אינפי 1מ' (104031) | תרגול 17 - יוליה

שם: איל שטיין

December 26, 2022

נושאי השיעור: גבול של פונקציה (המשך), רציפות

נושא ראשון - גבולות של פונקציה:

תרגיל 1. תהי $f(x)=\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

הראו כי $f(x)$ לא חסומה באף סביבה של 0, אך לא שואפת לאינסוף (או ל$-\infty$) כאשר $x\to 0$.

פתרון:

- נוכיח ש $\lim_{x\to 0}f(x)\neq\infty$ בעזרת סדרה $0\neq x_n\to 0$ כך ש $f(x_n)=0$
  - נדרוש ש$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)=0$
    - זה יקרה כאשר $\frac{1}{x_n}=\pi n+\frac{\pi}{2}$
      - כלומר $x_n=\frac{1}{\pi n+\frac{\pi}{2}}$
      - הסדרה הזו $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אבל היא אף פעם לא שווה 0.
  - נמצא את $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

    - הראנו שהיא שואפת ל-0 ולא לאינסוף.
    - לפי משפט היינה, זה אומר ש $\lim_{x\to 0}f(x)\neq\infty$

- נבנה סדרה $0\neq y_n\to 0$ כך ש $f(y_n)\to\infty$ ונוכיח בעזרת הסדרה הזו ש-f לא חסומה בכל סביבה של 0.
  - נדרוש $\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)=1$ ולכן $\frac{1}{y_n}=2\pi n$, כלומר$y_n=\frac{1}{2\pi n}$
    - הסדרה y_n הזו שואפת ל-0 אך $y_n\neq 0$ לכל n.
  - נחפש את $\lim_{n\to\infty}f(y_n)$:

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}\cdot\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\pi n\cdot 1=\infty$$

- תהי $\delta > 0$.
- נוכיח ש-f לא חסומה בסביבה $x \in (-\delta, \delta)$ וגם $x \neq 0$:
  - $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ולכן קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $-\delta < y_n < \delta$ וגם $y_n \neq 0$
  - $f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ולכן לכל $M > 0$ קיים N_2כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $f(y_n) > M$
  - ניקח $n = [max\{N_1, N_2\}] + 1$
    * כעת אם $y_n \in (-\delta, \delta)$ וגם $y_n \neq 0$ אז יתקיים $f(y_n) > M$
- הראנו שבכל סביבה של 0 הפונקציה $f(x)$ לא חסומה.
- והראנו שקיימות לה שתי סדרות שונות ששואפות ל-0 אך ערכי הפונקציה על אחת הסדרות הללו לא שואפים לאינסוף (ולכן לפי משפט היינה הפונקציה לא שואפת לאינסוף).

תרגיל 2. גבולות חד צדדיים:

- יהיו $a, b > 0$.
- צ"ל: חשבו גבולות ח"צ ב $x = 0$ והסיקו על הקיום של הגבול ב $x = 0$ עבור:

$$f(x) = \left[\frac{x}{a}\right] \cdot \frac{b}{x} \tag{1}$$

$$g(x) = \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right] \tag{2}$$

א. פתרון:

- $x \to 0^+$:
  - מכיוון ש-$a > 0$, וגם $x > 0$ אז $\frac{x}{a} > 0$.
  - לכן לכל $0 < x < a$ יתקיים $0 < \frac{x}{a} < 1$.
    * ולכן לפי הגדרת "עיגול למטה לשלם" נקבל $\left[\frac{a}{x}\right] = 0$
      · ולכן לכל $0 < x < a$ יתקיים $f(x) = \left[\frac{x}{a}\right] \cdot \frac{b}{x} = 0$
      · וממילא $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
- $x \to 0^-$:
  - לכל $-a < x < 0$ יתקיים $-1 < \frac{x}{a} < 0$
    * ולכן לפי הגדרת "עיגול למטה לשלם" נקבל $\left[\frac{x}{a}\right] = -1$
      · כלומר לכל $-a < x < 0$ מתקיים $f(x) = \left[\frac{a}{x}\right] \cdot \frac{b}{x} = -\frac{b}{x}$
      · ולכן $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{b}{x} = \infty$
- כלומר $\lim_{x\to 0} f(x)$ לא קיים לפי המשפט: הגבול קיים אם ורק אם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים.

ב. פתרון:

- לפי הגדרת עיגול לשלם: לכל $x\neq 0$ מתקיים $\frac{b}{x}-1<\left[\frac{b}{x}\right]\leq\frac{b}{x}$
- $x\to 0^{+}$:
  - במקרה הזה $\frac{x}{a}>0$
  - נכפול את אי השוויון $\frac{b}{x}-1<\left[\frac{b}{x}\right]\leq\frac{b}{x}$ ב-$\frac{x}{a}$ ונקבל:

$$\frac{b}{a}-\frac{x}{a}=\left(\frac{b}{x}-1\right)\cdot\frac{x}{a}<\left[\frac{b}{x}\right]\cdot\frac{x}{a}\leq\frac{b}{x}\cdot\frac{x}{a}=\frac{b}{a}$$

  * לפי משפט הסנדוויץ', מתקיים $\lim_{x\to 0^{+}}g\left(x\right)=\frac{b}{a}$

- $x\to 0^{-}$: נקבל את אותה התוצאה עם משפט הסנדוויץ' בדרך דומה: $\lim_{x\to 0^{-}}g\left(x\right)=\frac{b}{a}$
- שני הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים ולכן לפי משפט הגבול של $g\left(x\right)$ קיים ושווה ל-$\frac{b}{a}$

נושא שני - רציפות:

הגדרה 3. רציפות

- תהי $f\left(x\right)$ המוגדרת בסביבה של $x=a$.
- נאמר ש-f רציפה ב-a אם מתקיימים שלושה דברים:
  1. $f\left(a\right)$ מוגדרת.
  2. $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ קיים ושווה ל-L סופי.
  3. $L=f\left(a\right)$.

הגדרה 4. רציפות (במונחים של ε,δ)

- תהי $f\left(x\right)$ המוגדרת בסביבה של $x=a$.
- נאמר ש-f רציפה ב-a אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $|x-a|<\delta$ אז מתקיים $|f\left(x\right)-f\left(a\right)|<\varepsilon$

הגדרה 5. רציפות (במונחים של סדרות)

- תהי $f\left(x\right)$ המוגדרת בסביבה של $x=a$.
- נאמר ש-f רציפה ב-a אם לכל סדרה $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(a\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)$

הערה 6. נאמר ש-$f\left(x\right)$ **רציפה מימין** ב $x=a$ אם לכל $x_n\to a^{+}$ (כלומר $x_n\to a$ וגם $x_n\geq a$) מתקיים $\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(a\right)$

תרגיל 7.

- מצאו את כל הערכים של a,b כך ש-$f\left(x\right)$ תהיה רציפה בקטע $x>-2$.
- נתון: $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{4-x^{2}}}{\sqrt{6-5x+x^{2}}} & \left|x\right|<2\\ \frac{ax^{2}+b}{ax+1} & x\geq2\end{cases}$

פתרון:

- צריך לבדוק שלושה דברים:

1. לוודא ש-$f\left(x\right)$ מוגדרת
2. לבדוק ש $\frac{ax^{2}+b}{ax+1}$ רציפה
3. שהפונקציה רציפה במפגש בין $\frac{ax^{2}+b}{ax+1}$ ו-$\frac{\sqrt{4-x^{2}}}{\sqrt{6-5x+x^{2}}}$

1. נבחן את הפונקציה $\frac{\sqrt{4-x^{2}}}{\sqrt{6-5x+x^{2}}}$ בפני עצמה:
   - היא מוגדרת כאשר $\left|x\right|\leq2$ וגם $x<2$ או $x>3$
   - נקבל שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-2\leq x<2$
   - התחום של הפונקציה הזו מוכל בתחום ההגדרה של החלק הזה ב-$f\left(x\right)$.
   - מכיוון שהיא פונקציה אלמנטרית, בתחום הגדרתה ($\left|x\right|<2$) הפונקציה רציפה.

2. נבחן את הפונקציה $\frac{ax^{2}+b}{ax+1}$ בפני עצמה:
   - נדרוש שלכל $x\geq2$ המכנה ($ax+1$) לא יהיה שווה 0 (ואז הפונקציה תהיה מוגדרת היטב)
     - $ax+1\neq0$ כלומר $ax\neq-1$
       - מכיוון ש $x\geq2$, אפשר לחלק בו לקבל:

$$a\neq-\frac{1}{x}$$

       - כלומר לכל $x\geq2$ יוצא ש $a\notin[-\frac{1}{2},0)$
   - עבור $a\notin[-\frac{1}{2},0)$ ולכל $b\in\mathbb{R}$ יוצא שהפונקציה אלמנטרית ומוגדרת לכל $x\geq2$ ולכן היא רציפה בכל תחום הגדרתה.

3. $f\left(x\right)$ רציפה מימין לכל $x=2$
   - ולכן $\lim_{x\to2^{+}}f\left(x\right)=f\left(2\right)=\frac{4a+b}{2a+1}$
   - נדרוש שגם $\lim_{x\to2^{-}}f\left(x\right)=f\left(2\right)$ על ידי:

$$\lim_{x\to2^{-}}\frac{\sqrt{4-x^{2}}}{\sqrt{6-5x+x^{2}}}=\lim_{x\to2^{-}}\frac{\sqrt{\left(2-x\right)\left(2+x\right)}}{\sqrt{\left(2-x\right)\left(3-x\right)}}=\lim_{x\to2^{-}}\frac{\sqrt{\left(2+x\right)}}{\sqrt{\left(3-x\right)}}=2$$

     - לכן נדרוש $\frac{4a+b}{2a+1}=2$

* ונקבל:

$$4a+b=4a+2 \quad \backslash -4a$$

$$b=2$$

- לסיכום, f רציפה ב$(-2,\infty)$ אם ורק אם $a\notin[-\frac{1}{2},0)$ ו- $b=2$

תרגיל 8.

- תהי $0<a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$
- תהי $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}b$

צ"ל: $a_n^{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}a^b$

פתרון:

- נסמן $0<c_n=a_n^{b_n}$
- לכן ניתן לכתוב $c_n=e^{ln(c_n)}=e^{b_n\cdot ln(a_n)}$
- לפי הנתון, $a_n>0$
- $ln\left(x\right)$ היא פונקציה אלמנטרית ומוגדרת לכל $x>0$ ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.
- לפי הגדרת רציפות בלשון סדרות, $\lim_{x\to\infty}ln\left(a_n\right)=ln\left(a\right)$
  - לפי הנתון $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}b$
  - לכן לפי חשבון גבולות מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_n\cdot ln\left(a_n\right)\right)=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}ln\left(a_n\right)=b\cdot ln\left(a\right)$$

- e^x היא פונקציה אלמנטרית, מוגדרת בכל $\mathbb{R}$ ולכן גם רציפה בכל $\mathbb{R}$,
  - לכן

$$\lim_{n\to\infty}e^{c_n}=e^{\lim_{n\to\infty}c_n}$$

* ולפי חוקי ln מתקיים:

$$e^{\lim_{n\to\infty} c_n} = e^{b\cdot ln(a)} = a^b$$

– מכיוון שהגדרנו $c_n = a_n^{b_n}$ והראנו ש$c_n = e^{b_n\cdot ln(a_n)}$ אז מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} e^{b\cdot ln(a)} = a^b$$