(104031) אינפי 1מ' | תרגול 8 - יוליה

שם: איל שטיין

November 16, 2022

נושאי השיעור: מבחן המנה והשורש, סדרות מונוטוניות

נושא ראשון: מבחן המנה והשורש

תרגיל 1.

סעיף א. חשבו את $\lim_{n\to\infty}a_{n1}$ כאשר $a_n=\binom{2n}{n}$

- אפשר לומר $a_n=\frac{(2n)!}{n!n!}$
  - כאשר רואים עצרת, נחשוב ישר על מבחן המנה.
-

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$=\frac{(2n+2)\,(2n+1)}{(n+1)!\,(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\,(2n+1)}{(n+1)!\,(n+1)!}=4>1$$

לכן, לפי מבחן המנה, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

סעיף ב'. $\lim_{n\to\infty}b_n$ כאשר $b_n=\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

- לפי סעיף א', $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$ ולכן לפי משפט מההרצאה שמקשר בין גבול של סדרת המנות ובין הגבול של סדרת השורשים, גם הגבול של $\lim_{n\to\infty}b_n=4$
  - ההיגיון של זה הוא שאם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$ אז a_nמתנהג בצורה דומה ל4^n (לא בדיוק כמונו אבל דומה לו) ולכן אם נפעיל עליו $\sqrt[n]{}$ נקבל שגם $\lim_{n\to\infty}b_n=4$

תרגיל 2.
תהי a_nסדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
הוכח/הפרך:

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$$

פיתרון:
(1) וגם **(2)** לא נכונות. דוגמא נגדית:

- $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ שמקיימת $a_n > 0$. הסדרה הזו שואפת ל-0.
  - (1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$
  - (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(3) נכון. $a_n^n > 0$ כי $a_n > 0$. לפי מבחן השורש: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
מכיוון ש$0 < 1$ לפי מבחן השורש גם $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$

תרגיל 3. תהי $a_n > 0$. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
הוכח/הפרך:

(4)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

(5)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

(6)
$$\lim_{n\to\infty} a_n^n = 1$$

פיתרון:
(5) נכון. מכיוון ש$a_n > 0$, לפי משפט חשבון גבולות מתקיים ש $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{1} = 1$
(4) נכון כי (5) נכון. (מכיוון ש) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
(6) לא נכון. דוגמא נגדית: $a_n = \sqrt[n]{2}$ שמקיים $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ אבל $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 2 \neq 1$

חלק שני: סדרות מונוטוניות

הגדרה 4. נאמר ש-a_n היא סדרה מונוטונית עולה אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$

הגדרה 5. נאמר ש-a_n היא סדרה מונוטונית עולה אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$

הערה 6. אם נרצה לדבר על סדרה עולה ממש נחליף את הסימן $\geq$ בסימן $>$

משפט 7. תהי a_n מונוטונית עולה. אז:

1. אם היא חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = sup a_n$
2. אם היא לא חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} = \infty$

תרגיל 8. סדרה רקורסיבית:

יהי $c > 0$.

נגדיר סדרה:
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. הראו שהסדרה מוגדרת היטב (כלומר $a_n \neq 0$).
2. הוכיחו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פיתרון:

1. צריך להראות ש-a_{n+1} חיובית ובשביל זה נעשה אינדוקציה על n:
   - מכיוון ש-$a_1 > 0$, נניח ש$a_n > 0$ ונקבל ש$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right) > 0$
   - כלומר, a_n היא סדרה מוגדרת היטב.
2. נניח לרגע ש-a_n מתכנסת (ונוכיח זאת בהמשך)
   - נחפש לאיזה מספרים היא יכולה להתכנס:
     - לפי הגדרת הגבול, אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז גם $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ (כי הגדרת הגבול אומרת שהחל ממקום מסוים הגבול הוא L)
     - נניח ש-$L \neq 0$.
       * נשאיף את n בשני הצדדים של משוואת הגדרת הסדרה לאינסוף:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{c}{L}\right)$$

$$\frac{1}{2}L = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{L}$$

$$L^2 = c$$

$$L=\sqrt{c}$$

* המסקנה היא שאם $a_n>0$ אז לא יכול להתקיים $L=-\sqrt{c}$
  - אם $L=0$ אז בביטוי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\right)$ נקבל $\lim_{n\to\infty}\frac{c}{a_n}=\infty$
- הראנו ש**אם** a_n מתכנסת אז הגבול שלה הוא $\sqrt{c}$.

3. עכשיו נוכיח ש-a_nמתכנסת:

- נתחיל מלהראות שהיא חסומה:
  - הערה: הביטוי $\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)=\frac{\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)}{2}$ הוא ממוצע חשבוני כי הוא סכום של שני האיברים - a_n ו- $\frac{c}{a_n}$
  - לכן לפי אי שוויון הממוצעים מתקיים:

$$a_{n+1}=\frac{(a_n)+\left(\frac{c}{a_n}\right)}{2}\geq\sqrt[2]{(a_n)\cdot\left(\frac{c}{a_n}\right)}$$

$$a_{n+1}\geq\sqrt[2]{\cancel{a_n}\cdot\frac{c}{\cancel{a_n}}}=\sqrt{c}$$

$$a_{n+1}\geq\sqrt{c}$$

  - קיבלנו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים ש $\sqrt{c}\leq a_{n+1}$.
    * כלומר, הסדרה חסומה מלמטה על ידי $\sqrt{c}$ החל מהאיבר השני בסדרה (בגלל שמדובר באיבר הa_{n+1})
- נוכיח שהסדרה היא מונוטונית יורדת: (כלומר, נמצא לאיזה תנאים החל מ$n\geq 2$ מתקיים $a_{n+1}\leq a_n$)
  - נחפש מתי: $\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\leq a_n$ ונפתח את כל השלבים ב"אם ורק אם":

$$\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\frac{c}{a_n}\leq a_n$$

$$\frac{1}{2}\frac{c}{a_n}\leq\frac{1}{2}a_n\quad\backslash\cdot 2\cdot\underbrace{a_n}_{>0}$$

$$c\leq a_n^2,\ \ a_n>0$$

$$\sqrt{c}\leq a_n$$

* הראנו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1}\geq\sqrt{c}$, כלומר, כל איברי הסדרה החל מהאיבר השני שלה גדולה מ$\sqrt{c}$.
  · לכן, אם נגדיר $n\geq 2$ ניתן לומר ש$a_n\geq\sqrt{c}$.

- מכיוון שהמהלך היה כולו ב"אם ורק אם" אפשר להתחיל מכך לשל $n \geq 2$ מתקיים $\sqrt{c} \leq a_n$ ולהגיע ל-$a_n \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ לכל $n \geq 2$.

  * קיבלנו שהסדרה היא מונוטונית יורדת ממקום מסוים (כאשר $n \geq 2$)

- הראנו שהסדרה היא מונוטונית יורדת והיא חסומה. לכן היא מתכנסת.
- בנוסף, הראנו שאם היא מתכנסת לגבול סופי L אז $L = \sqrt{c}$.
- לכן, $L = \sqrt{c}$

הערה 9. תרגיל קטן בלוגיקה:

- תהי a_n סדרה. אם רוצים להוכיח שa_n היא מונוטונית יורדת החל ממקום מסוים.
- נניח בשלילה שהטענה לא נכונה.

  - אי אפשר לומר שההפך של "מונוטונית יורדת" הוא "מונוטונית עולה". (כלומר **לא** אומרים שקיים N כל שלכל n שמקיים $n > N$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$)
  - אלא צריך לומר: <u>לכל</u> N <u>קיים</u> $n \in \mathbb{N}$ שמקיים $n > N$ כך שמתקיים $a_{n+1} > a_n$.

תרגיל 10. הראו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,

כאשר $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2}} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

פיתרון:

- ראשית, נשים לב שהסדרה תמיד חיובית מכיוון שהגדרת הסדרה היא שורש של מספר בריבוע.
- נוכיח ש-a_n מונוטונית: כל המהלכים ב"אם ורק אם"

  - נחפש מתי $a_{n+1} \dot{>} a_n$

$$a_{n+1} \dot{>} a_n \geq 0$$

$$a_{n+1}^2 \geq a_n^2$$

$$a_n^2 + \frac{1}{2} = a_{n+1}^2 \geq a_n^2$$

$$\frac{1}{3} \geq 0$$

  - כלומר, a_nהיא מונוטונית עולה ולכן היא מתכנסת במובן הרחב לפי משפט.
  - נוכיח שלא קיים ל-a_n גבול סופי:

    * נניח בשלילה ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = L$

· לכן מתקיים:

$$L = \sqrt{L^2 + \frac{1}{3}}$$

$$L^2 = L^2 + \frac{1}{3}$$

$$0 = \frac{1}{3}$$

· סתירה.

* לכן, לא קיים $L \in \mathbb{R}$ שהוא גבול סופי של הסדרה a_n

– a_nלא מתכנסת לגבול סופי ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

תרגיל 11. תהי $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$. הראו ש-$a_n$ מתכנסת.

פיתרון:

• נתבונן בסדרה ונראה שa_n היא סדרה מונוטונית עולה:

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

• נוכיח שהסדרה חסומה מלמעלה:

– $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

* בעבר הוכחנו ש $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$

* לכן:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

* נפתח את הסיגמא ונקבל שהסכום של הסדרה הוא:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$$

* כלומר,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$$

* הראנו שלכל n הסדרה חסומה מלמעלה ע"י 2 .

• מכיוון ש-a_nהיא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה ע"י 2 יוצא שהיא מתכנסת לגבול סופי.

הערה. הגבול הוא לא 2.

תרגיל 12. תהי a_n סדרה חיובית כך שמתקיים:

$$\begin{cases} a_1 \geq 1 \\ (a_{n+1})^2 = 3a_n - 2 \end{cases}$$

הראו ש-a_n מתכנסת ומצאו את הגבול.

פיתרון:

1. נבחן האם הסדרה הזו היא מונוטונית:

(א) התנאים שבהם הסדרה תהיה מונוטונית עולה ממש: (כל השלבים הם ב"אם ורק אם")

•

$$a_{n+1} > a_n$$

$$\sqrt{3a_n - 2} > a_n$$

$$3a_n - 2 > a_n^2$$

$$-a_n^2 + 3a_n - 2 > 0$$

$$1 < a_n < 2$$

(ב) התנאים שבהם הסדרה תהיה מונוטונית יורדת ממש: (אותם השלבים כמו (a))

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\cdots$$

$$a_n < 1 \ \lor \ a_n > 2$$

(ג) התנאים שבהם היא סדרה קבועה:

$$a_{n+1} = a_n$$

$$a_n = 1, 2$$

- קיבלנו:
  - שאם $a_n = 1, 2$ אז הסדרה קבועה ויתקיים $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$
  - אם $a_n > 2$ או $a_n < 1$ אז $a_{n+1} < a_n$
  - ואם $1 < a_n < 2$ אז מתקיים $a_{n+1} > a_n$

2. נבדוק האם הסדרה מתמידה (קונסיסטנטית), כלומר נראה שאם a_nכלשהו מקיים $1 < a_n < 2$ אז גם $1 < a_{n+1} < 2$:
   - אם $1 < a_n < 2$ אז $1 < 3a_n - 2 < 4$
     - ואז $1 < \sqrt{3a_n - 2} < 2$, כלומר גם $1 < a_{n+1} < 2$

3. הראנו עד עכשיו:
   - שאם $1 < a_1 < 2$ אז מתקיים $1 < a_n < 2$ לכל n. במקרה כזה יתקיים $a_{n+1} > a_n$ כלומר, הסדרה עולה ממש.
   - שאם $a_1 > 2$ אז מתקיים $a_n > 2$. במקרה כזה יתקיים $a_{n+1} < a_n$, כלומר הסדרה יורדת ממש.
     - (אפשר להוריד את המקרה של $a_1 < 1$ כי הגדרת הקבוצה היא ש-$a_1 \geq 1$)
   - בכל המקרים שראינו, a_n מונוטונית וחסומה ולכן לפי המשפא היא מתכנסת.

4. נסמן את הגבול של הסדרה ב-L.
   - בגלל הגדרת הקבוצה, L צריך לקיים $L^2 = 3L - 2$
     - כלומר, $L = 1, 2$
   - אמרנו שעבור $1 < a_1 < 2$, הסדרה a_n עולה ממש.
     - לכן היא מתכנסת ל$sup\left(a_n\right)$. אך הסופרמום לא יכול להיות 1 ולכן הגבול הוא 2.
   - בנוסף, אמרנו שאם $a_1 > 2$ אז $a_n > 2$ והסדרה יורדת ממש.
     - לכן היא מתכנסת ל$inf\left(a_n\right)$ ו-$inf\left(a_n\right) \neq 1$ ולכן $L = 2$

5. לכן, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} 1 & a_1 = 1 \\ 2 & a_1 > 1 \end{cases}$$

תרגיל 13. תהי a_nסדרה מונוטונית יורדת וחיובית.
תהי b_n סדרה מונוטונית עולה וחיובית.
נתון כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

הרא כי הסדרות מתכנסות לאותו הגבול.
פיתרון:

- על פי הנתון, b_n סדרה עולה ולכן $b_{n+1} \geq b_n > 0$
  - נעלה בריבוע ונקבל:

$$b_{n+1}^2 \geq b_n^2$$

* לפי הנתון $b_{n+1}^2 = a_n \cdot b_n$ כלומר:

$$a_n \cdot b_n \geq b_n^2$$

$$a_n \geq b_n$$

- על פי הנתון, a_n סדרה מונוטונית יורדת ולכן לכל n מתקיים:

$$a_1 \geq a_2 > \ldots \geq a_n$$

  - על פי הנתון, b_nהיא סדרה מונוטונית עולה ולכן לכל n מתקיים:

$$b_n \geq b_{n-1} \geq \ldots \geq b_2 \geq b_1$$

- נצרף את $a_n \geq b_n$ ונקבל:

$$a_1 \geq a_2 > \ldots \geq a_n > b_n \geq b_{n-1} \geq \ldots \geq b_2 \geq b_1$$

- כל סדרה חסומה על ידי הסדרה השנייה, כלומר:
  * לכל nמתקיים $b_n \leq a_1$ ולכן b_n היא סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה.
  * לכל n מתקיים $b_1 \leq a_1$ ולכן a_nהיא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה.
- יוצא ששתי הסדרות מתכנסות לגבול סופי.
  * לכן:
    · $\lim_{n\to\infty} a_n = A$
    · $\lim_{n\to\infty} b_n = B > 0$
    · $\lim_{n\to\infty} b_n = B = \lim_{n\to\infty} \sqrt{AB}$

$$B = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cdot b_n} = \sqrt{AB}$$

$$B^2 = AB$$

$$B = A$$

• לסיכום הוכחנו ששתי הסדרות מתכנסות לאותו הגבול.