(104031) אינפי 1מ' | תרגול 10 - יוליה

שם: איל שטיין

November 25, 2022

נושאי השיעור: תתי סדרות, גבולות חלקיים

נושא ראשון - תתי סדרות:

הערה 1. תזכורת על תתי סדרות:
תהי a_n סדרה. אם ניקח "תת-סדרה" a_{n_k}, הכוונה היא לקחת חלק מהאיברים של a_n כאשר לא משנים את הסדר של האיברים ב-a_n.
אם נרצה לכתוב a_{m_k} הכוונה ל"תת-סדרה" אחרת.

הגדרה 2. גבול חלקי הוא גבול של תת סדרה.
L נקרא גבול חלקי של a_n אם קיימת תת-סדרה a_{n_k} כך ש $L=\lim_{n\to\infty}a_{n_k}$

תרגיל 3. בניית תת סדרה:
תהי a_n סדרה חסומה מלמעלה כך שלא קיים $max\ a_n$.
הוכיחו כי $sup\ a_n$ הינו גבול חלקי של a_n.
(הוכיחו על ידי בנייה מפורשת של תת-סדרה המתכנסת אליו).

הוכחה:

- הסדרה חסומה מלמעלה ולכן לפי אקסיומת השלמות קיים $sup\ a_n$.
  - נסמן $sup\ a_n=M$
  - נתון: $M\notin a_n$ (אחרת הוא היה max)
- נוכיח באינדוקציה שלכל a_n קיים ε כך שמתקיים $M>a_n>M-\varepsilon$:
  - **בסיס האינדוקציה:**
    - M הוא $sup\ a_n$. לפי הגדרת הסופרמום, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים ש $M\geq a_n$
      - ומכיוון ש-$M\notin a_n$, לכל a_n מתקיים ש- $M>a_n$
    - בנוסף, לפי משפט הסופרמום: לכל $\varepsilon>0$ קיים $a_{n_{(\varepsilon)}}$ (שתלוי ב-ε) שמקיים $a_{n_{(\varepsilon)}}>(sup\ a_n)-\varepsilon$

· לכן מתקיים שכאשר $\varepsilon_1 = 1$, קיים איבר $a_{n_{(\varepsilon_1)}}$ (שתלוי ב-ε_1) כך שמתקיים:

$$a_{n_{(\varepsilon_1)}} > M - \varepsilon_1$$

· נצרף ביחד את אי השוויונות ונקבל:

$$M > a_{n_{(\varepsilon_1)}} > M - 1$$

* נבחר $\varepsilon_2 = min\left\{\frac{1}{2}, \overbrace{M - a_1}^{>0}, \overbrace{M - a_2}^{>0}, \ldots, \overbrace{M - a_{n_{(\varepsilon_1)}}}^{>0}\right\}$
* בגלל הגדרת ε_2, הביטוי $M - \varepsilon_2$ תמיד יהיה גדול מ- או שווה ל-$a_{n_{(\varepsilon_1)}}$
* לפי משפט הסופרמום, גם ל-ε_2 קיים $a_{n_{(\varepsilon_2)}}$ כך שמתקיים - $a_{n_{(\varepsilon_2)}} > M - \varepsilon_2$
  · ומכיוון ש $a_{n_{(\varepsilon_2)}}$ הוא איבר בסדרה a_n הוא מקיים $M > a_{n_{(\varepsilon_2)}}$
* מכיוון שלסדרה a_nיש אינסוף איברים הקטנים מ-M,
  · $a_{n_{(\varepsilon_2)}}$ שונה מכל האיברים שהגיעו בסדרה לפני $a_{n_{(\varepsilon_1)}}$ בגלל הגדרת ε_2 שלוקחת את המרחק המינימלי בין M ובין כל האיברים שלפני $a_{n_{(\varepsilon_1)}}$
  · כלומר, האינדקסים מקיימים $n_{(\varepsilon_2)} > n\left(\varepsilon_1\right)$
* לכן נסמן את $a_{n_{(\varepsilon_1)}}$ להיות האיבר הראשון בתת סדרה שאנחנו בונים - נסמנו a_{n_1}
* ונסמן את $a_{n_{(\varepsilon_2)}}$ להיות האיבר השני בתת סדרה שאנחנו בונים - נסמנו a_{n_2}

– <u>סיכום בסיס האינדוקציה:</u>
* הראנו של ε_1 קיים a_{n_1} כך שמתקיים $M > a_{n_1} > M - \varepsilon_1$ ול-ε_2 קיים a_{n_2} כך שמתקיים $M > a_{n_2} > M - \varepsilon_2$

– **הנחת האינדוקציה:**
* נניח של-ε_k קיים a_{n_k} כך שמתקיים $M > a_{n_k} > M - \varepsilon_k$. כלומר, באותו אופן נבחר איבר $M > a_{n_k}$.

– **צעד** האינדוקציה:
* **צ"ל:** $M > a_{n_{k+1}} > M - \varepsilon_{k+1}$
* נגדיר $\varepsilon_{k+1} = min\left\{\frac{1}{k+1}, M - a_1, M - a_2 \ldots, M - a_{n_k}\right\}$
  · לפי משפט הסופרמום, לכל $\varepsilon > 0$ ובפרט ל- ε_{k+1} קיים איבר $a_{n_{k+1}}$ שמקיים: $M > a_{n_{k+1}} > M - \varepsilon_{k+1}$
  · בגלל בחירת ε_{k+1}, הביטוי $M - \varepsilon_{k+1}$ גדול או שווה מכל איבר אחר בסדרה שבא לפניו.
  · לכן, אינדקסים מקיימים: $n_{k+1} > n_k$.

– לפי האינדוקציה, לכל איבר a_{n_k} מתקיים $M > a_{n_k} > a_{n_k} - \varepsilon_{n_k} \geq M - \frac{1}{k}$

• בצורה הזאת נבנה תת סדרה a_{n_k}.
– לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$M > a_{n_k} > M - a_k \geq M - \frac{1}{k}$$

* וכאשר $k\to\infty$ מתקבל משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty} M > \lim_{n\to\infty} a_{n_k} > \lim_{n\to\infty} M-\frac{1}{k}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = M$$

תרגיל 4.
תהי a_n סדרה.
נתון:

- לכל $k\in\mathbb{N}$, המספר b_k הוא גבול חלקי של a_n (b_k לא בהכרח שונים).
- בנוסף, $\lim_{n\to\infty} b_k = b$

צ"ל: b הוא גבול חלקי של a_n.
לדוגמא, אם $a_n=\frac{1}{n}$ אז $b_k=0$
הוכחה:

- יש שתי דרכים:

1. או לבנות בצורה מפורשת תת סדרה של a_n שתתכנס (כמו שעשינו בתרגיל הקודם).
2. <u>לפי המשפט</u>: L הוא גבול חלקי של הסדרה a_n אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ בסביבה $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ יש אינסוף מאיברי הסדרה.

- נפתור לפי הדרך השנייה.
- יהי $\varepsilon>0$.
- נוכיח שקיימים אינסוף מאיברי הסדרה a_n בקטע $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$:
  - נתון ש $\lim_{n\to\infty} b_k = b$ ולכן קיים אינדקס $k\in\mathbb{N}$ כך שקיים איבר b_k בקטע $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ לכל $\varepsilon>0$.
    * נקבע $\varepsilon_1 = min\left\{\underbrace{(b+\varepsilon)-b_k}_{>0},\underbrace{b_k-(b-\varepsilon)}_{>0}\right\}$.
      · מכיוון שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים הביטוי $b-\varepsilon<b_k<b+\varepsilon$, ובגלל הגדרת ε_1יוצא ש $\varepsilon_1>0$.
      · מכיוון ש-b_k הוא בסביבה של $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ מתקיים בפרט עבור $\varepsilon_1>0$:

$$b-\varepsilon_1<b_k<b+\varepsilon_1$$

      · מכיוון ש- $\lim_{n\to\infty} b_k = b$, החל ממקום מסוים כל האיברים של b_k הם בסביבה $(b-\varepsilon_1,b+\varepsilon_1)$
      מכיוון ש-b_k היא סדרה אז יש לה אינסוף איברים ולכן קיימים אינסוף מאיברי b_k בסביבה $(b-\varepsilon_1,b+\varepsilon_1)$.
  - נתון ש b_k הוא גבול חלקי של a_n ולכן לפי המשפט לכל $\varepsilon>0$ (ובפרט לε_1) מתקיים שבסביבה $(b_k-\varepsilon_1,b_k+\varepsilon_1)$ יש אינסוף מאיברי הסדרה a_n.

* ומכיוון ש:

$$(b_k-\varepsilon_1,b_k+\varepsilon_1)\subseteq(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$$

· לכן, גם בסביבה $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ יש אינסוף מאיברי הסדרה a_n.

תרגיל 5.
תהי סדרה a_n המוגדרת: $a_n=sin\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)$
מצאו את כל הגבולות החלקיים , $\lim_{n\to\infty}sup\ a_n$, $\lim_{n\to\infty}inf\ a_n$
פיתרון:

- מהתבוננות בסדרה אפשר לראות שהיא מחזורית.
  - נקבל שהאפשרויות ל-a_n הן: $A=\left\{\pm1,\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0\right\}$ וכל אחד מאלה הוא גבול חלקי של a_n.
- נוכיח שלא יכול להיות שקיים עוד גבול חלקי (שהוא לא איבר ב-A):
  - יהי $b\notin A$.
    * כלומר, $b\neq\pm1,\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0$
      · מכיוון ש $b\notin A$ מתקיים:

$$b-1\neq0$$

$$b-(-1)\neq0$$

$$b-\frac{\sqrt{2}}{2}\neq0$$

$$b-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\neq0$$

$$b-0\neq0$$

      · ניקח $\varepsilon=\frac{1}{2}min\ \left\{|b-1|,|b+1|,\left|b+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|,\left|b-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|,|b|\right\}>0$
      · מכיוון שיש רק חמש אפשרויות לאיבר a_n, והגדרנו את ε להיות חצי מהמרחק המינימלי בין b לכל חמשת האפשרויות של איבר ב a_n, מתקיים ש:
      · בסביבה $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ אין אף איבר של a_n.
    * מכיוון שבסביבה $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ אין אף איבר של a_n לא יכול להיות שלכל $\varepsilon>0$ יש אינסוף מאיברי הסדרה a_n בסביבה הזו.
  - לכן, b הוא לא גבול חלקי של a_n. רק האיברים ב-A הם גבולות חלקיים של a_n.

- לא עשינו בשיעור אך ניתן לחשב ש $\lim_{n\to\infty} sup = 1$
- לא עשינו בשיעור אך ניתן לחשב ש $\lim_{n\to\infty} inf = -1$

תרגיל 6.
תהי a_n סדרה מונוטונית עולה.
נתון שקיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = L$.
הוכיחו: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
פיתרון:

- נשתמש בנתון ש-a_n מונוטונית עולה:
  - לפי משפט, סדרה מונוטונית עולה מתכנסת במובן הרחב.
    - מכיוון שהיא סדרה עולה:
      1. או שהיא מתכנסת ל-∞.
      2. או שהיא מתכנסת לגבול סופי, שנסמנו M.
         - אם היא שואפת לגבול סופי, כל תתי הסדרות שלה מתכנסות לאותו גבול, שהוא M.
  - נתון ש $\lim_{n\to\infty} a_{n_k=L}$
    - לפי מסקנות מBW: a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם יש לה גבול חלקי אחד במובן הרחב.
    - מכיוון שa_{n_k} תת סדרה של a_n ו- a_n מתכנסת במובן הרחב, גם a_{n_k} צריכה להתכנס ל-∞ אם a_n מתכנסת רק במובן הרחב.
    - אך מכיוון ש-a_{n_k} מתכנסת ל-L
      - אז גם a_n מתכנסת לגבול סופי
      - ואז $\lim_{n\to\infty} a_n = L = M$

תרגיל 7.
נתון:

- תהי a_n סדרה חסומה.
- מכיוון שהיא חסומה, קיימים לה גבולות חלקיים
  - נסמן:
    - $M = \lim \ sup \ a_n$
    - $m = \lim \ inf \ a_n$
- $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$

צ"ל: הקטע $[m, M]$ שווה לקבוצת הגבולות החלקיים של a_n
במילים אחרות, **צ"ל:** צריך להוכיח שכל הגבולות החלקיסי נמצאים בקטע ושכל $a \in [m, M]$ בקטע היא גבול חלקי).
פיתרון:
<u>כיוון ראשון:</u> כל גבול חלקי a של a_n מקיים

$$m = \lim_{n\to\infty} inf \ a_n \le a \le \lim \ sup \ a_n = M$$

לכן, $a \in [m, M]$

<u>כיוון שני:</u>

- נניח בשלילה שקיימת נקודה a כך ש $a \in [m, M]$ וגם היא לא גבול חלקי.
  - אנחנו כבר יודעים שקצוות הקטע הם $\lim sup$ ו- $\lim \ inf$ והם גבולות חלקיים (ראינו בהרצאה שהם גבולות חלקיים).
    - כלומר, צריך לבחון את הקטע הפתוח (m, M).
  - כלומר, קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שבסביבה $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ קיים מספר סופי של איברים (כי הנחת השלילה אומרת ש-a לא גבול חלקי)
    - במילים אחרות: קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n < N$ מתקיים $a_n \notin (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$
  - לפי הנתון: $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
    - כלומר, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ (שמקיים $N_1 > N$, כדי שלא נצטרך לייצא אחר כך עוד N_2) כך שלכל $n > N_1$ מתקיים:

$$|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon_0$$

    - נתבונן באיבר a_{N_1+1} ונבדוק באיזו סביבה הוא יכול להימצא:
    - הוא לא יכול להימצא בסביבה $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ כי בסביבה הזו יש רק מספר סופי של איברים.
    - נניח בה"כ ש$a_{N_1+1} < a - \varepsilon_0$:
    - לכן, כאשר $n \geq N_1 + 1$ כל איבר a_n חייב לקיים ש$a_n < a - \varepsilon_0$
      - הסבר: נניח שקיים איבר $a - \varepsilon_0 < a_k$ כך ש$a_{k-1} < a - \varepsilon_0$ כאשר $k \geq N_1 + 1$.
        אז $a_k > a + \varepsilon_0$ כי לפי הנחת השלילה $a_k \notin (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ כאשר $k > N$
        ואז $|a_k - a_{k-1}| = a_k - a_{k-1} > a + \varepsilon_0 - (a - \varepsilon_0) = 2\varepsilon$
        וזו סתירה
    - הראנו שלכל $n > N_1$ מתקיים:

$$a_n < a - \varepsilon_0$$

      - לכן בסביבה של M יש מספר סופי של איברים.
      - כלומר, a_{N+1} לא יכול להיות גבול חלקי והוא גם לא $\lim \ sup \ a_n$.

תרגיל 8. תנו דוגמא לסדרה שהקטע $[0, 1]$ מהווה את קבוצות גבולות החלקיים שלה.

פיתרון:

- לפי התרגיל הקודם, מספיק לבנות סדרה כך ש:
  1. $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$
  2. $\lim \ sup \ a_n = 0$
  3. $\lim \ inf \ a_n = 1$

- למשל,נבנה סדרה שקופצים בה מ0 ל-1 וכל פעם חוזרים עוברים במספר באמצע

$$0,1,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\frac{7}{8},\frac{3}{4}\dots 0,\dots,1\dots$$

  - הסדרה הזו מקיימת $\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n+1})=0$
  - היא מקיימת $\lim\ \ sup\ a_n=1$ כי יש אינסוף פעמים את האיבר 1
  - $\lim\ \ inf\ a_n=0$ כי יש אינסוף פעמים את האיבר 0

הערה 9. לשים לב שלא כל גבול חלקי צריך להיות איבר בסדרה. בסדרה הזו

תרגיל 10. תהי a_n סדרה בעלת איבר מינימלי a_m ואיבר מקסימלי a_M.
נתון כי:

1. לכל מספר L מתקיים $L\in(a_m,a_M)$
2. קיים $\varepsilon>0$ כך שבסביבה $(L-\varepsilon,L+\varepsilon]$ יש מספר סופי של איברי a_n

צ"ל: $\lim_{n\to\infty}a_n=a_m$

פיתרון:

- הסדרה חסומה כי יש לה איבר מינימלי ואיבר מקסימלי
- מכיוון שהסדרה חסומה, לפי בולצאנו-ויירשטראס קיים לה לפחות גבול חלקי אחד.
  - הגבול החלקי לא יכול להיות גדול מהאיבר המקס' של הסדרה והוא לא יכול להיות קטן מהאיבר המינימלי:
    - נסמן את הגבול החלקי ב-L. יתקיים $a_m\le L\le a_M$
  - נתון שיש מספר סופי של מספרים בקטע $(L-\varepsilon,L+\varepsilon]$.
    - כלומר אין אף גבול חלקי בקטע $(L-\varepsilon,L+\varepsilon]$.
- אמרנו שאם יש גבול חלקי אז הוא יימצא בקטע $[L-\varepsilon,L+\varepsilon]$.
  - אך לפי הנתון בקטע $(L-\varepsilon,L+\varepsilon]$ אין אף גבול חלקי של a_n
- לכן, $\lim_{n\to\infty}a_n=a_m$

תרגיל 11.
תהי a_n סדרה חסומה.
נגדיר לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$b_n=\ \ sup\ \ \{a_k\}\,,\ \ k\ge n$$

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}sup\ \ a_n$.

פיתרון:

- נתבון בנתון:

$$b_n = \ sup \ \{a_k\}$$

$$b_n = \ sup \ \{a_k\} = sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m\}$$

– כלומר:

$$b_1 = sup\{a_1, a_2 \ldots\}$$

$$b_2 = sup\{a_2, a_3 \ldots\}$$

$$b_{1000} = sup\{a_{1000}, a_{1001} \ldots\}$$

- ההוכחה תתחלק לשלושה חלקים:
(1) b_n מתכנסת
(2) b_nהיא תת סדרה של $\lim \ sup \ a_n$
(3) הגבולות שלהם שווים.