אינפי 1מ' (104031) | תרגול 7 - יוליה

שם: איל שטיין | ת"ז: 208622142

November 14, 2022

נושאי השיעור: גבול סדרת הממוצעים (ממוצע הנדסי, חשבוני והרמוני)

תרגיל 1.

- תהי a_n סדרה המתכנסת במובן הרחב (כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר $L = \pm\infty$ או $L \in \mathbb{R}$)
- **צ"ל:** הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ כאשר $b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ (במילים אחרות, הוכיחו שהסדרה של הממוצע החשבוני של a_n גם מתכנסת)

נוכיח עבור $L = 0$.

צ"ל: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right) = 0$

הוכחה.

- יהי $\varepsilon > 0$. נחפש N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - 0\right| < \varepsilon$.
- על פי הנתון $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  - לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
- נבחן את הביטוי:

$$\frac{|a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1} + a_{N+1} + \ldots a_n|}{n}$$

  - לפי אי שוויון המשולש מתקיים:

$$\frac{|a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1} + a_{N+1} + \ldots a_n|}{n} \leq \overbrace{\frac{|a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1}|}{n}}^{(1)} + \overbrace{\frac{|a_{N+1} + \ldots a_n|}{n}}^{(2)}$$

  - נסמן: $(1)\ \frac{|a_1+a_2+\ldots+a_{N_1}|}{n}$ $\quad$ (2) $\frac{|a_{N+1}+\ldots a_n|}{n}$

* ניצור מערכות אי שוויון בין (1), (2) ובין ε באופן הבא:
  - כל איברי הסדרה שב(2), כלומר $\left(a_{N+1}+\ldots a_n\right)$, באים בסדרה אחרי האיברים ב(1), כלומר $\left(a_1+a_2+\ldots+a_{N_1}\right)$.
  - הראנו למעלה שלכל $n>N_1$ מתקיים $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$
  - לכן מתקיים בפרט עבור (1):

$$\left|a_1+a_2+\ldots+a_{N_1}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(N_1\right)$$

וגם בפרט עבור (2):

$$\left|a_{(N_1+1)}+\ldots a_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(n-N_1\right)$$

– נבחן את ביטוי (2).

* לפי "אי שוויון המשולש" מתקיים בו:

$$\frac{\left|a_{N+1}+\ldots a_n\right|}{n}\leq\frac{\left|a_{N+1}\right|+\ldots+\left|a_n\right|}{n}$$

* נוסיף את אי השוויון שראינו למעלה, $\left|a_{(N_1+1)}+\ldots a_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(n-N_1\right)$ ונקבל:

$$\frac{\left|a_{N+1}\right|+\ldots+\left|a_n\right|}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{\varepsilon\left(n-N_1\right)}{2}<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

– נבחן את ביטוי (1):

* ביטוי (1) מורכב ממספר סופי של איברים: $\frac{\left|a_1+a_2+\ldots+a_{N_1}\right|}{n}$
  - לכן ניתן לומר שהוא שווה למספר קבוע $c\in\mathbb{R}$. ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_1+a_2+\ldots+a_{N_1}\right|}{n}=c\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

* לכן הסדרה מתכנסת ולכל $\varepsilon>0$ קיים N_2 כך שלכל $n>N_2$ מתקיים:

$$0\leq\frac{c}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

– ראינו שביטוי מספר (1) קטן מ-$\frac{\varepsilon}{2}$ כאשר $n>N_2$ וביטוי מספר (2) קטן מ-$\frac{\varepsilon}{2}$ כאשר $n>N_1$.

* הם שני חלקים של אותו ביטוי ולכן אפשר לחבר את שניהם ביחד:
  - עבור $N=max\left\{N_1,N_2\right\}$ לכל $n>N$ מתקיים

$$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-0\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

- לסיכום, הוכחנו שאם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)=0$.

■

עד כאן הוכחה למקרה שבו $L=0$.

הוכחה שנייה: נבחן מקרה בו $L\neq 0$.

- נגדיר $c_n=(a_n-L)$.
  – לפי חשבון גבולות

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-L)=\overbrace{\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)}^{=L}-L=0$$

* כלומר,

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-L)=0$$

  – בהוכחה הקודמת ראינו שאם $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\right)=0$
* לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\right)=0$$

· נציב בחזרה את $c_n=(a_n-L)$ ונקבל:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-L)+(a_2-L)+\ldots+(a_n-L)}{n}$$

· נפתח את הסוגריים ונקבץ את כל ה-L לצד ימין:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)-n\cdot L}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n}-L=0$$

למה. טענת עזר: אם $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ ו- $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

- מתקיימים:

1. $\lim_{n\to\infty} L = L$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n}-L\right)=0$

- לכן לפי טענת העזר ממשפטי חשבון גבולות מתקיים ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=L$

- לסיכום, הוכחנו שאם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אז $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)=L$.

תרגיל 2.
תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty}a_n=L$, כאשר $L\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$ והוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a}_1+\frac{1}{a}_2+\ldots+\frac{1}{a}_n}=L$

הוכחה.

- לפי משפטי חשבון גבולות, אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{L}$ (כל עוד $L\neq 0$)
  - לכן, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{a}_1+\frac{1}{a}_2+\ldots+\frac{1}{a}_n}{n}\right)=\frac{\overbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}}^{n\ \ times}}{n}=\frac{L\cdot n}{n}=L$
  - ובאותה דרך גם $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\frac{1}{a}_1+\frac{1}{a}_2+\ldots+\frac{1}{a}_n}\right)=L$
- במקרה שבו $L=0$, נקבל $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$
  - ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a}_1+\frac{1}{a}_2+\ldots+\frac{1}{a}_n}{n}=\frac{\overbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}}^{n\ \ times}}{n}=\infty$
  - ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a}1+\frac{1}{a}2+\ldots+\frac{1}{a}n}=\frac{n}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}}_{n\ \ times}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\infty}=0$$

- הוכחנו שאם a_n סדרה חיובית ו-$L\in\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אז מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a}_1+\frac{1}{a}_2+\ldots+\frac{1}{a}_n}=L$
- לפי אי שוויון הממוצעים ומשפט הסנדוויץ אפשר להסיק ש $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=L$

■

תרגיל 3. חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[n]{n}}{n}$
פיתרון:

- נגדיר $a_n=\sqrt[n]{n}$ ונקבל שלכל $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[n]{n}}{n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

- מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, לפי הטענה שהוכחנו על גבול הממוצעים הסדרה הנתונה גם שואפת ל-1.

למה. טענה שנשתמש בה בתרגיל הקרוב: תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ (הוכחנו בהרצאה)

משפט. מבחן המנה:
תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$
אז:

1. אם $0 \le L < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. אם $L > 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
3. אם $L = 1$ אז המבחן לא נותן מידע

משפט. מבחן השורש. אותו דבר, רק עם "תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$".

תרגיל 4.

- יהי $c > 0$. **צ"ל:** חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!}$

- נסמן $0 < a_n = \frac{c^n}{n!}$
  - ניתן להשתמש במבחן המנה מכיוון שהסדרה a_n תמיד חיובית.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{c^n}\right) = 0 < 1$
- $0 < 1$ ולכן לפי מבחן המנה מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$

תרגיל 5. יהי $c > 0$. יהי $k \in \mathbb{N}$, $q > 0$.

- נגדיר:
  1. $a_n = n^k \cdot q^n$
  2. $a_n > 0$
- מכיוון ש $a_n > 0$ נשתמש במבחן השורש:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^k} \cdot q = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k \cdot q$$

  - נמצא את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \overbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k}^{=1} \cdot \overbrace{\lim_{n\to\infty} q}^{=q}$$

– $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^k=1$ בגלל אי שוויון הממוצעים.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$$

• לפי מבחן השורש יוצא ש:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0 & 0<q<1\\ \infty & q\geq 1\end{cases}$$

– ואם $q=1$ אז $\lim_{n\to\infty}n^k\cdot 1=\infty$