שם: איל שטיין

March 20, 2024

[

לוגיקה | תרגול 9

שם: איל שטיין

March 20, 2024

נושא השיעור: תחשיב היחסים

נושא ראשון - סינטקס

הגדרה 1. מילון.

הגדרה 1: מילון $\tau=\left\langle R_{1}^{n_{1}},R_{2}^{n_{2}},\ldots,F_{1}^{m_{1}},F_{2}^{m_{2}},\ldots,c_{1},c_{2},\ldots\right\rangle$ מורכב מסימני יחס, סימני פונקציה וסימני קבוע.

- סימן יחס $R_{i}^{n_{i}}$: n_{i} הוא המקומיות של היחס ו־i הוא אינדקס.

  (בדרך כלל נסמן 'סימן יחס R_{i} n_{i}־מקומי' במקום $R_{i}^{n_{i}}$).
- סימן פונקציה $F_{i}^{m_{i}}$: m_{i} הוא המקומיות של הפונקציה ו־i הוא אינדקס.

  (בדרך כלל נסמן 'סימן פונקציה F_{i} m_{i}־מקומי' במקום $F_{i}^{m_{i}}$).
- סימן קבוע c_{i}: i הוא אינדקס.
- המשתנים זהים בכל מילון ונסמן $\mathrm{Var}=\left\{ v_{0},v_{1},v_{2},\ldots\right\}$.

דוגמה. דוגמה למילון:

- $\tau_{1}=\left\langle R_{1}^{2},R_{2}^{2},F_{1}^{3},c_{1}\right\rangle$ או בכתיב אחר: $\tau_{1}=\left\langle R_{1}\left(\cdot,\cdot\right),R_{2}\left(\cdot,\cdot\right),F_{1}^{3}\left(\cdot,\cdot,\cdot\right),c_{1}\right\rangle$
- בהקבלה לתוכנה, זה כמו קובץ ה־$header$ שלנו.

– מילון זה כמו הכרזה על פונקציות.

הגדרה 2. שמות עצם מעל מילון.

הגדרה 2: קבוצת שמות העצם מעל מילון τ היא קבוצה אינדוקטיבית $\mathrm{Term}\left(\tau\right)=X_{B_{term},F_{term}}$ כאשר:

בסיס: $B_{term}=\mathrm{Var}\cup\left\{c_1,c_2,\dots\right\}$ (סימני הקבוע שבמילון τ והמשתנים)

פעולות: $F_{term}=\{$סימני הפונקציה שבמילון $\tau\}$

דוגמה. דוגמאות לשמות עצם מעל המילון τ_1 שהגדרנו:

- v_1
- c_1
- $F_1\left(v_2,v_2,c_1\right)$
- $F_1\left(v_1,v_2,F_1\left(v_2,v_2,c_1\right)\right)$

בתחשיב הפסוקים עבדנו עם פסוקים.
בתחשיב היחסים נעבוד עם נוסחאות:

הגדרה 3. נוסחאות אטומיות (זו לא קבוצה אינדוקטיבית).
הגדרה 3: קבוצת הנוסחאות האטומיות מעל מילון τ היא הקבוצה $\mathrm{AF}\left(\tau\right)$ המוגדרת באופן הבא:

- אם R_{i} הוא סימן יחס n־מקומי מהמילון τ
  ו־$t_1,t_2,\dots,t_n$ הם שמות עצם מעל τ, אז $R_i(t_1,t_2,...,t_n)$ היא נוסחה אטומית.
- אם t_1 ו־t_2 הם שמות עצם מעל τ, אז $\left(t_1\approx t_2\right)$ היא נוסחה אטומית.

דוגמה. דוגמאות לנוסחאות אטומיות מעל מילון τ_1:

- $R_1\left(c_1,v_1\right)$
- $\left(c_1\approx v_1\right)$
- $R_2\left(F_1\left(v_1,v_2,c_1\right),v_2\right)$
- $\left(F_1\left(v_1,v_2,c_1\right)\approx c_1\right)$
- אבל המחרוזת $R_1\left(c_1,R_2\left(c_1,v_1\right)\right)$ זו לא נוסחה אטומית כי אחד האיברים ביחס הוא יחס ולא שם עצם מעל τ_1. (בהמשך נראה שנוסחאות אטומיות מוגדרות ככה כי המטרה של יחס היא לבטא טענה על שמות עצם).

הגדרה 4. אוסף הנוסחאות מעל מילון τ.

הגדרה 4: אוסף הנוסחאות מעל מילון τ היא קבוצה אינדוקטיבית $X_{B_{form},F_{form}}$ כאשר:

בסיס: $B_{form} = \mathrm{AF}\left(\tau\right)$ (הנוסחאות האטומיות)

פעולות: $F_{form} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{\forall v_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\exists v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, כאשר

- הפעלת קשרים מתבצעת באופן זהה לתחשיב הפסוקים.
- הפעלת כמתים מתבצעת כך:
  אם φ נוסחה אז לכל $i \in \mathbb{N}$ גם $(\forall v_i \varphi)$ ו־$(\exists v_i \varphi)$ הן נוסחאות.

כלומר הבסיס הוא הנוסחאות האטומיות.

הפעולות הן ארבעת הפעולות מתחשיב הפסוקים בתוספת הכמתים $\forall, \exists$.

דוגמה. דוגמאות לנוסחאות מעל τ_1:

- $R_1\left(c_1, v_1\right)$ זו נוסחה אטומית.
- $R_1\left(c_1, v_1\right) \wedge \left(c_1 \approx v_1\right)$, זו הפעלה של הפעולה $\wedge$ על שתי נוסחאות אטומיות.
- $\left(\forall v_1 R_1\left(c_1, v_1\right)\right) \rightarrow \left(F_1\left(v_2, v_2, c_1\right) \approx c_1\right)$
- נשים לב כי v_1 הוא נוסחה כי הוא שם עצם ולכן הוא לא בנוסחאות האטומיות.
- וגם $R_2\left(c_1, v_1\right) \rightarrow F_1\left(v_2, v_2, c_1\right)$ לא נוסחה, כי $F_1\left(v_2, v_2, c_1\right)$ שם עצם ולא נוסחה (כלומר לא חלק מהנוסחאות האטומיות, שהן הבסיס).

נושא שני - סמנטיקה:

ההגדרה הבסיסית היא מבנה:

הגדרה 5. מבנה M עבור מילון τ.

הגדרה 5: מבנה $M = \left\langle D^M, R_1^M, R_2^M, \ldots, F_1^M, F_2^M, \ldots, c_1^M, c_2^M, \ldots \right\rangle$
עבור $\tau = \left\langle R_{n_1,1}, R_{n_2,2}, \ldots, F_{m_1,1}, F_{m_2,2}, \ldots, c_1, c_2, \ldots \right\rangle$ מורכב מהחלקים הבאים:

- $D^M \neq \emptyset$ - קבוצת התחום, העולם.
- $R_i^M \subseteq \underbrace{D^M \times D^M \times \cdots \times D^M}_{n_i}$ - הפירוש של סימן יחס R_i n_i־מקומי.
  כלומר, R_i^M הוא יחס n_i־מקומי מעל D^M.
- $F_i^M : \underbrace{D^M \times D^M \times \cdots \times D^M}_{m_i} \rightarrow D^M$ - הפירוש של סימן פונקציה F_i m_i־מקומית.
  כלומר, F_i^M היא פונקציה m_i־מקומית מעל D^M.
- $c_i^M \in D^M$ - הפירוש של סימן קבוע c_i. כלומר, c_i^M איבר בתחום D^M.

הערה:

- במילון, דיברנו על **סימן** יחס ועל **סימן** קבוע.
- במבנה, זה כבר לא סימן אלא יחס ממש או קבוע ממש.

דוגמה 6. דוגמאות למבנים מעל מילון

- ניקח מילון $\tau = \langle R(\cdot,\cdot), F(\cdot,\cdot), c\rangle$
- $M_1 = \langle \{0,1,2,3\}, \{(0,0),(0,1),(1,2)\}, first(i,j)=i, 0\rangle$
- $M_2 = \langle \mathbb{N}, <, +, 0\rangle$

כלומר המבנה הוא התוכן של הקבועים והפונקציות.
בהקבלה לתוכנה, המבנה הא התוכן של הפונקציות והקבועים.

הגדרה 7. השמות.
השמה z עבור מבנה M היא פונקציה $z:\{v_0,v_1,\dots\}\to D^M$.

דוגמה 8. דוגמה להשמה מעל מילון τ.

- עבור המבנה $M=\langle \mathbb{Z}, \leq, +, 1005\rangle$ מעל המילון τ ממקודם, נגדיר השמה:

$$z(v_i) = \begin{cases} -5 & 0\leq i\leq 10 \\ 0 & 10\leq i\leq 20 \\ 5 & else \end{cases}$$

הגדרה 9. השמה מורחבת:
הגדרה 7: לכל השמה z, ההשמה המורחבת היא פונקציה $\overline{z}:\mathrm{Term}(\tau)\to D^M$ המוגדרת באינדוקציה על מבנה שמות העצם:

בסיס: לכל משתנה v_i, $\overline{z}(v_i) = z(v_i)$
לכל סימן קבוע c_i, $\overline{z}(c_i) = c_i^M$

סגור: לכל סימן פונקציה F_i n־מקומי, $\overline{z}(F_i(t_1,t_2,\dots,t_n)) = F_i^M(\overline{z}(t_1),\overline{z}(t_2),\dots,\overline{z}(t_n))$

דוגמה 10. דוגמה להשמה מורחבת:

- $\overline{z}(F(v_0,F(v_{10},c)))=1000$, כי לפי הגדרה צריך להכניס את z פנימה:

$$\overline{z}(F(v_0,F(v_{10},c))) = F^M(\overline{z}(v_0),\overline{z}(F(v_{10},c)))$$

– הגדרנו את F^M להיות חיבור ולכן:

$$= \overline{z}\left(v_0\right) + \overline{z}\left(F\left(v_{10}, c\right)\right)$$

* נציב את ההגדרה $\overline{z}\left(v_0\right) = z\left(v_0\right)$ ואת ההגדרה $\overline{z}\left(F\left(v_{10}, c\right)\right) = F^M\left(v_{10}, c\right)$:

$$= z\left(v_0\right) + F^M\left(\overline{z}\left(v_{10}\right), \overline{z}\left(c\right)\right)$$

· נציב את ההגדרה של F^M להיות פעות החיבור, את הגדרת $\overline{z}\left(v_{10}\right) = z\left(v_{10}\right)$ ואת ההגדרה $\overline{z}\left(c\right) = z\left(c\right)$ ונקבל:

$$= z\left(v_0\right) + \left(z\left(v_{10}\right) + z\left(c\right)\right)$$

· הגדרנו $v_0 = 0$, $v_{10} = 10$, $z\left(c\right) = 1005$ ולכן נקבל:

$$= z\left(0\right) + \left(z\left(10\right) + z\left(c\right)\right)$$

$$= -5 + \left(0 + 1005\right)$$

$$= 1000$$

הגדרה 11. השמה מתוקנת:

הגדרה 8: לכל השמה z, משתנה v_i ו-$d \in D^M$, ההשמה המתוקנת היא ההשמה הבאה:

$$z\left[v_i \leftarrow d\right]\left(v_j\right) = \begin{cases} d & i = j \\ z(v_j) & i \neq j \end{cases}$$

הגדרה 12.

<u>הגדרה 9</u>: עבור מבנה M, השמה z ונוסחה φ היחס $M \vDash_z \varphi$ (M ו־z מספקים את φ) מוגדר באינדוקציה:

בסיס: $M \models_z R_i\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right)$ אמ`מ $\left(\overline{z}\left(t_1\right), \overline{z}\left(t_2\right), \ldots, \overline{z}\left(t_n\right)\right) \in R_i^M$

$M \models_z t_1 \approx t_2$ אמ`מ $\overline{z}\left(t_1\right) = \overline{z}\left(t_2\right)$

סגור: $M \vDash_z \neg\varphi$ אמ`מ $M \nvDash_z \varphi$

$M \vDash_z \varphi_1 \vee \varphi_2$ אמ`מ $M \vDash_z \varphi_2$ או $M \vDash_z \varphi_1$

$M \vDash_z \varphi_1 \wedge \varphi_2$ אמ`מ $M \vDash_z \varphi_2$ וגם $M \vDash_z \varphi_1$

$M \vDash_z \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ אמ`מ (אם $M \vDash_z \varphi_1$ אז $M \vDash_z \varphi_2$) כלומר $M \nvDash_z \varphi_1$ או $M \vDash_z \varphi_2$

$M \vDash_z \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ אמ`מ ($M \vDash_z \varphi_1$ אם ורק אם $M \vDash_z \varphi_2$)

$M \models_z \forall v_i \varphi$ אמ`מ לכל $d \in D^M$ מתקיים $M \models_{z[v_i \leftarrow d]} \varphi$

$M \models_z \exists v_i \varphi$ אמ`מ קיים $d \in D^M$ שמקיים $M \models_{z[v_i \leftarrow d]} \varphi$

נסתכל על ההגדרה $M \models_z \forall v_i \varphi$ אמ"מ לכל $d \in D^M$ מתקיים φ $M \models_{z[v_i \leftarrow d]}$:
הפירוש שלה הוא שאני יכול להחליף בהשמה את v_1 בכל $d \in D^M$ ועדיין ההשמה תספק את φ.

תרגיל 13.

<u>תרגיל 1</u>: יהיו $\tau = \langle R(\circ, \circ), F(\circ, \circ), c \rangle$ מילון, יהי $M = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, 1005 \rangle$ מבנה מעל τ, ו־z ההשמה עבור M שהוגדרה קודם.

הוכיחו/ הפריכו את הטענות הבאות:

1. $M \vDash_z R\left(v_0, F\left(v_0, F\left(v_{10}, c\right)\right)\right) \vee \left(v_0 \approx v_{10}\right)$
2. $M \vDash_z \forall v_0 R\left(v_0, v_1\right)$

פיתרון 1. סעיף א':

- נכתוב את ההשמה שהוגדרה קודם:

$$z = \begin{cases} -5 & 0 \leq i \leq 10 \\ 0 & 10 \leq i \leq 20 \\ 5 & else \end{cases}$$

- כדי לדעת אם הטענה נכונה, נסתכל על הפירוש ונראה אם הוא נכון.

- תחת ההשמה z והמבנה M v_0 יקבל -5 ו-v_{10} יקבל 0:

$$z\left(v_0\right)=-5$$

$$z\left(v_{10}\right)=0$$

- הטענה נכונה. נראה בגרירות דו כיווניות לפי הגדרה:

$$M\models_z R\left(v_0,F\left(v_0,F\left(v_{10},c\right)\right)\right)\vee\left(v_0\approx c_{10}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$M\models_z R\left(v_0,F\left(v_0,F\left(v_{10},c\right)\right)\right)\;\;OR\;\;M\models_z\left(v_0\approx c_{10}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(z\left(v_0\right),\overline{z}\left(\overbrace{F\left(v_0,F\left(v_{10},c\right)\right)}^{=1000}\right)\right)\in R^M\;\;OR\;\;z\left(v_0\right)=z\left(v_{10}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-5\leq 1000\;\;OR\;\;0=-5$$

- מתקיים $-5\leq 1000$ ולכן הטענה נכונה.

פיתרון 1. סעיף ב':

- נשים לב ש-v_1 מקבל -5.
- נראה שהטענה $M\models_z\forall v_0R\left(v_0,v_1\right)$ לא נכונה.
- $M_z\models\forall R\left(v_0,v_1\right)$ אמ"מ לכל $d\in D^M$ מתקיים $M_{\underbrace{z\left[v_0\leftarrow d\right]}_{z'}}R\left(v_0,v_1\right)$.
  - וזה קורה אמ"מ לכל $d\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\left(\overline{z}'\left(v_0\right),\overline{z}'\left(v_1\right)\right)\in R^M$.
  - וזה קורה אמ"מ לכל $d\in\mathbb{Z}$ מתקיים $d\leq-5$.

– הטענה לא נכונה ולכן גם הטענה $M \models_z \forall v_0 R(v_0, v_1)$ לא נכונה.