הסתברות מ' | תרגול 1 - תם

שם: איל

January 21, 2024

שאלה 1

בקבוצת אוכלוסייה מסוימת 60% דוברי עברית, 40% דוברי אנגלית, 30% דוברי צרפתית.
כמו כן ידוע כי: 12% דוברי עברית וצרפתית, 16% דוברי עברית ואנגלית, 5% מדברים את כל 3 השפות.
בנוסף, נתון כי כל אדם באוכלוסייה מדבר לפחות אחת מ-3 השפות הנ"ל.

הנחה: אדם נבחר באקראי מהאוכלוסייה.
א. מה ההסתברות שהוא דובר צרפתית ואנגלית?
ב. מה ההסתברות שהאדם שנבחר אינו דובר עברית?
ג. מה ההסתברות שהאדם שנבחר יודע עברית אך לא יודע אנגלית?
ד. מה ההסתברות שהאדם שנבחר יודע רק צרפתית?

פתרון:

א. מה ההסתברות שהוא דובר צרפתית ואנגלית?

- נגדיר את מרחב המדגם להיות כל האנשים $\Omega = \{1, 2 \ldots, n\}$.
  - לפי ההנחה זהו מרחב שווה הסתברות כי נבחר אדם באקראי.
- נגדיר את המאורעות:
  - האדם שנבחר מדבר עברית $= H$.
  - האדם שנבחר מדבר אנגלית $= E$.
  - האדם שנבחר מדבר צרפתית $= F$.
- לפי הנתון:

$$P(H) = \frac{|H|}{|\Omega|} = 0.6$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = 0.4$$

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = 0.3$$

$$P\left(H\cap F\right)=0.12$$

$$P\left(H\cap E\right)=0.16$$

$$P\left(H\cap E\cap F\right)=0.05$$

- אנחנו מחפשים את $P\left(E\cap F\right)$.
- נשתמש בהכלה והפרדה:

$$1=P\left(H\cup F\cup E\right)=\overbrace{P\left(H\right)}^{0.6}+\overbrace{P\left(E\right)}^{0.4}+\overbrace{P\left(F\right)}^{0.3}-\overbrace{P\left(H\cap F\right)}^{0.12}-\overbrace{P\left(H\cap E\right)}^{0.16}-P\left(E\cap F\right)+\overbrace{P\left(H\cup E\cup F\right)}^{0.05}$$

  – נעביר אגפים ונקבל:

$$P\left(E\cap F\right)=1-0.6-0.4-0.3+0.12+0.16-0.05=0.07$$

ב. מה ההסתברות שהאדם שנבחר אינו דובר עברית?

- התשובה היא המשלים:

$$P\left(H^{c}\right)=1-P\left(H\right)=1-0.6=0.4$$

ג. מה ההסתברות שהאדם שנבחר יודע עברית אך לא יודע אנגלית?

- ראשית אנחנו יודעים שההסתברות שהאדם יודע עברית הוא 0.6 ולכן נחלק לשני מאורעות זרים (יודע/לא יודע אנגלית):

$$\overbrace{P\left(H\right)}^{0.6}=\overbrace{P\left(H\cap E\right)}^{0.16}+P\left(H\cap E^{c}\right)$$

  – נעביר אגפים ונקבל:

$$P\left(H\cap E^{c}\right)=0.44$$

* זו ההסתברות לך שהאדם יודע עברית אך לא יודע אנגלית.

ד. מה ההסתברות שהאדם שנבחר יודע רק צרפתית?

- ננסח מחדש, צ"ל: $P\left(H^c\cap E^c\cap F\right)$

$$P\left(H^c\cap E^c\cap F\right)=\overbrace{P\left(F\right)}^{Knows\ \ french}-\overbrace{P\left(H\cap F\right)}^{Knows\ \ french\ \ and\ \ hebrew}-\overbrace{P\left(E\cap F\right)}^{Knows\ \ french\ \ and\ \ english}-P\left(H\cap E\cap F\right)$$

– נציב את התוצאות מהסעיפים הקודמים ונקבל:

$$P\left(H^c\cap E^c\cap F\right)=0.16$$

שאלה 2

מטילים שלוש קוביות הוגנות פעמיים.

(הנחה: יש הסתברות שווה לכל וקטור סדור בן 6 רכיבים של מספרים מ-1 עד 6 להתממש.)

מה ההסתברות לקבל תוצאה זהה בשתי ההטלות של שלושת הקוביות אם:

א. הקוביות שונות אחת מהשנייה? (לדוג' בצבעים שונים)

ב. הקוביות זהות?

פתרון:

א.

- נגדיר את מרחב המדגם להיות כל הוקטורים הסדורים:

$$\Omega=\left\{\left(\overbrace{d_1,d_2,d_3,}^{First\ \ roll}\ \overbrace{d_4,d_5,d_6}^{Second\ \ roll}\right)\ \mid\ d_i\in\{1,\ldots,6\}\right\}$$

– זהו מרחב הסתברות לפי ההנחה שיש הסתברות שווה לכל וקטור.

- דוגמאות להטלות "טובות": $\left(\overbrace{1,2,3}^{First\ \ roll},\ \overbrace{1,2,3}^{Second\ \ roll}\right)$ או $\left(\overbrace{1,2,2}^{First\ \ roll},\ \overbrace{1,2,2}^{Second\ \ roll}\right)$.

- דוגמה להטלה "לא טובה": $\left(\overbrace{1,2,5}^{Fisrt\ \ roll},\ \overbrace{5,2,1}^{Second\ \ roll}\right)$.

- נגדיר מאורע:

– A = תוצאה זהה בשתי ההטלות.

– אנחנו רוצים למצוא את $P\left(A\right)$. מכיוון שאנחנו במרחב שווה הסתברות, נמצא אותו על ידי:

$$P\left(A\right)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{6^{3}\cdot1}{6^{6}}$$

* זאת מכיוון שיש 6 אפשרויות לכל קוביה בהטלה הראשונה, וההטלה השנייה נקבעת לפי הראשונה.
* וגם $|\Omega|=6^{6}$ כי יש אפשרויות לוקטורים באורך 6 מעל $\{1,\ldots,6\}$.

ב.

• נחלק את A לשלושה מקרים זרים:

1. בהטלה הראשונה יצאו שלושה מספרים זהים וגם התוצאה זהה בשתי ההטלות = A_1

$$P\left(A_{1}\right)=\frac{|A_{1}|}{|\Omega|}=\frac{\binom{6}{1}}{6^{6}}=\frac{6}{6^{6}}=\frac{1}{6^{5}}$$

(א) נשים לב שבחרנו להשאיר את מרחב המדגם אותו דבר כדי שהוא יישאר שווה הסתברות.

2. בהטלה הראשונה ישנו בדיוק שני מספרים שונים וגם התוצאה זהה בשתי ההטלות = A_2

$$P\left(A_{2}\right)=\frac{|A_{2}|}{|\Omega|}=$$

$$=\frac{\overbrace{\binom{6}{2}}^{Two\ odd\ digits}\cdot\overbrace{\binom{2}{1}}^{Pick\ the\ digit\ that\ occurs\ twice}\cdot\overbrace{\binom{3}{1}}^{Pick\ where\ to\ put\ a,b\ on\ first\ roll}\cdot\overbrace{\binom{3}{1}}^{Pick\ where\ ro\ put\ a,b\ in\ 2nd\ roll}}{6^{6}}$$

3. בהטלה הראשונה יצאו שלושה מספרים שונים וגם התוצאה זהה בשתי ההטלות = A_3

$$P\left(A_{3}\right)=\frac{|A_{3}|}{|\Omega|}=\frac{\overbrace{\binom{6}{3}}^{Pick\ three\ digits}\cdot\overbrace{3!}^{Inner\ order\ first\ roll}\cdot\overbrace{3!}^{Inner\ order\ second\ roll}}{6^{6}}$$

• כעת נקבל כי:

$$P\left(A\right)=P\left(A_{1}\right)+P\left(A_{2}\right)+P\left(A_{3}\right)=\frac{996}{6^{6}}$$

שאלה 3:

במיכל 5 כדורים לבנים ו-3 שחורים.
מוציאים באקראי ללא החזרה 6 כדורים.
(הנחה: לכל אוסף סדור של 6 כדורים מתוך 8 יש הסתברות שווה.)
א. מה ההסתברות להוציא כדורים לפי הסדר הבא: 4 כדורים לבנים ואחריהם 2 שחורים?
ב. מה ההסתברות שבדיוק 2 מהכדורים שחורים?
ג. מה ההסתברות שלפחות 2 מהכדורים שחורים?

פתרון:

- ראשית נדמיין שלכדורים יש גם צבע וגם מספר שמייחד אותם (כמו כדורי ביליארד).
- נגדיר את מרחב המדגם להיות כל הוקטורים הסדורים של שישה כדורים (ללא החזרה):

$$\Omega = \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \ \mid b_i \in \{1, \ldots, 8\} \ \wedge \ b_i \neq b_j\}$$

  - זהו מרחב שווה הסתברות לפי ההנחה.

א. מה ההסתברות להוציא כדורים לפי הסדר הבא: 4 כדורים לבנים ואחריהם 2 שחורים?

- נסמן מאורע A = יצאו 4 כדורים לבנים ואחריהם שניים שחורים.
  - נחשב את $P(A)$, מכיוון שאנחנו במרחב שווה הסתברות מתקיים:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\overbrace{\binom{5}{4}}^{Pick\ four\ white} \cdot \overbrace{4!}^{Inner\ order\ for\ white} \cdot \overbrace{\binom{3}{2}}^{Pick\ two\ black} \cdot \overbrace{2!}^{Inner\ order\ for\ black}}{\underbrace{\binom{8}{6}}_{Pick\ 6\ balls} \cdot \underbrace{6!}_{Inner\ order}} = \frac{1}{28}$$

ב. מה ההסתברות שבדיוק 2 מהכדורים שחורים?

• נסמן B = בדיוק שני כדורים שחורים.

$$P\left(B\right)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{\overbrace{\binom{3}{2}}^{Pick\ \ two\ \ black}\overbrace{\binom{5}{4}}^{Pick\ \ four\ \ white}\cdot\overbrace{6!}^{Order\ \ for\ \ the\ \ 6\ \ balls}}{\binom{8}{6}\cdot 6!}$$

ג. מה ההסתברות שלפחות 2 מהכדורים שחורים?

• נסמן C = <u>לפחות</u> 2 מהכדורים שחורים.

$$P\left(C\right)=\frac{|C|}{|\Omega|}=\frac{|B|+\overbrace{\binom{3}{3}}^{Three\ \ black\ \ balls}\cdot\overbrace{\binom{5}{3}}^{Pick\ \ white\ \ balls}\cdot\overbrace{6!}^{Inner\ \ order}}{\binom{8}{6}\cdot 6!}=\frac{25}{28}$$

הערה:

• בתחילת הפתרון נתנו לכל כדור מספר כדי להמחיש שמדובר בכדורים שונים זה מזה (אפילו שהם באותו צבע).

– במרחב המדגם הסדר הוא משמעותי, אך בהסתברות של המאורע הסדר בין הכדורים לא משנה.

שאלה 5

מודפסים n מכתבים ולאחר מכן הם מוכנסים באקראי ל-n מעטפות.
הניחו שלכל השמה של מכתבים למעטפות יש הסתברות שווה להתקבל.
מה ההסתברות שלפחות אחד יגיע ליעדו (נסמן במאורע A)?

פתרון:

• נגדיר את מרחב המדגם:

$$\Omega=\{(e_1,\dots e_n)\}$$

– כאשר e_i זו המעטפה אליה הוכנס המכתב ה-i. מתקיים $e_i\in\{1,\dots,n\}$ וגם $e_i\neq e_j$

* לדוגמא: $(3,2,1)$ פירושו שהמכתב השלישי הוכנס למעטפה עם אינדקס 1, המכתב השני הוכנס למעטפה 2 והמכתב הראשון הוכנס למעטפה 3.

– זהו מרחב שווה הסתברות.

- עבור $1 \leq i \leq n$, נגדיר מאורע A_i להיות שהמכתב ה-i הגיע ליעדו.
  - כלומר $i = e_i$.
- מכיוון שאיחוד הוא "או", נקבל כי:

$$P\left(A\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)$$

  - כעת נשתמש בהכלה והפרדה כדי לקבל:

$$=\sum_{i=1}^{n}P\left(A_{i}\right)-\sum_{i<j}P\left(A_{i}\cap A_{j}\right)+\sum_{i<j<k}P\left(A_{i}\cap A_{j}\cap A_{k}\right)-\ldots+\left(-1\right)^{n+1}P\left(A_{1}\cap\ldots\cap A_{n}\right)$$

    * נשים לב כי מתקיים:

$$P\left(A_{i}\right)=\frac{\left|A_{i}\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{\left(n-1\right)!}{n!}$$

      · נרצה לחשב את הביטוי $\sum_{i=1}^{n}P\left(A_{i}\right)$:

$$\sum_{i=1}^{n}P\left(A_{i}\right)=n\cdot\frac{\left(n-1\right)!}{n!}=\frac{1}{1!}$$

    * נשים לב כי עבור הביטוי $\left(A_{i}\cap A_{j}\right)$ מתקיים:

$$P\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=\frac{\left|A_{i}\cap A_{j}\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{\left(n-2\right)!}{n!}$$

      · נרצה לחשב את הביטוי $\sum_{i<j}P\left(A_{i}\cap A_{j}\right)$:

$$\sum_{i<j}P\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=\binom{n}{2}\frac{\left(n-2\right)!}{n!}=\frac{1}{2!}$$

    * נכליל זאת למקרה הכללי כדי לקבל:

$$\sum_{i_{1}<i_{2}<\ldots<i_{k}}P\left(A_{i_{1}}\cap A_{i_{2}}\cap\ldots\cap A_{i_{k}}\right)=\binom{n}{k}\cdot\frac{\left(n-k\right)!}{n!}=\frac{1}{k!}$$

* נציב ונקבל:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

· ולפי טורי טיילור מתקבל:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{e}$$