הסתברות מ' (00094412) | תרגול 2

שם: איל

January 25, 2024

נושא התרגול: הסתברות מותנית , כלל הכפל, כלל ההסתברות השלמה, כלל בייס, אי-תלות.

נושא ראשון - הסתברות מותנית , כלל הכפל, כלל ההסתברות השלמה, כלל בייס:

שאלה 1 בכד גדול יש 100 כדורים ממוספרים מ1 עד 100. מתוכם 30 צהובים (מ-1 עד 30), 20 אדומים (מ-31 עד 50) ו- 50ירוקים (מ-51 עד 100).

מוציאים כדור אחד באקראי (ז"א שיש סיכוי שווה לכל אחד מהכדורים להיבחר).

א. מה ההסתברות שהכדור שהוצא הוא אדום או ירוק?

ב. מה ההסתברות שהכדור שהוצא הוא אדום אם כבר ידוע שהוא או אדום או ירוק?

א.

- קודם כל ניתן שמות למאורעות:
  - Y = יצא צהוב
  - G = ירוק
  - R = אדום
- נסמן את $\Omega = \{\alpha \mid \alpha \in \{1,\ldots,100\}\}$
  - מכיוון ש-R,G אלו מאורעות זרים מתקיים:

$$P(R\cup G) = P(R) + P(G) = \frac{|R|}{|\Omega|} + \frac{|G|}{|\Omega|} = 0.7$$

ב.

- אנחנו מחפשים את $P(R \mid (R\cup G))$

– נשתמש בהגדרה של הסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(R \mid (R\cup G)) &= \frac{P(R\cap (R\cup G))}{P(R\cup G)} \\ &= \frac{P(R)}{0.7} \\ &= \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

שאלה 3 בכד נמצאים 7 כדורים שחורים ו-5 כדורים לבנים . מוציאים באקראי 3 כדורים אחד אחרי השני מהכד בלי החזרה של הכדורים שיצאו. מה ההסתברות שהכדור הראשון שיצא יהיה שחור, הכדור השני יהיה לבן והכדור השלישי יהיה שחור?

פתרון:

- נסמן מאורעות:
  – B_1 - הכדור הראשון לבן
  – W_2 - הכדור השני לבן
  – B_3 - הכדור השלישי שחור
- אנחנו מחפשים את ההסתברות $P(B_1\cap W_2\cap B_3)$
  – הערה: בתרגול הקודם היינו מסתכלים על $\Omega = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \mid \alpha_i\in\{1,\ldots,n\} \ \wedge\ (\alpha_i\neq\alpha_j \quad \forall i\neq j)\}$
    * היינו מקבלים $|\Omega| = \binom{12}{3}\cdot 3!$
      · ואז:

$$P(B_1\cap W_2\cap B_3) = \frac{\binom{7}{1}\cdot 1!\cdot\binom{5}{1}\cdot 1!\cdot\binom{6}{1}\cdot 1!}{\binom{12}{3}\cdot 3!} = \frac{7}{44}$$

  – היום יש לנו דרך נוספת לפתור את התרגיל, על ידי כלל הכפל (כי אנחנו מחפשים הסתברות של כמה חיתוכים):

$$P(B_1\cap W_2\cap B_3) = P(B_1)\cdot P(W_2 \mid B_1)\cdot P(B_3 \mid W_2\cap B_1)$$

    * נפרק את הביטוי:

$$P(B_1) = \frac{7}{12}$$

$$P(W_2 \mid B_1) = \frac{5}{12-1} = \frac{5}{11}$$

$$P\left(B_3 \mid W_2 \cap B_1\right) = \frac{7-1}{12-2} = \frac{6}{10}$$

* נכפול את שלושת ההסתברויות כדי לקבל את התשובה.

– מסקנה: כשאנחנו מחשבים הסתברות של כמה חיתוכים, לרוב נוח להשתמש בכלל הכפל.

מסקנה 1. נשים לב שמכיוון שבתרגיל הזה ההסתברות המותנית $P\left(W_2 \mid B_1\right)$ לא שווה להסתברות $P\left(W_2\right)$ כי לא החזרנו את הכדור אחרי ששלפנו אותו.

שאלה 4 בכד ראשון 6 כדורים לבנים ו-8 שחורים, בכד שני 3 ו-2, בהתאמה.
מעבירים באקראי כדור אחד מהכד השני לכד הראשון ואחר כך מוציאים כדור באקראי מהכד הראשון.
א. מה ההסתברות שהכדור שיצא לבן?
ב. בהינתן שיצא כדור לבן מכד א' (בסוף), מה ההסתברות שהועבר כדור לבן מכד ב' (בהעברה בשלב הראשון)?
פתרון:

- נסמן מאורעות:
  – W = מכד ב' לכד א' הועבר כדור לבן.
  – A = יצא כדור לבן מכד א'.

א.

- נשים לב שמתקיים:

$$W \cup W^c = \Omega$$

$$W \cap W^c = \emptyset$$

$$P\left(\overbrace{W}^{Moved\ \ white}\right), P\left(\overbrace{W^c}^{Moved\ \ black}\right) > 0$$

  – כלומר מתקיימים תנאי משפט ההסתברות השלמה ולכן:

$$P\left(A\right) = P\left(A|W\right) \cdot P\left(W\right) + P\left(A|W^c\right) \cdot P\left(W^c\right)$$

$$= \underbrace{P\left(A|W\right)}_{\frac{7}{15}} \cdot \underbrace{P\left(W\right)}_{\frac{3}{5}} + \underbrace{P\left(A|W^c\right)}_{\frac{6}{15}} \cdot \underbrace{P\left(W^c\right)}_{\frac{2}{5}} = \frac{11}{25}$$

ב.

- אנחנו מחפשים את ההסתברות $P\left(W\mid A\right)$.
- נשתמש בנוסחת בייס כי אנחנו יודעים לחשב את $P\left(A|W\right)$:

$$P\left(W|A\right)=\frac{\overbrace{P\left(A|W\right)}^{\frac{5}{15}}\cdot\overbrace{P\left(W\right)}^{\frac{3}{5}}}{\underbrace{P\left(A\right)}_{\frac{11}{25}}}=\frac{7}{11}$$

נושא שני - אי תלות בין מאורעות:

<u>אי תלות - הגדרה:</u>
A,B ב"ת $\Longleftrightarrow P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

או באופן שקול:
$P\left(B\right)=P\left(B|A\right)$, אם $P\left(A\right)>0$
$P\left(A\right)=P\left(A|B\right)$, אם $P\left(B\right)>0$

<u>הערה לגבי מאורעות זרים:</u> מאורעות זרים הם בהכרח תלויים. בכיוון ההפוך זה לא בהכרח נכון, כלומר מאורעות תלויים לא תמיד יהיו זרים.
כלומר בהינתן שני מאורעות זרים A,B המקיימים $P\left(A\right),P\left(B\right)>0$:

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(\emptyset\right)=0$$

$$0\neq P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$$

מסקנה 2. כל עוד לא נתון שמאורעות בלתי תלויים, אי אפשר להסיק זאת מהסיפור מקרה. או שמוכיחים את זה במפורש או שזה נתון במפורש.

<u>הערה לגבי Ω ו-$\emptyset$:</u> גם $\emptyset$ וגם Ω הם מאורעות בלתי תלויים בכל מאורע אחר, כלומר:

$$P\left(A\cap\emptyset\right)=P\left(\emptyset\right)=0=P\left(A\right)\cdot\overbrace{P\left(\emptyset\right)}^{=0}$$

$$P\left(A\cap\Omega\right)=P\left(A\right)=0=P\left(A\right)\cdot\overbrace{P\left(\Omega\right)}^{=1}$$

שאלה 5: נבחרה משפחה מקרית שלה n ילדים.
ניתן להציג את המגדר של כל הילדים במשפחה, באמצעות וקטור באורך n, בו קואורדינטות מתאימות לסדר הילדים לפי הגילאים שלהם, מהצעיר למבוגר ביותר, ובכל קואורדינטה מצוין מגדר הילד המתאים (לפי סדר הגילאים הנ"ל).
נניח כי לכל וקטור אפשרי מסוג זה יש אותה הסתברות להתקבל.
נגדיר מאורעות:
A - במשפחה לפחות בן אחד ולפחות בת אחת.
B - לכל היותר בת אחת במשפחה.

עבור אילו ערכי n המאורעות תלויים?

פתרון:

- ננסח את מרחב המדגם באופן מתמטי:

$$\Omega=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\ \ :\ \ \alpha_i\in\{b,g\}\}$$

  - לפי הנתון, מרחב המדגם הוא שווה הסתברות.
  - נשים לב כי יש n איברים בוקטור ורק שני מגדרים ולכן:

$$|\Omega|=2^n$$

- אינטואיציה:
  - נתחיל מ$n=1$:

$$P(A)=0$$

    * כלומר מתקיים $P(A)=P(\emptyset)=0$ ולכן זהו מאורע ב"ת בכל מאורע אחר.
  - המשך אינטואיציה - עבור $n=2$:

$$\Omega=\{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}$$

    * ולכן:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{4}$$

$$P\left(A\cap B\right)=\frac{\left|A\cap B\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

· נשים לב שמתקיים:

$$\frac{1}{2}=P\left(A\cap B\right)\neq P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

· ולכן המאורעות A ו-B תלויים עבור $n=2$.

- עבור n כללי:
  - במאורע A שתי האפשרויות היחידות שהן לא קבילות הן שכל המשפחה בנים או שכל המשפחה בנות. לכן הגודל $|A|$ הוא $2^{n}-2$.

$$P\left(A\right)=\frac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{2^{n}-2}{2^{n}}$$

  - במאורע B יש או בת אחת או אפס בנות. אם יש אפס בנות אז יש אופציה אחת בלבד.
    * ואם יש בת אחת בלבד אז יש לכך $\binom{n}{1}=n$ אפשרויות.
    * ולכן $|B|=n+1$
    * ההסתברות של B היא:

$$P\left(B\right)=\frac{\left|B\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{n+1}{2^{n}}$$

  - המאורע $A\cap B$ פירושו שיש גם לכל היותר בת אחת וגם לפחות בן ובת אחת. כלומר יש בדיוק בת אחת.
    * נחשב את $P\left(A\cap B\right)$:

$$P\left(A\cap B\right)=\frac{n}{2^{n}}$$

  - נבחן מתי השוויון $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$ מתקיים:

$$\frac{n}{2^{n}}=\frac{2^{n}-2}{2^{n}}\cdot\frac{n+1}{2^{n}}$$

    * (לא נראה את החישוב אך) התשובה היא שרק עבור $n=3$ השוויון מתקיים (ואז המאורעות בלתי תלויים).

נושא שלישי - אי תלות בין אוסף של מאורעות:

נניח שיש לנו n מאורעות $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
הם יהיו בלתי תלויים אם לכל סט אינדקסים $i_1, i_2, \ldots, i_m$ מתוך הקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$ מתקיים:

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \ldots \cdot P\left(A_{i_m}\right)$$

לדוגמה: אם ניקח $\{3, 7, 9\}$ אז:

$$P\left(A_3 \cap A_7 \cap A_9\right) = P\left(A_3\right) \cdot P\left(A_7\right) \cdot P\left(A_9\right)$$

הערה:
בפרט, כל זוג מאורעות מתוך הקבוצה שנבחר יהיו ב"ת.
כלומר אי תלות בין אוסף של מאורעות $\Leftarrow$ אי תלות בין כל זוג.
אבל אי תלות בין כל זוג $\not\Rightarrow$ אי תלות בין כל אוסף המאורעות.

שימור של אי תלות:
נניח שיש לנו $A_1, A_2, \ldots, A_n$ מאורעות ב"ת.
ונניח שיש לנו מאורע B שהוא $\{A_1 \cup A_7\} \setminus \{A_9 \cap A_3\}$ ומאורע C שהוא $\{A_2 \cup A_4\} \setminus A_6$.
מכיוון ש-B ו-C בנויות רק מתתי-קבוצות זרות (כלומר אין מאורע שמופיע בשניהם) מתקיים ש-B, C ב"ת.

שאלה 6 מטילים 2 מטבעות הוגנים.
הניחו כי לכל זוג תוצאות הסתברות שווה להתקבל. נסמן את המאורעות הבאים:
A = המטבע I מראה H.
B = המטבע II מראה H.
C = שני המטבעות מראים אותו דבר.

הראו כי C ו-B, A ב"ת בזוגות אבל לא כאוסף.

פתרון:

- מרחב המדגם שלנו הוא וקטור באורך 2 מעל $\{H, T\}$:

$$\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_2) \ : \ \alpha_i \in \{H, T\}\}$$

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

$$|\Omega| = 4$$

- נתחיל מלחשב את ההסתברויות של המאורעות:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap C) = \frac{|B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

  - כעת נבדוק אי-תלות:

$$\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

    * אבל:

$$\frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$$

- כלומר בזוגות המאורעות הללו ב"ת אבל אם ניקח את הסט של האינדקסים $\{1,2,3\}$ אז המאורעות תלויים כאוסף.
- אינטואיטיבית, אפשר גם לראות את זה כי $P(C)=\frac{1}{2}$ אבל $P(C \mid A\cap B)=1$, כלומר C הוא פונקציה של A וגם B.