(104031) אינפי 1מ' | תרגול 3 - יוליה

שם: איל שטיין

January 25, 2023

(ביום רביעי ה2/11/2022- יש תרגול וצריך לראות לפני התרגול את סרטונים של צנזור 5-6)

נושאי השיעור: קבוצות חסומות, inf, sup

- הגדרנו חסם מלמעלה לקבוצה A ב-$\mathbb{R}$ לא ריקה, כלומר קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים כי $a \leq M$
- אמרנו שלפי אקסיומת השלמות קיים חסם מלמעלה שהוא הכי קטן שנקרא $supA$. הגדרנו גם את $maxA$.

משפט 1. תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלמעלה.
$S \in \mathbb{R}$ הוא $supA$ אם ורק אם:

1. $\forall a \in A,\ \ a \leq S$
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > S - \varepsilon$

תרגיל 2. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הוכיחו כי A חסומה אם ורק אם קיים $L \geq 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים:

$$|a| \leq L$$

הוכחה.

- <u>כיוון ראשון:</u> קיים $L \geq 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \leq L$ $\Leftarrow$ A חסומה:
  – נתון כי מתקיים $|a| \leq L$

* על פי תכונות הערך המוחלט:

$$-L \le a \le L$$

* כלומר, מצאנו עבור הקבוצה הזו חסמים גם מלמעלה וגם מלמטה.
* מכיוון של-Aיש חסם מלמעלה ומלמטה, A חסומה לפי ההגדרה.

• <u>כיוון שני:</u> קיים $L \ge 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \le L$ $\Rightarrow$ A חסומה:

– מניחים ש-A חסומה ולכן קיימים חסמים מלמעלה ומלמטה. כלומר, קיימים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים:

$$m \le a \le M$$

– נסמן $L = max\left\{|m|, |M|\right\}$

– כאמור, לכל $a \in A$ מתקיים:

$$m \le a \le m$$

* נציב את $|M| \le L$ ואת $|m| \le L$ ונקבל:

$$-L \le -|m| \le m \le a \le m \le |M| \le L$$

* מכאן קיבלנו ש:

$$-L \le a \le L$$

* $L \ge 0$ מכיוון ש- $L = max\left\{|m|, |M|\right\}$.
* נשתמש בהגדרת הערך המוחלט כדי להעביר את אי-השוויון לערך מוחלט:

$$|a| = max\left\{a, -a\right\}$$

ולכן:

$$-L \le |a| \le L$$

$$|a| \le L$$

– לסיכום, הראינו שאם A חסומה $\Leftarrow$ קיים $L \geq 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \leq L$

■

תרגיל 3.
תהי קבוצה $A = [2,7)$. מצאו האם קיימים $infA$ ו-$supA$.

פיתרון:

- נכתוב את ההגדרה של הקבוצה:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$$

- נבחן האם יש לקבוצה inf:
  – לפי הגדרת הקבוצה, $2 \leq x$ ולכן 2 הינו חסם מלמטה. נראה שהוא גם ה-inf.
  – נניח בשלילה שקיים מספר $m > 2$ כך ש-m הוא חסם מלמטה.
  – אבל מכיוון ש-$2 \in A$ והנחנו ש- $m > 2$ יוצא ש-m לא גדול מכל איברי הקבוצה, כלומר לא חוסם את הקבוצה מלמטה.
    * לכן m אינו חסם מלמטה.
    * ו- $2 = infA$ כי אין חסם מלמטה שגדול ממנו.
- נבחן האם לקבוצה יש sup:
  – נראה ש-7 הינו $supA$:
    * תזכורת - שני התנאים ל-sup הם:
      1. $\forall a \in A,\ \ a \leq S$
      2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a > S - \varepsilon$
    * <u>תנאי ראשון</u>: לפי הגדרת הקבוצה, לכל $x \in A$ מתקיים ש-$x < 7$.
    * <u>תנאי שני</u>:
      · יהי $\varepsilon > 0$.
      · מכיוון ש-A חסומה מלמעלה לפי הגדרת הקבוצה, לפי אקסיומת השלמות יש לה סופרמום. לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x \in A$ כך ש $x > 7 - \varepsilon$.
      · ניקח $x_0 = max\left\{2, 7 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$
      · מכיוון ש $7 > 7 - \frac{\varepsilon}{2} > 7 - \varepsilon$, מתקיים כי $x_0 \in A$ לפי הגדרת הקבוצה.
      · נמצא כי:

$$7 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_0$$

$$7-\varepsilon<7-\frac{\varepsilon}{2}\leq x_0$$

· הראינו שלכל $\varepsilon>o$ קיים $x\in A$ כך ש- $7-\varepsilon<x$

– 7 הוא ה-sup מכיוון ששני התנאים מתקיימים לגביו.

תרגיל 4. מצאו את $inf\sqrt[n]{n}$ כאשר $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

- נגדיר $A=\{\sqrt[n]{n}\mid n\in\mathbb{N},n\geq 2\}$
- **צ"ל:** מצא את $.infA$
- תזכורת - שני התנאים ל-inf הם:
  1. $\forall a\in A,\ a\geq I$
  2. לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a<I+\varepsilon$
- (ניחשנו שהפיתרון הוא 1 אבל נוכיח לפי המשפט למעלה ש-1 הוא באמת החסם מלמטה הכי גדול)
- תנאי ראשון: נוכיח כי 1 הוא חסם מלמטה (מלרע):
  - נגדיר $a\in A$ כך ש- $a=\sqrt[n]{n}$
    - * נתון כי $n>1$
      - · נעשה שורש $\sqrt[n]{}$ לשני הצדדים:

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n]{1}=1$$

$$a>1$$

  - התנאי הראשון מתקיים. כלומר, 1 הוא חסם מלמטה כי כל איברי הקבוצה גדולים ממנו.
- תנאי שני: כעת נראה שלכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a<1+\varepsilon$
  - יהי $.\varepsilon>0$
  - נבדוק האם קיים $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ כך ש:

$$\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$$

* (צריך להקפיד פה על "אם ורק אם" בכל שלב כי אנחנו מתחילים את ההוכחה מלבחון את הביטוי שצ"ל)

* נעלה את הביטוי בצ"ל בחזקת n ונקבל: (אמ"מ)

$$n < (1+\varepsilon)^n$$

* נחפש איזה n מקיים את אי-השוויון האחרון:
  - נשתמש בבינום של ניוטון על הביטוי $(1+\varepsilon)^n$ ונקבל: (אמ"מ)

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^k \\ &= \underbrace{1}_{mehubar} + \underbrace{n\cdot\varepsilon}_{mehubar} + \underbrace{\binom{n}{k}\varepsilon^2}_{mehubar} + \ldots + \varepsilon^n\end{aligned}$$

  - נמצא "מחובר" אחד ונמצא n שיקיים ש- "המחובר" $< n$
  - נעשה ניסיונות למצוא "מחובר" כזה ו-n כזה:
    1. $n < 1$ לא עובד כי $n > 1$
    2. $n < n\cdot\varepsilon \Leftarrow 1 < \varepsilon$ לא עובד כי $0 < \varepsilon$ ולא מ-1
    3. $n < \frac{n(n-1)}{2}\cdot\varepsilon^2$

(א) אפשר לחלק את שני האגפים ב-n ונקבל:

$$1 < \frac{n-1}{2}\cdot\varepsilon^2 \ \backslash\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < \frac{n-1}{2}$$

$$\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 < n$$

(ב) הביטוי $\frac{n(n-1)}{2}\cdot\varepsilon^2$ הוא "מחובר" אחד מתוך רבים (כולם חיוביים, כי גם $\varepsilon > 0$ וגם $n > 0$) ולכן:

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\varepsilon^2 < \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^k$$

(ג) כלומר, עבור $\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 < n$ מתקיים:

$$\begin{aligned}n < \frac{n(n-1)}{2}\cdot\varepsilon^2 &< \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^k \\ &= (1+\varepsilon)^n\end{aligned}$$

(ד) נצמצם את אי השוויון רק לשני הביטויים שאנחנו רוצים ויוצא ש:

$$n < (1+\varepsilon)^n$$

$$\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$$

(ה) לכן, ניתן לבחור $n = [\frac{2}{\varepsilon^2}+1]+1$, $n \geq 2$. יש לציין שהסוגריים המרובעות מסמנות שמעגלות את המספר למטה. עבור ה-n הזה מתקיים:

$$\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$$

(ו) מכיוון שכל הצעדים היו "אם ורק אם" הראינו שמתקיים שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a < 1+\varepsilon$

– שני התנאים מתקיימים ולכן 1 הוא inf.