לוגיקה | תרגול 2

שם: איל שטיין

January 31, 2024

נושא השיעור: אינדוקציית מבנה - המשך

תרגיל 1. עבור $X_{B,F}$ מהדוגמה בתרגול הקודם:

$$X=\{+,-,(,),0,1,2,\ldots,9\}^{*}$$

$$B=\{0,1,2,\ldots,9\}$$

$$F=\{f_{-},f_{+}\}$$

$$f_{op}\left(x_{1},x_{2}\right)=\left(f_{1}\ op\ f_{2}\right)$$

$$T_{1}=\{\}$$

צ"ל: הוכיחו כי $(3\notin X_{B,F}$

פתרון:

- נבחר את T_1.
  - בתרגול הקודם ראינו כי $X_{B,F}\subseteq T_1$
  - ומתקיים $(3\notin B$ וגם לא נגמר בסוגר ימני ולכן לא שייך ל-T_1.
- מסקנה: $(3\notin X_{B,F}$

הגדרה. רישא

- נאמר ש-β היא **רישא** של α אם α, β מילים כך ש:

$$\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\beta = b_1 b_2 \dots b_k$$

  – כאשר $n \leq k$ ולכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $a_i = b_i$.

הגדרה. רישא ממש

  – נאמר כי β רישא ממש של α אם β רישא של α וגם $\alpha \neq \beta$.

תרגיל 2.

- עבור $X_{B,F}$ מהדוגמה, הוכיחו כי $a = (2+3) + (5-6) \notin X_{B,F}$.

פתרון:

- a מקיים את T_1, T_2 ולכן לא נוכל להשתמש בהם.
- ניסיון ראשון: בכל רישא ממש, כמות הסוגריים הפותחים) צריכה להיות גדולה ממש מכמות הסוגריים הסוגרים (:

$$T_3 = \left\{ x \in W \;\middle|\; \forall \beta \neq \varepsilon \;:\; \#_{(}(\beta) > \#_{)}(\beta) \right\}$$

  – ונרצה להראות ש$X_{B,F} \subseteq T_3$.
    * ואכן האיבר $a \notin T_3$ כי הרישא ממש $(2+3)$ מקיימת $\#_{(}(\beta) = \#_{)}(\beta)$.
  – **בסיס:** לא פתרנו בכיתה, רק אמרנו שהבסיס יעבוד בצורה קלה.
  – **הנחה:**
    * נניח כי הטענה נכונה עבור $x_1, x_2 \in T_3$
  – **צעד (ניסיון):**
    * ניקח את $f_+(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \in T_3$
      · אבל עבור) $= x_1$, $x_2 = 1$ מתקיים כי $x_2, x_1 \in T_3$ באופן ריק (כי אין להם אף רישא ממש)
      · בהפעלת f_+ נקבל:

$$x = () + 1)$$

      · הבעיה הזו קרתה כי לקחנו מילה $x_1 \notin X_{B,F}$. אם היינו לוקחים את $T_3 \cap T_2$ (כלומר שבכל מילה מספר הסוגריים הימניים שווה לשמאליים), אז הבעיה הזו לא הייתה קורית.

- מותר לקחת את החיתוך $T_3 \cap T_2$ כי $X_{B,F} \subseteq T_2$.

* כלומר הבעיה היא שהתכונה T_3 מביאה אותנו למצב שאנחנו מכניסים מילה שלא ב-$X_{B,F}$. הפיתרון הוא להוסיף עוד תכונה ש-$X_{B,F}$ כבר מקיימת.

- **ניסיון נוסף (עם תכונה מחוזקת):**

  – במקום לקחת את התכונה $T' = T_3 \cap T_2$ (ואז נצטרך בכל הסבר להסביר למה $X_{B,F} \subseteq T_2$), נגדיר את התכונה המחוזקת:

$$T_3' = \{x \in W \mid x \in X_{B,F} \ \wedge \ x \in T_3\}$$

  – **בסיס:** נראה לכל $x \in B$ כי $x \in T_3'$.

  1. $x \in B \Leftarrow x \notin X_{B,F}$
  2. $x \in B \Leftarrow x \in T_3$ באופן ריק.

  – **צעד:**

  * יהיו $x_1, x_2 \in T_3'$.
  * יהי $x = f_+(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)$

  1. מהנחת האינדוקציה $x_1, x_2 \in X_{B,F}$.
     - ולכן $x \in X_{B,F}$ מהגדרת $X_{B,F}$.
  2. נחלק למקרים לפי מהי β (הרישא ממש של x):

     (א) אם $\beta = ($ אז התכונה T_3 מתקיימת כי מספר $\#_((\beta) > \#_)(\beta)$

     (ב) אם $\beta = (\beta_1$ כאשר $\beta_1 \neq \varepsilon$ (כי במקרה הקודם ענינו על המקרה של המילה הריקה) היא רישא של x_1 או $\beta = (x_1+$

     - כעת מתקיים

$$\#_((\beta) = 1 + \#_((\beta_1)$$

     כאשר $\beta_1 = x$ במקרה הזה.

     - מהנחת האינדוקציה אנחנו יודעים ש-$\#_((\beta_1) \geq \#(\beta_1)$
     - ומכיוון שאין עוד סוגריים ימניים ב-β, מתקיים:

$$\#_)(\beta) = \#_)(\beta_1)$$

     - ולכן מתקיים:

$$\#_((\beta) = 1 + \#_((\beta_1) > \#_)(\beta)$$

     (ג) אם $\beta = (x_1 + \beta_2$ כאשר $\beta_2 \neq \varepsilon$ היא רישא של x_2.

     - באותו אופן:

$$\#_((\beta) = 1 + \#_((x_1) + \#_((\beta_2)$$

$$\underbrace{\geq}^{X_{B,F},T_2} 1+\#_{)}(x_2)+\#_{)}(\beta_2)$$

$$=1+\#_{)}(\beta)$$

$$>\#_{)}(\beta)$$

- בנוסף, האיבר $a\notin T_3'$ ולכן $a\notin X_{B,F}$.

תרגיל 3.
נסמן $W=P\left(X_{B,F}\right)$, כלומר כל תתי הקבוצות של $X_{B,F}$.
למשל איברים ב-W הם: $\{0,1,2\}$, $\emptyset$, $X_{B,F}$ וכו'.
ונגדיר:

- כל קבוצות הסינגלטונים

$$B_1=\{\{x\}\ \mid x\in X_{B,F}\}$$

- ונגדיר את קבוצת הפוקנציות $F_1=\{f_\cup,f_\cap\}$ כאשר:

$$f_\cup(z_1,z_2)=z_1\cup z_2$$

$$f_\cap(z_1,z_2)=z_1\cap z_2$$

הוכיחו/הפריכו: $X_{B,F}\in X_{B_1,F_1}$.

עקרונות לפיתרון:

- קודם כל אנחנו תמחילים מסינגלטון ורוצים להגיע לכל האיברים ב-$X_{B,F}$ ולכן אנחנו לא נשתמש בחיתוך אלא רק באיחוד.
- מכיוון שאנחנו יודעים ש-$X_{B,F}$ זו קבוצה אינסופית ובבסיס יש רק קבוצות סופיות.
- לכן נגדיר את הקבוצה $T=\{A\in W\ \mid\ A\ is\ finite\}$
  - נצטרך להראות ש:
    1. $X_{B,F}\notin T$

* נעשה זאת על ידי הגדרת הקבוצה האינסופית $Y = \{0, (0+0), ((0+0)+0), \dots\}$ ולהראות באינדוקציה שהיא תת קבוצה של $X_{B,F}$.

2. $X_{B_1,F_1} \subseteq T$

* נראה זאת באינדוקציית מבנה, כי ניקח איבר מהבסיס שהם סינגלטונים סופיים ולכן שייכים ל-T.
* הנחת האינדוקציה תהיה לקחת שתי קבוצות סופיות והצעד יהיה להראת שאיחוד וחיתוך שומר על סופיות הקבוצה.