שם: איל שטיין

March 20, 2024

[

לוגיקה | תרגול 8

שם: איל שטיין

March 20, 2024

נושא השיעור: גדירות ואי גדירות בתחשיב הפסוקים

נושא ראשון - גדירות.

שאלה 1:

עבור $n \in \mathbb{N}^+$, השמה z נקראת n-מגוונת אם קיימים $i, j \leq n$ כך ש $z(p_i) \neq z(p_j)$
לכל $n \in \mathbb{N}^+$ נסמן:

$$K_n = \{z \in Ass \mid z \ is \ an \ n - special \ assignment\}$$

הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}^+$, K_n גדירה.

1. **פיתרון:**

- הערה: כדי להראות גדירות, צריכים לקחת קבוצת פסוקים כלשהי Σ שמתאימה בדיוק לקבוצת ההשמות.
  - מצד שני, ראינו שלא כל קבוצת השמות גדירה (משיקולי עוצמות).
  - מכיוון שפסוק חייב להיות סופי, נקבל שלפעמים יש קבוצות אל גדירות כי נרצה שפסוקים יהיו אינסופיים בשביל שקבוצת ההשמות יהיו גדירות.
  - השאלות במבחן יבחנו מתי אפשר להוסיף איבר לקבוצה בשביל שהיא תהיה גדירה ומתי צריך שהאיבר עצמו יהיה אינסופי ואז הקבוצה לא גדירה.

- ההגדרה בשאלה היא: ב-n האטומים הראשונים יש לפחות שני אטומים שההשמה נותנת להם ערך אמת אחר.
  - <u>הערה:</u> במבחן לא יגידו לנו להוכיח אלא יהיה "הוכח/הפרך".
- יהי $n \in \mathbb{N}^{+}$.
- נראה ש-K_n גדירה על ידי מציאת קבוצת Σ מפורשת ונוכיח ש-$K_n = M\left(\Sigma\right)$.
- אנחנו רוצים שב-n האטומים הראשונים יתקבל "1" לפחות פעם אחת ושיתקבל "0" לפחות פעם אחת. ולכן ניקח את הקבוצה:

$$\Sigma_n = \left\{ \overbrace{\left(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n\right)}^{\text{"1" at least once}} \wedge \overbrace{\left(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg \ldots \vee \neg p_n\right)}^{\text{"0" at least once}} \right\}$$

- נסמן $\alpha_n = \overbrace{\left(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n\right)}^{\text{"1" at least once}} \wedge \overbrace{\left(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg \ldots \vee \neg p_n\right)}^{\text{"0" at least once}}$
- נראה ש-$K_n = M\left(\Sigma_n\right)$:
  - תהא השמה z.
  - אזי:
    * $z \in K_n$ אמ"מ קיימים $i, j \leq n$ כך ש $z\left(p_i\right) \neq z\left(p_j\right)$.
    * וזה קורה אמ"מ קיים $i \leq n$ כך ש $z\left(p_i\right) = 1$ וגם קיים $j \leq n$ כך ש $z\left(p_j\right) 0$
    * וזה קורה אמ"מ $\overline{z}\left(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n\right) = 1$ וגם $\overline{z}\left(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg \ldots \vee \neg p_n\right) = 1$
    * וזה קורה אם ורק אם $\overline{z}\left(\alpha_n\right) = 1$
    * וזה קורה אם ורק אם $z \models \Sigma$
    * וזה קורה אם ורק אם $z \models M\left(\Sigma\right)$.

שאלה 2:

תהיינה $X, Y \subseteq WFF$.
הוכיחו כי $M\left(X \cup Y\right) = M\left(X\right) \cap M\left(Y\right)$.

2. פיתרון.

- תהא z.
- לפי הגדרה, $z \in M\left(X \cup Y\right)$ אם ורק אם $z \models \varphi$ לכל $\varphi \in X$ וגם לכל $\varphi \in Y$.
- מהגדרת סיפוק קבוצה, זה מתקיים אם ורק אם $z \models X$ וגם $z \models Y$.
- מהגדרת קבוצת מודלים זה קורה אם ורק אם $z \in M\left(X\right)$ וגם $z \in M\left(Y\right)$
- מהגדרת חיתוך זה קורה אם ורק אם $z \in M\left(X\right) \cap M\left(Y\right)$.

נושא שני - הוכחת אי גדירות.

תזכורת - משפט הקומפקטיות.

- לכל קבוצת פסוקים Σ:
  - קבוצת פסוקים Σ ספיקה אם ורק אם כל תת קבוצה סופית של Σ ספיקה.
- <u>הערה:</u> הכיוון המעניין הוא הכיוון משמאל לימין.

איך להוכיח אי גדירות:

1. מניחים בשלילה שקבוצה X גדירה.
2. בוחרים את Y (החלק הכי קשה ויצירתי)
3. מראים ש $X \cup Y$ לא ספיקה.
4. מראים ש$X \cup Y$ ספיקה
5. מקבלים סתירה.

שאלה 3:

הוכיחו כי:

$$K = \{z \in Ass \mid \; there\ exists\ a\ single\ i \in \mathbb{N}\ such\ that\ z(p_i) = 0\}$$

אינה גדירה.

3. פיתרון:

- נבחן את ההשמות בקבוצה K:

$$0111111\ldots11\ldots$$

$$1011111\ldots11\ldots$$

$$1101111\ldots11\ldots$$

1. נניח בשלילה ש-K גדירה.
   - אזי תהא X קבוצת פסוקים המגדירה אותה, כלומר:

$$K = M(X)$$

2. נבחר את Y כך שההשמות ב-$M\left(Y\right)$ יהיו דומות לאלו ב-K:

$$Y=\left\{ p_{i}\mid i\in\mathbb{N}\right\}$$

– מתקיים $M\left(Y\right)=z_{1}$.

* נשים לב כי $z_{1}\notin K$ אבל z_{1} דומה להשמות ב-K (כל השמה שונה ממנה רק בערך של אטום יחיד).

3. נראה ש-$X\cup Y$ לא ספיקה:

– נשתמש בטענה מתרגיל 2, כדי להראות $M\left(X\cup Y\right)=\emptyset$ ואז לא תהיה אף השמה שמספקת את $X\cup Y$:

$$M\left(X\cup Y\right)=M\left(X\right)\cap M\left(Y\right)$$

$$=\overbrace{M\left(X\right)}^{=K}\cap\overbrace{M\left(Y\right)}^{=\left\{ z_{1}\right\} }$$

$$=\emptyset$$

4. נראה ש-$X\cup Y$ ספיקה בעזרת משפט הקומפקטיות:

– תהא קבוצה $D\subseteq X\cup Y$ סופית.

* נסמן $D_{X}=D\cap X$ ו-$D_{Y}=D\cap Y$.

– נמצא השמה שמספקת את D:

* הקבוצה D_{Y} היא סופית ולכן היא קבוצה סופית של אטומים. נסמן:

$$D_{Y}=\left\{ p_{i_{1}},p_{i_{2}},\ldots,p_{i_{k}}\right\}$$

* מכיוון ש-D_{Y} סופית, אז קיים בה אטום עם אינדקס מקסימלי. נסמן את האינדקס ב-m (חשוב: אם D_{Y} ריקה אז $m=0$).

* נגדיר השמה z שתספק את D_{Y} וגם את D_{X}.

· נתחיל מהאיברים ב-D_{Y}: לכל האטומים $p_{0},p_{1},\ldots,p_{m}$ ההשמה z תיתן 1.

· כעת על מנת לספק את D_{X} צריך לתת "0" לערך כלשהו ולכן נבחר לתת 0 ל-p_{m+1}.

* קיבלנו השמה:

$$z\left(p_{i}\right)=\begin{cases} 1 & i\neq m+1\\ 0 & i=m+1 \end{cases}$$

· מהגדרת z מתקיים $z\models D_{Y}$

· מהגדרת z מתקיים $z\in K$ $\Leftarrow$ $z\in M\left(X\right)$ ולכן $z\models X$.

· כלומר $z\models D_{X}$.

* ממשפט הקומפטיות, מכיוון ש $z \models D_Y$ וגם $z \models D_X$ וגם $D_X \cup D_Y = D$ וגם D_X, D_Y סופיות אז מתקיים:

$$z \models D$$

5. מ-3,4 קיבלנו סתירה ולכן K לא גדירה.