אינפי 2מ' | תרגול 8 - עם ניקה

שם: איל שטיין

May 23, 2023

נושאי השיעור: טורי מספרים

תרגיל 1:

תהי a_n סדרה. הוכיחו או הפריכו:

1. אם קיימת תת סדרה של a_n כך שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ מתכנס אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$
2. אם $\lim_{k\to\infty}a_n=0$ אז קיימת תת סדרה a_{n_k} כך ש $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ מתכנס.

פתרון:

1. הטענה לא נכונה.
   - דוגמה נגדית: $a_n=0,1,0,1,0,1\ldots$
2. הטענה נכונה.

- רעיון ההוכחה: אם נבחר איברים לתת סדרה שקטנים כרצוננו, למשל $|a_{n_k}|<\frac{1}{k^2}$ אז ממבחן ההשוואה ומהתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ נובעת התכנסות בהחלט של הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ (אנחנו מדברים על התכנסות בהחלט כי מבחן ההשוואה מותר רק עבור ערכים חיוביים)

תרגיל 2:

יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. הראו שלכל $k>1$ הטור $\sum a_n n^k$ מתבדר.

פתרון:

- מכיוון שלא ידוע לנו דבר על a_n, הדרך היא להניח בשלילה, להראות כי a_n מתכנס בהחלט ולהגיע לסתירה:
- נניח בשלילה כי $\sum a_n n^k$ מתכנס עבור קבוע $k>1$. (נרצה להראות ש$\sum|a_n|$ מתכנס בהחלט על מנת להגיע לשלילה):
  - הטור מתכנס ותנאי הכרחי לכך הוא שהאיבר הכללי שואף לאפס ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n n^k=0$.
    - מכך מתקיים: $\lim_{n\to\infty}|a_n|n^k=0$
      - כלומר $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n^k}=0$

- במילים אחרות, החל ממקום מסוים, $|a_n| < n^{-k} = \frac{1}{n^k}$
- ומהתכנסות של $\sum \frac{1}{n^k}$ עבור $k > 1$ נובעת התכנסות בהחלט של $\sum |a_n|$.
- בסתירה לנתון.

תרגיל 3:

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב$x=0$ המקיימת $f(0)=0$ אך $f'(0)\neq 0$

תהי a_n סדרה חיובית השואפת לאפס.

הראו ש$\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\sum f(a_n)$ מתכנס.

פתרון:

- מכיוון שצריך להוכיח אמ"מ, נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.
- נתון כי

$$\begin{aligned}0 \neq f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\end{aligned}$$

  - מכיוון ש $a_n > 0$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז לפי משפט היינה מתקיים:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_n)}{a_n}$$

  - מכיוון שנתון כי fגזירה ב-0 , ניתן לסמן $f'(0)=L$, כלומר:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_n)}{a_n} = L$$

- נתון כי $a_n > 0$ ולכן החל ממקום מסוים מתקיים שהסימן של $f'(0)=L$ שווה לסימן של $f(a_n)$
  - לכן נוכל להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי בין $\sum a_n$ ובין $\sum f(a_n)$ (או $\sum (-1) f(a_n)$)
    - נקבל שהם מתכנסים או מתבדרים ביחד, כנדרש.

תרגיל 4:

בדקו לאילו ערכי p הטור מתכנס:

- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$

פתרון:

- הטור $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p > 0$ כי הוא טור לייבניץ.
  - ולכן אם נבצע חיסור בין שני הטורים נקבל:

$$\frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^p} = \frac{-1}{n^p\left(n^P + (-1)^n\right)}$$

    * נעביר אגפים ואז ניתן לכתוב:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{n^p\left(n^P + (-1)^n\right)}$$

      · נבחן את הטור:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p\left(n^P + (-1)^n\right)}$$

      · הטור חיובי ולכן נשווה אותו עם $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p\left(n^P + (-1)^n\right)}}{\frac{1}{n^{2p}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2p}}{n^{2p}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)} = 1$$

      · ולכן גם הטור הזה וגם הטור המקורי מתכנסים עבור $2p > 1$, כלומר $p > \frac{1}{2}$.

תרגיל 5:

בדקו התכנסות של הטור הבא:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

פתרון:

- הטור חיובי ולכן נשתמש במבחן השורש:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} \\ &= \left(\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \to e^{-2} < 1\end{aligned}$$

- ולכן הטור מתכנס.

תרגיל 6:

בדקו התכנסות של הטור הבא:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(ln\left(n\right)\right)^{2}}$$

פתרון:

- אינטואיטיבית, אנחנו יודעים ש- $ln\left(n\right)$ שואף לאינסוף לאט יותר מ-n.
  - ולכן החל ממקום מסוים מתקיים

$$ln\left(n\right)<\sqrt{n}$$

$$\Leftarrow\left(ln\left(n\right)\right)^{2}<n$$

$$\Leftarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{\left(ln\left(n\right)\right)^{2}}$$

  - ולכן לפי מבחן ההשוואה עם $\sum\frac{1}{n}$ נקבל שהטור המקורי מתבדר.

תרגיל 7:

בדקו התכנסות של הטור הבא:

$$\sum\frac{1}{\left(ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{2}}$$

פתרון:

- אינטואיטיבית, $\sin\left(x\right)$ מתנהג כמו x ליד 0 וגם $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ מתנהג כמו $\frac{1}{n}$ ליד 0.
  - ולכן $ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ מתנהג כמו $ln\left(\frac{1}{n}\right)=-ln\left(n\right)$
    - כלומר $\left(ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{2}$ מתנהג כמו $\left(ln\left(n\right)\right)^{2}$
- בדקו לבד כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{2}}}{\frac{1}{\left(ln\left(n\right)\right)^{2}}}=1$$

– ונקבל כי לפי התרגיל הקודם הטור הזה מתבדר.

תרגיל 8:

- בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{n-1}{n+1}$$

פתרון:

- תזכורת:
  – **מבחן דיריכלה:** אם טור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ חסום ו-a_n סדרה מונוטונית שואפת לאפס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.
  – **מבחן אבל:** אם $\sum b_n$ מתכנס ו-a_n סדרה מונוטונית וחסומה אז $\sum a_nb_n$ מתכנס.
- נסמן $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, זהו טור מתכנס כי הוא לייבניץ.
- נסמן $a_n=\frac{n-1}{n+1}$
- לפי מבחן אבל נקבל כי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

תרגיל 9:

בדקו התכנסות של הטור:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\dots$$

פתרון:

- נסמן $a_n=\frac{1}{n}$ ו נסמן $b_n=1,1,1,-1,-1,-1$
- $\sum b_n$ חסום ו-a_n מונוטונית יורדת, לכן לפי מבחן דיריכלה נקבל כי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

תזכורת - קבוע אוילר:

- קבוע אוילר:

$$\begin{aligned}\gamma&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-ln\left(n\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-ln\left(n\right)\end{aligned}$$

– בהרצאה הוכחנו שהגבול הזה הוא סופי וסימנו אותו באות γ.

תרגיל 10:

בדקו התכנסות של הטור:

$$S=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$$

פתרון:

- אם ניקח את הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{k}$, כלומר $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ ונחסיר ממנו את האיברים באינדקסים שמתחלקים ב-3 אז נקבל את הטור שלנו.
  – כלומר:

$$\begin{aligned}S_{3n}&=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}-2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}\\&=\left(\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}-ln\left(3n\right)\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-ln\left(n\right)\right)+ln\left(3n\right)-\frac{2}{3}ln\left(n\right)\end{aligned}$$

  – נציב $ln\left(3n\right)=ln\left(3\right)+ln\left(n\right)$
    * ונבחן את הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_{3n}&=\gamma-\frac{2}{3}\gamma+ln\left(3\right)+ln\left(n\right)-\frac{2}{3}ln\left(n\right)\\&=\underbrace{\frac{1}{3}\gamma+ln\left(3\right)}_{Constant}+\frac{1}{3}ln\left(n\right)=\infty\end{aligned}$$

תרגיל 11:

בדקו התכנסות של הטור:

$$\sum_{n=2}^{\infty}ln\left(1+\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\right)$$

פתרון:

- נשים לב שהסימנים מתחלפים עבור n זוגי ו-n אי זוגי
  – כי $1<\left(1+\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\right)$ עבור n זוגי ו-$1>\left(1+\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\right)$ עבור n אי זוגי.

- ניקח את הביטוי הכללי:

$$ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=(-1)^n\left|ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right|$$

– ונסמן:

$$|a_n|=\left|ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right|$$

– נראה כי a_n מונוטונית על ידי כך שניקח שלושה איברים עוקבים:

* עבור n אי זוגי כלשהו:

$$\begin{aligned}|a_n|&=\left|ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|\\&=-ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

* עבור $n+1$ (זוגי) נקבל:

$$\begin{aligned}|a_{n+1}|&=\left|ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right|\\&=ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\&=ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\\&=-ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\\&=-ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

· ונשים לב שמתקיים:

$$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+2}$$

$$ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$-ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)<-ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

* עבור $n+2$ (אי זוגי) נקבל:

$$\begin{aligned}|a_{n+2}| &= -ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= |a_{n+1}|\end{aligned}$$

– כלומר קיבלנו ש$|a_n|$היא סדרה מונוטונית יורדת (לאפס) וגם a_n עצמה מחליפה סימן.

* לכן הטור המקורי $\sum a_n$ הוא טור לייבניץ

· כי טור לייבניץ הוא טור של $\sum(-1)\,a_n$ ואנחנו יכולים לסמן אצלנו $\sum b_n = \sum(-1)^n|b_n|$

תרגיל 12:

תהי a_n סדרה חיובית. הוכיחו או הפריכו:

1. אם $\sum a_n$ מתכנס אזי $\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$ מתכנס.
2. אם $\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

פתרון:

1. הטענה

• לפי אי שוויון הממוצעים:

$$\sqrt{a_na_{n+1}} \leq \frac{a_na_{n+1}}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_na_{n+1}}{2}$$

– נפצל את הטור הימני לשני מחוברים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_na_{n+1}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}} \leq \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}}^{Converges} + \overbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{2}}^{Converges}$$

– מכיוון שלפי הנתון $\sum a_n$ מתכנס אז לפי אריתמטיקה של טורים נקבל כי $\sum\sqrt{a_na_{n+1}}$ מתכנס, לפי מבחן ההשוואה.

2. הטענה לא נכונה.

- דוגמה נגדית: ניקח סדרה שהאיברים במקומות הזוגיים מתכנסים אבל נשים 1 במקומות האי זוגיים

$$a_n = \begin{cases} 1 & n\ is\ odd \\ \frac{1}{n^4} & n\ is\ even \end{cases}$$

– ואז הטור המתכנס יהיה:

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2} & n\ is\ odd \\ \frac{1}{n^2} & n\ is\ even \end{cases}$$

* הטור הזה מתכנס, לפי מבחן ההשוואה עם $\sum \frac{1}{n^2}$

תרגיל 13:

עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = m^2, m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n^2} & n \neq m^2 \end{cases}$$

צ"ל: הראו התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

פתרון:

- נגדיר שני טורים.

1. הראשון:

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{m^2} & n = m^2 \\ 0 & n \neq m^2 \end{cases}$$

2. השני:

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = m^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq m^2 \end{cases}$$

– ונקבל כי $a_n = b_n + c_n$

- c_n מקיים $0 \leq c_n \leq \frac{1}{n^2}$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

- הטור $\sum b_n$ מקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

  - כלמור הוא מתכנס.

- לכן $\sum a_n$ מתכנס לפי אריתמטיקה של טורים.

תרגיל 14: