הסתברות מ' (00094412) | הרצאה 5

שם: איל

February 14, 2024

נושאי השיעור: המשך משתנים מקריים, התנייה באמצעות משתנים מקריים, תוחלת

נושא ראשון - השלמה משיעור שעבר על משתנים מקריים

תזכורת על הרצאה קודמת - משתנים מקריים ווקטורים מקריים:

- הגדרה - **וקטור מקרי** n מימדי $\underline{X}$ הוא פונקציה $\Omega \to \mathbb{R}^n$:

$$\omega \to \underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

- אמרנו שאפשר לחשוב עליו כפונקציה וקטורית או כ-n משתנים מקריים (פונקציות)
  - כלומר $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ הוא וקטור מקרי אמ"ם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ עם משתנים מקריים על אותו Ω.
- וקטור מקרי נקרא **בדיד** אם קיימת קבוצה $B \subseteq \mathbb{R}^n$ בת מנייה כך ש $P(\underline{X} \in B) = 1$
- הגדרנו את **פונקציית ההסתברות של וקטור מקרי** $\underline{X}$:

$$P_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$$

  - והיא עונה על השאלה, מה ההסתברות שוקטור כלשהו $\underline{x}$ יהיה שווה ל-$\underline{X}$:

$$P_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x})$$

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2, \ldots, \cap X_n = x_n)$$

* נקרא לה גם פונקציית ההסתברות המשותפת של $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ונסמן:

$$P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

- הגדרנו פונקציה של משתנה מקרי:
  - אם $\underline{X}$ הוא וקטור מקרי n מימדי ו-$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
    * אז הפונקציה $\underline{Y}:\Omega \to \mathbb{R}^m$ המוגדרת על ידי $\underline{Y}\left(\omega\right) = g\left(\underline{X}\left(\omega\right)\right)$ היא בעצמה וקטור מקרי m מימדי מעל Ω.
    * סימון: $\underline{Y} = g\left(\underline{X}\right)$

- ראינו **"משפט 1":** אם $\underline{X}$הוא וקטור מקרי n מימדי ו-g היא פונקציה ו- $\underline{Y} = g\left(\underline{X}\right)$ אז מתקיים:

1. אם $\underline{X}$ בדיד אז $\underline{Y}$ בדיד.
2. אפשר לדבר על פונקציית ההסתברות של $\underline{Y}$, והיא:

$$P_{\underline{Y}}\left(\underline{y}\right) = \sum_{\underline{x}:g\left(\underline{x}\right)=\underline{y}} P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)$$

3. בפרט, אם אנחנו רוצים לדעת מה ההסתברות של אחד מרכיבי הוקטור (המשתנים המקריים), אז לכל $k = 1, \ldots, n$, נסכום כך:

$$P_{X_k}\left(y\right) = \sum_{\underline{x}:x_k=y} P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)$$

- כלומר אנחנו מקפיאים פה משתנה מתוך הוקטור המקרי להיות הערך של y וסוכמים על שאר האפשרויות למשתנים של הוקטור המקרי.

- מקרים פרטיים:

1. $n = 1$
   - מתקיים $\underline{X} = x$ וזהו משתנה מקרי ופונקציית ההסתברות שלו היא $P_X\left(x\right) = P\left(X = x\right)$
2. $n = 2$
   - מתקיים $\underline{X} \to \left(X_1, X_2\right)$ ו-X_1 ו-X_2 הם משתנים מקריים על אותו מרחב מדגם Ω.
     * פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם היא:

$$P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right) = P_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right)$$

$$= P\left(\underline{X} = \underline{x}\right)$$

$$= P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right)$$

* נסתכל על הקשר ל"משפט 1":
  - ניקח $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
  - נפעיל את g על הוקטור $\left(x_1, x_2\right)$ ונסמן ב-$Y = g\left(x_1, x_2\right)$
  - לפי המשפט מתקיים:

(א) Y הוא משתנה מקרי בדיד

(ב) עבור הפונקציה הזו מתקיים:

$$P_Y\left(y\right) = \sum_{x_1, x_2 : g\left(x_1, x_2\right) = y} P_{X_1, X_2}\left(x_1, x_2\right)$$

(ג) מתקיים:

$$P_{X_1}\left(y\right) = \sum_{\underline{x} : x_1 = y} P_{\underline{X}}\left(\underline{x}\right)$$

$$= \sum_{x_1 = y,\ x_2} P_{X_1, X_2}\left(x_1, x_2\right)$$

  - כלומר אנחנו מקפיאים את x_1 להיות y ולכן:

$$= \sum_{x_2} P_{X_1, X_2}\left(y, x_2\right)$$

דוגמה 1.

- בכד יש N פתקים הממוספרים מ1 ד N.
- שולפים באקראי שני פתקים אחד אחרי השני. סיכוי שווה לכל זוג פתקים להישלף.
- נגדיר:
  – X - המספר על הפתק הראשון
  – Y - המספר על הפתק השני.
- ראשית נניח שהשליפה מתבצעת ללא החזרה.
- **צ"ל:**

1. מצאו פונקציית הסתברות משותפת של X ו-Y

2. מצאו פונקציית הסתברות של X ו-Y בנפרד.
3. חזרו על 1 ו-2 עם החזרה
4. נגדיר משתנה מקרי חדש Z = סכום המספרים בשני הפתקים.
מצאו פונקציית הסתברות של Z (עם החזרה של הפתקים).

פיתרון:

1. נחפש פונקציית הסתברות משותפת של X ו-Y.

- נגדיר מרחב הסתברות, אוסף כל הזוגות הסדורים כך שכל אחד מהאיברים מספרים שונים בין $1,\ldots,N$ (שונים כי אנחנו לא מחזירים את הפתקים)

$$\Omega=\{\underline{\omega}=(\omega_1,\omega_2)\ \ :\ \ \omega_1\neq\omega_2\ \ \wedge\omega_1,\omega_2\in\{1,\ldots,N\}\}$$

- נגדיר מפורשות את X ואת Y:

$$X\left(\underline{\omega}\right)=X\left((\omega_1,\omega_2)\right)=\omega_1$$

$$Y\left(\underline{\omega}\right)=Y\left((\omega_1,\omega_2)\right)=\omega_2$$

- כלומר X ו-Y הם משתנים מקריים, וזה שקול לאמירה ש-(X,Y) הוא וקטור מקרי דו מימדי $\omega\rightarrow\left(X\left(\omega\right),Y\left(\omega\right)\right)$
- קיבלנו את הביטוי:

$$P_{X,Y}\left((x,y)\right)=P\left(X=x,Y=y\right)$$

$$P_{(X,Y)}=P\left((X,Y)=(x,y)\right)$$

  – אנחנו מחפשים את:

$$=P\left(\omega\in\Omega\ \ :\ \ \left(X\left(\omega\right),Y\left(\omega\right)\right)=(x,y)\right)$$

  * אבל אמרנו ש$X\left(\underline{\omega}\right)=\omega_1$ וגם $Y\left(\underline{\omega}\right)=\omega_2$ ולכן:

$$=P\left(\omega\in\Omega\ \ :\ \ (\omega_1,\omega_2)=(x,y)\right)$$

$$=P\left(\{(x,y)\}\right)$$

$$= \frac{|\{(x,y)\}|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{1}{n\cdot(n-1)}$$

- הסבר במילים:
  - אנחנו רוצים לדעת מה ההסתברות $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$.
  - נזכור ש-X מייצג את מספר הפתק הראשון ו-Y מייצג את מספר הפתק השני
    * ולכן אנחנו מקבלים את ההסתברות:

$$= P(x\ is\ on\ first\ ballot\ and\ y\ is\ on\ second)$$

$$= \frac{|\{x\ is\ on\ first\ ballot\ and\ y\ is\ on\ second\}|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{1}{N\cdot(N-1)}$$

- נשים לב שהתוצאה שקיבלנו (בשתי הדרכים) נכונה רק כאשר x,y הם מספרים מ-1 עד N וגם $x\neq y$.
  - באופן מלא נקבל:

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{N\cdot(N-1)} & x,y\in\{1,\ldots,N\} \ \wedge \ x\neq y \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2. נמצא את פונקציות ההסתברות של X ושל Y בנפרד.

- כלומר $P_X(x)$
- <u>דרך א':</u> אפשר לפתור באותו אופן שפתרנו את הסעיף הראשון, כלומר לתרגם למאורעות ולהשתמש במידת ההסתברות האחידה:

$$P(\{value\ on\ first\ ballot\ is\ x\})$$

$$= \frac{|\{value\ on\ first\ ballot\ is\ x\}|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{N-1}{N(N-1)}$$

$$= \frac{1}{N}$$

– ובאופן מלא:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & othwerwise \end{cases}$$

• דרך ב': שימוש בסעיף השלישי של משפט 1:

– יש לנו זוג משתנים מקריים ואנחנו רוצים את פונקציית ההסתברות של אחד מהם. לכן נסכום על אחד מהם ונקפיא את השאר:

$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$$

* ניקח את פונקציית ההסתברות המשותפת שמצאנו בסעיף הקודם:

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{N \cdot (N-1)} & x, y \in \{1, \ldots, N\} \ \wedge \ x \neq y \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

* כעת מתקיים:

$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \sum 0 = 0 & x \notin \{1, \ldots, N\} \\ \sum_{1 \leq y \leq n, \ y \neq x} \frac{1}{N(N-1)} & x \in \{1, \ldots, N\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x \notin \{1, \ldots, N\} \\ (N-1) \frac{1}{N \cdot (N-1)} & x \in \{1, \ldots, N\} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x \notin \{1, \ldots, N\} \\ \frac{1}{N} & x \in \{1, \ldots, N\} \end{cases}$$

• בעת נמצא את $P_Y(y)$.

– דרך א': באותו אופן, נקבל:

$$P(\{value \ of \ ballot \ is \ y\}) = \begin{cases} \frac{1}{N} & y \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

– <u>דרך ב':</u> בעזרת משפט 1 סעיף 3, באותו אופן כמו שמצאנו את $P_X\left(x\right)$:

$$P_Y\left(y\right)=\sum_x P_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{cases}\sum 0=0 & y\notin\{1,\ldots,N\}\\ \sum_{1\le x\le n,\ x\neq y}\frac{1}{N(N-1)} & y\in\{1,\ldots,N\}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y\notin\{1,\ldots,N\}\\ \frac{1}{N} & y\in\{1,\ldots,N\}\end{cases}$$

3. נבצע את אותו תרגיל עם החזרה.

- מתקיים:

$$P_{X,Y}\left(x,y\right)=P\left(X=x,Y=y\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{N^2} & x,y\in\{1,\ldots,N\}\\ 0 & x,y\notin\{1,\ldots,N\}\end{cases}$$

- פונקציית ההסתברות של X היא:

$$P_X\left(x\right)=\begin{cases}\sum_y P_{X,Y}\left(x,y\right) & x\in\{1,\ldots,N\}\\ \sum 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum_{y=1}^N\frac{1}{N^2} & x\in\{1,\ldots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{N} & x\in\{1,\ldots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- עבור Y נקבל בדיוק אותו דבר.

4. סימנו Z - סכום הפתקים.

- נשים לב שZ הוא בדיד והתומך שלו הוא $2,\ldots,N$.
- מחפשים את $P_Z\left(z\right)=P\left(Z=z\right)$
- <u>דרך א':</u>
  – נתרגם את הבעיה להסתברות שסכום הפתקים הוא z.
- <u>דרך ב':</u>

– נשתמש בחלק השני של משפט 1:

$$Z\left(\underline{\omega}\right)=number\ \ on\ \ 1_{st}\ \ ballot+number\ \ on\ \ 2_{st}\ \ ballot$$

$$=\omega_{1}+\omega_{2}$$

– נגדיר פונקציה $g:\mathbb{R}^{2}\rightarrow\mathbb{R}$ על ידי $g\left(x+y\right)$.

* אזי מתקיים:

$$Z\left(\underline{\omega}\right)=g\left(X\left(\omega_{1}\right),Y\left(\omega_{2}\right)\right)$$

$$=g\left(X,Y\right)$$

$$=X+Y$$

* החלק השני של משפט 1 אומר שפונקציית ההסתברות של משתנה מקרי הוגדר כפונקציה של משתנים מקריים אחרים, נרוץ על כל הזוגות $\left(x,y\right)$ כך ש $g\left(x,y\right)=z$ ונסכום את פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם:

$$P_{Z}\left(z\right)=\sum_{x,y:g\left(x,y\right)=z}P_{X,Y}\left(x,y\right)$$

* נשים את הפונקציה g אצלנו ונקבל:

$$=\sum_{x,y\ :\ x+y=z}P_{X,Y}\left(x,y\right)$$

* נוסיף את התנאי $x,y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\}$ ונקבל:

$$=\sum_{x,y\ :\ x+y=z\ \wedge\ x,y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\} }P_{X,Y}\left(x,y\right)$$

· כעת מתקיים $P_{X,Y}\left(x,y\right)=\frac{1}{N^{2}}$, כלומר:

$$=\sum_{x,y\ :\ x+y=z\ \wedge\ x,y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\} }P_{X,Y}\left(x,y\right)=\frac{number\ \ of\ \ all\ \ pairs\ \ \left(x,y\right)\ \ s.t\ x,y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\} \ \ and\ their\ \ sum\ \ is\ \ z}{N^{2}}$$

- כעת מתקיים לכל z שלם (לא הראנו את החישוב בהרצאה, הוא הושאר כתרגיל):

$$= \begin{cases} \frac{z-1}{N^2} & 2 \le z \le N \\ \frac{2N-z+1}{N^2} & N+1 \le z \le 2N \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

נושא שני - התנייה באמצעות משתנים מקריים

- יהיו X ו-Y משתנים מקריים על אותו (Ω, P).
- ראינו שניתן לשאול על ההסתברות של המאורעות $\{X = x\}$ ו-$\{Y = y\}$.
- כעת נראה שאפשר לדבר על ההסתברות $\{Y = y\}$ בהינתן $\{X = x\}$.

הגדרה.

- יהיו X ו-Y משתנים מקריים בדידים על (Ω, P).
- אזי פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן X היא:

$$P_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$$

– המוגדרת על ידי:

$$P_{Y|X}(y,x) = P_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} P(\{Y = y\} \mid \{X = x\}) & P(\{X = x\}) > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

משפט 2.

- יהיו X ו-Y משתנים מקריים על אותו (Ω, P).
- אזי:

1. חישוב:

$$P_{Y|X}(y,x) = \begin{cases} \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} & P_X(x) > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2. נוסחת הכפל:

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) \cdot P_{Y|X}(y,z)$$

3. נוסחת בייס:

$$P_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} P_{Y|X}(y,x) \cdot \frac{P_X(x)}{P_Y(y)} & P_Y(y) > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

4. נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P_Y(y) = \sum_x P_{Y|X}(y,x) \cdot P_X(x)$$

דוגמה.

- בהמשך לדוגמה הקודמת, נחשב את $P_{Y|X}(y,x)$ עם ובלי החזרה.
- לאחר מכן נשתמש בתשובה כדי לחשב את P_Y, $P_{X|Y}$ ו-$P_{X,Y}$
- ללא החזרה:
  - נחפש את $P_{Y|X}$:

$$\begin{aligned} P_{Y|X}(y,x) &= P(\{Y=y\} \mid \{X=x\}) \\ &= P(second\ ballot\ has\ y \mid first\ ballot\ has\ x) \end{aligned}$$

  - מתקיים לפי משפט 2, סעיף 1:

$$= \begin{cases} \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} & P_X(x) > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  - נציב את התשובות מהדוגמה הקודמת:

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{N(N-1)} & x \neq y \in \{1,\dots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x \in \{1,\dots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

– ונקבל:

$$P_{Y|X}(y,x)=\begin{cases}\frac{\frac{1}{N(N-1)}}{\frac{1}{N}} & x\neq y\in\{1,\dots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{N-1} & x\neq y\in\{1,\dots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- נמצא את $P_{X,Y}$:

– לפי משפט 2 סעיף 2 מתקיים:

$$P_{X,Y}(x,y)=P_X(x)\cdot P_{Y|X}(y,x)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{N} & x\in\{1,\dots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}\cdot\begin{cases}\frac{1}{N-1} & x\neq y\in\{1,\dots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{N(N-1)} & y\neq x\in\{1,\dots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- נמצא את $P_{X|Y}$:

– לפי משפט 2 סעיף 3 מתקיים:

$$P_{X|Y}(x,y)=P_{Y|X}(y,x)\cdot\frac{P_X(x)}{P_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{N-1}\cdot\frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{N}} & x\neq y\notin\{1,\dots,N\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- נמצא את $P_Y(y)$:

$$P_Y(y)=\sum_x P_X(x)\cdot P_{Y|X}(y,x)$$

$$= \sum_{x,y\in\{1,\ldots,N\}\ \wedge\ x\neq y} \frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}$$

$$= \begin{cases} (N-1)\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N-1} & y\in\{1,\ldots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N} & y\in\{1,\ldots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- עם החזרה:
  - מתקיים לפי משפט 2, סעיף 1:

$$P_{Y|X}(y,x) = \begin{cases} \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)} & P_X(x)>0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  - ההבדל הוא שהפעם מתקיים:

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{N^2} & x,y\in\{1,\ldots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x\in\{1,\ldots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

  - נציב ונקבל:

$$P_{Y|X}(y,x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{N^2}}{\frac{1}{N}} & x,y\in\{1,\ldots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$P_{Y|X}(y,x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x,y\in\{1,\ldots,N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

נושא שלישי - אי תלות של משתנים מקריים:

- כמו שראינו בדוגמה האחרונה, ההבדל בין מקרה של "עם החזרה" ובין "בלי החזרה" הוא

הגדרה.

- יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים כלשהם (לאו דווקא בדידים) על אותו (Ω, P)
- נאמר שהם בלתי תלויים אם לכל אחת מתתי-הקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים:

$$P\left(\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\} \cap \ldots \cap \{X_n \in A_n\}\right) = P\left(X_1 \in A_1\right) \cdot P\left(X_2 \in A_2\right) \cdot \ldots \cdot P\left(X_n \in A_n\right)$$

- נשים לב שאם נעבוד לפי ההגדרה נצטרך לבדוק קיום של המון תנאים וזה מסובך לבדוק את כולם.
  - במקרה של משתנים מקריים בדידים, יש דרך קלה יותר:

משפט 3.

- אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הם משתנים מקריים בדידים, אז הם בלתי תלויים אם ורק אם מתקיים:

$$P_{X_1, X_2, \ldots, X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = P_{X_1}\left(x_1\right) \cdot P_{X_2}\left(x_2\right) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}\left(x_n\right)$$

משפט 4.

- אם X ו-Y משתנים מקריים על אותו (Ω, P) אז הם בלתי תלויים אם ורק אם $P_{Y|X}\left(y, x\right) = P_Y\left(y\right)$, לכל y, x המקיימים $P_X\left(x\right) \neq 0$.

דוגמה 5.

- **שאלה:** בהמשך לדוגמה הקודמת שראינו, האם X ו-Y בלתי תלויים (עם ובלי החזרה)?
- **פיתרון:**
  - <u>עם החזרה:</u>
    - <u>דרך א'</u> - נבדוק האם מתקיים משפט 3, כלומר נבדוק לכל x, y האם מתקיים:

$$P_{X,Y}\left(x, y\right) = P_X\left(x\right) \cdot P_Y\left(y\right)$$

- נציב את התוצאות של הדוגמה הקודמת ונקבל:

$$P_{X,Y}\left(x, y\right) = \begin{cases} \frac{1}{N^2} & x, y \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & otherwise \end{cases} = P_{X,Y}\left(x, y\right) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & otherwise \end{cases} \cdot \begin{cases} \frac{1}{N} & y \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- נשים לב שאכן מתקיים ולכן X ו-Y בלתי תלויים.

* דרך ב' - נבדוק האם $P_{Y|X}\left(y,x\right)=P_{Y}\left(y\right)$ לכל y ו-x המקיימים $P_{X}\left(x\right)\neq0$
  · נשים לב שאכן מתקיים:

$$\begin{cases}\frac{1}{N} & x,y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\} \\ 0 & otherwise\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{N} & y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\} \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

– ללא החזרה:

* נשתמש במשפט 4 כדי לקבל:

$$P_{Y|X}\left(y,x\right)=P_{Y}\left(y\right)\ \ \forall\,y,x:P_{X}\left(x\right)\neq0$$

  · נשים לב שמתקיים:

$$\begin{cases}\frac{1}{N-1} & x\neq y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\} \\ 0 & otherwise\end{cases}\neq\begin{cases}\frac{1}{N} & y\in\left\{ 1,\ldots,N\right\} \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

  · כלומר X ו-Y תלויים.

הערה:

- כדי להראות אי-תלות, צריך להראות שההגדרה מתקיימת לכל x,y.
- אבל כדי להראות תלות, מספיק למצוא x,y שלא מקיימים את ההגדרה.

הערה:

- אם $x_{1},x_{2},\ldots,x_{n}$ משתנים מקריים בדידים על אותו Ω, אז לעיתים נכנה את $\Pi_{X_{k}}$ או את $P_{X_{k}}$ בשם פונקציית ההסתברות או התפלגות **שולית** כדי להדגיש שלא מדובר בפונקציית ההסתברות או ההתפלגות המשותפת.

הערה:

- משפט 1 נותן דרך למצוא את $P_{X_{k}}$ מתוך $P_{X_{1},X_{2},\ldots,X_{k}}$.
  – כלומר (עבור משתנים מקריים בדידים) ההתפלגות המשותפת קובעת את ההתפלגויות השוליות.
  – ההפך אינו נכון.

נושא רביעי - תוחלת:

- **מוטיבציה:**
  – נניח שמבצעים ניסוי שבו יש גודל שערכו אקראי, כלומר הערך של x_{k} בסיכוי p_{k} עבור $k\in\left\{ 1,\ldots,m\right\}$

* נניח כי מתקיים $\sum p_k = 1$

– ננסה לחשב את ממוצע הגודל אם נחזור על הניסוי $n \to \infty$ פעמים.

הגדרה 6. תוחלת

- בהינתן משתנה מקרי בדיד X על (Ω, P), התוחלת של X היא:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot P_X(x) \\ &= \sum_x x \cdot P(X = x) \end{aligned}$$

- המשמעות האינטואיטיבית היא הממוצע של הגודל בניסוי, המיוצג על ידי x, על פני $n \to \infty$ חזרות על הניסוי.

<u>הערה:</u>
נשים לב שמכיוון שהסכום מוגדר על מחוברים שיש בהם ערכי x שיכולים להיות שליליים, נצטרך לדרוש התכנסות בהחלט של הטור.
מעכשיו בכל פעם שאומרים שהטור קיים, הכוונה היא שהטור מתכנס בהחלט.
כלומר תוחלת מוגדרת רק אם הטור בהגדרה שלה מתכנס בהחלט.

- מכאן הסיכום המוקלד הקיים חופף לשיעור - דוגמה 1.1 בפרק 6 (תוחלת)