(104031) אינפי 1מ' | תרגול 23 - יוליה

שם: איל שטיין

January 16, 2023

נושאי השיעור: משפט דרבו, ליפשיצית, לופיטל

נושא ראשון - משפט דרבו:

תרגיל 1.

- תהי f גזירה בקטע $(0,1)$ ורציפה ב$[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)=0$ וגם $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

צ"ל: קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש- $f'(c)=\frac{2}{\pi}$.

פתרון:

- ראשית נשתמש במשפט רול:
  - הפונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ וגזירה בקטע $(0,1)$.
    - לכן לפי משפט רול קיימת $a\in(0,1)$ כך ש-$f'(a)=0$
- לפי הנתון f גזירה בקטע הסגור בין a ל-$\frac{1}{2}$ כי $0<a<1$.
  - לכן לפי משפט דרבו, f' מקבלת בקטע הזה את כל הערכים שבין $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ובין $f'(a)=0$
    - ובפרט f' מקבלת את $0<\frac{2}{\pi}<0$
      - כלומר קיימת c בקטע בין a ובין $\frac{1}{2}$, ולכן $c\in(0,1)$, כך ש- $f'(c)=\frac{2}{\pi}$

נושא שני - ליפשיציות:

הגדרה 2. ליפשיצית

- תהי f המוגדרת ב-I.
- נאמר כי f ליפשיצית אם קיים $K\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in I$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\leq K\cdot|x-y|$.

הערה 3. ידוע כי:

- אם f גזירה והנגזרת חסומה $\Leftarrow f$ ליפשיץ (מוכיחים בעזרת לגראנז') $\Leftarrow f$ רציפה במ"ש $\Leftarrow f$ רציפה.

הערה 4.

- רציפה במ"ש $\not\Rightarrow f$ רציפה, לדוגמה: $\tan(x)$ או x^2
- ליפשיץ $\not\Rightarrow$ רציפה במ"ש, לדוגמה: $\sqrt{x}$ בקטע $[0,1]$
- f' חסומה$\not\Rightarrow$ ליפשיץ, לדוגמה: $|x|$לא גזירה אבל כן ליפשיץ

תרגיל 5.

- תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כל שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$

צ"ל: הוכיחו כי f קבועה.

פתרון - דרך ראשונה:

- יהי $x_0\in\mathbb{R}$.
  - אזי $0\le\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|\xrightarrow[x\to x_0]{}0$
    - ולכן $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=0$
      - ולפי משפט, אם הגבול בערך מוחלט שווה לאפס אז גם הגבול עצמו שווה אפס.
      - לכן: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$
      - אם $f'(x_0)=0$ לכל $x_0\in\mathbb{R}$ אז f קבועה.

פתרון - דרך שנייה:

- יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ (בה"כ $x<y$)
- ניקח נקודה $z=\frac{x+y}{2}$ ונבחן את הביטוי $|f(x)-f(y)|$:

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(z)+f(z)-f(y)|$$

  - ולפי אי שוויון המשולש מתקיים:

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|$$

    - ולפי הנתון מתקיים:

$$|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|\le|x-z|^2+|z-y|^2$$

- נציב $z=\frac{x+y}{2}$ ונקבל:

$$\frac{|x-y|^2}{2^2}+\frac{|x-y|}{2^2}^2=\frac{|x-y|^2}{2}$$

* נמשיך כך באופן אינדוקטיבי ונקבל שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$0\le|f(x)-f(y)|\le\frac{|x-y|^2}{2^n}$$

- מכיוון ש $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^n$ היא תהיה קטנה מכל $\varepsilon>0$ ולכן גם $0\le|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
- ומכיוון ש-$|f(x)-f(y)|$ הוא מספר קבוע שקטן מכל $\varepsilon>0$
- אז $|f(x)-f(y)|=0$.

נושא שלישי - לופיטל:

משפט 6. משפט לופיטל.

- יהיו f,g גזירות.
- אם:
  - $f(x_0)=g(x_0)=0$, או במילים אחרות $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ וגם $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$
  - $g'(x)\neq 0$ בסביבה של x_0.
  - הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ קיים.
- אז $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

תרגיל 7.

- חשבו את הגבול של $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$

פתרון:

- נניח שבדקנו שגם המונה וגם המכנה שואפים ל-0 והנגזרת של המכנה לא מתאפסת.
- נעשה לופיטל "$\frac{0}{0}$" ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{\cos(x)}$$

  - קיבלנו שגבול הנגזרות לא קיים, ולכן לא ניתן להשתמש בלופיטל.

- נוכיח שהגבול של המנה קיים בלי קשר למשפט לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{x}{\sin(x)}}^{\to 1}\cdot x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

  – ולפי חסומה כפול שואפת לאפס נקבל $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}=0$

תרגיל 8.

- חשבו את הגבול: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

פתרון:

- נגדיר $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$.
  – f מוגדרת וחיובית בסביבת $x=0$.
    * ולכן ניתן לרשום אותה:

$$e^{ln(f(x))}$$

  – נבחן את הביטוי $ln(f(x))$ ונקבל:

$$ln(f(x))=\frac{1}{\sin(x)}\cdot ln(1+x)$$

    * כעת נמצא את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{\sin(x)}$:
      · לפי לופיטל "$\frac{0}{0}$" מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos(x)}=1$$

    * נציב $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{\sin(x)}=1$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=e^1=e$$

תרגיל 9.

- חשבו את הגבול: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+ln(x)\right)$

פתרון:

- נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}+ln\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+x\cdot ln\left(x\right)}{x}$$

  - נבחן את הביטוי $\lim_{x\to0^+}x\cdot ln\left(x\right)$:

$$x\cdot ln\left(x\right)=\frac{ln\left(x\right)}{\frac{1}{x}}$$

    * כעת לפי לופיטל "$\frac{\infty}{\infty}$" נקבל:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{ln\left(x\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left(-x\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(-x\right)=0$$

  - כלומר קיבלנו ש:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1+\overbrace{x\cdot ln\left(x\right)}^{\to0}}{\underbrace{x}_{\to0}}=+\infty$$

הערה 10. מומלץ לזכור את סדר ה"מהירות" של השאיפה לאפס $x^x<\boldsymbol{e^x}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{ln\left(x\right)}$ - הגבולות החשובים ביותר מודגשים.

תרגיל 11.

- נגדיר סדרה לכל $n\in\mathbb{N}$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{n+\frac{1}{n}}-e^n\right)$$

- נגדיר $f\left(x\right)=\left(e^{x+\frac{1}{x}}-e^x\right)$.
  - הפונקציה f מוגדרת וגזירה בקטע $\left(0,\infty\right)$.

* נבחן את $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)$:

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to\infty} e^{x}\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{-x}}$$

· כעת לפי לופיטל "$\frac{0}{0}$" נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^{2}}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\overbrace{\frac{e^{x}}{x^{2}}}^{\to\infty}\cdot\overbrace{e^{\frac{1}{x}}}^{\to1}$$

· לפי משפט "חשבון גבולות" לגבולות אינסופיים מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\overbrace{\frac{e^{x}}{x^{2}}}^{\to\infty}\cdot\overbrace{e^{\frac{1}{x}}}^{\to1}=\infty$$

· ולכן הגבול של מנת הנגזרות קיים ושווה לאינסוף.

- מצאנו ש $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$
  - לכן לפי משפט היינה, לכל סדרה $a_{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ובפרט עבור $a_{n}=n$ מתקיים ש $f\left(a_{n}\right)=\infty$
    * כלומר $\lim_{n\to\infty}\left(e^{n+\frac{1}{n}}-e^{n}\right)=\infty$.