(104031) אינפי 1מ' | תרגול 2 - יוליה

שם: איל שטיין

January 25, 2023

נושאי השיעור: הוכחה של אי שוויון הממוצעים, אינדוקציה, אי שוויון ברנולי

משפט 1. אי שוויון הממוצעים:
עבור

$$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$$

ממוצע חשבוני הוא:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

ממוצע הנדסי הוא:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

ממוצע הרמוני:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

אי שוויון הממוצעים טוען ש: חשבוני $\leq$ הנדסי $\leq$ הרמוני

בשיעור הזה אנחנו גם נראה שהשוויון מתקבל או"א כל הספרים זהים, כלומר $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

הוכחה.
נתחיל בלהראות שסכום חשבוני $\leq$הנדסי. ■

- נניח שיש לנו רק שני מספרים $a_1, a_2 > 0$

- **צ"ל:** $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}$
  - נתחיל בלראות מה חיובי

$$\sqrt{\underbrace{a_1 \cdot a_2}_{>0}} \le \underbrace{\frac{a_1+a_2}{2}}_{>0} \quad \backslash^2$$

  - אם ורק אם, כי המספרים חיוביים

$$a_1 \cdot a_2 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$

$$a_1^2 - 2a_2a_1 + a_2^2 \ge 0$$

אם ורק אם

$$(a_1 - a_2)^2 \ge 0$$

* כשנרצה להגיש את התרגיל, נתחיל מהסוף ונעלה למעלה.

- נניח שהוכנו ששכום חשבוני $\geq$הנדסי לכל n. נראה מכך ששכום הנדסי $\le$ סכום הרמוני. הוכחה:
  - יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$
  - גם ההופכי שלהם יהי גדול מ0:

$$0 < \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$$

  - נראה את השורש ה n

$$0 < \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}} \le \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

  - מכיוון שהכל חיובי אפשר להפוך:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

נושא 2 - אינדוקציה:

- הוכחה בשלושה שלבים:

1. בסיס - נראה שהטענה נכונה עבור n_0 כלשהו.
2. הנחה - נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו.
3. צעד - בעזרת מספר (2), נוכיח כי הטענה נכונה גם עבור $(n+1)$

- נוח להשתמש בה בטענות מסוג: "הוכיחו כי לכל n טבעי..."

דוגמה 2. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n. ■

- בסיס: מכיון ש$\mathbb{N}$מתחיל ב1 נתחיל ב$n=1$.

$$\sum_{1}^{1} 1^2 = \frac{1\left(1+1\right)\left(2+1\right)}{6} = 1^2$$

- הנחה: נניח שהטענה מתקיימת עבור n כלשהו ונוכיח עבור $n+1$.
  - כלומר, מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

  - וצ"ל

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{\left(n+\right)\left(\left(n+1\right)+1\right)\left(2\left(n+1\right)+1\right)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2n+3\right)}{6}$$

- נתחיל להתבונן בביטוי:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2$$

- הביטוי הזה שווה ל:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

- לפי הנחת האינדוקציה, אמרנו שמתקיים:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- נציב את $\sum_{k=1}^{n} k^2$ ב $\sum_{k=1}^{n+1} k^2$
  - נקבל:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

תרגיל 3. אי שוויון ברנולי:

יהי $\alpha < -1$, אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$$

פתרון 4. נוכיח באידוקציה על n.

- **בסיס:** $n = 1$
  - יוצא לנו ש:

$$(1+\alpha)^1 \geq 1 + 1 \cdot \alpha$$

- **הנחה:** נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו ולאחר מכן נוכיח עבור $n+1$:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha \quad \backslash \overbrace{(1+\alpha)}^{>0}$$

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{n+1} &\geq (1+n\cdot\alpha\ )(1+\alpha)\\ &= 1+(n+1)\,\alpha+\underbrace{n\cdot\alpha^2}_{\geq 0}\end{aligned}$$

– אפשר לקחת את הביטוי האחרון ולראות ממה הוא גדול יותר:

$$1+(n+1)\,\alpha+\underbrace{n\cdot\alpha^2}_{\geq 0}\geq 1+(n+1)\,\alpha$$

– לבסוף מקבלים

$$(1+\alpha)^n\geq 1+(n+1)\,\alpha$$

* הערה: אם $\alpha\neq 0$ אז

$$(1+\alpha)^n>1+\alpha\cdot n,\ \ n>1$$

* מסקנה עבור $\alpha=\frac{1}{n}>-1$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2$$

תרגיל 5. הוכיחו כי לכל $n\geq 6$ מתקיים

$$n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

פתרון 6. נוכיח בעזרת אידוקציה על n

• בסיס: $n=6$

$$720=6!<\left(\frac{6}{2}\right)^6=27^2$$

- הנחה: נניח עבור n ולאחר מכן נוכיח עבור $n+1$
  - נניח ש:

$$1 < \frac{n^2}{2^n - n!} \Leftrightarrow n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

- צ"ל:

$$1 < \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} - (n+1)!}$$

- נבחן את הביטוי שצ"ל:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} - (n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{2} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot 2^n} \quad \backslash \cdot \frac{n^n}{n^n}$$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} - (n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} \cdot \underbrace{\frac{n^n}{n! \cdot 2n^n}}_{>1}$$

- לפי הנחת האינדוקציה, החלק השמאלי גדול מ1. ולכן:

$$\frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} \cdot \underbrace{\frac{n^n}{n! \cdot 2n^n}}_{>1} > \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$$

- לפי המסקנה שלנו מברנולי:

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

תרגיל 7. אי שוויון ברנולי.

צ"ל:

(א) מתקיים:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \overbrace{\leq}^{(1)} \frac{1}{k!} \overbrace{\leq}^{(2)} \frac{1}{2^{k-1}}$$

כאשר:

$$k,n\in\mathbb{N},\quad 1\leq k\leq n$$

(ב) הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$$

פתרון 8. נתחיל ב(א) אך לא נוכיח את כל אי השוויונות ביחד. (1) אפשר להוכיח לפי אינדוקציה נוכיח אותו לבד, בבית.

- (א. 2) משמעות הביטוי $\frac{1}{n^k}\cdot\binom{n}{k}$ היא כמה אפשרויות יש למצוא מתוך n איזשהם k עצמים, כאשר $k\leq n$.
  - מחשבים את הביטוי הזה ככה:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

* לדוגמא $\binom{n}{0}=1$
* לדוגמא $\binom{n}{1}=n$
* לדוגמא $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

· הביטוי $\binom{n}{k}$ נקרא המקדם הבינומיאלי כי הוא נמצא **בבינום של ניוטון:**

$$(a+b)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^{k}$$

$$a,b\in\mathbb{R}$$

- נתחיל בצ"ל:

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\leq\frac{1}{k!}$$

* נפרק את הצ"ל ונבחן את הביטוי:

$$\frac{n!}{n^{k\cdot}\cdot k!\cdot(n-k)!}\le\frac{1}{k!}\quad \backslash\cdot\underbrace{k!}_{>0}$$

$$\frac{n!}{n^{k}\cdot(n-k)!}\le 1$$

· נבחן מהו הביטוי $n!$

$$\frac{\overbrace{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot}^{k\ \ times}n}{n}\le 1$$

· זה שווה לביטוי

$$\frac{(n-k+1)}{n}\cdot\frac{(n-k+2)}{n}\ldots\frac{n}{n}\le 1$$

מכפלה של כופלים חיוביים שקטנים או שווים ל-1, קטנה או שווה מ-1 (צריך להוכיח בבית באינדוקציה).

- נוכיח את (ב) בעזרת הבינום של ניוטון:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\frac{1}{n^{k}}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^{k}}\\&=\binom{n}{0}\cdot\frac{1}{n^{0}}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^{k}}\end{aligned}$$

– לפי סעיף (א) שהוכחנו:

$$\binom{n}{0}\cdot\frac{1}{n^{0}}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^{k}}\le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+S_n$$

* אנחנו יודעים ש:
  · $a_1=1$
  · $q=\frac{1}{2}$
  · $S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}$

* נציב את מה שאנחנו יודעים:

$$1+S_n = 1+\frac{1-\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}^{>0 \ and \ <1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< 1+\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$$

* קיבלנו ש:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \frac{1}{n^k} < 3$$

תרגיל 9. יהי $n \in \mathbb{N}$.
הוכיחו כי אם $n^2 \mid 3$ אז גם $n \mid 3$

פתרון 10. יהי $n \in \mathbb{N}$, כל שקיים מספר $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$n^2 = 3k$.

- **צ"ל:** קיים $m \in \mathbb{N}$, $n = 3m$
  - אפשר להוכיח בשלילה: נניח כי n לא כפולה של 3, כלומר לכל $p \in \{\mathbb{N} \cup 0\}$
    * או ש: $n = 3p+1$
    * או ש: $n = 3p+2$
  - תחילה נבדוק את $n = 3p+1$:

$$\begin{aligned} n^2 &= (3p+1)^2 = 9p^2+6p+1 \\ &= 3\underbrace{\left(3p^2+2p\right)}_{\in \mathbb{N} \cup 0|\}}+1 \end{aligned}$$

* לכן ראינו ש-n^2 לא מתחלק ב3 וזו סתירה!
  - שנית, נבדוק את $n = 3p+2$:

$$\begin{aligned} n^2 &= (3p+2)^2 = 9p^2+12p+4 \\ &= 3\underbrace{\left(3p^2+4p+1\right)}_{\in \mathbb{N} \cup 0|\}}+1 \end{aligned}$$

* גם פה ראינו ש-n לא מתחלק ב-3 ולכן הגענו גם פה לסתירה.

דוגמה 11. הוכיחו כי $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

פתרון 12. נניח בשלילה ש-$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, כלומר אם ניקח שני מספרים זרים: $p, q \in \mathbb{N},\ \ q \neq 0$ נקבל:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q},$$

- אנחנו יכולים להגיע לסתירה עם נתון או לסתירה עם איזושהי עובדה ידועה מראש.

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \backslash^2$$

$$3 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$3q^2 = p^2$$

- כלומר יוצא ש p^2 מתחלק ב-3
- לפי סעיף א' יוצא ש p מתחלק גם הוא ב 3
- לכן קיים $m \in \mathbb{N}$ שמקיים

$$p = 3m$$

$$3q^2 = 9m^2$$

$$q^2 = 3m^2$$

  - יוצא לנו שגם q^2 מתחלק ב-3.
  - מכיוון שנתון שp, q זרים (אי אפשר לצמצם אותם יותר) הגענו לסתירה כי לא יכול להיות שהם מתחלקים באותו המספר.