שם: איל

April 3, 2024

לוגיקה | תרגול 11

שם: איל

April 3, 2024

נושא השיעור: גדירות של קבוצת מבנים על ידי קבוצת פסוקים

נושא ראשון - גדירות מבנים

תזכורת - פסוק: נוסחה שבה כל המשתנים קשורים.
לפסוק אין משמעות להשמה כי כל המשתנים מקבלים את הערך של השמה.
לכן מדברים על גדירות של מבנים (ואז לכל השמה יתקיים שהמבנה וההשמה מספקים את הפסוקים).

<u>הגדרה 1</u>: יהי τ מילון. בהינתן <u>קבוצת פסוקים</u> Σ נסמן $M(\Sigma) = \{M \mid M \models \Sigma$ ו־M מבנה מעל $\tau\}$.
אוסף <u>מבנים</u> K יקרא <u>גדיר</u>, אם קיימת קבוצת <u>פסוקים</u> Σ כך ש־$K = M(\Sigma)$.

זאת מכיוון שאם מבנה M והשמה z כלשהי מספקים פסוק α אז מסמנים $M \models \alpha$.

הוכחת גדירות של אוסף מבנים על ידי קבוצת פסוקים

<u>איך מוכיחים שאוסף מבנים K הוא גדיר?</u>

1. מגדירים קבוצת <u>פסוקים</u> Σ מפורשת.
2. מראים על ידי הכלה דו־כיוונית ש־$M(\Sigma) = K$.

<u>נשים לב</u>: למרות שבתחשיב היחסים יש נוסחאות, אנחנו מדברים פה רק על פסוקים.

<u>תרגיל 1</u>: נתון המילון $\tau = \langle R_0(\circ,\circ), R_1(\circ,\circ), R_2(\circ,\circ), \ldots \rangle$ כאשר לכל $n \in \mathbb{N}$, R_n הוא סימן יחס דו־מקומי. הוכיחו כי $\left\{ M | R_i^M \subseteq R_{i+1}^M \text{ לכל } i \in \mathbb{N} \text{ מתקיים} \right\} = K_1$ גדיר.

פיתרון תרגיל 1:

- המפתח לשאלות כאלה הוא למצוא את קבוצת הפסוקים הנכונה.
- נשים לב שלכאורה אנחנו רוצים לכתוב פסוק אינסופי α עם קשר מרכזי שהוא $\wedge$, ולכן אפשר לפרק לקבוצה אינסופית.
  - כלל אצבע: אם אפשר לפרק את הפסוק לאינסוף פסוקיות עם "וגם" ביניהן אז לרוב הקבוצה תהיה גדירה.
- לכן ניצור:

$$\Sigma_1 = \{\forall v_1 v_2 (R_i(v_1,v_2) \to R_{i+1}(v_1,v_2))\}$$

- נראה כי $K_1 = M(\Sigma_1)$:
  - יהי מבנה M השייך למודל של Σ_1:

$$M \in M(\Sigma_1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

* לכל z מתקיים כי $M \models_z \Sigma_1$ וזה קורה אמ"מ M ו-z מספקים כל פסוק ב-Σ_1
  · ולפי אופרטור "וגם" ואופרטור "$\to$" זה קורה אמ"מ:
  · לכל $i \in \mathbb{N}$ ולכל $d_1, d_2 \in D^M$ מתקיים שאם $(d_1,d_2) \in R_i^M$ אז $(d_1,d_2) \in R_{i+1}^M$.

$$\Longleftrightarrow$$

- ולפי הגדרת הכלה זה מתקיים אמ"מ לכל $i \in \mathbb{N}$:

$$R_i^M \subseteq R_{i+1}^M$$

- ולפי הגדרת K_1 זה מתקיים אמ"מ $M \in K_1$.

<u>תזכורת</u>: עבור מילון τ כלשהו, נגדיר לכל $n \geq 2$ את הפסוק הבא:

$$\alpha_n = \exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_n \left(\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq n} \neg \left(v_i \approx v_j \right) \right)$$

ונסמן:

$$\Sigma_{inf} = \{\alpha_n | n \geq 2\}$$

כלומר α_n הוא שקיימים n משתנים שונים אחד מהשני. כלומר קיימים n איברים שונים זה מזה.
נסמן ב-Σ_{inf} את הקבוצה המוגדרת על ידי כל המבנים שבהם ה-D^M הוא אינסופי.

<u>טענות:</u>

- לכל מבנה M מעל τ מתקיים: $M \vDash \alpha_n \iff \left|D^M\right| \geq n$.
- עבור $K_{inf} = \left\{ M | \text{ אינסופי } D^M \right\}$ מתקיים $M\left(\Sigma_{inf}\right) = K_{inf}$.

<u>תרגיל 2</u>: נתון המילון $\tau = \langle F(\circ), c \rangle$, כאשר F סימן פונקציה חד־מקומית ו־c סימן קבוע.
הוכיחו כי $K_2 = \left\{ M | F^M(d) = c^M \text{ שעבורם } d \in D^M \text{ יש אינסוף איברים } \right\}$ גדיר.

פיתרון 2:

- אנחנו רוצים אינסוף $d \in D^M$ (זה מה ש-Σ_{inf} אומר) כך שתתקיים דרישה חדשה $F^M(d) = c$
- לכן נרצה לשפר את Σ_{inf}:

$$\Sigma_2 = \{\varphi_n \mid n \geq 2\}$$

- ונגדיר את φ_n להיות:

$$\varphi_n = \exists v_1, v_2, \ldots, v_n \left(\overbrace{\left(\bigwedge_{1\leq i\neq j\leq n} \neg \left(v_i \approx v_j\right) \right)}^{same\ \ as\ \ \alpha_n} \wedge \overbrace{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} F\left(v_i\right) = c \right)}^{new\ \ constraint} \right)$$

- צריך להראות $M\left(\Sigma_2\right) = K_2$ (נדלג על חלק מהחלקים):
  - טענת עזר מהשיעורי בית: $\varphi_n \models M$ אמ"מ ב-D^M קיימים לפחות n איברים <u>שונים</u> d כך שעבור כולם מתקיים $F^M\left(d\right) = c$. (ההוכחה היא רק מלל של אמ"מ).
  - יהי מבנה M.
  - נראה שהוא לא מספק את Σ_2 אמ"מ קיים φ_n אותו הוא לא מספק:

$$M \in \Sigma_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

* קיים n כך ש $M \not\models \varphi_n$

$$\Longleftrightarrow$$

* קיים n כך שלא קיימים קיימים n איברים שונים זה מזה $d \in D^M$ שעבורים $F^M\left(d\right)$

$$\Longleftrightarrow$$

* אין אינסוף כאלה

$$\Longleftrightarrow$$

* $M \notin K_2$.

נושא שני - הוכחת אי גדירות בתחשיב היחסים

<u>משפט הקומפקטיות</u>: תהי Σ קבוצת נוסחאות, Σ ספיקה אמ`מ כל תת־קבוצה סופית של Σ ספיקה.

- נשים לב שמשפט הקומפקטיות תקף לכל קבוצת נוסחאות אבל אנחנו נשתמש בו רק לקבוצות פסוקים.

<u>איך מוכיחים אי גדירות של אוסף מבנים?</u>

1. מניחים בשלילה שקיימת קבוצת פסוקים X כך ש־$M\left(X\right)=K$.
2. בוחרים קבוצת פסוקים מפורשת Y כך ש־$K\cap M\left(Y\right)=\emptyset$.
3. מוכיחים כי $X\cup Y$ אינה ספיקה מאחר ש־$M\left(X\cup Y\right)=M\left(X\right)\cap M\left(Y\right)=K\cap M\left(Y\right)=\emptyset$.
4. מוכיחים שכל תת קבוצה סופית $D\subseteq X\cup Y$ ספיקה.
5. 3+4 הם סתירה למשפט הקומפקטיות ולכן K אינו גדיר.

<u>תרגיל 3</u>: נתון המילון $\tau=\left\langle F\left(\circ\right),c\right\rangle$, כאשר F סימן פונקציה חד־מקומית ו־c סימן קבוע.
הוכיחו כי $K_3=\left\{ M|\,F^{M}\left(d\right)=c^{M}\right.$ שעבורם $d\in D^{M}$ יש מספר סופי של איברים $\left.\right\}$ אינו גדיר.

פיתרון תרגיל 3:

- במקרה הזה יש לנו ''או'' אינסופי אבל אותו אי אפשר לפרק לאינסוף פסוקים ולספק את כולם.
- כשאומרים ש''יש מספר סופי של איברים $d\in D^{M}$'' הכוונה היא שיש מספר סופי ולא מספר אינסופי.
  - אינטואיטיבית הדרישה הזו היא כמו להגיד שיש שימוש באופרטור ''או'' אינסופי.
    - כלומר היינו רוצים לכתוב ''יש איבר 1 שמקיים'' <u>או</u> ''יש שני איברים שמקיימים'' <u>או</u> ''יש שלושה...'' וכו'.

1. נניח בשלילה שקיימת קבוצה X כך ש $K_3=M\left(X\right)$.
2. נבחר את הקבוצה Y מתרגיל 2 כדי שהחיתוך $M\left(Y\right)\cap M\left(X\right)$ יהיה ריק. כלומר:

$$\Sigma_2=\left\{ \varphi_n\mid n\geq2\right\}$$

- ונגדיר את φ_n להיות:

$$\varphi_n=\exists v_1,v_2,\ldots,v_n\left(\overbrace{\left(\bigwedge_{1\leq i\neq j\leq n}\neg\left(v_i\approx v_j\right)\right)}^{same\ \ as\ \ \alpha_n}\wedge\overbrace{\left(\bigwedge_{i=1}^{n}F\left(v_i\right)=c\right)}^{new\ \ constraint}\right)$$

3. נראה כי $X\cup Y$ לא ספיקה:

- מתקיים $M\left(X\cup Y\right)=\ldots=K_{3}\cap M\left(Y\right)=\emptyset$ לפי הגדרת K_{3} ו-Y.

4. נראה $X\cup Y$ ספיקה.

- תהא $D\subseteq X\cup Y$ תת קבוצה סופית.
- נסמן $D_{X}=X\cap D$ ו-$D_{Y}=Y\cap D$.
- מתקיים $D_{Y}=\left\{ \varphi_{i_{1}},\varphi_{i_{2}},\ldots,\varphi_{i_{k}}\right\}$.
  - D_{Y} קבוצה סופית ולכן קיים אינקס גדול ביותר בקבוצה.
  - יהי m מספר האינדקס הגדול ביותר כך ש $\varphi_{m}\in D_{Y}$ (או $m=1$ אם $D_{Y}=\emptyset$).ד
- נבחר M שיספק את D_{Y}, כלומר שלכל המספרים הטבעיים מ1 עד m מתקיים התנאי של Y. נתבונן במבנה הבא מעל τ:

$$M=\left\langle \overbrace{\left\{ 1,\ldots,M\right\} }^{D^{M}},F^{M}\left(\cdot\right),1\right\rangle$$

  - כאשר $F^{M}\left(d\right)=1$ לכל $d\in D^{M}$.
- נראה ש-M מספק את D_{Y}:
  - נשים לב כי לכל $d\in D^{M}$ מתקיים $F^{M}\left(d\right)=c^{M}$.
  - כמו כן, יש ב-D^{M} כמות של m איברים שונים זה מזה.
    * לכן קיימים m איברים שונים d עבורם $F^{M}\left(d\right)=c^{M}$
    * לכן $M\models\varphi_{i}$ לכל $2\leq i\leq m$
    * ולכן $M\models D_{Y}$
- נראה ש-M מספק את D_{X}:
  - מהגדרת M מתקיים כי D^{M} סופי.
  - לכן יש רק מספר סופי של איברים $d\in D^{M}$ כך ש-$F^{M}\left(d\right)=c^{M}$.
  - ולכן לפי הגדרת K_{3} מתקיים $M\in K=M\left(X\right)$.
  - ולכן $M\models X$.
  - ומכיוון ש-$D_{X}\subseteq X$ מתקיים $M\models D_{X}$.
- מסקנה: $M\models D_{X}$ וגם $M\models D_{Y}$, ולכן $M\models D_{X}\cup D_{Y}=D$
- הקבוצה הסופית $D\subseteq X\cup Y$ ספיקה ולכן ממשפט הקומפטיות $X\cup Y$ ספיקה.

5. הראנו כי $X\cup Y$ ספיקה וגם $X\cup Y$ לא ספיקה ולכן K_{3} אינה גדירה.