הסתברות מ' (00094412) | הרצאה 3

שם: איל

February 1, 2024

נושאי השיעור: אי תלות, מידות הסתברות (הבינומית, הגאומטרית, הבינומית השלילית וההיפר גאומטרית), קירובים

נושא ראשון - מידות הסתברות (הבינומית, הגאומטרית, הבינומית השלילית וההיפר גאומטרית)

- בשיעור הקודם התחלנו לדבר על אי-תלות:

  הגדרה. - אי תלות

  נאמר כי A,B ב"ת אם $p\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

  בהכללה, נאמר כי $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ב"ת אם לכל $i_1<i_2<\ldots<i_m$ מתקיים:

$$P\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_m}\right)\ldots P\left(A_{i_m}\right)$$

משפט. אם מייצרים מאורעות $B_1,B_2,\ldots,B_m$ מאוסף מאורעות ב"ת $A_1,A_2,\ldots,A_n$ מבלי להשתמש באותו מאורע A_i בהגדרות של שני מאורעות שונים B_k,B_j אז $B_1,B_2,\ldots,B_m$ ב"ת.

טענה.

- יהא Ω מרחב מדגם סופי (או בן מנייה).
- יהיו $\left(p_\omega\ :\ \omega\in\Omega\right)$ אוסף מספרים אי שליליים כך ש$\sum_{\omega\in\Omega}^{\infty}p_\omega=1$
- אזי קיימת מידת הסתברות יחידה P על Ω המקיימת שלכל $\omega\in\Omega$ המקיימת $\omega\in\Omega$, $P\left(\{\omega\}\right)=P_w$

הוכחה.

- עבור A תת קבוצה של Ω , נגדיר את:

$$P\left(A\right)=\sum_{\omega\in A}p_\omega$$

– כעת מתקיים:

1. $P(\{\omega\}) = p_w$ לכל $\omega \in \Omega$.
2. נבדוק האם

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

* זה אכן מתקיים לפי הגדרת P.

3. לשם הפשטות, נבדוק אדטיביות סופית. עבור $A, B \subseteq \Omega$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
   * מתקיים:

$$\overbrace{\sum_{\omega \in A \cup B} p_\omega}^{=P(A \cup B)} = \overbrace{\sum_{\omega \in A} p_\omega}^{=P(A)} + \overbrace{\sum_{\omega \in B} p_\omega}^{=P(B)}$$

· זאת לפי חוקי טורים חיוביים, A, B זרות ולכן מתכנסים בהחלט.

· תרגיל - להוכיח אדטיביות בת מניה ולהוכיח יחידות.

■

דוגמה.
מטילים n פעמים מטבע עם הסתברות לראש $p \in (0,1)$.
הניחו תוצאות הטלה בלתי תלויות.

1. מה ההסתברות לקבל k ראשים ואז זנבות?
2. מה ההסתברות לקבל k ראשים בסוף ובהתחלה זנבות?
3. מה ההסתברות לקבל k ראשים בדיוק?

פתרון:

- נניח שיש מרחב מדגם שניתן להגדיר שיתמוך בניסוי הזה (בשלב הזה של הקורס אין צורך לציין מהו).
- נגדיר מאורעות:
  – A_i = יצא ראש בהטלה ה-i, עבור $1 \leq i \leq n$
- נתון:
  – $P(A_i) = p$
  – $A_1, A_2, \ldots, A_n$ מאורעות בלתי תלויים.

1. ההסתברות לקבל k ראשים ואז זנבות היא:

$$P\left(A_1\cap A_2\cap\ldots A_k\cap A_{k+1}^c\cap\ldots\cap A_n^c\right)$$

- לפי המשפט שראינו מתקיים שכל ה-A_i בלתי תלויים, ולכן:

$$\begin{aligned}&=\overbrace{P\left(A_1\right)}^{=p}\cdot P\left(A_2\right)\cdot\ldots\cdot\overbrace{P\left(A_k\right)}^{=p}\cdot\overbrace{P\left(A_{k+1}^c\right)}^{=1-p}\cdot\ldots\cdot\overbrace{P\left(A_n^c\right)}^{=1-p}\\&=p^k\cdot(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

2. נחשב את ההסתברות:

$$P\left(A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_{n-k}^c\cap A_{n-k+1}\cap\ldots\cap A_n\right)$$

- לפי המשפט מתקיים:

$$\begin{aligned}&=\overbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)}^{n-k\ \ times}\cdot\overbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}^{k\ \ times}\\&=p^k\cdot(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

3. נגדיר מאורע $B_{n,k}$ k ראשים מתוך n ההטלות.

- מתקיים:

$$P\left(B_{n,k}\right)=\bigcup_{\underbrace{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\ \ |I|=k}_{where\ \ there\ \ are\ \ heads}}\left(\overbrace{\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)}^{Head\ \ in\ \ the\ \ I}\cap\overbrace{\left(\bigcap_{j\in I}A_j^c\right)}^{Tails\ \ when\ \ not\ \ in\ \ I}\right)$$

  - נשים לב שזהו איחוד זר, כי קבענו בכל I איפה יש ראשים ואיפה יש זנבות.
    - לכן מאדטיביות:

$$=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\},\ \ |I|=k}\left(P\left(\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j\neq i}A_j^c\right)\right)\right)$$

· ולפי המשפט שראינו מתקיים $\bigcap_{i\in I}A_i$ ו-$\bigcap_{j\neq i}A_j^c$ הם בלתי תלויים.

- ולכן:

$$= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\},\ |I|=k} \left(\left(\prod_{i\in I}\overbrace{P\left(A_i\right)}^{=p}\right)\cdot\left(\prod_{j\neq i}\overbrace{P\left(A_j^c\right)}^{=1-p}\right)\right)$$

- כלומר:

$$= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\},\ |I|=k} p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

- מכיוון שמספר המחוברים (מספר הקבוצות בגודל k מתוך $1,\ldots,n$) הוא $\binom{n}{k}$ וכל מחובר הוא $p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, נקבל שהסכום שווה:

$$= \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

באופן כללי נגדיר:

הגדרה. ניסוי ברנולי.

הגדרה. ניסוי ברנולי הוא ניסוי שבו יש שתי תוצאות אפשריות: כישלון והצלחה.

מסקנה. מצאנו שבאופן כללי אם מבצעים סדרה של n ניסויי ברנולי בלתי תלויים אז ההסתברות לקבל בדיוק $0\le k\le n$ הצלחות היא $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

לכן נגדיר מרחב הסתברות לדוגמה שפתרנו עם הראשים והזנבות, כאשר תוצאה היא מספר הראשים שהתקבלו:

$$\Omega = \left\{0,1,\ldots,\overbrace{k}^{k\ heads\ out\ of\ n\ throws},\ldots,n\right\}$$

ונגדיר את מידת ההסתברות P ע"י:

$$P\left(\{k\}\right) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

- זו אכן מידת הסתברות מוגדרת היטב באופן יחיד לפי הטענה הראשונה שראינו, בתנאי ש:

$$1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^k$$

– ומכיוון שזו נוסחת הבינום, אכן מתקיים:

$$= (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

מכיוון שמשתמשים במידת ההסתברות הזו בנוסחת הבינום, נגדיר:

הגדרה. מידת ההסתברות הבינומית

למידת ההסתברות P מעל $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ המקיימת עבור $k = 0, 1, \dots, n$ כי $P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ קוראים מידת ההסתברות הבינומית עם פרמטרים n ו-p.

סימון: $P_{B_{(n,p)}}$

$\left(\Omega, P_{Bn_{(n,p)}}\right)$ מתאר ניסוי שבו מבצעים n ניסויי ברנולי בלתי תלויים אם הסתברות הצלחה p ושואלים כמה הצלחות התקבלו.

דוגמה.

כעת מטילים את המטבע ∞ פעמים.

מה ההסתברות שהראש הראשון יתקבל בפעם ה-k?

מה ההסתברות שהראש ה-m $(1 \le m)$ יתקבל בפעם ה-k? (עבור $k = m, m+1, \dots$)

הניחו הטלות בלתי תלויות.

פתרון:

1. נגדיר מאורע A_i = בהטלה ה-i התקבל ראש.
   - נתון:
     – $P(A_i) = p$ לכל $1 \le i$
       * $A_1, A_2, \dots$ הם מאורעות ב"ת.
     – נסמן C_k = יצא ראש בפעם הראשונה בהטלה ה-k.
       * ההסתברות של C_k היא ההסתברות שיצא זנב ב$k-1$ פעמים הראשונות:

$$P(C_k) = P\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap A_k\right)$$

* הערה: אפשרי אבל קשה לחשוב על מהו מרחב המדגם המתאים במקרה כזה.
* נתון שהמאורעות $A_1, A_2, \dots, A_k$ ב"ת ולכן:

$$= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{k-1}^c\right) \cdot P(A_k)$$

$$= (1-p)(1-p)\dots(1-p)\cdot p$$
$$= (1-p)^{k-1}\cdot p$$

– נגדיר כעת את מרחב ההסתברות באופן הבא:

$$\Omega = \{1,2,\dots,k,\dots\}$$

$$P(\{k\}) = (1-p)^{k-1}\cdot p, \qquad k=1,2,\dots$$

* עלינו לוודא כי

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p$$

· ואכן, זוהי סדרה גאומטרית המקיימת:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} = p\cdot\frac{1}{p} = 1$$

הגדרה. מידת ההסתברות הגאומטרית

- למידת הסתברות P מעל $\Omega=\{1,2,\dots\}$ המקיימת $P(\{k\}) = (1-p)^{k-1}p$ עבור $k=1,2,\dots$ קוראים מידת ההסתברות הגאומטרית עם פרמטר p.
- סימון: $P_{Geo(p)}$.
- המרחב $\left(\Omega, P_{Geo(p)}\right)$ מתאר ניסוי שבו מבצעים סדרת ניסויי ברנולי ב"ת עם הסתברות להצלחה p ושואלים מתי התקבלה ההצלחה הראשונה.

נחזור לדוגמה השנייה:

2. מה ההסתברות שהראש ה-m $(1\le m)$ יתקבל בפעם ה-k? (עבור $k=m,m+1,,\dots$)

פתרון:

- נסמן $D_{m,k}$ = הראש ה-m יתקבל בהטלה ה-k.

– ההסתברות שלו היא:

$$P\left(D_{m,k}\right)=P\left(\overbrace{\underbrace{B_{k-1,m-1}}_{Defined\ only\ by\ A_{1},\ldots,A_{k}}}^{First\ k-1\ rolls\ recieved\ m-1\ heads}\cap\overbrace{A_{k}}^{=Head\ in\ roll\ k}\right)$$

– שני האיברים הללו A_k ו-$B_{k-1,m-1}$ הם בלתי תלויים מהנתון ומהמשפט הראשון שראינו, ולכן:

$$=P\left(B_{k-1,m-1}\right)\cdot P\left(A_{k}\right)$$

– ובשאלה הקודמת ראינו שההסתברות $P\left(B_{k-1,m-1}\right)$ היא $P_{Bn(n=k-1,p)}\left(\{n-1\}\right)$ (ההסתברות הבינומית)

* לכן:

$$P\left(B_{k-1,m-1}\right)\cdot P\left(A_{k}\right)=P_{Bn(n=k-1,p)}\left(\{n-1\}\right)\cdot P\left(A_{k}\right)$$

* נציב את נוסחת הבינום כדי לקבל:

$$=\binom{k-1}{m-1}p^{m-1}\left(1-p\right)^{k-1-(m-1)}$$

$$=\binom{k-1}{m-1}p^{m}\left(1-p\right)^{k-m}$$

הגדרה. - מידת ההסתברות הבינומית השלילית

למידת ההסתברות P מעל $\Omega=\{m,m+1,\ldots\}$ המוגדרת על ידי $P\left(\{k\}\right)=\binom{k-1}{m-1}\cdot p^{m}\cdot\left(1-p\right)^{k-m}$ קוראים <u>מידת ההסתברות הבינומית השלילית</u> עם פרמטרים m ו- p.

- סימון: $P_{NB_{(m,p)}}$, כלומר $Negative\ Binomial$.
- $\left(\Omega,P_{NB(m,p)}\right)$ מתאר ניסוי שבו מבצעים סדרה אינסופית של (תתי) ניסויי ברנולי בלתי תלויים שואלים מתי תתקבל ההצלחה ה-m.

<u>הערה:</u> צריך לוודא שמתקיים

$$1=\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k-1}{m-1}p^{m}\left(1-p\right)^{k-m}$$

<u>הערה:</u> ניתן לעצור לאחר קבלת הראש ה-m (הראשון) ומקבלים את אותן ההסתברויות.

דוגמה.

- בכד יש G כדורים ירוקים ו-$N-G$ כדורים כחולים, כלומר סה"כ N כדורים.
- שולפים כדור אחר כדור ללא החזרה n פעמים.
  - הניחו כי לכל סדרת שליפות סיכוי שווה.

1. מה ההסתברות לקבל בדיוק k ירוקים מתוך ה-n?
2. חזרו על 1 עם החזרות.

1. פתרון:

- קודם כל צריך לוודא שיש לנו מספיק כדורים מכל סוג, ולכן נוודא שיש לנו מספי כדורים ירוקים:

$$k \leq G$$

  - ונוודא שיש לנו מספיק כדורים כחולים:

$$n-k \leq N-G$$

- נניח כי ברקע יש לנו מרחב מדגם של כל סדרות השליפות האפשריות בגודל n + מידה האחידה.
- נסמן מאורע E_k = k ירוקים במדגם (ללא החזרה).
  - נחשב את $P\left(E_k\right)$:

$$P\left(E_k\right)=\frac{\left|E_k\right|}{|\Omega|}=\frac{\overbrace{\binom{G}{k}}^{Pick\ green}\overbrace{\binom{N-G}{n-k}}^{Pick\ blue}\overbrace{n!}^{Define\ order}}{\underbrace{\binom{N}{n}}_{Choose\ n}\cdot\underbrace{n!}_{inner\ order}}$$

$$=\frac{\binom{G}{k}\binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

הגדרה. מידת ההסתברות ההיפר-גאומטרית

למידת ההסתברות P מעל $\Omega=\{0,1,\ldots,n\}$ המוגדרת על ידי:

$$P(\{k\})=\begin{cases}\dfrac{\dbinom{G}{k}\dbinom{N-G}{n-k}}{\dbinom{N}{n}} & k\leq G\ AND\ n-k\leq N-G\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

קוראים <u>מידת ההסתברות ההיפר-גאומטרית</u> עם פרמטרים N,G,n.

<u>סימון:</u> $P_{HG(N,G,n)}$.

המשמעות: $\left(\Omega,P_{HG(N,G,n)}\right)$ מתאר ניסוי שבו בוחרים מדגם בגודל k (עם או בלי חשיבות לסדר, זה לא משנה) בסיכוי שווה מתוך אוכלוסיה בגודל n עם G פרטים טובים ו- $N-G$ פרטים רעים ושואלים כמה טובים במדגם.

<u>הערה:</u> צריך לוודא שהסכום הוא 1, כלומר שמתקיים:

$$1=\sum_{k\ :\ (k\leq G)\wedge(n-k\leq N-G)}\frac{\dbinom{G}{k}\dbinom{N-G}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$$

2. פיתרון:

- כעת נבצע את אותו תרגיל עם החזרה.
- זה מתאים למידת ההסתברות הבינומית:
  - יש לנו n ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות הצלחה קבועה $\frac{G}{N}$.
- כלומר, נסתכל על הניסוי ככזה שבו מבצעים n (תתי) ניסויים, בכל ניסוי שולפים כדור מכד המכיל G ירוקים ו- $N-G$ כחולים.
  - נגדיר "הצלחה" = יצא ירוק, "כישלון" = יצא כחול.
    * ראינו ראינו בהרצאה 2 (עבור שני ניסויים) שתתי-הניסויים הם בלתי תלויים.
      · כלומר לכל i, המאורעות "יצא ירוק בשליפה הi" הם בלתי תלויים.
- שואלים על ההסתברות לקבל בדיוק k הצלחות (במקרה שלנו: לקבל k פעמים ירוק).
  - התשובה לשאלה הזו היא בדיוק:

$$P_{Bin\left(n,p=\overbrace{\frac{G}{N}}^{Probability\ of\ green}\right)}(\{k\})=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{G}{N}\right)^{K}\left(1-\frac{G}{N}\right)^{n-k}$$

* עבור $k=0,\dots,n$

נושא שני - קירובים:

קירוב בינומי למידת ההסתברות ההיפר-גאומטרית:

משפט.

יהיו n,k ו- $p\in(0,1)$ קבועים.

אז ההסתברות ההיפר-גאומטרית עם המשתנים N,G,n שואפת למידת ההסתברות הבינומית עם המשתנים n,p:

$$P_{HG(N,G,n)}\left(\{k\}\right)\xrightarrow[n\to\infty,\ \frac{G}{N}\to p]{}P_{Bin\ (n,p)}\left(\{k\}\right)$$

אפשר לראות זאת אחרת:

$$P_{HG(N,Np,n)}\left(\{k\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}P_{Bin(n,p)}\left(\{k\}\right)$$

- <u>בקירוב:</u> עבור p,k,n קבועים, כאשר N גדול ו-$\frac{G}{N}=p$ מתקיים:

$$P_{HG(N,Np,n)}\left(\{k\}\right)\cong P_{Bin(n,p)}\left(\{k\}\right)$$

- <u>במילים:</u> כאשר N גדול, G גדול, $N-G$ גדול ו-n קטן, אז לדגום עם החזרה שווה בערך ללדגום בלי החזרה.
- <u>הערה:</u> בקורס הזה לא נשתמש בקירוב בלי שתהיה הוראה מפורשת על כך בשאלה.

הוכחה.

- אגף שמאל:

$$\frac{\binom{G}{N}\binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{(G-1)\cdot\ldots\cdot(G-k+1)}{k!}\cdot\frac{(N-G)\cdot\ldots\cdot(N-G-(n-k)+1)}{(n-k)!}}{\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n!}}$$

$$=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{G^k\cdot(N-G)^{n-k}}{N^n}\cdot\frac{G\cdot\ldots\cdot(G-k+1)}{G^k}\cdot$$

$$\frac{(N-G)\cdot\ldots\cdot(N-G-(n-k)+1)}{(N-G)^k}\cdot\frac{N^n}{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}$$

– נשאיף את N לאינסוף ואז גם G שואף לאינסוף וגם $N-G$ שואף לאינסוף ונקבל:

$$=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{G}{N}\right)^{k}\cdot\left(1-\frac{G}{N}\right)^{n-k}\cdot\frac{G\cdot\ldots\cdot(G-k+1)}{G^{k}}\cdot\frac{(N-G)\cdot\ldots\cdot(N-G-(n-k)+1)}{(N-G)^{n-k}}$$

$$\cdot\frac{N^{n}}{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}\xrightarrow[N,G,(N-G)\to\infty]{}$$

* וכל הביטוי הזה שואף ל:

$$\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}$$

· קיבלנו את אגף ימין.

■

הקירוב הפואסוני (Poisson) למידת ההסתברות הבינומית:

משפט.

- תהא P_n סדרה של ערכים המקיימת:
  1. $p_n\in(0,1)$ לכל n
  2. $\lambda>0 \xleftarrow[n\to\infty]{} (n\cdot p_n)$.
- אז לכל k קבוע מתקיים:

$$P_{Bin(n,p_n)}\left(\{k\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}$$

הוכחה.

- לשם הפשטות, נניח כי $p_n=\frac{\lambda}{n}$

- אגף שמאל, ההסתברות הבינומית:

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{k} \cdot (p_n)^k \cdot (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \underbrace{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\to \frac{\lambda^k}{k!}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}
\end{aligned}
$$

■

הגדרה. מידת ההסתברות הפואסונית.

- למידת ההסתברות P מעל $\Omega = \{0,1,2,\ldots\}$ המוגדרת על ידי $P(\{k\}) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$ עבור $k = 0,1,2,\ldots$, קוראים מידת ההסתברות הפואסונית עם פרמטר λ.

- סימון: $P_{pois(\lambda)}$

- הערה: המשפט האחרון שראינו על $\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{Bin(n,p_n)}(\{k\})$ אומר באופן אינטואיטיבי שעבור λ קבוע, כאשר n גדול ו-$p = \frac{\lambda}{n}$ אז מתקיים:

$$P_{Bin\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)}(\{k\}) \cong P_{pois(\lambda)}(\{k\})$$

דוגמה.

- מודדים את כמות המכוניות שיוצאות ממנהרות הכרמל בין חצות ובין השעה 01:00 בלילה.

- נתון:

  1. במקטע זמן "קטן", לכל יותר יוצאת מכונית אחת.
  2. קצב יציאת המכוניות הוא λ $\left(\frac{cars}{hour}\right)$
  3. יציאת מכוניות במקטעי זמן זרים הן מאורעות בלתי תלויים.

- **צ"ל:** מה ההסתברות שיוצאות k מכוניות בין 00:00 ל-01:00?

פתרון:

- נחלק את המקטע בין 00:00 ל-01:00 ל-n תתי מקטעים באורך $\frac{1}{n}$ שעות.

- נגדיר את המאורע A_k = בתת המקטע $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ הגיעה לפחות מכונית אחת.

- נתון:

1. אם n מספיק גדול (כלומר $\frac{1}{n}$ מספיק קטן), אז או שהגיעה מכונית אחת בדיוק במקטע $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ או שלא הגיעה בכלל.
   - כלומר, לא יכול להיות שהגיעו שתי מכוניות בו זמנית.
2. ההסתברות שתגיע מכונית במקטע זמן באורך t היא $\lambda\cdot t$
   - כלומר ההסתברות של המאורע A_k היא $P\left(A_k\right)=\lambda\cdot\frac{1}{n}$. לא הצדקנו את המסקנה הזו בהרצאה.
3. המאורעות $A_1,A_2,\ldots,A_n$ הם בלתי תלויים.

- נסמן את המאורע B_k = יצאו בדיוק k מכוניות בין 00:00 ל-01:00.
  - אנחנו מחפשים את ההסתברות $P\left(B_k\right)$.
    * מספר המכוניות שווה למספר ההצלחות בסדרה של n ניסויים בלתי תלויים (במקטע $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ הגיעה מכונית).
      · הניסויים בלתי תלויים ולכן לפי המשפט השלישי שראינו מתקיים שההסתברות להצלחת ניסוי היא $\frac{\lambda}{n}$ ולכן:

$$\begin{aligned}P\left(B_k\right)&=P_{Bin\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)}\xrightarrow[n\to\infty]{}P_{pois(\lambda)}\left(\{k\}\right)\\&=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

נושא שלישי - משתנה מקרי:

הגדרה. משתנה מקרי.
בהינתן מרחב מדגם Ω, משתנה מקרי (מ"מ) הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$.
כלומר לכל $\omega\in\Omega$ אנחנו מתאימים $X\left(\omega\right)\in\mathbb{R}$.

דוגמה.

- מטילים n פעמים מטבע עם הסתברות ל"ראש" שהיא $p\in(0,1)$.

- נגדיר מ"מ:
  - X = מספר ה"ראש" שהתקבלו
  - Y = מספר ה"זנב" שהתקבלו.

- **צ"ל:** הגדירו באופן פורמלי את:

1. P
2. Ω
3. X
4. Y

פתרון:

- בהרצאה הזו לא נגדיר את P באופן פורמלי.
  - נגדיר את מרחב המדגם Ω:

$$\Omega = (\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_k \in \{H, T\}) = \{H, T\}^n$$

  - נגדיר את X:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto \underbrace{X(\omega)}_{No\ \ of\ \ head\ \ in\ \ \omega}$$

    * לדוגמה:

$$X((H, H, H, \ldots, H)) = n$$

$$X((T, T, T, \ldots, T)) = 0$$

$$X((H, H, H, T, T, \ldots, T)) = 3$$

    * באופן כללי ההגדרה של X היא:

$$X(\omega) = Number\ \ of\ \ 'H'\ \ in\ \ \omega = \#_H(\omega)$$

  - ניקח דוגמה לשימוש ב-Y:

$$Y((H, H, H, H, \ldots, H)) = 0$$

    * באופן כללי ההגדרה של Y היא:

$$Y(\omega) = \#_T(\omega) = n - X(\omega)$$

הערה: אפילו שהגדרה הפורמלית של משתנה מקרי היא פונקציה, אפשר באופן אינטואיטיבי להתייחס אליו כמשתנה שערכו נקבע לאחר הניסוי להיות $X(\omega)$. אנחנו צריכים אותם כי באמצעותם אפשר להגדיר מאורעות.

הגדרה.
בהינתן תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, נגדיר:

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \in A\}$$

$$\left(X^{-1}(A)\right)$$

- נחזור לדוגמה עם ראש וזנב שמתוארים על ידי X, Y:

$$\begin{aligned}\overbrace{\{X \in \{2,4,6\}\}}^{A} &= \{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \in \{2,4,6\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega \;:\; \#_H(\omega) \in \{2,4,6\}\}\end{aligned}$$

  - כלומר או 2 או 4 או 6 פעמים "ראש".
  - לפחות 3 "זנב":

$$\begin{aligned}\left\{Y \in \overbrace{\{3,4,5,\ldots,n\}}^{A}\right\} &= \{\omega \in \Omega \;:\; \#_T(\omega) \in \{3,4,\ldots,n\}\} \\ &= \{y \geq 3\}\end{aligned}$$