אינפי 1מ' (104031) | תרגול 21 - יוליה

שם: איל שטיין

January 9, 2023

נושאי השיעור: חישוב נגזרת, פונקציות הפיכות, נגזרות מסדר גבוה, משפט פרמה

נושא ראשון - חישוב נגזרת:

תרגיל 1. תהי $a_n = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ סדרה, $a>0$.

צ"ל: חשבו $\lim_{n\to\infty} a_n$ אם הגבול קיים.

פתרון:

- ניתן לכתוב את הסדרה כך: $a_n = \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$

$$a_n = \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}-a^0}{\frac{1}{n}-0}$$

- נגדיר $f(x)=a^x$ כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
  - f גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומתקיים: $f'(x)=a^x\cdot ln(a)$.
    - * בפרט $f'(0)=ln(a)$.
- לפי הגדרת הנגזרת:

$$ln(a) = f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^0}{x-0}$$

  - לפי משפט היינה, אם הגבול קיים אז לכל סדרה $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} x_n \neq 0$ ובפרט עבור $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} x_n = \frac{1}{n}$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \lim_{n\to\infty} a_n = f'(0) = ln(a)$$

נושא שני - פונקציות הפיכות:

תרגיל 2. פונקציות הפיכות:

- תהי $g\left(x\right)=arctan\left(x\right)$
- נשתמש בעובדה ש- $g\left(x\right)=\left(\tan\left(x\right)\right)^{-1}$ כדי למצוא את $g'\left(x\right)$

פתרון:

- **תזכורת - משפט:**
  - תהי $f\left(x\right)$ הפיכה ורציפה בסביבת $x=x_0$, גזירה ב-x_0 כך ש $f'\left(x_0\right)\neq0$.
  - אז:
    1. גם f^{-1} גזירה ב-$y_0=f\left(x_0\right)$
    2. וגם מתקיים ש $\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right)=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(y_0\right)\right)}$
- נסמן $f\left(x\right)=\tan\left(x\right)$.
  - f רציפה $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ וגם גזירה בכל נקודה בקטע.
    * $f'\left(x\right)=\frac{1}{\cos^2\left(x\right)}$ לכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
- תנאי המשפט מתקיימים בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ולכן נחפש את הנגזרת $g'\left(y\right)=\left(f^{-1}\left(y\right)\right)'$
  - ולכן לפי המשפט

$$\begin{aligned}g'\left(y\right)=\left(f^{-1}\left(y\right)\right)'&=\frac{1}{f'\left(arctan\left(y\right)\right)}\\&=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\left(arctan\left(y\right)\right)}}\\&=\cos^2\left(arctan\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

* לפי זהות טריגונומטרית: $\cos^2\left(\alpha\right)=\frac{1}{1+\tan^2\left(\alpha\right)}$
  · ולכן:

$$\cos^2\left(arctan\left(y\right)\right)=\frac{1}{1+\tan^2\left(arctan\left(y\right)\right)}=\frac{1}{1+y^2}$$

- ולכן $g'\left(x\right)=\frac{1}{1+y^2}$.

נושא שלישי - נגזרות מסדר גבוה:

תרגיל 3.

- חשבו נגזרת מסדר עשר:

$$(x\cdot\sin(x))^{(10)}$$

פתרון:

- **תזכורת - כלל לייבניץ:**
  - אם u,g גזירות לפחות n פעמים אז המכפלה שלהם $(u\cdot g)$ גם גזירה לפחות n פעמים ומתקיים:

$$(u\cdot g)^{(10)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)\right)$$

- אם ניקח אצלנו $u=x$, $g=\sin(x)$, הן גזירות אינסוף פעמים.
  - אבל $u'(x)=1$ ו$u''=0$ וכל הנגזרות $u^{(k)}=0$ אם $k\geq 2$
- עבור $g(x)=\sin(x)$ נקבל: $g'(x)=\cos(x)$, $g''(x)=-\sin(x)$, $g'''(x)=-\cos(x)$ ו-$g^{(4)}=\sin(x)$
  - כלומר $g^{(4k+m)}=g^{(m)}$
- נגזור את $x\cdot\sin(x)$ עשר פעמים ונקבל:

$$(x\cdot\sin(x))^{(10)}=\binom{10}{0}x\cdot\sin^{(10)}(x)+(x)'\cdot\sin^{9}(x)\cdot\binom{10}{1}$$

$$(x\cdot\sin(x))^{(10)}=\underbrace{\binom{10}{0}}_{=1}\cdot x\cdot\underbrace{\sin^{(10)}}_{=-\sin(x)}(x)+\underbrace{(x)'}_{=1}\cdot\underbrace{\sin^{9}(x)}_{=\cos(x)}\cdot\underbrace{\binom{10}{1}}_{=10}$$

$$=1\cdot x\cdot(-\sin(x))+1\cdot\cos(x)\cdot 10$$

תרגיל 4. נכון או לא נכון:

1. אם $f(x)$ גזירה ב-a אז f רציפה בסביבה של a

(א) **הטענה לא נכונה.**

i. לדוגמא:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ -x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

2. אם הגבול $\lim_{x\to a} f'(x)$ קיים אז f גזירה ב-a.

(א) **הטענה לא נכונה.**

i. לדוגמא:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$$

א׳. $f'(x)=1$ לכל $x\neq 0$

ב׳. ולכן $\lim_{x\to 0} f'(x)=1$.

ג׳. אבל כאשר $x=0$ הפונקציה f לא רציפה ולכן לא גזירה.

3. אם f רציפה ב-0 וקיים גבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=L$ אז $f(x)$ גזירה ב-0.

(א) **הטענה נכונה.**

(ב) נבדוק את הגזירות ב-0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

i. אנחנו לא יודעים מהו $f(0)$ אבל מכיוון ש-f רציפה, $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

א׳. לפי חשבון גבולות ניתן לומר ש $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{f(x)}{x^2}}_{\to L}\cdot\underbrace{x^2}_{\to 0}$

ב׳. כלומר $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ובגלל רציפות הפונקציה $f(0)=0$.

(ג) כעת הגבול: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}$

i. נכפול ב-$\frac{x}{x}$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{f(x)}{x^2}}^{\to L}\cdot\overbrace{x}^{\to 0}=0$$

(ד) ולכן $f'(0)=0$

נושא רביעי - משפט פרמה:

משפט 5.

- תהי f המוגדרת בסביבה של x_0, גזירה ב-x_0 כך שבנקודה x_0 מתקבל קיצון מקומי.
- אזי $f'(x_0)=0$.

דוגמה 6. $f(x)=x^2\cdot D(x)$ - כאשר $D(x)$ היא דיריכלה.

- היא גזירה ב$x=0$ כי $f'(0)=0$
- היא מקבלת ב-0 מינימום מקומי.
- לכן אם נחפש מינימום ומקסימום בקטע, נבדוק את הנקודות הפנימיות.
  - הקיצון <u>יכול</u> להתקבל בנקודה פנימית אם $f'(x)=0$ או אם (הנגזרת) לא קיימת.

תרגיל 7. - לנסות לבד

- יהיו $a_1,a_2,\dots a_n>0$
- נתון שלכל $x\in[-1,1]$ מתקיים: $(a_1)^x+(a_2)^x+\ldots+(a_n)^x\geq n$

צ"ל: $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$

פתרון:

- מכיוון ש- $0\in[-1,1]$, נקבל שעבור $x=0$ מתקיים $n=(a_1)^0+(a_2)^0+\ldots+(a_n)^0\geq n$
- הערה: הפונקציה $f(x)=(a_1)^x+(a_2)^x+\ldots+(a_n)^x$ היא פונקציה גזירה.