הסתברות מ' (00094412) | תרגול 3

שם: איל

February 1, 2024

נושא התרגול: מידות הסתברות מוכרות

נושא ראשון - רקע על מידת הסתברות גאומטרית

מידת הסתברות בינומית:

- ההסתברות לקבל בדיוק k הצלחות ב-n ניסויי ברנולי בלתי תלויים.
- $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$
- $P(\{k\}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

מידת הסתברות גאומטרית:

- ההסתברות שיהיו בדיוק k ניסיונות עד להצלחה הראשונה (כולל).
  - למידת ההסתברות הגאומטרית יש תכונה בשם חוסר זיכרון:

$$P(\{m+k\} \mid no\ success\ until\ m_{th}\ try) = p(\{k\}) = q^{k-1} \cdot p$$

מידת הסתברות בינומית שלילית:

- ההסתברות ל-k ניסויי ברנולי בלתי תלויים ע להצלחה ה-m:

$$P(m_{th}\ success\ happened\ in\ k_{th}\ trial) = P\left(\overbrace{m-1\ success\ in\ k-1\ trials}^{=A} \cap \overbrace{success\ in\ k_{th}\ trial}^{=B}\right)$$

$$= \underbrace{\binom{k-1}{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot q^{k-m}}_{=A} \cdot \underbrace{p}_{=B}$$

מידת הסתברות פואסונית:

- משמשת לקירובים:

$$P\left(\{k\}\right)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}$$

מידת ההסתברות ההיפר-גאומטרית:

- בכד N כדורים, מתוכם G כדורים שחורים. מוציאים n באקראי ללא החזרה.
- ההסתברות לקבל $\{k\}$ כדורים שחורים:

$$P\left(\{k\}\right)=\frac{\binom{G}{k}\cdot\binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- אם היינו מחזירים את הכדורים אז זו הייתה מידת ההסתברות הבינומית הרגילה.
- $\Omega=\{\max\{0,n-(N-G)\},\ldots,\min\{G,N\}\}$
  - מספר הכדורים השחורים המינימלי שאפשר להוציא הוא $\max\{0,n-(N-G)\}$ כי:
    - אם $N-G\geq n$ אז 0
    - אם $N-G<n$ אז $n-(N-G)$
  - מספר הכדורים השחורים המקסימלי שאפשר להוציא הוא $\min\{n,G\}$ כי:
    - אם $G\leq n$ אז G
    - אם $G>n$ אז n
- כלומר אפשר לכתוב את מרחב המדגם שלנו:

$$\Omega=\left\{\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\ :\ \alpha_i\in\{1,\ldots,N\},\ \alpha_i\neq\alpha_j\ \ \forall\, i\neq j\right\}$$

$$|\Omega|=\binom{N}{n}$$

שני קירובים שכדאי להכיר:

1. **קירוב פואסוני למידת ההסתברות הבינומית:**

- אם n גדול ו-p קטן, אז ניתן לקרב מידת הסתברות בינומית באמצעות מידת הסתברות פואסונית.

2. **קירוב בינומי למידת הסתברות היפר גאומטרית:**

- אמרנו שהמודל ההיפר-גאומטרי מאוד דומה למודל הבינומי וההבדל הוא בהחזרה או ללא החזרה.
- אם $G,N-G$ גדולים ביחס ל-n אז ניתן לקרב עם מידת הסתברות עם פרמטרים $n,p=\frac{G}{N}$.

נושא שני - תרגילים:

תרגיל 1.

ישנו מטבע לא הוגן כאשר הסיכוי ל- H הוא p.

מטילים אותו 4 פעמים, כאשר ההטלות בלתי תלויות אחת בשנייה.

אחרי זה יוצאים להפסקה, חוזרים ומטילים אותו עוד פעמיים (ושוב ההטלות בלתי תלויות).

סה"כ מטילים את המטבע 6 פעמים.

א. מה ההסתברות לתוצאה (H,H,T,H,H,T)?

א. פיתרון:

- זהו ניסוי ברנולי כאשר ההסתברות לקבל H היא p וההסתברות לקבל T היא q.
- נסמן מאורע $A=(HHTHHT)$:

$$P\left(A\right)=p\cdot p\cdot q\cdot p\cdot p\cdot q=p^{4}\cdot q^{2}$$

ב. מה ההסתברות לקבל 4 פעמים H ופעמיים T?

ב. פיתרון:

- נסמן את המאורע B להיות ארבע פעמים H ועוד פעמיים T.
- מידת ההסתברות היא הבינומית כי אנחנו מחפשים כמות הצלחות מסוימת:

$$P\left(B\right)=\binom{6}{4}p^{4}q^{2}$$

ג. מה ההסתברות לקבל את ה-H לפני ההפסקה?

ג. פיתרון:

- כלומר, מה ההסתברות לקבל לפחות H אחד ב-4 ההטלות הראשונות.
- נסמן מאורע C = התקבל לפחות H אחת ב-4 ההטלות הראשונות.
  - נשתמש במשלים - C^{c} כלומר לא התקבלו בכלל H בארבעת ההטלות הראשונות:

$$P\left(C^{c}\right)=1-\overbrace{q\cdot q\cdot q\cdot q}^{four\ \ fails}=1-q^{4}$$

ד. אם ידוע שעד ההפסקה לא התקבל אף H, מה ההסתברות לקבל אותו רק בהטלה השישית?

ד. פיתרון:

- נסמן מאורע D = התקבל H בהטלה ה-6.
- נסמן מאורע F = לא התקבלו H עד ההטלה ה-4
- אנחנו צריכים את תכונת חוסר הזיכרון של מידת ההסתברות הגאומטרית
  - מ"חוסר זיכרון" עם $m = 4$ ו-$k = 2$:

$$P\left(D|F\right) = q^1 \cdot p$$

ה. מה ההסתברות שההצלחה השנייה תתקבל בהטלה החמישית?

ה. פיתרון:

- נסמן מאורע E - הצלחה שנייה בהטלה חמישית.
- אנחנו צריכים להשתמש במידה הבינומית השלילית כי אנחנו ניסויים עד לכמות הצלחות מסוימת:

$$P\left(E\right) = \binom{5-1}{2-1} \cdot p^2 \cdot q^3$$

תרגיל 2. (שאלה ברמה של מבחן)

סר לנסלוט וסר גלהאד משתתפים בדו קרב שבו הם מנסים לפגוע אחד בשני כשהם יורים בו זמנית.

סיכויי הפגיעה של סר לנסלוט הם $\frac{1}{2}$ ושל סר גלהאד $\frac{1}{4}$.

כל היריות בלתי תלויות (גם בין לנסלוט וגלהאד וגם בין הסבבים).

א. מהי ההסתברות שהדו קרב יסתיים בסיבוב ה-n? (כלומר ביריה ה-n של סר גלהאד או ביריה ה-n של סר לנסלוט)?

ב. אם ידוע כי לאחר m סיבובים הדו קרב לא הסתיים, מה הסיכוי שהדו קרב יסתיים בדיוק בסיבוב השני לאחר מכן, כלומר בסיבוב ה-$m + 2$?

ג. מהי ההסתברות שסר לנסלוט יזכה בדו קרב (יישאר חי ויהרוג את גלהאד)?

ד. מהי ההסתברות שסר גלהאד ינצח בדו קרב?

א. פיתרון:

- **צ"ל**: ההסתברות שהדו קרב יסתיים בסיבוב ה-n.
- השאלה מזכירה לנו את המידה הגאומטרית, אבל צריך להגדיר הצלחה/כישלון:
  - נגדיר הצלחה/כישלון בסבב:
    - S = הצלחה = אחד מהם פגע

* F= כישלון = אף אחד מהם לא פגע

- מתקיים:

$$P(F)=\overbrace{\frac{1}{2}}^{L\ \ hit}\cdot\overbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)}^{G\ \ missed}=\frac{3}{8}$$

$$P(S)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

– נסמן מאורע A = הדו קרב יסתיים בסיבוב ה-n:

$$P(A)=\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\frac{5}{8}$$

ב. פיתרון:

- מכיוון שידוע כי לאחר m סיבובים הדו קרב לא הסתיים, זה מזכיר לנו את תכונת חוסר הזיכרון של המודל הגאומטרי.
- ולכן צ"ל: ההסתברות שהדו קרב הסתיים אחרי $m+2$ סיבובים בהינתן שהוא לא הסתיים אחרי m סיבובים:

$$P\left(duel\ \ ended\ \ after\ \ m\ \ turns\ \mid\ didn't\ \ end\ \ after\ \ m\ \ turns\right)=\overbrace{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}}^{P(ended\ \ after\ \ 2\ \ roumds)}$$

ג. פיתרון:

- נגדיר מאורעות:
  – A = המאורע שלנסלוט זכה בדו קרב.
    * A_n = לנסלוט זכה בסיבוב ה-n (כלומר היה תיקו עד הסיבוב ה$n-1$ ואז הוא זכה בסיבוב ה-n).
    * הקשר בין A_n ובין A הוא:

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

    * נחשב את $P(A)$:

$$P(A)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

- נשים לב שהמאורעות A_n זרים ולכן מתקיים:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

- נחשב את $P(A_n)$ (כלומר היה תיקו ב $n-1$ ניסיונות):

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \overbrace{(P(F))^{n-1}}^{Tie,\ they\ both\ missed\ in\ n-1\ rounds} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{Lancelot\ hit} \cdot \overbrace{\frac{3}{4}}^{G\ missed} \\ &= \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \left(\frac{3}{8}\right)^{n} \end{aligned}$$

- ולכן מתקיים:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^{n} = \frac{3}{5}$$

ד. פיתרון:

- דומה לסעיף ג'.

תרגיל 3. (לא נחשבת שאלה קשה)

ציפקה מעבירה בעגלה 500 ביצים מהלול לחדר האוכל.

בלול כל הביצים נבדקו וכולן נמצאו שלמות.

לכל אחת מהביצים ההסתברות להישבר בדרך היא 0.002 וכל ביצה נשברת באופן בלתי תלוי בביצים האחרות.

מצאו **(בקירוב)** את ההסתברות לכך שבנסיעה תישברנה:

א. בדיוק 3 ביצים

ב. פחות מ-3 ביצים

ג. יותר מ-3 ביצים

ד. לפחות ביצה אחת

פיתרון:

- נאמר שכל הניסויים בלתי תלויים עם הצלחה וכישלון (כלומר ניסוי ברנולי).

א. פיתרון:

- נגדיר הצלחה = ביצה נשברת.

- נשתמש במידה הבינומית עם $n=500$, $p=\frac{1}{500}$

- נסמן את המאורע A = נשברו בדיוק 3 ביצים:

$$P\left(A\right)=\binom{500}{3}\cdot\left(\frac{1}{500}\right)^{3}\cdot\left(\frac{499}{500}\right)^{497}$$

- מכיוון שהשאלה דרשה למצוא קירוב וגם n גדול מאוד, נחשב בעזרת הקירוב הפואסוני עם הפרמטר $\lambda=n\cdot p=1$:

$$P\left(A\right)=\binom{500}{3}\cdot\left(\frac{1}{500}\right)^{3}\cdot\left(\frac{499}{500}\right)^{497}\approx\frac{e^{-1}\cdot1^{3}}{3!}=\frac{e^{-1}}{3!}$$

ב. פיתרון:

- נסמן את המאורע B = נשברו פחות מ-3 ביצים.
- האפשרויות לשבירה של פחות מ-3 ביצים הן: 0,1,2.
  - אלה מאורעות זרים ולכן ההסתברות לשבירה של פחות מ-3 ביצים, לפי המודל הבינומי ($n=500,\ p=\frac{1}{500}$):

$$P\left(B\right)=P\left(0\right)+P\left(1\right)+P\left(2\right)$$

* לפי הקירוב הפואסנוי:

$$P\left(0\right)\approx\frac{e^{-1}\cdot1^{0}}{0!}$$

$$P\left(1\right)\approx\frac{e^{-1}\cdot1^{1}}{1!}$$

$$P\left(2\right)\approx\frac{e^{-1}\cdot1^{2}}{2!}$$

* נסכום ונקבל:

$$P\left(0\right)+P\left(1\right)+P\left(2\right)\approx\frac{e^{-1}\cdot1^{0}}{0!}+\frac{e^{-1}\cdot1^{1}}{1!}+\frac{e^{-1}\cdot1^{2}}{2!}=0.91$$

ג. פיתרון:

- נסמן מאורע C = נשברו יותר מ-3 ביצים.

- נשתמש במשלים C^c, שאותו אפשר לחשב על ידי חיבור של סעיף א' וסעיף ב':

$$\begin{aligned}P(C) &= 1-P(C^c)\\ &= 1-P(A)-P(B)\\ &= 0.019\end{aligned}$$

ד. פיתרון:

- נסמן D= המאורע שנשברה לפחות ביצה אחת.
- מתקיים $P(D^c)=1-P(0)$, כלומר המשלים של המאורע "נשברו 0 ביצים":

$$\begin{aligned}P(D) &= 1-P(D^c)\\ &= 1-(1-P(0))\\ &\approx 1-\left(1-\frac{e^{-1}\cdot 1^0}{0!}\right)\\ &= 0.632\end{aligned}$$

תרגיל 4. (לא נחשבת שאלה קשה)
בפקולטה למדעי המחשב בטכניון 2000 סטודנטים, ובפקולטה לתעשייה וניהול 1000 סטודנטים.
מגרילים 10 כרטיסי הגרלה של אס"ט בין כלל הסטודנטים בפקולטה למדעי המחשב ובפקולטה לתעשייה וניהול.
מה הסיכוי שבדיוק מחצית מהסטודנטים שזכו בכרטיסי הגרלה הם מהפקולטה למדעי המחשב?
פיתרון:

- סה"כ יש לנו 3000 סטודנטים, מתוכם 2000 ממדמ"ח ו-1000מתעשייה וניהול.
  - מגרילים 10 כרטיסים באקראי
- נסמן A = המאורע בו 5 מדמ"חיסטים קיבלו כרטיס (חלוקת הכרטיסים היא ללא החזרה).
  - זה מזכיר לנו את ההיפר גאומטרית עם $G=2000, N=3000$, $n=10$, $k=5$.
    - אנחנו מחפשים את $P(\{5\})$:

$$P(A)=\frac{\binom{2000}{5}\cdot\binom{1000}{5}}{\binom{3000}{10}}=0.1365641$$

* נשים לב שמכיוון שמספר הסטודנטים הכולל שלנו הוא גדול ביחס לכמות הכרטיסים ולכן ניתן להתייחס לשאלה עם המידה הבינומית ($p=\frac{2}{3}$):

$$P(A)\approx\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}=0.135645$$

· קיבלנו ששתי התוצאות דומות מאוד.

* במבחן אפשר לכתוב שאנחנו מבינים שהמודל הוא היפר-גאומטרי ומכיוון שהקבוצות גדולות וה-n קטן אז אפשר לקרב בעזרת המודל הבינומי. לא לפתור ישר בעזרת הבינומי בלי הסבר.

תרגיל 5. (שאלה ברמה של סעיף במבחן)
משדרים אות באורך 8 סיביות.
ההסתברות שיחול שיבוש בשידור של סיבית כלשהי היא 0.1 ללא תלות בסיביות אחרות.
ידוע שלא ניתן לשחזר את האות אם חלו שיבושים בלפחות שתי סיביות עוקבות, אחרת, כן ניתן לשחזר.
מהי ההסתברות שהאות ישוחזר?
פיתרון:

* נתון שאי אפשר לשחזר אמ"מ יש שיבוש בשתי סיביות עוקבות (ומעלה).
* נסמן: מאורע A = האות ישוחזר.
  - **צ"ל:** $P(A)$.
* נסמן: מאורע D_k = שובשו k סיביות בדיוק. ההסתברות הזו תחושב לפי המודל הבינומי.
* נשים לב שאם שובשו מעל 4 סיביות, אז המאורע A לא יכול להתקיים.
  - יהיה יותר נוח לפתור את $P(A)$ בעזרת D_k ולכן נפתור בעזרת ההסתברות השלמה:

$$P(A)=\sum_{k=0}^{8}P(A\mid D_k)\cdot P(D_k)$$

* לפי המודל הבינומי עם $n=8$, $p=0.1$ נקבל:

$$P(D_k)=\binom{8}{k}\cdot(0.1)^{k}\cdot(0.9)^{8-k}$$

– נפצל למקרים:

$$P(A\mid D_k)=\begin{cases}1 & k=0,1\\ ? & k=2,3,4\\ 0 & k=5,6,7,8\end{cases}$$

* נחשב את $P\left(A \mid D_k\right)$ עבור $k=2,3,4$:
  - נשתמש בהגדרה של הסתברות מותנית:

$$P\left(A \mid D_k\right) = \frac{\overbrace{P\left(A\cap D_k\right)}^{k\ \ interferences\ \ and\ \ signal\ \ recovered}}{P\left(D_k\right)}$$

  - נניח שיש לנו שלושה סיבים משובשים. כלומר יש חמישה סיבים תקינים. יש 6 מקומות למקם אותם:
  - יש $(8-k-1)$ מקומות ביניהם לשים את הסיבים ועוד שני מקומות בקצוות.
  - כלומר בסה"כ יש $8-k+1=8-k-1+2$ מקומות לשים את הביטים המשובשים.
  - ולכן:

$$P\left(A\cap D_k\right) = \overbrace{\binom{8-k+1}{k}}^{All\ \ possible\ \ patterns\ \ of\ \ k\ \ messed\ \ up\ \ bits} (0.1)^k\cdot(0.9)^{8-k}$$

  - נציב זאת כדי לקבל:

$$P\left(A \mid D_k\right) = \frac{\binom{8-k+1}{k}(0.1)^k\cdot(0.9)^{8-k}}{P\left(D_k\right)}$$

– קיבלנו:

$$\begin{aligned}
P\left(A\right) &= \sum_{k=0}^{8}\frac{\binom{8-k+1}{k}(0.1)^k\cdot(0.9)^{8-k}}{P\left(D_k\right)}\cdot P\left(D_k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{8}\frac{\binom{8-k+1}{k}(0.1)^k\cdot(0.9)^{8-k}}{\cancel{P\left(D_k\right)}}\cdot \cancel{P\left(D_k\right)}\\
&= \sum_{k=0}^{8}\binom{8-k+1}{k}(0.1)^k\cdot(0.9)^{8-k}
\end{aligned}$$