגול: התפלגות גאמה, טרנספורמציות חח"ע, טרנספורמציות דו-מימדיות, וקטור מקרי נורמלי

נושא ראשון - התפלגות גאמה:

- עבור $\alpha,\lambda>0$ כאשר $\lambda\in\mathbb{N}$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$, נסמן התפלגות גאמה $X\sim Gamma\left(\alpha,\lambda\right)$.
- הצפיפות שלו היא $f_X\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\lambda^{\alpha}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & x\geq0\\ 0 & else\end{cases}$
- תכונות:

1. כשיש לנו $X_1,X_2,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המפולגים מעריכית, כלומר לכל i מתקיים $X_i\sim exp\left(\lambda\right)$.
   - סימון: iid - בלתי תלויים וגם כל אחד מפולג באותו אופן
2. $Gamma\left(1,\lambda\right)=exp\left(\lambda\right)$
3. אם $X_1\sim Gamma\left(\alpha_1,\lambda\right)$ וגם $X_2\sim Gamma\left(\alpha_2,\lambda\right)$ והם בלתי תלויים אז $X_1+X_2\sim Gamma\left(\alpha_2+\alpha_2,\lambda\right)$.
   - זה נכון לכל $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$.
     - האינטואיציה של זה היא:
       - מכיוון ש $Gamma\left(1,\lambda\right)=exp\left(\lambda\right)$, אז אם יש לנו $X_A=X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}\sim iid\ exp\left(\lambda\right)$ ו-$X_B=X_1,X_2,\ldots,X_{n_2}\sim$ $iid\ exp\left(\lambda\right)$ אז:

$$X_A+X_B=\sum_{i=1}^{n_1}X_i+\sum_{i=1}^{n_2}X_i$$

       - כלומר אנחנו סוכמים n_1+n_2 משתנים שכל אחד מתפלג Exp ולכן נקבל $X_A+X_B\sim Gamma\left(n_1+n_2,\lambda\right)$.

שאלה 1 - התפלגות גאמה

- יהיו X,Y משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $X,Y\sim Exp\left(\lambda\right)$.
- יהי $Z=X+Y$

א. הוכיחו כי מתקיים $Z\sim Gamma\left(2,\lambda\right)$.
ב. חשבו תוחלת ושונות של Z.

פיתרון 1. א.

- נמצא את $F_{Z}\left(z\right)$ ונגזור על מנת למצוא את $f_{Z}\left(z\right)$:

$$F_{Z}\left(z\right)=P\left(Z\leq z\right)=P\left(X+Y\leq z\right)$$

– יש שתי דרכים לפתור:

1. או לעשות אינטגרל כפול
2. או להתנות על Y ולהשתמש בהסתברות השלמה.

– נפתור בדרך השנייה, תוך שימוש בכלל ההסברות השלמה במקרה הרציף:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}P\left(X+Y\leq z\mid Y=y\right)\cdot f_{Y}\left(y\right)\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}P\left(X+y\leq z\mid Y=y\right)\cdot f_{Y}\left(y\right)\ dy$$

* נשים לב ש-y הוא מספר עכשיו ומכיוון ש-X,Y בלתי תלויים, אפשר למחוק את Y מההתניה:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}P\left(X+y\leq z\right)\cdot f_{Y}\left(y\right)\ dy$$

* מכיוון ש $Y\sim exp\left(\lambda\right)$, הוא מקבל ערכים בין $[0,\infty]$ ולכן:

$$=\int_{0}^{\infty}\overbrace{P\left(X\leq z-y\right)}^{F_{X}\left(z-y\right)}\cdot\lambda e^{-\lambda y}\ dy$$

* בנוסף נתון כי $X\sim Exp\left(\lambda\right)$ ולכן $F_{X}\left(x\right)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq0\\ 0 & x<0\end{cases}$

· עלינו לדרוש $z-y>0$, כלומר $z>y$.

- נשנה את גבולות האינטגרל בהתאם:

$$=\int_{0}^{z}\left(1-e^{-\lambda(z-y)}\right)\cdot\lambda e^{-\lambda y}\ dy$$

$$=\dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$=1-e^{-\lambda z}-\lambda z e^{-\lambda y}$$

- נגזור כדי לקבל את $f_Z(z)$:

$$f_Z(z)=\begin{cases}\lambda^2 z\cdot e^{-\lambda z} & z\geq 0\\ 0 & else\end{cases}$$

- ולכן $Z\sim Gamma(2,\lambda)$

פיתרון 1. ב.

- נציב בנוסחה כדי למצוא את התוחלת והשונות:
  - מלינאריות התוחלת מתקיים:

$$E[Z]=\frac{2}{\lambda}=E[X]+E[Y]=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}$$

  - מהנתון ש-X,Y בלתי תלויים מתקיים:

$$Var(Z)=\frac{2}{\lambda^2}=Var(X)+Var(Y)=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}$$

נושא שני - טרנספורמציות חח"ע:

- עד עכשיו, אם היה לנו משתנה מקרי $g(X)=Y=3\cdot X^2$ אז היינו מוצאים את $F_Y(y)$ וגוזרים.
  - היום נלמד דרך נוספת שלא דורשת למצוא את $F_Y(y)$ ולגזור אותה אלא למצוא את $f_Y(y)$ ישירות בעזרת $g(X)$.
- יהי משתנה מקרי רציף Xהמקבל ערכים ב-$[a,b]$.
- תהי פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה וחח"ע (כלומר מונוטונית ממש) ב-$[a,b]$.

- אזי מתקיים:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| & y \ is \ between \ g(a) \ \ and \ g(b) \\ 0 & else \end{cases}$$

שאלה 2:

- יהי $X\sim Exp(1)$.
- עבור משתנה מקרי $Y=\sqrt{X}$ מצאו את $f_Y(y)$.

פיתרון 2.

- במבחן, לפעמים מומלץ לחשב (ואז לגזור):

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\sqrt{X}\le y\right)=P\left(X\le y^2\right)=F_X\left(y^2\right)$$

- נתון $X\sim Exp(1)$ ולכן:
  - $x\in[0,\infty]$.
  - הצפיפות של X היא $f_X(x)=e^{-x}$
- הפונקציה $g(x)=\sqrt{x}$ היא חח"ע וגזירה בקטע $[0,\infty]$.
  - ההופכית שלה, g^{-1} היא $g^{-1}(y)=y^2$
- לפי הנוסחה, מתקיים:

$$f_Y(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$$

$$=f_X\left(y^2\right)\cdot|2y|$$

  - מכיוון ש-$0\le y$ נקבל:

$$=\begin{cases} e^{-y^2}\cdot 2y & 0\le y \\ & else \end{cases}$$

נושא שלישי - טרנספורמציות דו-מימדיות:

- אם יש לנו וקטור מקרי (X,Y) עם צפיפות $f_{X,Y}(x,y)$
- ויש תחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$ שבו $P((X,Y)\in D)\neq 0$.
- נניח שקיימת ל-g טרנספורמציה הופכית ושהנגזרות החלקיות קיימות.
- נגדיר את היעקוביאן, שהיא הדטרמיננטה של מטריצת הנגזרת החלקיות.

שאלה 3:

- יהיו $X\sim Gamma(\alpha_1,\lambda)$ ו-$Y\sim Gamma(\alpha_2,\lambda)$ משתנים מקריים בלתי תלויים.
- נגדיר $U=X+Y$ ונגדיר $V=\frac{X}{X+Y}$.

א. מצאו את הצפיפות המשותפת של U,V.
ב. האם U,V בלתי תלויים.
ג. הראו כי $U\sim Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$, כלומר מצאו את $f_U(u)$.

פיתרון 3. א.

- נסמן:
  - פונקציה $g_1(x,y)=x+y$
  - פונקציה $g_2(x,y)=\frac{x}{x+y}$ד
- לפי הנתון $V=\frac{X}{U}$
  - ולכן $X=V\cdot U$
    * בנוסף, לפי הנתון מתקיים $Y=U-X$ ולכן $Y=U-U\cdot V$
- כלומר קיבלנו:

$$x=h_1(u,v)=u\cdot v$$

$$y=h_1(u,v)=u-u\cdot v$$

- היעקוביאן הוא:

$$det\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v}\\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$$=det\begin{pmatrix}v & u\\ (1-v) & -u\end{pmatrix}$$

$$= -u$$

- מכיוון ש-X,Y בלתי תלויים, מתקיים:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

- נציב בנוסחה ונקבל:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y) \cdot \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

$$= f_{U,V}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot |-u|$$

$$= f_{U,V}(u \cdot v, u - u \cdot v) \cdot |-u|$$

  - נשים לב כי $U \in [0,\infty)$ וכי $V \in [0,1]$ (אם מגדירים אותו להיות 0 ב-$X = Y = 0$).
  - התשובה הסופית יוצאת:

$$= \ldots = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot u^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2) \cdot V^{\alpha_1-1} \cdot (1-v)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1) \cdot \Gamma(\alpha_2)}$$

פיתרון 3. ב.

- נשים לב שבסעיף א' קיבלנו ש-$f_{U,V}(u,v)$ ניתנת לכתיבה כמכפלה של שתי פונקציות, אחת ב-u והשנייה ב-v והתחומים שלהם לא תלויים אחד בשני כי $u \in [0,\infty)$ ו-$v \in [0,1]$.
  - לכן לפי משפט מתרגול קודם נקבל ש-U,V בלתי תלויים.

פיתרון 3. ג.

- לפי אותו משפט מסעיף ב', קיבלנו שהפונקציה $\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot u^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$ היא הצפיפות של U, עד כדי כפל בקבוע.
  - ולכן קיבלנו ש-$f_U(u) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} \cdot u^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$

נושא רביעי - וקטור מקרי נורמלי:

- הסבר על מטריצת Cov:
  - לדוגמה עבור הוקטור $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, מטריצת ה-Cov שנסמן ב-Σ היא:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Cov\left(X,X\right) & Cov\left(X,Y\right) & Cov\left(X,Z\right) \\ Cov\left(Y,X\right) & Cov\left(Y,Y\right) & Cov\left(Y,Z\right) \\ Cov\left(Z,X\right) & Cov\left(Z,Y\right) & Cov\left(Z,Z\right) \end{pmatrix}$$

    * המטריצה הזו סימטרית כי Cov זו תכונה סימטרית.

הערה:

- אם $\underline{X} \sim N\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ וקטור מקרי נורמלי. אז התנאים הבאים שקולים:
  1. Σ אלכסונית.
  2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי תלויים.
  3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ בלתי מתואמים.
- נשים לב שתנאי 3 לא אמור לגרור את תנאי 2 במקרה הרגיל.
  - לדוגמה, ניקח $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ וקטור מקרי גאוסי.
  - במקרה הזה מתקיים:

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Cov\left(X_1, X_2\right) = 0$$

$$Cov\left(X_2, X_3\right) = 0$$

$$Cov\left(X_1, X_3\right) = 0$$

* ולכן:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{X_3}^2 \end{pmatrix}$$

שאלה 4:

- יהיו Z_1, Z_2 משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי תלויים.
- עבור קבוע $-1 < \rho < 1$ נסמן:

$$X = Z_1$$

$$Y = \rho Z_1 + Z_2\sqrt{1-\rho^2}$$

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X, Y, כלומר $f_{X,Y}(x,y)$
ב. מצאו את הקורלציה בין X ו-Y.
ג. הראו שהמשתנה המקרי $X \mid Y$ מפולג נורמלי.

פיתרון 4. א.

- נחשב את $f_{X,Y}(x,y)$ בעזרת טרנספורמציה דו-מימדית:
  - $g_1(z_2, z_2) = z_1$
  - $g_2(z_1, z_2) = \rho \cdot z_1 + z_2 \cdot \sqrt{1-\rho^2}$
  - נמצא את הטרנספורמציות ההפוכות:

$$h_1(x,y) = X$$

$$h_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot Y - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot X$$

  - נמצא את היעקוביאן:

$$J_{X,Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

– כעת נקבל:

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=f_{Z_1,Z_2}\left(h_1\left(x,y\right),h_2\left(x,y\right)\right)\cdot\left|J_{X,Y}\right|$$

* ומכיוון ש-Z_1,Z_2 בלתי תלויים, מתקיים:

$$f_{Z_1,Z_2}\left(z_1,z_2\right)=f_{Z_1}\left(z_1\right)\cdot f_{Z_2}\left(z_2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z_1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z_2)^2}$$

* נציב ונקבל:

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(h_1(x,y))^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(h_2(x,y))^2}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(X)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot Y-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot X\right)^2}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right|$$

* התשובה הסופית יוצאת:

$$=\ldots=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{\left(x+2\rho xy+y^2\right)}{2\sqrt{1-\rho^2}}}$$

• מכיוון ש-(Z_1,Z_2) הוא וקטור מקרי גאוסי, ואפשר לכתוב את הוקטור (X,Y) במכפלה של מטריצה כלשהי ב-(Z_1,Z_2):

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\rho&\sqrt{1-\rho^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\end{pmatrix}$$

– כלומר (X,Y) הוא גם וקטור מקרי גאוסי (לפי תכונה 4 בדפים של התרגול).

פיתרון 4. ב.

• לפי הגדרה:

$$Corr\left(X,Y\right)=\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)}\cdot\sqrt{Var\left(Y\right)}}$$

- נחשב את $Var\left(X\right)$:

$$Var\left(X\right)=1$$

- נחשב את $Var\left(Y\right)$, ומכיוון ש Z_1,Z_2 בלתי תלויים נקבל:

$$Var\left(Y\right)=Var\left(\rho Z_1\right)+Var\left(\sqrt{1-\rho^2}Z_2\right)=\rho^2+1-\rho^2=1$$

- נחשב את $Cov\left(X,Y\right)$:

$$Cov\left(X,Y\right)=E\left[X\cdot Y\right]-\overbrace{E\left[X\right]\cdot E\left[Y\right]}^{=0}$$

  * נציב X ו-Y:

$$=E\left[Z_1\cdot\left(\rho Z_1+\sqrt{1-\rho^2}Z_2\right)\right]$$

$$=\rho\overbrace{E\left[Z_1\right]}^{=Var(Z_1)=1}+\sqrt{1-\rho^2}\cdot E\left[Z_1Z_2\right]$$

    · ומכיוון ש Z_1,Z_2 בלתי תלויים:

$$0=Cov\left(Z_1,Z_2\right)=E\left[Z_1Z_2\right]-\overbrace{E\left[Z_1\right]\cdot E\left[Z_2\right]}^{=0}$$

$$\Rightarrow 0=E\left[Z_1Z_2\right]$$

    · ולכן קיבלנו:

$$Cov\left(X,Y\right)=\rho\overbrace{E\left[Z_1\right]}^{=Var(Z_1)=1}+\sqrt{1-\rho^2}\cdot E\left[Z_1Z_2\right]$$

$$=\rho\cdot 1+\sqrt{1-\rho^2}\cdot 0$$

$$=\rho$$

– כלומר:

$$Corr\left(X,Y\right)=\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)}\cdot\sqrt{Var\left(Y\right)}}=\frac{\rho}{1\cdot1}=\rho$$

• לפי תכונה מספר 3 בדפים של התרגול

פיתרון 4. ג.

• נפתור לפי נוסחת הכפל (או ההגדרה), כלומר:

$$f_{X|Y}\left(x,y\right)=\frac{\overbrace{f_{X,Y}\left(x,y\right)}^{we\ \ found\ \ already}}{f_{Y}\left(y\right)}$$

– נשים לב ש-Y הוא סכום של משתנים גאוסיים בלתי תלויים ומתקיים:

$$Y=\begin{pmatrix}\rho & \sqrt{1-\rho^{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_{1}\\ Z_{2}\end{pmatrix}$$

* כלומר הוא מתקבל על ידי מכפלה של וקטור אקראי גאוסי עם מטריצה.
* לכן Y הוא נורמלי.

– נמצא את הפרמטרים בהם Y מתפלג:

* מכיוון ש-$E\left[Z_{1}\right]=E\left[Z_{2}\right]=0$ נקבל כי $E\left[Y\right]=0$
* ומאחר ש-$Var\left(Y\right)=1$ כפי שמצאנו בסעיף א'

– כלומר $Y\sim N\left(0,1\right)$

* וכך נמצא את $f_{Y}\left(y\right)$.