(104031) אינפי 1מ' | תרגול 5 - יוליה

שם: איל שטיין

November 7, 2022

נושאי השיעור: גבול הסדרה

תרגיל 1. תהי a_n סדרה. קיים N טבעי כך שלכל $\varepsilon > 0$ ולכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

הוכיחו כי a_n היא קבועה החל מ-$N+1$.
(לשים לב שהפכנו את סדר הכמתים בהגדרת הגבול).

פיתרון:

- נניח בשלילה שa_n אינה קבועה החל מ-$N+1$.
  - כלומר, קיים $n > N+1$ כך ש-$a_n \neq a_{N+1}$.
  - נסמן $\varepsilon = \frac{|a_n - a_{N+1}|}{2}$
    * נבחן את הביטוי הזה:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \varepsilon &= |a_{N+1} - a_n + L - L| \\ &= |(a_{N+1} - L) + (L - a_n)| \end{aligned}$$

· נשתמש באי שוויון המשולש ונקבל:

$$|(a_{N+1} - L) + (L - a_n)| \leq |L - a_n| + |a_{N+1} - L|$$

· בגלל תכונות הערך המוחלט נקבל:

$$|(a_{N+1} - L) + (L - a_n)| \leq |a_n - L| + |a_{N+1} - L|$$

- מכיוון שנתון שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$ אז מתקיים:

$$|a_n - L| + |a_{N+1} - L| \underbrace{<}_{n>N+1>N} \varepsilon + \varepsilon$$

- ומכיוון שהראנו ש- $2 \cdot \varepsilon < |a_n - L| + |a_{N+1} - L|$
- קיבלנו ש- $\varepsilon < \varepsilon$ וזו סתירה כי מספר לא יכול להיות גדול מעצמו.

תרגיל 2. חשבו את הגבולות:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^7-2n^2+3}{2n^7+5n+18}$

פיתרון:

- נבחן את הביטוי:

$$\frac{5n^7-2n^2+3}{2n^7+5n+18} = \frac{\cancel{n^7}\left(5 - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^7}\right)}{\cancel{n^7}\left(2 + \frac{5}{n^6} + \frac{18}{n^7}\right)}$$

- לכן,

$$\frac{\lim_{n\to\infty}\left(5 - \overbrace{\frac{2}{n^5}}^{0} + \overbrace{\frac{3}{n^7}}^{0}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2 + \underbrace{\frac{5}{n^6}}_{0} + \underbrace{\frac{18}{n^7}}_{0}\right)} = \frac{5}{2}$$

2. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n + \frac{1}{2}}$

פיתרון:

- נכפול בצמוד:

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n + \frac{1}{2}} \quad \backslash \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\sqrt{n + \frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}+1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\overbrace{\frac{1}{2n}}^{0}}}{\left(\underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{n}}_{1}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

פיתרון:

- ידוע ש $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$ ולכן אצלנו:

$$
\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{(n+1)}\cdot\sqrt[3]{n}+n^{\frac{2}{3}}}
$$

- נחפש ביטוי שגדול מהביטוי במצאנו. מכיוון שהגורמים במכנה חיוביים- $(n+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{(n+1)}\cdot\sqrt[3]{n}>0$ מתקיים ש:

$$
\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{(n+1)}\cdot\sqrt[3]{n}+n^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}
$$

  – מכיוון ש-$1\le n$ נובע גם ש-$n \ge 1^{\frac{2}{3}} \le \sqrt{n}$ ולכן:

$$
0 \le \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) < \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}
$$

- ידוע ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$
  – כלומר, $\lim_{n\to\infty}0 \le \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$
  – ולכן לפי משפט הסנדויץ', הגבול קיים ושווה ל-0.

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

פיתרון:

- $\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}$
- נשתמש באינדוקציה על מנת להוכיח שלכל $n\in\mathbb{N},\ a_1\ldots a_n,\ 0\le a_n\le 1$ מתקיים:

$$0\le a_1\cdot\ldots\cdot a_n\le 1$$

  - ויוצא ש:

$$0\le\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\le 1$$

  - $\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\right)$
  - מכיוון ש-$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ לכן, לפי משפט "חסומה כפול שואפת ל-0" יוצא ש:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\right)=0$$

5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

פיתרון:

- לא ניתן להשתמש במשפט חשבון גבולות מכיוון שמספר המחוברים הולך וגדל (הסכום אינו סופי).
- יש לנו n מחוברים, כאשר הימני ביותר הוא הקטן ביותר והשמאלי ביותר הוא הגדול ביותר.
  - לכן לכל n מתקיים:

$$\frac{n}{n+1}=n\cdot\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\le n\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}$$

    * נבחן את הביטוי הימני $\frac{n^2}{n^2+1}$ ונראה שהוא שואף ל-1.
    * כלומר, לכל n הסדרה שלנו "מעוכה" בין שתי סדרות שכל אחת שואפת ל-1.
    * לכן, הגבול קיים ושואף ל-1.