(104031) אינפי 1מ' | תרגול 11 - יוליה

שם: איל שטיין

November 28, 2022

נושאי השיעור: $lim\ sup, lim\ inf$

תרגיל 1.

תהי a_n סדרה חסומה.

נגדיר: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $b_n = \ sup\ \{a_k\}$ כאשר $k \geq n$.

צ"ל: הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} sup\ a_n$.

במילים אחרות, $\lim_{n\to\infty} \{sup\ a_n\} = \lim sup\ a_n$

פיתרון:

- נתבונן בנתון: כאשר $k \geq n$

$$b_n = \ sup\ \{a_k\}$$

$$b_n = \ sup\ \{a_k\} = sup\{a_n, a_{n+1}, \dots, a_m\}$$

  - כלומר:

$$b_1 = sup\{a_1, a_2 \dots\}$$

$$b_2 = sup\{a_2, a_3 \dots\}$$

$$b_{1000} = sup\{a_{1000}, a_{1001} \dots\}$$

- ההוכחה תתחלק לשלושה חלקים:

  (1) b_n מתכנסת

(2) b_n היא תת סדרה של $\lim\ sup\ a_n$

(3) הגבולות שלהם שווים.

1. נוכיח ש-b_n מתכנסת:

- b_n היא חסומה
- b_n היא מונוטונית ולא עולה כי ב-b_n לוקחים את הסופרמום של $\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m\}$ וב-b_{n+1} לוקחים את הסופרמום של $\{a_{n+1}, \ldots, a_m\}$.
  - כלומר,

$$b_{n+1} = sup\left\{a_{n+1}, a_{n+2} \ldots a_m\right\}$$

$$b_{n+1} = sup\left\{a_{n+1}, a_{n+2} \ldots a_m\right\} \leq max\left\{a_n, sup\left\{a_{n+1}, a_{n+2} \ldots a_m\right\}\right\}$$

  - וגם:

$$max\left\{a_n, sup\left\{a_{n+1}, a_{n+2} \ldots a_m\right\}\right\} = sup\left\{a_n, a_{n+1}, \ldots\right\} = b_n$$

  - ולכן:

$$b_{n+1} \leq b_n$$

  - לכן הסדרה b_n מונוטונית יורדת.
- מכיוון ש-b_n הוא תמיד סופרמום של a_n, לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$b_n \geq a_n$$

- מכיוון שהסדרה חסומה, יש לה גבול מלמטה, כלומר:

$$b_n \geq a_n \geq inf\ \ a_n$$

  - לכן b_n חסומה מלמטה ומונוטונית יורדת.
    * כלומר, b_n מתכנסת.

2. נוכיח ש-b הוא גבול חלקי של a_n.

- נניח בשלילה ש-b הוא לא גבול חלקי של a_n.

- כלומר, הנחת השלילה: קיים $\varepsilon > 0$ כך שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.
  - במילים אחרות: $a_n < b-\varepsilon$ או $a_n > b+\varepsilon$
- עובדה ראשונה: $b_n \geq b$ לכל b_n כי b_n היא סדרה מונוטונית יורדת, כלומר $b_n > b_{n+1} > \ldots \geq b$.
  - כלומר, מכיוון שהסדרה b_n היא מונוטונית יורדת ו-b הוא הגבול שלה, מתקיים $b_n \geq b$ לכל n.
    - ולכן גם מתקיים לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש $b_n - \varepsilon \leq b - \varepsilon$
- עובדה שניה: מכיוון ש b_n הוא סופרמום של a_n:
  (א) לכל a_n מתקיים: $b_n \geq a_n$
  (ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a_{n(\varepsilon)}$ כך ש: $b_n - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)}$
- בהנחת השלילה הנחנו ש-$a_n > b+\varepsilon$ או $a_n < b-\varepsilon$:
  - נחלק לשני מקרים:
    (א) מקרה ראשון: $a_n < b-\varepsilon$
      i. נצרף את העובדה השנייה: $b_n - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq b_n$ ואת העובדה הראשונה: שb הוא הגבול של b_n ($b - \varepsilon \leq b_n - \varepsilon$) ונקבל:

$$b - \varepsilon < b_n - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} \leq b_n$$

$$b - \varepsilon < b_n$$

        - קיבלנו שיש איבר בסדרה a_n שמקיים $b - \varepsilon < a_n$ ולכן:
        א'. או שלא יכול להיות שלכל a_n מתקיים $a_n < b - \varepsilon$
        ב'. או שלא יכול להיות ש $b_n > b - \varepsilon$
        - כלומר הנחת השלילה אומרת ש: $b_n \leq b - \varepsilon$
    (ב) מקרה שני: $a_n > b+\varepsilon$
      i. לפי העובדה השנייה מתקיים לכל a_n מתקיים: $b_n \geq a_n$ ולכן:

$$b_n \geq a_n > b + \varepsilon$$

$$b_n > b + \varepsilon$$

  - הראנו שלפי הנחת השלילה, או ש $b_n < b - \varepsilon$ או ש $b_n > b + \varepsilon$,
    - כלומר הנחת השלילה גוררת $b_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.
- זו סתירה עם כך ש-$b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

• הפרכנו את הנחת השלילה וקיבלנו ש- b הוא גבול חלקי של a_n.

3. נוכיח ש-b הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של a_n:

• נוכיח של-a_n קיים גבול חלקי נוסף, נסמנו L.

- לכן, לפי הגדרת גבול חלקי: קיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = L$
- כפי שראינו$a_n \leq b_n$, לכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n_k} \leq b_{nk}$
- ומכיוון ש-b_n היא סדרה המתכנסת ל-b. לכן, כל תת סדרה של b_n מתכנסת לאותו הגבול.
- לפי משפט יחס סדר גבולות נקבל ש-$L = \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{n\to\infty} b_{n_k} = b$
  * הראינו שכל גבול חלקי של a_n קטן או שווה ל-b
    · לכן b הוא $lim\ sup\ a_n$

תרגיל 2. יהיו a_n, b_n סדרות חסומות.
אזי:

1. $lim\ sup\,(a_n + b_n) \leq lim\ sup\ a_n + lim\ sup\ b_n$
2. וגם: $lim\ inf\,(a_n + b_n) \geq lim\ inf\ a_n + lim\ inf\ b_n$

הוכחה: נוכיח את 1. רעיון ההוכחה: נוכיח ש-$lim\ sup\,(a_n + b_n)$ הוא גבול חלקי של $a_{n_k} + b_{n_k}$.

- נתבונן ב:

$$lim\ sup\,(a_n + b_n)$$

- הוא בעצמו מהווה גבול חלקי של הסדרה $a_n + b_n$.
  * לכן קיימת תת סדרה $a_{n_k} + b_{n_k}$ כך ש- $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k} + b_{n_k}) = lim\ sup\,(a_n + b_n)$
- נתבונן ב-a_{n_k}: היא לא בהכרח מתכנסת אבל היא בהכרח חסומה כי a_n חסומה והיא תת סדרה של a_n.
  * לפי בולצאנו-ויירשטראס, קיימת ל-a_{n_K} תת סדרה שנסמנה $a_{n_{k_j}}$ שמתכנסת. נסמן שהיא מתכנסת לאיזהו קבוע a כאשר $j \to \infty$.
  * נתבונן ב- $b_{n_{k_j}}$:
    · ניתן להציג אותה כ- $b_{n_{k_j}} = \left(a_{n_{k_j}} + b_{n_{k_j}}\right) - a_{n_{k_j}}$
    · ומכיוון שאמרנו ש- $\left(a_{n_{k_j}} + b_{n_{k_j}}\right)$ מתכנסת וגם $a_{n_{k_j}}$ מתכנסת, לפי משפט חשבון גבולות יוצא שגם $b_{n_{k_j}}$ מתכנסת.
- מכיוון שבסדרה מתכנסת כל תתי הסדרות שלה מתכנסות גם הן לאותו הגבול, קיבלנו ש:

$$lim\ sup\ \ (a_n + b_n) = \lim_{k\to\infty}(a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim_{j\to\infty}\left(a_{n_{k_j}} + b_{n_{k_j}}\right)$$

  * ולפי משפט חשבון גבולות:

$$\lim_{j\to\infty}\left(a_{n_{k_j}} + b_{n_{k_j}}\right) = \lim_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} + \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}}$$

* בגלל הגדרת $lim\ sup$, מתקיים ש:

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} \leq lim\ sup\ a_n$$

· וגם בגלל הגדרת $lim\ sup$

$$\lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} \leq lim\ sup\ b_n$$

* ולכן:

$$lim\ sup\ \ (a_n+b_n) \leq lim\ sup\ b_n\ \ +\ \ lim\ sup\ a_n$$

תרגיל 3.

תהי a_n סדרה מתכנסת.

b_n חסומה.

צ"ל: הוכיחו ש:

1. $lim\ sup\,(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + lim\ sup\ b_n$
2. $lim\ inf\,(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + lim\ inf\ b_n$

פתרון:

- מכיון ש-a_n מתכנסת היא גם חסומה.
  - לכן, מהתרגיל הקודם יש לנו אי שוויון:

$$lim\ sup\ \ (a_n+b_n) \leq lim\ sup\ b_n\ \ +\ \ lim\ sup\ a_n$$

  - ומכיוון ש-a_n מתכנסת:

$$lim\ sup\ a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

* ולכן:

$$lim\ sup\ \ (a_n+b_n) \leq lim\ sup\ b_n\ \ + \lim_{n\to\infty} a_n$$

- כעת עלינו להוכיח ש: $lim\ \ sup\ \ b_n\ \ + \lim_{n\to\infty} a_n \le lim\ \ sup\ \ (a_n + b_n)$:

  – $lim\ \ sup\ \ b_n$ הוא גבול חלקי של b_n ולכן קיימת תת-סדרה b_{n_k} המתכנסת ל-$lim\ \ sup\ \ b_n$, כך ש- $\lim_{n\to\infty} b_{n_k} = lim\ \ sup\ \ b_n$

  – a_{n_k} מתכנסת לאותו הגבול של a_n, כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n_k}$.

    * לכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + lim\ \ sup\ \ b_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n_k}$$

    · מכיוון ש-a_{n_k} ו- b_{n_k} מתכנסות, מותר להשתמש בחשבון גבולות. לפי משפט חשבון גבולות מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \lim_{k\to\infty} (a_{n_k} + b_{n_k})$$

    · לפי הגדרת $lim\ \ sup$ מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \le lim\ \ sup\ \ (a_{n_k} + b_{n_k})$$

    · נצרף ביחד את כל אי השוויונות ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + lim\ \ sup\ \ b_n \le lim\ \ sup\ \ (a_{n_k} + b_{n_k})$$

- מכיוון שהראנו ש $\lim_{n\to\infty} a_n + lim\ \ sup\ \ b_n \le lim\ \ sup\ \ (a_{n_k} + b_{n_k})$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n + lim\ \ sup\ \ b_n \ge lim\ \ sup\ \ (a_{n_k} + b_{n_k})$ מתקיים: