(104031) אינפי 1מ' | תרגול 6 - יוליה

שם: איל שטיין

November 9, 2022

נושאי השיעור: חשבון גבולות - המשך

תרגיל 1. הראו על ידי שלילת הגדרת בגבול כי לסדרה $a_n = n^2$ אין גבול. (כלומר לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N קיים $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \varepsilon$)

פיתרון:

- ראשית, נשלול את הגדרת הגבול: לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N קיים $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \varepsilon$.
- יהי $L \in \mathbb{R}$.
- נבחן את הביטוי: $\left|n^2 - L\right|$.
  - נשתמש באי שוויון המשולש ונקבל: $\left|n^2 - L\right| \geq \left|\left|n^2\right| - |L|\right|$
    * $\left|\left|n^2\right| - |L|\right| = \left|n^2 - |L|\right|$
  - עבור $n > \sqrt{|L| + 1}$ מתקיים ש $n^2 > |L| + 1$ ולכן:

$$\left|n^2 - |L|\right| = n^2 - |L|$$

    * וגם

$$n^2 - |L| > (|L| + 1) - |L| = 1$$

- נסכם: עבור $\varepsilon = 1$, לכל N קיים $n = max\left\{\left[\sqrt{|L| + 1}\right] + 1,\ [N] + 1\right\}$, $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq 1$

תרגיל 2. תהי a_n מתכנסת. תהי b_n סדרה שלא מתכנסת.

א. הוכיחו או הפריכו: $a_n + b_n$ לא מתכנסת.

ב. הוכיחו או הפריכו: $a_n \cdot b_n$ לא מתכנסת.

ג. נתון בנוסף ש- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. הוכיחו או הפריכו $a_n \cdot b_n$ לא מתכנסת.

פיתרון:

א.

- אי אפשר בהכרח להגיד שb_n חסומה.
- נניח בשלילה ש$a_n + b_n$ כן מתכנסת.
  - לפי חשבון גבולות, אפשר לומר ש$b_n = (a_n + b_n) - a_n$ וידוע שa_n מתכנסת לפי הנתון ו- b_n מתכנסת לפי הנחת השלילה.
  - לפי המשפט של חשבון גבולות, הפרש של שתי סדרות מתכנסות גם היא מתכנסת.
    - כלומר, הסדרה $(a_n + b_n) - a_n$ גם היא מתכנסת.
  - יוצא ש-b_n מתכנסת וזו סתירה לנתון.

ב.

- הטענה לא נכונה, למשל אם ניקח $a_n = \frac{1}{n}$ שהגבול שלה הוא 0 וניקח $b_n = (-1)^n$ שהיא לא מתכנסת.
  - הסדרה $a_n \cdot b_n = \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, כלומר הסדרה שנוצרת ממכפלת הסדרות יכולה להתכנס.
  - לכן, הטענה לא נכונה.

ג.

- הטענה נכונה. את ההוכחה כל אחד יעשה לבד, בדומה לסעיף א' (רק עם מנה). צריך להוסיף שאם a_nממקום מסוים לא שווה 0 אז אפשר לחלק בה מהמקום הזה כי היא בוודאות לא שווה 0.

תרגיל 3. יהיו a_n, b_n שתי סדרות. נתון: $(a_n + b_n)$ ו- $\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ מתכנסות
הוכיחו או הפריכו:
א. $a_n \cdot b_n$ מתכנסת
ב. גם a_n וגם b_n מתכנסות.
פיתרון:
א.

- לפי הבינום של ניוטון, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. נעביר אגפים ונקבל: $a_n b_n = \frac{1}{2}\left(\left(a_n + b_n\right)^2 - \left(a_n^2 + b_n^2\right)\right)$
  - לגבי $(a_n + b_n)^2 = (a_n + b_n) \cdot (a_n + b_n)$ כלומר, סכום של שתי סדרות מתכנסות ולכן גם היא מתכנסת.
  - לגבי $\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ נתון שהיא מתכנסת.
- כלומר, $a_n \cdot b_n$ מתכנסת.

ב.

- הטענה לא נכונה. למשל, $a_n = (-1)^n$ ו- $b_n = -a_n = (-1)^{n+1}$
  - יוצא ש $b_n + a_n = 0$
  - ויוצא ש $b_n^2 + a_n^2 = 2$

כמה גבולות חשובים:

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. הוכחנו בהרצאה בעזרת אי שוויון הממוצעים.

2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$. כי לפי חוקי החזקות זה שווה ל- $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ ולפי חשבון גבולות זה שווה ל-$\frac{1}{1}$.

3. יהי $c\in\mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$

תרגיל 4. תהי $a_n\geq 0$ סדרה כך שהגבול של $\lim_{n\to\infty}a_n=L$, $L>0$. אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$
פיתרון:

- מכיוון ש $L>0$ נגדיר $\varepsilon=\frac{L}{2}>0$.
- לכן, לפי הגדרת הגבול, ממקום מסוים (קיים N כך שלכל $n>N$) מתקיים ש- $L-\frac{L}{2}<a_n<L+\frac{L}{2}$
  – נפעיל שורש $\sqrt[n]{}$ על שני הצדדים של אי השוויון ונקבל:

$$1=\overbrace{\sqrt[n]{\frac{L}{2}}}^{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1}<\sqrt[n]{a_n}<\overbrace{\sqrt[n]{\frac{3L}{2}}}^{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1}=1$$

  – לפי סנדוויץ, הגבול של $\sqrt[n]{a_n}$ הוא 1.

תרגיל 5. חשבו: $\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$
פיתרון:

- נבחן את הביטוי: 2^n+3^n:

$$3^n<2^n+3^n<3^n+3^n=2\cdot 3^n$$

  – מכיוון שכל אי השוויון חיובי, ניתן להפעיל שורש $\sqrt[n]{}$ על כל הצדדים:

$$3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{2^n+3^n}<\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\cdot 3$$

  – לכן לפי סנדוויץ מתקיים שהגבול של $\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$

תרגיל 6. יהי מספר $q\in\mathbb{R}$ כך ש $|q|<1$. אז $\lim_{n\to\infty}q^n=0$.
פיתרון:

- דרך א':
  – יהי $\varepsilon>0$.
  – צ"ל: נחפש N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|q^n-0|<\varepsilon$.
    * בגלל תכונות הערך המחלט אפשר לכתוב: $|q^n-0|=|q|^n$
      · כלומר, צ"ל: $|q|^n<\varepsilon$. אפשר להפעיל שורש $\sqrt[n]{}$ על שני הצדדים ולכתוב - צ"ל: $|q|<\sqrt[n]{\varepsilon}$

– לפי הנתון: $|q| < 1$.

– הראנו לפי משפט ש-1 $\sqrt[n]{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{}$

* מכיוון שהגבול מתקיים לכל ε, ממילא הוא מתקיים גם עבור $0 < \frac{1-|q|}{2} = \varepsilon_0$.

· לכן, עבור $\varepsilon_0 = \frac{1-|q|}{2}$ קיים N כל שכל $n > N$ מתקיים $|\sqrt[n]{\varepsilon} - 1| < \varepsilon_0$ כלומר:

$$1 - \varepsilon_0 < \sqrt[n]{\varepsilon} < 1 + \varepsilon_0$$

* לפי בחירת ε_0 הזו, מתקיים $|q| = 1 - 2 \cdot \varepsilon_0$ ולכן נוכל לבחור מספר אחר כך שיתקיים: $|q| < 1 - \varepsilon_0$

- נחבר את שני אי השוויונות ביחד ונקבל:
  – מתקיים גם $1 - \varepsilon_0 < \sqrt[n]{\varepsilon}$
  – וגם $|q| < 1 - \varepsilon_0$
  – כלומר, מתקיים:

$$|q| < 1 - \varepsilon_0 < \sqrt[n]{\varepsilon} = 1$$

- כלומר, הראנו ש: $|q| < \sqrt[n]{\varepsilon}$ ולכן $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

הגדרה 7. <u>הגדרת גבול אינסופי</u>:

- תהי a_n סדרה.
- נאמר כי גבול של $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם לכל $M > 0$ קיים N כל שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$. (אפשר גם לכתוב רק $M \in \mathbb{R}$).
- אותו דבר לגבי סדרה ששואפת ל $-\infty$ רק $a_n < M$ לכל $M \in \mathbb{R}$.

תרגיל 8. הראו לפי הגדרה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 3n}}{\sqrt[3]{n^2 + 4}} = \infty$$

פיתרון:

- יהי $M > 0$.
- **צ"ל:** קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+4}} > M$
- נחפש מתי $n^3 - 3n > n^2$ $\Leftarrow$ תשובה: מתקיים כאשר $n \geq 3$
  – לכן, כאשר $n \geq 3$, נוכל לבחון את הביטוי

$$\frac{\sqrt{n^3 - 3n}}{\sqrt[3]{n^2 + 4}} > \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^2 + 4}}$$

* נמצא גורם במכנה שגדול יותר ונמצא ביטוי במונה שקטן יותר וניצור אי שוויון חדש:

$$\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+4}} > \frac{n}{\sqrt[3]{n^2+7n^2}} = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^2}} = \frac{1}{2}n^{\frac{1}{3}}$$

· נבדוק מתי $\frac{1}{2}\cdot n^{\frac{1}{3}} > M$ ונמצא שזה מתקיים כאשר $n > 8m^3$

- נבחר $N = max\left\{8M^3, 3\right\}$.
  - עבור $n > N$ מתקיים $\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+4}} > \frac{1}{2}n^{\frac{1}{3}} > M$
- קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $\frac{\sqrt{n^3-3n}}{\sqrt[3]{n^2+4}} > M$

מסקנה 9. סדרה ששואפת ל∞ אינה חסומה מלמעלה. ההפך אינו בהכרח נכון.

דוגמה 10. $a_n = \begin{cases} n & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases}$. נראה ש-$a_n$ לא חסומה מלמעלה:

- יהי $M_1 > 0$, עבורו קיים מספר זוגי n (למשל, $n = [M_1]+1$) כך ש- $a_n = n > M_1$
- נוכיח ש-a_nלא שואפת ל-∞ על ידי כך שנראה שקיים $M > 0$ כך שלכל N קיים $n > N$ כך שמתקיים $a_n \le M$:
  - נבחר $M = 1 > 0$.
    * לכל N קיים n אי זוגי $n > N$ (למשל, $n = 2\cdot(|[N]|+1)+1$ שהוא אי זוגי כי הוא שווה לפעמיים מספר שלם ועוד אחד).
    * אז מתקיים: $a_n = 0$ כי n אי זוגי. וגם יתקיים $0 < M = 1$.
      · כלומר, $a_n < M$ ולכן היא לא שופאת ל∞.

תרגיל 11. יהיו שתי סדרות a_n, b_n.
נתון:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
2. קיים $\varepsilon > 0$ וקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n \ge \varepsilon > 0$

צ"ל: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$

- יהי $M > 0$.
- **צ"ל:** קיים N_3 כך שלכל $n > N_3$ מתקיים $a_n \cdot b_n > M$
- נתון שכאשר $n > N_1$ מתקיים $b_n \ge \varepsilon > 0$.
- לפי הנתון: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ולכן קיים N_2עבורו לכל $n > N_2$ מתקיים:

$$a_n > \frac{M}{2}$$

- אז לכל $n > max\left\{N_1, N_2\right\}$ יתקיים $a_n \cdot b_n > \frac{M}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = M$
- יוצא שקיים $N_3 = max\left\{N, N_2\right\}$ עבורו לכל $n > N$ מתקיים $a_n \cdot b_n > M$

תרגיל 12. יהי $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. הוכיחו כי $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

- נשתמש במשפט:

משפט 13. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ וממקום מסוים מתקיים $b_n \geq a_n$ אז גם $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

- נבחן את הביטוי q^n:
  - מכיוון ש- $q > 1$ אפשר למצוא מספר $d > 0$ כך ש:

$$q = 1 + d$$

  - אז לפי אי שווין ברנולי יוצא ש:

$$q^n = (1+d)^n \geq 1 + n \cdot d$$

  - אפשר לומר ש $1 + n \cdot d > n \cdot d$ ואפשר לומר ש $n \cdot d \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
    - לפי המשפט שהבאנו בתחילת ההוכחה, מתקיים ש:

$$q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

- לסיכום, אם $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ non\ exitent & q \leq 1 \end{cases}$