אינפי 2מ' | תרגול 5 - עם ניקה

שם: איל שטיין

May 3, 2023

נושאי השיעור: ניוטון לייבניץ

תרגיל 1.

- נתונות 1 פונקציות $f(x), g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[0,a]$ המקיימות $g(x) = g(a-x)$ ו- $f(x)+f(a-x)=c$ לכל $x \in [0,a]$.
- **הוכיחו:** כי

$$\int_0^a f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}c\int_0^a g(x)\,dx$$

פתרון:

- נתחיל מאגף שמאל:

$$f(x) = c - f(a-x)$$

  - נציב ונקבל:

$$\int_0^a f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^a (c - f(a-x))\,g(x)\,dx$$

    * נסמן $t = a - x$, וגם $dt = -dx$
      · כאשר $x = 0$ מתקיים $t = a$ וכאשר $x = a$ מתקיים $t = 0$. לכן נקבל את השוויון:

$$\int_a^0 (c - f(t))\,g(t)\,(-dt) = \int_0^a (c - f(t))\,g(t)\,(dt)$$

- לאחר שהחלפנו את גבולות האינטגרציה, הסימון $t=a-x$ איבד את המשמעות שלו ולכן ניתן לקרוא לקבוע האינטגרציה בשם חדש, נבחר ב-x על מנת להראות את השוויון הנדרש

$$=\int\limits_0^a \left(c-f\left(x\right)\right)g\left(x\right)dx$$

- לפי אדטיביות נקבל:

$$\int\limits_0^a f\left(x\right)g\left(x\right)dx=\int\limits_0^a c\cdot g\left(x\right)-\int\limits_0^a f\left(x\right)g\left(x\right)dx \quad \backslash+\int\limits_0^a f\left(x\right)g\left(x\right)dx \quad \backslash+$$

- נעביר אגף את $\int_0^a f\left(x\right)g\left(x\right)dx$ ונקבל:

$$2\cdot\int\limits_0^a f\left(x\right)g\left(x\right)dx=\int\limits_0^a c\cdot g\left(x\right) \quad \backslash\cdot\frac{1}{2}$$

- נחלק ב-2 ונקבל:

$$\int\limits_0^a f\left(x\right)g\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^a c\cdot g\left(x\right)$$

- כנדרש.

תרגיל 2.

- תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $[-1,1]$.
- **הוכיחו:** כי

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(x\right)\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(x\right)\right)dx$$

פתרון:

- לפי זהות: $\sin\left(x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
  - נציב ונקבל:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(x\right)\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$$

* נסמן $t=\frac{\pi}{2}-x$, ונקבל $dt=-dx$
* כאשר $x=0$ מתקיים $t=\frac{\pi}{2}$ וכאשר $x=\frac{\pi}{2}$ מתקיים $t=0$. ולכן:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\cos\left(t\right)\right)dt$$

· נחליף את גבולות האינטגרציה, ונסמן קבוע אינטגרציה חדש בשם "x" (כי ברגע שהחלפנו את הגבולות, קבוע האינטגרציה משתנה והסימון של t מאבד את משמעותו, כי האינטגרל המסוים הוא מספר):

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(x\right)\right)dx$$

* קיבלנו כי:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(x\right)\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(x\right)\right)dx$$

תרגיל 3.

* חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\tan\left(t\right)dt}{\int_0^{\sin(x)}t^2dt}$$

פתרון:

* נשתמש בלופיטל:
  - לפי המשפט היסודי, אם האינטגרד בפונקציה צוברת שטח אז הפונקציה צוברת שטח ונגזרתה הוא $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.
    * כמסקנה מכך, אם יש לנו פונקציה $f\left(t\right)$ רציפה (או רציפה פרט לנקודה אחת) ו-$\alpha\left(x\right)$, $\beta\left(x\right)$ גזירות, אז עבור $G\left(x\right)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f\left(x\right)$ מתקיים $G'\left(x\right)=\beta\left(x\right)\cdot f\left(\beta\left(x\right)\right)-\alpha\left(x\right)\cdot f\left(\alpha\left(x\right)\right)$
* מכיוון ש-0, $\sin\left(x\right)$ ו-x^2 הן גזירות, מתקיים כי לפי לופיטל "$\frac{0}{0}$", נקבל כי:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\tan\left(t\right)dt}{\int_0^{\sin(x)}t^2dt}=$$

תרגיל 4. חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{e^{t}-1-t}{t^{2}}dt}{x}$$

פתרון:

- הפונקציה הזו לא רציפה עבור $t=0$.
  - אבל אפשר לומר כי האינטגרד $f\left(t\right)=\frac{e^{t}-1-t}{t^{2}}$ רציף בכל נקודה פרט ל-$x=0$.
  - נבחן את הגבול:

$$\lim_{x\to0}f\left(t\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{t}-1-t}{t^{2}}$$

* לפי לופיטל $\frac{0}{0}$ מתקיים:

$$=\lim_{x\to0}\frac{te^{t}-1}{2t}$$

* ושוב לפי לופיטל:

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{t}}{2}=\frac{1}{2}$$

- נגדיר פונקציה חדשה:

$$g\left(t\right)=\begin{cases}f\left(t\right) & t\neq0\\ \frac{1}{2} & t=0\end{cases}$$

  - מתקיים כי $g\left(t\right)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.
    * בנוסף, x ו- $\frac{x}{2}$ הן פונקציות גזירות ולכן לפי מסקנה מהמשפט היסודי (על גזירות וגם על כך שערכי האינטגרלים של f ו-g שווים כי הן נבדלות בנקודה אחת בלבד)
      · ומתקיים לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{e^{t}-1-t}{t^{2}}dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{x}-1-x}{x^{2}}-\frac{e^{\frac{x}{2}}-1-\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}\cdot\frac{1}{2}}{1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}+1}{x^{2}}$$

- ושוב לפי לופיטל $\frac{0}{0}$ מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\frac{x}{2}}}{2x}$$

- ושוב לפי לופיטל $\frac{0}{0}$ מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{2}=\frac{1}{4}$$

- כלומר קיבלנו ש:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{e^{t}-1-t}{t^{2}}dt}{x}=\frac{1}{4}$$

תרגיל 5.

- תהי $F\left(x\right)=\int_{|\sin(x)|}^{|\cos(x)|}e^{t^{2}}dt$
- בדקו את הטענות הבאות:
  - א. $F\left(x\right)$ מונוטונית בקטע $[0,\pi]$
  - ב. ל-F יש מקסימום מקומי ב$x=0$
  - ג. $F\left(x\right)$ גזירה ב$x=0$
  - ד. $F\left(x\right)$ מונוטונית עולה בסביבת $\frac{\pi}{4}$
  - ה. ל-$F\left(x\right)$ יש מינימום מקומי ב$x=0$

פתרון:

א.

- ראשית נבחן את $F\left(0\right)$. מכיוון ש $e^{t^{2}}$ פונקציה חיובית, מתקיים:

$$F\left(0\right)=\int_{0}^{1}e^{t2}dt>0$$

- נבחן את $F\left(\pi\right)$:

$$F\left(\pi\right)=\int_{0}^{1}e^{t^{2}}dt>0$$

- נבחן את $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{t^2}dt=0$$

- ולכן $F\left(x\right)$ אינה מונוטונית.

ד.

- מכיוון ש$|\sin\left(x\right)|$ ו-$|\cos\left(x\right)|$ גזירות בסביבת $\frac{\pi}{4}$, מתקיים:

$$F\left(x\right)=\int\limits_{\sin(x)}^{\cos(x)}e^{t^2}dt$$

  - ומכיון ש e^{t^2} רציפה, מתקיים:

$$F'\left(x\right)=e^{\cos^2(x)}\left(-\sin\left(x\right)\right)-e^{\sin^2(x)}\cdot\cos\left(x\right)$$

  - נציב $x=\frac{\pi}{4}$ ונקבל:

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-e^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}<0$$

  - ולכן $F\left(x\right)$ מונוטונית יורדת בסביבת $\frac{\pi}{4}$. לכן טענה ד' לא נכונה.

ב+ג.

- בסביבת $x=0$, אמנם $|\cos\left(x\right)|$גזירה, אבל הפונקציה $|\sin\left(x\right)|$אינה גזירה.
  - לכן נבחן את הנגזרת של $F\left(x\right)$ מימין ומשמאל לאפס:
    * נבחן את F כאשר $x\to0^+$

$$\lim_{x\to0^+}F\left(x\right)=\int\limits_{\sin(x)}^{\cos(x)}e^{t^2}dt$$

* ונבחן את F כאשר $x \to 0^-$

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \int_{-\sin(x)}^{\cos(x)} e^{t^2} dt$$

* נבחן את הנגזרת כאשר $x \to 0^+$

$$F'_+(x) = e^{\cos^2(x)} \cdot (-\sin(x)) - e^{\sin^2(x)} \cdot \cos(x)$$

$$F'_+(0) = -1$$

* נבחן את הנגזרת כאשר $x \to 0^-$

$$F'_-(x) = e^{\cos^2(x)} \cdot (\sin(x)) - e^{\sin^2(x)} \cdot (-\cos(x))$$

$$F'_+(0) = 1$$

* הגבולות החד צדדיים של הנגזרת שונים, כלומר $F'_+(x) \neq F'_-(x)$ ולכן F אינה גזירה.
  - כלומר טענה ג' לא נכונה.
* בנוסף, הנגזרת לא קיימת ב$x = 0$ ולכן $x = 0$ נקודה חשודה לקיצון.
* הנגזרת מחליפה סימן מחיובי לשלילי ב$x = 0$, ומכיוון שלפי המשפט היסודי $F(x)$ רציפה, נקבל כי $x = 0$ נקודת מינימום מקומי.
  - כלומר טענה ב' נכונה.