אינפי 2מ' | תרגול 12 - עם ניקה

שם: איל שטיין

June 27, 2023

נושא השיעור: פונקציות בשני משתנים - רציפות וגזירות

נושא ראשון - גבול לפי הגדרה:

תרגיל 1.

- הוכיחו לפי הגדרה כי:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3+xy\sin(x+y)}{x^2+y^2}=0$$

פתרון:

- יהי $\varepsilon>0$.
- נחפש $\delta>0$.
- נבחן את הביטוי:

$$\left|\frac{xy^3+xy\sin(x+y)}{x^2+y^2}\right|$$

- **טריק ראשון - הוצאת גורם משותף:**

$$\left|\frac{xy^3+xy\sin(x+y)}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\cdot\left|y^2+\sin(x+y)\right|$$

  – מכיוון שהביטוי $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}$, כי:

$$0\le(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

– אז נקבל שמתקיים:

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \cdot \left|y^2+\sin(x+y)\right| \leq \frac{1}{2}\left|y^2+\sin(x+y)\right|$$

* ולפי אי שוויון המשולש מתקיים:

$$\frac{1}{2}\left|y^2+\sin(x+y)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|y^2\right|+\left|\sin(x+y)\right|\right)$$

* נדרוש $|y| \leq 1$ ונקבל:

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left|y^2\right|+|x+y|\right)$$

$$\leq |x|+|y|$$

· נדרוש כל הביטוי הזה יהיה קטן מ-ε.

· כעת, (עבור סביבת מעוין) אם נבחר $\delta = min\{\varepsilon, 1\}$, אז לכל x, y המקיימים $0 < |x|+|y| < \delta$ יתקיים $|f(x,y)-0| < \varepsilon$

נושא שני - חישובי גבולות:

תרגיל 2.

• הראו כי:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ln\left(1+y^2|x|\right)}{x^2+y^2} = 0$$

פתרון:

• **טריק שני - סנדוויץ':**

– נסתכל על הערך המוחלט של הביטוי:

$$0\leq\left|\frac{ln\left(1+y^{2}\left|x\right|\right)}{x^{2}+y^{2}}\right|$$

* הוכחנו באינפי 1 שמתקיים $ln\left(1+x\right)\leq x$ ולכן:

$$\begin{aligned}\left|\frac{ln\left(1+y^{2}\left|x\right|\right)}{x^{2}+y^{2}}\right| & \leq\frac{y^{2}\left|x\right|}{x^{2}+y^{2}}\\ & \leq\frac{y^{2}\left|x\right|}{y^{2}}\\ & \leq\frac{\cancel{y^{2}}\left|x\right|}{\cancel{y^{2}}}\\ & \leq\left|x\right|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0\end{aligned}$$

· ולכן לפי משפט הסנדוויץ' מתקיים כי הגבול הוא 0.

הערה 3.

- במשתנה יחיד היינו לוקחים ביטוי כמו

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(xy\right)}{x^{2}+y^{2}}$$

– מחלקים אותו בxy כדי לקבל $\frac{1}{xy}\cdot\frac{\sin(xy)}{x^{2}+y^{2}}$ ואז מצמצמים את $\frac{\sin(xy)}{xy}$.

- אבל אסור לעשות את זה, כי לא בטוח שהפונקציה מוגדרת.

תרגיל 3:

- חשבו את הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan\left(x^{3}+y^{3}\right)}{\sin\left(x^{2}+y^{2}\right)}$$

- ננסה להיפטר מהביטויים הטריגונומטריים בעזרת סנדוויץ':

$$0\leq\left|\frac{\tan\left(x^{3}+y^{3}\right)}{\sin\left(x^{2}+y^{2}\right)}\right|\leq\left|\frac{1}{\cos\left(x^{3}+y^{3}\right)}\right|\cdot\left|\frac{\sin\left(x^{3}+y^{3}\right)}{\sin\left(x^{2}+y^{2}\right)}\right|$$

– מכיוון שהביטוי x^3+y^3 מתאפס רק בראשית, מותר לנו להכפיל ולחלק בו, ולכן נקבל:

$$\begin{aligned} 0 \le \left|\frac{1}{\cos\left(x^3+y^3\right)}\right| \cdot \left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}\right| &\le \left|\frac{1}{\cos\left(x^3+y^3\right)}\right| \cdot \left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}\right| \cdot \frac{\left(x^3+y^3\right)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)} \\ &\le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &\le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &\le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| \\ &\le |x|+|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \end{aligned}$$

תרגיל 4.

- **טריק שלישי - מעבר לקואורדינטות פולאריות:**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

פתרון:

- נעביר את הביטוי לקואורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} &= \frac{r^3\cos^3(\theta)+r^3\sin^3(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \overbrace{r}^{\to 0} \cdot \overbrace{\left(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right)}^{bounded} \end{aligned}$$

תרגיל 5:

חשבו את הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

פתרון:

- נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\cos^2(\theta)\,r\sin(\theta)}{r^4\cos(\theta)+r^2\sin(\theta)}$$
$$=\lim_{r\to0}\frac{r\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2\cos(\theta)+\sin(\theta)}$$

  - ונשים לב שאנחנו לא יודעים אם יש גבול לביטוי הזה ולכן נפנה לטריק אחר.

- **טריק רביעי - הוכחה שגבול לא קיים בעזרת מסלולים שונים:**
  - נבדוק על פני מסלולים (t,t):

$$\lim_{t\to0}\frac{t^3}{t^4+t^2}=\lim_{t\to0}\frac{t}{t^2+1}=0$$

  - נבדוק על פני מסלולים $\left(t,t^2\right)$:

$$\lim_{t\to0}\frac{t^4}{t^4+t^4}=\frac{1}{2}$$

  - קיבלנו שהגבול תלוי במסלול ולכן הגבול לא קיים.

תרגיל 6:

- נתונה פונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-1}{y-x^2} & y\neq x^2\\ 1 & y=x^2\end{cases}$$

- האם $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(1,1)$?

פתרון:

- כדי לשלול רציפות, מספיק לנו להראות שהגבול לא שווה ל-1.
  - נחפש מסלול שעבורו הגבול שונה מ-1:
    - ניקח מסלול $(1,t)$:

$$\lim_{t\to1}\frac{1-1}{t-1}=0$$

- כלומר הפונקציה שווה זהותית לאפס.
- ולכן:

$$\lim_{t\to 1} f(1,t) = 0 \neq f(1,1)$$

- והפונקציה אינה רציפה ב-$(1,1)$.

תרגיל 7:

- **טריק חמישי - הצבה על מנת לפשט ביטוי:**
- נבדקו האם $f(x,y)$ רציפה ב$(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^3+y^3} & x \neq -y \\ 0 & x = -y \end{cases}$$

פתרון:

- נסמן $x = t$ ונסמן $t = \sqrt[3]{t^4 - t^3}$ ונקבל:

$$f\left(t, \sqrt[3]{t^4-t^3}\right) = \frac{t^4}{t^3+t^4-t^3} = 1$$

  - מצאנו מסלול שבו הגבול אינו 0 ולכן הגבול אינו קיים והפונקציה אינה רציפה בראשית.

תרגיל 8:

- תהי $f(x,y)$ מוגדרת לכל $(x,y) \neq (0,0)$ המקיימת:

$$f(tx,tx) = f(x,y)$$

  - לכל $t > 0$
- הוכיחו שאם הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ קיים אז הפונקציה קבועה.

פתרון:

- נסתכל על פני מסלול (t,t):

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} f(t\cdot 1, t\cdot 1) = \lim_{t\to 0} f(1,1) \overbrace{=}^{Constant} f(1,1)$$

  - כי לפי הנתון מתקיים $f(tx,ty) = f(x,y)$

- יהיו $(a,b) \neq (1,1), (0,0)$ ונסתכל על מסלול (at,bt):

$$\lim_{t\to 0} f(at,bt) = \lim_{t\to 0} f(a,b) \overbrace{=}^{Constant} f(a,b)$$

- מכיוון שהפונקציה מוגדרת ב(a,b) וב-$(1,1)$ אז הגבול קיים.
  - ולכן התוצאות של הגבולות חייבות להיות זהות לכל (a,b):

$$f(a,b) = f(1,1)$$

- ולכן f זו פונקציה קבועה.

נושא שלישי - נגזרות חלקיות:

תזכורת:

$$f_x(x,y) = f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

הגדרה 4. גזירות פונקציה בנקודה.

- נאמר כי $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ גזירה בנקודה (x_0,y_0) כך ש$(x_0,y_0) \in D$ נקודה פנימית אמ"מ קיימים שני קובעים A ו-B ופונקציה $\varepsilon(x,y)$ המקיימת $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0$ וגם:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + \varepsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

- אם f גזירה אז $A = f_x(x_0,y_0)$ ו-$B = f_y(x_0,y_0)$.

תנאים הכרחיים לגזירות:

1. הפונקציה רציפה

2. קיימות נגזרות חלקיות

תנאי מספיק אך לא הכרחי לגזירות:

1. נגזרות חלקיות רציפות.

אלגוריתם לבדוק האם $f\left(x,y\right)$ גזירה בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$:

1. האם $f\left(x,y\right)$ רציפה ב$\left(x_0,y_0\right)$? אם לא, אז היא לא גזירה שם.
2. האם קיימות נגזרות חלקיות? אם לא, אז היא לא גזירה שם.
   (א) אם הן קיימות ורציפות אז היא גזירה בנקודה. לא תמיד כדאי לבדוק.
   (ב) אם הן לא רציפות אז מחפשים את הגבול $\lim_{(x_0,y_0)\to(x,y)}\varepsilon\left(x,y\right)$ ובודקים האם הוא שווה לאפס.

תרגיל 9:

- נתונה $f\left(x,y\right)$:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy^3+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^k} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

- בדקו האם $f\left(x,y\right)$ גזירה ב$\left(0,0\right)$ עבור $k=1,\frac{3}{2},2$

פתרון:

1. נתחיל מלבדוק רציפות של הפונקציה ב$\left(0,0\right)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)=\lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^4\left(\theta\right)\sin^3\left(\theta\right)+r^4\sin^4\left(\theta\right)}{\left(r\right)^{2k}}$$

$$0\leq\left|\frac{r^4\cos^4\left(\theta\right)\sin^3\left(\theta\right)+r^4\sin^4\left(\theta\right)}{\left(r\right)^{2k}}\right|\leq2r^{4-2k}$$

- כלומר עבור $k=1,\frac{3}{2}$ אנחנו נקבל r בחזקה חיובית כאשר $r\to0$
  - ולכן עבורם $f\left(x,y\right)$ בהכרח תהיה רציפה ב$\left(0,0\right)$.
- אנחנו עוד לא יודעים מה קורה כאשר $k=2$ ולכן נבדוק עבורו בנפרד האם הפונקציה רציפה ב$\left(0,0\right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{r^4\cos^4\left(\theta\right)\sin^3\left(\theta\right)+r^4\sin^4\left(\theta\right)}{r^4}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos^4\left(\theta\right)\sin^3\left(\theta\right)+\sin^4\left(\theta\right)\end{aligned}$$

- תוצאת הגבול תלויה בזוית שנבחר ולכן הגבול לא קיים.
  * כלומר עבור $k=2$ הפונקציה לא רציפה בראשית.
    · לכן נסיק כי עבור $k=2$ הפונקציה גם לא גזירה בראשית.

2. נבדוק קיום נגזרות חלקיות בראשית:

- נגזרת חלקית לפי x, לפי הגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}$$

- נגזרת חלקית לפי y לפי הגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}h^{3-2k}=\begin{cases}0 & k=1\\ 1 & k=\frac{3}{2}\end{cases}$$

- יש לציין כי לא חישבנו את הנגזרות החלקיות אלא רק ערך מסוים שלהן בנקודות מסוימות ולכן לא נבדוק האם הן רציפות.

3. נחשב את הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y)$:

- לפי הגדרת הנגזרת:

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

- לפי החישובים של הנגזרות החלקיות ולפי הגדרת f מתקיים:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\overbrace{f(0,0)}^{=0}+\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}^{=0}+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}\\&=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

- עבור $k=\frac{3}{2}$ מתקיים:

$$f(x,y)=\frac{xy^3+y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=y+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

  * ולכן:

$$\varepsilon(x,y)=\frac{xy^3+y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- נשים לב שאם נעבור לקואורדינטות פולאריות אז היינו מקבלים שהגבול הזה לא קיים.
- בצורה נוחה יותר אפשר ללכת על מסלולים מהצורה (t,mt) ולקבל:

$$\lim_{t\to0}\varepsilon\left(t,mt\right)=\lim_{t\to0}\frac{m^{3}+m^{4}}{\left(1+m^{2}\right)^{2}}-\frac{m}{\sqrt{1+m^{2}}}$$

- כלומר התוצאה תלויה בבחירת המסלול ולכן הגבול לא קיים (אפשר גם לראות שניתן להגיע לתוצאה שבה הגבול אינו 0).
- לכן הפונקציה לא גזירה ב$(0,0)$ עבור $k=\frac{3}{2}$.

– עבור $k=1$ מתקיים:

$$f\left(x,y\right)=\frac{xy^{3}+y^{4}}{x^{2}+y^{2}}=0+\varepsilon\left(x,y\right)\cdot\sqrt{x^{2}+y^{2}}$$

* ולכן:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon\left(x,y\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^{3}+y^{4}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=0$$

* כלומר עבור $k=1$ מתקיים כי $f\left(x,y\right)$ גזירה ב$(0,0)$

נושא רביעי נגזרת מכוונת וגרדיאנט:

הגדרה 5. נגזרת מכוונת.

- תהי $f\left(x,t\right)$ המוגדרת בסביבה של (x_0,y_0).
- יהי $\overline{n}=\left(n_1,n_2\right)$ וקטור יחידה.
- נגזרת מכוונת בכיוון $\overline{n}$ בנקודה (x_0,y_0) מוגדרת:

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{n}}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_{0}+n_{1}h,y_{0}+n_{2}h\right)-f\left(x_{0},y_{0}\right)}{h}$$

משפט 6. משפט הגרדיאנט:

- אם $f\left(x,y\right)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0) אז מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{n}}\left(x_{0},y_{0}\right)=\nabla f\left(x_{0},y_{0}\right)\cdot\overline{n}$$

הערה 7. לרוב נשתמש במשפט הגרדיאנט על ידי כך שנראה שהנגזרות החלקיות רציפות ואז מתקיים המשפט.

תרגיל 10 - נראה את ההיפוך של משפט הגרדיאנט:

תהי פונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{2}y}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

1. מצאו נגזרות חלקיות ב$(0,0)$ בכיוון $\overline{n}=\left(n_{1},n_{2}\right)$
2. האם f גזירה ב$(0,0)$?

פתרון:

- נבחן את הגבול:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\overline{n}}\left(0,0\right) & =\lim_{h\rightarrow0}\frac{f\left(n_{1}h,n_{2}h\right)-f\left(0,0\right)}{h}\\ & =\lim_{h\rightarrow0}\frac{\frac{n_{1}^{2}n_{2}h^{3}}{\left(n_{1}^{2}+n_{2}^{2}\right)h^{2}}}{h}=n_{1}^{2}n_{2}\end{aligned}$$

- נמצא את הגרדיאנט של f ב$(0,0)$ כדי לשלול גזירות:

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(f_{x},f_{y}\right)|_{\left(0,0\right)}$$

  – ניתן להתייחס לנגזרת חלקית לפי x כנגזרת לפי וקטור גרדיאנט $(1,0)$:

$$f_{x}\left(0,0\right)=\frac{\partial f}{\partial\left(1,0\right)}=0$$

$$f_{y}\left(0,0\right)=\frac{\partial f}{\partial\left(0,1\right)}=0$$

  – כלומר מתקיים:

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$$

* ולכן אם $f\left(x,y\right)$ הייתה גזירה בנקודה $\left(0,0\right)$ אזי הנגזרת המכוונת בכיוון $\overline{n}$ כלשהו הייתה שווה למכפלה הסקלרית בין הגרדיאנט ובין $\overline{n}$:

$$n_1^2n_2\overbrace{=}^{We\ found\ by\ definition}\frac{\partial f}{\partial\overline{n}}\left(0,0\right)=\nabla f\cdot\left(n_1,n_2\right)=0$$

· השוויון הזה לא מתקיים ולכן $f\left(x,t\right)$ אינה גזירה ב$\left(0,0\right)$.

תרגיל 11:

- תהי $f\left(x,y\right)$ המוגדרת לכל $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ המקיימת $f\left(tx,ty\right)=f\left(x,y\right)$ לכל $t\neq0$ ולכל $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$
- בנוסף נתון כי קיימת נגזרת מכוונת ב$\left(0,0\right)$ בכל כיוון.
- **צ"ל:** הפונקציה $f\left(x,y\right)$ קבועה.

פתרון:

- הנגזרת המכוונת בראשית בכיוון $\overline{n}=\left(n_1,n_2\right)$:

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(n_1h,n_2h\right)-f\left(0,0\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(n_1,n_2\right)-f\left(0,0\right)}{h}$$

– המכנה שואף לאפס והמונה הוא קבוע.

* אך מכיוון שנתון כי הגבול הזה קיים (וסופי), הוא חייב להיות זהותית אפס.

· כלומר:

$$f\left(n_1,n_2\right)=f\left(0,0\right)$$

- תהי נקודה $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$.
- נראה כי $f\left(x,y\right)=f\left(0,0\right)$:

– לכל $\left(x,y\right)$ ניתן לכתוב $\left(x,y\right)=t\cdot\left(x_1,y_1\right)$ כך שיתקיים $x_1+y_1=1$:

$$t=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x_1=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

– ואז יתקיים לפי הנתון:

$$f(x,y) = f(tx_1, ty_1) = f(x_1, y_1) = f(0,0)$$