אינפי 2מ' | תרגול 11 - עם ניקה

שם: איל שטיין

June 14, 2023

נושא השיעור: המשך טורי חזקות (התכנסות לפונקציה גבולית), פונקציות בשני משתנים

נושא ראשון: המשך טורי חזקות

תרגיל 1:

חשבו את הסכום הבא: $\sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\cdot x^{n}$

פתרון:

- אנחנו יודעים שאם $x\in(-1,1)$ אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}$
- נפריד את הטור שלנו לשני טורים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\cdot x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}+2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^{n}$$

  - נבחן את הטור הימני:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^{n}$$

    * מכיוון שהוא טור חזקות אז הוא מתכנס במ"ש בתוך תחום ההתכנסות של הטור.
    * נשים לב שעבור $n=0$ מתקיים $n\cdot x^{n}=0$ ולכן מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^{n}=0+\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n}$$

- נוציא x החוצה מהסכום בשביל לקבל:

$$= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

- ומכיוון שהטור מתכנס במ"ש, ניתן להשתמש במשפט גזירה איבר איבר ולקבל:

$$\begin{aligned} &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \\ &= x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n{}'\right) \\ &= x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

- כלומר עבור $x \in (-1,1)$ מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+2n)\, x^n = \frac{1}{1-x} + 2 \cdot \frac{x}{(1-x)^2}$$

תרגיל 2:

חשבו את הטור הבא: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+1)(n+2)\, x^n$

פתרון:

- ניתן לכתוב את הביטוי בצורה:

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{n+2}\right)''$$

– מותר לשנות סדר סכימה ואינטגרציה כי בטורי חזקות יש לנו התכנסות במ"ש ובהחלט (ואלה התנאים לשינוי סדר גזירה ואינטגרציה):

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)''$$

– נוציא x^2 החוצה מהסכום:

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{1}{1-x}\right)''$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-x\right)^3}$$

תרגיל 3:

חשבו את הטור הבא: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

פתרון:

- מכיוון שהביטוי במונה והביטוי בחזקה הוא אותו ביטוי, אם נגזור אז נוכל לבטל אותו.
- נסמן $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.
  – עבור ערכי x בתחום ההתכנסות, כלומר $|x|<1$ מתקיים:

$$f'\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}$$

* נוציא החוצה את חזקת n ונקבל:

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n$$

* ולכן מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}$$

– לאחר שמצאנו את הנגזרת, נרצה לבצע אינטגרל כדי למצוא את $f\left(x\right)$.
– עבור $x=0$ מתקיים $f\left(0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot 0=0$

* ואז מכיוון שהפונקציה $f\left(x\right)$ מתאפסת ב$x=0$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(0\right)$$

– נשתמש במשפט היסודי עם גבולות האינטגרל מ-0 ועד x:

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= arctan(x)$$

תרגיל 4:

חשבו את $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ עבור הטור: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n(2n+1)}\cdot x^{2n+1}\right)$
פתרון:

- (בדקו לבד כי) רדיוס ההתכנסות הוא 1, לפי מבחן המנה.
- ואז מתקיים כי $x=\frac{1}{2}$ נמצא בתחום ההתכנסות, כלומר $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ מוגדר היטב.
- ראשית נגזור את הטור פעמיים כדי להעלים את הביטויים במכנה:
  – גזירה פעם ראשונה:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}x^{2n}$$

  – גזירה פעם שנייה:

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1} = \frac{-x}{1+x^2}$$

  – נשים לב שמתקיים:

$$f'(0) = 0$$

  * ולכן ניתן לכתוב:

$$f'(x) = f'(x) - f'(0)$$

* ואז אפשר להשתמש במשפט היסודי כדי לקבל:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = f'(x) - f'(0) &= \int_0^x f'(t)\,dt \\
&= \int_0^x \left(-\frac{t}{1+t^2}\right) dt \\
&= -\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\
&= -\frac{1}{2} ln\left(1+x^2\right)
\end{aligned}
$$

- כלומר קיבלנו ש:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) =$$

תרגיל 5:

פתחו לטור חזקות את הביטוי $ln\left(1+x\right)$ וקבעו מה תחום ההתכנסות שלו:

פתרון:

- נתחיל מכך שאנחנו יודעים ש:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

– המטרה שלנו תהיה להגיע לאחת מהצורות האלה.

- הקדומה של הפונקציה $ln\left(1+x\right)$ היא $\frac{1}{1+x}$ ולכן ניתן לכתוב:

$$
\begin{aligned}
ln\left(1+x\right) &= \int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) dt
\end{aligned}
$$

– מכיוון שהזהו טור חזקות, נחליף את סדר הסכימה והאינטגרציה:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) d = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^n dt\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

* נזיז את האינדקסים שיתחילו מ-1 כדי לקבל ביטוי מהצורה x^n בתוך הסכום:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

* נשאר לבדוק שרדיוס ההתכנסות הוא $R = 1$ ושתחום ההתכנסות הוא $(-1, 1]$.

תרגיל 6:

פתחו לטור חזקות את הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ סביב $x_0 = 1$

פתרון:

- מכיוון שמפתחים סביב $x_0 = 1$, אנחנו נצטרך לקבל בסוף ביטוי מהצורה $(x-1)^n$
- נבחן את הביטוי $\frac{2x+3}{x+1}$:

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x+3}{2+x-1}$$

– נוציא החוצה $\frac{1}{2}(2x+3)$ כדי לקבל:

$$= \frac{1}{2}(2x+3) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)}$$

* נהפוך את הביטוי $\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)}$ לטור:

$$= \frac{2x+3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

* נרצה להוציא $(x-1)$ החוצה ולכן נכתוב:

$$= \frac{2(x-1)+5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1^n)$$

תרגיל 7:

מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n+1}$

פתרון:

- נתחיל מכך ש $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$
- נגזור את הביטוי ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

  – נכפול את כל שני צדדי המשוואה בx כדי לקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

  – נגזור שוב ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

    * נכפול את שני צדדי המשוואה בx^2 כדי לקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n+1}=\frac{(1+x)\,x^2}{(1-x)^3}$$

תרגיל 8:

מצאו את הסכום הבא:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^2}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 2^4}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 2^5}+\dots$$

פתרון:

- ראשית ננסח איבר כללי לביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}$$

– נסיט את האינדקסים כדי שיתחילו מאפס:

$$\begin{aligned}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot 2^{n+2}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\cdot(n+2)}\frac{1}{2^{n+2}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\cdot(n+2)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\end{aligned}$$

- נתבונן בטור החזקות הבא:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}$$

– אם נצליח למצוא את $f(x)$ אז נוכל לחשב את $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ולקבל את התשובה הרצויה:

- נבדוק האם $x=\frac{1}{2}$ שייך לתחום ההתכנסות של הטור:

$$\begin{aligned}R&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right|=1\end{aligned}$$

– מכיוון שתחום ההתכנסות הוא לפחות $(-1,1)$, מתקיים כי $x=\frac{1}{2}$ נמצא בתחום ההתכנסות.

- בתרגיל הקודם ראינו ש:

$$ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}\cdot x^{n+1}$$

– נשים לב שהביטוי אצלנו מזכיר אינטגרל של הביטוי מהתרגיל הקודם.

– נבצע "אינטגרציה איבר איבר" ונקבל:

$$\begin{aligned}\int_0^x ln\left(1+t\right)dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\cdot t^{n+1}\right)dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \left(\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\cdot t^{n+1}\right)dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\cdot \int_0^x t^{n+1}dt\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\cdot \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\end{aligned}$$

– כלומר קיבלנו ש:

$$\int_0^x ln\left(1+t\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\cdot \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)$$

* נבצע אינטגרציה בחלקים על מנת למצוא את האינטגרל של ln:

$$u = ln\left(1+t\right),\ \ u' = \frac{1}{1+t}$$

$$v = t+1\ \ v' = 1$$

$$\begin{aligned}f\left(x\right) = \int_0^x ln\left(1+t\right)dt &= \left(1+t\right)\cdot ln\left(1+t\right)|_0^x - \int_0^x \frac{1+t}{1+t}dt\\ &= \left(1+x\right)\cdot ln\left(1+x\right) - x\end{aligned}$$

– כלומר $f\left(x\right) = \left(1+x\right)\cdot ln\left(1+x\right) - x$

– ובפרט מתקיים:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)2^{n+2}} = \frac{3}{2}ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

תרגיל 9:

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^1 x^{-x}dx$$

פתרון:

- ראשית נרצה להגיע לביטוי מהצורה $e^{g(x)}$:

$$x^{-x}=e^{ln\left(x^{-x}\right)}=e^{-x\cdot ln(x)}$$

- אנחנו יודעים שלכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

  – ולכן ניתן לכתוב:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}dx&=\int_0^1 e^{-x\cdot ln(x)}dx\\&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\cdot ln\left(x\right))^n}{n!}dx\\&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\cdot ln^n\left(x\right)dx\end{aligned}$$

* זהו טור פונקציות ולא טור חזקות, ולכן לפני שנוכל להחליף סדר סכימה ואינטגרציה, נצטרך לבדוק התכנסות במ"ש של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\cdot ln^n\left(x\right)$

  · נגדיר את הפונקציה הגבולית $f\left(x\right)=\sum f_n\left(x\right)$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0 & ,x=0\\ \frac{(-1)^n}{n!}x^n\cdot ln^n\left(x\right) & ,x\neq 0\end{cases}$$

  · נבחן את הגבול ליד 0:

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot ln\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln\left(x\right)}{\frac{1}{x}}$$

- לפי לופיטל "$\frac{0}{0}$" מתקיים:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

- ולכן $x \cdot ln\left(x\right)$ רציפה בקטע $[0,1]$.
- ולכן היא חסומה בקטע הסגור הזה, נסמן שהיא חסומה על ידי M כלשהו:

$$\left|x \cdot ln\left(x\right)\right| < M$$

$$\left|x^n \cdot ln^n\left(x\right)\right| < M^n$$

- כעת מתקיים:

$$\left|\frac{\left(-1\right)^n}{n!} x^n \cdot ln^n\left(x\right)\right| < \frac{M^n}{n!}$$

* הטור $\frac{M^n}{n!}$ מתכנס לפי מבחן המנה
- ולכן $\sum f_n\left(x\right)$ מתכנס במ"ש ובהחלט בתחום $[0,1]$.

- מכיוון שהאינטגרל מתכנס במ"ש ב$[0,1]$, ניתן לבצע החלפה של סדר הסכימה והאינטגרציה:

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{n!} x^n \cdot ln^n\left(x\right)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{n!} \cdot \left(\int_0^1 x^n \cdot ln^n\left(x\right) dx\right)$$

– נבצע אינטגרציה בחלקים על $\int_0^1 x^n \cdot ln^n\left(x\right) dx$, כאשר:

$$u = ln^n\left(x\right), \;\; u' = \frac{1}{x} \cdot n \cdot ln^{n-1}\left(x\right)$$

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \;\; v' = x^n,$$

* ונקבל:

$$\int_0^1 x^n \cdot ln^n\left(x\right) dx = ln^n\left(x\right) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}|_0^1 - \int_0^1 x^n ln^{n-1}\left(x\right) dx$$

* נבצע שוב אינטגרציה בחלקים:

$$u = ln^{n-1}(x),\ \ u' = (n-1)\,ln^{n-2}(x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ \ v' = x^n$$

$$(-1)^1\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n ln^{n-1}(x)\,dx = (-1)^2\frac{n}{(n+1)^2}x^{n+1}ln^{n-1}(x)\,|_0^1 + \frac{(-1)^2\,n\cdot(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 x^n ln^{n-2}(x)\,dx$$

· מכיוון שבכל שלב נקבל ש־$u\cdot v$ שואף לאפס, אם נמשיך כך באינדוקציה על n נקבל:

$$\begin{aligned}&= \frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^n}\cdot\int_0^1 x^n dx\\ &= \frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

- ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\end{aligned}$$

נושא שני - פונקציות בשני משתנים:

הגדרה 1. גבול:

- תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ויהי $p_0\in\mathbb{R}^n$.
  - נאמר כי: $\lim\limits_{p\to p_0} f(p) = L \iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $p\in\mathbb{R}^n$ המקיים $0<\left|\overbrace{p-p_0}^{distance}\right|<\delta$ מתקיים $|f(p)-L|<\varepsilon$

הגדרה 2. רציפות.

- יהי $C\subset\mathbb{R}^2$
- תהי $f:C\to\mathbb{R}^2$.

- יהי $(x,y)\in C$.
- נאמר כי f רציפה בקטע C אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $(z,w)\in C$ המקיים $d\left(\left(x,y\right),\left(z,w\right)\right)<\delta$ מתקיים $\left|f\left(z,w\right)-f\left(x,y\right)\right|<\varepsilon$.

דוגמה 3.

- תהי פונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{x^{2}+y^{2}} & ,\left(x,y\right)\neq0\\ 0 & ,\left(x,y\right)=0\end{cases}$$

  - עבור $C=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\mid xy=0\right\}$

- **א.** הוכיחו כי $f|_{C}:C\to\mathbb{R}$ רציפה. (פירוש הביטוי $f|_{C}$ הוא שf מצומצמת אך ורק לתחום C).
- **ב.** הוכיחו כי $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ אינה רציפה.

א. פתרון:

- ניקח נקודה אחרת בקבוצה ונבדוק מה קורה אם מקרבים את שתי הנקודות זו לזו.
- לכל $(z,w)\in C$ מתקיים $f\left(z,w\right)=0$
  - ולכן לכל $(z,w)\in C$ מתקיים:

$$\left|f\left(z,w\right)-f\left(x,y\right)\right|=0$$

  - ולכן לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\delta>0$ מתקיים:

$$\left|f\left(z,w\right)-f\left(x,y\right)\right|<\varepsilon$$