אינפי 2מ' | תרגול 10 - עם ניקה

שם: איל שטיין

June 6, 2023

נושא השיעור: סדרות של פונקציות

תרגיל 1:

תהי $f_n\left(x\right)$ סדרת פונקציות רציפות אי שליליות $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ מתכנסת במ"ש ל- $f\left(x\right)$ ב-$[0,\infty)$.
נתון שלכל n האינטגרל

$$\int\limits_0^\infty f_n\left(x\right)dx$$

קיים וגם

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty f_n\left(x\right)=0$$

צ"ל: לכל $b>0$ מתקיים $\int_0^b f\left(x\right)dx>0$
פתרון:

- יהי $b>0$.
- לפי אדטיביות האינטגרל מתקיים:

$$\int\limits_0^\infty f_n\left(x\right)dx=\int\limits_0^b f_n\left(x\right)+\int\limits_b^\infty f_n\left(x\right)$$

- לפי הנתון, f_n אי שלילית ולכן:

$$0\leq\int\limits_b^\infty f_n\left(x\right)dx\leq\int\limits_0^\infty f_n\left(x\right)dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

– ולכן לפי סנדוויץ' מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{b}^{\infty}f_n\left(x\right)dx=0$$

- אבל בקטע $[0,b]$ מתקיים ש$f_n\left(x\right)$ מתכנסת במ"ש ל$f\left(x\right)$:

$$f_n\left(x\right)\underbrace{\rightarrow}_{consinously}f\left(x\right)$$

– ולכן לפי המשפט על החלפת סדר בין גבול לאינטגרל מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{b}f_n\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{b}f\left(x\right)dx$$

* ומיחידות הגבול וחשבון גבולות מתקיים שלכל $b>0$ מתקיים:

$$\int\limits_{0}^{b}f_n\left(x\right)dx=0$$

- לכן $f\left(x\right)$ שווה זהותית לאפס (רציפה כי $f_n\left(x\right)$ סדרה של פונקציות רציפות, מתכנסת במ"ש ואי שלילית.)
  – ולכן $\int_0^{\infty}\left(x\right)dx=0$

נושא שני - טורי פונקציות:

תרגיל 2:

בדקו התכנסות במ"ש של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{2}{n}}}{(1+x)^{\frac{n}{2}}}$ עבור $x\geq1$

פתרון:

- נסתכל על סדרת פונקציות שכל פונקציות שהיא סדרה של סכומים חלקיים.
- לפי מבחן הM של וויירשטראס, אם נצליח לחסום את טור הפונקציות בטור מספרי שמתכנס אז טור הפונקציות מתכנס במ"ש.
  – לכן נרצה לחסום את האיבר הכללי של הטור. לכן נגזור לפי x ונשווה לאפס כדי לדעת איפה מתקבל המקסימום:

$$f_n'\left(x\right)=\frac{\left((1+x)\cdot\frac{2}{n}-\frac{x\cdot n}{2}\right)x^{\frac{2}{n}-1}}{\left(1+x\right)^{\frac{n}{2}+1}}=0$$

* כלומר:

$$(1+x)\cdot\frac{2}{n}-\frac{x\cdot n}{2}=0$$

· ולכן:

$$x=\frac{4}{n^2-4}$$

· אם נבדוק ערכי x שגדולים או קטנים מהנקודה הזו נקבל שזו נקודת מקסימום.

– נשים לב כי עבור $n\geq 3$ נקבל שנקודת המקסימום היא מחוץ לקטע ולכן המקסימום של $f:[1,\infty)$ יתקבל בנקודה $x=1$.

* ולכן לכל $n\geq 3$ מתקיים:

$$f_n\left(x\right)\leq f_n\left(1\right)$$

– נבחן את $f_n\left(x\right)$ עבור נקודת המקסימום הזו כדי לחסום בעזרתו את טור הפונקציות:

$$f_n\left(1\right)=\frac{1^{\frac{2}{n}}}{\left(1+1\right)^{\frac{n}{2}}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

* ולכן:

$$f_n\left(x\right)\leq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

* ומכיוון שהטור $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ מתכנס כטור הנדסי אז לפי מבחן הM נקבל שהטור המקורי מתכנס במ"ש.

תרגיל 3:

נגדיר $f\left(x\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

א. הראו ש$f\left(x\right)$ מוגדרת היטב.

ב. חשבו $\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}$

פתרון:

• **א.** נראה שהטור מתכנס לכל x:

- נסתכל על הערך המוחלט של האיבר הכללי:

$$\left|\frac{n}{3^n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{n}{3^n}$$

- כלומר האיבר הכללי חסום.
- הטור $\sum\frac{n}{3^n}$ מתכנס לפי מבחן השורש:

$$\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} < 1$$

  * ולכן לפי מבחן ה-M לפי ויירשטראס מתקיים שהטור הנתון מתכנס לכל x
    · ולכן $f(x)$ מוגדרת היטב.

- **ב.** מכיוון ש $f(0)=0$, נסתכל על הגבול הדרוש ונשים לב כי הוא דומה להגדרת הנגזרת:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{3}{3}\cdot\frac{f(3x)-f(0)}{x-0} = 3\cdot f'(0)$$

- כלומר אם הגבול הדרוש קיים אז הוא שווה ל-$3\cdot f'(0)$
- בשביל להשתמש במשפט "גזירה איבר איבר" נצטרך להראות:
  1. $f_n(x)$ סדרת פונקציות גזירות
  2. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס בנקודה כלשהי.
  3. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ מתכנס במ"ש.

  * את $1-2$ ניתן לראות, אך את 3 נצטרך לבדוק:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3^n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)\end{aligned}$$

    · ומכיוון שמתקיים:

$$\frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{3^n}$$

    · הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ הוא טור הנדסי מתכנס.
    · לכן לפי משפט הM של ויירשטראס מתקיים כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ מתכנס במ"ש.

– אנחנו מחפשים את הנגזרת של $x=0$ ולכן:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

– ולכן מתקיים שהגבול הנדרש הוא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} = 3\cdot f'(0) = \frac{3}{2}$$

תרגיל 4:

בדקו התכנסות של הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{|x|+4n}$ עבור $x\in\mathbb{R}$.

פתרון:

- נשים לב שזהו טור לייבניץ כי האיברים הם סדרה מתחלפת כאשר האיבר הכללי שואף מונוטונית לאפס.
  - לכן הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$.
- נבדוק התכנסות במ"ש:
  - לפי תכונה של טורי לייבניץ, השארית של הטור חסומה על ידי האיבר הבא בטור:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| = |f(x)-S_n(x)| \le |f_{n+1}(x)|$$

* נרצה לבדוק האם $S_n(x)$ מתכנס במ"ש ל$f(x)$:

$$\begin{aligned} &= |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{|x|+4(n+1)} \\ &\le \frac{1}{4(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

· לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה הגבולית $f(x)$.

מסקנה 1. קיבלנו שעברו טור לייבניץ, התנאי שהאיבר הכללי ישאף לאפס, שהוא תנאי הכרחי של התכנסות רגילה של טור, נהפך להיות תנאי מספיק להתכנסות במ"ש.

תרגיל 5:

הראו שהביטוי

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{nx}}\right) dx$$

מוגדר היטב ומצאו את ערכו.

פתרון:

- ראשית נראה שיש לנו פונקציה גבולית אינטגרבילית:
  - נסמן $f_n(x) = \frac{n}{2^{nx}}$ בקטע $[1,2]$.
    - * נסתכל על האיבר הכללי של $f_n(x)$ לכל $x \in [1,2]$:

$$\frac{n}{2^{nx}} \le \frac{n}{2^n}$$

    - * הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ מתכנס לפי מבחן השורש.
    - * ולכן טור הפונקציות המקורי מתכנס במ"ש לפי מבחן הM של ויירשטראס.
      - · ולכן הפונקציה הגבול רציפה (ומכיוון שהיא רציפה אז היא אינטגרבילית).
- לכן הביטוי מוגדר היטב.
- נמצא את ערך הביטוי לפי משפט אינטגרציה איבר איבר:
  - מכיוון שהטור מתכנס במ"ש, ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{nx}}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 \frac{n}{2^{nx}} dx$$

$$\int_1^2 n \cdot 2^{-nx} dx = -\frac{2^{-nx}}{ln(2)}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{ln(2)} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

  - ואז הטור הוא:

$$\frac{1}{ln(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$\frac{1}{ln(2)} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3 \cdot ln(2)}$$

נושא שלישי: טורי חזקות

- יש שתי דרכים למצוא רדיוס התכנסות:
  1. $\frac{1}{R}=lim\ \ sup\sqrt[n]{|a_n|}$
  2. $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
- אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f\left(x\right)$ אז מתקיים:
  1. $f'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$
  2. $\int_0^x f\left(t\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

תרגיל 6:

מצאו את תחומי ההתכנסות של טור החזקות:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2\left(n\right)}{n}x^n$$

פתרון:

- לפי מבחן השורש מתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}&=limsup\sqrt[n]{a_n}\\&=limsup\sqrt[n]{\frac{ln^2\left(n\right)}{n}}\end{aligned}$$

  – מכיוון ש:

$$1\underset{n\to\infty}{\leftarrow}\sqrt[n]{1}\leq\sqrt[n]{ln^2\left(n\right)}\leq\sqrt[n]{n^2}\underset{n\to\infty}{\rightarrow}1$$

  * אז לפי משפט הסנדוויץ' מתקיים $\sqrt[n]{ln^2\left(n\right)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

  – ולכן $\sqrt[n]{a_n}=1$, כלומר $R=1$

- נבדוק בקצוות:

  – עבור $x=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2\left(n\right)}{n}\left(-1\right)^n$$

  * זהו טור לייבניץ ולכן מתכנס.

– עבור $x=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2\left(n\right)}{n}$$

* ומכיוון ש $\frac{1}{n}<\frac{ln^2(n)}{n}$ אז לפי מבחן ההשוואה הטור מתבדר יחד עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

• לכן תחום ההתכנסות הוא $[-1,1)$

תרגיל 7:

מצאו את תחומי ההתכנסות של טור החזקות:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{3n}\cdot\ \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}}\right)$$

פתרון:

• הטור שלנו חייב להיות מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ בשביל להשתמש במבחנים ולכן נסמן סדרה b_n:

$$b_n=\begin{cases}\sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}} & ,R=3n\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

– ואז מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{3n}\cdot\ \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$$

– כעת מתקיים

$$\frac{1}{R}=lim\ \ sup\ \ \sqrt[k]{b_k}$$

* מכיוון שבסדרה b_n יש או אפסים או $\sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}}$, אז הגבול החלקי העליון יהיה:

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\ \left(\sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}}\right)^{\frac{1}{3n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\ \left(7^{3n}+5^{3n}\right)^{\frac{1}{3n^3}}\end{aligned}$$

· מכיוון ש:

$$7^{3n} < 7^{3n} + 5^{3n} \leq 2 \cdot 7^{3n}$$

$$1 \underset{n\to\infty}{\leftarrow} 7^{\frac{1}{n^2}} = 7^{\frac{3n}{3n^3}} < \left(7^{3n} + 5^{3n}\right)^{\frac{1}{3n^3}} \leq 2^{\frac{1}{3n^3}} \cdot 7^{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

· ולכן $R = 1$

- נבדוק את הקצוות:
  - עבור $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{7^{3n} + 5^{3n}}$$

  - ועבור $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{7^{3n} + 5^{3n}} \cdot (-1)^{3n}$$

    * בשניהם האיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטורים מתבדרים.

- לכן תחום ההתכנסות הוא $(-1, 1)$

תרגיל 8:

מצאו את תחומי ההתכנסות של טור החזקות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n} x^{2n+1}$$

פתרון:

- נרצה להשתמש במבחן המנה, אך לשם כך יש לפשט את הביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n} x^{2n+1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n} x^{2n}$$

  - תחומי ההתכנסות של הטורים בשני צידי המשוואה הם אותו תחום.
    * כלומר הטורים הללו מתכנסים בדיוק באותם התחומים ולכן נבחן את הצד הימני של המשוואה:

- נגדיר $t = x^2$ ואז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n} t^n$$

- ואז לפי מבחן המנה מתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{a}_n}{\widetilde{a}_{n+1}} &= \frac{4^n \cdot n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1} \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{4}\end{aligned}$$

- קיבלנו שתחום ההתכנסות הוא:

$$\widetilde{R} = \frac{e}{4}$$

- נציב חזרה $x^2 = t$ ונקבל $R = \frac{\sqrt{e}}{2}$
- נשאר לבדוק התכנסות בקצוות.