הסתברות מ' (00094412) | תרגול 4

שם: איל

February 8, 2024

נושא התרגול: משתנים מקריים, וקטורים מקריים

נושא ראשון - משתנים מקריים

תרגיל 1.

מטילים 2 קוביות הוגנות באופן ב"ת זו מזו.

הניחו כי לכל זוג סדור של תוצאות סיכוי שווה להתקבל.

נגדיר את X להיות הערך המקסימלי מבין 2 התוצאות שהתקבלו.

א. מצא את $P\left(X=4\right)$

ב. מצא את $P\left(X\leq3\right)$

ג. מצא את פונקציית ההסתברות של X.

ד. נניח עתה שמטילים n קוביות הוגנות, ההטלות הן בלתי תלויות ולכל וקטור באורך n של תוצאות סיכוי שווה להתקבל. נגדיר את X להיות הערך המקסימלי מבין n התוצאות שהתקבלו.

מצאו את פונקציית ההסתברות של X.

פיתרון 1. א.

- קודם כל נגדיר את מרחב המדגם שלנו:

$$\Omega=\left\{ \left(d_{1},d_{2}\right)\ :\ d_{i}=\left\{ 1,\ldots,6\right\} \right\}$$

$$\left|\Omega\right|=6^{2}$$

- נגדיר $X=\max\left\{ d_{1},d_{2}\right\}$. כלומר X זו פונקציה מ $\Omega\to\mathbb{R}$.
- מתקיים $Supp\left(X\right)=R_{X}=\left\{ 1,\ldots,6\right\}$

- אזי ההסתברות שמתקיים $X=4$ היא:

$$\begin{aligned} P_X(X=4) &= P(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega)=4\}) \\ &= P(\{(d_1,d_2) \ : \ \max\{d_1,d_2\}=4\}) \end{aligned}$$

– כלומר:

$$\frac{|\{(d_1,d_2) \ : \ \max\{d_1,d_2\}=4\}|}{|\Omega|} = \frac{7}{36}$$

פיתרון 2. ב.

- אנחנו יכולים לספור את התוצאות אחת אחת אבל זה ייקח הרבה זמן.
- במקום לספור אחת אחת, נשים לב שמתקיים:

$$P(X \le 3) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \le 3\})$$

$$= P(\{(d_1,d_2) \ : \ \max\{d_1,d_2\} \le 3\})$$

– מכיוון ש-$\max\{d_1,d_2\} \le 3 \iff d_1 \le 3 \ \wedge \ d_2 \le 3$,

  * נוכל להשתמש בנתון שההטלות בלתי תלויות כדי לקבל:

$$= P(\{d_1 \le 3\}) \cdot P(d_2 \le 3)$$

· נבודד קובייה אחת ונספור כמה אפשרויות יש לקבל תוצאה קטנה שווה ל-3. התשובה היא $\frac{3}{6}$.

· ולכן:

$$\begin{aligned} P(\{d_1 \le 3\}) \cdot P(d_2 \le 3) &= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

פיתרון 2. ג.

- רוצים שנחשב את הPMF של X לכל x
  - צריך למצוא את $P_X(x)$.
- במקום למצוא את $P(1), P(2), P(3), P(5), P(6)$, נפתור על ידי התובנה שמתקיים:

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x)$$

  - ומכיוון ש-x יכול לקבל רק מספרים שלמים, מתקיים $X < x \Longleftrightarrow X \leq x - 1$ ולכן:

$$= P(X \leq x) - P(X \leq x - 1)$$

    * נסתכל בתוצאה של סעיף ב' ובאותו אופן נקבל שתי הטלות בלתי תלויות:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \frac{x}{6} \cdot \frac{x}{6} \\ &= \left(\frac{x}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

    * ובאותו אופן נקבל:

$$P(X \leq x) = \frac{x-1}{6} \cdot \frac{x-1}{6} = \left(\frac{x-1}{6}\right)^2$$

  - נזכור ש$x \in \mathbb{R}$ ולכן נוסיף ערך 0 עבור מקרים בהם x אינו שלם ואינו שייך ל$Supp(X)$:

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X \leq x - 1) = \begin{cases} \left(\frac{x}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{6}\right)^2 & x \in \{1, 2, \ldots, 6\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

פיתרון 2. ד.

- מכיוון שכל ההטלות בלתי תלויות, מהמסקנות של סעיף ב' ומסעיף ג' נקבל שבסעיף הזה לא משתנה הרבה ומתקיים:

$$P_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{x-1}{6}\right)^n & x \in \{1, 2, \ldots, 6\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

נושא שני - וקטורים מקריים.

כלל:

מפונקציית ההסתברות משותפת ניתן תמיד למצוא את כל פונקציות ההסתברות השוליות.

אך, מפונקציות ההסתברות השוליות לא ניתן למצוא את פונקציית ההסתברות המשותפת (פרט למקרה שיש אי תלות בין המשתנים המקריים).

תרגיל 2.

מספר הלקוחות שמגיעים לסניף הבנק במשך היום הוא משתנה מקרי Z המקיים $Z \sim Pois\left(\lambda\right)$.

בבנק יש שני אגפים A ו-B וכל לקוח מחליט לאיזה אגף לפנות כך ש: בהסתברות p_A הוא בוחר את A ובהסתברות p_A הוא בוחר את B.

מתקיים $p_A + p_B = 1$.

החלטות של הלקוחות הן ב"ת ביניהן וגם ב"ת במספר לקוחות Z שהגיעו במשך היום.

נסמן ב-X את מספר הלקוחות שהגיעו ל-A וב-Y את מספר הלקוחות שהגיעו ל-B במשך היום.

צ"ל:

א. מצא את פונקציות ההסתברות המותנית של X בהינתן Z (ובאופן סימטרי) של Y בהינתן Z?

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

ג. מצא את פונקציית ההסתברות של X ואת פונקציית ההסתברות של Y. האם X ו-Y ב"ת?

פיתרון 2.א.

- נשים לב שמתקיים $Z = X + Y$
  - כעת צריך למצוא את $P\left(X = x \mid Z = z\right) = P_{X|Z}\left(x, z\right)$.
    * מהות השאלה היא להבין שזהו המודל הבינוי, כי יש מספר קבוע של לקוחות שהגיעו ואנחנו שואלים כמה הגיעו ל-A.
    * כלומר:

$$X \mid Z \sim Bin\left(z, p_A\right)$$

· כאשר z הוא מספר הניסויים.

· נציב ב-PMF של המודל הבינומי:

$$P_{X|Z}\left(x, z\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \cdot \left(p_A\right)^x \cdot \left(p_B\right)^{z-x} & x \in \{0, 1, \ldots, z\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

· באותו אופן אפשר למצוא עבור Y

פיתרון 2. ב.

- אנחנו מחפשים את $P_{X,Y}\left(x, y\right)$.
- בסעיף א' מצאנו את $P_{X|Z}\left(x, z\right)$ ואת $P_{y|Z}\left(y, z\right)$
- בעזרת כלל הכפל נוכל למצוא את $P\left(X = x, Z = z\right) = P_{X,Z}\left(x, z\right)$ ומשם נוכל למצוא את $P_{X,Y}\left(x, y\right)$.

- לפי הגדרה מתקיים:

$$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

- מהנתון מתקיים $Z=X+Y$. נציב ונקבל:

$$=P(X=x,Z-X=y)$$

- <u>טריק:</u> מכיוון שאחד התנאים שעליו אנו בוחנים את ההסתברות הוא $X=x$, נוכל להציב זאת בתנאי הימני $X=x$ ולקבל:

$$=P(X=x,Z=y+x)$$

$$=P_{X,Z}(x,y+x)$$

- לפי כלל הכפל, ההסתברות המשותפת $P_{X,Z}(x,z)$ היא:

$$P_{X,Z}(x,z)=P_{X|Z}(x,z)\cdot P_Z(z)$$

  - מהנתון מתקיים:

$$P_Z(z)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!},\ \ z\in\{0,1,\ldots\}$$

  - ומסעיף א' מתקיים

$$P_{X|Z}(x,z)=\begin{cases}\begin{pmatrix}z\\x\end{pmatrix}\cdot(p_A)^x\cdot(p_B)^{z-x} & x\in\{0,1,\ldots,z\}\\0 & otherwise\end{cases}$$

  - נציב את $P_{X|Z}(x,z)$ ואת $P_Z(z)$ ונקבל:

$$P_{X,Z}(x,z)=\begin{cases}\begin{pmatrix}z\\x\end{pmatrix}\cdot(p_A)^x\cdot(p_B)^{z-x}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{z!} & ,\ x=0,1,\ldots,z\ \wedge\ z=0,1,\ldots\\0 & ,otherwise\end{cases}$$

– בשביל למצוא את $P_{X,Y}(x,y)$, נשתמש בקשר שהראנו $P_{X,Y}(x,y)=P_{X,Z}(x,y+x)$.

* כלומר נציב $z=y+x$ (דילגנו על כמה שלבים אלגבריים):

$$P_{X,Y}(x,y)=P_{X,Z}(x,y+x)$$
$$=\begin{cases}\frac{e^{-\lambda\cdot p_A}\cdot(\lambda\cdot p_A)^x}{x!}\cdot\frac{e^{-\lambda\cdot p_B}\cdot(\lambda\cdot p_B)^y}{y!} & x,y\in\{0,1,\dots\}\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

· נשים לב שקיבלנו מכפלה של שתי צורות פואסון.

פיתרון 2. ג.

• על מנת למצוא את הפונקציה השולית $P_X(x)$, נסכום את המשותפת של $P_{X,Y}(y,x)$ על פני כל ערכי $y\in Supp(y)$:

$$P_X(x)=\sum_{y\in Supp(Y)}^{\infty}P_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-\lambda\cdot p_A}\cdot(\lambda\cdot p_A)^x}{x!}\cdot\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\cdot p_B}\cdot(\lambda\cdot p_B)^y}{y!}$$

– (מאחורי הקלעים הגדרנו משתנה W שהוא מחולק פואסוני עם פרמטר $\lambda\cdot p_B$, כלומר $W\sim Pois(\lambda\cdot p_B)$)

– ולכן מתקיים:

$$\sum_{y\in Supp(W)}^{\infty}P_W(y)=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\cdot p_B}\cdot(\lambda\cdot p_B)^y}{y!}=1$$

* ולכן:

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{e^{-\lambda\cdot p_A}\cdot(\lambda\cdot p_A)^x}{x!} & x\in\{0,1,\dots\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

פיתרון 2. ד.

• מתקיים כי X,Y בלתי תלויים לפי משפט:

משפט 3.

– יהיו שני משתנים מקריים W,L.

– אם קיימות שתי פונקציות f,g כך ניתן לכתוב:

$$P_{W,L}(w,l)=g(w)\cdot f(l)$$

* אז W, L בלתי תלויים ופונקציות ההסתברות שלהן הן g ו-f בהתאמה (עד כדי כפל בקבוע)

<u>הערה:</u> יש הגבלה על התומך של W ושל L.